

**Aprendendo sobre áreas através da resolução de exercícios**

**Meryelen Aldri Saia Leonetti**

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Meryelen Aldri Saia Leonetti**

## Aprendendo sobre áreas através da resolução de exercícios

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

**USP – São Carlos**  
**Agosto de 2024**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

L583a Leonetti, Meryelen Aldri Saia  
Aprendendo sobre áreas através da resolução de  
exercícios / Meryelen Aldri Saia Leonetti;  
orientador Wagner Vieira Leite Nunes. -- São  
Carlos, 2024.  
173 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Áreas. 2. Metodologias ativas. 3. Ensino de  
matemática. I. Nunes, Wagner Vieira Leite, orient.  
II. Título.

**Meryelen Aldri Saia Leonetti**

## Learning about areas through solving exercises

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes

**USP – São Carlos**  
**August 2024**



*Este trabalho é dedicado aos meus avós e tia paternos,  
João Saia, Anna Burriel Saia e Maria José Saia (In Memoriam).*



# AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a Deus pela vida, saúde, força e fé que me possibilitaram, mesmo com muita dificuldade e teimosia, chegar até aqui.

Agradeço aos meus avós paternos Anna Burriel Saia (in memoriam) e João Saia (in memoriam), e minha tia Maria José Saia (in memoriam) por toda dedicação, esforço e muito amor na minha criação e educação. Gratidão a todo apoio e carinho do meu pai José Aparecido Saia e minha mãe Tereza Poneze, meu padrasto José Laurindo Martins e madrasta Jucilene Pacheco, minha tia Benedicta Aparecida Saia e primas Ana Helena dos Santos e Aline Aparecida dos Santos. Com o carinho, compreensão e apoio de vocês a caminhada se tornou possível.

À família que construí com meu amado esposo, Marco Antônio Leonetti, nossos filhos anjos que tiveram uma passagem breve em nossas vidas, mas muito marcante durante o percurso nesse mestrado, que ingressei após perder o meu primeiro filho, Armanni Saia Leonetti (6 meses de gestação), precedido de mais quatro bebês anjos (poucas semanas de gestação) e, agora concluindo esse trabalho com a nossa filha, Aymee Iris Saia Leonetti (2 ano e 3 meses). Não posso terminar esse parágrafo sem agradecer aos meus animais de estimação. As gatinhas Lunna e Myah (in memoriam) que ficavam longas horas deitadas no meu colo enquanto estudava ou em cima dos cadernos e livros deixando um ambiente aconchegante cheio de carinho. Os cachorros Tarik (in memoriam) e Lattyfa (minha senhorinha de mais de 12 anos de companheirismo) Quero deixar algo especial registrado ao meu meninão Tarik, uma gratidão de todo coração. Ele que teve sua vida iniciada quando prestei o exame de acesso ao mestrado, me acompanhou todos esses anos e, infelizmente, partiu horas depois da minha defesa. Ficou muito clara a sua missão e o seu tempo de parceria em minha vida. Agradeço a todos por tornarem o dia a dia de viagens, aulas, estudos, escrita e muito trabalho mais leves e inspiradores com toda essa abençoada família presente na minha vida.

Gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes que desde a graduação foi responsável por muito do que aprendi e muito do que sou hoje pedagogicamente dentro de uma sala de aula. Durante a graduação, acolheu-me com muito carinho e me conduziu como um pai até me formar com muita paciência e dedicação e, não foi diferente depois de mais de uma década, como orientador, nessa caminhada, durante a construção da dissertação do PROFMAT.

À minha mãe acadêmica e do coração Prof<sup>a</sup> Dra. Ires Dias, que muito me incentivou desde quando estava fazendo os Exames Nacionais de Acesso (ENA) e perdi meu bebê, Armani com 25 semanas de gestação, um mês antes do ENA, que me fez ingressar no mestrado. Se não fosse por ela, todo apoio, carinho e acreditando em mim muito mais do que eu mesma, não teria começado e muito menos conseguido chegar até aqui! Hoje tenho minha filha Aymee Iris (sim, o nome Iris é uma homenagem à nona do coração) e concluindo esse mestrado graças a todo apoio e amor de mãe que ela teve comigo, numa parceria e amizade sólida. Obrigada não expressa nada da gratidão que sinto pela nona da minha filha.

Aos professores do programa PROFMAT da turma de 2017 no ICMC-USP: Erica Regina Filletti Nascimento, Luiz Augusto da Costa Ladeira (in memorian), Hermano de Souza Ribeiro, Ires Dias, Paulo Leandro Dattori da Silva, Sérgio Luís Zani e Michela Tuchapesk da Silva. Todos foram extremamente atenciosos e carinhosos com nossa turma, mas o professor Hermano, Ladeira (na época em tratamento de saúde) e a Ires foram além, nos ajudando com aulas extras de estudos e preparação para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ) em sábados e feriados. Não mediram esforços para nos ajudar com os estudos. A vocês uma imensa gratidão. E todo um carinho especial ao professor Ladeira que nos deixou enquanto terminava de escrever esse trabalho.

Agradecer às professoras responsáveis pelo Programa de Formação de Professores: Renata Cristina Geromel Meneghetti e Edna Maura Zuffi (minhas professoras na graduação), que me possibilitaram ser professora educadora bolsista por vários anos e durante a pandemia de covid-19. Pude acompanhar, auxiliar e aprender muito com elas e os estagiários em Licenciatura em Matemática que acompanhei e auxiliei ao longo da formação nos estágios das escolas públicas. Sem me esquecer da ajuda que tive da Camila Maria Chiari e Paula Jaíne Alves da Silva, muito obrigada por esse tempo de trabalho juntas.

Aos colegas de turma: Marcos, Hélio, Antônio Carlos, Marineusa, Allan, Ana Catarina, Diego, André, Evelyn e Rosimar que se mantiveram firmes apesar de todas as dificuldades e tornavam nossas aulas e estudos leves e divertidos junto aos professores durante os dois anos de aulas. Quero especialmente destacar meus amigos: Adriana, Carlos, Douglas e Marcelo. Nós ficamos muito próximos mesmo com quilômetros de distâncias das nossas cidades. Consolidamos uma amizade para o resto da vida. Foram muitas e muitas horas de estudos, companheirismo, apoio e muita diversão também!

Gratidão ao amigo de trabalho Matheus Machado Garcia e Carlos Elizandro Correa, a ajuda para a digitalização da dissertação e as construções geométricas foi de grande importância nessa dissertação.

Qualquer palavra de gratidão, que eu possa escrever aqui, não expressa todo o sentimento que tenho pelo meu amigo e irmão de graduação e, hoje, um professor dessa universidade de extrema competência, além de um coração de um tamanho incomensurável. Obrigada por ouvir meus desabafos, orientar-me nos momentos de desespero e depois de todo esse apoio psicológico e moral, ainda ajudar com algumas dúvidas em matemática. Nivaldo de Góes Grulha Junior você é um amigo espetacular, grata por sermos parceiros por tantos anos!

Agradeço a todos os professores que passaram por minha formação desde a infância até essa última conquista, não seria possível chegar até aqui sem a contribuição de cada um.

Antes de finalizar, gostaria de agradecer aos professores da banca avaliadora Márcia Cristina Anderson Braz Federson, Miguel Vinicius Santini Frasson e João Carlos Vieira Sampaio que foram muito prestativos e atenciosos na revisão dessa dissertação com sugestões que deixaram-na muito rica.

As todas as pessoas que, de forma direta ou indireta, conviveram por um período na minha vida e sempre deixam um pouco de si com a gente. Somos construídos por um pouquinho de cada um que passa por nossa vida.

Gratidão!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



*“O tempo é o nosso maior vilão. É dele a culpa por nossas dores. Por nossa morte. O tempo constrói castelos de areia só para os derrubar. Nada passa imune por ele. Nada permanece.”*

*([Delarue \(2022\)](#) - Deixe sempre uns trocados para a lâmina de barbear)*



# RESUMO

LEONETTI, M. A. S. **Aprendendo sobre áreas através da resolução de exercícios.** 2024. 173 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

Este trabalho é uma introdução para o estudo do cálculo de áreas de figuras planas com foco no uso de metodologias ativas a partir de experiências vivenciadas em sala de aula ao longo dos anos de carreira docente desta autora. Discorreremos sobre a necessidade desse estudo junto ao Ensino Básico (Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio) nas escolas públicas, para fornecer um material de apoio pedagógico para aplicação de metodologias ativas e inovadoras. O material em destaque neste trabalho será um guia passo a passo para a compreensão e resolução de exercícios, envolvendo áreas e estabelecendo um grau de dificuldade crescente que será abordado de forma intuitiva, construtiva e contínua ao longo dos passos na resolução de exercícios. Esse material visa auxiliar professores em seus planos de aula e estudantes empenhados em manter sua autonomia nos estudos.

**Palavras-chave:** Áreas, Metodologias Ativas, Guia passo a passo, Média Geométrica, Quarta Proporcional, Construções Geométricas.



# ABSTRACT

LEONETTI, M. A. S. **Learning about areas through solving exercises**. 2024. 173 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2024.

This work is an introduction to the study of the calculation of areas of plane figures with a focus on the use of active methodologies based on experiences in the classroom throughout the years of this author's teaching career. We will discuss the need for this study in Basic Education (Elementary Education – Final Years and High School) in public schools, to provide pedagogical support material for the application of active and innovative methodologies. The material highlighted in this work will be a step-by-step guide for understanding and solving exercises, involving areas and establishing an increasing degree of difficulty that will be approached in an intuitive, constructive and continuous way throughout the steps in solving exercises. This material aims to assist teachers in their lesson plans and students committed to maintaining their autonomy in their studies.

**Keywords:** Areas, Active Methodologies, Step by Step, Geometric Mean, Proportional Fourth, Geometric Constructions. .



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Pontos. . . . .                            | 59 |
| Figura 2 – Retas . . . . .                            | 60 |
| Figura 3 – Semirreta. . . . .                         | 60 |
| Figura 4 – Segmento de reta. . . . .                  | 60 |
| Figura 5 – Retas concorrentes. . . . .                | 61 |
| Figura 6 – Retas paralelas. . . . .                   | 61 |
| Figura 7 – Ângulo. . . . .                            | 61 |
| Figura 8 – Ângulo. . . . .                            | 62 |
| Figura 9 – Vértice. . . . .                           | 62 |
| Figura 10 – Plano. . . . .                            | 62 |
| Figura 11 – Ângulo nulo. . . . .                      | 63 |
| Figura 12 – Ângulo reto. . . . .                      | 63 |
| Figura 13 – Ângulo raso. . . . .                      | 64 |
| Figura 14 – Ângulo de $360^\circ$ . . . . .           | 64 |
| Figura 15 – Ângulo agudo. . . . .                     | 64 |
| Figura 16 – Ângulo obtuso. . . . .                    | 65 |
| Figura 17 – Ângulo côncavo. . . . .                   | 65 |
| Figura 18 – Soma de ângulos. . . . .                  | 65 |
| Figura 19 – Ângulos complementares. . . . .           | 66 |
| Figura 20 – Ângulos suplementares. . . . .            | 66 |
| Figura 21 – Ângulos replementares. . . . .            | 66 |
| Figura 22 – Polígonos. . . . .                        | 67 |
| Figura 23 – Não polígonos. . . . .                    | 67 |
| Figura 24 – Polígonos convexos. . . . .               | 68 |
| Figura 25 – Polígonos não convexos. . . . .           | 68 |
| Figura 26 – Polígonos regulares. . . . .              | 69 |
| Figura 27 – Triângulos acutângulos. . . . .           | 69 |
| Figura 28 – Triângulos obtusângulos. . . . .          | 70 |
| Figura 29 – Triângulos retângulos. . . . .            | 70 |
| Figura 30 – Triângulos equiláteros. . . . .           | 71 |
| Figura 31 – Triângulos isósceles. . . . .             | 71 |
| Figura 32 – Triângulos escalenos. . . . .             | 72 |
| Figura 33 – Triângulos retângulos isósceles . . . . . | 72 |

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 34 – Triângulos retângulos escalenos. . . . .                                  | 73 |
| Figura 35 – Quadrilátero. . . . .                                                     | 74 |
| Figura 36 – Quadriláteros irregulares. . . . .                                        | 74 |
| Figura 37 – Trapézio isósceles. . . . .                                               | 74 |
| Figura 38 – Trapézio retângulo. . . . .                                               | 75 |
| Figura 39 – Trapézio escaleno. . . . .                                                | 75 |
| Figura 40 – Paralelogramo. . . . .                                                    | 75 |
| Figura 41 – Retângulo. . . . .                                                        | 76 |
| Figura 42 – Quadrado. . . . .                                                         | 76 |
| Figura 43 – Losango. . . . .                                                          | 77 |
| Figura 45 – Bases. . . . .                                                            | 78 |
| Figura 46 – Alturas. . . . .                                                          | 78 |
| Figura 48 – Perímetros de triângulos. . . . .                                         | 79 |
| Figura 49 – Perímetros de quadriláteros. . . . .                                      | 80 |
| Figura 50 – Perímetros de paralelogramo e retângulo. . . . .                          | 80 |
| Figura 51 – Perímetros de losango e quadrado. . . . .                                 | 81 |
| Figura 52 – Perímetro de trapézio isósceles. . . . .                                  | 81 |
| Figura 53 – Perímetro de trapézio retângulo. . . . .                                  | 82 |
| Figura 54 – Retângulo de lados $a$ e $b$ . . . . .                                    | 82 |
| Figura 55 – Quadrado de lado $\ell$ . . . . .                                         | 83 |
| Figura 56 – Área do triângulo a partir da divisão do retângulo. . . . .               | 83 |
| Figura 57 – Área do triângulo a partir da divisão do quadrado. . . . .                | 84 |
| Figura 58 – Área de um triângulo qualquer. . . . .                                    | 85 |
| Figura 59 – Catetos e Hipotenusa de um triângulo retângulo. . . . .                   | 85 |
| Figura 60 – Cateto adjacente ao ângulo. . . . .                                       | 86 |
| Figura 61 – Cateto oposto ao ângulo. . . . .                                          | 86 |
| Figura 62 – O Teorema de Pitágoras. . . . .                                           | 86 |
| Figura 63 – O Teorema de Pitágoras por Bháskara. . . . .                              | 88 |
| Figura 64 – Área do triângulo equilátero. . . . .                                     | 88 |
| Figura 65 – Triângulo retângulo que é metade de um triângulo equilátero. . . . .      | 89 |
| Figura 66 – O Teorema de Tales. . . . .                                               | 90 |
| Figura 67 – Triângulo retângulo. . . . .                                              | 90 |
| Figura 68 – Triângulo qualquer: Lei dos senos . . . . .                               | 92 |
| Figura 69 – Uma altura de um triângulo qualquer: Lei dos Senos . . . . .              | 92 |
| Figura 70 – Duas alturas de um triângulo qualquer: Lei dos senos. . . . .             | 93 |
| Figura 71 – Relações métricas no triângulo retângulo . . . . .                        | 94 |
| Figura 72 – Relações métricas no triângulo retângulo: triângulos semelhantes. . . . . | 94 |
| Figura 73 – Construção: Dados os segmentos $a = AB$ e $b = CD$ . . . . .              | 97 |
| Figura 74 – Construção: Segmento $AB$ . . . . .                                       | 98 |

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 75 – Construção: Soma dos segmentos $AB + CD = AD$ . . . . .                                                                      | 98  |
| Figura 76 – Construção: Ponto médio do segmento $AD$ . . . . .                                                                           | 99  |
| Figura 77 – Construção: Reta auxiliar $t$ passando pelo ponto $B = C$ . . . . .                                                          | 100 |
| Figura 78 – Construção: Média geométrica $x = BB_1$ de $a$ e $b$ . . . . .                                                               | 100 |
| Figura 79 – Construção: Triângulo retângulo $AB_1D$ com altura $BB_1 = x$ , relações métricas. . . . .                                   | 101 |
| Figura 80 – Construção: Completa da média geométrica pelo método da soma. . . . .                                                        | 101 |
| Figura 81 – Construção: Dados os segmentos $a = AB$ e $b = CD$ . . . . .                                                                 | 103 |
| Figura 82 – Construção: transporte de $b = CD$ para a reta $r$ . . . . .                                                                 | 103 |
| Figura 83 – Construção: transporte de $a = AB$ para a reta $r$ a partir do ponto $C$ . . . . .                                           | 104 |
| Figura 84 – Construção: transporte de $a = AB$ para a reta $r$ a partir do ponto $D$ . . . . .                                           | 104 |
| Figura 85 – Construção: Circunferências para determinar a mediatriz $m$ de $CD$ . . . . .                                                | 105 |
| Figura 86 – Construção: Reta mediatriz. . . . .                                                                                          | 105 |
| Figura 87 – Construção: Semicircunferência de centro em $O$ e extremidades $C$ e $D$ . . . . .                                           | 106 |
| Figura 88 – Construção: Semicircunferência de centro $B$ e extremidades $O'$ e $O$ . . . . .                                             | 106 |
| Figura 89 – Construção: pontos auxiliares para a mediatriz $m$ . . . . .                                                                 | 107 |
| Figura 90 – Construção: Reta mediatriz $m$ passando por $B'$ , $P$ e $B$ . . . . .                                                       | 107 |
| Figura 91 – Construção: Triângulo retângulo $AB'D$ com altura $BB' = x$ , relações métricas. . . . .                                     | 108 |
| Figura 92 – Construção completa da média geométrica pelo método da subtração. . . . .                                                    | 108 |
| Figura 93 – Construção: Dados os segmentos $a = OA$ , $b = OB$ e $c = AC$ . . . . .                                                      | 109 |
| Figura 94 – Construção: Transporte dos segmentos $a = OA$ e $c = AC$ para $r$ e $b = OB$<br>para $s$ . . . . .                           | 110 |
| Figura 95 – Construção: Reta $m$ perpendicular a $t_1$ em $A$ . . . . .                                                                  | 111 |
| Figura 96 – Construção: $t_2$ paralela a $t_1$ e $x$ a quarta proporcional. . . . .                                                      | 112 |
| Figura 97 – Construção: Dados os segmentos $AB$ e $AC$ . . . . .                                                                         | 114 |
| Figura 98 – Construção: Média geométrica $x = AA_1$ . . . . .                                                                            | 115 |
| Figura 99 – Construção: Quadrado de lados $l$ e área $A_Q$ . . . . .                                                                     | 116 |
| Figura 100 – Construção: Trapézio de bases $a$ e $b$ , altura $h$ e área $A_T$ . . . . .                                                 | 116 |
| Figura 101 – Construção: Base média do trapézio. . . . .                                                                                 | 117 |
| Figura 102 – Construção: Média geométrica $x = EE_1$ da base média do trapézio. . . . .                                                  | 118 |
| Figura 103 – Construção: Quadrado de lado $x$ , a média geométrica da base média do trapézio. . . . .                                    | 119 |
| Figura 104 – Construção completa do quadrado de área equivalente ao trapézio dado. . . . .                                               | 120 |
| Figura 105 – Construção: Quadrado dado de lados $l_1$ . . . . .                                                                          | 121 |
| Figura 106 – Construção: Quadrado dado de lados $l_2$ . . . . .                                                                          | 121 |
| Figura 107 – Construção dos quadrados de lados $l_1$ e $l_2$ . . . . .                                                                   | 122 |
| Figura 108 – Construção: Do quadrado de lados $l$ de área equivalente a soma das áreas dos<br>quadrados de lados $l_1$ e $l_2$ . . . . . | 123 |
| Figura 109 – Construção: Triângulos equiláteros dados de lados $l_1$ e $l_2$ . . . . .                                                   | 124 |
| Figura 110 – Construção: Triângulo retângulo $DCB$ de hipotenusa $l_1$ e catetos $l_2$ e $l$ . . . . .                                   | 125 |

|                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 111–Construção: Triângulo equilátero de lados $l$ de área equivalente à diferença das áreas dos triângulos de lados $l_1$ e $l_2$ .                  | 126 |
| Figura 112–Construção: Triângulo $ABC$ de altura $h_a$ .                                                                                                    | 128 |
| Figura 113–Construção: $HH_A = \frac{4}{3} \cdot h_a = x_1$ .                                                                                               | 129 |
| Figura 114–Construção: $HA_1 = h_{a_1} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = x_2$ .                                                                                | 130 |
| Figura 115–Construção: Triângulo equilátero de lados igual a $x$ , média geométrica de $x_1 = \frac{4 \cdot h_a}{3}$ e $x_2 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ . | 131 |
| Figura 116–Construção: Triângulo $ABC$ de altura $h_a$ .                                                                                                    | 132 |
| Figura 117–Construção: Dados os segmentos $c' = A'B'$ e $b' = A'C'$ .                                                                                       | 133 |
| Figura 118–Construção: Reta auxiliar $t_1$ passando por $C$ e $C'$ .                                                                                        | 133 |
| Figura 119–Construção: Reta auxiliar $t_2$ paralela a $t_1$ .                                                                                               | 134 |
| Figura 120–Construção completa do triângulo $A'B'C'$ de área equivalente ao triângulo $ABC$ dado.                                                           | 136 |
| Figura 121–Construção: Quadrado $ABCD$ e o triângulo $ABE$ dados.                                                                                           | 137 |
| Figura 122–Construção: Dados os segmentos $FG = m$ e $GH = n$ .                                                                                             | 139 |
| Figura 123–Construção completa do triângulo $ABE$ proporcional a $m$ e $n$ , segmentos dados.                                                               | 140 |
| Figura 124–Construção: Quadrado de lados $l$ , circunferência de diâmetro $D$ e retângulo de lados $a$ e $b$ .                                              | 141 |
| Figura 125–Construção: Quadrado de lados $l$ e circunferência de diâmetro $D$ .                                                                             | 143 |
| Figura 126–Construção: Hipotenusa $x_1$ .                                                                                                                   | 144 |
| Figura 127–Construção: Cateto $x_2$ .                                                                                                                       | 145 |
| Figura 128–Construção: Média aritmética de $x_1$ e $x_2$ .                                                                                                  | 146 |
| Figura 129–Construção: Metade da diferença entre $x_1$ e $x_2$ .                                                                                            | 147 |
| Figura 130–Construção completa de uma possibilidade do retângulo $GIHJ$ inscrito no circunferência de diâmetro $D$ .                                        | 148 |
| Figura 131–Construção completa de outra possibilidade do retângulo $GI_1HJ_1$ inscrito no circunferência de diâmetro $D$ .                                  | 148 |
| Figura 132–Construção: Triângulos semelhantes $ABC$ e $ADE$ .                                                                                               | 149 |
| Figura 133–Construção: Triângulo equilátero de lados $h_a$ .                                                                                                | 151 |
| Figura 134–Construção: Quadrado de lados $h_f$ .                                                                                                            | 152 |
| Figura 135–Construção: $H_fG_1 = \frac{2}{3}H_fG$ .                                                                                                         | 153 |
| Figura 136–Construção: Triângulo $ADE$ com altura $h_{a'}$ .                                                                                                | 154 |
| Figura 137–Construção: Triângulos $ABC$ , $APB$ , $APC$ e $BPC$ .                                                                                           | 155 |
| Figura 138–Construção: esboço de $\frac{1}{3}$ da altura de cada um dos três triângulos.                                                                    | 156 |
| Figura 139–Construção: $h_a = AH_A$ , $h_b = BH_B$ e $h_c = CH_C$ .                                                                                         | 157 |
| Figura 140–Construção: $\frac{1}{3}$ de $h_a$ .                                                                                                             | 158 |
| Figura 141–Construção: $\frac{1}{3}$ de $h_b$ .                                                                                                             | 159 |
| Figura 142–Construção: $\frac{1}{3}$ de $h_c$ .                                                                                                             | 160 |

|                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 143–Construção: $n$ paralela a base $BC$ a $\frac{1}{3}$ de $h_a$ . . . . .                                                      | 161 |
| Figura 144–Construção: $j$ paralela a base $AC$ a $\frac{1}{3}$ de $h_b$ . . . . .                                                      | 162 |
| Figura 145–Construção: $l$ paralela a base $AB$ a $\frac{1}{3}$ de $h_c$ . . . . .                                                      | 163 |
| Figura 146–Construção: Ponto $P$ que é a intersecção das três paralelas a $\frac{1}{3}$ da base de<br>suas respectivas alturas. . . . . | 164 |
| Figura 147–Construção completa $(ABC) = (BPC) + (APC) + (APB)$ . . . . .                                                                | 164 |



