



Universidade Federal do ABC



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

AURÉLIO OLIVEIRA DOS SANTOS SILVA

PAPÉIS DE PAREDE E AS OBRAS DE ESCHER

Santo André, 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

AURÉLIO OLIVEIRA DOS SANTOS SILVA

PAPÉIS DE PAREDE E AS OBRAS DE ESCHER

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO AURÉLIO OLIVEIRA DOS SANTOS SILVA E ORIENTADA PELO PROF. DR. DANIEL MIRANDA MACHADO.

SANTO ANDRÉ, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira dos Santos Silva, Aurélio
Papéis de Parede e as Obras de Escher / Aurélio Oliveira dos Santos
Silva. — 2020.

90 fls. : il.

Orientação de: Daniel Miranda Machado

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André,
2020.

1. Papéis de parede. 2. Escher. 3. Grupos de isometrias. 4.
Transformações geométricas. I. Miranda Machado, Daniel. II. Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2020. III.
Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com anuência do(a) (co)orientador(a).



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado

No dia 28 de Fevereiro de 2020 às 10h00, sala 303, 3º andar, Bloco B, Campus SA da Fundação Universidade Federal do ABC, localizada na Avenida dos Estados, 5001, Santa Terezinha, Santo André, SP, realizou-se a Defesa de Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado “**Papéis de Parede e as Obras de Escher**” de autoria do candidato, **AURELIO OLIVEIRA DOS SANTOS SILVA**, RA nº 131710001, discente do Programa de Pós-Graduação em MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da UFABC. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado Aprovado pela Banca Examinadora.
E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca.

Prof.(a) **DAHISY VALADAO DE SOUZA LIMA**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Titular

Prof.(a) **LEONARDO BARICHELLO**
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - Membro Titular

Prof.(a) **CRISTIAN FAVIO COLETTI**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Prof.(a) **RAFAEL DE MATTOS GRISI**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Prof.(a) **DANIEL MIRANDA MACHADO**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo ser uma introdução a geometria das transformações, em nível elementar e apresentar a construção e a classificação dos grupos de papéis de parede.

Ao fim deste, será feita uma análise das obras de MC Escher, mais especificamente aqueles que envolvem ladrilhamento do plano e também serão propostas atividades nas quais os conteúdos aqui tratados poderão ser incluídos.

Palavras-chaves: Papéis de Parede, Grupos, Transformações Geométricas, Isometrias, Escher.

Abstract

This dissertation aims to be an introduction to the geometry of transformations, at an elementary level and to present the construction and classification of the wallpaper groups.

At the end of this, an analysis of the works of MC Escher will be made, more specifically those that involve the filling out of the plan and activities will also be proposed in which the contents dealt with here may be included.

Keywords: Wallpapers, Groups, Geometric Transformations, Isometries, Escher.

Sumário

1	Isometrias	4
1.1	Transformações	4
1.2	Isometrias nas retas	5
1.2.1	Orientação da reta	7
1.3	Isometrias do Plano	9
1.3.1	Isometrias próprias e impróprias no plano	10
1.3.2	Reflexões em torno de um ponto	10
1.3.3	Reflexão em torno de uma reta	10
1.3.4	Translação ou deslizamento	12
1.3.5	Rotação	14
1.3.6	Reflexão com deslizamento	21
2	Propriedades das Isometrias	23
2.1	Composição de Isometrias	23
3	Papéis de Parede	28
3.1	Restrições Cristalográficas	28
3.1.1	Isometrias ímpares	29
3.1.2	Rotações	31
3.2	Grupos de papéis de parede e padrões	35
4	Obras de Escher	59
4.1	Biografia	59
4.2	Escher e Coxeter	63
4.3	Padrões geométricos nas obras de Escher	64
5	Atividades	68
5.1	Reconhecimento de Simetrias	69
5.2	Desenhando tesselações	70
5.3	Construção de sólidos	75
	Referências Bibliográficas	79

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo e todas as minhas escolhas e aventuras.

Aos amigos que sempre estiveram presentes em todos os momentos e que trouxeram tantos momentos especiais ao longo deste período.

Aos professores do PROFMAT pelo apoio concedido.

À minha família que esteve ao meu lado sempre que precisei.

À minha esposa Paula por todo carinho, apoio, compreensão e amor incondicional.

Introdução

O objetivo desta dissertação foi fazer um estudo sobre isometrias e em especial sobre os grupos de papéis de parede e a inter-relações entre estes e algumas das obras de Escher. Existem 17 grupos distintos de papéis de parede e a primeira demonstração de que estes são os únicos possíveis foi feita por Evgraf Fedorov (1853-1919) em 1891 e independentemente por George Pólya (1881-1985) em 1924.

Ao longo da dissertação serão apresentadas as demonstrações que permitem concluir que os grupos de papéis de parede são exatamente 17. Utilizaremos a notação dada por Martin [1], em os grupos são classificados de acordo com seus centros de rotações e derivados de acordo com as demais simetrias encontradas naquele grupo, como reflexão, translação e reflexão com deslizamento e os pontos que contém os eixos destas simetrias.

Para tal estudo trataremos inicialmente os conceitos de transformações e isometrias. Tais conceitos são conteúdo encontrados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e são trabalhados nas aulas regulares da educação básica em diferentes níveis. Para o aprofundamento deste estudo serão propostas atividades que se baseiam nas obras de Escher.

Escher foi um artista criativo, inovador e multifacetado. Sempre em busca de novas técnicas e desafios ele viajou, pesquisou e conseguiu, em suas obras, criar “mundos impossíveis”.

Apesar de não possuir formação matemática, é evidente a partir de suas obras o domínio que ele possuía de conceitos geométricos. Porém isso não implica que ele entendesse formalmente a matemática que existe por trás de tais regras. Após uma série de encontros, que se iniciaram em 1954, com o matemático Harold Scott MacDonald Coxeter, conhecido como Donald Coxeter (1907-2003) em que os dois trocavam informações e artigos que Escher conseguiu compreender melhor a matemática em seu trabalho e conseguiu abrir cominho para novas possibilidades. Apesar da grande influência que Coxeter teve para que Escher desenvolvesse obras baseadas no plano hiperbólico, este trabalho irá tratar apenas da fase em que Escher tratou das tesselações no plano euclidiano.

Existe grandes conexões entre a matemática e a arte, onde uma usufrui da outra para o próprio crescimento. Nessa dissertação apresentamos um desses diálogos através da obra de Escher.

No primeiro capítulo apresentaremos os conceitos de isometrias, trazendo uma introdução dos conceitos de transformações do plano e simetrias, provando que existem quatro isometrias do plano a se conhecer e que estas são isometrias: reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento. No segundo capítulo trata-

Sumário

remos das propriedades das isometrias e das involuções. Neste, veremos que toda isometria é composição de no máximo três reflexões e que são necessárias algumas definições para que possamos chegar nesta demonstração. A partir do terceiro capítulo iremos começar a tratar o grupos de papéis de parede. Iremos demonstrar que a quantidade de grupos de papéis de parede é limitada e que também é possível provar que estes são distintos. O quarto capítulo trará uma análise envolvendo os grupos de papéis de parede e como elas se encontram nas obras de Escher. E por fim, no último capítulo apresentamos propostas atividades que envolvam os grupos de papel de parede, de acordo com a BNCC.

Notações

Notação 1. Pontos serão denotados por letras maiúsculas do alfabeto latino (A, B, X, Y);

Notação 2. Retas serão denotados por letras minúsculas do alfabeto latino (r, s, t);

Notação 3. Transformações do plano serão denotadas por letras minúsculas do alfabeto grego α, β e γ ;

Notação 4. \overleftrightarrow{AB} denota a reta que passa pelos pontos A e B ;

Notação 5. \overrightarrow{AB} representa a semirreta que tem origem em A e que contém o ponto B ;

Notação 6. \overline{AB} denota o segmento de reta definido pelos dois pontos de suas extremidades;

Notação 7. AB denota a distância entre dois pontos, que também será denotada por $d(A, B)$.

Notação 8. Ângulos serão representados pelas letras minúsculas do alfabeto grego Θ e Φ ou por pontos contidos em seus lados, como por exemplo $\angle ABC$, onde B é o vértice do ângulo e \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} são os lados do ângulo.

Notação 9. Para planos iremos utilizar a letra grega maiúscula Π .

É importante ressaltar aqui que estamos supondo já haja familiarização por parte dos leitores em alguns conteúdos como, por exemplo, o Plano Cartesiano, em que:

- um ponto é um par ordenado (x, y) onde $x, y \in \mathbb{R}$;
- uma reta é o conjunto de pontos que satisfazem uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b não são iguais a 0 ao mesmo tempo;
- a distância d entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é dada pela fórmula $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1 Isometrias

O estudo de transformações e isometrias apresentado neste trabalho baseia-se apenas em conteúdo de educação básica. De acordo com Martin, para este estudo, não é necessário (pré-requisito) o estudo da Teoria dos Grupos. Pelo contrário, esta abordagem para a Geometria Euclidiana dá exemplos concretos para uma introdução a este estudo e para o seu aprofundamento. Assim os conceitos relativos a teoria de grupo que utilizaremos serão apresentados no trabalho.

1.1 Transformações

Uma **transformação no plano** é um correspondência bijetiva de pontos do plano nele mesmo.

Definição 10 (Identidade). A transformação **identidade** $\iota : \Pi \rightarrow \Pi$ é definida como $\iota(P) = P$ para todo ponto $P \in \Pi$.

Todo **grupo** é um conjunto \mathcal{G} munido de uma operação (\cdot) que satisfaz as seguintes propriedades:

Fechamento $a \cdot b \in \mathcal{G}$ se $a, b \in \mathcal{G}$;

Associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

Elemento neutro $\exists e \in \mathcal{G} | e \cdot a = a \cdot e = a$;

Elemento inverso Dado a , $\exists a^{-1} | a \cdot a^{-1} = e$.

Observação 11. Dizemos que um grupo é um **grupo comutativo** caso ele respeite a seguinte propriedade:

Comutativa $a \cdot b = b \cdot a$

Proposição 12. A composição $\alpha \circ \beta$ das transformações α e β também é uma transformação.

Demonstração. O resultado segue do fato da composição de funções bijetivas ser uma função bijetiva. \square

Teorema 13. As transformações do plano formam um grupo.

1 Isometrias

Demonstração. A propriedade de fechamento é consequência da proposição 12. Sejam α, β e γ transformações de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , então

$$((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(x) = (\alpha \circ \beta)(\gamma(x)) = \alpha(\beta(\gamma(x))) = (\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(x)$$

A transformação identidade ι é o elemento neutro do grupo e claramente

$$\iota \circ \alpha(x) = \alpha \circ \iota(x) = \alpha(x)$$

Dada a transformação α , por hipótese, como α é bijetiva temos que existe α^{-1} e que

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} = \iota$$

□

Definição 14. Seja f uma transformação tal que, dada l uma reta, então $f(l)$ também é uma reta. Dizemos que neste caso f é uma **colineação**.

Teorema 15. O conjunto de todas colineações formam um subgrupo do grupo das transformações.

Demonstração. Para provar que é subgrupo basta verificarmos que é fechado em relação ao produto. Para esse fim vamos supor que f, g sejam colineações e l uma reta. Temos que $f(l) = l'$, onde l' também é uma reta, por hipótese. Logo $(g \circ f)(l) = g(f(l)) = g(l')$ também é uma reta. □

Teorema 16. Num grupo de transformações, temos que $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

Demonstração. Basta demonstrar que $(\alpha \circ \beta)^{-1} \circ (\alpha \circ \beta) = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ \beta) = \iota$ pois o elemento inverso de existe é único. E desta forma $(\alpha \circ \beta)^{-1}$ é a inversa de $(\alpha \circ \beta)$. Agora, veja que

$$\beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ \beta)(x) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(\alpha(\beta(x)))) = \beta^{-1}(\beta(x)) = \iota(x)$$

A demonstração que $(\alpha \circ \beta)^{-1} \circ (\alpha \circ \beta) = \iota$ é análoga. E portanto podemos concluir que $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$. □

1.2 Isometrias nas retas

Definição 17. Uma **isometria da reta** r numa reta s é uma função $\alpha : r \rightarrow s$ que preserva a distância entre os pontos, isto é:

$$d(\alpha(X), \alpha(X')) = d(X, X')$$

para todo $X, X' \in r$.

Para efeito de notação vamos dizer que $X' = \alpha(X)$ onde $X \in r$ e $X' \in s$.

Teorema 18. A imagem do segmento de reta $\overline{XY} \subset r$ por uma isometria $\alpha : r \rightarrow s$ é o segmento de reta $\overline{X'Y'} \subset s$, onde $X' = \alpha(X)$ e $Y' = \alpha(Y)$.

1 Isometrias

Teorema 19. *Toda isometria α é uma função bijetiva, cuja inversa $\alpha^{-1} : s \rightarrow r$ também é uma isometria.*

Dado uma isometria α , dizemos que o **ponto** X é **fixo** por α se $\alpha(X) = X$.

Teorema 20. *Uma isometria $\alpha : r \rightarrow r$ que possui dois pontos fixos distintos é a transformação identidade.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in r$ tais que $X' = \alpha(X) = X$ e $Y' = \alpha(Y) = Y$.

Seja $Z \in r$ e $Z' = \alpha(Z)$. Vamos assumir primeiramente que $Z \in \overline{XY}$. Então temos:

$$Z \in \overline{XY} \Leftrightarrow XY = XZ + ZY \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow X'Y' &= X'Z' + ZY' \\ XY &= XZ' + Z'Y \end{aligned} \quad (1.2)$$

Desta forma $XZ + ZY = XZ' + Z'Y$ e logo $Z = Z'$.

Os casos $X - Y - Z$ e $Z - X - Y$ são análogos □

Definição 21 (Reflexão em torno de um ponto). Seja $A \in r$. A **reflexão** em torno de A é a transformação $\sigma_A : r \rightarrow r$ que associa cada ponto $X \in r$ em seu simétrico $X' = \sigma_A(X)$ relativamente ao ponto A .

Se σ_A é uma reflexão então $\sigma_A(A) = A$ e para todo $X \neq A$ em r , A é o ponto médio do segmento de reta XX' , onde $X' = \sigma_A(X)$. Assim, X e X' , pertencem a semirretas opostas de origem A . Decorre assim que dois pontos $X, Y \in r$ estão do mesmo lado (ou em lados opostos) do ponto A se, e somente se, suas imagens X', Y' por σ_A também estão. Se X e Y estão em lados opostos de A então

$$d(X', Y') = d(X', A) + d(Y', A) = d(X, A) + d(Y, A) = d(X, Y)$$

o que demonstra que a reflexão é uma isometria neste caso. Os outros casos são similares.



Fig. 1.1

Teorema 22. *Sejam $\alpha, \beta : r \rightarrow s$ isometrias. Se existirem pontos $A \neq B$ em r tais que $\alpha(A) = \beta(A)$ e $\alpha(B) = \beta(B)$ então $\alpha = \beta$, isto é, $\alpha(X) = \beta(X)$ para todo $X \in r$.*

1 Isometrias

Demonstração. Basta observarmos que $\alpha^{-1} \circ \beta(A) = A$ e que $\alpha^{-1} \circ \beta(B) = B$. Portanto $\alpha = \beta$. \square

Teorema 23. Se a isometria $\alpha : r \rightarrow s$ possui um ponto fixo A então α é a transformação identidade ou α é a reflexão em torno de A .

Demonstração. Se α fixa um ponto B , com $B \neq A$, então α é a transformação identidade, de acordo com Teorema 20. Agora se $\alpha(B) = B'$ então temos que $d(B, B') = d(B, A) + d(A, B')$ e portanto A é ponto médio do segmento $\overline{BB'}$, logo α é a reflexão em torno do ponto A . \square

Teorema 24. Sejam $\alpha, \beta : r \rightarrow s$ isometrias. Se existir um ponto $A \in r$ tal que $\alpha(A) = \beta(A)$ então ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \beta \circ \sigma_A$, onde $\sigma_A : r \rightarrow r$ é a reflexão em torno do ponto A .

Demonstração. Seja $\gamma = \beta^{-1} \circ \alpha$. Então γ admite o ponto fixo A , então, por 23, ou γ é a identidade ou $\gamma = \sigma_A$ e neste caso, $\alpha = \beta \circ \sigma_A$. \square

Definição 25 (Translação na reta). Sejam A e B dois pontos distintos sobre a reta r . A **translação** $\tau_{A,B} : r \rightarrow r$ é a transformação que associa a cada ponto $X \in r$ o ponto $X' = \tau_{A,B}(X)$ tal que $XX' = AB$ e tal que o sentido do percurso de X para X' é o mesmo de A para B .

Observação 26. Ao afirmarmos que $d(X, X') = d(A, B)$ e que os sentidos de percurso $A \rightarrow B$ e $X \rightarrow X'$ coincidem, equivale a afirmar que o ponto médio M do segmento AX' é também ponto médio do segmento BX .

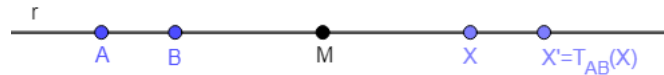


Fig. 1.2

1.2.1 Orientação da reta

Para determinar a orientação de uma reta devemos a princípio escolher o sentido do percurso em r e a partir daí chamá-lo de **positivo**. O sentido oposto a este será denominado **negativo**. Graficamente, o sentido do percurso será indicado por uma seta.

1 Isometrias

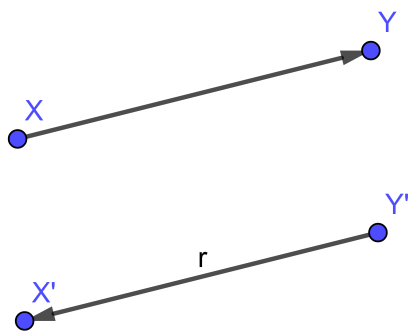


Fig. 1.3: Reta r de sentido $Y' \rightarrow X'$

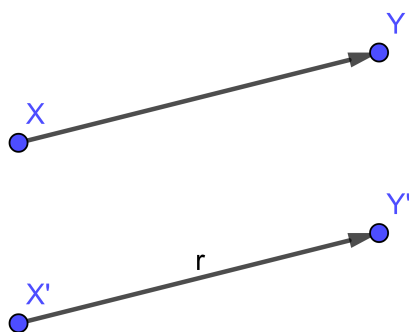


Fig. 1.4: Reta r de sentido $X' \rightarrow Y'$



Fig. 1.5

Definição 27. Dado qualquer par ordenado (X, Y) de pontos de r , se o sentido de percurso $X \rightarrow Y$ coincide com o sentido $X' \rightarrow Y'$, onde $X' = \alpha(X)$ e $Y' = \alpha(Y)$, então dizemos que $\alpha : r \rightarrow r$ **preserva orientação** ou equivalentemente que α é uma isometria **própria**. Caso contrário será dita **imprópria**.

1.3 Isometrias do Plano

Definição 28. Uma **isometria do plano** Π num plano Π' é uma transformação $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva a distância entre os pontos, i.e.,

$$d(\alpha(X), \alpha(X')) = d(X, X')$$

para todo $X, X' \in \Pi$.

Proposição 29. *Uma isometria preserva a amplitude dos ângulos.*

Entre os tipos de isometrias do plano destacamos a rotação, a reflexão e a translação no plano. Essas isometrias serão estudadas detalhadamente no que se segue.

Teorema 30. *Toda isometria $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi'$ leva retas em retas.*

Demonstração. Sejam $r \subset \Pi$ e $A, B \in r$, tais que $A' = \alpha(A)$ e $B' = \alpha(B)$. E seja r' a reta do plano Π' que contém A' e B' . Dado $X \in r$, vamos assumir, sem perda de generalidade que $A - X - B$, tal que $AB = AX + BX$. Logo, se $X' = \alpha(X)$, então $A'B' = A'X' + B'X'$ portanto X' pertence ao segmento $A'B'$. Portanto, A', B' e X' são colineares. Com isso conseguimos demonstrar que $X \in r \Rightarrow X' \in r'$. Logo, como toda isometria entre retas é sobrejetiva, temos que $\alpha(r) = r'$.

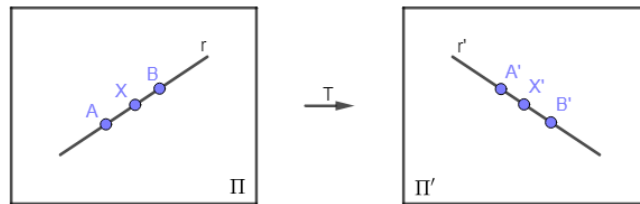


Fig. 1.6

□

Teorema 31. *Uma isometria $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração. Segue da Definição 28, pois como já vimos α leva reta em reta e leva ângulos retos em ângulos retos pois isometrias preservam ângulos. □

Teorema 32. *Toda isometria $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma bijeção, cuja inversa $\alpha^{-1} : \Pi' \rightarrow \Pi$ é ainda uma isometria.*

Demonstração. Vamos apenas provar que a inversa preserva distância. Sejam então $A, B \in \Pi$ tais que $\alpha(A) = A'$ e $\alpha(B) = B'$. Como α é bijetiva, temos que $d(\alpha(A), \alpha(B)) = d(A', B') \Rightarrow d(A', B') = d(\alpha^{-1}(A'), \alpha^{-1}(B'))$. □

1.3.1 Isometrias próprias e impróprias no plano

Definição 33. Quando uma isometria preserva a orientação de uma figura geométrica, a isometria é denominada **própria** e quando inverte a orientação, é dita **imprópria**.

1.3.2 Reflexões em torno de um ponto

Definição 34 (Reflexão em torno de um ponto). Seja A um ponto no plano Π definimos a **reflexão** em torno do ponto A como a função $\sigma_A(A) = A$ e para $X \neq A$, $\sigma_A(X) = X'$, onde A é o ponto médio de $\overline{XX'}$.

Teorema 35. *Toda reflexão em torno de um ponto A é uma isometria no plano.*

Demonstração. Dados $X \neq Y \neq A \in \Pi$, sejam $\sigma_A(X) = X'$ e $\sigma_A(Y) = Y'$ como apresentados na Figura 1.7. Pelo caso de congruência LAL, podemos afirmar que $\triangle AXY \cong \triangle AX'Y'$, pois, pela definição de reflexão, $AX = AX'$ e $AY = AY'$ e ainda como $\overleftrightarrow{XX'}$ e $\overleftrightarrow{YY'}$ são retas concorrentes temos que $\angle XAY \cong \angle X'AY'$ por serem ângulos opostos pelo vértice. Logo a reflexão em torno de um ponto no plano preserva a distância entre pontos e a amplitude dos ângulos.

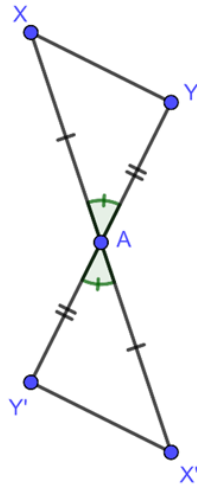


Fig. 1.7: Demonstração

□

Teorema 36. *Toda reflexão em torno de um ponto é uma isometria própria.*

1.3.3 Reflexão em torno de uma reta

Definição 37 (Reflexão em torno de uma reta). Seja r uma reta no plano Π definimos a **reflexão em torno de uma reta r** , $\sigma_r : \Pi \rightarrow \Pi$, da seguinte forma: se $X \in r$

então $\sigma_r(X) = X$ e se $X \notin r$ então $\sigma_r(X) = X'$, de modo que r seja a mediatriz de $\overline{XX'}$.

Teorema 38. *Toda reflexão em torno de uma reta é um isometria no plano.*

Demonstração. Para realizar a demonstração consideraremos dois casos:

1. Dados X e Y pontos de um mesmo lado da reta r do plano Π . Temos que $\sigma_r(X) = X'$ e $\sigma_r(Y) = Y'$. Sejam A e $\sigma_r(A) = A'$ tais que \overline{XA} e $\overline{XA'}$ são paralelos a r . $\triangle XAY$ e $\triangle X'A'Y'$ são triângulos retângulos. Neste caso, $\triangle XAY \cong \triangle X'A'Y'$ pelo caso de semelhança LLL , pois como possuímos um par de catetos e um par de hipotenusas congruentes, então o segundo par de catetos também será congruente, pelo Teorema de Pitágoras.

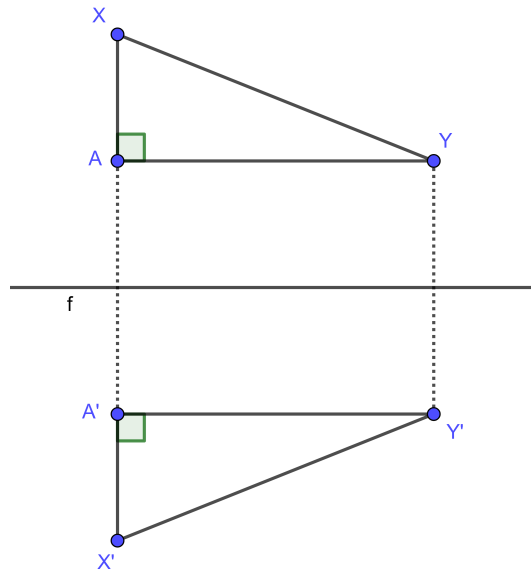


Fig. 1.8: Caso 1: X e Y de um mesmo lado de r no plano Π

2. Dados X e Y pontos de lados opostos da reta r do plano Π , com $\sigma_r(X) = X'$ e $\sigma_r(Y) = Y'$. Sejam $\{A\} = \overline{XY} \cap r$ e $\{B\} = \overline{XX'} \cap r$. Pela propriedade da reflexão, $\overline{XX'} \perp r$, pois r é a mediatriz de $\overline{XX'}$, logo $\triangle ABX \cong \triangle ABX'$, pois são triângulos retângulos em B com cateto comum \overline{AB} , e um par de lados congruentes $\overline{BX} \cong \overline{BX'}$. Portanto, $\triangle AXX'$ é isósceles, pois $\overline{AX} \cong \overline{AX'}$. Analogamente, $\triangle AYY'$ também é isósceles e portanto r é bissetriz dos ângulos $\angle XAX'$ e $\angle YAY'$. Temos que $\angle XAX' \cong \angle YAY'$ e que $\text{med}(\angle XAX') + \text{med}(\angle XAY') = 180^\circ$ assim como $\text{med}(\angle YAY') + \text{med}(\angle XAY') = 180^\circ$, logo $X' - A - Y'$ e

portanto

$$\begin{aligned}
 A \in \overline{X'Y'} &\Leftrightarrow X'A + AY' \\
 &\Leftrightarrow XY = XA + AY \\
 &\Leftrightarrow A \in \overline{XY} \\
 \therefore \overline{X'Y'} &\cong \overline{XY}.
 \end{aligned}$$

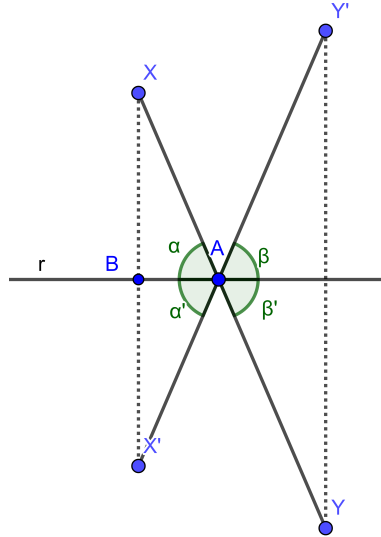


Fig. 1.9: Caso 2: X e Y de lados opostos de r no plano Π

□

Teorema 39. Toda reflexão em torno de uma reta é uma isometria imprópria.

Teorema 40. $\sigma_m \circ \sigma_m = \iota$.

Demonstração. Seja $X \in \Pi$ e denote por $X' = \sigma_m(X)$ e por $X'' = \sigma_m(X')$. Como, por definição, m é a mediatriz de $\overline{XX'}$ e de $\overline{X'X''}$, temos que estes segmentos de reta são coincidentes e portanto $X = X''$, logo temos que $\sigma_m = \sigma_m^{-1} \implies \sigma_m \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \sigma_m^{-1} = \iota$. □

Teorema 41. A composição de duas reflexões é uma isometria própria.

1.3.4 Translação ou deslizamento

Definição 42 (Translação ou deslizamento). Sejam $A, B \in \Pi, A \neq B$, então a **translação** $\tau_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$ é a transformação definida como: dado $X \in \Pi$, a imagem $X' = \tau_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo $ABX'X$.

1 Isometrias

Nesse caso dizemos aqui que a translação τ_{AB} tem sentido de A para B .

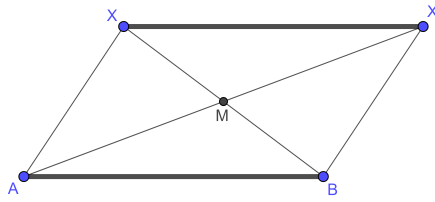


Fig. 1.10: Translação

Teorema 43. *Toda translação $\tau_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria no plano.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \Pi$, tais que $X' = \tau_{AB}(X)$ e $Y' = \tau_{AB}(Y)$. Denotemos $r = \overleftrightarrow{AB}$ e $s = \overleftrightarrow{XY}$. Vamos novamente separar a demonstração em dois casos:

Caso 1. Se $r \parallel s$ ou $r = s$, então τ_{AB} fica restrita a r , então $\tau_{XX'} : r \rightarrow r$ e portanto $d(X, Y) = d(X', Y')$

Caso 2. Se $r \not\parallel s$ e $r \neq s$, temos então um paralelogramo $XY'Y'X'$ com $\overline{XX'}$ oposto a $\overline{YY'}$ e \overline{XY} oposto a $\overline{X'Y'}$. Portanto $d(X, Y) = d(X', Y')$.

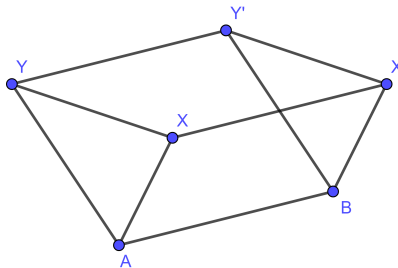


Fig. 1.11

□

Teorema 44. *Toda translação é um isometria própria.*

1.3.5 Rotação

Definição 45 (Rotação). Sejam $X, O \in \Pi$. A rotação de um ponto X por um ângulo α em torno de um ponto O é definida pela transformação $\rho_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $\forall X \neq O$ temos $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ que respeita a condição $d(X, O) = d(X', O)$ e $\angle XOX' = \alpha$. No caso particular em que $X = O$, então definimos $\rho_{O,\alpha}(O) = O$.

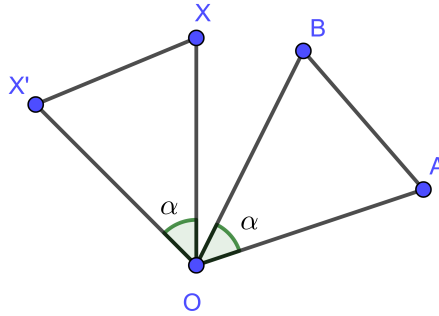


Fig. 1.12

Observação. Se $\alpha > 0$, teremos uma rotação no sentido anti-horário. Caso $\alpha < 0$, a rotação será no sentido horário.

Teorema 46. Toda rotação $\rho_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria no plano.

Demonstração. Sejam $A, B, C, O \in \Pi$ com $\rho_{O,\alpha}(A) = A'$, $\rho_{O,\alpha}(B) = B'$ e $\rho_{O,\alpha}(C) = C'$, tais que $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC' = \alpha$. Separamos então em dois casos:

- Caso 1.* Se $A = O$ (consequentemente $A' = O$), temos que $\triangle BOC \cong \triangle B'OC'$ pelo caso de congruência *LAL*, logo $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ e portanto a rotação preserva o comprimento dos segmentos e a amplitude com ângulos. Analogamente se $B = O$ ou $C = O$.
- Caso 2.* Se $A \neq B \neq C \neq O$ temos que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ pelo caso de congruência *LLL*, pois $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$, $\triangle AOC \cong \triangle A'OC'$ e $\triangle BOC \cong \triangle B'OC'$, seguindo a demonstração do caso anterior.

1 Isometrias

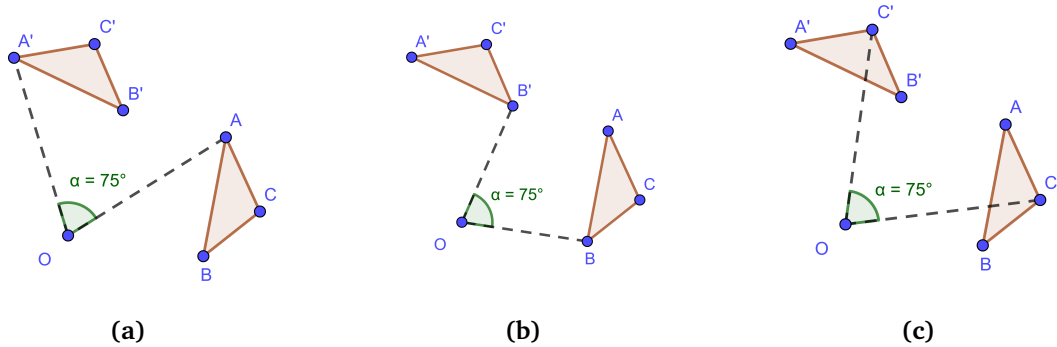


Fig. 1.13: Rotação do triângulo $\triangle ABC$ em torno do ponto O .

□

Teorema 47.

- O produto de duas reflexões por um mesmo ponto é uma rotação por 2Θ , sendo Θ o ângulo entre os eixos de reflexão.
- Toda rotação pode ser escrita como produto de duas reflexões em retas passando pelo centro de rotação. Logo toda rotação é uma isometria própria.

Teorema 48.

1. Uma rotação, diferente da identidade, fixa exatamente um ponto o seu centro.
2. Uma rotação com centro em C deixa invariante toda circunferência com centro C .
3. Se C é um ponto e Θ e Φ são números reais, então $\rho_{C,\Theta} \circ \rho_{C,\Phi} = \rho_{C,\Theta+\Phi}$ e $\rho_{C,\Theta}^{-1} = \rho_{C,-\Theta}$.
4. As rotações com centro C formam um grupo abeliano.
5. As rotações involutivas são rotações de 180° , logo $\rho_{C,180} = \sigma_C$ para qualquer C .

Teorema 49. Dados dois números reais Θ e Φ temos que $\rho_{C,\Theta} = \rho_{C,\Phi} \iff \Theta = \Phi + k(360^\circ), k \in \mathbb{Z}$.

1 Isometrias

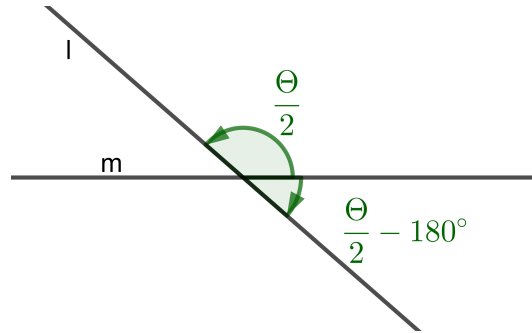


Fig. 1.14: Dois ângulos direcionados por duas retas concorrentes

Teorema 50. *Sejam σ_a e σ_b reflexões, então para a composição $\sigma_b \circ \sigma_a$ temos duas possibilidades:*

Caso 1. Se $a \parallel b$, temos $A \in a$ e $B \in b$ tais que $\overleftrightarrow{AB} \perp a$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp b$ (Portanto, $d(A, B) = d(a, b)$, pela definição de distância entre retas). Então $\sigma_b \circ \sigma_a = \tau_{2AB}$;

Caso 2. Se a e b são concorrentes tais que $a \cap b = C$ e o ângulo formado entre a e b é $\frac{\Theta}{2}$, então temos que $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{C, \Theta}$.

Demonstração. Seja P um ponto tal que $\sigma_b \circ \sigma_a(P) = \sigma_b(\sigma_a(P)) = \sigma_b(P') = P''$.

Caso 1. Vamos realizar esta demonstração separando em três casos:

Caso i. $P \in a$. Temos $\sigma_a(P) = P' = P$, pela definição de reflexão. Agora $\sigma_b(P) = P''$ e como b é mediatriz de $\overline{PP''}$, então $d(P, P'') = d(P, b) + d(b, P'') = d(a, b) + d(a, b) = 2 \cdot d(a, b)$. A composição de duas reflexões é uma isometria própria (Teorema 41), portanto $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{2AB}$. A demonstração é análoga caso $P \in b$.

Caso ii. P não está entre a e b , ou seja de um mesmo lado de a e b . Sem perda de generalidade, assumimos que P está do lado oposto de b em relação a a . Temos que $P - P' - P''$, pois a é mediatriz de $\overline{PP'}$ e b é mediatriz de $\overline{P'P''}$. Logo, se $d(P, a) = m$, então $d(a, P') = m$, e se $d(P', b) = n$, então $d(b, P'') = n$, pela definição de reflexão. Pela definição de distância entre retas temos que $d(a, b) = m + n$. Novamente, como a composição de duas reflexões é uma isometria própria, temos que

$$d(P, P'') = 2m + 2n = 2(m + n) = 2 \cdot d(A, B)$$

e portanto $\sigma_b \circ \sigma_a$ é uma translação ρ_{2AB} . A demonstração será análoga se assumirmos que P está do lado oposto de a em relação a b .

1 Isometrias

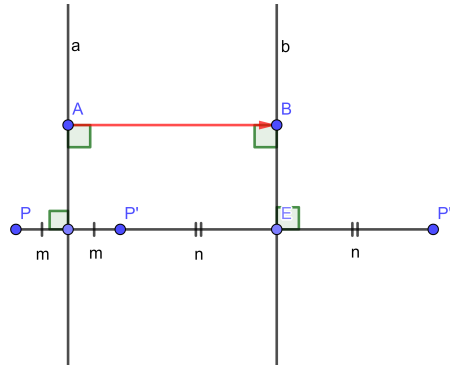


Fig. 1.15: Produto de duas reflexões ($a \parallel b$, com P de uma mesmo lado de a e b)

Caso iii. P está entre a e b . Temos que $P' - P - P''$, a é mediatriz de $\overline{P'P}$ e b é mediatriz de $\overline{PP''}$. Temos que $d(P, a) = d(a, P') = m$ e que $d(P', b) = d(b, P'') = n$ pela definição de reflexão. Além disso $d(a, b) = d(P', b) - d(P', a) = n - m$, pois P' está do lado oposto de a em relação à b . temos também que

$$d(P, b) = d(a, b) - d(P, a) = n - m - m = n - 2m.$$

Logo

$$d(P, P'') = d(P, b) + d(P'', a) = n - 2m + n = 2(n - m) = 2 \cdot d(a, b)$$

Portanto, $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{2AB}$.

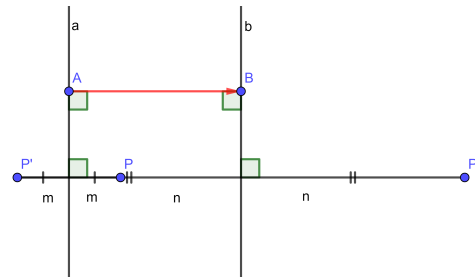


Fig. 1.16: Produto de duas reflexões ($a \parallel b$, com P entre a e b)

Caso 2. Também iremos separar esta demonstração em três casos:

Caso i. $P \in a$. Temos $\sigma_a(P) = P' = P$, pela definição de reflexão. Agora $\sigma_b(P) = P''$ e como b é mediatriz de $\overline{PP''}$, então b também é a bissetriz de $\angle ACP''$, logo

$$\begin{aligned} \text{med}(\angle ACP'') &= \text{med}(\angle ACB) + \text{med}(\angle BCP'') \\ &= 2 \cdot \text{med}(\angle ACB) = 2 \cdot \frac{\Theta}{2} = \Theta \end{aligned}$$

1 Isometrias

. Como C pertence às retas a e b , P , P' e P'' equidistam de C , portanto pertencem à uma circunferência de centro C . Logo, $P'' = \rho_{C,\Theta}(P)$. Portanto $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{C,\Theta}$.

Caso ii. P não está entre a e b , ou seja de um mesmo lado de a e b . Sem perda de generalidade, assumimos que P está do lado oposto de b em relação a a . Sejam $A \in a$, $B \in b$. Como a é mediatriz de $\overline{PP'}$, então a é bissetriz de $\angle PCP'$, logo $\text{med}(\angle PCA) = \text{med}(\angle P'CA) = \frac{\Phi}{2}$. Analogamente, b é bissetriz de $\angle P'CP''$ temos que $\text{med}(\angle P'CB) = \text{med}(\angle P''CB) = \frac{\Omega}{2}$. Como $\angle P'CA$ é adjacente a $\angle P'CB$ temos $\text{med}(\angle ACB) = \text{med}(\angle P'CA) + \text{med}(\angle P'CB) = \frac{\Phi}{2} + \frac{\Omega}{2} = \frac{\Theta}{2}$. Assim como no caso anterior, temos C como centro de uma circunferência e que P , P' e P'' pertencem a esta circunferência. Logo

$$\begin{aligned} \text{med}(\angle PCP'') &= \text{med}(\angle PCA) + \text{med}(\angle ACP') + \text{med}(\angle P'CB) + \text{med}(\angle BCP'') \\ &= \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Omega}{2} + \frac{\Omega}{2} = \Phi + \Omega \\ &= 2 \cdot \text{med}(\angle ACB) = 2 \cdot \frac{\Theta}{2} = \Theta \end{aligned}$$

Portanto $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{C,\Theta}$. A demonstração do caso em que P está do lado oposto de a em relação a b é análoga .

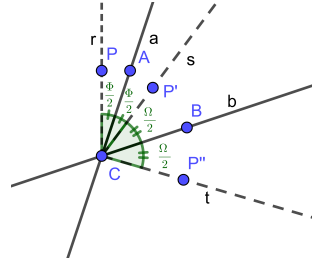


Fig. 1.17: Produto de duas reflexões ($a \nparallel b$, com P de uma mesmo lado de a e b)

Caso iii. P está entre a e b . Sejam $A \in a$ e $B \in b$. Como a é mediatriz de $\overline{PP'}$, então a é bissetriz de $\angle PCP'$, logo $\text{med}(\angle PCA) = \text{med}(\angle P'CA) = \frac{\Phi}{2}$. Vamos assumir que $\text{med}(\angle P'CB) = \frac{\Omega}{2}$, logo $\text{med}(\angle P'CB) = \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Omega}{2}$. Como b é mediatriz de $\overline{P'P''}$, então b é mediatriz de $\angle P'CP''$, logo $\text{med}(\angle P'CB) = \text{med}(\angle P''CB) = \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Omega}{2}$. Como $\angle PBC$ é adjacente a $\angle P''CB$, temos que

$$\begin{aligned} \text{med}(\angle PCP'') &= \text{med}(\angle PCB) + \text{med}(\angle P''CB) \\ &= \frac{\Omega}{2} + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} + \frac{\Omega}{2} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\Omega}{2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\Theta}{2} \right) \\ &= 2 \cdot \text{med}(\angle ACB). \end{aligned}$$

1 Isometrias

Portanto, temos que $\sigma_b \circ \sigma_a = \rho_{C, \Theta}$.

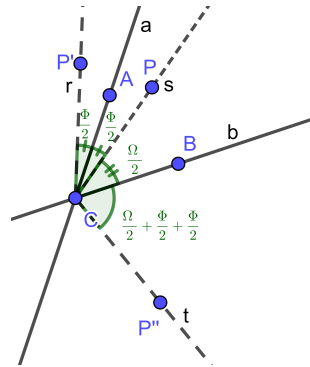


Fig. 1.18: Produto de duas reflexões ($a \nparallel b$, com P entre a e b)

□

Teorema 51 (Teorema da adição de ângulos). $\rho_{B, \Phi} \circ \rho_{A, \Theta} = \rho_{C, \Theta + \Phi}$, onde este ponto C é descrito na demonstração.

Demonstração. Temos que

$$\rho_{B, \Phi} \circ \rho_{A, \Theta}(P) = \rho_{B, \Phi}(\rho_{A, \Theta}(P)) = \rho_{B, \Phi}(P') = P''.$$

Sejam $c = \overleftrightarrow{AB}$ e $P_2 = \sigma_c(P)$, tais que $\rho_{A, \Theta} = \sigma_c \circ \sigma_a$ e $\rho_{B, \Phi} = \sigma_b \circ \sigma_c$, logo a é mediatriz de $\overline{PP_2}$ e b é mediatriz de $\overline{P_2P''}$. Utilizando semelhança de triângulos, temos que $A \in a$ e que $B \in b$. Temos então que

$$\rho_{B, \Phi} \circ \rho_{A, \Theta} = \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_c \circ \sigma_a,$$

mas como $\sigma_c \circ \sigma_c = \iota$ então $\rho_{B, \Phi} \circ \rho_{A, \Theta} = \sigma_b \circ \sigma_a$. Pelo Teorema 2 temos que o ângulo formado entre as retas a e c é de $(\frac{\Theta}{2})^\circ$ e que a medida do ângulo formado entre b e c é de $(\frac{\Phi}{2})^\circ$. Separemos em dois casos:

Caso 1. Se $(\Theta + \Phi)^\circ = 0^\circ$. Pelo Teorema 49 temos que a e b são paralelas. Portanto temos que $\rho_{B, \Phi} \circ \rho_{A, \Theta}$ é uma translação, cuja demonstração segue do Teorema 1.