# SUMÁRIO

---

|       |                                                                                  |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .                                                             | 27 |
| 1.1   | Contextualização . . . . .                                                       | 27 |
| 1.2   | Justificativa . . . . .                                                          | 28 |
| 1.3   | Objetivos . . . . .                                                              | 30 |
| 2     | BREVE CONTEÚDO HISTÓRICO: GEOMETRIA E ÁREAS . . . . .                            | 33 |
| 3     | O ENSINO DE ÁREAS . . . . .                                                      | 35 |
| 3.1   | Aprendizagem Matemática . . . . .                                                | 35 |
| 3.2   | Ensino de Áreas no Ensino Básico . . . . .                                       | 37 |
| 3.3   | Abordagens Inovadoras . . . . .                                                  | 38 |
| 4     | METODOLOGIAS ATIVAS EDUCACIONAIS . . . . .                                       | 41 |
| 4.1   | Resolução de Problemas . . . . .                                                 | 41 |
| 4.2   | Investigação Matemática . . . . .                                                | 42 |
| 4.3   | Etnomatemática . . . . .                                                         | 42 |
| 4.4   | Distratores (estudo dos erros) . . . . .                                         | 42 |
| 4.5   | Desenvolvimento de materiais didáticos . . . . .                                 | 42 |
| 4.6   | Atividades em sala de aula . . . . .                                             | 43 |
| 5     | EXPERIÊNCIAS MOTIVACIONAIS NA CARREIRA DOCENTE . . . . .                         | 47 |
| 5.1   | A Escola Estadual Wadih Jorge Maluf . . . . .                                    | 47 |
| 5.1.1 | <i>O Patrono</i> . . . . .                                                       | 47 |
| 5.1.2 | <i>Localização</i> . . . . .                                                     | 48 |
| 5.1.3 | <i>Infraestrutura física</i> . . . . .                                           | 49 |
| 5.1.4 | <i>Infraestrutura humana e recursos pedagógicos</i> . . . . .                    | 49 |
| 5.1.5 | <i>Avaliações e índices</i> . . . . .                                            | 49 |
| 5.2   | Os primeiros anos: 2005 a 2008 . . . . .                                         | 50 |
| 5.2.1 | <i>Tomando posse de um cargo efetivo e mudando de cidade</i> . . . . .           | 50 |
| 5.2.2 | <i>Estabilizada e se envolvendo com a escola</i> . . . . .                       | 51 |
| 5.2.3 | <i>Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP</i> . . . . . | 52 |
| 5.3   | O ano de 2009 . . . . .                                                          | 53 |
| 5.3.1 | <i>Como surgiu a ideia do projeto</i> . . . . .                                  | 53 |
| 5.3.2 | <i>Projeto multidisciplinar</i> . . . . .                                        | 54 |

|         |                                                                                                               |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3.2.1 | <i>Desenhar uma planta baixa de um imóvel que seria representado na mesma escala em uma maquete . . . . .</i> | 54  |
| 5.3.2.2 | <i>A construção da maquete: medição, materiais e construção . . . . .</i>                                     | 54  |
| 5.3.2.3 | <i>Pesquisa de custo real de acabamentos . . . . .</i>                                                        | 55  |
| 5.3.2.4 | <i>Seminário – processo de cada grupo com plenária . . . . .</i>                                              | 55  |
| 5.3.3   | <b>Conteúdo matemático . . . . .</b>                                                                          | 56  |
| 6       | <b>PRÉ-REQUISITOS TEÓRICOS . . . . .</b>                                                                      | 59  |
| 6.1     | <b>Figuras Básicas . . . . .</b>                                                                              | 59  |
| 6.1.1   | <i>Tipos, traçado e medida de ângulos . . . . .</i>                                                           | 63  |
| 6.2     | <b>Polígonos . . . . .</b>                                                                                    | 66  |
| 6.2.1   | <i>Polígono Convexo . . . . .</i>                                                                             | 67  |
| 6.2.2   | <i>Polígonos Côncavo (Não Convexo) . . . . .</i>                                                              | 68  |
| 6.2.3   | <i>Polígonos Regulares . . . . .</i>                                                                          | 68  |
| 6.3     | <b>Triângulos . . . . .</b>                                                                                   | 69  |
| 6.3.1   | <i>Classificação dos triângulos com relação à medida de seus ângulos . . . . .</i>                            | 69  |
| 6.3.2   | <i>Classificação dos triângulos com relação à medida de seus lados . . . . .</i>                              | 70  |
| 6.4     | <b>Quadriláteros . . . . .</b>                                                                                | 73  |
| 6.4.1   | <i>Tipos de Quadriláteros . . . . .</i>                                                                       | 74  |
| 6.4.2   | <i>Paralelogramos e Retângulos . . . . .</i>                                                                  | 80  |
| 6.4.3   | <i>Losangos e Quadrados . . . . .</i>                                                                         | 81  |
| 6.4.4   | <i>Trapézios . . . . .</i>                                                                                    | 81  |
| 6.5     | <b>Áreas . . . . .</b>                                                                                        | 82  |
| 6.5.1   | <i>Áreas de retângulos e quadrados . . . . .</i>                                                              | 82  |
| 6.5.2   | <i>Área de um triângulo retângulo escaleno . . . . .</i>                                                      | 83  |
| 6.5.3   | <i>Área de um triângulo retângulo isósceles . . . . .</i>                                                     | 84  |
| 6.5.4   | <i>Área de um triângulo qualquer . . . . .</i>                                                                | 84  |
| 6.6     | <b>O Teorema de Pitágoras . . . . .</b>                                                                       | 85  |
| 6.6.1   | <i>Teorema de Pitágoras . . . . .</i>                                                                         | 86  |
| 6.6.2   | <i>Prova do Teorema de Pitágoras . . . . .</i>                                                                | 87  |
| 6.6.3   | <i>Área de um triângulo equilátero . . . . .</i>                                                              | 88  |
| 6.7     | <b>O Teorema de Tales . . . . .</b>                                                                           | 89  |
| 6.8     | <b>A Lei dos Senos . . . . .</b>                                                                              | 90  |
| 6.8.1   | <i>Razões trigonométricas no triângulo retângulo . . . . .</i>                                                | 91  |
| 6.8.2   | <i>Lei dos senos . . . . .</i>                                                                                | 92  |
| 6.9     | <b>Relações Métricas no triângulo retângulo . . . . .</b>                                                     | 94  |
| 7       | <b>ESTUDO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS . . . . .</b>                                                            | 97  |
| 7.1     | <b>Construção da média geométrica pelo método da soma . . . . .</b>                                           | 97  |
| 7.2     | <b>Construção da Média Geométrica pelo método da subtração. . . . .</b>                                       | 103 |

|       |                                                                                                            |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.3   | Construção da Quarta Proporcional . . . . .                                                                | 109 |
| 8     | GUIA PASSO A PASSO DE RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS . . .                                                       | 113 |
| 8.1   | Construção de um triângulo isósceles equivalente a um triângulo e<br>com um ângulo congruente . . . . .    | 113 |
| 8.2   | Construção de um quadrado equivalente a um trapézio dado . . . .                                           | 116 |
| 8.3   | Construção de um quadrado equivalente a dois quadrados dados .                                             | 121 |
| 8.4   | Construção de um triângulo equilátero equivalente a dois triângulos<br>equiláteros dados . . . . .         | 124 |
| 8.5   | Construção de um triângulo equilátero equivalente a um triângulo<br>dado . . . . .                         | 127 |
| 8.6   | Construção de um triângulo, conhecendo dois de seus lados e equi-<br>valente a um triângulo dado . . . . . | 132 |
| 8.7   | Traçar por um vértice de um quadrado, uma reta que o divida em<br>áreas em certa proporção . . . . .       | 137 |
| 8.8   | Inscrição de um retângulo de área equivalente a um quadrado dado,<br>em um círculo dado . . . . .          | 141 |
| 8.9   | Traçar uma paralela a base de um triângulo que divida sua área em<br>dois terços . . . . .                 | 149 |
| 8.10  | Determinar P, interior a um triângulo, cujas áreas dos triângulos<br>formados sejam equivalentes . . . . . | 155 |
| 9     | REFLEXÃO E CONCLUSÃO . . . . .                                                                             | 165 |
| 9.1   | Análise de Dados . . . . .                                                                                 | 165 |
| 9.2   | Considerações finais . . . . .                                                                             | 166 |
| 9.2.1 | <i>Contribuições</i> . . . . .                                                                             | 166 |
| 9.2.2 | <i>Limitações</i> . . . . .                                                                                | 168 |
| 9.2.3 | <i>Sugestões para trabalhos futuros</i> . . . . .                                                          | 169 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .                                                                                      | 173 |



---

# INTRODUÇÃO

---

O objetivo principal do projeto é o estudo de vários tópicos relacionados a áreas de regiões limitadas no plano com construções.

## 1.1 Contextualização

A aprendizagem de matemática é um desafio para muitos estudantes em todo o mundo. Entre os vários tópicos que frequentemente apresentam maior dificuldade, destaca-se o cálculo de áreas de figuras geométricas. A compreensão dos conceitos que envolvem geometria é fundamental para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento, como Física, Engenharia, Arquitetura e até mesmo Ciências Sociais, como Geografia, por exemplo.

As Áreas desempenham um papel fundamental na matemática, fornecendo ferramentas e métodos essenciais para a resolução de problemas e análise de fenômenos, desde formas simples e básicas, como triângulos e retângulos, até as figuras mais complexas, como círculos, elipses e polígonos. O cálculo de áreas permite determinar a extensão de superfícies e quantificar propriedades importantes. Esses conceitos são a base para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e outras disciplinas avançadas da matemática.

No entanto, os métodos tradicionais de ensino muitas vezes não conseguem engajar os alunos de maneira eficaz no estudo das áreas. Aulas expositivas e teóricas podem ser muito abstratas e distantes da realidade dos estudantes, tornando o aprendizado maçante, pouco significativo ou não atinge o aprendizado necessário. Por essa razão, muitos alunos memorizam fórmulas e procedimentos sem realmente compreender os conceitos subjacentes.

Nesse sentido, a importância de encontrar abordagens inovadoras e eficazes para o ensino-aprendizagem de áreas é evidente, uma vez que, além de promover uma compreensão mais profunda e dos conceitos matemáticos, o estudo de áreas tem implicações práticas significativas.

O cálculo de áreas é fundamental e presente na vida cotidiana das pessoas, como a construção civil, o projeto de interiores, o planejamento urbano e até mesmo o cálculo de áreas de cultivo agrícola.

Portanto, a habilidade de calcular e compreender áreas é uma competência essencial para a vida pessoal e profissional dos estudantes. Além disso, a dificuldade encontrada pelos estudantes em compreender conceitos relacionados a áreas pode levar a lacunas no aprendizado e impactar negativamente seu desempenho acadêmico ou profissional. Logo, uma base sólida no cálculo de áreas é crucial para o progresso em disciplinas matemáticas subsequentes, como trigonometria, geometria sólida e cálculo integral, até mesmo em cursos profissionalizantes técnicos.

Assim, este trabalho tem como objetivo explorar diferentes abordagens e estratégias para auxiliar os alunos durante seus estudos, a fim de que compreendam conceitos relacionados a áreas de figuras geométricas planas. Pretende-se analisar o impacto de atividades práticas e exercícios no processo de aprendizagem, visando engajar os alunos e promover uma compreensão mais profunda e significativa do tema.

Para alcançar esse objetivo, será realizada uma revisão bibliográfica abrangendo estudos relevantes sobre o ensino de áreas. Serão exploradas metodologias ativas de ensino, como Resolução de Problemas (RP), Investigação Matemática (IM), Estudo de Distratores (Estudo e análise do erro), uso de tecnologias digitais e abordagens interdisciplinares. Com base nessa revisão, serão desenvolvidos materiais didáticos para que possam ser aplicadas atividades em sala de aula, buscando ajudar professores e alunos do ensino básico a desenvolver e avaliar o ensino aprendizagem dos professores e estudantes.

## 1.2 Justificativa

A compreensão e o domínio dos conceitos matemáticos são fundamentais e essenciais para o desenvolvimento de habilidades cognitivas e a formação de cidadãos críticos e reflexivos. Entre os diversos tópicos da matemática, o estudo das áreas de figuras geométricas planas, desempenha um papel de extrema importância, pois está presente em diversas áreas do conhecimento e possui aplicações práticas significativas em nosso cotidiano.

O cálculo de áreas é um conceito central na geometria, permitindo determinar a extensão de superfícies e quantificar propriedades espaciais. Desde os anos iniciais na educação básica, os alunos são introduzidos às figuras planas simples, como quadrados, retângulos e triângulos, e aprendem a calcular suas áreas através de fórmulas e procedimentos específicos que normalmente são decorados. No entanto, muitos estudantes enfrentam dificuldades na compreensão desses conceitos e na aplicação dos métodos convencionais de cálculo.

Uma das principais razões para as dificuldades encontradas pelos alunos está relacionada aos métodos tradicionais de ensino adotados em sala de aula. Aulas expositivas, centradas na transmissão de conteúdos de forma passiva, podem tornar o aprendizado da matemática desinteressante, abstrato e pouco significativo para os estudantes. A ênfase na memorização de fórmulas e algoritmos, sem uma compreensão profunda da definição e dos conceitos subjacentes, contribui para a falta de conexão dos alunos com a matemática e limita seu desenvolvimento cognitivo. Consequentemente, muitas vezes, provocam certa aversão à matemática, pois os estudantes sentem muita dificuldade, desestímulo, e acabam perdendo a curiosidade e o prazer da descoberta.

Nesse contexto, é fundamental buscar por abordagens pedagógicas diferenciadas, inovadoras e estratégias de ensino que despertem essa curiosidade e o interesse dos alunos, promovam uma compreensão significativa e bem alicerçada dos conceitos de áreas e estimulem o pensamento crítico e criativo. É necessário que estudar áreas seja uma experiência prática, contextualizada e marcante, aproximando os conceitos matemáticos o máximo possível da realidade dos alunos e de suas vivências.

O ensino de áreas possui implicações práticas em diversas áreas do conhecimento. Na arquitetura, por exemplo, o cálculo de áreas é essencial para o planejamento de espaços, definição de dimensões e análise de estruturas. Nas engenharias, a determinação das áreas é fundamental para a construção de projetos e cálculos de materiais. Em ciências sociais, o estudo de áreas pode auxiliar na compreensão de fenômenos socioespaciais, como a distribuição populacional e a análise de desigualdades regionais. Por exemplo, para um ajudante de pedreiro ou um simples trabalhador de obras, se faz necessário o mínimo de entendimento sobre áreas para qualquer simples situação de trabalho em seu cotidiano, como assentar um azulejo ou construir uma parede. Sob essa ótica, o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao cálculo de áreas contribui para a formação de indivíduos mais críticos e conscientes e do seu papel na sociedade, posto que, através da análise de áreas, os estudantes são instigados a pensar de forma abstrata, a realizar estimativas e a resolver problemas reais, desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico, abstração, organização e dedução.

Diante desse cenário, torna-se fundamental investir em pesquisas e práticas pedagógicas que visem aprimorar o ensino de áreas. É necessário repensar as abordagens didáticas, considerando a utilização de metodologias ativas e recursos tecnológicos, como softwares educacionais e aplicativos interativos, que possam proporcionar uma aprendizagem mais significativa e envolvente para os alunos, cabe aqui até mesmo visitas a canteiros de obras, laboratórios, lavouras etc.

Além disso, é importante destacar que a falta de domínio dos conceitos de áreas pode impactar negativamente o desempenho dos alunos em disciplinas matemáticas subsequentes ou correlatas, como física ou química. Portanto, uma compreensão deficiente dos conceitos de áreas dificulta a compreensão de conteúdos mais avançados ou onde áreas se torna um pré-requisito básico, como em trigonometria, geometria sólida e cálculo diferencial e integral, prejudicando o desenvolvimento acadêmico dos estudantes.

Diante dos desafios apresentados e das implicações práticas e acadêmicas do ensino de áreas, este estudo propõe-se a investigar diferentes abordagens e estratégias para auxiliar os alunos, a fim de que compreendam os conceitos de áreas de figuras geométricas. A partir de uma revisão bibliográfica abrangente, da análise de estudos relevantes e da experiência vivida ao longo desses anos em sala de aula, serão desenvolvidos materiais didáticos que poderão ser utilizados pelos professores, por alunos autodidatas ou interessados em estudar áreas. O objetivo é promover uma aprendizagem mais significativa e envolvente que estimule o interesse dos alunos, uma vez desenvolvidas suas habilidades matemáticas, proporcionando, portanto, uma compreensão profunda dos conceitos de áreas.

Espera-se que os resultados deste estudo e experiência contribuam para a melhoria do ensino de matemática, fornecendo subsídios e orientações práticas para os professores interessados em utilizar metodologias inovadoras e eficazes no ensino de áreas. Além disso, espera-se que os resultados obtidos possam subsidiar a elaboração de políticas educacionais que valorizem o ensino de matemática de qualidade e incentivem a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento matemático.

## 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal explorar diferentes abordagens e estratégias para auxiliar os alunos a compreender conceitos relacionados a áreas de figuras geométricas. Pretende-se analisar o impacto de atividades práticas e exercícios no processo de aprendizagem, visando engajar os alunos e promover uma compreensão mais profunda e significativa do tema.

Para alcançar esse objetivo, será realizada uma revisão bibliográfica e alguns relatos de situações vivenciadas pela mestrandia ao longo de seus anos de trabalho no ensino básico, abrangendo experiências e estudos relevantes sobre o ensino de áreas. Com base nessa revisão, serão desenvolvidos materiais didáticos, buscando eficácia dessas abordagens no aprendizado dos estudantes.

Adicionalmente, um dos objetivos específicos deste estudo é fornecer um guia passo a passo de exercícios, facilitando, assim, a compreensão e elaboração de conteúdos didáticos para as aulas de geometria. O objetivo é fornecer aos professores um recurso prático e abrangente que possa auxiliá-los na preparação e condução das aulas, permitindo que os alunos pratiquem e apliquem os conceitos de áreas de forma progressiva e sistematizada.

Para isso, serão elaborados conjuntos de exercícios que abordam diferentes tipos de figuras geométricas e situações problemáticas relacionadas ao cálculo de áreas. Esses conjuntos de exercícios serão organizados de forma sequencial, partindo de exercícios mais simples e progredindo para desafios mais complexos. Serão fornecidas explicações detalhadas, passo a passo, sobre como abordar cada exercício, incluindo estratégias de resolução, dicas e exemplos ilustrativos e uma teoria básica para suporte nesse estudo. O objetivo é auxiliar os alunos a desenvolver suas habilidades de raciocínio lógico e aplicação dos conceitos aprendidos, ao mesmo tempo em que se promove autonomia e confiança na resolução de problemas.

Em resumo, os objetivos deste estudo são:

- Explorar diferentes abordagens e estratégias para auxiliar os alunos na compreensão de conceitos relacionados a áreas de figuras geométricas;
- Analisar o impacto de atividades práticas e exercícios no processo de aprendizagem dos alunos;
- Fornecer um guia passo a passo de exercícios, facilitando a compreensão e elaboração de conteúdos didáticos para as aulas de geometria;
- Autoavaliar a eficácia das abordagens e materiais desenvolvidos no ensino de áreas;
- Contribuir para a disseminação de boas práticas e experiências no ensino de áreas, por meio de um relatório final com recomendações para professores.

Em suma, este estudo tem como objetivo contribuir para a melhoria do ensino de áreas no ensino básico, explorando abordagens inovadoras e estratégias que engajem os alunos e promovam uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos relacionados. Espera-se que as metodologias ativas, recursos tecnológicos e o guia passo a passo de resolução de exercícios, sejam ferramentas valiosas para professores interessados em aprimorar suas práticas de ensino e promover uma aprendizagem mais envolvente, ao potencializar o aprendizado dos alunos, contribuindo um pouco mais para o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas.



---

## BREVE CONTEÚDO HISTÓRICO: GEOMETRIA E ÁREAS

---

A história da matemática é um fascinante testemunho da jornada humana em direção à compreensão mais profunda de conceitos fundamentais. Dentro desse vasto panorama, a geometria e o estudo das áreas emergem como pilares cruciais que moldaram o desenvolvimento contínuo desse campo. Nesta monografia, mergulharemos nas raízes históricas e no crescimento evolutivo da geometria e das áreas ao longo de períodos distintos – desde a antiguidade até a era moderna. Iremos investigar as contribuições marcantes de renomados matemáticos, suas teorias inovadoras e as aplicações práticas e teóricas que esses conceitos desencadearam, ressaltando sua relevância perene no cenário matemático contemporâneo.

Nos tempos antigos, civilizações como as do Egito e da Mesopotâmia estabeleceram as primeiras bases do estudo da geometria, evidenciando um profundo interesse nas medidas e formas dos objetos físicos ao seu redor. As contribuições notáveis dos egípcios na determinação de áreas de terras através de métodos práticos precederam os avanços teóricos dos gregos antigos, que solidificaram os fundamentos geométricos através de obras marcantes, como o livro *Os Elementos* de [Euclides](#), cuja abordagem axiomática estabeleceu os alicerces da geometria euclidiana, influenciando consideravelmente a compreensão matemática por séculos a fio.

Durante a Idade Média, as obras de Euclides foram traduzidas e preservadas por estudiosos árabes e europeus, proporcionando uma base sólida para a contínua exploração da geometria. Como exemplo, pode-se citar Al-Khwarizmi, notável matemático persa, contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da álgebra e sua aplicação na resolução de problemas geométricos. Além disso, os avanços na arquitetura gótica na Europa medieval refletiram a aplicação prática dos princípios geométricos na construção de catedrais e castelos imponentes, demonstrando a integração entre teoria e prática na época.

Com o advento da era moderna, no século XVI, matemáticos como Descartes, Fermat e Pascal revolucionaram a geometria por meio da introdução do sistema de coordenadas cartesianas e da geometria analítica.

Nos séculos XVII e XVIII, através do refinamento do processo de limite, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, desenvolveram o cálculo diferencial e integral, ou cálculo infinitesimal, que era usado para estudar grandezas físicas, como o movimento de corpos, de forças como físicas como a gravidade, o magnetismo e a eletricidade. Mas é notável que se podia facilmente calcular áreas delimitadas por curvas, como sob um gráfico de função. Antes do cálculo, podia-se calcular áreas de sólidos como poliedros, cilindros e cones por sua planificação, mas depois do cálculo diferencial e integral, pela primeira vez, pôde-se calcular áreas de quaisquer superfícies de revolução e mais tarde de superfícies arbitrárias, o que representou um avanço astronômico no campo do cálculo de áreas.

O surgimento de novas disciplinas, como a geometria não euclidiana e a topologia, desafiou os fundamentos estabelecidos pela geometria clássica, incitando um intenso debate intelectual e a redefinição dos conceitos geométricos fundamentais. Hoje, a geometria continua a desempenhar um papel crucial em diversos campos, incluindo engenharia, arquitetura, física e computação, demonstrando sua aplicabilidade prática e teórica no mundo contemporâneo. Portanto, a história da matemática revela a evolução contínua da geometria e das áreas, destacando as contribuições significativas de diversas culturas e períodos históricos. Desde as civilizações antigas até os avanços modernos, a geometria tem sido essencial para o avanço do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de uma ampla gama de disciplinas práticas e teóricas.

A compreensão dessa evolução histórica nos permite apreciar a riqueza e a complexidade dos conceitos geométricos e reconhecer sua importância duradoura no panorama matemático contemporâneo.

---

## O ENSINO DE ÁREAS

---

### 3.1 Aprendizagem Matemática

A aprendizagem de matemática desempenha um papel fundamental na formação dos estudantes, proporcionando-lhes habilidades e conhecimentos essenciais para seu desenvolvimento acadêmico e profissional. No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades em diversas áreas da matemática, sendo o cálculo de áreas de figuras geométricas planas uma delas, o que se torna um sério problema já que a compreensão desses conceitos é fundamental para a resolução de problemas matemáticos e suas aplicações em diferentes campos do conhecimento.

Nesse sentido, é necessário considerar que o ensino de matemática baseia-se em aulas expositivas e teóricas, sendo que, na grande maioria das vezes não é nada eficaz na promoção da aprendizagem significativa para os alunos, uma vez que essas abordagens podem se tornar muito abstratas, sem sentido e distantes da realidade dos estudantes, tornando o processo de aprendizagem monótono e enfadonho, o que causa o desinteresse na maioria dos alunos. Por esse viés, as aulas acontecem de forma que os alunos são meros receptores passivos de informações, quando prestam atenção, resultando em uma compreensão superficial dos conceitos e limitando a capacidade interpretativa de um problema, bem como de saber aplicá-lo de forma efetiva.

Para enfrentar esse desafio, torna-se necessário adotar abordagens inovadoras no ensino de matemática, que desperte o interesse e a curiosidade dos alunos, promovendo uma compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos, nesse caso, de áreas. Essas abordagens devem ser centradas no aluno, envolvendo-os ativamente no processo de aprendizagem e fornecendo-lhes oportunidades de explorar e experimentar os conceitos matemáticos de forma prática, abrangente e significativa.

Como solução, uma das maneiras de tornar a aprendizagem de áreas mais envolvente e interessante é por meio da utilização de metodologias ativas. Desse modo, em vez de simplesmente apresentar fórmulas e conceitos preconcebidos, os alunos são desafiados a participar ativamente das aulas, discutindo, investigando, explorando e resolvendo problemas relacionados ao cálculo de áreas. Por exemplo, podem ser propostos desafios em que os alunos devem determinar a área de figuras geométricas em situações do mundo real, como a planta de uma casa ou o layout de um jardim. Isso permite que os alunos percebam a relevância dos conceitos de área em seu cotidiano, tornando o aprendizado mais significativo e motivador.

Outra abordagem inovadora é o uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática. Softwares educacionais como o *GeoGebra*<sup>1</sup> e aplicativos interativos como o *Kahoot*<sup>2</sup> podem ser utilizados para visualizar e manipular figuras geométricas, permitindo que os alunos experimentem diferentes tamanhos, formas e configurações, e observando as mudanças correspondentes nas áreas. Essas ferramentas tecnológicas fornecem uma representação visual e interativa dos conceitos, facilitando a compreensão e possibilitando uma exploração mais aprofundada desses conceitos.

Igualmente, o guia passo a passo de exercícios pode ser uma ferramenta valiosa no ensino de áreas, pois fornecerá aos professores uma sequência estruturada de exercícios, que abrangem desde os conceitos básicos até problemas mais complexos. Cada exercício está acompanhado de instruções claras e detalhadas, favorecendo um diálogo com o leitor, explicando o processo passo a passo para calcular a área de diferentes formas geométricas. Esse recurso será uma referência prática para os alunos, auxiliando-os na compreensão da resolução dos exercícios, ao mesmo tempo em que servirá como um recurso didático para os professores na elaboração de suas aulas.

Ao adotar essas abordagens inovadoras, espera-se promover uma aprendizagem mais significativa e engajadora no ensino de áreas, haja vista que os alunos terão a oportunidade de desenvolver habilidades de resolução de problemas, raciocínio lógico e pensamento crítico, enquanto aplicam e abstraem os conceitos de área em situações concretas e relevantes. Essas abordagens podem contribuir para melhorar a autoconfiança e a motivação dos alunos em relação à matemática e o hábito de estudar, tornando o processo de aprendizagem mais prazeroso e satisfatório.

Por fim, espera-se que este estudo, ao explorar e analisar diferentes estratégias e abordagens no ensino de áreas, forneça subsídios e orientações para professores interessados em utilizar métodos inovadores e eficazes em suas aulas de matemática. O guia passo a passo de exercícios proposto pode ser uma ferramenta poderosa e acessível, auxiliando os professores na elaboração de suas aulas e na promoção de uma aprendizagem mais efetiva dos conceitos básicos de área.

Acredita-se que, ao investir em abordagens pedagógicas inovadoras, é possível potencializar o aprendizado dos alunos e contribuir para a melhoria da qualidade da educação matemática.

<sup>1</sup> Geogebra Classic <[https://www.geogebra.org/classic?lang=pt\\_PT](https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT)>.

<sup>2</sup> Kahoot <<https://kahoot.com/home/mobile-app/>>.

## 3.2 Ensino de Áreas no Ensino Básico

O ensino de áreas é um tema essencial no currículo de matemática do Ensino Fundamental e Médio, por isso, a compreensão dos conceitos de áreas e a habilidade de calcular corretamente a área de figuras geométricas são fundamentais para o desenvolvimento de habilidades matemáticas dos alunos e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento. No entanto, muitas vezes o ensino de áreas no contexto escolar se baseia em métodos tradicionais, que podem apresentar algumas limitações no engajamento e na compreensão dos alunos. Uma abordagem comum é a apresentação teórica dos conceitos de áreas, seguida pela resolução de exercícios em que os alunos aplicam fórmulas para calcular as áreas. Embora esse método seja amplamente utilizado, ele pode ser abstrato e distante da realidade dos estudantes, não sendo muito eficaz.

Os métodos tradicionais de ensino de áreas na maioria das vezes não proporcionam oportunidades para os alunos explorarem e experimentarem os conceitos de forma prática, posto que a falta de conexão com situações problemas reais e a ausência de contextualização podem levar os alunos a considerarem este estudo como algo desinteressante e sem relevância para suas vidas. Essa desconexão entre o conteúdo matemático e a aplicação prática pode levar à falta de motivação e ao baixo desempenho dos alunos nessa área específica.

Ademais, sabemos que os alunos não têm maturidade suficiente para estudar alguns conceitos matemáticos por métodos tradicionais, se não houver uma ligação a fim de que os conceitos façam sentido para o aluno, o aprendizado não acontece. Essa maturidade em ter rotina de estudos e conseguir estabelecer essas relações entre teoria e prática de tal conteúdo, necessita do intermédio do professor e uma metodologia diferenciada para organizar e dar sentido. Infelizmente, os alunos não buscam compreender algum conteúdo com pesquisa para estabelecer essas ligações, simplesmente decoram e têm muita dificuldade em saber qual a fórmula que decorou e será aplicada em determinado problema ou em uma parte do problema.

Além disso, a abordagem tradicional pode enfatizar a memorização de fórmulas e procedimentos, em vez de promover uma compreensão profunda dos conceitos. Os alunos podem se sentir sobrecarregados com a quantidade de fórmulas e regras a serem memorizadas, o que pode prejudicar seu interesse e capacidade de compreender as relações entre os elementos das figuras e as estratégias para calcular as áreas.

Diante desses desafios, é necessário buscar abordagens inovadoras e eficazes para o ensino de matemática e, no caso, aqui, para áreas no Ensino Básico. Abordagens que possibilitem aos alunos uma compreensão mais significativa relacionando a teoria e a prática desses conceitos, tornando o estudo de áreas mais relevante, interessante e envolvente.

### 3.3 Abordagens Inovadoras

Diversas abordagens inovadoras têm sido exploradas no ensino de áreas, com o objetivo de superar as limitações dos métodos tradicionais e promover uma aprendizagem mais eficaz e significativa. Essas abordagens valorizam a participação ativa dos alunos, a exploração prática dos conceitos e a conexão com situações problemas reais, tornando o estudo de áreas mais relevante, interessante e envolvente.

Uma das abordagens inovadoras é a utilização de metodologias ativas<sup>3</sup> que tem como foco principal incentivar os alunos a participar ativamente do processo de aprendizagem, ao invés de apenas receberem informações passivamente. Por esse prisma, os alunos são desafiados a investigar, explorar e descobrir os conceitos por meio de atividades práticas, estimulando o pensamento crítico, a criatividade, a formação de uma linha de raciocínio lógico o que permite o desenvolvimento de uma compreensão aprofundada, significativa e bem alicerçada dos conceitos de áreas. Por exemplo, os alunos podem ser encorajados a medir áreas de figuras em suas próprias casas ou na escola, utilizando instrumentos de medição e aplicando estratégias para calcular as áreas de forma intuitiva. Essa experiência prática permite que eles visualizem e apliquem os conceitos matemáticos de forma concreta, já assimilados e, assim, encaminha-se para conceitos mais avançados a partir dessas intuições, tornando o aprendizado mais concreto e tangível.

Outra abordagem inovadora é o uso de recursos tecnológicos, como softwares educacionais, aplicativos interativos e simuladores virtuais. Esses recursos oferecem aos alunos a oportunidade de visualizar e manipular figuras geométricas, experimentar diferentes configurações e situações e calcular áreas de forma interativa. Ao utilizar essas ferramentas, os alunos podem explorar diferentes cenários e testar suas hipóteses, tornando o aprendizado de áreas lúdico e envolvente, além de proporcionar uma representação visual mais clara e detalhada dos conceitos matemáticos, ajudando os alunos a compreender melhor as relações entre os elementos das figuras e as estratégias para calcular as áreas.