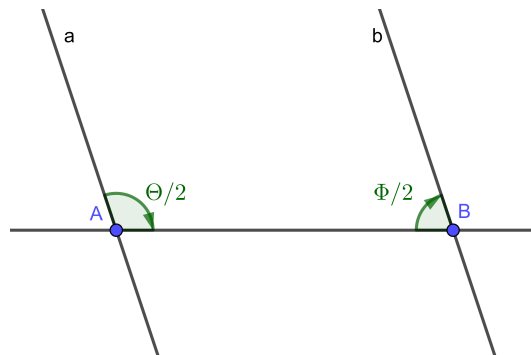


Fig. 1.19

Caso 2. Se $(\Theta + \Phi)^\circ \neq 0^\circ$. Pelo Teorema do ângulo externo podemos concluir que medida do ângulo formado pelas retas a e b é de $(\frac{\Theta}{2} + \frac{\Phi}{2})^\circ$. Seja $C = a \cap b$. Como a é mediatriz de $\overline{PP_2}$ e b é mediatriz de $\overline{P_2P''}$, temos que $d(C, P) = d(C, P_2) = d(C, P'')$. Então C é equidistante de P e de P'' . Logo, C é centro de uma circunferência que contém os pontos P e P'' . Portanto, $\rho_{B, \Phi} \circ \rho_{A, \Theta} = \rho_{C, \Theta + \Phi}$ pelo Teorema 2.

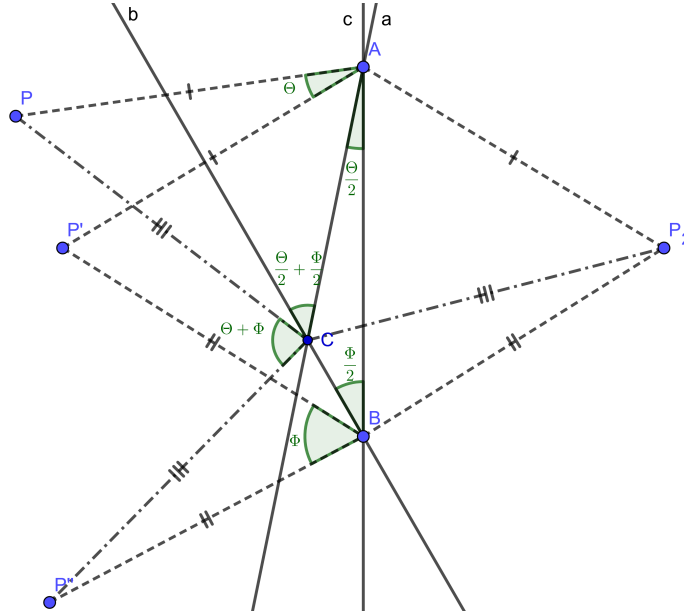


Fig. 1.20

□

Observe que a composição de uma translação com uma rotação será dada pela composição de três rotações já que a translação pode ser substituída por duas rotações de 180° , obtendo então uma rotação de $(\Theta + 180 + 180)^\circ$, portanto uma rotação de Θ° .

Corolário 52. Temos como consequência do Teorema 51:

- Uma rotação de Θ° seguida de uma rotação de Φ° será uma rotação de $(\Theta + \Phi)^\circ$ a não ser que $(\Theta + \Phi)^\circ = 0^\circ$ e neste caso será uma translação;
- Uma translação seguida de uma rotação, diferente da identidade, de Θ° é uma rotação de Θ° ;
- Uma rotação, diferente da identidade, de Θ° seguida de uma translação é uma rotação de Θ° ;
- Uma translação seguida de uma translação é uma translação.

Teorema 53. $\sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_m \iff m = n \text{ ou } m \perp n.$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração em dois casos:

Caso 1. No caso em $m = n$ a demonstração segue facilmente a partir do Teorema 40.

Caso 2. Se m, n são transversais seja $O = m \cap n$. Pelo Teorema 2, temos que a composição de duas reflexões é uma rotação. Então temos que as composições $\sigma_m \circ \sigma_n$ e $\sigma_n \circ \sigma_m$ são $\rho_{O,2\Theta}$ e $\rho_{O,-2\Theta}$, respectivamente ou $\rho_{O,-2\Theta}$ e $\rho_{O,2\Theta}$ respectivamente. Porém, para $\Theta = 90^\circ$ temos $\rho_{O,180^\circ} = \rho_{O,-180^\circ}$ e assim

$$\sigma_m \circ \sigma_n = \rho_{O,180^\circ} = \rho_{O,-180^\circ} = \sigma_n \circ \sigma_m$$

ou

$$\sigma_m \circ \sigma_n = \rho_{O,-180^\circ} = \rho_{O,180^\circ} = \sigma_n \circ \sigma_m$$

Caso 3. O caso em que as retas são paralelas é análogo ao anterior.

□

1.3.6 Reflexão com deslizamento

Definição 54 (Reflexão com deslizamento). Sejam um vetor $v = \overrightarrow{A'A''}$ e r uma reta paralela a v . A **reflexão com deslizamento** determinada por v e a reta r é a isometria

$$\sigma_r \circ \tau_{A'A''}$$

obtida como composta da translação $\tau_{A'A''}$ e da reflexão σ_r .

Observação 55. Como v é paralelo a r , pode-se demonstrar que

$$\sigma_r \circ \tau_{A'A''} = \tau_{A'A''} \circ \sigma_r.$$

Teorema 56. *Toda reflexão com deslizamento é uma isometria do plano.*

Demonstração. Sabemos que toda translação no plano e que toda reflexão são isometrias do plano pelo Teorema 43 e pelo Teorema 38, portanto temos que:

$$\begin{aligned} d(\tau \circ \sigma(X), \tau \circ \sigma(Y)) &= d(\sigma(X), \sigma(Y)) \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

Logo toda reflexão com deslizamentos preservam distância e portanto toda reflexão com deslizamento é um isometria no plano.

1 Isometrias

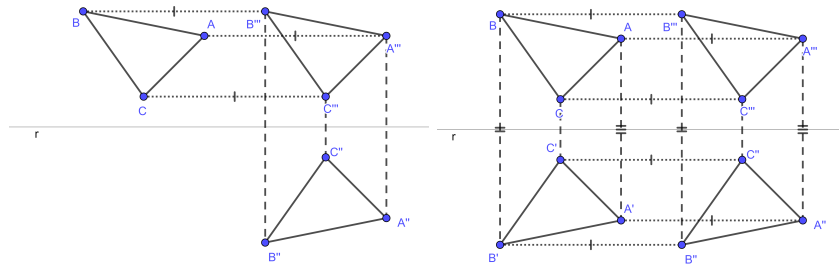


Fig. 1.21: Prova

□

Notação 57. Para representarmos uma isometria de reflexão com deslizamento utilizaremos γ , onde $\gamma(X) = \tau \circ \sigma(X)$.

Teorema 58. *Toda translação com deslizamento é um isometria imprópria.*

2 Propriedades das Isometrias

2.1 Composição de Isometrias

Teorema 59. *Se uma isometria $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi'$ possui três pontos fixos não colineares então α é a identidade.*

Demonstração. Sejam $A, B, C \in \Pi$ não colineares com $\alpha(A) = A$, $\alpha(B) = B$ e $\alpha(C) = C$. Vamos realizar a demonstração considerando dois casos:

Caso 1. Seja $P \in \Pi$ tal que $A - P - B$ e $\alpha(P) = P'$. Temos então:

$$\begin{aligned}d(A, B) &= d(A, P) + d(P, B) \\d(\alpha(A), \alpha(B)) &= d(\alpha(A), \alpha(P)) + d(\alpha(P), \alpha(B)) \\&= d(A, P') + d(P', B).\end{aligned}$$

Logo P' também está entre A e B . Além disso $d(A, P') = d(A, P)$ e $d(B, P') = d(B, P)$. Portanto a única solução possível para esta situação é $\alpha(P) = P' = P$

$$d(A, P') + d(P', B) = d(A, B).$$

A demonstração é análoga para os casos $P - A - B$, $A - B - P$ e para $P \in \overleftrightarrow{AC}$ ou $P \in \overleftrightarrow{BC}$.

Caso 2. Seja $P \in \Pi$ não colinear a A, B, C . Seja r uma reta tal que $P \in r$, $r \cap \overleftrightarrow{AB} = X$ e $r \cap \overleftrightarrow{AC} = Y$. Como vimos no caso anterior podemos afirmar que $\alpha(X) = X$ e $\alpha(Y) = Y$, logo α fixa qualquer ponto pertencente à reta $\overleftrightarrow{XY} = r$, ou seja, fixa todo $P \in r$. Logo α fixa todo ponto do plano Π . Portanto α é a identidade.

2 Propriedades das Isometrias

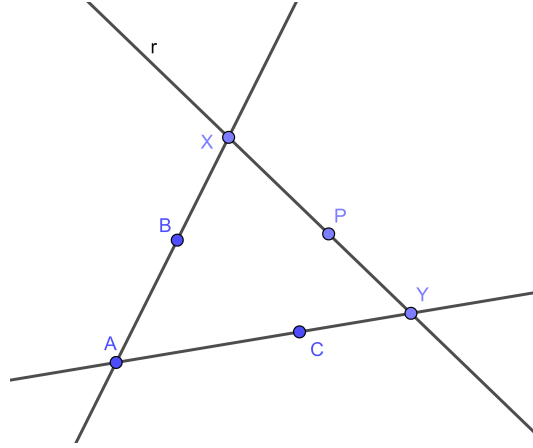


Fig. 2.1: Isometria com três pontos fixos

□

Teorema 60. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : \Pi \rightarrow \Pi'$ isometrias e $A, B, C \in \Pi$ não colineares tais que $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$, $\alpha_1(B) = \alpha_2(B)$ e $\alpha_1(C) = \alpha_2(C)$. Então temos que $\alpha_1 = \alpha_2$, ou seja $\alpha_1(X) = \alpha_2(X)$, $\forall X \in \Pi$.*

Demonstração. Por hipótese temos que

$$\begin{aligned}\alpha_1(Z) &= \alpha_2(Z) \\ \alpha_1^{-1}(\alpha_1(Z)) &= \alpha_1^{-1}(\alpha_2(Z)) \\ Z &= \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}(Z)\end{aligned}$$

para $Z = A, B, C$ e logo pelo Teorema 59 temos que $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} = \text{id}$ e portanto $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Teorema 61. *Se uma isometria $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$ possui dois pontos fixos distintos então ou é a identidade ou é a reflexão em torno da reta que contém estes dois pontos.*

Demonstração. Sejam $A, B, C \in \Pi$ tais que $\alpha(A) = A$, $\alpha(B) = B$. Temos dois casos:

Caso 1. Se $\alpha(C) = C$, então α é a identidade, segue de 59.

Caso 2. Se $\alpha(C) = C'$, com $C \neq C'$. Seja α^{-1} a função inversa de α . Como $d(A, C) = d(A, C')$ e $d(B, C) = d(B, C')$, podemos afirmar que $\exists r \in \Pi | r = \overleftrightarrow{AB}$ tal que r é mediatriz de $\overline{CC'}$ e que portanto temos uma reflexão $\sigma_r : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $\alpha(A) = \sigma_r(A) = A$, $\alpha(B) = \sigma_r(B) = B$ e $\alpha(C) = \sigma_r(C) = C'$.

2 Propriedades das Isometrias

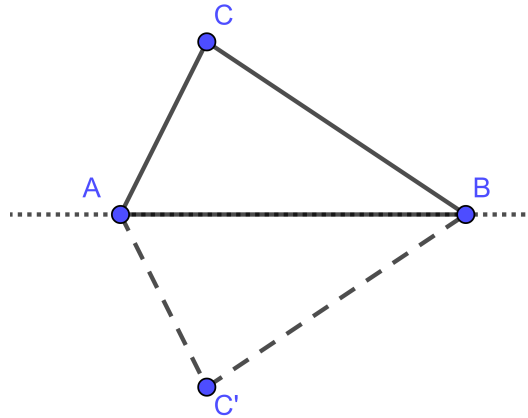


Fig. 2.2: Isometria com dois pontos fixos

□

Teorema 62. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : \Pi \rightarrow \Pi$ isometrias. Se existem em Π dois pontos distintos A, B tais que $\alpha_1(A) = \alpha_2(A)$ e $\alpha_1(B) = \alpha_2(B)$ então ou $\alpha_1 = \alpha_2$ ou $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \sigma_r$, onde $\sigma_r : \Pi \rightarrow \Pi$ é a reflexão em torno da reta $r = \overleftrightarrow{AB}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 30 temos que se $A, B \in r$ então $\alpha_1(r) = \alpha_2(r)$. Seja $X \notin r$. Pelo Teorema 61 se $\alpha_1(X) = \alpha_2(X)$, então $\alpha_1 = \alpha_2$, caso contrário, se $\alpha_1(X) = X$ e $\alpha_2(X) = X'$ com $X \neq X'$, então $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \sigma_r$. □

Teorema 63. *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é composição de, no máximo, duas reflexões.*

Demonstração. Temos que $\Delta A'B'C'$ é a isometria em função de α do triângulo ΔABC . Seja m a mediatriz do segmento $\overline{BB'}$. Então temos uma reflexão $\sigma_m : \Pi \rightarrow \Pi$, tal que $\sigma_m(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$, com $A = A' = A''$, $B = B''$ e $C \neq C''$. Como A é ponto invariável para toda isometria no plano Π temos que $\sigma_m(A') = A'' = A$ e portanto $A \in m$. Como agora temos dois pontos fixos a demonstração segue de 61.

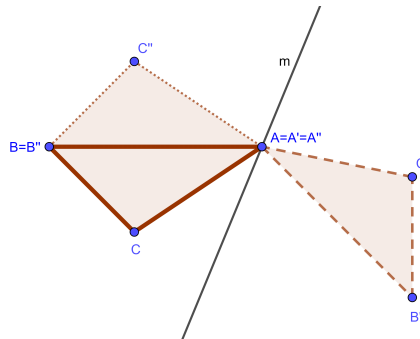


Fig. 2.3: Demonstração para um ponto fixo

□

Teorema 64. *Existem apenas quatro tipos de isometrias $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$ do plano Π , além da transformação identidade, a saber:*

- translação;
- rotação;
- reflexão e
- reflexão com deslizamento.

Demonstração. Consequência dos Teoremas 56 a 60. □

Teorema 65 (Grupo de isometrias). *O conjunto de todas as isometrias formam um grupo.*

Demonstração. Claramente compostas de isometrias são isometrias e inversas de isometrias são isometrias pelo Teorema 32. □

Proposição 66 (Cartan). *Toda isometria é composição de no máximo três reflexões. Caso um dos pontos seja fixo, ou seja, $\alpha(X) = X, X \in \Pi$, com $\alpha : X \rightarrow X$ a isometria pode ser escrita como o produto de no máximo 2 reflexões.*

Demonstração. Sejam então $\alpha : \Pi \rightarrow \Pi$ e $A, B, C \in \Pi$ com $\alpha(A) = A', \alpha(B) = B'$ e $\alpha(C) = C'$. Basta provar que toda isometria fixa três pontos. Para isso iremos separar esta demonstração em quatro casos:

Caso 1. $A = A', B = B'$ e $C = C'$. Segue do 59

Caso 2. $A = A', B = B'$ e $C \neq C'$. Segue do 61. Análogo para $A = A', B \neq B'$ e $C = C'$ e para $A \neq A', B = B'$ e $C = C'$.

Caso 3. $A = A', B \neq B'$ e $C \neq C'$. Segue do 63. Análogo para $A \neq A', B = B'$ e $C \neq C'$ e para $A \neq A', B \neq B'$ e $C = C'$.

Caso 4. $A \neq A', B \neq B'$ e $C \neq C'$. Temos que $\Delta A'B'C'$ é a isometria em função de α do triângulo ΔABC . Seja m a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. Então temos uma reflexão $\sigma_m : \Pi \rightarrow \Pi$, tal que $\sigma_m(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$, com $A = A'', B \neq B''$ e $C \neq C''$. Temos então um ponto fixo, então a demonstração segue do caso anterior.

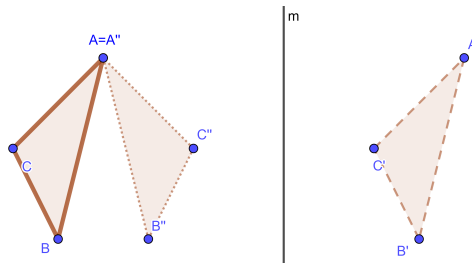


Fig. 2.4: Demonstração do Teorema de Cartan nenhum ponto fixo

□

Definição 67 (Isometrias pares e ímpares). Uma isometria que é um produto de um número par de reflexões é dita **isometria par**; uma isometria que é um produto de um número ímpar de reflexões é dita **ímpar**.

Corolário 68. A composição de isometrias satisfaz:

- (própria) \circ (própria) = própria
- (própria) \circ (imprópria) = imprópria
- (imprópria) \circ (imprópria) = própria
- (imprópria) \circ (própria) = imprópria

Exemplo. Podemos afirmar então que a composição de duas reflexões tem como resultado uma translação ou uma identidade, enquanto que a composta de uma reflexão com uma translação, em qualquer ordem, é uma reflexão.

Teorema 69. Se α, β, γ pertencem a um grupo de isometrias \mathcal{G} , então temos que:

- $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \implies \beta = \gamma$;
- $\beta \circ \alpha = \beta \circ \gamma \implies \alpha = \gamma$;
- $\beta \circ \alpha = \alpha \implies \beta = \iota$;
- $\beta \circ \alpha = \beta \implies \alpha = \iota$;
- $\beta \circ \alpha = \iota \implies \beta = \alpha^{-1}$ e $\alpha = \beta^{-1}$.

Demonstração. O resultado segue imediato multiplicando a esquerda ou a direita pela inversa de α ou β . Por exemplo para demonstrar a primeira identidade multiplicamos ambos os lados à esquerda por α^{-1}

$$(\beta \circ \alpha) \circ \alpha^{-1} = (\gamma \circ \alpha) \circ \alpha^{-1} \implies \beta = \gamma.$$

□

3 Papéis de Parede

Neste capítulo faremos a classificação dos grupos de papéis de parede. A demonstração de que há apenas 17 grupos distintos de tais simetrias planares foi realizada pela primeira vez por Evgraf Fedorov em 1891 e depois derivada independentemente por George Pólya em 1924.

A demonstração que apresentamos a seguir, segue em linhas gerais a apresentada em [1].

3.1 Restrições Cristalográficas

Nesta seção demonstraremos uma série de restrições sobre os grupos de papel de parede, que são conhecidas como restrições cristalográficas e que serão fundamentais na classificação dos papéis de parede.

Definição 70. O **subgrupo gerado** por um conjunto S é o menor subgrupo que contém S e será denotado por $\langle S \rangle$.

Por exemplo $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ é o menor subgrupo que contém τ_1, τ_2 e como esse subgrupo é abeliano então temos uma descrição bem mais concreta:

$$\langle \tau_1, \tau_2 \rangle = \{n\tau_1 + m\tau_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Existem algumas definições possíveis para um grupo de papéis de parede, mas vamos utilizar a definição dada por Martin, [1], que é a seguinte.

Definição 71. Um **grupo de papel de parede** \mathscr{W} é um grupo de isometrias no qual as translações são exatamente as dadas por $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ onde $\tau_1 = \tau_{A,B}$ e $\tau_2 = \tau_{A,C}$, e os pontos A, B, C são pontos não colineares.¹

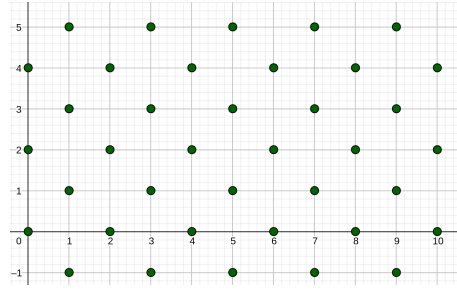
Ou seja, um grupo de papel de parede é um grupo de isometrias tal que as translações contidas nesse grupo são geradas por duas translações independentes.

Definição 72 (Reticulado por translação). O **reticulado por translação** de um grupo de papel de parede \mathscr{W} determinado por um ponto P é o conjunto de todas as imagens de P sobre as translações em \mathscr{W} .

O conjunto das translações que deixam \mathscr{W} invariante são ditas **translações reticuladas** e podem ser identificadas com o **reticulado por translação** associado a origem

¹Outro modo de dizer isso é: um grupo de **grupo de papel de parede** é grupo topológico discreto de isometrias do plano euclidiano que contém duas traduções linearmente independentes.

3 Papéis de Parede



Observação 73. Como toda translação em \mathcal{W} é da forma $\tau_2^j \circ \tau_1^i(A) = A_{ij}$, o conjunto de todos A_{ij} formam o reticulado por translação de \mathcal{W} .

Definição 74. Uma **célula unitária** de \mathcal{W} em relação ao ponto A e gerada pelas translações τ_1 e τ_2 é uma região quadrilateral de vértices $A_{ij}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}$ e $A_{i+1,j+1}$.

Uma célula unitária sempre será uma região quadrilateral determinada por um paralelogramo.

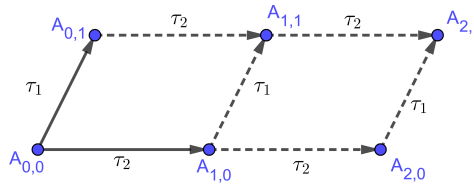


Fig. 3.1

Um reticulado por translação com com um célula unitária retangular é denominado de **retangular**. Um reticulado por translação com com um célula unitária rômbrica é denominado de **rômbrico**.

3.1.1 Isometrias ímpares

A primeira restrição que apresentamos é que a presença de isometrias ímpares em \mathcal{W} força o reticulado a ser rômbrico ou retangular.

Teorema 75. Se \mathcal{W} contém isometrias ímpares, ou seja, se $\exists \sigma_l \in \mathcal{W}$, então temos em \mathcal{W} um reticulado por translação que é necessariamente:

1. rômbrico, com l paralela à diagonal de uma célula unitária rômbrica; ou
2. retangular, com l paralela ao lado de uma célula unitária retangular.

Demonstração. Sejam $A \in l$ e $\tau_{A,p}$ a menor translação diferente da identidade em \mathcal{W} . Temos:

3 Papéis de Parede

1. No caso em que nem $\overleftrightarrow{AB} = l$ e nem $\overleftrightarrow{AB} \perp l$. Seja $Q = \sigma_l(P)$. Como $\tau_{A,Q} = \sigma_l \circ \tau_{A,P} \circ \sigma_l^{-1}$, então $\tau_{A,Q} \in \mathcal{W}$. Pela propriedade da mediatriz, $d(A, P) = d(A, Q)$ e A, P, Q são não colineares, então $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,Q} \rangle$ é o grupo de todas as translações em \mathcal{W} , ou seja, o grupo de papéis de parede gerados por estas translações. Além disso, l contém uma diagonal de uma célula unitária rômbrica.

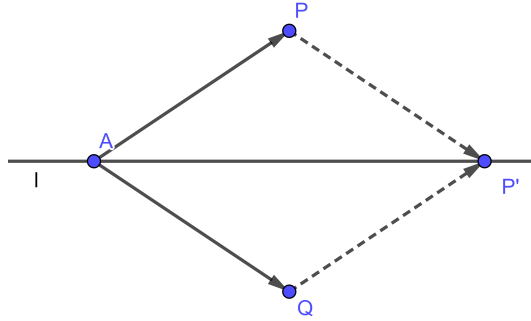


Fig. 3.2

2. Agora faremos o caso $\overleftrightarrow{AB} = l$ ou $\overleftrightarrow{AB} \perp l$. Sejam a tal que $\overleftrightarrow{AB} \cap a = A$, m a mediatriz de \overleftrightarrow{AP} e $n = \sigma_a(m)$. Se temos que $\tau_{A,R}$ é a menor translação em \mathcal{W} que não está em $\langle \tau_{A,P} \rangle$, então $R \in m$ ou $R \in n$ ou R está entre m e n , caso contrário, $\tau_{A,P}^{\pm 1} \circ \tau_{A,R}$ é uma translação menor que $\tau_{A,R}$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que R está entre m e a e $\tau_{A,R}$. Se $l = \overleftrightarrow{AP}$, então $\tau_{A,S} \circ \tau_{A,R}$ é uma translação em \mathcal{W} menor que $\tau_{A,P}$. Portanto, temos que R está em m ou em a . Se $R \in m$, então $\langle \tau_{A,R}, \tau_{A,S} \rangle = \langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$ desde que $\tau_{A,S} \circ \tau_{A,R} = \tau_{A,P}$. Portanto l é paralela à diagonal de uma célula unitária rômbrica ($\square ARPS_1$). Agora, por outro lado, se $R \in a$, então $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$ é o grupo de todas translações em \mathcal{W} e l é paralela ao lado de uma célula unitária retangular de \mathcal{W} ($\square ARPR_1$).

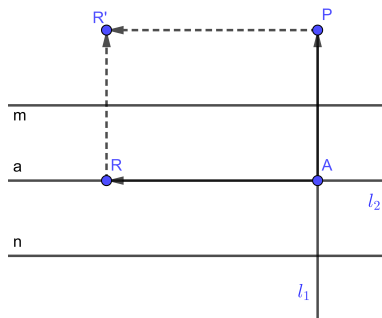


Fig. 3.3: l é perpendicular ao lado de uma célula unitária retangular

□

A restrição anterior também se aplica ao caso em que \mathcal{W} contém uma reflexão com deslizamento.

Teorema 76. *Se \mathcal{W} contém uma reflexão com deslizamento, então \mathcal{W} possui um reticulado por translação associado que é rômboico ou retangular.*

Demonstração. O menor grupo que contém uma reflexão com deslizamento e as translações em \mathcal{W} que fixam l é o grupo \mathcal{F}_1^3 dos grupos dos frisos, isto é, o grupo gerado por uma reflexão com deslizamento γ com eixo l , veja [2]. Consequentemente, podemos supor que γ^2 é a menor translação que fixa l . Sejam $A \in l$, $a \perp l$ no ponto A , $m = \gamma(a)$, $p = \gamma^2(a)$ e $P = \gamma^2(A)$. Então $\tau_{A,p}$ é a menor translação em $\langle \gamma \rangle$. Seja $\tau_{A,B}$ a menor translação em \mathcal{W} que não pertence a $\langle \gamma \rangle$. Já que $\tau_{A,p}^{\pm 1} \circ \tau_{A,B}$ não pode ser menor que $\tau_{A,B}$, vamos supor, sem perda de generalidade, que B está em a ou B está entre a e p . Se $B \in a$, então \mathcal{W} é um reticulado por translação retangular e l é paralelas ao lado de uma célula unitária retangular. Agora, suponha que B está entre a e p . Seja $C = \sigma_l(B)$. Então $\tau_{A,C} \in \mathcal{W}$ se $\tau_{A,C} = \gamma \circ \tau_{A,B} \gamma^{-1}$. Logo, $\tau_{A,C} \circ \tau_{A,B} = \gamma^2$ e $B \in m$. Portanto, $\square ABPC$ é uma célula unitária rômboica com l contendo uma diagonal.

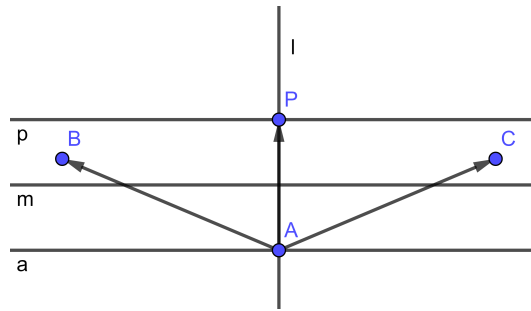


Fig. 3.4

□

Teorema 77. *Se uma reflexão com deslizamento em \mathcal{W} fixa um reticulado por translação, então \mathcal{W} contém uma reflexão.*

Demonstração. Dada que a reflexão com deslizamento γ leva o ponto A até o ponto P em um reticulado por translação determinado por A de um grupo de papel de parede \mathcal{W} , então $\tau_{PA} \circ \gamma$ deve ser uma reflexão já que o produto é uma isometria ímpar que fixa o ponto A . □

3.1.2 Rotações

Definição 78. Uma **figura** é um conjunto não vazio de pontos.

A reta l é uma **reta de simetria** para a figura se σ_l deixa a figura invariante, e o ponto P é um **ponto de simetria** para a figura se σ_P deixa a figura invariante.

Definição 79. Um ponto P será denominado de n -centro de um grupo de isometrias \mathcal{G} se as rotações em \mathcal{G} com centro em P formam um **grupo cíclico finito** C_n ,² com $n > 1$. Se P é um n -centro de um grupo de simetrias de uma figura, então P também é chamado de n -centro, neste caso da figura.

Definição 80. Um **centro de simetria** é um n -centro para algum n .

Se P é um 4-centro de alguma figura, então P é o centro de simetria daquela figura pois

$$\sigma_P = \rho_{P,90}^2 = \rho_{P,90} \circ \rho_{P,90}.$$

Neste caso, P é um ponto de simetria, mas não é um 2-centro. Analogamente, se Q é um 3-centro de alguma figura, então Q não é um ponto de simetria daquela figura.

Teorema 81. Dado n , o conjunto de todos n -centros deve ser invariante por toda isometria pertencente ao grupo.

Demonstração. Suponha $\alpha(P) = Q$ para algum $\alpha \in \mathcal{G}$. Sejam então $\alpha \circ \rho_{P,\Theta} \circ \alpha^{-1} = \rho_{Q,\pm\Theta}$ e $\alpha^{-1} \circ \rho_{Q,\Phi} \circ \alpha = \rho_{P,\pm\Phi}$. Portanto, Q é um n -centro se e somente se P é um n -centro, para o mesmo n . \square

Teorema 82. Dado n , se P é n -centro de um grupo \mathcal{G} de isometrias e \mathcal{G} contém uma isometria que leva P até Q , então Q é um n -centro de \mathcal{G} . Se l é o eixo de simetria de uma figura e o grupo de simetrias da figura contém uma isometria que leva l até m , então m é um eixo de simetria da figura.

Queremos demonstrar que certos centros de simetria não podem ser arbitrariamente próximos. Esse resultado é fundamental pois conhecer um centro de simetria mais próximo de um dado n -centro é frequentemente necessário para demonstrar alguma propriedade dos papéis de parede. Esse resultado é conhecido como *restrição cristalográfica*.

Teorema 83 (Restrição Cristalográfica). Se $\rho_{A,(360/n)}$ e $\rho_{P,(360/n)}$ com $P \neq A$ e $n > 1$, estão num grupo de papéis de parede \mathcal{W} , então $2AP$ não é menor (maior ou igual) que o comprimento da menor translação diferente da identidade em \mathcal{W} .

Demonstração. Suponha que \mathcal{W} contém $\rho_{A,(360/n)}$ e $\rho_{P,(360/n)}$, então \mathcal{W} contém o produto $\rho_{P,(360/n)} \circ \rho_{A,(360/n)}$ que é a translação $\tau_2^j \circ \tau_1^i$ para algum i e j pelo Teorema da Adição de Ângulos, 51. Logo,

$$\rho_{P,360/n} = \tau_2^j \circ \tau_1^i \circ \rho_{A,360/n}$$

e

$$\rho_{P,360/n}(A) = \tau_2^j \circ \tau_1^i \circ \rho_{A,360/n} = A_{i,j}.$$

²um grupo cíclico finito de ordem n , denotado por C_n , é um grupo isomorfo ao grupo aditivo \mathbb{Z}_n , dos números inteiros módulo n .

3 Papéis de Parede

Logo, para $n = 2$, então temos $A-P-A_{ij}$ e P é ponto médio de $\overline{AA_{i,j}}$. Para $n \neq 2$ temos que A, P, A_{ij} não são colineares, então temos que $\triangle APA_{ij}$ é um triângulo isósceles. Temos, sem perda de generalidade que, em ambos os casos, $2AP = AP + PA_{ij} \geq AA_{ij} > 0$ pela Desigualdade Triangular. Portanto, $2AP$ é maior ou igual que o comprimento da menor translação diferente da identidade em \mathcal{W} . \square

Como consequência do teorema anterior temos que:

Corolário 84.

1. Não há dois n -centros (para um mesmo valor de n) que podem estar tão próximos quanto se queira;
2. Um 2-centro e um 4-centro não podem estar tão próximos quanto se queira;
3. Um 3-centro e um 6-centro não podem estar tão próximos quanto se queira;
4. Um 2-centro e um 6-centro não podem estar tão próximos quanto se queira.

Demonstração. A demonstração de (1) é imediata a partir do Teorema 83. Agora para os demais casos, basta observar que um 2-centro é um subgrupo tanto de um 6-centro quanto de um 4-centro e que um 3-centro é subgrupo de um 6-centro:

- para $n = 4$: $\rho_{A,360/4}^2 = \rho_{A,90}^2 = \rho_{A,180} = \rho_{A,360/2} \therefore n = 2$;
- para $n = 6$: $\rho_{A,360/6}^2 = \rho_{A,60}^2 = \rho_{A,120} = \rho_{A,360/3} \therefore n = 3$;
- para $n = 6$: $\rho_{A,360/6}^3 = \rho_{A,60}^3 = \rho_{A,180} = \rho_{A,360/2} \therefore n = 2$.

A partir dessas observações as demais demonstrações seguem então do item 1. \square

Teorema 85 (Restrição Cristalográfica). *Se o ponto P é um n -centro de um grupo de papel de parede, então n deve ser um dos seguintes números: 2, 3, 4 ou 6.*

Demonstração. Dados os pontos A, B, C, D e E tais que $\tau_{A,B}$ é a menor translação do reticulado possível num grupo de papel de parede \mathcal{W} e $\tau_{A,B}(B) = C$, $\tau_{A,B}(C) = D$ e $\tau_{A,B}(D) = E$. Sem perda de generalidade, considere C um n -centro de \mathcal{W} , tal que $\rho_{P,\alpha}(A) = A'$, $\rho_{C,\alpha}(B) = B'$, $\rho_{C,\alpha}(C) = C$, $\rho_{C,\alpha}(D) = D'$, $\rho_{C,\alpha}(E) = E'$, $\rho_{C,-\alpha}(A) = A''$, $\rho_{C,-\alpha}(B) = B''$, $\rho_{C,-\alpha}(C) = C$, $\rho_{C,-\alpha}(D) = D''$ e $\rho_{C,-\alpha}(E) = E''$.

Temos que \mathcal{W} contém um eixo de simetria \overleftrightarrow{AB} . Pelo Teorema 75, \overleftrightarrow{AB} é paralela ao lado de uma célula unitária retangular ou é paralela à diagonal de uma célula unitária rômbrica. Vamos assumir, sem perda de generalidade que $\alpha \neq 0^\circ$. Neste caso temos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{B'D''} \parallel \overleftrightarrow{A'E''}$, logo $B'D''$ e $A'E''$ são múltiplos de AB de tal forma que $B'D'' = m \cdot AB$ e $A'E'' = m' \cdot AB$, onde m e m' são números inteiros.

3 Papéis de Parede

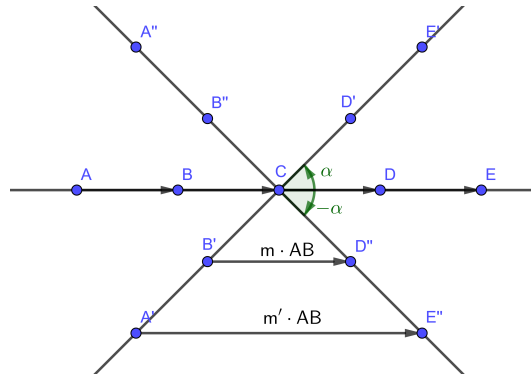


Fig. 3.5

Trabalhando agora com o triângulo isósceles $\triangle CB'D''$ podemos definir a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot AB}{AB} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2} \cdot m \end{aligned}$$

Como a imagem de $\cos \alpha$ é restrita, temos que

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1}{2} \cdot m \leq 1 \\ -2 &\leq m \leq 2 \end{aligned}$$

Temos então as seguintes soluções para esta equação:

m	-2	-1	0	1	2
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
α	180°	120°	90°	60°	0°
n	2	3	4	6	1

Tabela 3.1

O caso $n = 1$ é descartado pela Definição 79. Portanto temos que n deve ser igual a 2, 3, 4 ou 6.

Se o menor ângulo de rotação é $\alpha = 90^\circ$ temos então que $n = 4$. \square

Corolário 86. *Se um grupo de papéis de parede contém um 4-centro, então este grupo não contém um 3-centro e nem um 6-centro.*

Demonstração. Dados P e Q tais que $\rho_{P,120}$ e $\rho_{Q,90}$. Ambas as isometrias não podem estar num mesmo grupo de papel de parede, pois $\rho_{P,120} \circ \rho_{Q,-90}$ é uma rotação de 30° ($n = 12$) em algum ponto e não pode estar em algum grupo de papel de parede pela Restrição Cristalográfica. \square

3 Papéis de Parede

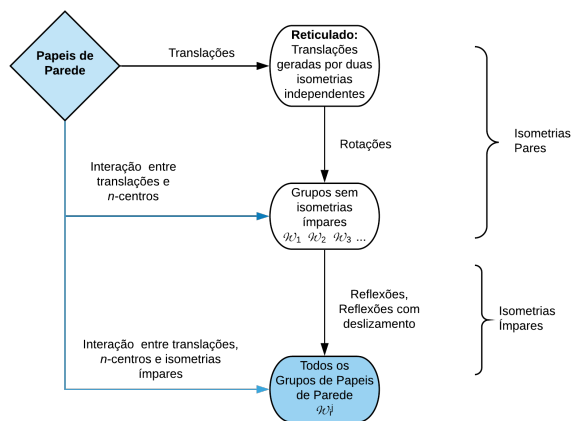


Fig. 3.6: Estratégia de classificação dos Papéis de Parede

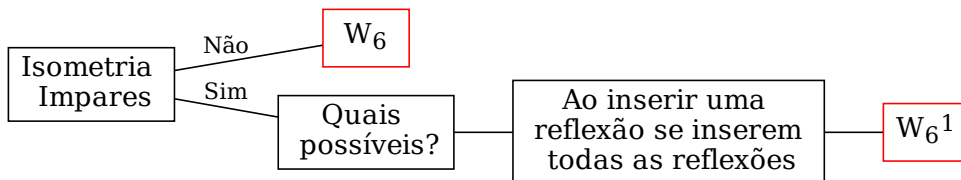
3.2 Grupos de papéis de parede e padrões

Utilizando um procedimento de exaustão, vamos demonstrar que existem exatamente 17 grupos de papéis de parede, que estes são distintos e únicos. Para algum grupo de papel de parede \mathcal{W} :

- iniciaremos nossos estudos supondo a existência de algum n -centro em \mathcal{W} , e para o procedimento de exaustão mas não de algum n -centro estudado num caso anterior. Esta estratégia é particularmente interessante se começarmos pelos casos com n -centros para n maiores.
- verificaremos então a existência ou não de outros n -centros em \mathcal{W} .
- a partir daí, iremos adicionar aos conjuntos geradores isometrias ímpares, quando possível e verificar quais são os grupos obtidos.

6-centros

Começaremos estudando os papéis de parede que contém um 6-centro.



Teorema 87. *Suponha que A seja um 6-centro de um grupo de papel de parede \mathcal{W} . Então \mathcal{W} não possui 4-centros. Além disso, o centro de simetria mais próximo de A é um 2-centro M , e A é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros e cujos lados são bissectados por 2-centros. Todos os centros de simetria para \mathcal{W} são determinados por A e M .*

Demonstração. Pelo Teorema 86 sabemos que \mathcal{W} não contém 4-centros já que \mathcal{W} contém um 6-centro A . Seja M o n -centro mais próximo de A .

Se M fosse um 3-centro ou um 6-centro, então deveria haver um centro F mais próximo a A do que M , onde $\rho_{M,120} \circ \rho_{A,60} = \rho_{F,180}$, pelo Teorema 51.

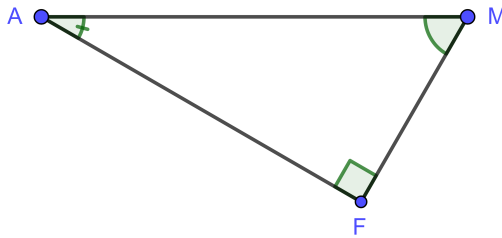


Fig. 3.7

Logo, M de ser um 2-centro.

Considere G tal que $\rho_{M,180} \circ \rho_{A,-60} = \rho_{G,120}$. Então G é um 3-centro ou um 6-centro, porém G não pode ser um 6-centro, pois neste caso teríamos um ponto J entre A e M , o que iria contradizer a escolha que fizemos para M .

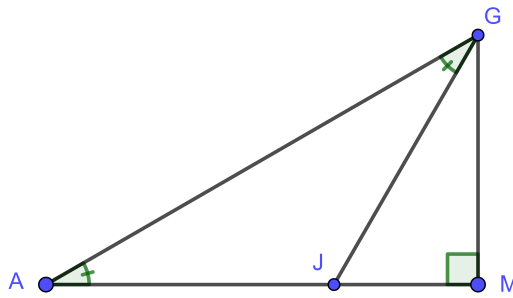


Fig. 3.8

As imagens de $\rho_{A,60}(G)$ são os vértices de um hexágono regular conforme afirmado no teorema.

Assumindo $B = \sigma_M(A)$ e $C = \rho_{A,60}(B)$ temos que B e C são 6-centro de \mathcal{W} .

Temos abaixo os centros de simetria que são determinados pelo 6-centro A e pelo 2-centro M :

3 Papéis de Parede

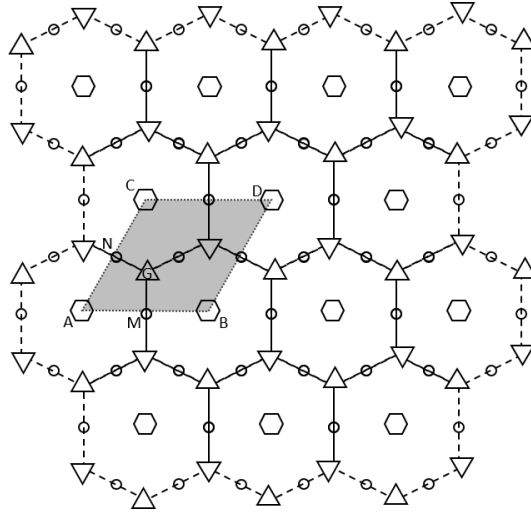


Fig. 3.9: Centros de rotação de \mathcal{W}_6

Fazendo $N = \rho_{A,60}(M)$, temos que N é um 2-centro de \mathcal{W} . Assim, já que o 6-centro A deve ser levado em 6-centro sobre cada elemento de \mathcal{W} , então $\sigma_M \circ \sigma_A$ e $\sigma_N \circ \sigma_A$ são as menores translações que se queira de \mathcal{W} .

□

Definição 88. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_6 é aquele que possui um 6-centro, mas não possui eixos de simetria. Temos então o primeiro grupo de papéis de parede, que denotaremos da seguinte forma:

$$\mathcal{W}_6 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60} \rangle$$

em que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero e M é o ponto médio de \overline{AB} .

Observe na Figura 3.9 que o quadrilátero $\square ABCD$ define a célula unitária de \mathcal{W}_6 e que N é o ponto médio de \overline{AC} .

As regiões poligonais delimitadas por $\square AMGN$ e $\triangle ABG$ são chamadas **bases** de \mathcal{W}_6 . Podemos observar estas regiões na Figura 3.10.

Definição 89. **Bases** são as menores regiões poligonais possíveis que cobrem o plano pela ação de \mathcal{W} :

Existem várias destas regiões e em cada reticulado iremos escolher algumas para que possamos realizar a análise. Vamos denotar cada uma destas regiões como região poligonal t . Se t é tal que o plano é coberto por $\alpha(t)$, onde α está em \mathcal{W} , então t é chamada base (poligonal) de \mathcal{W} .

As bases são usadas para criar padrões de papéis de parede tendo um dado grupo de papel de parede como seu grupo de simetria.

Definição 90. Se t' é uma figura com grupo de simetria identidade numa base t , então a união de todas imagens $\alpha(t')$, com α em \mathcal{W} é uma figura com todas as simetrias em \mathcal{W} . Esta figura é chamada **motivo** t' , ou seja, o motivo é uma figura contida na base que cobre o plano.

3 Papéis de Parede

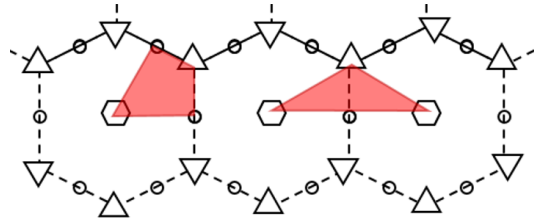


Fig. 3.10: Possíveis bases de \mathcal{W}_6

Para cada um dos grupos de papéis de parede que iremos definir, faremos uma figura, na qual iremos apresentar:

- um padrão com motivo;
- uma célula unitária com uma base;
- as simetrias indicadas.