A conexão entre os conceitos de áreas e situações do cotidiano dos alunos é outra característica das abordagens inovadoras no ensino de áreas, posto que os estudantes são incentivados a identificar e analisar situações reais que envolvam o cálculo de áreas como o planejamento de espaços em uma planta arquitetônica, a estimativa de quantidades de materiais para construções civis ou o cálculo de áreas de superfícies em atividades de jardinagem. Essa conexão com a vida real confere maior importância estudo de áreas e auxilia os alunos a compreender a relevância prática deste conhecimento matemático, pois ao perceber a aplicação dos conceitos em seu cotidiano, os alunos se tornam mais motivados e engajados no processo de aprendizagem, já que compreendem a utilidade desses conhecimentos em sua vida diária.

---

<sup>3</sup> Metodologias ativas serão abordadas no [Capítulo 4](#) com um pouco mais de profundidade, dentre elas: Investigação Matemática, Resolução de Problemas, Etnomatemática e um pouco sobre os distratores.

Outra abordagem inovadora e eficaz para o ensino de áreas é fornecer aos alunos um guia passo a passo de exercícios, que os auxilie na compreensão e elaboração de conteúdos didáticos para as aulas de geometria. Tal ferramenta pode apresentar uma sequência de atividades progressivas, começando com exercícios mais simples e avançando para desafios mais complexos com pequenos saltos no desenvolvimento dos exercícios. Cada exercício deve ser cuidadosamente projetado para desenvolver as habilidades e conceitos necessários para o cálculo de áreas, fornecendo explicações claras, exemplos ilustrativos e dicas úteis. Essa abordagem facilita a compreensão e a assimilação dos conteúdos, permitindo que os alunos progridam de forma gradual e segura, sem traumas em seu aprendizado.

Logo, ao adotar abordagens inovadoras no ensino de áreas, espera-se promover uma aprendizagem mais significativa e envolvente para os alunos, visto que a utilização de metodologias ativas, recursos tecnológicos e a conexão com situações reais contribuem para despertar o interesse, a curiosidade e a motivação, promovendo um amadurecimento do conhecimento dos estudantes, o que torna o estudo de áreas mais acessível e prazeroso. Além disso, essas abordagens proporcionam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, permitindo que os alunos desenvolvam habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e comunicação matemática. Dessa forma, o ensino de áreas no ensino fundamental e médio se torna mais efetivo, pois prepara os alunos para lidar com desafios matemáticos mais complexos e elaborados, promovendo o desenvolvimento de uma base sólida de conhecimentos matemáticos.



---

## METODOLOGIAS ATIVAS EDUCACIONAIS

---

Neste capítulo, será apresentada a metodologia adotada para o desenvolvimento e aplicação das abordagens inovadoras no ensino de áreas. Serão discutidos dois aspectos fundamentais: o desenvolvimento de materiais didáticos e a implementação de atividades em sala de aula. Elementos que são essenciais para promover uma aprendizagem significativa e engajada aos alunos.

A seguir, de forma muito simplificada, elenco algumas abordagens estudadas nessa dissertação, baseada em Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas de [Onuchic \(1999\)](#), em Investigações Matemáticas na sala de aula de [Ponte e Oliveira \(2019\)](#), em Etnomatemática. [D'Ambrosio \(2000\)](#) e o tema que, particularmente, é o mais utilizado durante o processo de ensino e aprendizagem durante esses anos de docência: O erro matemático como processo de ensino-aprendizagem de [Carianha et al. \(2010\)](#).

A experiência docente no ensino básico em matemática atesta que os quatro temas abaixo possuem uma complementariedade didático-pedagógica para a elaboração e aplicação de aulas no estudo de matemática o mais próximo da completude no processo de ensino aprendizagem dos alunos em sala de aula de forma comunitária e autônoma.

### 4.1 Resolução de Problemas

A resolução de problemas é uma abordagem pedagógica que enfatiza o aprendizado baseado na resolução de desafios e situações do mundo real. Ao aplicar essa metodologia, os alunos são incentivados a desenvolver habilidades de pensamento crítico, criatividade e raciocínio lógico. O papel do professor é o de guiar e facilitar o processo, proporcionando suporte conforme os alunos enfrentam e superam obstáculos. Por esse caminho, a resolução de problemas não apenas promove a compreensão de conceitos, mas também capacita os alunos a aplicar o conhecimento em contextos práticos.

## 4.2 Investigação Matemática

A investigação matemática envolve a exploração ativa e a descoberta de conceitos matemáticos por meio de questionamentos e explorações guiadas. Com essa abordagem, os alunos são encorajados a formular perguntas, propor hipóteses, coletar e analisar dados, além de tirar conclusões baseadas em evidências matemáticas. Essa metodologia promove uma compreensão mais profunda dos princípios matemáticos e, ao mesmo tempo, desenvolve habilidades de investigação e pensamento crítico.

## 4.3 Etnomatemática

A Etnomatemática é uma abordagem educacional que reconhece e incorpora as práticas matemáticas presentes em diferentes culturas, destacando a importância de compreender e valorizar as diversas perspectivas culturais em relação à matemática. Ao integrar a Etnomatemática no ensino, os alunos são expostos a diferentes sistemas de numeração, padrões matemáticos e problemas contextualizados em várias culturas. Isso não apenas promove a diversidade cultural, mas também ajuda os alunos a perceberem a presença da matemática em diferentes aspectos da vida cotidiana.

## 4.4 Distratores (estudo dos erros)

O estudo dos distratores se concentra na análise e compreensão dos erros cometidos pelos alunos durante o processo de aprendizagem. Em vez de simplesmente corrigir os erros, os educadores investigam as possíveis razões por trás dos equívocos dos alunos, a fim de identificar lacunas no entendimento e abordar conceitos mal compreendidos. Ao compreender os distratores, os professores podem adaptar estratégias de ensino e fornecer intervenções direcionadas para ajudar os alunos a superar dificuldades específicas e melhorar o processo de aprendizagem.

## 4.5 Desenvolvimento de materiais didáticos

O desenvolvimento de materiais didáticos adequados é um passo crucial para a efetivação das abordagens inovadoras no ensino de áreas. Esses materiais devem ser cuidadosamente elaborados, considerando os objetivos de ensino, os conteúdos a serem abordados e as características dos alunos. O propósito é fornecer recursos que estimulem a participação ativa dos alunos, explorem a prática dos conceitos de áreas e estabeleçam conexões com situações reais.

Primeiramente, é necessário realizar uma revisão bibliográfica abrangente sobre o ensino de áreas, buscando referências teóricas e práticas que fundamentem o desenvolvimento dos materiais didáticos. Essa revisão permitirá identificar abordagens inovadoras, estratégias de ensino eficazes e exemplos de atividades práticas relacionadas ao cálculo de áreas. Com base nessa revisão, serão selecionados e adaptados materiais didáticos existentes, bem como desenvolvidos novos recursos. Esses materiais podem incluir guias de estudo, exercícios, jogos educacionais, vídeos explicativos, simulações interativas, entre outros. O objetivo é oferecer uma variedade de recursos que atendam às diferentes formas de aprendizagem dos alunos e proporcionem uma compreensão abrangente dos conceitos de áreas.

Também é necessário que os materiais didáticos sejam organizados de forma sequencial e progressiva, levando em consideração a progressão do aprendizado dos alunos. Deve haver uma clara sequência de atividades, começando por exercícios mais simples e básicos, que envolvam pouco texto, praticamente com resolução direta e, posteriormente avançar para desafios mais complexos, envolvendo textos e situações problemas. A elaboração dos materiais deve ser guiada por uma abordagem passo a passo, fornecendo explicações claras, exemplos ilustrativos e dicas úteis para auxiliar os alunos em seu processo de aprendizagem.

É importante, igualmente, considerar a diversidade dos alunos, adaptando os materiais didáticos para atender às suas necessidades específicas, o que inclui a criação de versões acessíveis para estudantes com deficiências visuais ou auditivas, assim como a disponibilização de recursos digitais para alunos que prefiram utilizar dispositivos eletrônicos, entre outras estratégias inclusivas. É importante frisar que a personalização dos materiais permitirá que todos os alunos tenham acesso igualitário às atividades e possam participar plenamente do processo de aprendizagem.

Por último, após o desenvolvimento dos materiais didáticos, é fundamental realizar uma análise criteriosa de sua qualidade e adequação. Essa análise pode ser feita por meio de revisões por pares, consulta a especialistas na área de educação matemática, aplicação prévia dos materiais em turmas-piloto, entre outros métodos. Essa etapa de revisão e validação garantirá que os materiais estejam alinhados com os objetivos de ensino, sejam eficazes na promoção da aprendizagem dos alunos e estejam em conformidade com os princípios pedagógicos adotados.

## 4.6 Atividades em sala de aula

As atividades em sala de aula desempenham um papel fundamental na aplicação das abordagens inovadoras no ensino de áreas. Essas atividades são projetadas para engajar os alunos, promover a exploração prática dos conceitos de áreas e estabelecer conexões com situações reais. Elas podem ser realizadas individualmente, em duplas, em grupos pequenos ou em toda a classe, dependendo dos objetivos e das necessidades específicas de cada atividade.

A implementação das atividades em sala de aula deve seguir uma abordagem progressiva, iniciando por atividades introdutórias que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos. Essas atividades podem envolver a manipulação de materiais concretos, como blocos de montar, formas geométricas ou até mesmo objetos do cotidiano, para que os alunos possam visualizar e explorar as noções básicas de áreas. À medida que os alunos adquiram familiaridade com os conceitos de áreas, as atividades podem se tornar mais desafiadoras e complexas. Os estudantes podem, por exemplo, ser incentivados a resolver problemas que envolvam o cálculo de áreas de figuras geométricas, utilizando estratégias variadas e explorando diferentes métodos de medição e cálculos. A resolução de problemas reais, como o planejamento de espaços ou o cálculo de áreas de superfícies em contextos práticos, também pode ser incorporada nas atividades em sala de aula.

Durante a realização das atividades, é fundamental que o professor desempenhe o papel de mediador e facilitador, estimulando a participação ativa dos alunos, fornecendo suporte, quando necessário, e promovendo discussões e reflexões sobre os conceitos abordados. O professor também pode fazer uso de recursos tecnológicos, como softwares educacionais, aplicativos interativos e simuladores virtuais, para enriquecer as atividades e proporcionar experiências mais envolventes e visualmente atrativas. Ou, ainda, simplesmente trabalhar com instrumentos, como régua, compasso, esquadros e transferidor, orientando o aluno em construções geométricas que ajudem na compreensão de conceitos básicos da matemática e no estudo de geometria. Esses instrumentos são a base para uma boa compreensão da geometria em softwares. Dessa forma, as atividades em sala de aula devem ser planejadas de forma a contemplar diferentes estilos de aprendizagem dos alunos, oferecendo oportunidades para a prática individual, o trabalho colaborativo, a reflexão e a expressão verbal. O uso de estratégias diferenciadas, como a rotação de estações de trabalho, a gamificação e a resolução de problemas em grupo, pode contribuir para a diversificação das atividades e para o atendimento das necessidades individuais dos alunos.

Ao longo do processo de implementação das atividades em sala de aula, é fundamental realizar uma avaliação contínua do progresso e do desempenho dos alunos. Essa avaliação pode ser realizada por meio de observação direta, registro de notas, análise dos trabalhos produzidos pelos alunos ou até mesmo por meio de testes formais. A avaliação deve ser formativa, ou seja, deve fornecer informações que orientem o processo de ensino-aprendizagem, permitindo ajustes e intervenções necessárias para garantir o sucesso dos alunos.

Após a realização das atividades em sala de aula, é importante promover momentos de discussões e reflexões coletivas. Os alunos devem ser incentivados a compartilhar suas descobertas, suas estratégias de resolução e principalmente suas dificuldades, para que possam aprender uns com os outros e construir um conhecimento coletivo mais sólido. Outrossim, professor desempenha um papel crucial na condução dessas discussões, estimulando o pensamento crítico, fazendo perguntas provocativas, bem como discutindo as escolhas dos passos e os motivos que levaram ao erro, além de fornecer retorno construtivo.

Em resumo, a implementação das atividades em sala de aula é um elemento essencial das abordagens inovadoras no ensino de áreas, pois, por meio dessas atividades, aos alunos há a oportunidade de explorar, experimentar e aplicar os conceitos de áreas de forma prática e significativa. O papel do professor é fundamental nesse processo, posto que atua como mediador, facilitador e orientador, garantindo um ambiente propício ao aprendizado e à participação ativa dos alunos. Ao promover uma aprendizagem mais envolvente e significativa, as atividades em sala de aula contribuem para a melhoria da qualidade da educação matemática e para o desenvolvimento das habilidades dos alunos no cálculo de áreas.



---

## EXPERIÊNCIAS MOTIVACIONAIS NA CARREIRA DOCENTE

---

Nesse capítulo, discorrerei sobre experiências docentes vivenciadas no ano de 2009 e anos iniciais da carreira após a efetivação como Professora de Educação Básica 2 (PEB2), no Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio. A aprovação no concurso da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEDUC), realizado no ano de 2003, aconteceu em 2004 quando houve o chamamento para a escolha do cargo. Em janeiro de 2005, houve a posse desse cargo na Escola Estadual Wadih Jorge Maluf na cidade de Sumaré-SP. Foram oito anos (2005–2012) de dedicação às aulas nessa escola, quando houve uma remoção docente para mais próximo de minha cidade natal, São Carlos.

### 5.1 A Escola Estadual Wadih Jorge Maluf

#### 5.1.1 *O Patrono*

Wadih Jorge Maluf, nascido no Líbano no dia 21 de janeiro de 1902, veio para o Brasil em 1911, com seu pai, Jorge Antônio Maluf. Wadih foi um dos mais conhecidos moradores de Rebouças-Sumaré, onde residia com dois irmãos: Assef Rachid Maluf e Abraão Maluf. As três famílias residiam na Praça da República. Wadih foi tropeiro e nessa qualidade, viajou por diversos estados brasileiros. Casado com Rosa Maluf, teve duas filhas: Maiba Aparecida Maluf, professora e primeira diretora da Escola Normal de Sumaré, e Inês Benedita Maluf, assistente social. Maluf faleceu no dia 6 de dezembro de 1970 com 68 anos. Foi homenageado com o nome de uma rua no município (Lei n. 1542/1982) e pelo Governo do Estado de São Paulo com o nome de uma escola no Bairro do Matão<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Conf. *Associação Pró-Memória de Sumaré*, Wadih Jorge Maluf, postagem de 06/11/2016. <<https://www.facebook.com/share/iQ1iWN7t9XCgrc4n/>>, acesso em 08/08/2024.

### 5.1.2 Localização

A escola Wadih localiza-se à Rua Santa Clara, 238, Jardim Santa Clara. Centro de um dos 7 distritos da cidade de Sumaré, conhecido como Bairro Matão, um setor compreendido entre as cidades de Sumaré, Paulínia, Campinas e Hortolândia. É uma região onde fazendas e chácaras foram dispostas para loteamentos e construção de bairros para trabalhadores das inúmeras indústrias na região, acelerando o crescimento dessas cidades e especificamente esse distrito. Esse bairro permeia a rodovia Anhanguera, o que torna o acesso a qualquer uma das cidades vizinhas muito rápido, na maioria das vezes. Um lado da rua é de uma cidade e o outro lado, do Bairro Matão.

As classes sociais predominantes no Bairro Matão são as classes C, D e E. Os moradores são trabalhadores que vêm de cidades do interior de São Paulo à procura de emprego nas indústrias da região. O Bairro é composto por famílias formadas nessas condições que se estabelecem e ficam na região, ou aquelas que ficam apenas por algum tempo enquanto durar o trabalho disponível.

O Bairro Matão localiza-se na região metropolitana de Campinas, mais precisamente nas divisas das cidades de Campinas e Sumaré (sendo um bairro de Sumaré). Começou a se desenvolver no final dos anos de 1940, com o *boom* da industrialização brasileira, aproveitando-se de sua localização estratégica que fica às margens da rodovia Anhanguera, uma das principais rodovias paulistas (ligação com Brasília) e cortada por ramais ferroviários.

Com essa diversidade modal, atraiu uma enorme gama de indústrias de diversos segmentos e a primeira a se instalar foi a *Minasa S.A. Industrialização de Milho e Óleos Vegetais*. Despertou-se, assim, uma especulação imobiliária pelo interesse de se implantar um bairro industrial, fazendo com que as fazendas remanescentes da cafeicultura fossem loteadas e esses terrenos e casas fossem vendidos para os trabalhadores atraídos pelos empregos que essas novas indústrias criariam.

Além desses atrativos, a região foi marcada pelo comércio popular e varejista. Tendo por base essa infraestrutura de indústria e comércio, o Bairro Matão passa a atrair vários imigrantes vindos de várias partes do Brasil, exigindo cuidado do poder público, já no início da década de 1970, que sistematicamente passou a anunciar ações e projetos urbanísticos. E um desses aparatos urbanos, voltado a educação, foi a instalação da Escola Estadual Wadih Jorge Maluf, a fim de atender os filhos dos novos moradores e qualificar os trabalhadores dessas indústrias que se instalaram no bairro. Diante das características dos moradores do Bairro Matão, podemos ter uma ideia da realidade sócio-econômica dos alunos que frequentam a escola citada.

### **5.1.3 Infraestrutura física**

A escola Wadih possui um ampla infraestrutura física, um terreno muito grande que comporta: 16 salas de aula, 1 sala de leitura, 1 quadra coberta, 1 campinho, 1 laboratório de informática, 1 cantina, 1 cozinha, 1 despensa, 1 banheiro adequado, 2 banheiros de alunos, 4 banheiros de funcionários, 3 banheiros administrativos, 2 espaços livres e 1 sala de docência.

À parte de conectividade e informática, a escola oferece acesso à internet, a cabo e a *wireless*, possuindo banda larga de 100 Mbps. Possui 152 tablets de uso dos alunos, 16 aparelhos de televisão e 3 aparelhos de ponto de acesso Wifi. Possui 13 computadores de uso administrativo, 222 aparelhos portáteis, 22 impressoras multifuncionais, 1 aparelho de internet de uso administrativo, 1 aparelho para internet de uso pedagógico e 2 projetores multimídia data show.

### **5.1.4 Infraestrutura humana e recursos pedagógicos**

Atualmente, a escola possui um total de 889 estudantes, formando 27 turmas divididas em dois turnos integrais de 7 horas. São 14 turmas de Ensino Fundamental (anos finais) e no Ensino Médio são 13 turmas.

O primeiro turno funciona entre 7:00 e 14:00 com três turmas de 6º ano, três turmas de 7º ano, quatro turmas de 8º ano e quatro turmas de 9º ano do Ensino Fundamental 2. O segundo turno funciona entre 14:15 e 21:15 com oito turmas de 1º ano, duas turmas de 2º ano e três de 3º ano do Ensino Médio.

Nos anos de 2005 até 2012, a escola possuía uma média de 900 a 1000 alunos, distribuídos em três períodos, com seis aulas no período matutino e vespertino e 5 aulas no período noturno, e nesse anos, a escola também oferecia turmas de Educação de Jovens e Adultos (EJA), além do Ensino Fundamental – anos finais e Ensino Médio.

### **5.1.5 Avaliações e índices**

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) foi criado em 2007 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino. Essa avaliação é aplicada apenas no Ensino Fundamental, anos iniciais e anos finais.

O Indicador de Desenvolvimento das Escolas de São Paulo (IDESP) é um indicador que avalia a qualidade da escola. Nesta avaliação, considera-se que uma boa escola é aquela em que a maior parte dos alunos aprende as competências e habilidades requeridas para a sua série/ano, num período de tempo ideal – o ano letivo. Um dos principais indicadores da qualidade do ensino na rede estadual paulista, o índice, também foi criado em 2007, e estabelece metas que as escolas devem alcançar ano a ano.

O IDESP segue o modelo do IDEB, do *governo federal*, mas com diferenças importantes: o IDEB utiliza nota média dos estudantes na Prova Brasil, enquanto o IDESP considera a distribuição dos estudantes da escola em quatro níveis de proficiência de acordo com o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) – fornece indicadores de extrema relevância para subsidiar o monitoramento das políticas públicas de educação, bem como para o aprimoramento e/ou redirecionamento das ações e projetos em andamento. Vale observar que, no IDESP, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC) cria uma anomalia que faz com que esses dois índices sejam muitos discrepantes, pois nele existe a avaliação de ausência na prova e a evasão escolar dos alunos (causando queda abrupta no índice), e não somente classificando ou qualificando o ensino aprendizagem (professor e aluno) pelo resultado obtido pelos alunos de fato avaliados.

Os dados abaixo são extraídos do portal da [SEDUC \(2024\)](#). A escola Wadih possui 889 estudantes de Ensino Básico, neste ano.

No Ensino Fundamental 2 – Anos finais a nota no IDEB/2023 foi de **5,10** e a nota no IDESP/2023, foi de **2,63**. Note a diferença das avaliações de **2,47**, a despeito de que foram os mesmos alunos avaliados.

No caso do Ensino Médio, não há avaliação do IDEB, apenas a nota do IDESP, que foi de **1,84**, quando um número maior de evasão, pois alunos, nessa faixa etária, acabam deixando os estudos para trabalhar e ajudar a família.

A média dos índices de 2005 a 2012 não ficou muito longe dos valores dos índices atuais, havendo variação na casa dos décimos.

## 5.2 Os primeiros anos: 2005 a 2008

Quando cheguei à escola Wadih, em 2005, para assumir o meu cargo de professora efetiva PEB2, foi um pouco preocupante e difícil. Tinha 26 anos, formara-me a pouco, e além disso, era a primeira vez que saía de casa pra morar sozinha e longe da família. O bairro de periferia era violento e mesmo a escola sendo no centro desse bairro, era de difícil acesso, pois era muito longe do centro da cidade de Sumaré. Nessa época, GPS não era tão acessível e celular não tinha internet nem aplicativos que nos auxiliam, como hoje. Como sempre morei em São Carlos, não tive essa experiência para estudar e morar fora de casa e da cidade, mas ela veio com o trabalho.

### 5.2.1 *Tomando posse de um cargo efetivo e mudando de cidade*

A primeira vez que entrei na escola, havia um mato muito alto, a entrada era por uma rua sem saída, um quarteirão paralelo à avenida principal do bairro, que mais parecia uma vicinal alternativa para quem quisesse fugir do trânsito da Anhanguera, quase na periferia de Campinas.

Passado um pouco o susto e receio com o esteriótipo e fama ruim sobre do bairro e da escola, fui muito bem recebida em todas as fases da posse do cargo, atribuição das aulas, o horário das aulas me permitindo ficar um dia da semana em São Carlos, me ajudaram muito nessas mudanças de vida. Antes do início das aulas, fui várias vezes pra escola e depois dos compromissos saía para procurar casa ou apartamento para alugar.

Estou falando sobre esse início, com carinho, porque fui muito bem recebida pela equipe gestora da escola e acolhida pelos professores e funcionários, pois haviam vários professores também tomando posse de cargo, e inclusive alguns de muito mais longe que eu. Para o planejamento e início das aulas, ainda estava ficando em um hotel/pensão, dividindo quarto com colegas, até que conheci uma professora de português, que vinha de muito longe, e que resolveu dividir um apartamento comigo e acabamos morando num condomínio do bairro, bem próximo à escola e passamos a fazer parte da comunidade.

Esse primeiro ano foi muito difícil, o apartamento não tinha quase nada de móveis e estrutura pra ficar mais tempo na cidade, então, todo fim de semana voltava pra casa com roupas para lavar, comida pra fazer e ainda trazia o trabalho de professor que sempre continua em casa. Viajava toda semana.

### **5.2.2 Estabilizada e se envolvendo com a escola**

Além da parte pessoal, o trabalho inicial enfrentou vários desafios, cujo primeiro foi lidar com uma comunidade muito carente, poucos recursos dentro da realidade escolar e todos aqueles sonhos e projetos com os quais saímos da universidade, com vontade de fazer e acontecer, que caem por terra. Eu nunca tive problemas com indisciplina de alunos, por isso, fazer amizade e cativa-los não foi tão complicado. Porém, conseguir trabalhar matemática com eles, foi desafiador, difícil, cansativo e, muitas vezes, desanimador.

Encontrei uma realidade muito difícil de transformar, os alunos não sabiam como se comportar para realizar provas, quase não tinham esse hábito, pois vinham de uma sequência de trabalhos de matemática, apenas vistos nas tarefas no caderno, além de uma constante troca de professores, que não oferecia continuidade à disciplina. Assim, formavam-se enormes lacunas no aprendizado, sendo uma constante as aulas de revisão, ou então ensinar conteúdos que não faziam parte do currículo do ano em que os alunos cursavam. Tínhamos muita defasagem, o que causava o desinteresse dos alunos em matemática.

Nesse ano de 2005, eu ainda acreditava que, no ano seguinte, conseguiria me remover de volta para São Carlos, então não tinha um projeto pedagógico a longo prazo para o ensino de matemática. Mas, para os alunos, ter a mesma professora do início ao fim do ano, ou a mesma durante a semana inteira, já começou a inspirar mudanças no comportamento deles.

Ao longo do primeiro bimestre, foi uma labuta e tive muitas provas entregues em branco, muitas reclamações por parte da maioria, sobre as notas vermelhas e muito baixas. Houve uma demora da minha parte em compreender o que acontecia pedagogicamente ali e traçar uma estratégia para que esse quadro mudasse. Posso afirmar que levei praticamente o ano inteiro nessa tarefa. A remoção não veio, fiquei o ano inteiro com esse problema nas mãos, mas algumas pequenas mudanças, quase imperceptíveis, foram acontecendo, frutificando no ano seguinte.

A primeira mudança foi apresentar as Olimpíadas de Matemática, que era um projeto da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), iniciando no ano de 2005 e segue até os dias atuais.

### **5.2.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP**

Havia uma professora de matemática, a dona Eliza, que foi uma mãe muito acolhedora nesse primeiro ano no Wadih, sempre me elogiava e disse que nunca havia passado uma professora pela escola com essa vontade de ensinar e fazer de tudo para que os alunos aprendessem. Quando ficamos sabendo da OBMEP<sup>2</sup>, conversamos entre os professores de matemática, e encaminhamos à coordenação pedagógica e à direção de que gostaríamos de participar. No primeiro momento, foram inscritos apenas alguns alunos interessados por turma, o que me entristeceu, pois gostaria que fosse a escola inteira. Mas, segundo dona Eliza, eu consegui um feito inédito lá na escola: que alguns alunos se interessassem em fazer a prova.

No ano seguinte, eu consegui com que toda a escola fizesse a OBMEP e, mais que isso, consegui vincular a nota da primeira fase junto à nota bimestral da maioria das disciplinas. Assim se seguiu durante os oito anos em que fiquei nessa escola e, depois que me removi de lá, sei que virou rotina a realização da OBMEP, assim como, por todas as escolas por onde passei, fiz sempre com que todos os alunos da escola participassem, pelo menos, da primeira fase.

Como a OBMEP é uma avaliação com matemática um pouco mais elaborada e diferenciada do que é trabalhado em sala de aula, principalmente com toda dificuldade que houve com a defasagem na aprendizagem de matemática, mencionada anteriormente, para que não houvesse um desestímulo muito grande com o resultado da OBMEP, adotei um esquema de majoramento de notas, tomando por base a maior nota da turma. Por exemplo, são vinte questões na primeira fase, depois de corrigidas todas as provas, a maior nota da turma era majorada para dez e proporcionalmente, majorava as outras notas. Mesmo com toda dificuldade ao realizar uma prova como esta, havia o incentivo de ser o aluno que conseguia acertar o máximo possível dentre as vinte questões, ou seja, sempre existia um aluno com nota máxima, e os outros não ficariam com uma nota insatisfatória para incorporar na nota bimestral.

---

<sup>2</sup> Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. <<http://www.obmep.org.br/>>.

Essa ideia foi muito bem aceita pelos alunos que até em simulados ou outras avaliações que abrangiam a escola toda, esse sistema de majoramento era adotado. Funcionou muito bem nessa escola, assim como nas outras escolas que trabalhei.