Para o grupo de papel de parede \mathcal{W}_6 temos a célula unitária obtida pelo quadrilátero $\square ABCD$ e uma das possíveis bases representadas por $\square AMGN$:

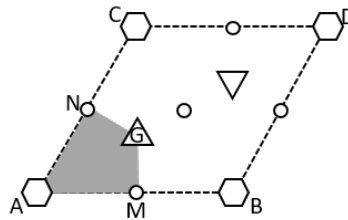


Fig. 3.11: Célula com base de \mathcal{W}_6

Como \mathcal{W}_6 não possui eixo de simetria, podemos representá-la a partir da figura abaixo:

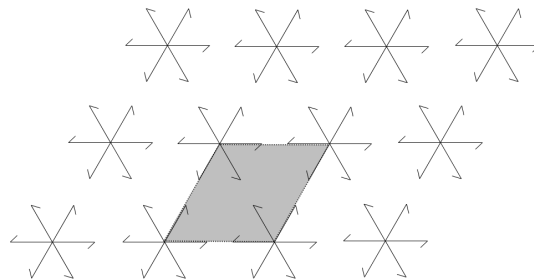


Fig. 3.12: Motivo de \mathcal{W}_6

Vamos obter um novo grupo de papel de parede acrescentando isometrias a \mathcal{W}_6 . Um reticulado por translação rômboide de 6-centros determinada por um 6-centro A deve ser fixado por qualquer isometria em \mathcal{W} , então, pelo Teorema 76, qualquer

3 Papéis de Parede

extensão de \mathcal{W}_6 é obtida pela adição de reflexões que fixam este reticulado por translação.

Contudo, adicionar qualquer uma das possíveis reflexões requer a introdução de todas as possíveis reflexões. Obtemos então o nosso segundo grupo de papéis de parede.

Definição 91. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_6^1 é tal que possui um 6-centro e um eixo de simetria.

Denotemos esse grupo como:

$$\mathcal{W}_6^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60}, \sigma_{MC} \rangle.$$

Pelo que já sabemos sobre \mathcal{W}_6 , temos então que $\mathcal{W}_6^1 = \langle \rho_{A,60}, \sigma_M, \sigma_{MC} \rangle$. Logo $\mathcal{W}_6^1 = \langle \sigma_{AG}, \sigma_{GM}, \sigma_{MA} \rangle$ e \mathcal{W}_6^1 é gerado por três reflexões nas três retas que contém lados de um triângulo retângulo, com ângulos internos que medem 90° , 60° e 30° .

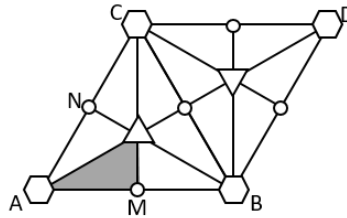


Fig. 3.13: Célula com base de \mathcal{W}_6^1

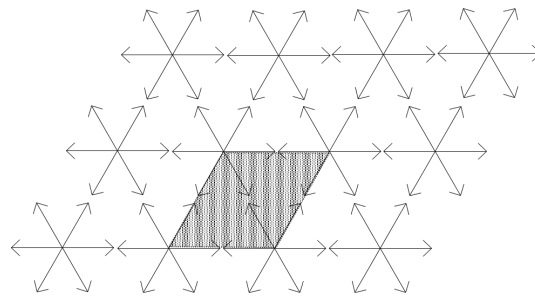


Fig. 3.14: Motivo de \mathcal{W}_6^1

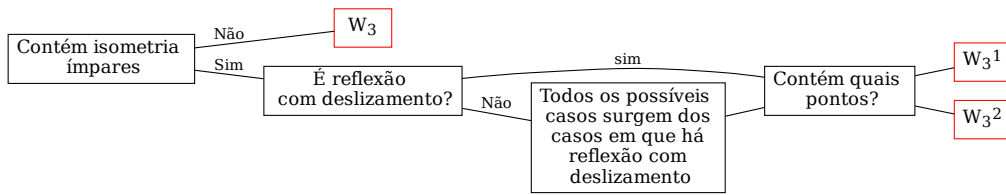
A conclusão destes nos prova o corolário a seguir.

Corolário 92. Um padrão de papel de parede que possua um 6-centro tem como seu grupo de simetria é um \mathcal{W}_6 ou é \mathcal{W}_6^1 .

3-centros

Agora classificaremos os papéis de parede que possuem 3-centros, mas não 6-centros.

3 Papéis de Parede



Teorema 93. *Se A é um 3-centro de um grupo de papel de parede \mathcal{W} e não há 6-centros em \mathcal{W} , então todo centro de simetria de \mathcal{W} é um 3-centro e A é o centro de um hexágono regular cujos vértices são 3-centros. Todos os centros de simetria de \mathcal{W} são determinados por A e um 3-centro mais próximo.*

Demonstração. Se A é um 3-centro em \mathcal{W} , então cada centro P deve ser um 3-centro já que $\rho_{A,-120} \circ \rho_{P,180}$ não pode estar em \mathcal{W} para qualquer ponto P , uma vez que \mathcal{W} não contém 6-centros, de acordo com o teorema.

Seja G um 3-centro mais próximo de A . Seja J tal que $\rho_{G,120} \circ \rho_{A,120} = \rho_{J,240}$. Então J é um 3-centro e $\triangle AGJ$ é um triângulo equilátero. As imagens de G e J pelas potências de $\rho_{A,120}$ são os vértices de um hexágono, assim como enuncia o teorema. Repetindo o mesmo procedimento para cada 3-centro, mostramos que todos os 3-centros estão dispostos tais como na Figura 3.15 abaixo.

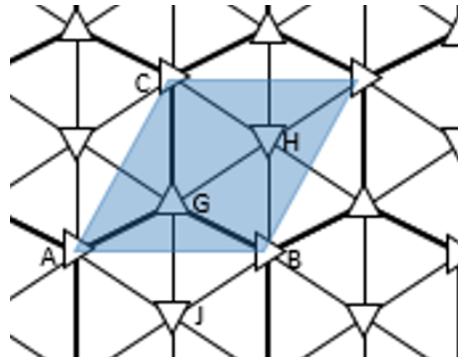


Fig. 3.15: Centros de rotação de \mathcal{W}_3

Agora, de acordo com a Figura 3.16, vemos que $\rho_{G,120} \circ \tau_{A,G} = \rho_{Q,120}$ e que $\rho_{J,120} \circ \tau_{A,J} = \rho_{Q,120}$ onde Q é o centro de $\triangle AGJ$. Portanto, nem $\tau_{A,G}$ e nem $\tau_{A,J}$ pertencem a \mathcal{W} , pois, caso contrário, Q seria um 3-centro mais próximo de A do que G . Assim, se $\tau_{A,B}$ é a menor translação em \mathcal{W} , então o 3-centro B não é um vértice do hexágono dos 3-centros mais próximos de A .

3 Papéis de Parede

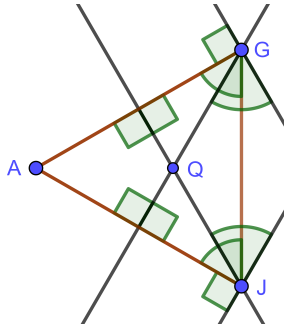


Fig. 3.16

Sejam B e C definidos por $\tau_{A,B} = \rho_{G,120} \circ \rho_{A,-120}$ e $\tau_{A,C} = \rho_{G,-120} \circ \rho_{A,120}$. Então $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ são as menores translações possíveis em \mathcal{W} , ou seja, $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ geram o grupo de translação de \mathcal{W} .

□

Definição 94. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_3 é aquele que possui um 3-centro, não possui 6-centros e não possui eixos de simetria. Denotaremos \mathcal{W}_3 da seguinte forma:

$$\mathcal{W}_3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120} \rangle = \langle \rho_{A,120}, \rho_{G,120} \rangle.$$

Como \mathcal{W} não contém isometrias ímpares então \mathcal{W} deve ser \mathcal{W}_3 , conforme Figura 3.18 abaixo:

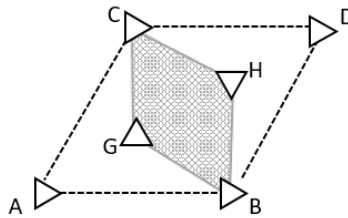


Fig. 3.17: Célula com base de \mathcal{W}_3

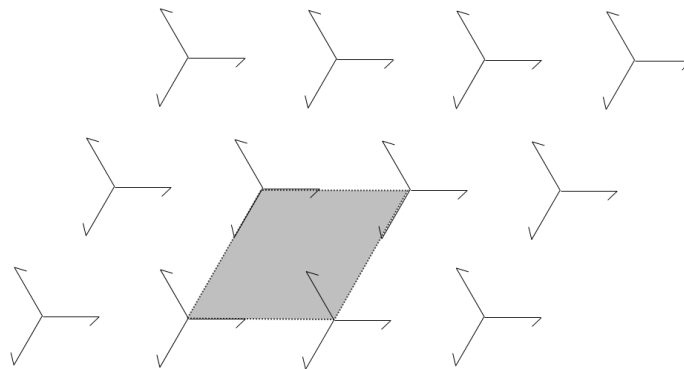


Fig. 3.18: Motivo de \mathcal{W}_3

Estendendo \mathcal{W}_3 para um grupo de papel de parede \mathcal{W} que não tem reflexões, mas tem reflexões com deslizamento, pelo Teorema 76, deve haver uma reflexão com deslizamento que leva o 3-centro A em algum 3-centro que não está no reticulado por translação determinado por A .

Pela composição desta reflexão com deslizamento com uma translação e possivelmente com uma rotação de centro A , vamos assumir que \mathcal{W} contenha uma reflexão com deslizamento que leva A tanto para G quanto para J . Suponha que γ é uma reflexão com deslizamento em \mathcal{W} que leva A até G . Então $\gamma = \sigma_z \circ \sigma_Z$, onde Z é o ponto médio de \overline{AG} e z é alguma reta que contém G . Se σ_z fixa o conjunto de todos 3-centros, então σ_z também deve fixar o conjunto de todos os 3-centros.

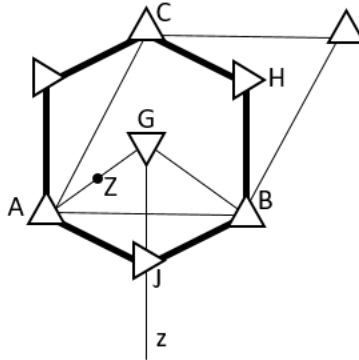


Fig. 3.19

Pela composição de σ_z com alguma rotação sobre G , vamos supor sem perda de generalidade, que z é a mediatriz de \overline{JB} ou que $z = \overleftrightarrow{GJ}$. A primeira suposição é impossível, pois caso contrário \overleftrightarrow{AG} é um eixo de γ e $\tau_{B,A} \circ \gamma^2$ é uma translação em \mathcal{W} de comprimento AG e menor que $\tau_{A,B}$. Logo $z = \overleftrightarrow{GJ}$. Porém, temos que $\rho_{G,-120} \circ \gamma = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}} \circ \sigma_z \circ \sigma_z \circ \sigma_z = \sigma_{\overleftrightarrow{ZJ}}$ e \mathcal{W} contém a reflexão que pertence à mediatriz de \overline{AG} .

Da mesma forma, a presença de uma reflexão com deslizamento que leva de A a J implica que a reflexão que pertence à mediatriz de \overline{AJ} também está contida em \mathcal{W} . De qualquer forma, \mathcal{W} deve conter uma reflexão se \mathcal{W} é uma extensão de \mathcal{W}_3 e contém uma isometria ímpar.

Todas as extensões de \mathcal{W}_3 para um grupo que não possua 6-centro pela adição de isometrias ímpares são obtidas pela adição de reflexões.

Se \mathcal{W}_3 é estendido pela adição de σ_l , então a reta l deve ser um eixo de simetria para o conjunto de 3-centros. Como uma reta deve passar por pelo menos um 3-centro, vamos supor que l é uma reta que passe pelo 3-centro A .

Definição 95. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_3^1 é o que possui um 3-centro, não possui 6-centros e cada um dos 3-centros pertence a eixo de simetria. Denotaremos

$$\mathcal{W}_3^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{\overleftrightarrow{AG}} \rangle$$

3 Papéis de Parede

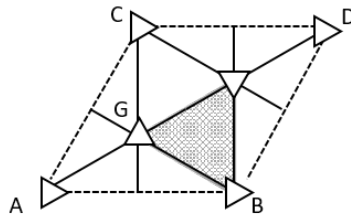


Fig. 3.20: Célula com base de \mathcal{W}_3^1

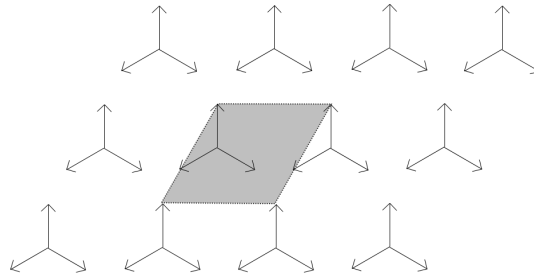


Fig. 3.21: Motivo de \mathcal{W}_3^1

Definição 96. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_3^2 é o que possui um 3-centro fora dos eixos de simetria e não possui 6-centros. Denotaremos

$$\mathcal{W}_3^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{\overleftrightarrow{AB}} \rangle$$

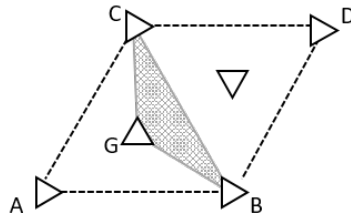


Fig. 3.22: Célula com base de \mathcal{W}_3^1

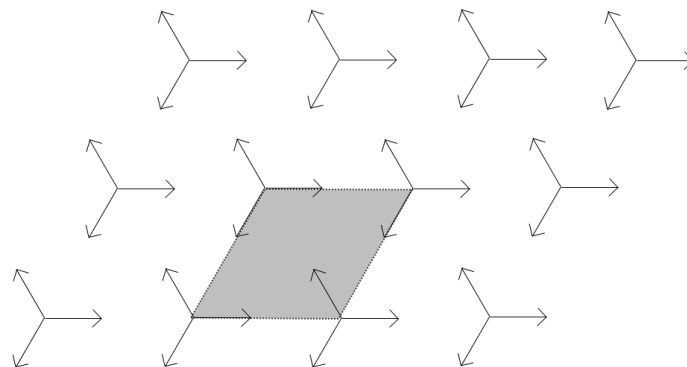
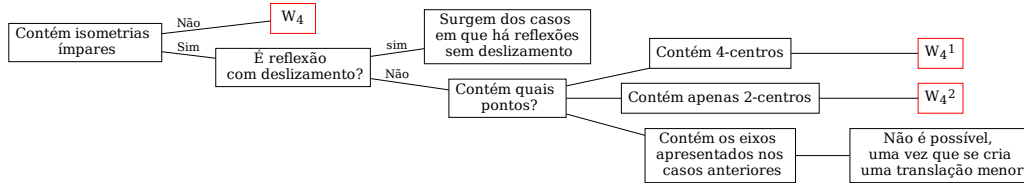


Fig. 3.23: Motivo de \mathcal{W}_3^2

Corolário 97. Um padrão de papel de parede que possua apenas 3-centros tem como seu grupo de simetria é um \mathcal{W}_3 ou é \mathcal{W}_3^1 ou é \mathcal{W}_3^2 .

4-centros

Agora classificaremos os papéis de parede que possuem 4-centros.



Teorema 98. Suponha que A é um 4-centro de \mathcal{W} . Então não há 3-centros em \mathcal{W} e nem 6-centros. Além disso, o centro de simetria mais próximo de A é um 2-centro M , e A é o centro de um quadrado cujos vértices são 4-centros e cujos lados são bissectados por 2-centros. Todos os centros de simetria de \mathcal{W} são determinados por A e M .

Demonstração. Pelo Corolário 86, se existe um 4-centro A pertencente a \mathcal{W} , então \mathcal{W} contém apenas 2-centros e 4-centros.

Seja M o centro de simetria mais próximo a A . Se M é um 4-centro, então existe um K tal que $\rho_{A,90} \circ \rho_{M,90} = \rho_{K,180} = \sigma_K$, então K está mais próximo de A do que M . Portanto, M deve ser um 2-centro.

Vamos considerar que exista um 4-centro E tal que E é obtido por $\rho_{M,180} \circ \rho_{A,-90} = \rho_{E,90}$. Então as imagens obtidas de E e M através das potências de $\rho_{A,90}$ são, respectivamente, os vértices e os pontos médio do quadrado afirmado no teorema.

Note que $\tau_{A,E} \notin \mathcal{W}$, pois caso contrário, existiria Z , dado por $\tau_{A,E} \circ \sigma_A = \sigma_Z$, onde Z seria um centro de simetria mais próximo de A do que M . Observe na figura abaixo:

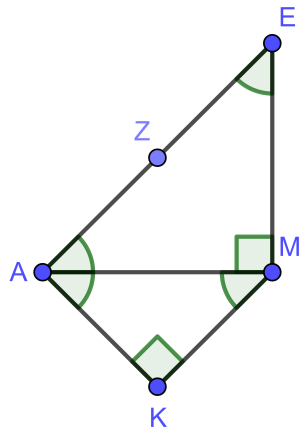


Fig. 3.24

Se $N = \rho_{A,90}(M)$, $\tau_{A,B} = \sigma_M \circ \sigma_A$ e $\tau_{A,C} = \sigma_N \circ \sigma_A$, então $\square NAME$ é um quadrado e $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ são as menores translações possíveis em \mathscr{W} e o subgrupo de translações gerador.

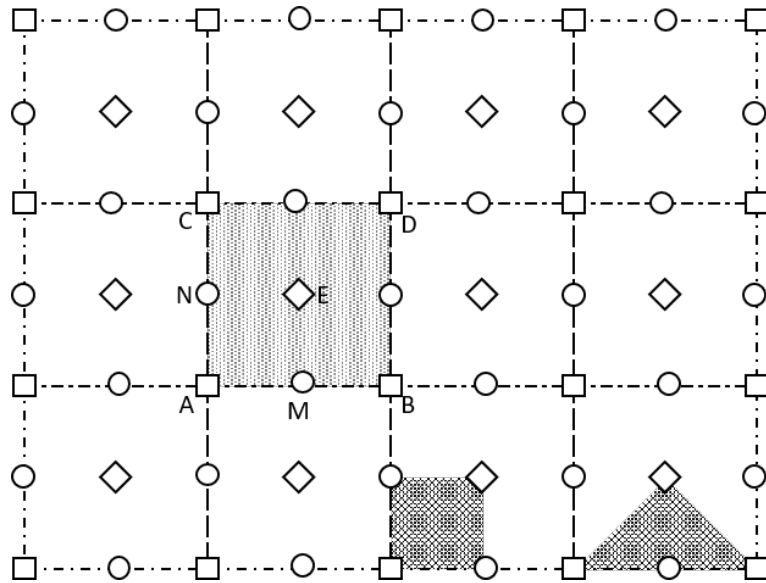


Fig. 3.25: Centros de rotação de \mathscr{W}_4

□

Logo, não há mais espaço para mais centros de simetrias do que os já tratados aqui.

Até este instante construímos um grupo de papel de parede \mathscr{W}_4 que possui um 4-centro e não possui eixos de simetria.

Definição 99. Denotemos por

$$\mathcal{W}_4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90} \rangle$$

onde E é o centro do quadrado $\square ABCD$.

Uma das possíveis bases para \mathcal{W}_4 é a região poligonal delimitada pelo quadrilátero $\square NAME$.

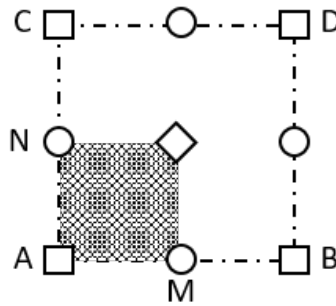


Fig. 3.26: Base de \mathcal{W}_4

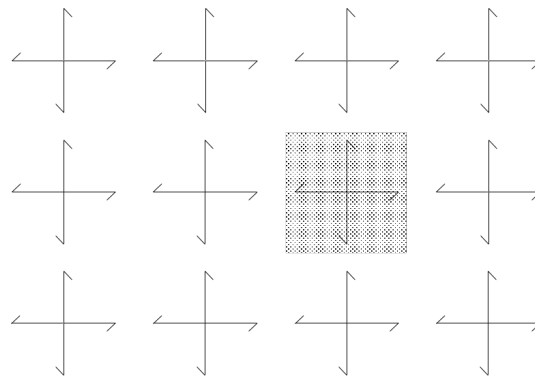


Fig. 3.27: Motivo de \mathcal{W}_4

Se \mathcal{W} não contém isometrias ímpares, então \mathcal{W} deve ser \mathcal{W}_4 . Fazendo uma análise análoga aos casos de \mathcal{W}_6 e \mathcal{W}_3 , vamos obter outros grupos a partir de \mathcal{W}_4 .

Então adicionando isometrias ímpares a \mathcal{W}_4 , temos que se σ_l pertence a \mathcal{W} , então l deve ser um eixo de simetria para o conjunto de todos os 4-centros de \mathcal{W} .

Vamos considerar dois casos:

1. o eixo de simetria contém um 4-centro
2. o eixo de simetria não contém nenhum 4-centro

Vamos utilizar as retas \overleftrightarrow{AE} e \overleftrightarrow{MN} da Figura 3.25 para verificar os casos definidos a seguir.

3 Papéis de Parede

Definição 100. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_4^1 é o que possui um eixo de simetria que passa por um 4-centro

$$\mathcal{W}_4^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overleftrightarrow{AE}} \rangle.$$

Neste caso, \mathcal{W}_4^1 é gerado por três reflexões, em três eixos de simetria que contêm os lados de um triângulo retângulo isósceles $\triangle AME$, conforme a Figura 3.28.

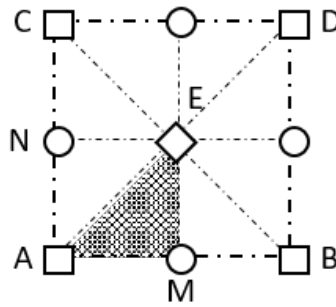


Fig. 3.28: Bases de \mathcal{W}_4^1

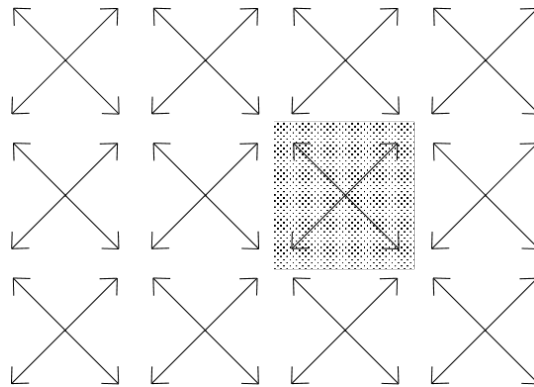


Fig. 3.29: Motivo de \mathcal{W}_4^1

Definição 101.