## 5.3 O ano de 2009

Esse ano, tínhamos um quadro de professores efetivos na escola quase completo, eu já estava trabalhando com os mesmos alunos há quatro anos, então os projetos eram mais fáceis de implementar e obter sucesso. Pelo fato de existir mais professores efetivos na escola, era possível elaborar projetos multidisciplinares e, tendo dado aulas há 4 anos para os mesmos alunos, eu conhecia cada uma de suas dificuldades, o que tornava mais fácil para saná-las e conseguir progressão nos conteúdos. Além disso, já estava muito bem estabelecida na cidade e não queria me remover naquele momento. Nos anos anteriores, era um eterno recomeçar os conteúdos, e quase nunca chegar ao conteúdo respectivo daquele ano ou daquele bimestre, o que sempre nos deixava atrasados com o cronograma do planejamento baseado no Currículo Paulista ([ESTADO DE SÃO PAULO, 2024](#)) e Base Nacional Comum Curricular ([BRASIL, 2024](#)).

### 5.3.1 Como surgiu a ideia do projeto

Ao longo desses quatro anos, diminuiu muito a rotatividade de professores na escola, já na direção e gestão, houve muitas mudanças, pois não havia diretor efetivo lá. O diretor, do ano de 2009, foi excelente, por isso tivemos um ano bem diferenciado na escola. Neste ano, o Governo do Estado de São Paulo disponibilizou verbas para reformas nas escolas do estado, no caso do Wadih, o chão era cimento queimado e, na escola inteira foi colocado piso, foi feita a troca da cobertura da quadra, pintura da demarcação da quadra, além da pintura desde fachada até a parte interna da escola.

Não houve pausa nas aulas para essa reforma, tudo aconteceu com as aulas transcorrendo normalmente, o espaço onde havia reforma ficava isolado, e os alunos mudavam de sala para ter aulas, pois existiam algumas salas ociosas. Estava dando aula para todos os segundos anos do Ensino Médio, introduzindo o Teorema de Pitágoras para ensinar trigonometria, inicialmente no triângulo retângulo e, depois no círculo trigonométrico, para isso fiz uma introdução-revisão com exercícios que trabalhavam com perímetros e áreas. Aproveitei todo o trabalho da reforma com o assentamento dos pisos e azulejos para exemplificar, num dia de aula comum, sobre áreas e perímetros, quando usei a situação da vida real para introduzir áreas e perímetro. O mesmo acontecia no sétimo ano do Ensino fundamental 2 que, na época, era de quinto a oitavo ano, os anos finais. Quando estava dando essa mesma aula em outro segundo ano, eu tive a ideia de fazer um projeto, parei a aula e contei a ideia para os alunos. Eles abraçaram a ideia imediatamente.

Em casa, eu estruturei melhor o projeto colocando no papel, também conversei com alguns colegas de outras disciplinas, que esse projeto poderia ser multidisciplinar, bem como o que caberia a cada um na orientação aos alunos e para quais turmas seria aplicado. Na aula seguinte de matemática, em todos os segundos anos, foi abordado como funcionaria o projeto e quais disciplinas e professores fariam parceria nesse projeto, com cada um atribuindo a nota à média bimestral com o peso que julgasse necessário.

### **5.3.2 Projeto multidisciplinar**

O projeto envolveu as disciplinas de Português, Matemática, Física, Química, Geografia e Artes dos segundos anos do Ensino Médio.

Os alunos se dividiram em grupos por afinidade e proximidade de moradia, pois grande parte desse trabalho deveria ser realizado fora da escola. A pesquisa de campo necessitava que morassem próximo e tivessem facilidade para poder desenvolver as atividades durante toda a pesquisa do projeto. O projeto consistia resumidamente nos seguintes tópicos:

#### *5.3.2.1 Desenhar uma planta baixa de um imóvel que seria representado na mesma escala em uma maquete*

Os alunos deveriam escolher um imóvel, que poderia ser real ou fictício, com poucos cômodos, como uma casa simples, um salão de beleza ou uma oficina, algo que estivesse mais próximo da realidade de cada grupo.

Esse imóvel deveria ser desenhado em uma planta baixa, com todas suas medidas, seguindo uma escala com o tamanho real. Juntamente com essa planta, deveria haver um pequeno relatório com os dados destacados do perímetro e área do terreno, assim como de cada cômodo e a altura das paredes.

Esses dados serviriam para o levantamento dos gastos para levantar as paredes, pintar ou azulejar, e o alicerce do imóvel para construir e assentar pisos.

#### *5.3.2.2 A construção da maquete: medição, materiais e construção*

A maquete seria construída seguindo uma escala referente à da planta baixa, inicialmente desenhada. A construção dessa maquete serviria para exemplificar como era feito o esquadramento para construir a quina das paredes, utilizando o Teorema de Pitágoras e o triângulo retângulo 3, 4 e 5. Da mesma forma, a utilização para o assentamento dos tijolos para levantar uma parede sem inclinação, usando o conceito de altura, o assentamento de pisos e azulejos com ou sem cortes.

Lembrando que, muitos exemplos sobre esse trabalho manual, os alunos podiam observar na própria escola, pois estava passando por reformas, juntamente com as aulas, ou com parentes e amigos que trabalhavam com construção e relatar sobre isso no trabalho.

Para montar a maquete, a professora de artes foi primordial, ajudando os alunos a utilizar materiais onde podiam até simular um tijolinho e o cimento como cola, por exemplo, e assentarem, subindo a parede. Foi confeccionado um prumo em miniatura para ver se a parede não tinha inclinação e estava formando um ângulo reto com o chão, usando linha de anzol e palitos para demarcar as quinas. Em algumas maquetes havia até telhado, e o uso do triângulo retângulo para sua construção com palitos de sorvetes. Igualmente, havia telhas de papel cartão, havia pisos recortados de papel laminado e colados nas paredes e no chão, inclusive com recortes na diagonal.

#### 5.3.2.3 *Pesquisa de custo real de acabamentos*

Essa parte do trabalho, foi a que mais exigiu dos alunos e precisou de orientação dos professores, pois cada planta teria um resultado diferente nessa pesquisa. Aqui os alunos analisariam todos os cálculos realizados a partir dos dados da planta e pesquisariam valores nos estabelecimentos comerciais para concluírem a sua obra. Por exemplo, quantos tijolos seriam necessários para o alicerce e levantar todas as paredes do seu imóvel, quantas latas de tinta seriam necessárias para pintar as paredes de uma sala, quantos metros quadrados de piso seriam necessários para assentar em um salão de academia, entre outros exemplos, e foi pedido que tivessem no mínimo 3 orçamentos, como se fosse uma empresa de construção, oferecendo valores aos clientes.

O projeto era pra ser realizado em três ou quatro semanas, mas tomou uma proporção maior e acabou transcorrendo durante todo o bimestre, pois os alunos tiveram muitas dúvidas e dificuldades. Então, os professores resolveram separar horários fora da aula para ajudar a resolver as dúvidas dos alunos. Tiveram muita dificuldade com escalas, bem como com a construção da maquete usando as proporções corretas, mas ficaram muito envolvidos e dedicados o que fez estender o tempo para a conclusão do trabalho e essa parte foi com a qual mais aprenderam.

Vale destacar que, nesse trabalho, houve grupos que chegaram a reiniciar a construção da maquete umas três vezes, pois quando faziam e erravam, entendiam ser melhor começar de novamente do que tentar consertar e, aqui, inicia o que eu gosto muito de trabalhar, que são os distratores (estudo do erro). Eu até incentivei que mostrassem, na exposição, o processo pra conseguir acertar a construção e não que jogassem fora a maquete considerada errada.

#### 5.3.2.4 *Seminário – processo de cada grupo com plenária*

Nesse projeto, muitos alunos aprenderam onde se aplica a regra de três, como nas escalas, onde se aplicam os teoremas que, muitas vezes, não fazem sentido para eles, outros aprenderam até a fazer operações básicas como soma, subtração, multiplicação e divisão.

Todas essas contas deveriam estar explícitas no relatório. Os alunos relataram que andaram pelo bairro Matão nas lojas simples, fazendo orçamentos, e alguns alunos foram até Campinas, até Paulínea em grandes lojas, como Telha Norte<sup>3</sup>, Leroy Merlin<sup>4</sup> e Sodimac Diccico<sup>5</sup>, para comparar os valores da construção do seu imóvel.

Os alunos ficaram espantados com a diferença de valores e o quanto gasta-se para construir algo, no caso, bem simples, e com um acabamento razoável na qualidade. Foi feita a exposição das maquetes, explicação de toda a construção, das dificuldades e principalmente dos erros cometidos. Havia grupos com várias maquetes, mostrando cada fase da construção de acordo com o que iam errando e corrigindo.

Nessa época, o termo distratores<sup>6</sup> ainda não era abordado pedagogicamente como hoje. Destacando que, nesse projeto, o erro em nenhum momento foi motivo de punição ou desconto de nota na avaliação. Descobrir o que errou, porque errou e como consertar fazia parte do aprendizado e de toda a construção do trabalho, posto que houve uma aplicação muito grande do que hoje conhecemos como estudo do erro.

Desde então, em todos os projetos que realizo, ou mesmo na aplicação de avaliações internas ou externas, faço, subsequentemente um estudo sobre o que cada aluno errou, juntamente com eles, e o que é preciso pra corrigir, colocando em plenária para todos, ou seja, a famosa frase: aprender com o erro dos outros!

Conclui-se que foi um trabalho muito envolvente e com uma riqueza nos detalhes que abrangeu a escola como um todo: amigos, familiares e a comunidade. Os alunos se empenharam e era clara a satisfação deles na apresentação, principalmente os que erraram muito e puderam contar com orgulho toda a trajetória até o produto final. Todo esse processo foi muito cansativo, mas reconstruir e começar novamente faz parte desse processo. Da mesma forma, a não punição do erro deu incentivo para conseguir construir todo esse conhecimento sem desanimar, inclusive orgulhando-se das descobertas que fizeram.

### 5.3.3 Conteúdo matemático

- **Escalas (regra de três):** utilizada para a construção da planta baixa e seguir a proporção na maquete e no cálculo das áreas e perímetros do tamanho real para os orçamentos;
- **Perímetro e áreas:** utilizado para o cálculo do terreno, dos cômodos nas três fases, a planta baixa, a maquete e o construção real;

<sup>3</sup> Telha Norte: <<https://www.telhanorte.com.br>>.

<sup>4</sup> Leroy Merlin: <<https://www.leroymerlin.com.br>>.

<sup>5</sup> Sodimac: <<https://www.sodimac.com.br>>.

<sup>6</sup> Esta é uma aplicação, na prática, do conceito de distratores, visto na Seção 4.4, p. 42.

- **Ângulos Notáveis:** conhecimento dos ângulos notáveis,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $360^\circ$  para a aplicação no uso dos teoremas na construção de paredes, alicerces das maquetes, como também o cálculo das áreas;
- **Teorema de Pitágoras;**
- **Trigonometria no triângulo retângulo;**
- **Relações métricas no triângulo retângulo;**
- **Teorema de Tales:** estudar, conhecer os teoremas e saber como aplicá-los durante a construção da maquete foi o objetivo principal do projeto. O objetivo foi responder com propriedade a uma famosa e irritante pergunta que os alunos sempre fazem: “*Onde vou usar isso na minha vida?*”

Este projeto foi aplicado em outras oportunidades, com adaptações de acordo com a realidade escolar. Quero destacar o ano de 2015, quando me removi para uma escola em Ribeirão Preto, *Escola Estadual Alberto Santos Dumont*. Apliquei esse projeto nas turmas de primeiro e segundo anos do Ensino Médio, envolvendo as disciplinas de Português, Matemática, Física, Química, Geografia, *História* e Artes.

Os tópicos foram basicamente os mesmos, porém a parte da disciplina de História envolveu um *estudo de pertencimento sobre um patrimônio histórico cultural da cidade* e caberia aos alunos fazer a maquete desse patrimônio ou parte dele. Aqui o foco não era tanto a parte comercial e os gastos, mas a construção, seguindo já uma planta baixa existente, que deveria ser reproduzida.

O projeto se desenvolveu mais rápido, houve um pouco menos de estudo do erro, e as maquetes eram mais para ilustrar e exemplificar a pesquisa do que ser construída fielmente nos detalhes, como na primeira aplicação. No relatório dos alunos e na plenária, houve a aplicação de todos os itens da teoria matemática explicitadas no caso anterior, que foram estudados em sala. Pode-se concluir que, nesse momento, o projeto se desenvolveu e concluiu mais rápido devido à experiência vivenciada na aplicação por mim no primeiro momento e também aprendi e me adaptei com os erros.



## PRÉ-REQUISITOS TEÓRICOS

---

### 6.1 Figuras Básicas

Estudamos uma sequência de definições básicas para o uso posterior na resolução dos exercícios. Elas serão conceituadas de uma maneira construtiva e intuitiva tendo por base alguns livros didáticos do Ensino Básico como [Santos, Gentil e Greco \(2000\)](#), [Dante \(2005\)](#), [Souza e Spinelli \(1999\)](#). Todas as figuras inseridas na sequência são da autora. Será apenas mencionado em algumas observações alguns dos axiomas de [EUCLIDES](#), que também são conhecidos como postulados e são proposições aceitas sem demonstrações.

**Ponto:** é a base de toda geometria, ele não possui definição, dimensão ou forma. A partir de um conjunto de pontos é formado toda figura geométrica.

- **Notação:** letras latinas maiúsculas, ponto  $A$ ,  $B$ ,  $N$ ,  $P$ , como no exemplo.
- **Geometricamente:**

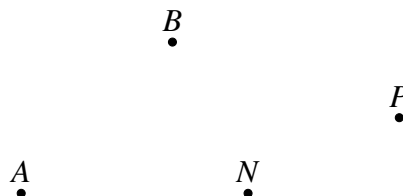


Figura 1 – Pontos.

**Reta:** Uma reta é um conjunto de pontos alinhados, ou seja, um conjunto de infinitos pontos justapostos em linha reta, traçada com o auxílio de uma régua, sem início, sem fim e sem furos. Representado por  $\mathbb{R}$ , a reta real.

- **Notação:**  $r = \overleftrightarrow{AB}$  onde  $A$  e  $B$  são quaisquer dois pontos pertencentes à essa reta. E usamos letras latinas minúsculas, como  $r$ ,  $s$ ,  $t$ .
- **Geometricamente:**

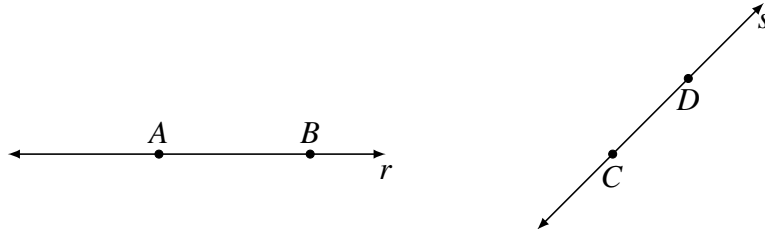


Figura 2 – Retas

- **Observação:** Dados dois pontos distintos quaisquer  $A$  e  $B$ , existe uma única reta que os contém.

**Semirreta:** Uma semirreta pode ser pensada como "parte" de uma reta. Ela tem origem (início) em um ponto  $P$  e segue no sentido de outro ponto,  $Q$ .

- **Notação:**  $\overrightarrow{AB}$ .  
Com a seta somente para um lado, a letra inicial é a origem da semirreta e a segunda é um ponto qualquer pertencente à semirreta.
- **Geometricamente:**

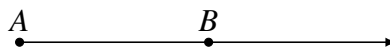


Figura 3 – Semirreta.

**Segmento de reta:** Considere dois pontos distintos (diferentes)  $A$  e  $B$ . Um segmento de reta são todos os pontos compreendidos entre  $A$  e  $B$ , ou seja, a parte compreendida da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  entre os pontos  $A$  e  $B$  é o que chamamos de segmento de reta.

- **Notação:**  $\overline{AB}$  (sem setas).
- **Geometricamente:**

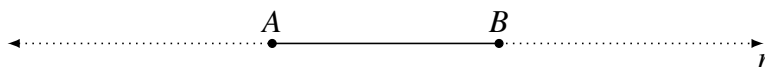


Figura 4 – Segmento de reta.

**Retas concorrentes:** Considere duas retas  $r$  e  $s$ . Elas são chamadas retas concorrentes quando possuem um ponto  $P$  em comum, ou seja, onde elas se cruzam (interseccionam).

- **Notação:**  $\cap$  é o símbolo de intersecção.

$$r \cap s = \{P\} \text{ ou } \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}.$$

- **Geometricamente:**

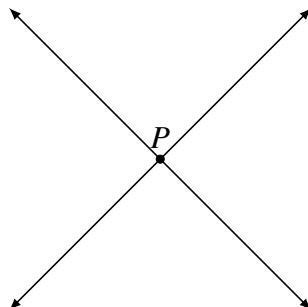


Figura 5 – Retas concorrentes.

**Retas paralelas:** Dadas duas retas  $r$  e  $s$ , são denominadas retas paralelas, quando não existe nenhum ponto em comum entre elas. Ou seja, elas não se cruzam (interseccionam).

- **Notação:**  $r \parallel s$ ,  $r \cap s = \emptyset$  ou  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$ .

- **Geometricamente:**

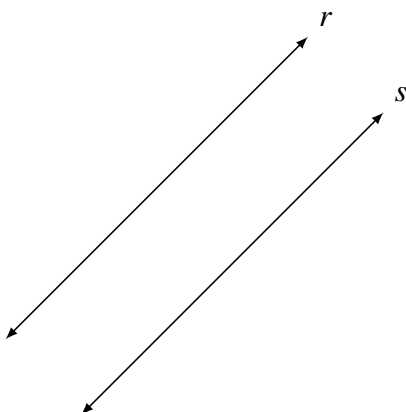


Figura 6 – Retas paralelas.

**Ângulo:** É a região compreendida entre duas semirretas que partem de um mesmo ponto. Ou seja, considere as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , abaixo:

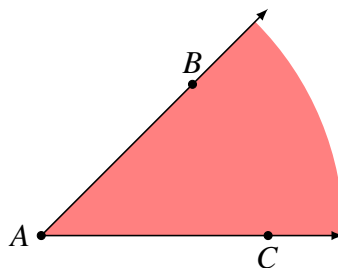


Figura 7 – Ângulo.

**Notação:**

- O ângulo pode ser denotado por uma letra grega minúscula, como por exemplo:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ;
- Por uma letra correspondente ao ponto em comum das semirretas com um acento circunflexo, no caso:  $\hat{A}$ ;
- Pela escrita da sequência dos pontos conhecidos das semirretas, onde o ponto em comum fica no meio com o acento circunflexo:  $\widehat{BAC}$  ou  $\widehat{CAB}$ ;

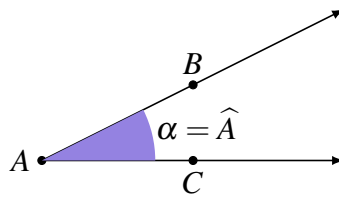
**Geometricamente:**

Figura 8 – Ângulo.

**Vértice:** É o nome dado ao ponto de encontro (intersecção) entre duas semirretas (ou segmentos de reta) que originam o ângulo.

- **Notação:**  $A$ ,  $B$  ou qualquer letra latina maiúscula que nomeia este ponto.
- **Geometricamente:**

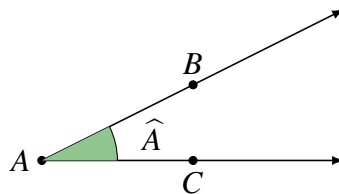


Figura 9 – Vértice.

**Plano:** São figuras geométricas bidimensionais formadas pela reunião de infinitas retas, perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado. Essa figura é considerada na Geometria Euclidiana como um conceito primitivo. Isso acontece porque, na realidade, não existe definição para ponto, reta e plano.

- **Notação:** letras gregas minúsculas como  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\pi$ .
- **Geometricamente:**



Figura 10 – Plano.

- **Observação:** É "dentro" ou "em cima" do plano que as figuras bidimensionais (2 dimensões – largura e comprimento) são construídas.

### 6.1.1 Tipos, traçado e medida de ângulos

Para medir um ângulo temos alguns instrumentos como o transferidor, compasso e teodolito. Nos limitaremos ao uso do transferidor e do compasso para algumas construções. Os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos. Neste momento, vamos falar somente em graus<sup>1</sup> para a medida de ângulos.

No ano de 4000 a.C., quando egípcios e árabes tentavam elaborar um calendário, acreditava-se que o Sol girava em torno da Terra numa órbita que levava 360 dias para completar uma volta. Desse modo, a cada dia, o Sol percorria uma parcela dessa órbita, ou seja, um arco de circunferência de sua órbita.

A esse arco fez-se corresponder um ângulo cujo vértice era o centro da Terra e, cujos lados passavam pelas extremidades de tal arco. Assim, esse ângulo passou a ser uma unidade de medida e foi chamado de grau ou ângulo de um grau.

Dentre esses ângulos, vamos destacar os ângulos mais utilizados, que chamamos de ângulos notáveis.

**Ângulo nulo –  $0^\circ$ :** quando uma semirreta  $\overrightarrow{OA}$  está sobreposta na semirreta  $\overrightarrow{OB}$ , ou seja, não há abertura entre as semirretas.

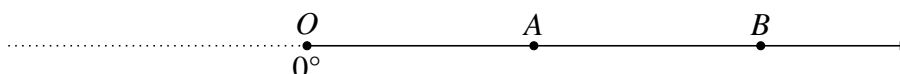


Figura 11 – Ângulo nulo.

**Ângulo reto –  $90^\circ$ :** quando a abertura entre  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  é um quarto de volta.

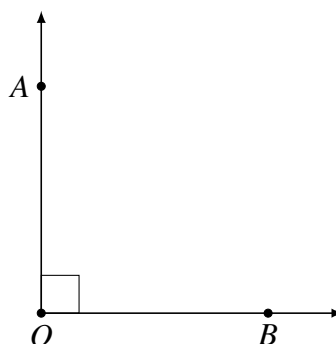


Figura 12 – Ângulo reto.

<sup>1</sup> História do Grau: <<https://www.somatematica.com.br/historia/grau.php>>.

**Ângulo raso –  $180^\circ$ :** quando a semirreta  $\overrightarrow{OA}$  tem sentido oposto à semirreta  $\overrightarrow{OB}$ , ou seja, ângulo de meia volta.

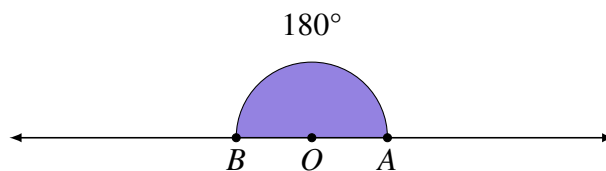


Figura 13 – Ângulo raso.

**Ângulo de uma volta –  $360^\circ$ :** quando a semirreta  $\overrightarrow{OA}$  tem a abertura de uma volta completa e fica sobreposta em  $\overrightarrow{OB}$ .

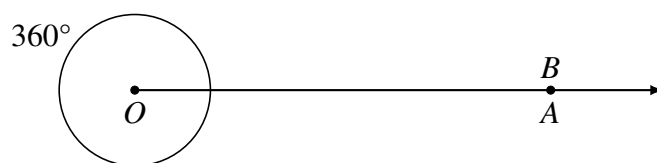


Figura 14 – Ângulo de  $360^\circ$ .

**Ângulo agudo:** são todos os ângulos que medem menos de  $90^\circ$ , isto é, menores que um ângulo reto.

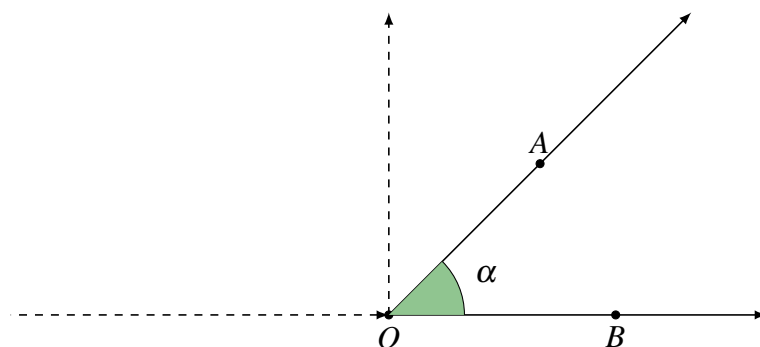


Figura 15 – Ângulo agudo.

**Ângulo obtuso:** são todos os ângulos com medidas maiores que o ângulo reto e menores que o ângulo raso, ou seja,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

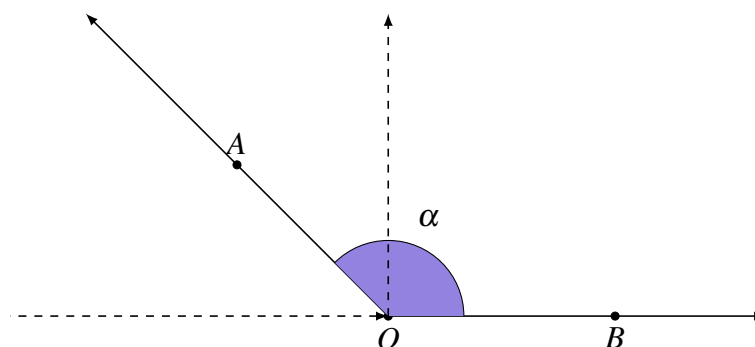


Figura 16 – Ângulo obtuso.

**Ângulo concavo:** são todos os ângulos com medidas maiores que o ângulo raso e menores que uma volta, ou seja,  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ .

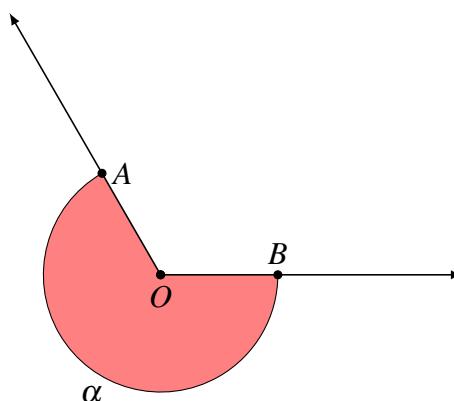
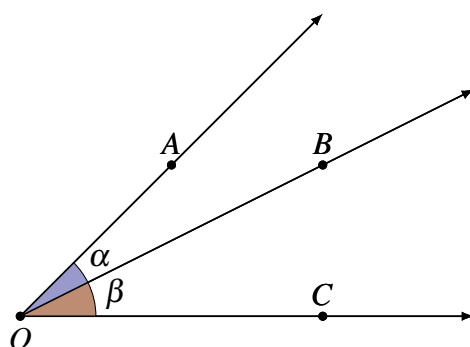


Figura 17 – Ângulo côncavo.

**Soma de ângulos:** Considere a semirreta  $\overrightarrow{OB}$  interna ao ângulo  $\widehat{AOC}$ . Ou melhor, a semirreta  $\overrightarrow{OB}$  está entre as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OC}$ . O ângulo  $\widehat{AOC}$  é a soma dos ângulos  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{BOC}$ .



$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$

$$\widehat{AOC} = \alpha + \beta.$$

Figura 18 – Soma de ângulos.

**Ângulos complementares:** Dois ângulos são complementares quando sua soma é igual a  $90^\circ$ .

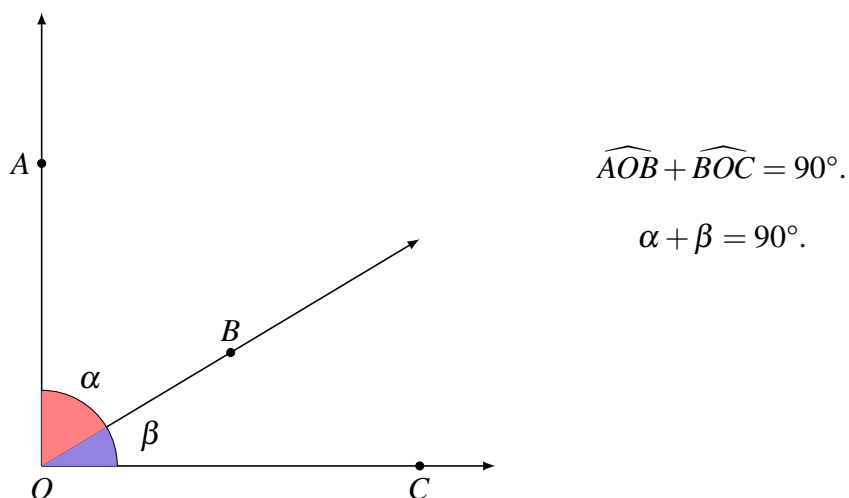


Figura 19 – Ângulos complementares.

**Ângulos suplementares:** Dois ângulos são suplementares quando sua soma é igual a  $180^\circ$ .

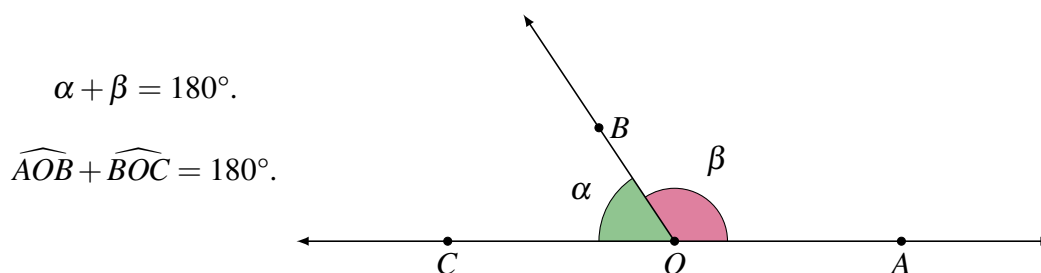


Figura 20 – Ângulos suplementares.

**Ângulos replementares:** Dois ângulos são replementares, quando sua soma for igual a  $360^\circ$ .

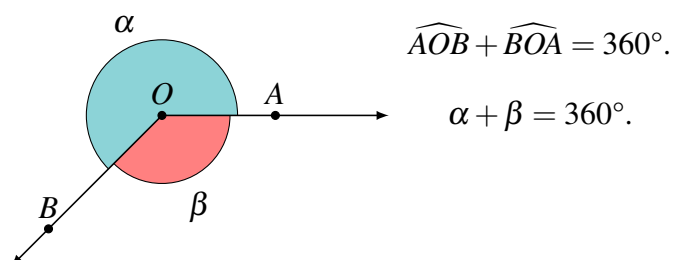


Figura 21 – Ângulos replementares.

## 6.2 Polígonos

Polígonos são figuras planas fechadas formadas por segmentos de retas consecutivos, não colineares, sem cruzamento e se tocam apenas nas extremidades.

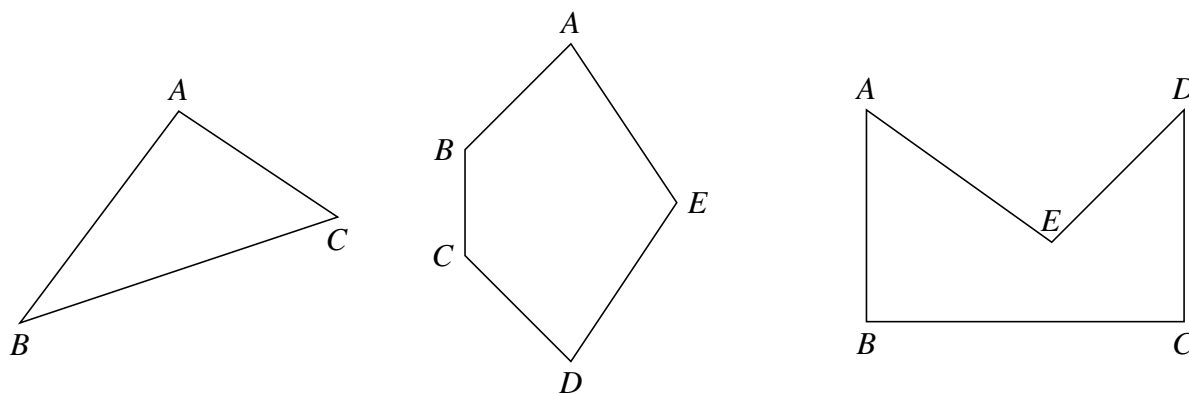
**Exemplos de polígonos:**

Figura 22 – Polígonos.

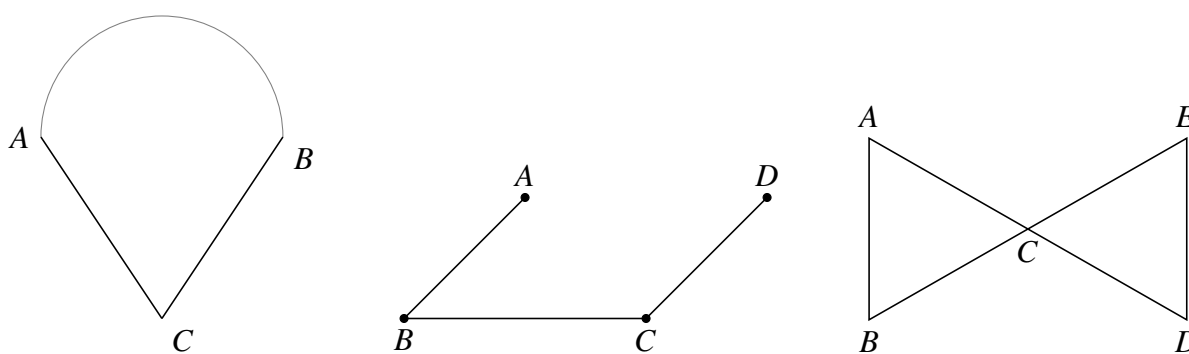
**Exemplo de não polígonos:**

Figura 23 – Não polígonos.

**6.2.1 Polígono Convexo**

Polígonos convexos são aqueles onde dados dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$ , pertencentes à região interna deste polígono, o segmento de reta  $\overline{AB}$  estará inteiramente na região interna.

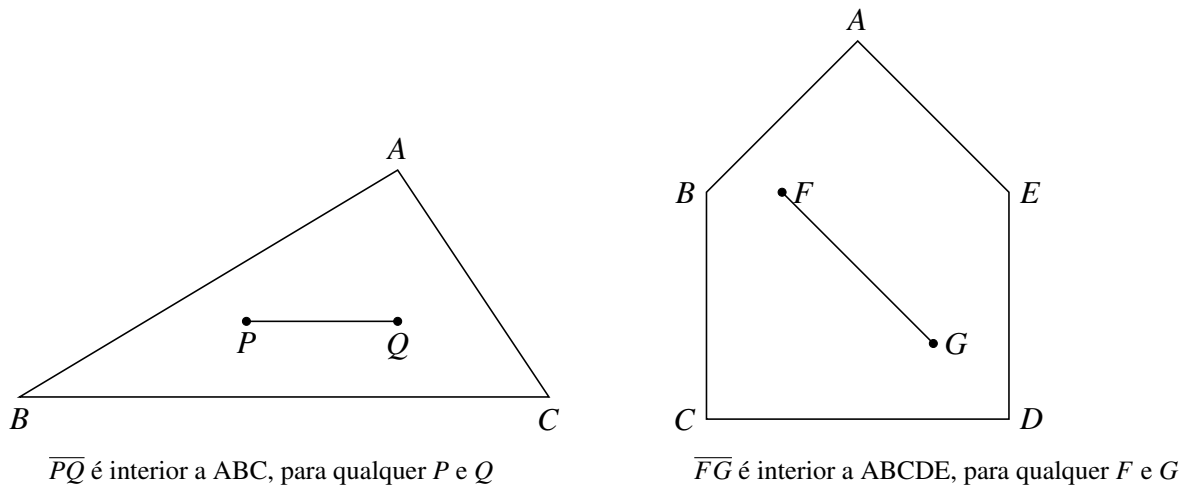
**Exemplos:**

Figura 24 – Polígonos convexos.

**6.2.2 Polígonos Côncavo (Não Convexo)**

Polígonos côncavos são aqueles onde, existem dois pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes à região interna deste polígono, tais que o segmento de reta  $\overline{PQ}$  não estará completamente na região interna.

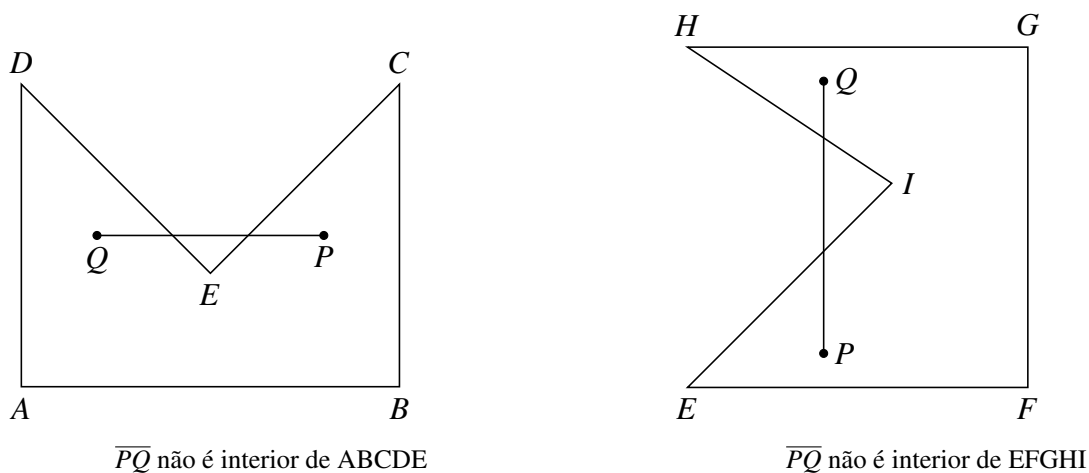
**Exemplos:**

Figura 25 – Polígonos não convexos.

**6.2.3 Polígonos Regulares**

Polígono regular é um polígono que possui todos os lados com a mesma medida, e todos os ângulos congruentes. É chamado polígono equilátero (todos os lados iguais e todos os ângulos congruentes).

**Exemplos:**

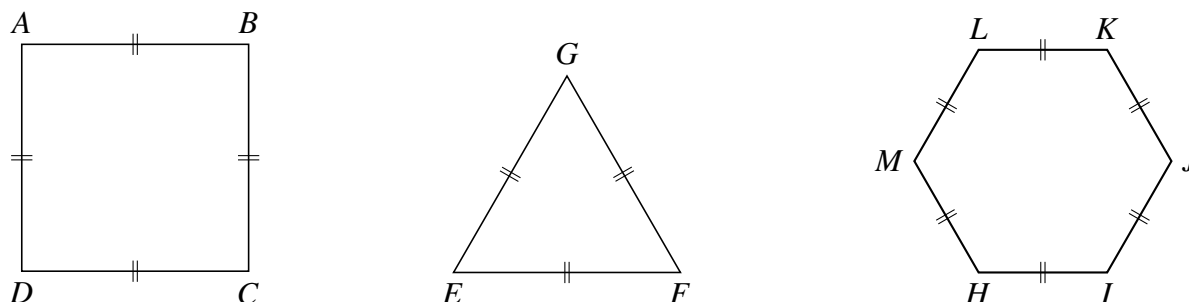


Figura 26 – Polígonos regulares.

## 6.3 Triângulos

Os triângulos são os polígonos convexos com o menor número de lados, 3 lados e 3 ângulos, estudaremos alguns tipos de triângulos e suas propriedades.

### 6.3.1 Classificação dos triângulos com relação à medida de seus ângulos

Considere o triângulo  $ABC$  e os seus respectivos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ .

**Triângulo acutângulo:** Um triângulo é denominado acutângulo quando seus três ângulos internos são ângulos agudos (menores que  $90^\circ$ ).

**Exemplos:**

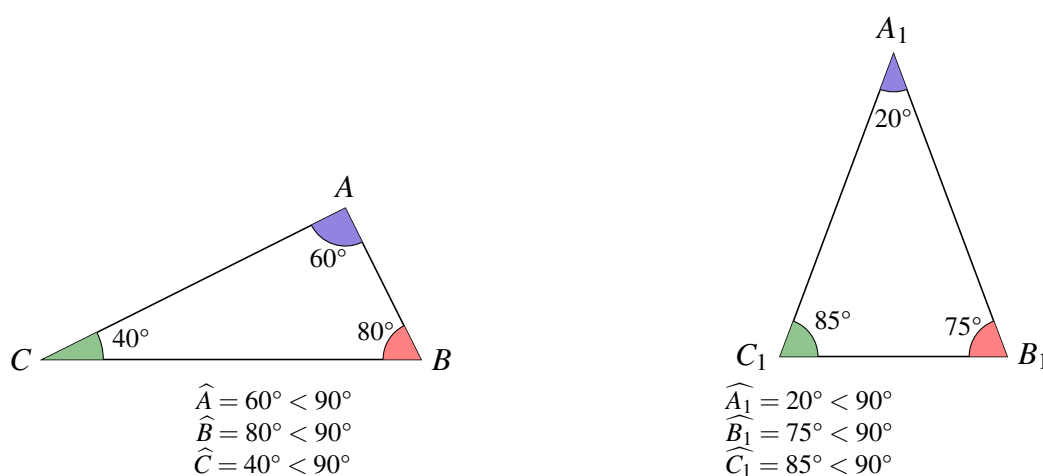


Figura 27 – Triângulos acutângulos.

**Triângulo obtusângulo:** Um triângulo é denominado obtusângulo quando um de seus ângulos internos for um ângulo obtuso (maior que  $90^\circ$ ).

**Exemplos:**

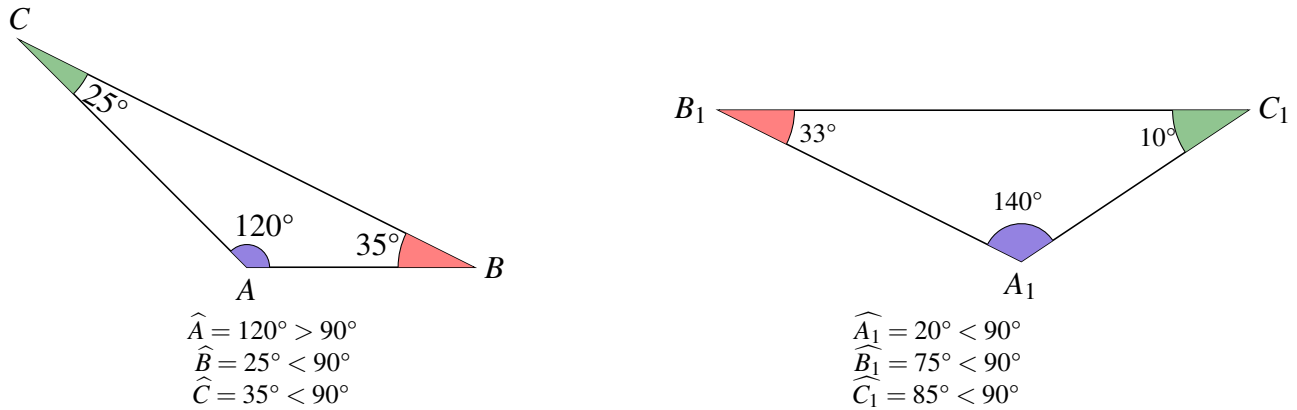


Figura 28 – Triângulos obtusângulos.

**Triângulo retângulo:** Um triângulo é denominado retângulo quando um de seus ângulos internos é reto, ou seja,  $90^\circ$ .

**Exemplos:**

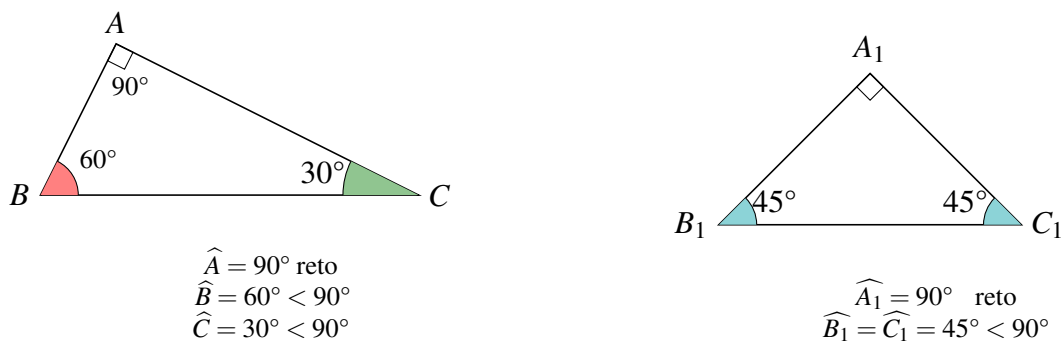


Figura 29 – Triângulos retângulos.

### 6.3.2 Classificação dos triângulos com relação à medida de seus lados

Considere o triângulo  $ABC$  e os seus lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  onde  $a$  é o lado oposto do vértice  $A$  e ângulo  $\hat{A}$ , e assim respectivamente para  $b$  e  $c$ .

**Triângulo equilátero:** Um triângulo é denominado equilátero, quando seus três lados possuírem a mesma medida. O triângulo equilátero também possui os três ângulos de mesma medida,  $60^\circ$ , podendo ser chamado de equiângulo.

**Exemplos:**

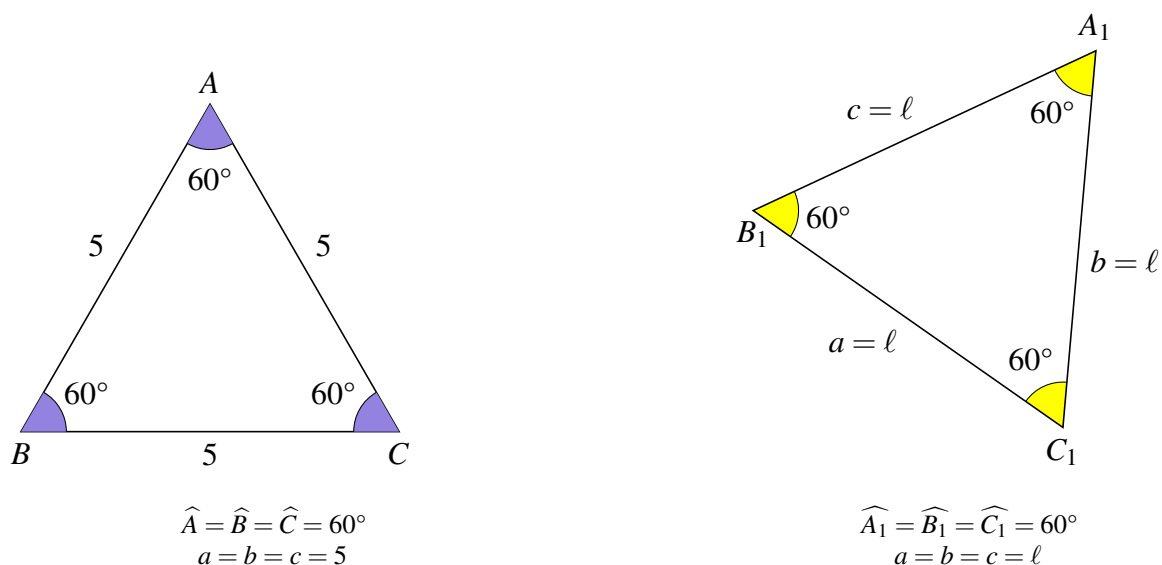


Figura 30 – Triângulos equiláteros.

**Triângulo isósceles:** Um triângulo é denominado isósceles, quando dois de seus lados possuírem a mesma medida. O triângulo isósceles também possui dois ângulos congruentes.

**Exemplos:**

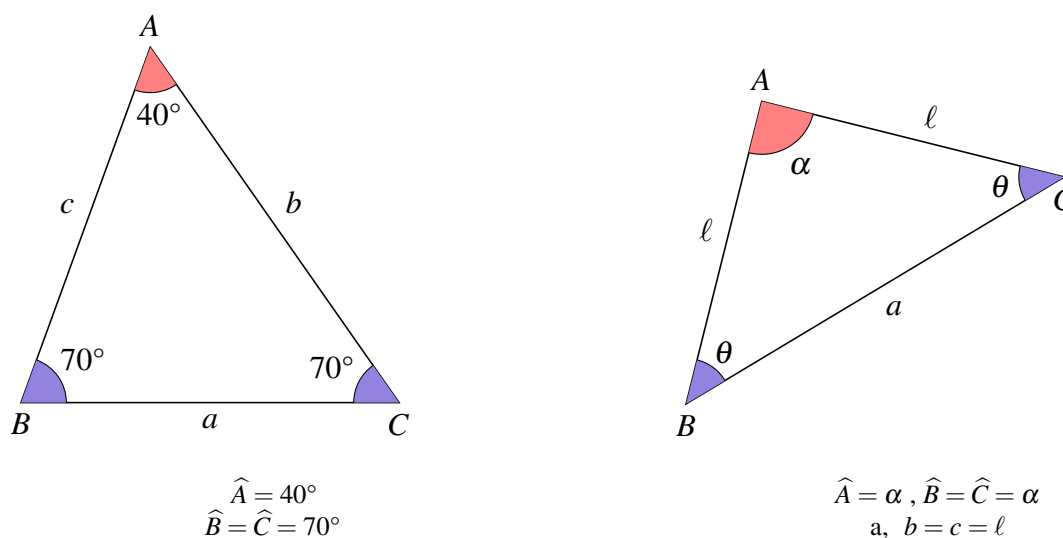


Figura 31 – Triângulos isósceles.

**Triângulo escaleno:** Um triângulo é denominado escaleno quando seus três lados possuírem medidas diferentes. O triângulo escaleno também possui os três ângulos diferentes.

**Exemplos:**

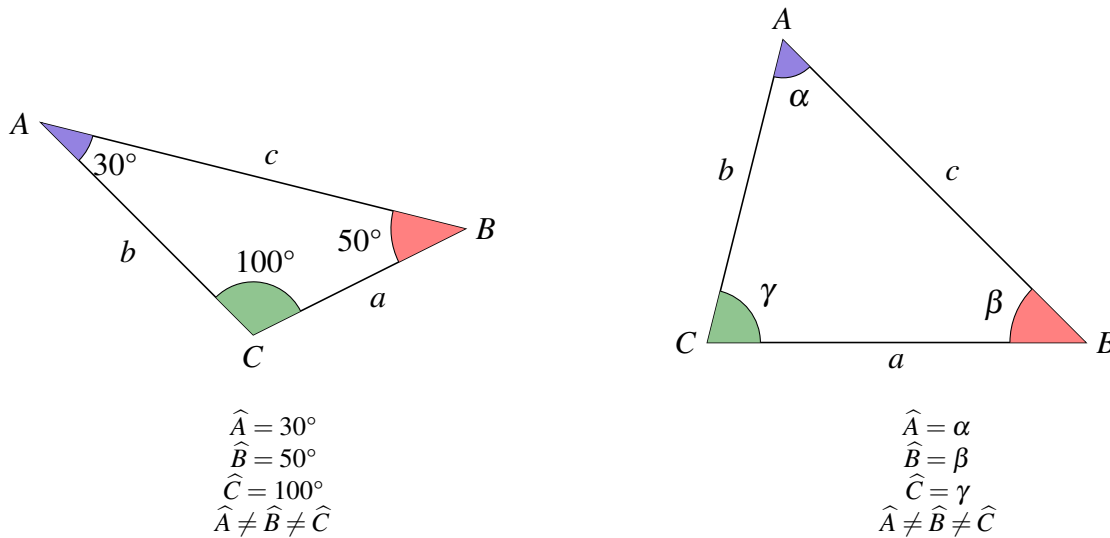


Figura 32 – Triângulos escalenos.

Podemos considerar o triângulo retângulo citado anteriormente, com mais duas características:

**Triângulo retângulo isósceles:** Um triângulo é denominado retângulo isósceles quando seus ângulos medirem  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $45^\circ$  e possuir dois lados de mesma medida, como abaixo:

**Exemplos:**

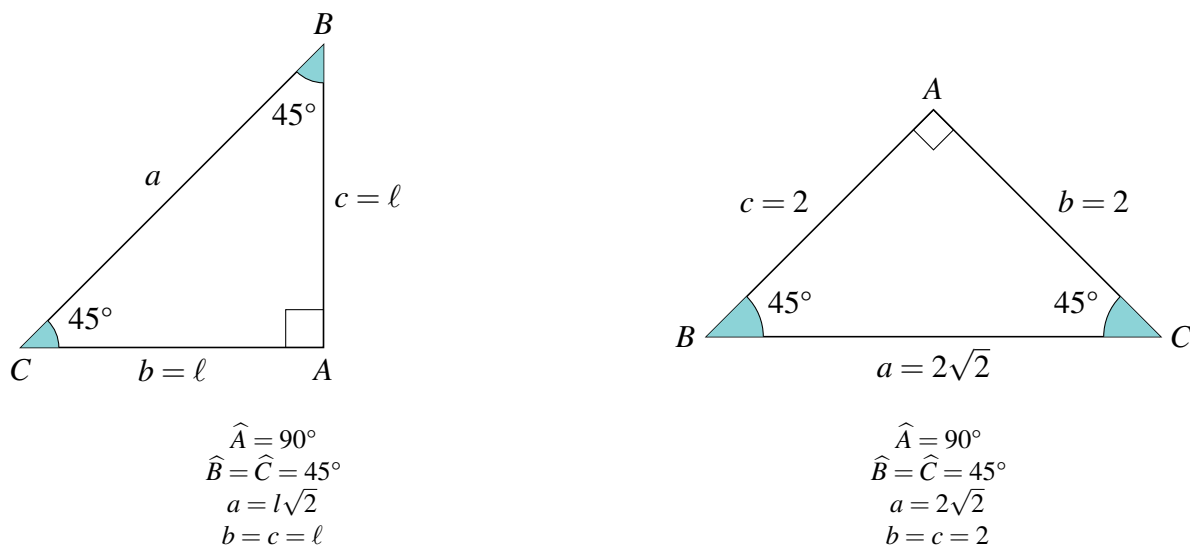


Figura 33 – Triângulos retângulos isósceles

**Triângulo retângulo escaleno:** Um triângulo é denominado retângulo escaleno quando um de seus ângulos for reto e com os três lados de medidas diferentes.

**Exemplos:**

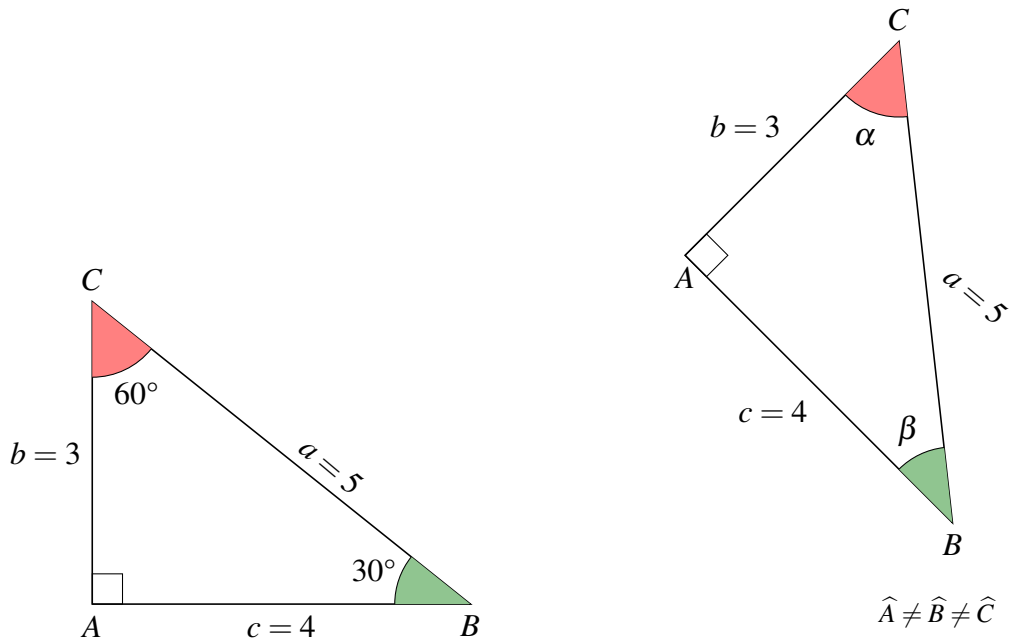


Figura 34 – Triângulos retângulos escalenos.