Definição 102. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_4^2 é o que possui um eixo de simetria que não passa por 4-centros.

$$\mathcal{W}_4^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overleftrightarrow{MN}} \rangle$$

Neste caso, \mathcal{W}_4^2 é gerado por três reflexões, em três eixos de simetria que contêm os lados de um triângulo retângulo isósceles $\triangle MAN$, conforme a Figura 3.30.

3 Papéis de Parede

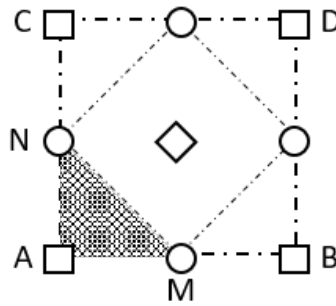


Fig. 3.30: Bases de \mathcal{W}_4^2

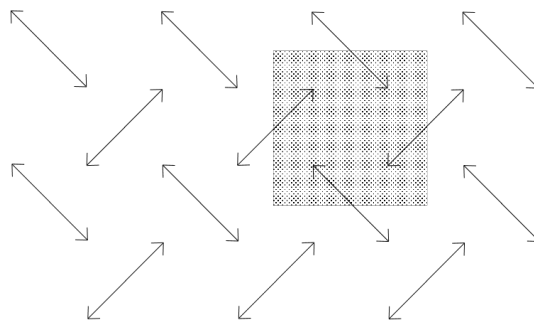


Fig. 3.31: Motivo de \mathcal{W}_4^2

Não é possível adicionar $\sigma_{\overleftrightarrow{AE}}$ e $\sigma_{\overleftrightarrow{MN}}$ ao mesmo tempo a \mathcal{W}_4 sem que seja introduzido um centro de simetria mais próximo a A do que M.

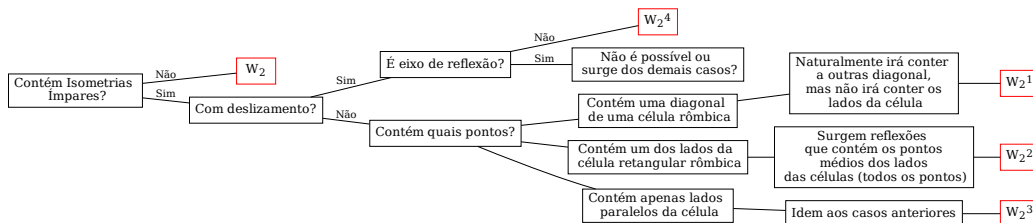
Agora, vamos considerar que é possível estender \mathcal{W}_4 a um grupo de papel de parede \mathcal{W} sem reflexões, mas adicionando isometrias ímpares. Pelo Teorema77, podemos supor que \mathcal{W} contém uma reflexão com deslizamento que leva o 4-centro A a um outro 4-centro que é uma das translações reticuladas determinadas por A.

Vamos supor que \mathcal{W} contenha uma reflexão com deslizamento γ que leva A a E. Seja Z o ponto médio de \overline{AE} , então $\gamma = \sigma_z \circ \sigma_z$ para alguma reta z que contenha E. Se γ fixa o conjunto de todos os 4-centros, então z deve ser um entre \overleftrightarrow{ME} , \overleftrightarrow{BE} ou \overleftrightarrow{NE} .

Porém, as composições de $\gamma \circ \rho_{E,90}$, $\gamma \circ \rho_{E,180}$ e $\gamma \circ \rho_{E,270}$ são reflexões em \overleftrightarrow{MN} . Portanto não há outras extensões de \mathcal{W}_4 .

Corolário 103. Um padrão de papel de parede que possua um 4-centro tem como seu grupo de simetria ou é um \mathcal{W}_4 , ou é \mathcal{W}_4^1 , ou é um \mathcal{W}_4^2 .

2-centros



Suponha que um grupo de papel de parede \mathcal{W} possua um 2-centro A e todo centro de simetria de \mathcal{W} é um 2-centro. Então σ_A pertence a \mathcal{W} .

Definição 104. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_2 é o que possui um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro e não fixa isometrias ímpares.

Se $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ é o subgrupo gerador de \mathcal{W} , então sejam $\sigma_M = \tau_{A,B} \circ \sigma_A$, $\sigma_N = \tau_{A,C} \circ \sigma_A$ e $\sigma_E = \sigma_N \circ \sigma_A \circ \sigma_M$. Os pontos M, N e E são 2-centros e o quadrilátero $ABCD$, onde $D = \tau_{A,B} \circ \tau_{A,C}(A)$ é uma célula unitária de \mathcal{W} .

No reticulado, cada $A_{i,j}$ é um 2-centro, assim como os pontos médios dos lados das células unitárias do reticulado e as intersecções das diagonais destas.

Neste grupo de papel de parede não é possível adicionar outros centros de rotação, ou neste caso, pontos de simetria. Logo, os pontos de simetria descritos acima são todos os possíveis para \mathcal{W} . Não havendo isometrias ímpares, temos que os centros de simetria formam o padrão observado na imagem 3.32.

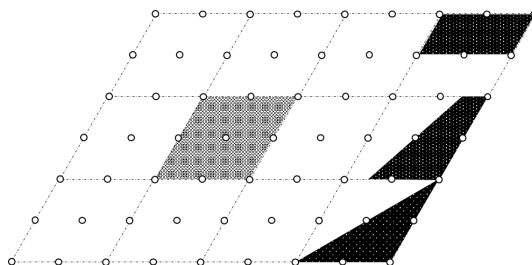


Fig. 3.32: Centros de rotação de \mathcal{W}_2

Temos então que

$$\mathcal{W}_2 = \langle \tau_{A,B}, \rho_{A,180} \rangle = \langle \tau_{A,B}, \sigma_A \rangle.$$

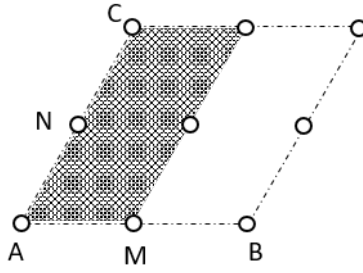


Fig. 3.33: Base de \mathcal{W}_2

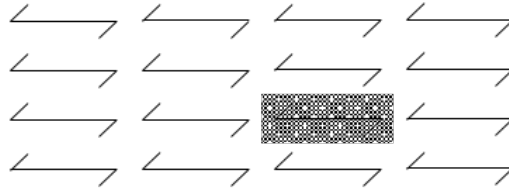


Fig. 3.34: Motivo de \mathcal{W}_2

Utilizando agora as mesmas técnicas utilizadas nos casos anteriores, vamos adicionar isometrias ímpares a \mathcal{W}_2 para comprovar a existência de outros padrões de papéis de parede que contenham apenas 2-centros.

Vamos supor então que $\sigma_l \in \mathcal{W}$. Precisamos verificar quais são os pontos que estão contidos em l . Para isto, teremos três casos:

- l contém a diagonal de uma célula rômbrica não retangular;
- l contém os lados de uma célula retangular rômbrica;
- l contém apenas um par de lados opostos paralelos de uma célula retangular.

Para que uma reta que contenha um dos lados da célula seja um eixo de reflexão, esta célula precisa ser retangular e que para que uma reta que contenha uma diagonal da célula seja um eixo de simetria, esta célula precisa ser rômbrica.

Para tais casos conseguimos encontrar os três grupos de padrão de papel de parede a seguir.

Definição 105. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_2^1 é o que possui um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro e alguns 2-centros, mas não todos, pertencem a um eixo de simetria.

Para isto, vamos assumir que \mathcal{W} contenha uma célula unitária rômbrica não-retangular. Ao adicionar uma reflexão σ_l onde l é a diagonal da célula unitária, é necessário também adicionar uma reflexão que contenha a outra diagonal da célula, uma que o centro da célula unitária é um 2-centro, pois $\sigma_{\overline{AE}} \circ \sigma_E = \sigma_{\overline{BE}}$.

Temos então que

3 Papéis de Parede

$$\mathcal{W}_2^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{A,E}, \sigma_{B,E} \rangle.$$

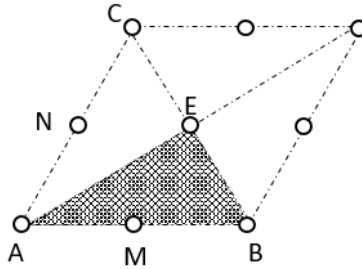


Fig. 3.35: Base de \mathcal{W}_2^1

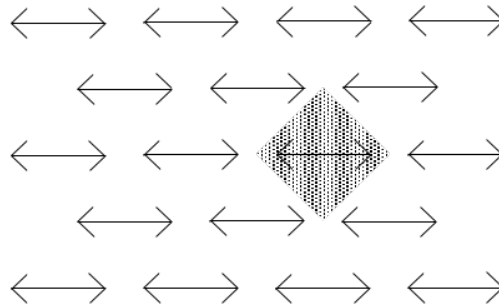


Fig. 3.36: Motivo de \mathcal{W}_2^1

Para o caso em que a célula unitária rômbrica é retangular, então a célula é quadrada e, portanto um caso especial das células retangulares, que serão tratados a seguir.

Definição 106. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_2^2 é o que possui um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro e todos 2-centros pertencem a um eixo de simetria.

Neste caso a célula precisará ser rômbrica, uma vez que ao adicionarmos σ_l , l será uma das diagonais da célula unitária. Além disso ela também não poderá conter reflexões em uma diagonal e num eixo de simetria paralelo ao lado da célula unitária se todos os n -centros forem 2-centros.

Considerando que a célula unitária possa ser retangular e que $\sigma_l \in \mathcal{W}$ com l paralela ao lado de uma célula unitária definida por $\square ABDC$. Temos aqui então duas possibilidades:

- l passa um 2-centro;

3 Papéis de Parede

- l passa entre duas retas adjacentes que contém 2-centros.

Tratando o primeiro caso, ao adicionarmos uma reflexão em uma das retas que contém o lado do quadrilátero $\square NAME$ será necessário introduzir reflexões em todas as retas que contém os lados deste quadrilátero. Temos então que

$$\mathcal{W}_2^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AM}}, \sigma_{\overleftrightarrow{AN}} \rangle.$$

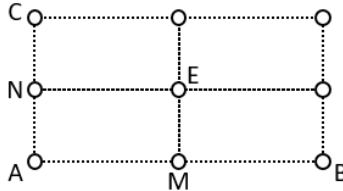


Fig. 3.37: Base de \mathcal{W}_2^2

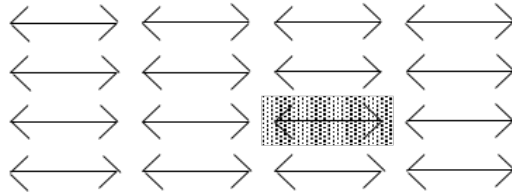


Fig. 3.38: Motivo de \mathcal{W}_2^2

Definição 107. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_2^3 é o que possui um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro, possui um eixo de simetria e todos os eixos de simetria são paralelos.

Este segue da definição anterior, do caso em que l passa entre duas retas que contém 2-centros. Vamos supor, sem perda de generalidade, que l é paralela a \overleftrightarrow{AN} . Seja p a mediatriz de \overline{AM} . Temos então que

$$\mathcal{W}_2^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \sigma_p \rangle.$$

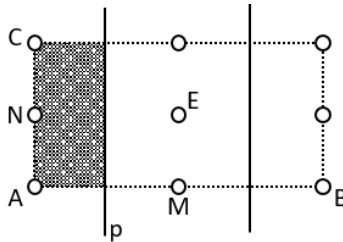


Fig. 3.39: Base de \mathcal{W}_2^3

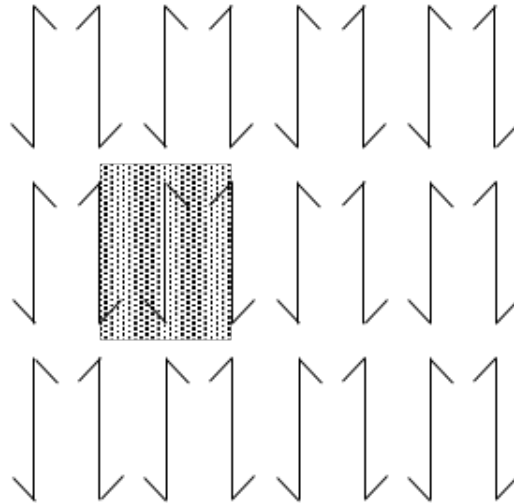


Fig. 3.40: Motivo de \mathcal{W}_2^3

Definição 108. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_2^4 é o que possui um 2-centro, todo centro de simetria é um 2-centro, não possui eixos de simetria, mas é fixado por uma reflexão com deslizamento.

Vamos verificar o caso em que adicionamos um reflexão com deslizamento γ a \mathcal{W}_2 sem que sejam adicionadas reflexões. Caso adicionemos uma reflexão com deslizamento cujo eixo contenha 2-centros, isso requer a introdução de uma reflexão

Vamos supor então que o eixo desta reflexão com deslizamento esteja entre duas retas adjacentes que contenham 2-centros. Será necessário então que a célula unitária seja retangular.

Agora, sejam p e q as mediatrizes de \overline{AM} e \overline{AN} , respectivamente. Porém, se tomarmos $\tau_{C,A} \circ \gamma_p$ obteremos uma reflexão σ_p .

Logo, γ deve ser uma reflexão com deslizamento que leva M em N e que também leve A em E . Seja ϵ a reflexão com deslizamento que leva N em M e A em E . Então, o eixo de simetria de γ é p e $\gamma^2 = \tau_{A,C}$, já o eixo de ϵ é q e $\epsilon^2 = \tau_{A,B}$, como $\gamma \circ \sigma_A = \epsilon$, então temos que

$$\mathcal{W}_2^4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \gamma_p \rangle$$

que contém todas as reflexões com deslizamento possíveis.

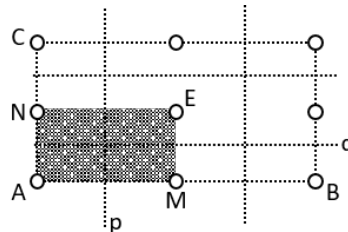


Fig. 3.41: Base de \mathcal{W}_2^4

3 Papéis de Parede

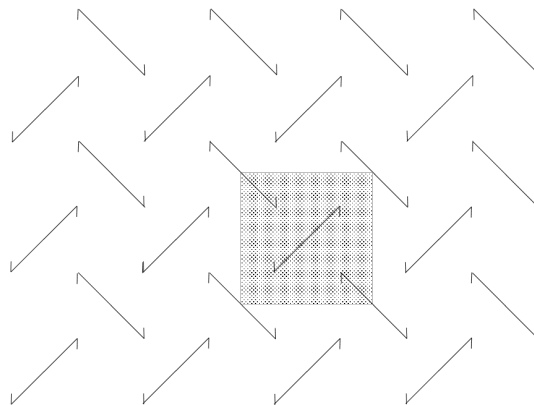
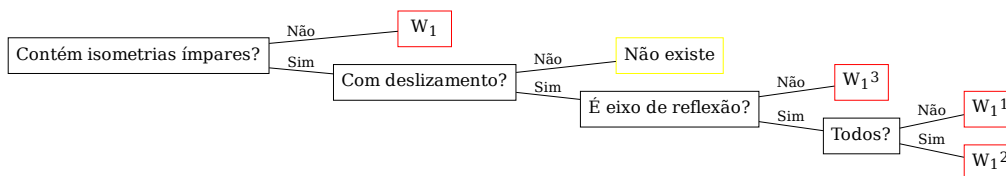


Fig. 3.42: Motivo de \mathcal{W}_2^4

Corolário 109. Um padrão de papel de parede que possua um 2-centro tem como seu grupo de simetria ou é um entre \mathcal{W}_2 , \mathcal{W}_2^1 , \mathcal{W}_2^2 , \mathcal{W}_2^3 ou \mathcal{W}_2^4 .

\mathcal{W} não possui centros de simetria ou rotação



Se \mathcal{W} contém σ_l , suponha que $A \in l$. Se \mathcal{W} não contém reflexões, mas contém reflexões com deslizamento, suponha que A está contido no eixo de reflexão com deslizamento em \mathcal{W} .

Para o caso em que \mathcal{W} contém apenas translações. Temos que

$$\mathcal{W}_1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$$

sendo A um ponto qualquer e A, B e C são não colineares.

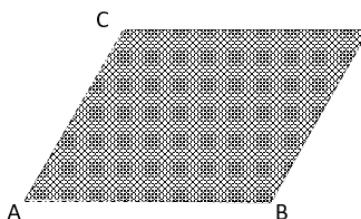


Fig. 3.43: Base de \mathcal{W}_1

3 Papéis de Parede

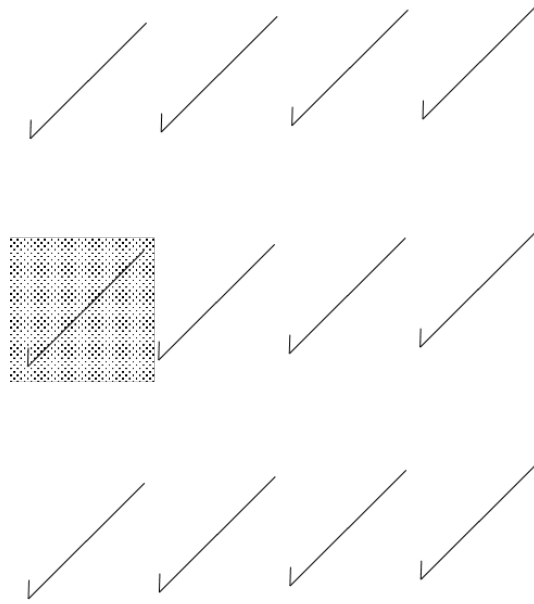


Fig. 3.44: Motivo de \mathcal{W}_1

Definição 110. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_1 é o que não possui centros de rotação e não é fixado por nenhuma outra isometria ímpar.

Vamos adicionar isometrias ímpares a \mathcal{W}_1 para obter outros grupos de papel de parede.

Se $\sigma_l \in \mathcal{W}$ com $A \in l$ então teremos uma célula unitária definida por $\square ABDC$, sendo $l = \overleftrightarrow{AD}$ ou então existe uma célula unitária retangular definida por $\square ABDC$ com $l = \overleftrightarrow{AC}$.

Caso $\square ABDC$ seja uma célula unitária rômbrica retangular (quadrada) \mathcal{W} não poderá conter, simultaneamente, reflexões em \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{AC} , pois \mathcal{W} não contém rotações.

Sejam M, N, K e L os pontos médios de $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{CD}$ e \overline{BD} , respectivamente, onde $\square ABDC$ é uma célula unitária rômbrica de \mathcal{W} . \overleftrightarrow{NK} não pode ser um eixo de simetria, pois é paralela ao lado da célula unitária, que precisaria ser retangular para que isso fosse possível. Seja então γ a reflexão com deslizamento com eixo \overleftrightarrow{NK} que leva N em K . Então $\gamma^2 = \tau_{A,D}$. Porém se γ pertence a \mathcal{W} então temos um grupo de parede que é gerado tanto por γ quanto por $\sigma_{\overleftrightarrow{AD}}$. Observe na Figura 3.45. Temos então que

$$\mathcal{W}_1^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AD}} \rangle = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle.$$

3 Papéis de Parede

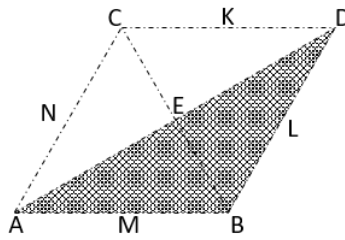


Fig. 3.45: Base de \mathcal{W}_1^1

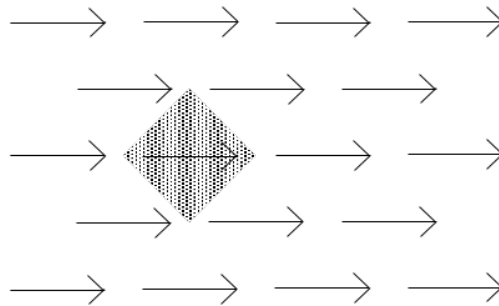


Fig. 3.46: Motivo de \mathcal{W}_1^1

Definição 111. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_1^1 é o que não possui eixos de simetria, é fixado por reflexões e reflexões com deslizamento, mas alguns eixos de reflexão com deslizamento não são eixos de simetria.

Agora, para o caso em que temos uma célula unitária retangular definida por $\square ABDC$, onde $l = \overleftrightarrow{AC}$ é um eixo de reflexão de \mathcal{W}_1^1 . Neste caso, todos os eixos de reflexão com deslizamento são da forma $(\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \circ \tau_{A,B}^j) \circ \tau_{A,C}^i$, com $i \neq 0$ e todos estes eixos também são eixos de reflexão.

Temos então

$$\mathcal{W}_1^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \rangle.$$

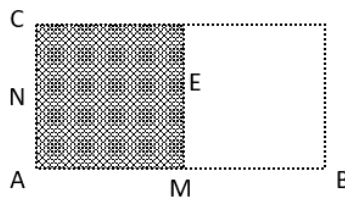


Fig. 3.47: Base de \mathcal{W}_1^2

3 Papéis de Parede

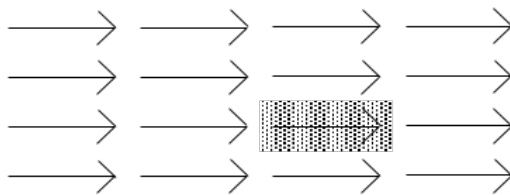


Fig. 3.48: Motivo de \mathcal{W}_1^2

Definição 112. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_1^2 é o que não possui centros de rotação e é fixado por reflexões e reflexões com deslizamento.

Vamos considerar agora que \mathcal{W}_1 contenha apenas reflexões com deslizamento. Seja γ a reflexão com deslizamento com eixo \overleftrightarrow{AB} que leva A a M . Os eixos de γ devem ser paralelos, já que \mathcal{W}_1 não possui rotações. Logo $\gamma^2 = \tau_{A,B}$. Temos então um grupo que é gerado por $\tau_{A,C}$ e γ . Seja $\epsilon = \tau_{A,C} \circ \gamma$. ϵ é uma reflexão com deslizamento com eixo em \overleftrightarrow{NE} que leva N em E que gera o mesmo grupo. Portanto temos um grupo que contém todas as possíveis reflexões com deslizamento.