Assim podemos sintetizar abaixo os triângulos relacionando medidas dos lados e ângulos:

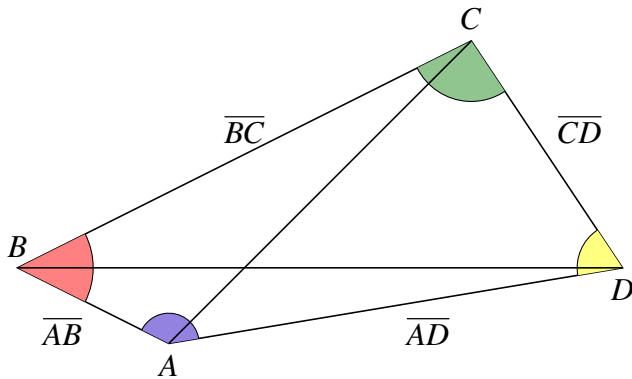
- Todo triângulo equilátero é acutângulo;
- Um triângulo isósceles pode ser retângulo, obtusângulo ou acutângulo;
- Um triângulo escaleno pode ser retângulo, obtusângulo e acutângulo.

## 6.4 Quadriláteros

Quadrilátero é um polígono que possui quatro lados, e portanto quatro vértices, quatro ângulos internos e duas diagonais. Note que os tópicos abaixo valem para todos os polígonos:

- Lados – são os segmentos de reta que formam o contorno do polígono:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ ;
- Vértices – são os pontos de encontro dos segmentos de reta mencionados anteriormente ou a intersecção entre eles:  $\overline{AB} \cap \overline{DA} = \{A\}$ ,  $\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$ ,  $\overline{BC} \cap \overline{CD} = \{C\}$  e  $\overline{CD} \cap \overline{DA} = \{D\}$ ;
- Ângulos – são quatro ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ ;
- Diagonais – são dois segmentos de retas formados por dois vértices não consecutivos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ .

**Geometricamente:**



Vértices:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

Ângulos:  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ .

Lados:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ .

Diagonais:  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ .

Figura 35 – Quadrilátero.

### 6.4.1 Tipos de Quadriláteros

**Quadriláteros irregulares:** São os quadriláteros que não possuem lados paralelos.

**Exemplos:**

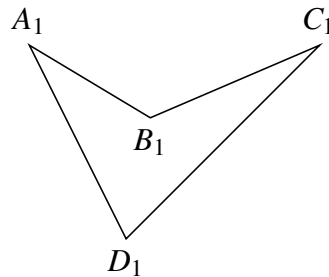
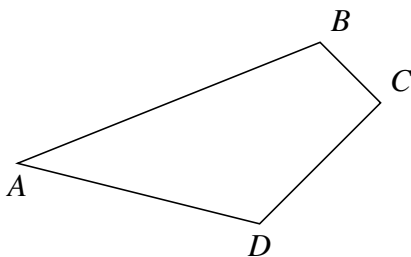
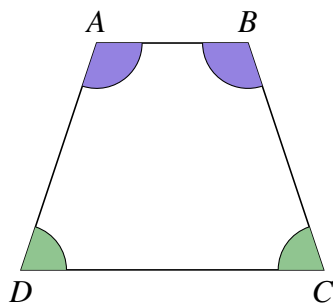


Figura 36 – Quadriláteros irregulares.

**Trapézios:** São os quadriláteros que possui um par de lados paralelos, e que podemos chamar de base menor e base maior.

- **Trapézio isósceles:** É aquele em que os lados transversais são congruentes entre si, ou seja, possuem a mesma medida.



$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}.$$

$$\overline{AD} = \overline{BC}.$$

$$\hat{A} = \hat{B} \text{ e } \hat{C} = \hat{D}.$$

Figura 37 – Trapézio isósceles.

- **Trapézio Retângulo:** Possui dois ângulos de  $90^\circ$ .

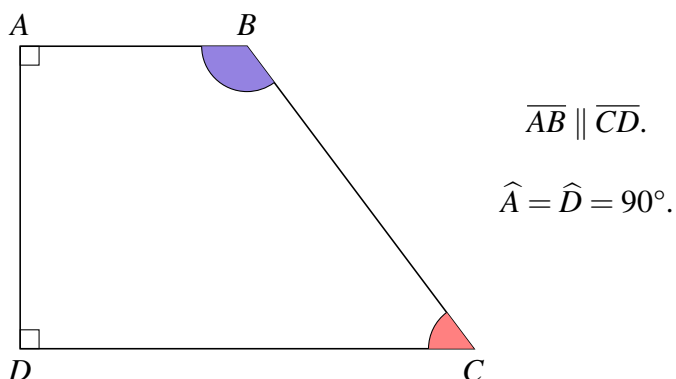


Figura 38 – Trapézio retângulo.

- **Trapézio Escaleno:** Não há lados de mesma medida.

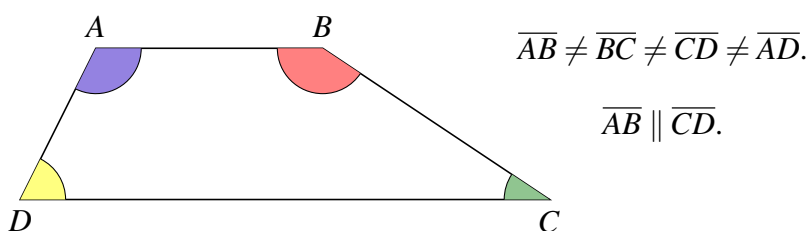
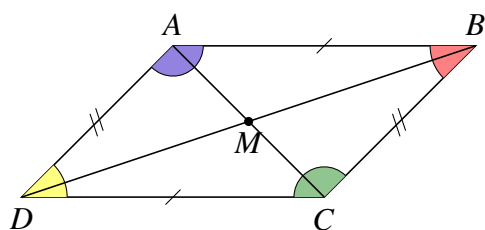


Figura 39 – Trapézio escaleno.

**Paralelogramos:** São os quadriláteros que possuem dois pares de lados paralelos.

- **Paralelogramo (geral):** Os lados opostos de um paralelogramo são paralelos e de mesma medida. Os ângulos opostos também possuem a mesma medida e suas diagonais sempre se cruzam em seus pontos médios.



$$\hat{A} = \hat{C} \quad \overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{CD}.$$

$$\hat{B} = \hat{D} \quad \overline{AD} \parallel \overline{BC} \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Diagonais:  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ ,

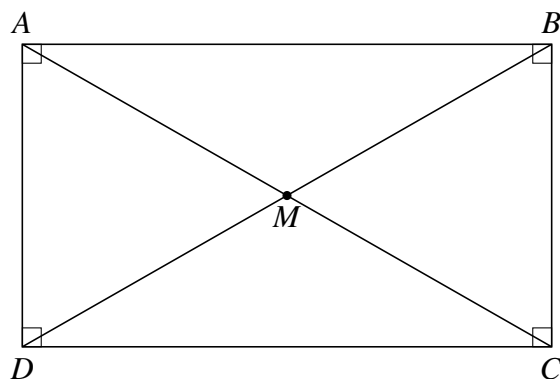
$M$  ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  e

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}.$$

Figura 40 – Paralelogramo.

**Observação:** Ponto médio é o ponto que divide um segmento de reta pela metade.

- **Retângulo:** Os lados opostos de um retângulo são paralelos e de mesma medida. Possui quatro ângulos internos retos, ou seja,  $90^\circ$  e  $M$  é o ponto médio das diagonais.



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}.$$

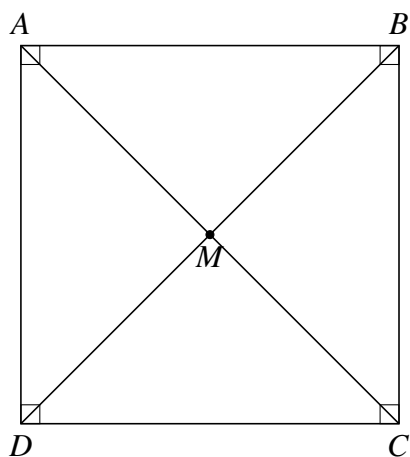
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AB} = \overline{CD}.$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{AD} = \overline{BC}.$$

$$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\} \text{ e } \overline{AC} = \overline{BD}.$$

Figura 41 – Retângulo.

- **Quadrado:** É um particular retângulo onde todos os lados possuem a mesma medida.



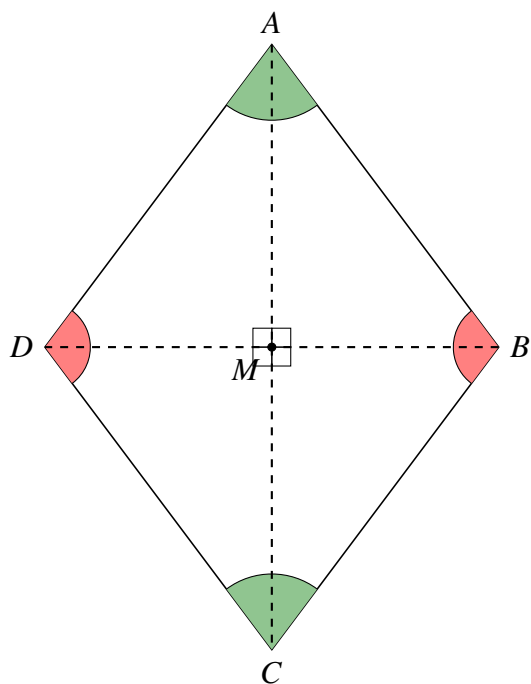
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}.$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}.$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}.$$

Figura 42 – Quadrado.

- **Losango:** Possui quatro lados de mesma medida (congruentes). Os quadrados são também um caso particular de losango.



$ABCD$  é losango.

$M$  é ponto médio de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ .

$\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  são as diagonais maior e menor, respectivamente.

$$\widehat{AMD} = \widehat{BMC} = \widehat{CMD} = \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

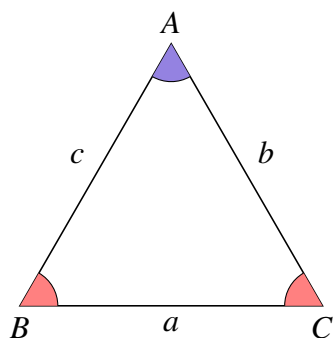
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}.$$

$$\widehat{A} = \widehat{C} \text{ e } \widehat{B} = \widehat{D}.$$

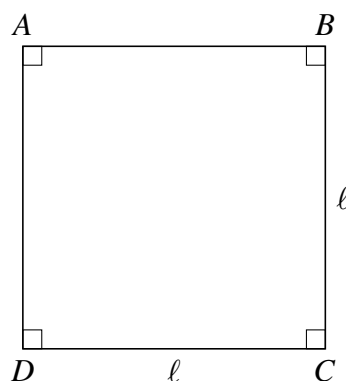
Figura 43 – Losango.

**Base:** Parte inferior de um objeto, considerado como seu suporte. No caso de figuras planas, a base depende de um referencial para estudar, pois qualquer lado pode ser tomado com base.

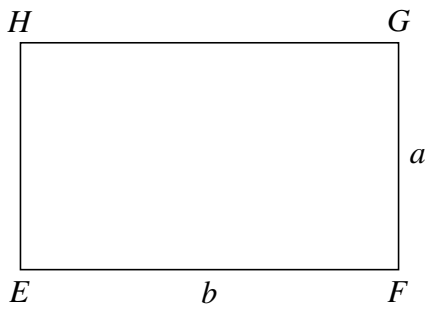
**Exemplos:**



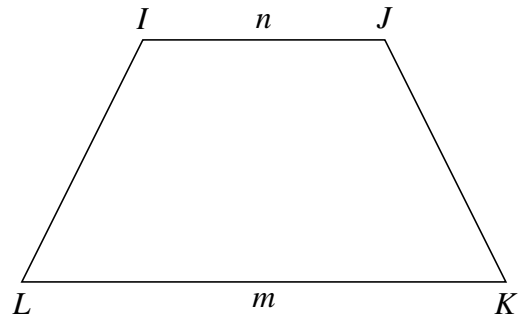
Considere  $BC = a$  a base do triângulo  $ABC$



Considere  $DC = \ell$  a base do quadrado  $ABCD$



Considere  $EF = b$  a base do retângulo EFGH



No caso do trapézio IJKL, temos a base maior  $KL = m$  e a base menor  $IJ = n$

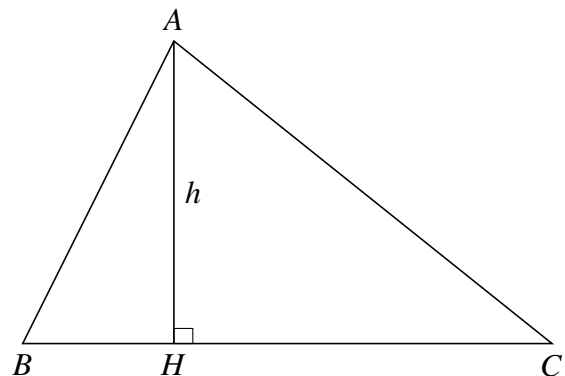
Figura 45 – Bases.

**Altura:** Quando uma figura plana se "encaixa" entre duas retas paralelas, a distância entre essas retas é a altura  $h$  da figura plana.

### Exemplos:



$AB = DC$  é a base,  $AD = BC$  é a altura.



$BC$  é a base e  $AH = h$  é a altura.

Figura 46 – Alturas.

**Perímetro:** É a medida do contorno de um objeto bidimensional, ou seja, a soma de todos os lados de uma figura geométrica.

**Perímetro de triângulo:** Considere o triângulo  $ABC$  e seus lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

- Triângulo equilátero implica em 3 lados de mesma medida.

Considere  $a = b = c = \ell$ , logo o perímetro de um triângulo equilátero será  $P = \ell + \ell + \ell \Rightarrow P = 3\ell$ ;

- Triângulos isósceles implica em dois lados de mesma medida.

Considere  $a \neq \ell$  e  $b = c = \ell$ , logo o perímetro de um triângulo isósceles será  $P = a + \ell + \ell \Rightarrow P = a + 2\ell$ ;

- Triângulo escaleno implica em 3 lados com medidas distintas.

Considere  $a \neq b \neq c$ , logo o perímetro de um triângulo escaleno será  $P = a + b + c$ .

Observe que no caso de um triângulo retângulo isósceles ou escaleno, a forma de calcular o perímetro é a mesma.

### Exemplos:

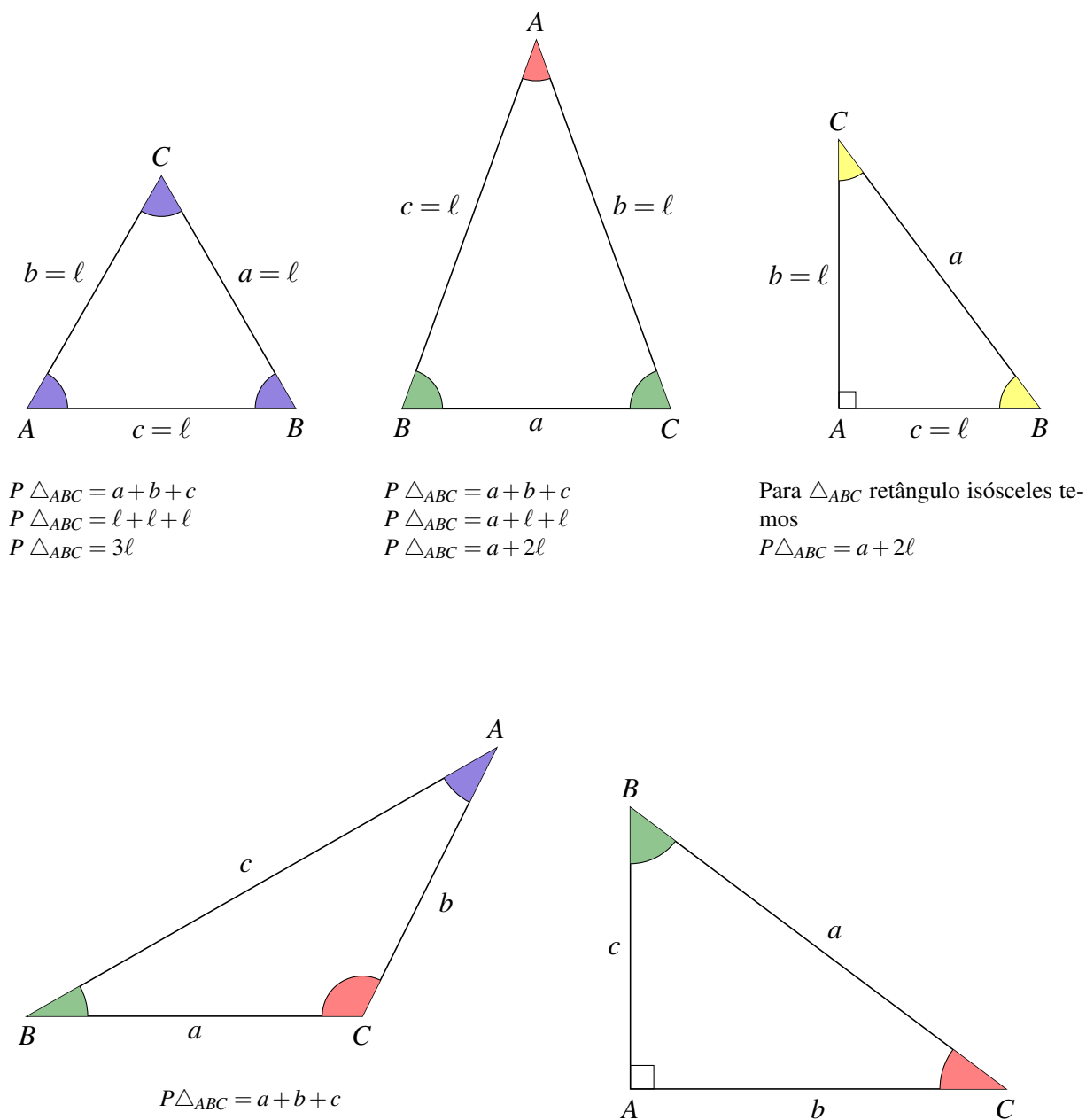


Figura 48 – Perímetros de triângulos.

**Perímetro de quadriláteros:** Considere um quadrilátero  $ABCD$  qualquer (irregular). Temos  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$  e  $DA = d$ , o perímetro de  $ABCD$  será  $P = a + b + c + d$ .

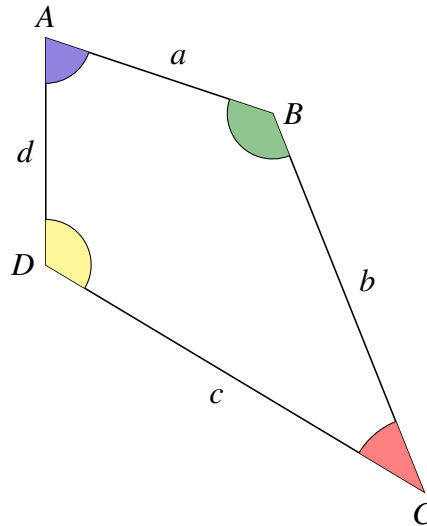


Figura 49 – Perímetros de quadriláteros.

### 6.4.2 Paralelogramos e Retângulos

Para paralelogramos e retângulos temos todos os lados paralelos e de mesma medida, logo  $AB = CD = a$  e  $BC = DA = b$  e o perímetro será  $P = a + b + a + b$ , então  $P = 2(a + b)$ .

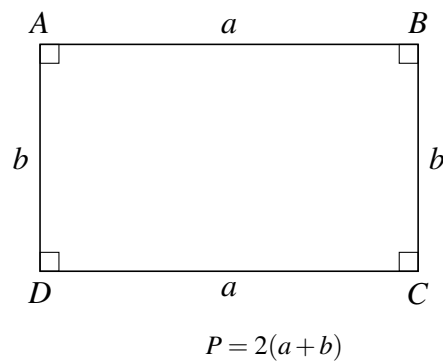
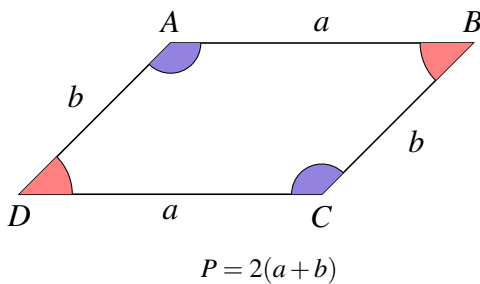


Figura 50 – Perímetros de paralelogramo e retângulo.

### 6.4.3 Losangos e Quadrados

Para losangos e quadrados todos os lados possuem a mesma medida, logo  $AB = BC = CD = DA = \ell$ , então  $P = \ell + \ell + \ell + \ell$ , logo  $P = 4\ell$ .

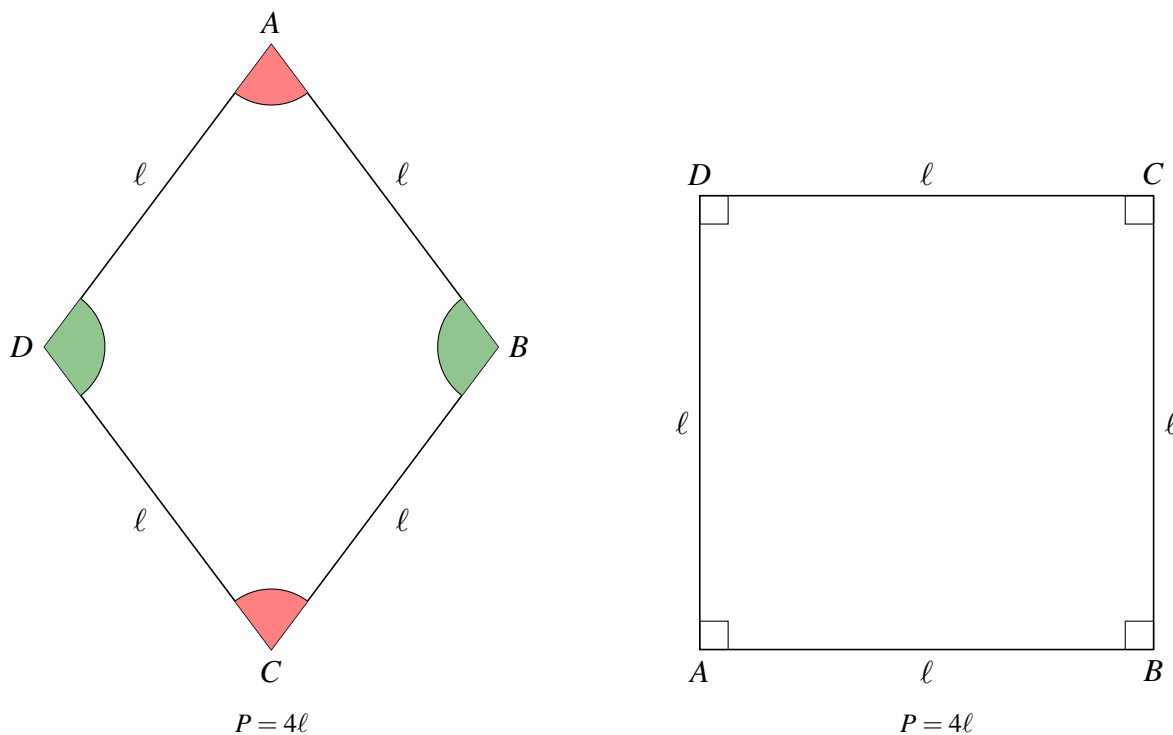


Figura 51 – Perímetros de losango e quadrado.

### 6.4.4 Trapézios

Considere um trapézio  $ABCD$ :

Em um trapézio isósceles, temos  $AB = a$  e  $CD = b$ , as bases menor e maior do trapézio  $ABCD$  e os lados  $BC = DA = \ell$ , assim o perímetro  $P = a + \ell + b + \ell$ , então  $P = a + b + 2\ell$ .

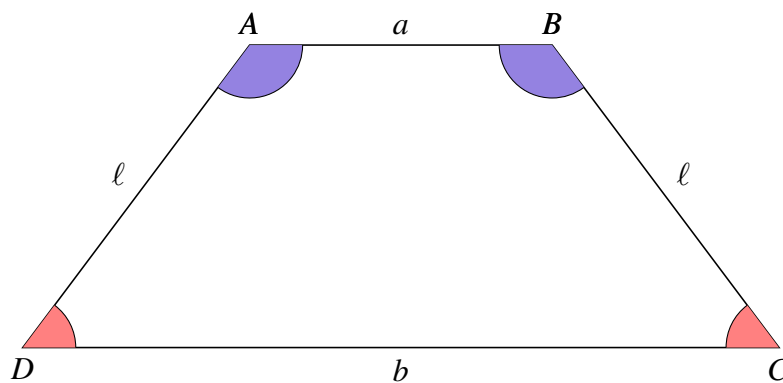


Figura 52 – Perímetro de trapézio isósceles.

Note que em um trapézio retângulo e escaleno, temos todos os lados de medidas diferentes,  $AB = a$  e  $CD = b$  são as bases menor e maior do trapézio  $ABCD$ , respectivamente, e os lados  $BC = c$  e  $AD = d$ . Assim o perímetro de  $ABCD$  será  $P = a + b + c + d$ .

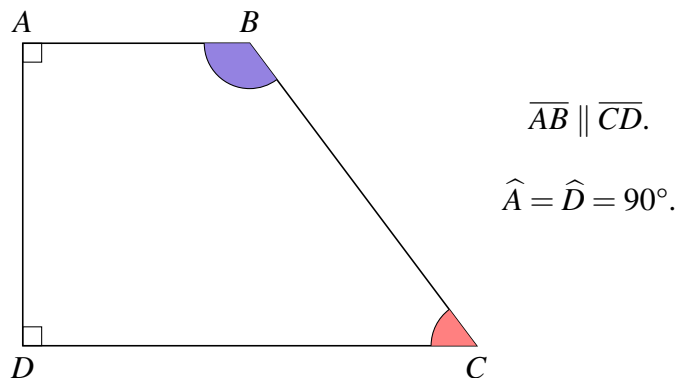


Figura 53 – Perímetro de trapézio retângulo.

## 6.5 Áreas

Área é a extensão delimitada de espaço, território ou superfície. No caso de figuras planas é o tamanho da superfície delimitada pelos lados da figura. Chamamos de figura bidimensionais que possuem comprimento e largura.

**Notação:** A área de qualquer figura plana será denotada pelos seus vértices entre parênteses, ou seja, área de um quadrado  $ABCD$  é igual a  $(ABCD)$ , área de um triângulo  $ABC$  é igual a  $(ABC)$  e assim para qualquer polígono.

### 6.5.1 Áreas de retângulos e quadrados

Considere um retângulo  $ABCD$  de largura  $BC = AD = a$  e comprimento  $AB = CD = b$ . Neste caso, o comprimento denominamos de base e a largura pode-se chamar de altura, como na figura a seguir:

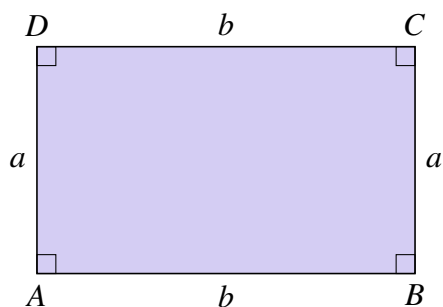


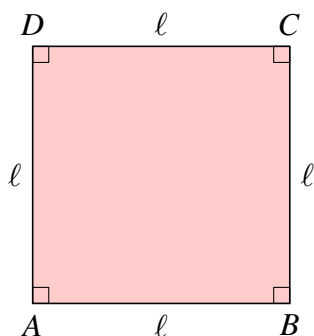
Figura 54 – Retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

A base e a altura são as duas dimensões do retângulo, logo a área do retângulo será o produto dessas duas dimensões, a base pela altura. Com isso temos toda a superfície da figura.

$$(ABCD) = \underbrace{AB}_{\text{base}} \cdot \underbrace{CD}_{\text{altura}}$$

No caso do quadrado  $ABCD$  que é um particular retângulo, com todos os lados de mesma medida, teremos que:

$AB = BC = CD = DA = \ell$ , logo a base e a altura possuem a mesma medida, assim:



$$\begin{aligned}(ABCD) &= AB \cdot BC \\ &= AD \cdot DC \\ &= \ell \cdot \ell\end{aligned}$$

Figura 55 – Quadrado de lado  $\ell$ .

Portanto,  $(ABCD) = \ell^2$ .

### 6.5.2 Área de um triângulo retângulo escaleno

A partir do retângulo  $ABCD$  de largura  $BC = AD = a$  e comprimento  $AB = CD = b$ , citado anteriormente, ao traçar a diagonal  $DB$ , obtemos dois triângulos retângulos semelhantes, o triângulo  $DAB$  e o triângulo  $DCB$ .

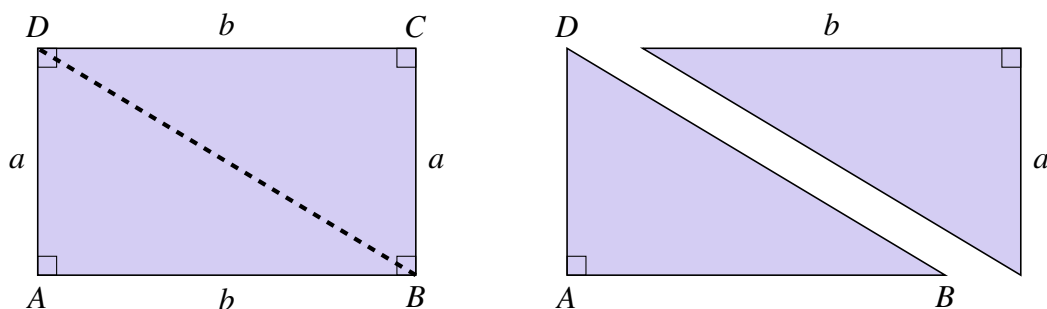


Figura 56 – Área do triângulo a partir da divisão do retângulo.

Os triângulos  $DAB$  e  $DCB$  são retângulos escalenos e possuem a mesma área, e cada um possui a metade da área do retângulo  $ABCD$  dado. Logo, a área de um retângulo qualquer dividida por dois, resulta na área de um triângulo:

$$\frac{(ABCD)}{2} = (DBA) \text{ e } \frac{(ABCD)}{2} = (DBC)$$

Sabemos que  $(ABCD) = \text{base} \times \text{altura}$

$$(ABCD) = AB \cdot CD$$

$$(ABCD) = b \cdot a$$

$$\frac{(ABCD)}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

Logo,  $(DBA) = (DBC) = \frac{b \cdot a}{2}$ , generalizando, a área de um triângulo qualquer é a metade do produto da base pela altura.

### 6.5.3 Área de um triângulo retângulo isósceles

De forma análoga, a partir do quadrado  $(ABCD)$ , e traçando sua diagonal, obtemos o mesmo resultado: dois triângulos retângulos isósceles semelhantes, como ilustrado na figura abaixo:

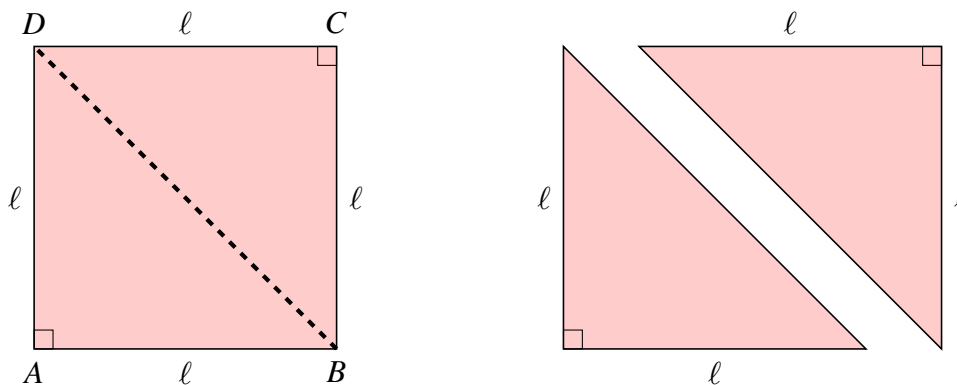


Figura 57 – Área do triângulo a partir da divisão do quadrado.

$$\frac{(ABCD)}{2} = (DBA) \text{ e } \frac{(ABCD)}{2} = (DBC)$$

$$(ABCD) = \text{base} \times \text{Altura}$$

$$(ABCD) = AB \cdot CD$$

$$(ABCD) = AB \cdot CD$$

$$(ABCD) = \ell \cdot \ell$$

$$\frac{(ABCD)}{2} = \frac{\ell \cdot \ell}{2}$$

$$(DBA) = (DBC) = \frac{\ell^2}{2}.$$

### 6.5.4 Área de um triângulo qualquer

Ao generalizar o descrito acima, a área de um triângulo qualquer é a metade do produto da base pela altura, como ilustrado na figura a seguir:

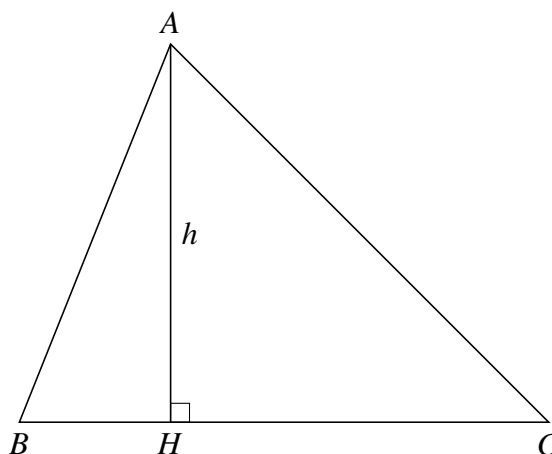


Figura 58 – Área de um triângulo qualquer.

Considere o triângulo  $ABC$  com base  $BC = a$  e altura  $AH = h$ , assim:

$$(ABC) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$(ABC) = \frac{a \times h}{2}$$

## 6.6 O Teorema de Pitágoras

Considere o triângulo retângulo abaixo:

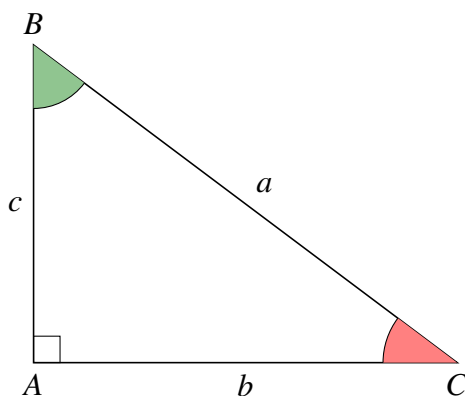


Figura 59 – Catetos e Hipotenusa de um triângulo retângulo.

$\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  ângulos agudos.

A, B e C são vértices do triângulo e

$a$ ,  $b$  e  $c$  são os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{AB} = c$$

$$\overline{AC} = b.$$

• **Hipotenusa:** É o maior lado do triângulo retângulo e o lado oposto ao ângulo reto,  $\hat{A} = 90^\circ$ . No exemplo, a hipotenusa  $\overline{BC} = a$ .

• **Catetos:** São os outros dois lados do triângulo retângulo e são os lados que formam o ângulo reto  $\hat{BAC} = 90^\circ$ . No exemplo, cateto  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ .

Outra maneira de identificar os catetos é de acordo com o ângulo de referência:

- **Cateto Adjacente:** quando o ângulo de referência é formado por esse cateto e a hipotenusa.

**Exemplo:** Seja  $\widehat{C}$  o ângulo de referência, logo o cateto adjacente é  $AC = b$ .

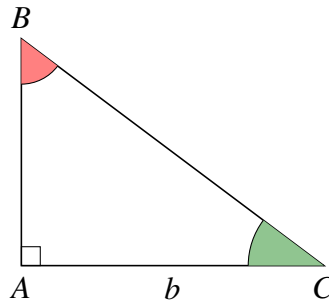


Figura 60 – Cateto adjacente ao ângulo.

- **Cateto Oposto:** quando o ângulo de referência é oposto a esse cateto.

**Exemplo:** Seja  $\widehat{C}$  o ângulo de referência, logo o cateto oposto é  $\overline{AB} = c$ .

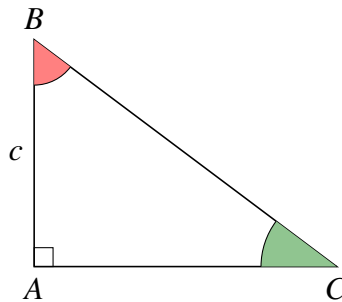


Figura 61 – Cateto oposto ao ângulo.

### 6.6.1 Teorema de Pitágoras

Seja um triângulo retângulo em  $\widehat{A}$ , temos a soma das áreas dos quadrados construídos a partir dos catetos é equivalente à área do quadrado construído a partir da hipotenusa.

$$(\text{hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2, \text{ então } a^2 = b^2 + c^2.$$

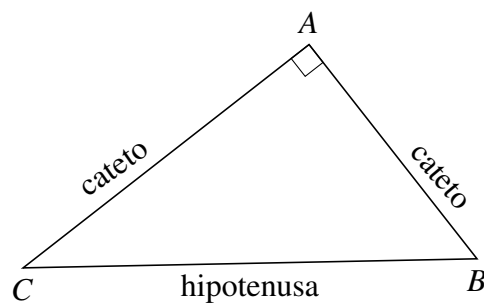


Figura 62 – O Teorema de Pitágoras.

Também, se um triângulo de lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tivermos que  $a^2 = b^2 + c^2$ , esse triângulo será retângulo, com a hipotenusa sendo lado de medida  $a$ .

Tome, por exemplo, o triângulo retângulo com hipotenusa  $a$  medindo 5, e catetos  $b$  e  $c$ , medindo 4 e 3 respectivamente. Esse triângulo é conhecido como triângulo retângulo 3, 4 e 5 ou triângulo retângulo clássico.

Muito antes do Teorema de Pitágoras receber essa nomenclatura, a matemática egípcia já utilizava esse triângulo retângulo clássico. Eles usavam para construir um ângulo reto uma corda, ela era dividida em pedaços iguais por 13 nós. Essa corda era colocada em uma estaca fixa a partir do primeiro nó, depois, fixava o quarto nó em outra estaca, ficando com 3 espaços. Da mesma maneira, fixava uma terceira estaca no oitavo nó de tal maneira que ficasse com quatro espaços. Por fim, o décimo terceiro nó seria fixado junto ao primeiro nó na primeira estaca, com cinco espaços. Isso dava a certeza aos egípcios que no quarto nó havia um ângulo reto.

Os egípcios possuíam muito conhecimento de cálculos aritméticos com objetivos práticos, como medir certa quantidade de alimentos, ou então, dividir determinado número de coisas entre certo número de pessoas. Da mesma forma, a geometria possuía também um caráter prático, atendendo, por exemplo, à necessidade de medir os campos de agricultura depois das inundações periódicas do rio Nilo e à necessidade de construção de monumentos, como as pirâmides.

Os gregos, sobretudo por meio de Pitágoras, que morreu no início do século V a.C., transformaram aquelas noções básicas em conhecimento organizado, tanto dos números como das figuras geométricas. Ainda, anteriormente, Tales, que viveu nas últimas décadas do século VII a.C. até meados do século VI a.C., já havia feito grandes contribuições para a Geometria.

### **Exemplo:**

Pelo Teorema de Pitágoras, tomando  $a = 5$ ,  $b = 4$  e  $c = 3$ , temos:

$$b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = a^2$$

Portanto o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo.

## **6.6.2 Prova do Teorema de Pitágoras**

Essa prova é atribuída ao matemático Bháskara. Considere o triângulo retângulo em  $\hat{A}$  de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$  em um quadrado de lado congruente à hipotenusa  $a$ .

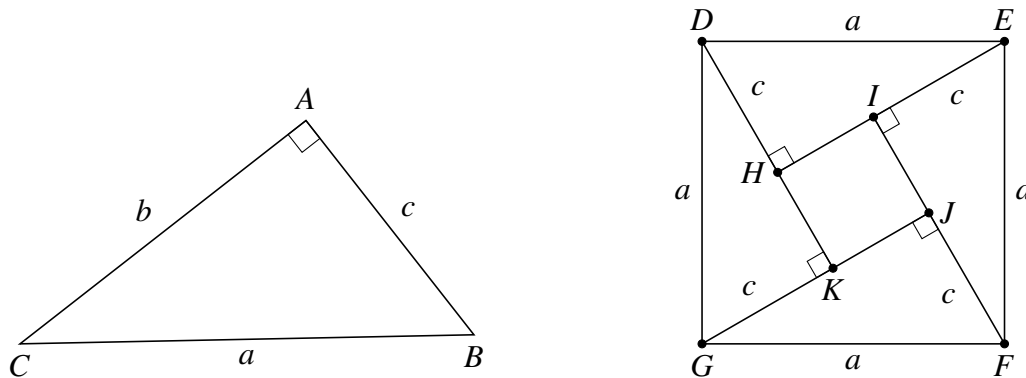


Figura 63 – O Teorema de Pitágoras por Bháskara.

O quadrado maior  $DEFG$  de lado  $a$  é formado pela sobreposição de quatro triângulos retângulos de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$  congruentes ao triângulo  $ABC$  e por um quadrado menor  $HIJK$  de lado  $(b - c)$ .

Temos  $(DEFG) = a^2$  e  $(HIJK) = (b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$ .

Observando o diagrama da direita na figura anterior, temos:

$$(DEFG) = (HIJK) + 4(ABC).$$

Calculando  $(ABC) = \frac{b \cdot c}{2}$ , temos:

$$a^2 = (b^2 - 2bc + c^2) + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} = b^2 + c^2.$$

Assim, temos o Teorema de Pitágoras.

### 6.6.3 Área de um triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero  $ABC$ ,  $AB = AC = BC = \ell$  e sua altura  $AH = h$  relativa a base  $BC$ .

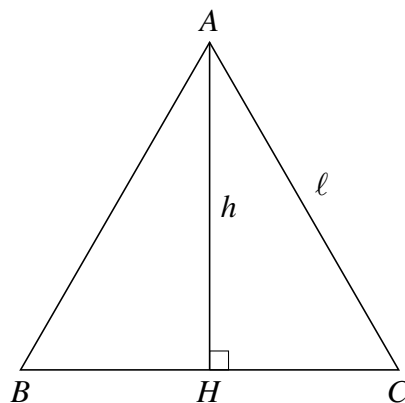


Figura 64 – Área do triângulo equilátero.

A área do triângulo  $ABC$  será dada por  $(ABC) = \frac{(\ell \cdot h)}{2}$ , neste caso, basta calcular a altura  $h$  e usaremos o Teorema de Pitágoras.

Considere o triângulo retângulo  $AHC$ , retângulo em  $H$ , assim,  $AC = \ell$  é a hipotenusa,  $AH = h$  é um cateto e o outro cateto é  $HC = \frac{\ell}{2}$ .

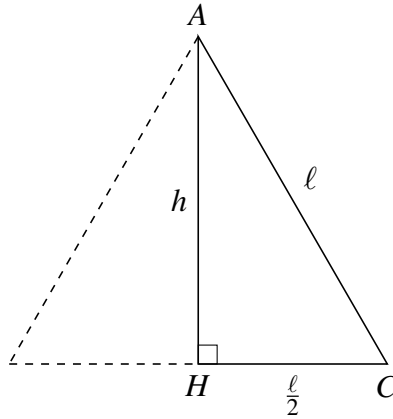


Figura 65 – Triângulo retângulo que é metade de um triângulo equilátero.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}\ell^2 &= h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \\ h^2 &= \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \\ h &= \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a área de um triângulo equilátero é dada por

$$(ABC) = \frac{(\ell \cdot h)}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

## 6.7 O Teorema de Tales

O Teorema de Tales foi desenvolvido pelo matemático Tales de Mileto, que demonstrou a existência de uma proporcionalidade entre segmentos de reta formados por retas paralelas interseccionadas por retas transversais. Com esse resultado, podemos estudar relações de proporcionalidade.

Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  três retas paralelas, se sejam  $u$  e  $v$  duas retas transversais que determinam sobre as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , respectivamente, como ilustrado na figura a seguir, assim temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

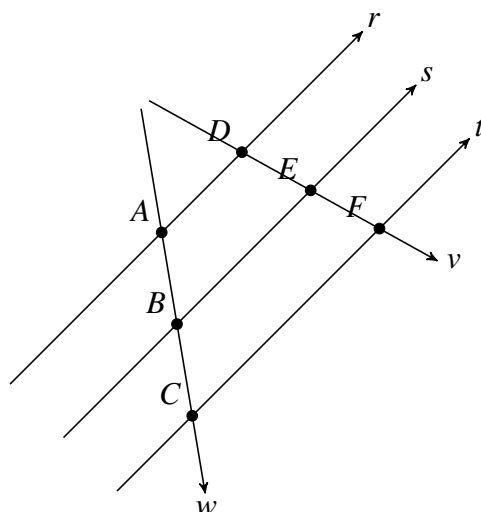


Figura 66 – O Teorema de Tales.

Na imagem anterior, há vários segmentos e podemos relacioná-los e compará-los de várias formas:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

Independente da maneira conveniente para montar as proporções, encontra-se o valor dos segmentos a partir da propriedade fundamental da proporção.

## 6.8 A Lei dos Senos

Para demonstrar a lei dos senos, definimos rapidamente as razões trigonométricas em um triângulo retângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ . Temos os ângulos  $B$  e  $C$ , a hipotenusa  $BC = a$ , e os catetos  $AB = c$  e  $AC = b$ , como na figura abaixo:

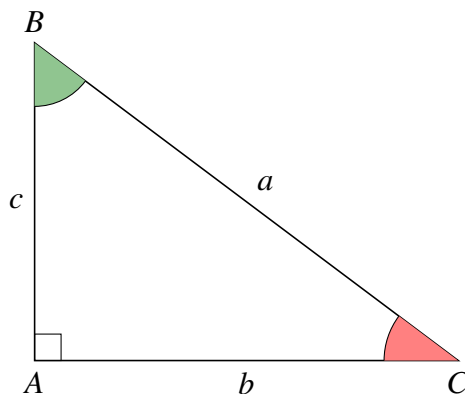


Figura 67 – Triângulo retângulo.

### 6.8.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

As razões trigonométricas em um triângulo retângulo é estabelecida entre a hipotenusa e os catetos da seguinte forma:

**Seno de um ângulo agudo:** é o quociente entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ou} \quad \text{sen}(B) = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \text{sen}(C) = \frac{c}{a}$$

.

**Cosseno de um ângulo agudo:** é o quociente entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa:

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ou} \quad \text{cos}(B) = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad \text{cos}(C) = \frac{b}{a}$$

.

**Tangente de um ângulo agudo:** é o quociente entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao ângulo:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad \text{ou} \quad \text{tg}(B) = \frac{a}{c} \quad \text{ou} \quad \text{tg}(C) = \frac{c}{b}$$

.

Podemos ainda destacar que a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente entre o seno deste mesmo ângulo pelo seu cosseno:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} \quad \text{e} \quad \text{tg}(B) = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad \text{tg}(B) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad \text{tg}(B) = \frac{b}{c}.$$

$$\text{Analogamente, } \text{tg}(C) = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}, \text{ implica em } \text{tg}(C) = \frac{c}{b}.$$

### 6.8.2 Lei dos senos

Dado um triângulo qualquer  $ABC$ , com ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  e lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , como na figura abaixo:

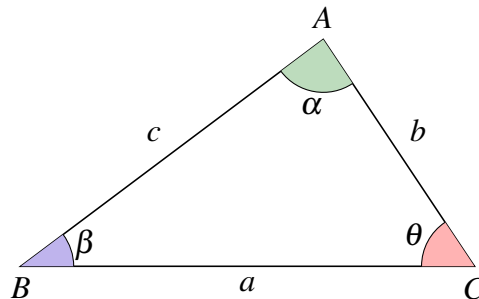


Figura 68 – Triângulo qualquer: Lei dos senos

A lei dos senos é dada pela seguinte proporção:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\theta)}.$$

Para deduzir essa propriedade, vamos analisar a construção da altura do triângulo em relação à base  $BC$ .

O comprimento da base  $BC$  é igual a  $a$ . Note que a altura  $AD$  divide o lado  $BC$  em duas partes que não são necessariamente iguais. A altura sempre forma um ângulo de reto com a base do triângulo. Logo, na figura abaixo, temos dois triângulos retângulos: o triângulo retângulo  $ADC$  e o triângulo retângulo  $ADB$ :

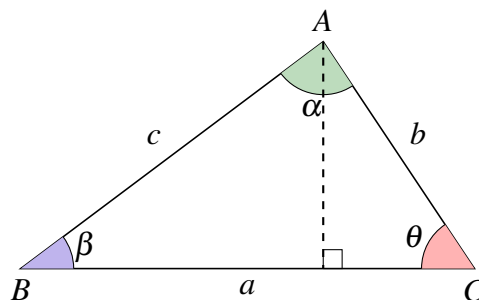


Figura 69 – Uma altura de um triângulo qualquer: Lei dos Senos

Pela definição de seno de um ângulo qualquer, temos:  $\text{sen}(\gamma) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ .

Calculando o seno do ângulo  $\beta$ , relativo ao triângulo  $ABD$ , temos:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{AD}{c}, \text{ assim, o lado } AD \text{ mede: } AD = c \cdot \text{sen}(\beta);$$

Analogamente, calculando o  $\text{sen}(\theta)$ , temos:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{AD}{b}, \text{ logo, o lado } AD = b \cdot \text{sen}(\theta);$$

Desta forma,  $c \cdot \text{sen}(\beta) = b \cdot \text{sen}(\theta)$ , o que implica em

$$\frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\theta)} \quad (6.1)$$

Construindo a altura do triângulo  $ABC$  em relação à outra base, por exemplo a base  $AC$ , como na figura abaixo, podemos de forma análoga, encontrar a proporção que falta.

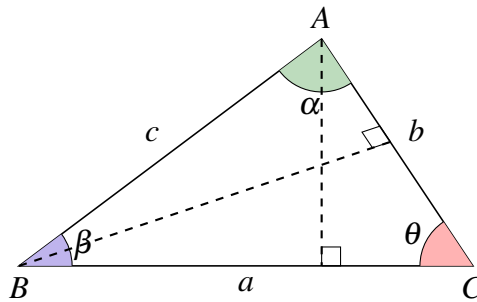


Figura 70 – Duas alturas de um triângulo qualquer: Lei dos senos.

Seja  $\text{sen}(\theta) = \frac{BE}{a}$ , assim, o lado  $BE = a \cdot \text{sen}(\theta)$ ;

e  $\text{sen}(\alpha) = \frac{BE}{c}$ , assim, o lado  $BE = c \cdot \text{sen}(\alpha)$ ;

Logo  $a \cdot \text{sen}(\theta) = c \cdot \text{sen}(\alpha)$  e portanto:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{c}{\text{sen}(\theta)}. \quad (6.2)$$

Finalmente, temos de 6.1 e 6.2:

$$\frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\theta)} \quad (6.3)$$

## 6.9 Relações Métricas no triângulo retângulo

Considere um triângulo retângulo  $ABC$ , retângulo em  $\hat{A}$  e altura  $h$  em relação à base  $BC$ , como ilustrado na figura abaixo, podemos ainda destacar:

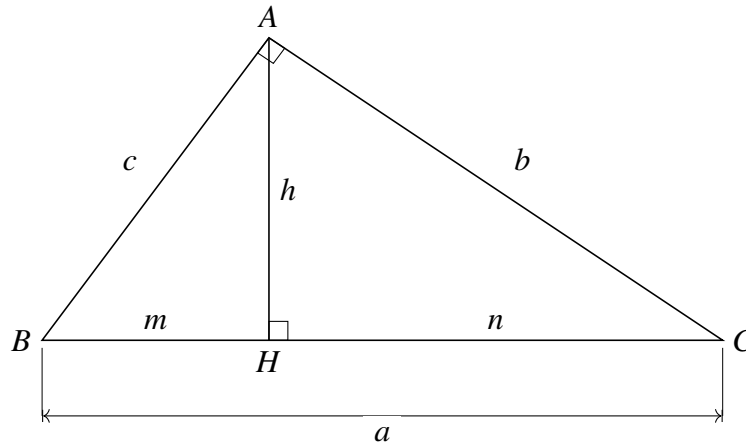


Figura 71 – Relações métricas no triângulo retângulo

$a = BC$  é a medida da hipotenusa;

$b = AB$  e  $c = AC$  são as medidas dos catetos;

$h$  é a altura relativa à base  $BC$  (hipotenusa);

$m$  é a medida da projeção do cateto  $c$  sobre a hipotenusa;

$n$  é a medida da projeção do cateto  $b$  sobre a hipotenusa;

Separando o triângulo  $ABC$  pela sua altura  $h$  em dois triângulos semelhantes, temos: triângulo  $AHB$  semelhante ao triângulo  $AHC$  que são semelhantes ao triângulo  $ABC$ , como na figura abaixo:

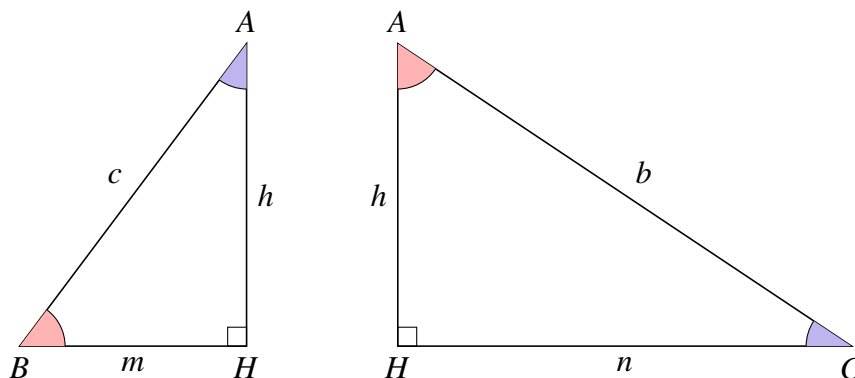


Figura 72 – Relações métricas no triângulo retângulo: triângulos semelhantes.

Como os triângulos  $ABC$  e  $HBA$  são semelhantes, temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}, \text{ o que implica que } a \cdot h = b \cdot c;$$
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}, \text{ o que implica que } c^2 = a \cdot m;$$

Usando que o triângulo  $ABC$  e  $HAC$  são semelhantes, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}, \text{ implica em } b^2 = a \cdot n;$$

Da semelhança entre os triângulos  $HBA$  e  $HAC$  encontramos a proporção:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}, \text{ o que implica que } h^2 = m \cdot n;$$

Temos ainda, a relação que a soma das projeções é a hipotenusa:  $m + n = a$ .

A partir das relações anteriores, obtemos uma outra demonstração para o Teorema de Pitágoras:

Somando  $b^2 = a \cdot n$  e  $c^2 = a \cdot m$ , lembrando que  $a = m + n$ , temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m = a \cdot (n + m) = a \cdot a = a^2$$

e temos o Teorema de Pitágoras.



## ESTUDO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesse capítulo, serão feitas as construções da Média Geométrica e da Quarta Proporcional, passo a passo, tendo como referência, algumas construções realizadas no canal do Youtube de Clóvis Carvalho.

### 7.1 Construção da média geométrica pelo método da soma

**Uma ideia de construção** – Construir um triângulo retângulo de projeções  $a$  e  $b$ , a sua altura  $h$  satisfaz  $h^2 = ab$ .

A construção passo a passo da média geométrica pelo método da soma de dois segmentos distintos: considere tais segmentos abaixo  $AB = a$  e  $CD = b$ :

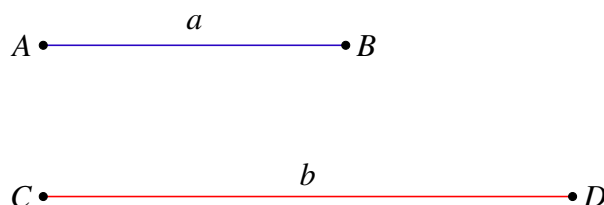


Figura 73 – Construção:  
Dados os segmentos  $a = AB$  e  $b = CD$ .

Temos por definição de média geométrica que:

$$x = \sqrt{a \cdot b} \text{ se, e somente se } x^2 = a \cdot b \text{ se, e somente se } x \cdot x = a \cdot b \text{ se, e somente se } \frac{x}{a} = \frac{b}{x}.$$

Aqui teremos duas construções, mostrando que a ordem em que são colocados os segmentos sobre a reta suporte, não altera o resultado  $x$  da média geométrica (comutatividade da soma). Assim, como a ordem dos fatores na operação de multiplicação não altera o valor do produto (propriedade comutativa da multiplicação), na construção geométrica, mostraremos que vale da mesma maneira. Faremos passo a passo para  $a + b$  e, ao final faremos em uma construção apenas para  $b + a$ .