Então temos que

$$\mathcal{W}_1^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle$$

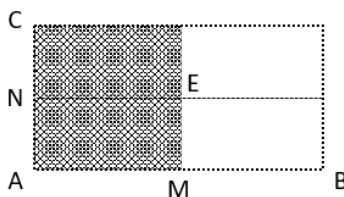


Fig. 3.49: Base de \mathcal{W}_1^3

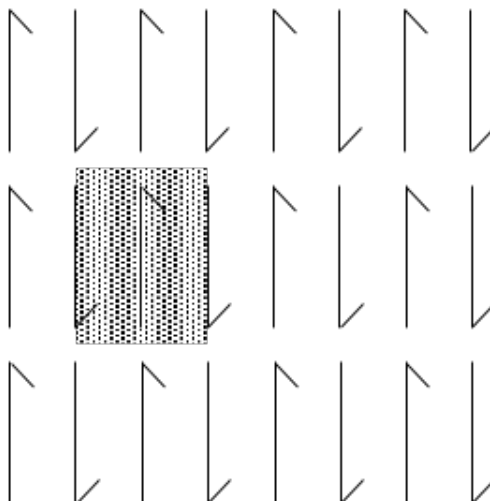


Fig. 3.50: Motivo de \mathcal{W}_1^3

3 Papéis de Parede

Definição 113. Um grupo de papel de parede \mathcal{W}_1^3 é o que não possui centros de rotação, não possui eixos de reflexão, mas é fixado por reflexões com deslizamento.

Corolário 114. Um padrão de papel de parede que não possua n -centros tem como seu grupo de simetria ou é um entre \mathcal{W}_1 , \mathcal{W}_1^1 , \mathcal{W}_1^2 ou \mathcal{W}_1^3 .

Corolário 115. Se \mathcal{W} é um grupo de papéis de parede, então existem pontos e retas tais que \mathcal{W} é um dos 17 grupos:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_4 & \mathcal{W}_3 & \mathcal{W}_6 \\
 \mathcal{W}_1^1 & \mathcal{W}_2^1 & \mathcal{W}_4^1 & \mathcal{W}_3^1 & \mathcal{W}_6^1 \\
 \mathcal{W}_1^2 & \mathcal{W}_2^2 & \mathcal{W}_4^2 & \mathcal{W}_3^2 & \\
 \mathcal{W}_1^3 & \mathcal{W}_2^3 & & & \\
 & \mathcal{W}_2^4 & & &
 \end{array}$$

4 Obras de Escher

4.1 Biografia

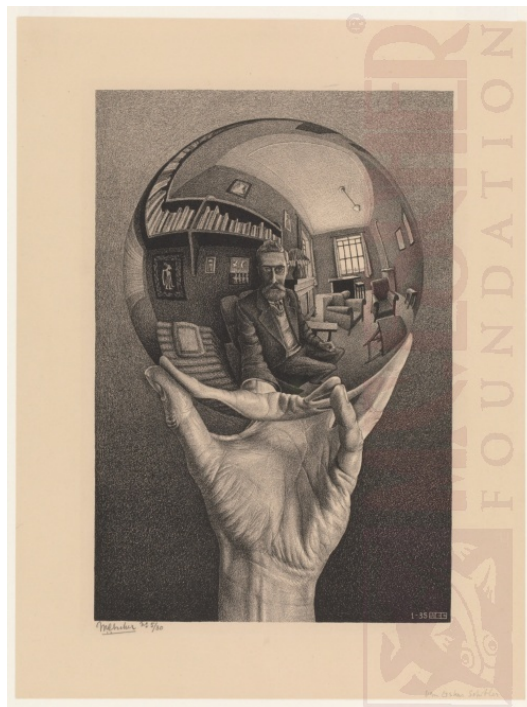


Fig. 4.1: Hand with Reflecting Sphere (Self Portrait in Spherical Mirror). January 1935, Lithograph.

Para introduzir um pouco da história de Escher, vamos apresentar aqui o autorretrato que o ele produziu em 1935, *Hand with Reflecting Sphere (Lithograph, 1935)*. Para produzi-la foi necessário trabalhar com um tipo de reflexão e com técnicas de litografia, que é um técnica de gravura que envolve a criação de marcas ou desenhos sobre uma matriz, geralmente uma pedra calcária ou em madeira, com um lápis gorduroso, que depois é gravada num papel, de forma refletida, como num espelho. Basta olhar a imagem que podemos perceber as inúmeras habilidades que Escher possuía, não só como artista, mas em seu conhecimento geométrico, mesmo não possuindo formação nesta área. Apesar do seu destaque em desenhar, ele nunca foi um aluno de tirar notas boas na escola, alcançando apenas notas medianas em matemática.

O aprimoramento e aplicação de técnicas tais como construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses (padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes) na produção de suas obras, tornaram o trabalho de Escher internacionalmente famoso, chamando atenção de diversas pessoas, inclusive fora da arte.

Nascido em 17 de junho de 1898, o artista holandês Maurits Cornelis Escher, era o mais novo de quatro filhos. Todos os seus irmãos mais velhos se tornaram cientistas, enquanto ele estudou brevemente arquitetura, mas informou a seu apenas, após uma semana, que gostaria de sair do curso. Mudou então para artes decorativas, na qual permaneceu até 1922, quando deixou a escola depois de ter experiência adquirida em desenho e ao fazer xilogravuras, tais estas que consagraram seu trabalho.

Seu pai era um engenheiro civil, que na infância de Escher, após uma viagem ao Japão trouxe algumas xilogravuras sobre a cultura japonesa, e uma das possibilidades que existem é de que aquelas que talvez estavam penduradas na casa da família podem ter inspirado Escher a fazer suas próprias xilogravuras.

Itália

Após completar seus estudos, mudou-se para a Itália, onde morou de 1924 a 1935. Nesse período casou-se com Jetta Umiker e viajou por diversas cidades, fazendo diversos desenhos e esboços, principalmente de paisagens, que depois levava para seu estúdio e que inspiraram seus trabalhos. Um exemplo clássico é da pintura *Waterfall* (1961), na qual Escher utiliza da técnica de construções impossíveis, técnica lhe deu mais notoriedade mundial.

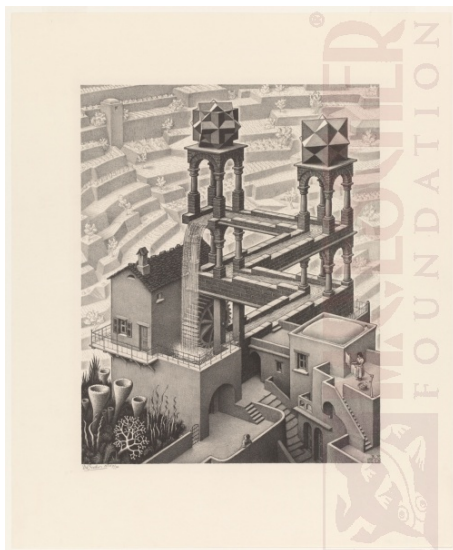


Fig. 4.2: Waterfall, 1961

Metamorfoses

Em 1937, Escher apresentou seu primeiro trabalho envolvendo a técnica de metamorfose, *Metamorphose I*, em que podemos observar na imagem uma paisagem que começa a se transformar. As construções começam a tomar formas mais regulares, como cubos, que em seguida se tornam hexágonos, trazendo assim uma tesselação do plano, ou seja, uma figura capaz de cobrir todo o plano através de sua reprodução. Com tal tesselação e é possível então verificarmos que esses hexágonos começam a tornar outra forma com a qual novamente é possível fazer a tesselação do plano. Neste momento, seu trabalho deixou de ser com paisagens passou a ter uma série de construções abstratas, trazendo então a possibilidade dele trabalhar com ladrilhamentos.

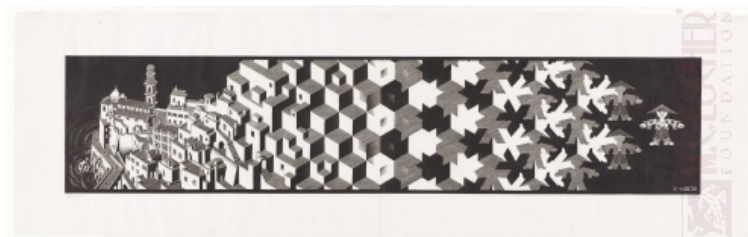


Fig. 4.3: Metamorphose I, May 1944, Woodcut. (Retirado de [3])

Uma das obras mais impressionantes de Escher é o aprimoramento de sua técnica de metamorfose: “Metamorphosis II”. Nela estão representados praticamente todas as fases e períodos do trabalho de Escher. Ela é composta por 20 blocos impressos em 3 folhas. Ao contrário de Metamorphosis I que contém apenas tons de preto, Metamorphosis II apresenta tons de verde e marrom em sua composição.

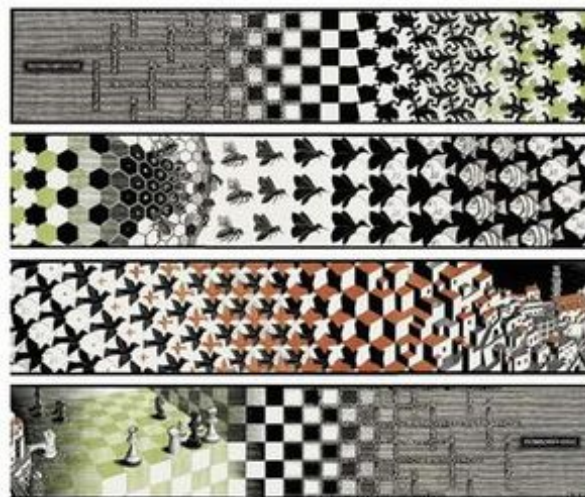


Fig. 4.4: Metamorphosis II, 1939-1940. Múltiplas linhas, para melhor visualização e ideia de continuidade. (Retirado de [4])

Preenchimento do plano

Escher já havia visto trabalhos, os quais utilizavam técnicas de preenchimento do plano, numa viagem que havia feito à Granada Espanha em 1922. Objetos de decoração do Palácio Alhambra traziam estes padrões em sua confecção. A arte moura ou arte hispano-muçulmana são encontradas principalmente no Palácio Alambra e na Mesquita de Córdoba (Córdoba, Anaduluzia, Espanha) e trazem fortemente em suas obras as técnicas de ladrilhamento que inspirou os trabalhos seguintes de Escher.

Baseado no que viu, começou a criar novos projetos. O islamismo não permitia que fossem representadas figuras de seres vivos em suas obras, logo Escher buscou seguir por este caminho, utilizando padrões de preenchimento do plano. Isso o estimulou a pesquisar: de quantas formas é possível fazer o ladrilhamento de um plano? Matematicamente, já conseguimos provar através do Teorema85 que essas possibilidades são limitadas, mas se nos basearmos na capacidade de nossa imaginação, as formas de fazer isso são infinitas.

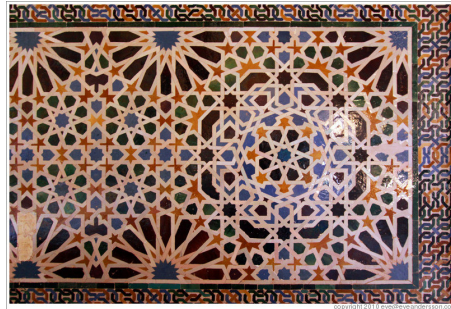


Fig. 4.5: Padrão de ladrilhamento encontrada em obra localizada no Palácio Alambra, Granada, Espanha



Fig. 4.6: “Passarinhos” - Interior do Palácio de Alambra (Retirado de [5])

Em seus trabalhos Escher utilizava técnicas de preenchimento regular do plano, porém utilizando mais de um motivo para isso, de tal forma que estes motivos se encaixassem sem se sobrepor e que também preenchessem o plano.

4.2 Escher e Coxeter

A história conta a série de conversas e cartas que Escher e Coxeter trocam ao longo de décadas após um encontro em 1954. Após este encontro, também em 1954, Coxeter pediu a Escher permissão para que pudesse utilizar algumas de suas obras que continham tesselações do plano em um trabalho. Escher concordou e em 1958 recebeu de Coxeter uma cópia do artigo que este havia publicado. Uma das imagens contidas neste artigo viria a mudar o trabalho de Escher. A Figura 4.7a que estava neste artigo de Coxeter traz uma tesselação do plano hiperbólico. Isso fez com que Escher percebesse a quantidade de novas possibilidades que poderia utilizar para desenvolver suas obras. Ainda em 1958 confeccionou a obra *Circle Limit* (Figura 4.7b), contendo a ideia das tesselações hiperbólicas de Coxeter junto à sua capacidade artísticas de cobrir o plano.



(a) A tesselação hiperbólica do artigo de Coxeter.[6] (b) Circle Limit I, M.C. Escher (1958). [6]

Fig. 4.7

Com o passar do tempo, Escher aperfeiçoou esta técnica e conseguiu fazer releituras das próprias obras, como em *Circle Limit IV (Heaven and Hell)*, 1960 (Figura 4.8), em que ele trata a obras *Angels and Devils*, 1941 na geometria hiperbólica.



Fig. 4.8: Circle Limit IV (Heaven and Hell), 1960. [6]

4.3 Padrões geométricos nas obras de Escher

Vamos começar a análise das obras de Escher nos baseando em sua obra mais conhecida até hoje: *Angels and Devils*, 1941.

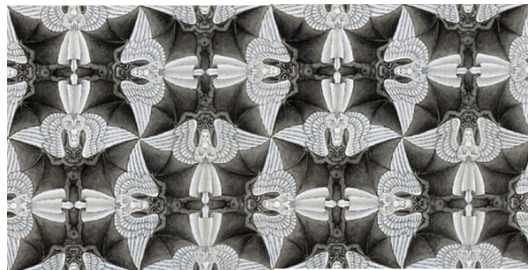


Fig. 4.9: M.C. Escher — Angels and Devils (nº45), 1941

Podemos tratar desta obra como a ideia da combinação de dois motivos que se encaixam sem se sobrepor, um apenas com os anjos e o outro apenas com os demônios.

O ponto nos quais as asas se encontram formam 4-centros, logo não será possível que aqui haja 3-centros ou 6-centros (Teorema 86), portanto é composta por células unitárias quadradas, em que os pontos médios dos lados destas células são 2-centros. Ao determinarmos os eixos de translação desta imagem é possível notar que os lados das células unitárias não são eixos de simetria, que o mesmo não ocorre com os eixos que contém com os 2-centros. Portanto o padrão utilizados para a construção desta obra é o \mathcal{W}_4^2 .

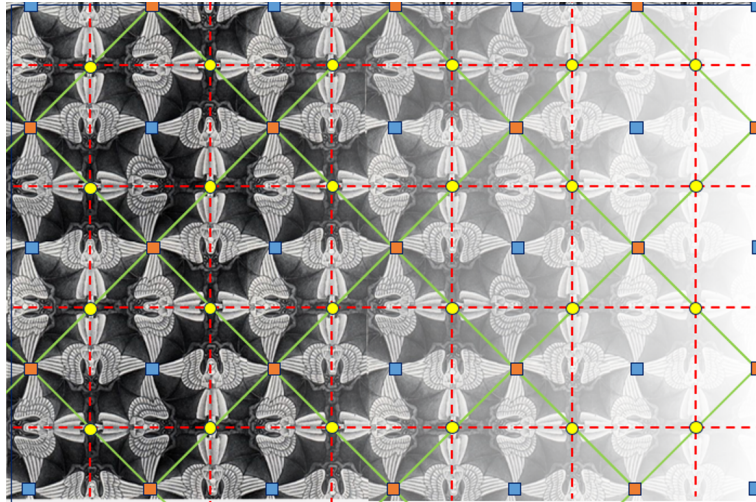


Fig. 4.10: Padrão \mathcal{W}_4^2 encontrado na obra *Angels and Devils* de Escher.

Na obra “Triangle-system B(3), type 2 (variant os no 70)”, que podemos observar abaixo, Escher fez uma construção utilizando um \mathcal{W}_6 e neste caso optou for fazer os centros de simetria utilizando cores diferentes. A fácil identificação deste grupo se dá pelo fato dela não possuir eixos de simetria.

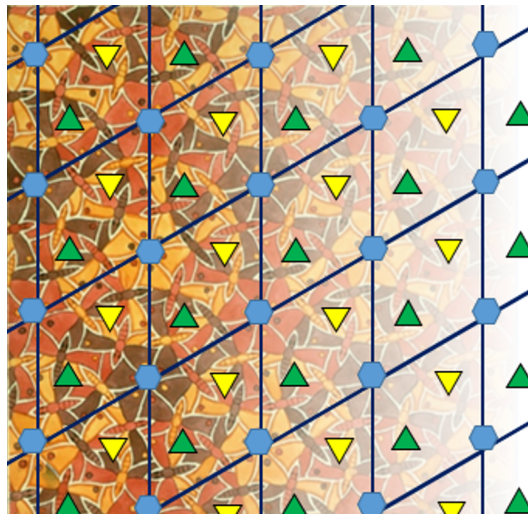


Fig. 4.11: Padrão \mathcal{W}_6 encontrado numa obra de Escher.

Ao contrário do exemplo anterior, é fácil notar na obra “Triangle system: 3 motifs each one color” (Figura 4.12) os seus eixos de simetria. Como ela possuía apenas 3 centros e todos eles estão contidos nos eixos de simetria então o padrão encontrado é o \mathcal{W}_3^1 .

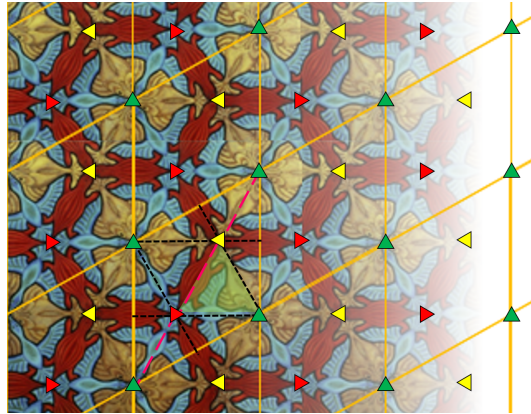


Fig. 4.12: Padrão \mathcal{W}_3^1 encontrado numa obra de Escher.

Para demonstrar um exemplo que se encontram apenas 2-centros foi escolhida a obra “Triangle system: 3 motifs each one color”. A obra não apresenta eixos de reflexão com deslizamento e os eixos de simetria são paralelos aos lados das células unitárias e contém os pontos médios destas células. Portanto o padrão encontrado nesta figura é o \mathcal{W}_2^2 .

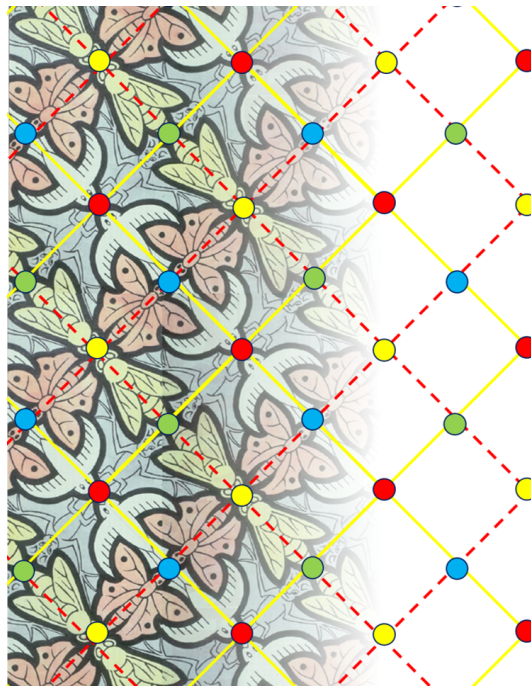


Fig. 4.13: Padrão \mathcal{W}_2^2

Para exemplificar o uso de padrões que não possuem centros de rotação, trouxemos como a obra “System IV(b)” (Figura 4.14). Podemos notar que não há eixos de reflexão e nem centros de rotação, uma vez que todos os motivos dados possuem uma mesma orientação vertical (estão todos virados para cima), porém se intercalam em linhas horizontais que encaixam com figuras viradas para a direita e para a

4 Obras de Escher

esquerda. Neste caso temos então eixos de reflexão com deslizamento que são paralelas e que duas reflexões com deslizamento de um mesmo ponto e num mesmo sentido geram uma translação. Portanto o padrão de papel de parede encontrado nesta obra é o \mathcal{W}_1^3 .

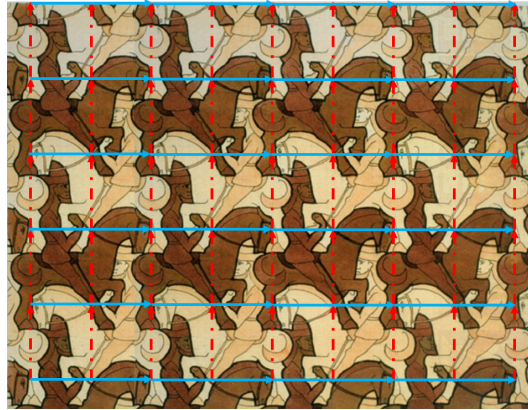


Fig. 4.14: Padrão \mathcal{W}_1^3 encontrado na obra de Escher.

5 Atividades

Segundo a Base Nacional Comum Curricular do Brasil (BNCC) “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento...O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica”.

Conforme a BNCC o conceito de simetria de reflexão deve ser tratada inicialmente no 4º ano do Ensino fundamental:

- Simetrias de reflexão: EF04MA19 - Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

Já as simetrias de translação e rotação serão tratadas no 7º ano, juntamente com uma retomada da simetria de reflexão

- Simetrias de translação, rotação e reflexão: EF07MA21 - Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

Por fim as transformações geométricas serão trabalhadas no 8º ano, tratando todos os conceitos anteriormente trabalhados e os aprofundando

- Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação: EF08MA18 - Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Com o objetivo de aprofundar os conhecimentos acima mencionados, utilizaremos as obras de Escher como inspiração para o aprendizado deste conteúdo.

A sequência de atividades propostas a seguir tem como objetivo a inclusão dos grupos de papéis de parede à base curricular de matemática, podendo também ser tratado como um conteúdo interdisciplinas, uma vez que pode ser trabalhado com conteúdos de arte conforme veremos.

5.1 Reconhecimento de Simetrias

Introduziremos nesta primeira atividade o conceito dos 17 grupos de papéis de parede. Como atividade para fixação do conteúdo serão propostos exercícios de reconhecimento de simetrias nas obras de Escher.

Plano de aula

Justificativa

- Com o objetivo de ampliar os conhecimentos geométricos e integrá-los às artes, os grupos de papel de parede tiveram papel fundamental para a criação das obras de Escher. A matemática trata as possibilidades com as quais se pode lidar neste tipo de trabalho. A arte expande estas possibilidades para o infinito.

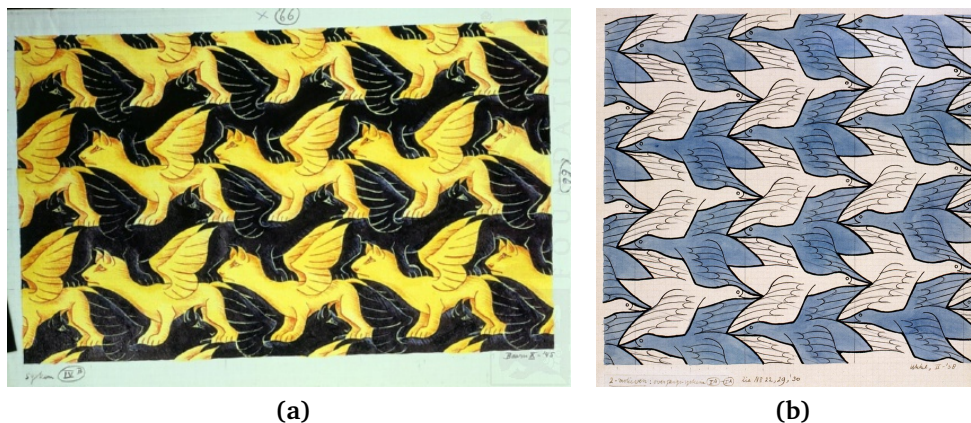


Fig. 5.1

Nas duas imagens acima os padrões de papel de parede utilizado é o mesmo (\mathcal{W}_1^3), assim como o jogo de cores, porém os motivos utilizados para os preenchimentos são diferentes.

Conhecimentos prévios necessários

- Transformações do plano (Translação, simetria em torno de um ponto, reflexão por uma reta, rotação, reflexão com deslizamento)

Organização do tempo

- 1 aulas (45 minutos) para apresentação dos conceitos de isometrias e dos padrões dos grupos de papéis de parede que possuam 6-centros ou 3-centros;
- 1 aulas (45 minutos) para apresentação dos padrões dos grupos de papéis de parede que possuam 4-centros, 2-centros ou que não possuam centros de simetria;

5 Atividades

- 1 aula (45 minutos) para atividade de identificação das simetrias nas obras de Escher.

Métodos utilizados

- Não existe um melhor grupo pelo qual começar as atividades, mas existem técnicas podem ser mais eficientes, como por exemplo, definir quais são os centros de simetria de rotação encontrados numa figura e a partir destes definir se existem ou não eixos de simetria de reflexão ou de reflexão com deslizamento, uma vez que sempre haverá translações.
- É necessário ter cuidado com os casos em que o autor utiliza motivos diferentes com as mesmas cores ou quando ele insere detalhes a estes motivos, mudando o preenchimento do desenho, mas mantendo o formato do motivo.

Dificuldades antecipadas + solução

- As células unitárias das figuras apresentadas podem estar em posições diferentes daquelas que foram apresentadas para a introdução dos 17 grupos de papéis de parede como podemos notar na Figura 3.31 e na Figura 4.10. Orientar aos alunos para que primeiro determinem todos os centros de rotação possíveis, em seguida determinar os eixos de translação que irão determinar as células. Por fim determinar se existem eixos de reflexão ou reflexão com deslizamento para definir qual é o grupo de papel de parede que foi utilizado para a construção daquele trabalho.
- As obras de Escher podem não ser suficientes para contemplar todos os papéis de parede que existem, portanto é possível que haja necessidade de completar a atividade com obras de outros artistas.

Sugestões

- A página <http://math.hws.edu/eck/js/symmetry/wallpaper.html>, traz um software que possibilita a exemplificação de todos os grupos de papéis de parede e que pode ser utilizado em sala de aula para criação de uma quantidade ilimitada de trabalhos.

5.2 Desenhando tesselações

Plano de aula

Justificativa

- Esta atividade traz uma proposta de conteúdo interdisciplinar unindo conteúdos de Geometria e Artes. Para a criação de uma obra é necessário possuir repertório artístico, porém unindo esse repertório aos conhecimentos geométricos adquiridos é possível fazer uma quantidade ilimitadas construções com padrões.

5 Atividades

- As atividades que aqui serão propostas são inspiradas nos trabalhos de Escher, porém é importante ressaltar para os alunos que as tesselações abrangem técnicas mais simples e que também podem ser utilizadas para o desenvolvimento de seus projetos.

Conhecimentos prévios necessários

- Isometrias;
- 17 grupos de papéis de parede.

Organização do tempo

- 2 aulas (45 minutos) para as construções das imagens.

Métodos utilizados

- Os alunos trabalharam em grupos, cada um utilizando um grupo de simetrias para fazer as construções. Neste momento os alunos devem ser orientados quanto às dificuldades que podem ter se escolherem grupos que possuam um grau de dificuldade maior em sua criação. O ideal seria que eles comessem por grupos de simetrias mais simples, como por exemplo \mathcal{W}_1 que possui apenas translações ou \mathcal{W}_4 que possuem apenas rotações de 90° ;
- O ideal seria que o trabalho fosse feito em conjunto com as aulas de artes, para que possa ser feito um trabalho semelhante ao de Escher, que além das construções utilizava as cores para criar efeitos em suas obras;
- Definido o grupo, começaremos a construção com a célula unitária.

Exercício 116. Vamos utilizar um padrão simples de formação conforme proposta de Paul Giganti em seu canal do Youtube para a construção dos Cavalos Voadores de Escher. Baseando a construção numa célula unitária quadrada e utilizando o padrão \mathcal{W}_1 que possui apenas translações simples. Para isso, basta desenharmos parte da imagem desejada, recortá-la e colá-la no local correto de acordo com as translações desejada. Uma vez definidos os sentidos das translações, todas deverão respeitar uma das duas para que a tesselação fique correta. Observe na sequência de imagens abaixo:

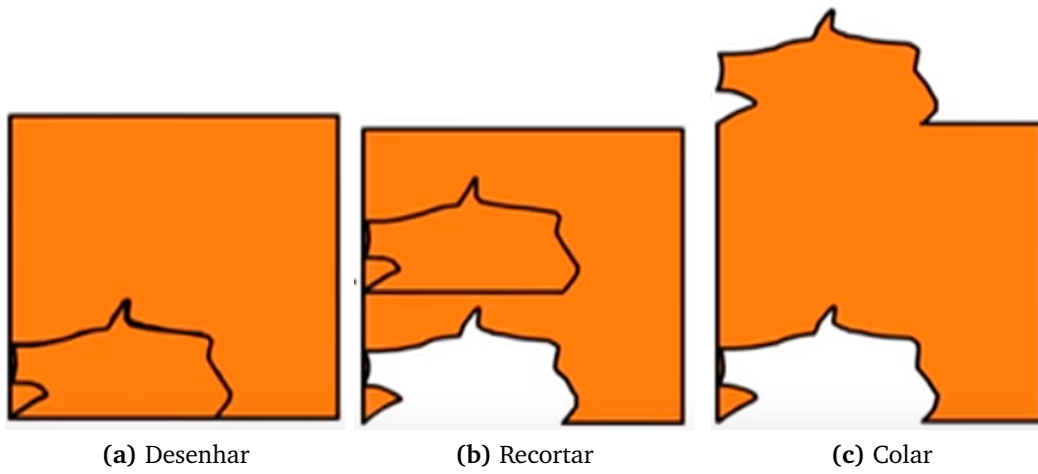


Fig. 5.2: 1ª etapa

Exemplo. Seguindo sucessivamente estes passos, devemos chegar à imagem desejada.

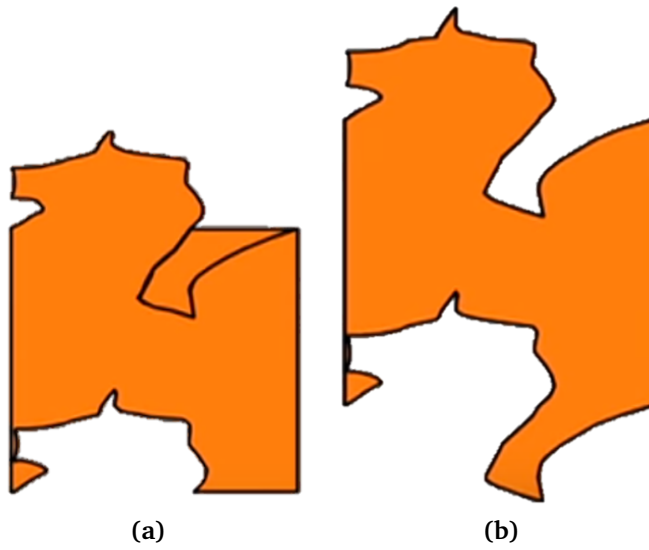


Fig. 5.3: 2ª etapa

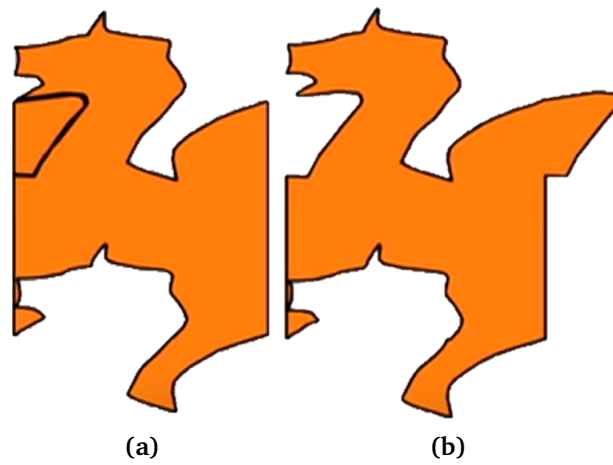


Fig. 5.4: 3ª etapa

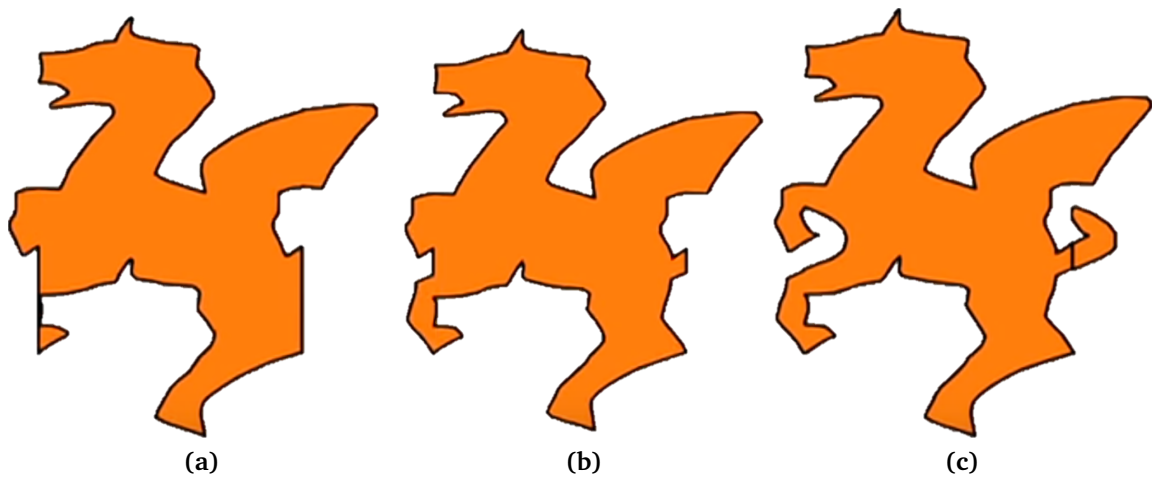


Fig. 5.5: 4ª etapa

Após a finalização da estrutura do motivo, é importante que sejam inseridas características artísticas para a conclusão do trabalho, como podemos ver abaixo.

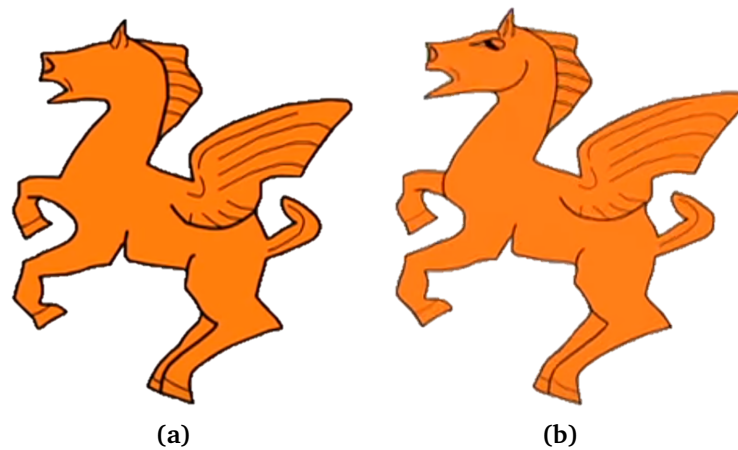


Fig. 5.6: Finalização

Concluída esta parte é necessário que hajam cópias para que seja possível fazer a tesselação desejada. Sugestão: Utilize mais de uma cor para fazer estas cópias.

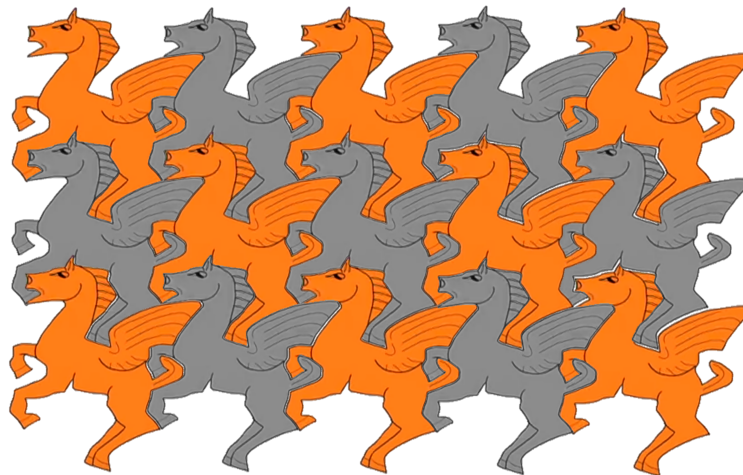


Fig. 5.7: Tesselação pelo grupo de papel de parede \mathcal{W}_1

Dificuldades antecipadas

- Os alunos podem apresentar dificuldades para com as transformações do plano e ainda estarem com dificuldades para identificar os grupos de simetria.

5.3 Construção de sólidos

Plano de aula

Justificativa

- Esta atividade tem como intenção aprofundar os conhecimentos adquiridos e concluir o conteúdo ministrado. Existem alguns papéis de parede que podem cobrir regularmente a superfície de sólidos geométricos regulares iremos definir quais são os casos possíveis para cada sólido e se um mesmo grupo de papel de parede, variando de acordo com seus motivos, se ele pode ou não cobrir a superfície do sólido.

Conhecimentos prévios necessários

- Sólidos geométricos regulares;
- Isometrias;
- 17 grupos de papéis de parede.

Organização do tempo

- 1 aulas (45 minutos) para definição de quais são os papéis de parede que podem ser utilizados de acordo com o sólidos que estão sendo trabalhados;
- 2 aulas (90 minutos) para construção dos sólidos.

Métodos utilizados

- Como nem todos os casos são possíveis para fazer o cobrimento da superfície dos sólidos, definir com os alunos quais são os casos possíveis; Figuras que não possuam centros de rotação ($\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_1^1, \mathcal{W}_1^2, \mathcal{W}_1^3$) e figuras que possuam apenas 2-centros ($\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_2^1, \mathcal{W}_2^2, \mathcal{W}_2^3, \mathcal{W}_2^4$) não são capazes de cobrir o plano de sólidos geométricos regulares. Figuras que possuem 6-centros (\mathcal{W}_6 e \mathcal{W}_6^1) podem cobrir a superfície de tetraedros e de icosaedros. Figuras que possuem 4-centros ($\mathcal{W}_4, \mathcal{W}_4^1, \mathcal{W}_4^2$) são capazes de cobrir a superfície de cubos e figuras que possuam apenas 3-centros ($\mathcal{W}_3, \mathcal{W}_3^1, \mathcal{W}_3^2$) cobrem a superfície de octaedros regulares.

Exemplo. Observe na Figura 5.8 que as faces indicadas na planificação serão adjacentes quando o tetraedro for montado, porém a imagem formada não corresponderá ao padrão da figura original e não fará o preenchimento regular deste sólido. Portanto, não é possível utilizar padrões que possuam apenas 3-centros como centros de rotação para o preenchimento de sólidos geométricos.

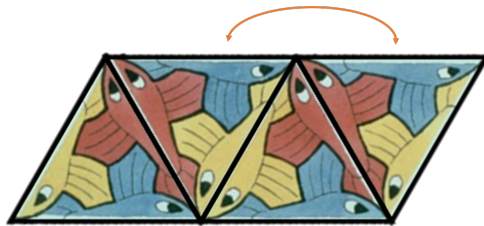


Fig. 5.8: Tetraedro mostrando padrão incorreto de preenchimento do plano.

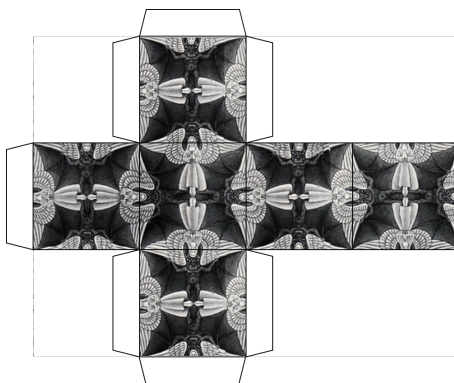


Fig. 5.9: Cubo preenchido com padrão \mathcal{W}_4^2 .

- Também é possível que ocorra confusões com casos em que as cores não se encaixem, porém os padrões estão corretos. Isto ocorre quando o artista opta por utilizar cores diferentes para representar um mesmo motivo. É importante ressaltar para o aluno que o preenchimento está correto, mas que para evitar este tipo de caso ele pode optar por uma outra imagem que possua motivos iguais com as mesmas cores ou faça apenas as alterações necessárias de cor para adequar a imagem à situação.
- Para construção dos sólidos é sugerido o uso de algum software (Power Point do pacote Office e Inkscape, que é gratuito, são boas opções) para que depois possa ser feita a impressão deste trabalho.

Dificuldades antecipadas

- Algumas escolas não têm recursos tecnológicos para fazer a parte da construção em computadores. A construção também é possível de ser feita manualmente, desde que as imagens das obras sejam impressas previamente;
- Os alunos podem optar por fazer construções que não são possíveis em alguns ou nenhum sólido.

Alguns exemplos são apresentados a seguir.

5 Atividades

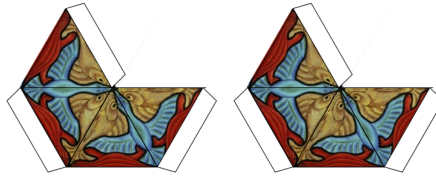
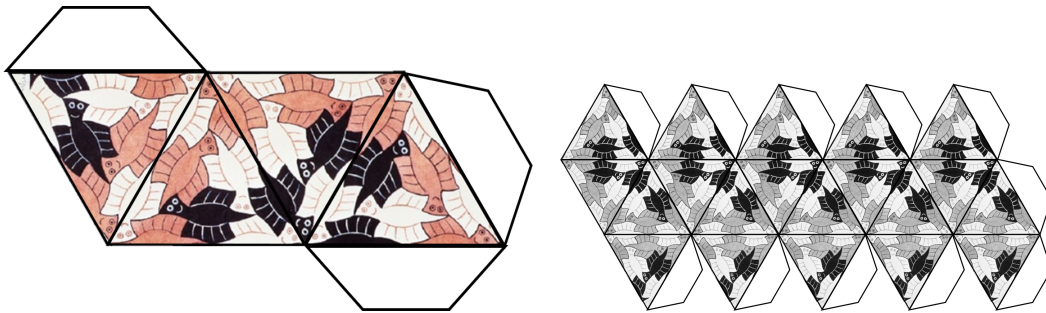


Fig. 5.10: Octaedro preenchido com padrão \mathcal{W}_3^1 .



(a) Tetraedro com padrão \mathcal{W}_6 encontrado em obra de Escher. (b) Icosaedro com padrão \mathcal{W}_6 encontrado em Escher (adaptada em tons de cinza).

Fig. 5.11: As duas figuras representadas representam o cobrimento da superfície dos sólidos, porém não há precisão no encaixe das cores, porém são respeitados os motivos e os padrões do grupo de papel de parede \mathcal{W}_6 .

Índice Remissivo

n -centro, 32

bases, 37

centro

de simetria, 32

colineação, 5

célula

retangular, 29

rômbica, 29

unitária, 29

grupo, 4

comutativo, 4

de papel de parede, 28

identidade, 4

imprópria, 10

isometria

na reta, 5

isometria do plano, 9

motivo, 37

ponto fixo, 6

própria, 10

reflexão, 6

reflexão em torno da reta, 10

reflexão no ponto, 10

reticulado por translação

retangular, 29

rômbico, 29

subgrupo gerado, 28

transformação no plano, 4

translação, 7, 13

Referências Bibliográficas

- [1] MARTIN, G. E. *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] DE MORAES, G. C. *Isometrias e grupos de friso*, 2013.
- [3] THE M.C. Escher Company B.V. M.C. Escher Collection. <https://mcescher.com/>. 22 Jan. 2020.
- [4] WIKIPEDIA, T. F. E. Metamorphosis II. https://en.wikipedia.org/wiki/Metamorphosis_II. 26 Jan. 2020.
- [5] BARBOUR, A. M. A arquitetura árabe no apogeu do Islã. <https://icarabe.org/entrevistas/a-arquitetura-arabe-no-apogeu-do-islã>. 26 Jan. 2020.
- [6] BREWMINATE. Escher and Coxeter – A Mathematical Conversation. <https://brewminate.com/escher-and-coxeter-a-mathematical-conversation/>. 22 Jan. 2020.
- [7] LIMA, E. L. *Isometrias*. SBM, 1996.
- [8] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*, 1999.
- [9] ALVES, C. M. F. *O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher*, 2014.
- [10] TJABBES, P. *O mundo mágico de Escher*. São Paulo: Ed. Centro Cultural Banco do Brasil, 2011.
- [11] SCHWARZENBERGER, R. The 17 plane symmetry groups. *The mathematical gazette*, v. 58, n. 404, p. 123–131, 1974.
- [12] SANTOS, D. F. D.; CARLINI, J. M. Escher e o ensino da geometria. *REGRASP*, v. 2, n. 3, p. 113–136, 2017.
- [13] WIKIPEDIA, T. F. E. Wallpaper group. https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group. 26 Jan. 2020.
- [14] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. ministério da educação, 2017.
- [15] ERNST, B. *The magic mirror of MC Escher*. Taschen America Llc, 2007.
- [16] ESCHER, M. C. *MC Escher: the graphic work*. Taschen, 2000.