**Passo 1:** Estabeleça uma reta suporte  $r$ , neste caso, do método da soma, é importante que os segmentos sejam transportados e colocados sobre a reta  $r$ , consecutivamente;

Observe que a construção passo a passo, é referente ao segmento  $AD = AB + CD = a + b$  e a construção final, referente a  $CB = CD + AB = b + a$ .

**Passo 2:** Marque o ponto  $A$  em qualquer lugar em  $r$ ;

**Passo 3:** Ponta seca em  $A$ , [Figura 73](#), abertura do compasso até  $B$ ;

**Passo 4:** Transporte  $a = AB$  para  $r$ , com a ponta seca em  $A$  na [Figura 74](#), e marque  $B$  em  $r$ ;

**Passo 5:** Destaque o segmento  $AB = a$ ;



Figura 74 – Construção:  
Segmento  $AB$ .

**Passo 6:** Como os segmentos são consecutivos, neste passo temos  $B = C$ . Marque o ponto  $C$  no mesmo lugar geométrico do ponto  $B$ ;

**Passo 7:** Na [Figura 73](#), ponta seca em  $C$ , compasso com a abertura da medida de  $CD = b$ , ponta seca em  $C$  e abertura até  $D$ ;

**Passo 8:** Transporte para a reta suporte  $r$ , a partir de  $B = C$ , o segmento  $b = CD$ , e marque o ponto  $D$  em  $r$ ;

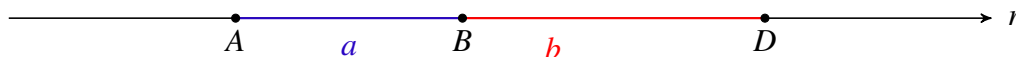


Figura 75 – Construção:  
Soma dos segmentos  $AB + CD = AD$ .

**Passo 9:** Construção do ponto médio  $M$  da soma dos segmentos  $AB + BD = a + b = AD$  através da reta mediatriz. Ponta seca em  $A$ , abertura do compasso maior que a metade de  $AD$ , trace acima e abaixo de  $r$ ;

**Passo 10:** Ponta seca em  $D$ , mesma abertura do compasso e trace acima e abaixo de  $r$ ;

**Passo 11:** Marque os pontos auxiliares encontrados,  $M_1$  e  $M_2$ ;

**Passo 12:** Trace a reta  $s$  passando por  $M_1$  e  $M_2$  e interseccionando perpendicularmente  $r$  em  $M$ . Destaque o ponto  $M$ , ponto médio de  $AD$ ;

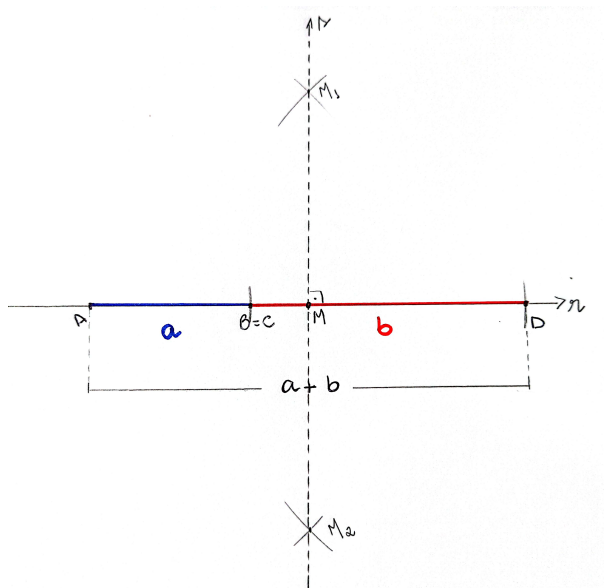


Figura 76 – Construção:  
Ponto médio do segmento  $AD$ .

**Passo 13:** Construção da semicircunferência  $\widehat{AD}$ . Ponta seca em  $M$ , abertura do compasso até  $A$  e trace até  $D$ . Destaque a semicircunferência  $\widehat{AD}$ ;

Note que a semicircunferência da soma dos segmentos define infinitos pontos correspondentes ao arco capaz de visualizar o segmento  $AD$  (1º caso) ou  $CB$  (2º caso), sob o ângulo de  $90^\circ$ .

**Passo 14:** Ponta seca em  $B = C$ , abertura do compasso até  $M$  e, trace  $M_3$  à esquerda de  $B = C$ . Marque o ponto auxiliar  $M_3$ , tal que  $\widehat{M_3M}$  é a semicircunferência de centro  $B = C$ ; Destaque  $\widehat{M_3M}$ ;

**Passo 15:** Construção da reta perpendicular  $t$  em  $B = C$ . Ponta seca em  $M$ , abertura maior que  $BM$ , e trace acima e abaixo de  $r$ . Ponta seca em  $M_3$ , mesma abertura, e trace acima e abaixo de  $r$ ;

**Passo 16:** Destaque os pontos auxiliares  $T_1$  e  $T_2$ . Trace  $t$  passando por  $T_1$ ,  $B = C$  e  $T_2$ ;

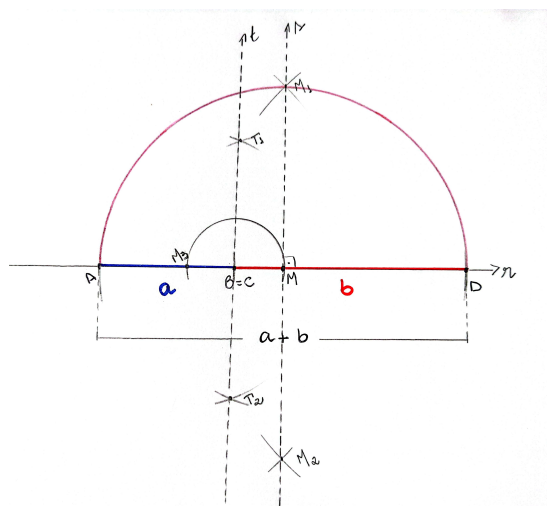


Figura 77 – Construção:  
Reta auxiliar  $t$  passando pelo ponto  $B = C$ .

**Passo 17:** Destaque o ponto  $B_1$ , que é a intersecção entre a reta  $t$  e a semicircunferência  $\widehat{M_3M}$ ;

**Passo 18:** Destaque  $BB_1 = x$ , a média geométrica da soma dos segmentos  $AB = a$  e  $CD = b$ ;

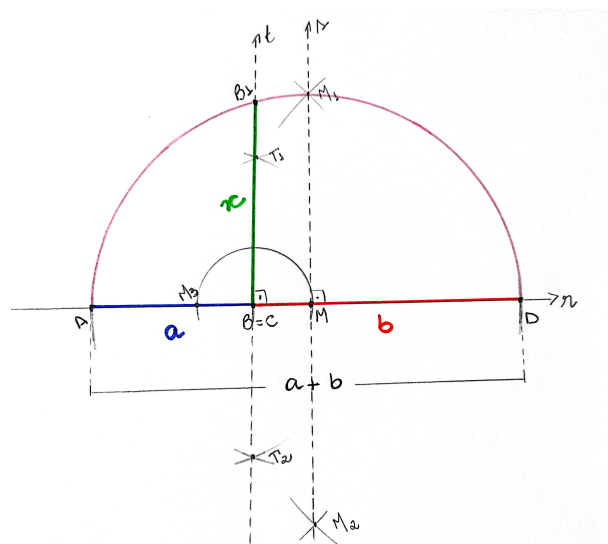


Figura 78 – Construção:  
Média geométrica  $x = BB_1$  de  $a$  e  $b$ .

Observe que o triângulo  $AB_1D$  é retângulo em  $B_1$  e  $B_1B$  é a altura em relação a hipotenusa  $AD$ , que nos remete às relações métricas do triângulo retângulo.

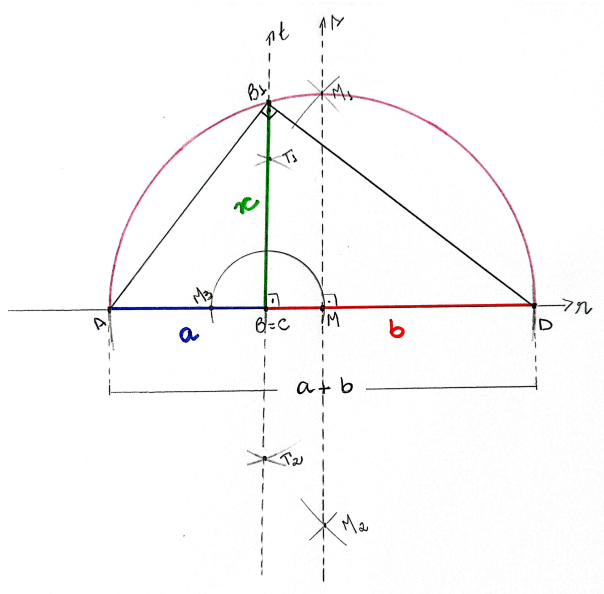


Figura 79 – Construção:  
Triângulo retângulo  $AB_1D$  com altura  $BB_1 = x$ , relações métricas.

**Passo 19:** Em apenas uma figura, a construção da Média Geométrica, pelo método da soma, onde teremos  $CD + AB = b + a$ , com todos os passos;

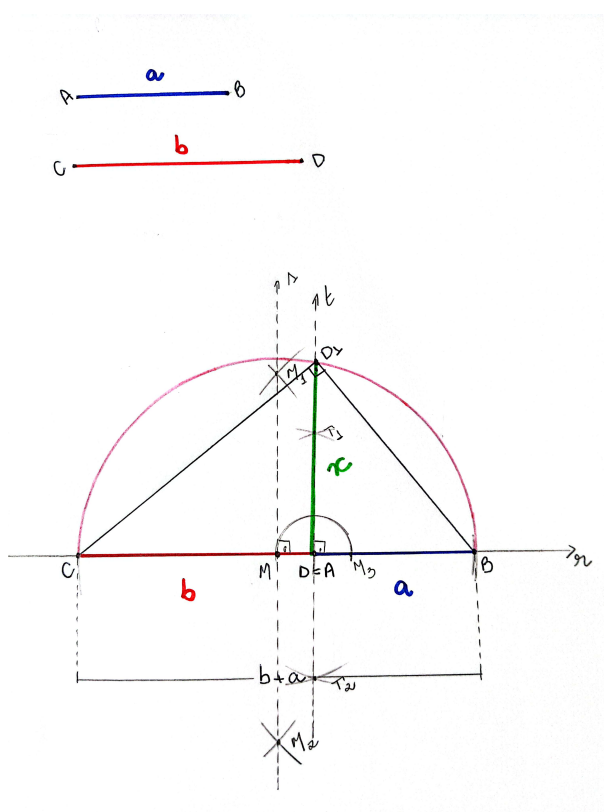


Figura 80 – Construção:  
Completa da média geométrica pelo método da soma.

Note que, o triângulo  $CD_1B$  é retângulo em  $D_1$  e  $DD_1$  é a altura em relação à hipotenusa  $CB$ , que nos remete às relações métricas do triângulo retângulo.

Em resumo:

O triângulo  $AB_1D$ , retângulo em  $B_1$ , a média geométrica é  $x = BB_1$ , ( $h^2 = a.b$ ). O triângulo  $CD_1B$ , retângulo em  $D_1$ , a média geométrica é  $x = DD_1$ , ( $h^2 = a.b$ ).

Assim concluímos a construção da média geométrica de dois segmentos usando o método da soma.

## 7.2 Construção da Média Geométrica pelo método da subtração.

**Uma ideia de construção** – Construir um triângulo retângulo com hipotenusa  $b$  e projeção  $a$ , a média geométrica será o cateto,  $b^2 = a \cdot n$ .

A construção passo a passo da média geométrica pelo método da subtração de dois segmentos diferentes. O método da subtração torna a construção conveniente, quando um dos segmentos é muito grande em relação ao outro.

**Passo 1:** Considere dois segmentos com medidas distintas:  $AB = a$  e  $CD = b$ ;

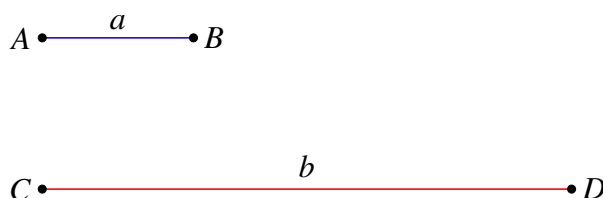


Figura 81 – Construção:  
Dados os segmentos  $a = AB$  e  $b = CD$ .

Vamos usar a definição algébrica de médias geométrica:  $x = \sqrt{a \cdot b}$  se, e somente se  $x^2 = a \cdot b$  se, e somente se  $x \cdot x = a \cdot b$  se, e somente se  $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ .

Assim, temos a média geométrica  $x$  que possui uma proporção com  $a = AB$  e  $b = CD$ .

**Passo 2:** Considere  $r$  uma reta suporte. Faremos a construção geométrica, sobrepondo os segmentos de maneira que a intersecção entre eles resulte no menor segmento:  $AD = b - a$ ;

**Passo 3:** Transporte do segmento maior  $CD$  para a reta suporte  $r$ . Marque o ponto  $C$  em algum lugar de  $r$ , ponta seca em  $C$  na Figura 81, abertura do compasso até  $D$ , transporte o comprimento  $b$  para  $r$ , marque o ponto  $D$  em  $r$ , e destaque o segmento  $CD = b$ ;

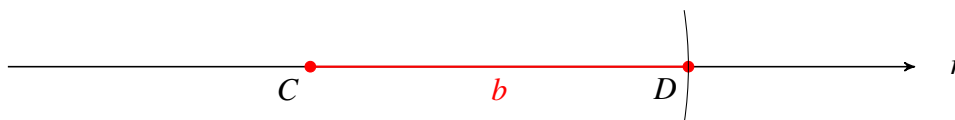


Figura 82 – Construção:  
transporte de  $b = CD$  para a reta  $r$ .

Temos duas maneiras de transportar o segmento  $AB$ . Abaixo serão apresentadas as duas maneiras, porém a construção será feita por completo usando a primeira maneira. Para a segunda maneira, a construção é análoga.

**Passo 4:** Transporte o segmento  $AB$  para a reta suporte  $r$ ; Considere, com abuso de notação,  $A = C$ , ou seja, o ponto  $A$  no mesmo lugar do ponto  $C$ , em  $r$ ;

**Passo 5:** Na Figura 81, ponta seca em  $A$  e abertura do compasso até  $B$ , transporte esse segmento para a reta  $r$  a partir do ponto  $C = A$  e, marque em  $CD$  o ponto  $B$  do segmento, destaque o ponto  $B$ , e destaque o segmento  $CB$ ;

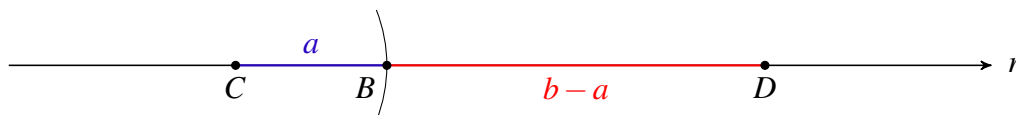


Figura 83 – Construção:  
transporte de  $a = AB$  para a reta  $r$  a partir do ponto  $C$ .

**Passo 4.1:** Transporte o segmento  $AB$  para a reta suporte  $r$ ; Considere, com abuso de notação  $A = D$ , o ponto  $A$  no mesmo lugar do ponto  $D$  em  $r$ ;

**Passo 5.1:** Na Figura 81, ponta seca em  $A$  e abertura do compasso até  $B$ , transporte o segmento para a reta  $r$  a partir do ponto  $D = A$  e marque em  $CD$ , o ponto  $B$  do segmento à esquerda de  $D$ , destaque o ponto  $B$  e destaque o segmento  $BD = BA$ ;



Figura 84 – Construção:  
transporte de  $a = AB$  para a reta  $r$  a partir do ponto  $D$ .

Observe que toda a construção pode ser realizada com  $A = D$ , analogamente ao caso  $A = C$ . Seguiremos com a construção de  $A = C$ :

**Passo 6:** Determinar o ponto médio  $O$  do segmento  $CD$  (maior segmento). Ponta seca em  $C$ , abertura do compasso maior que a metade do segmento  $CD$ , trace a circunferência centrada em  $C$ ;

**Passo 7:** Analogamente, com a mesma abertura do compasso, ponta seca em  $D$  e traçar a circunferência centrada em  $D$ ;

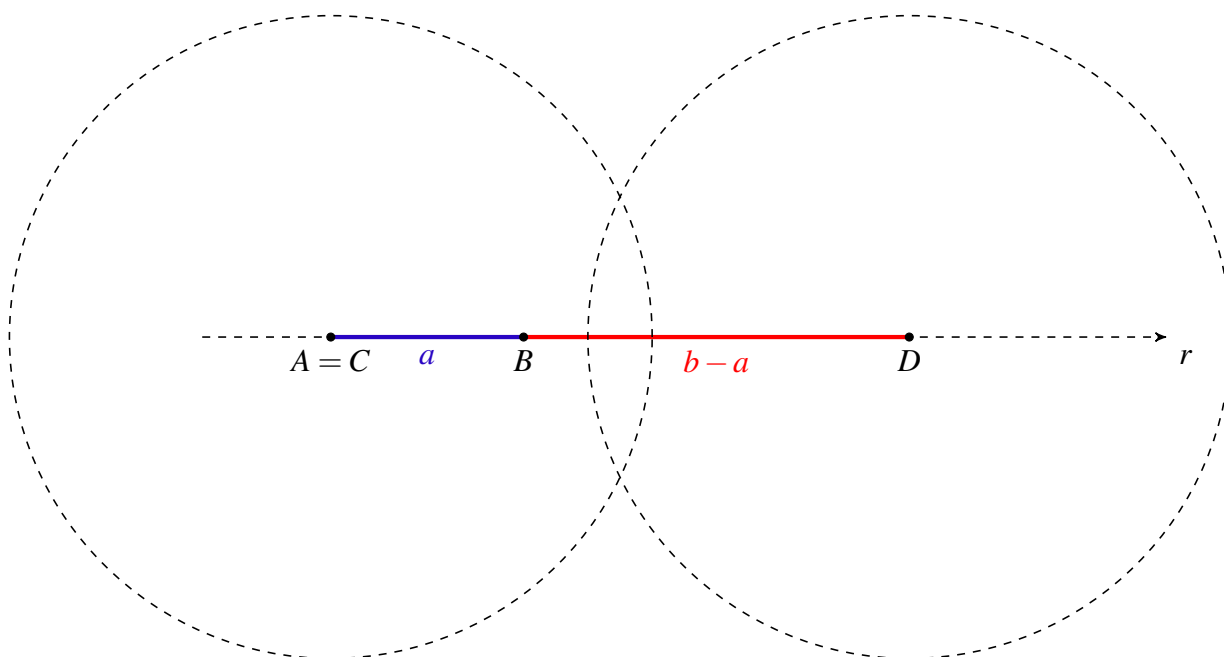


Figura 85 – Construção:  
Circunferências para determinar a mediatriz  $m$  de  $CD$ .

**Passo 8:** Marque os pontos de intersecção  $K$  e  $L$  entre as duas circunferência;

**Passo 9:** Traçar a reta mediatriz  $m$ , passando pelos  $K$ ,  $L$  e perpendicular a  $r$ . Destaque o ponto médio  $O$  de  $CD$ ;

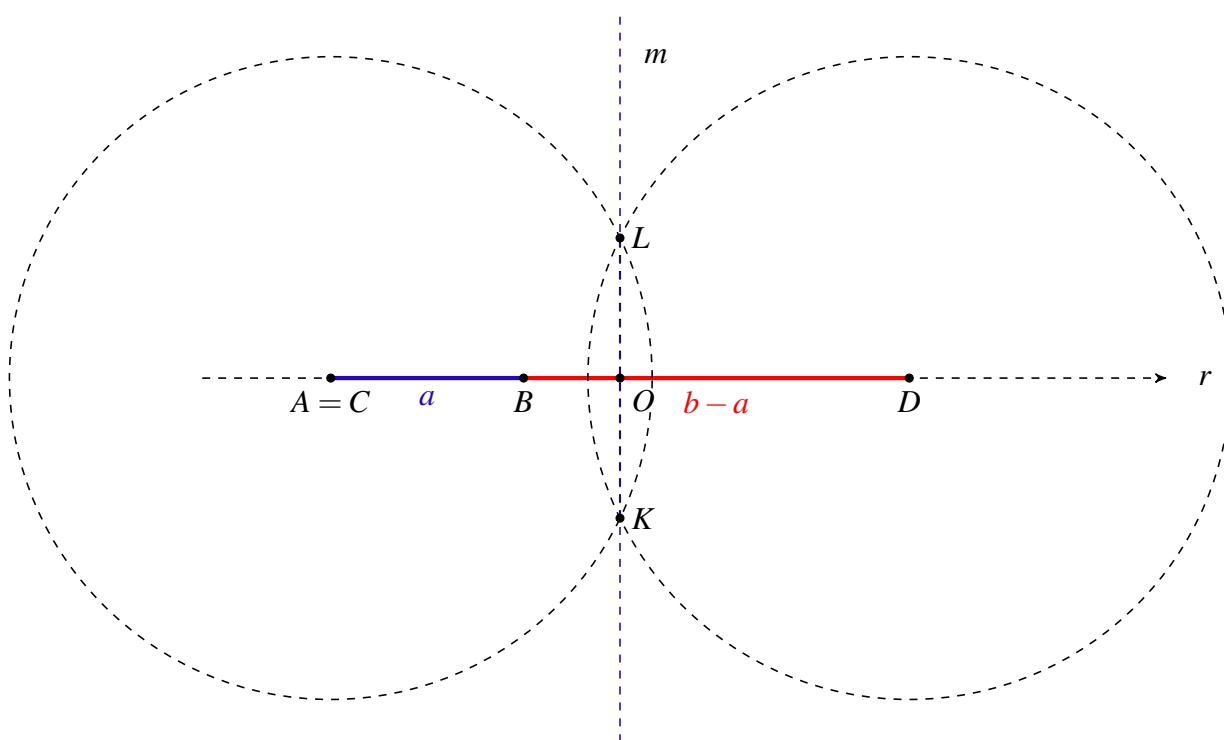


Figura 86 – Construção:  
Reta mediatriz.

**Passo 10:** Trace e destaque a semicircunferência com centro no ponto médio  $O$ , e extremidades em  $C$  e  $D$ ;

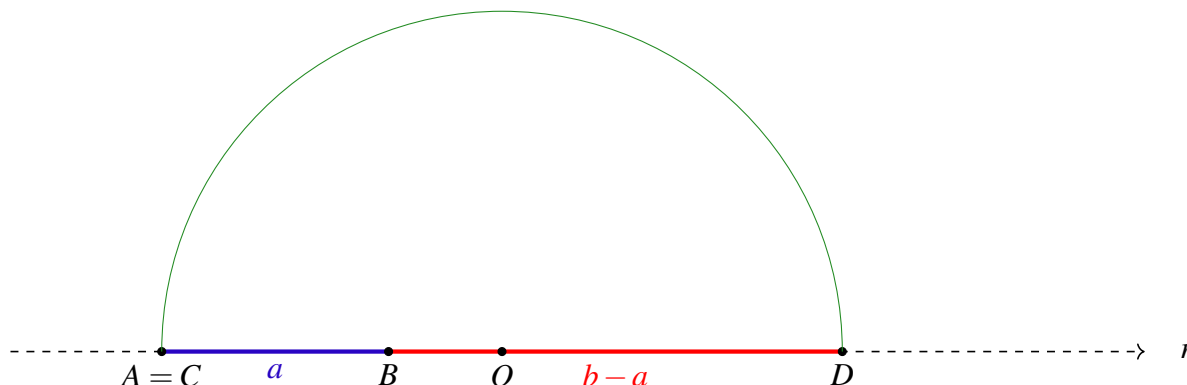


Figura 87 – Construção:  
Semicircunferência de centro em  $O$  e extremidades  $C$  e  $D$ .

O ponto  $B$ , é a extremidade do segmento  $AB$ , e está situada ao longo do segmento  $CD$ , é o ponto onde será construída a altura do triângulo retângulo. E nesse caso, lembrando as relações métricas no triângulo retângulo, o quadrado do cateto ( $x^2$ ) é igual ao produto da sua projeção  $AB = a$  pela hipotenusa  $CD = b$ . Neste caso, o lugar geométrico da média geométrica  $x$ , é o cateto  $CB = x$ .

**Passo 11:** Trace uma reta perpendicular a  $r$  pela extremidade  $B$  do menor segmento contido no segmento maior. Ponta seca em  $B$ , abertura até  $O$  e trace a semicircunferência a partir de  $O$  e marque  $O'$ ;

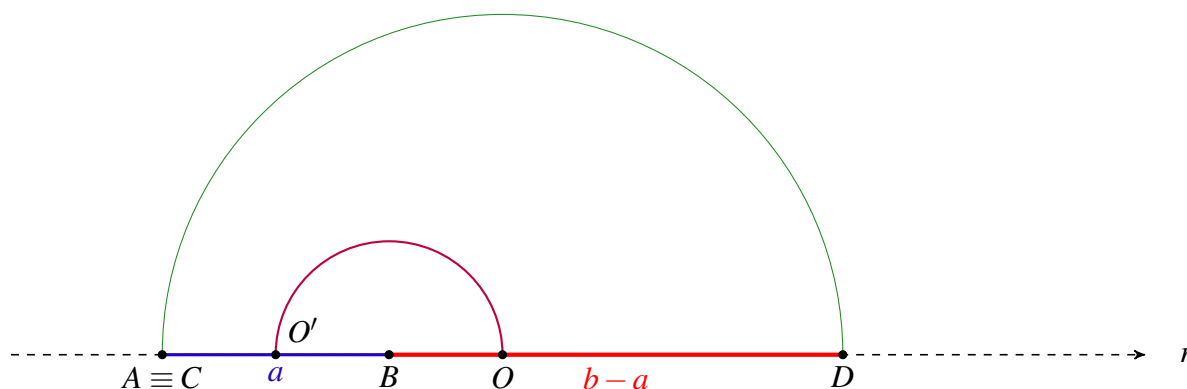


Figura 88 – Construção:  
Semicircunferência de centro  $B$  e extremidades  $O'$  e  $O$ .

**Passo 12:** Ponta seca em  $O$ , abertura maior que  $OB$ , trace acima e abaixo de  $r$ . Ponta seca em  $O'$ , mesma abertura e trace acima e abaixo de  $r$ . Destaque o ponto  $P$  e  $Q$ , pontos auxiliares;

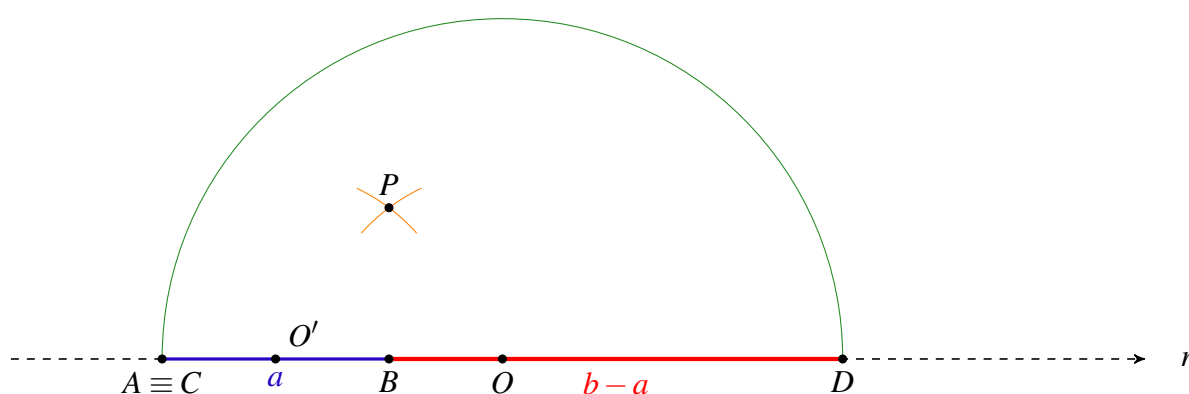


Figura 89 – Construção:  
pontos auxiliares para a mediatriz  $m$ .

**Passo 13:** Trace a reta  $h$  perpendicular a  $r$  em  $B$ , passando por  $Q$ ,  $B$  e  $P$ . Destaque  $B'$ , ponto de intersecção entre  $h$  e a semicircunferência de centro em  $B$  e extremidades  $C$  e  $D$ ;

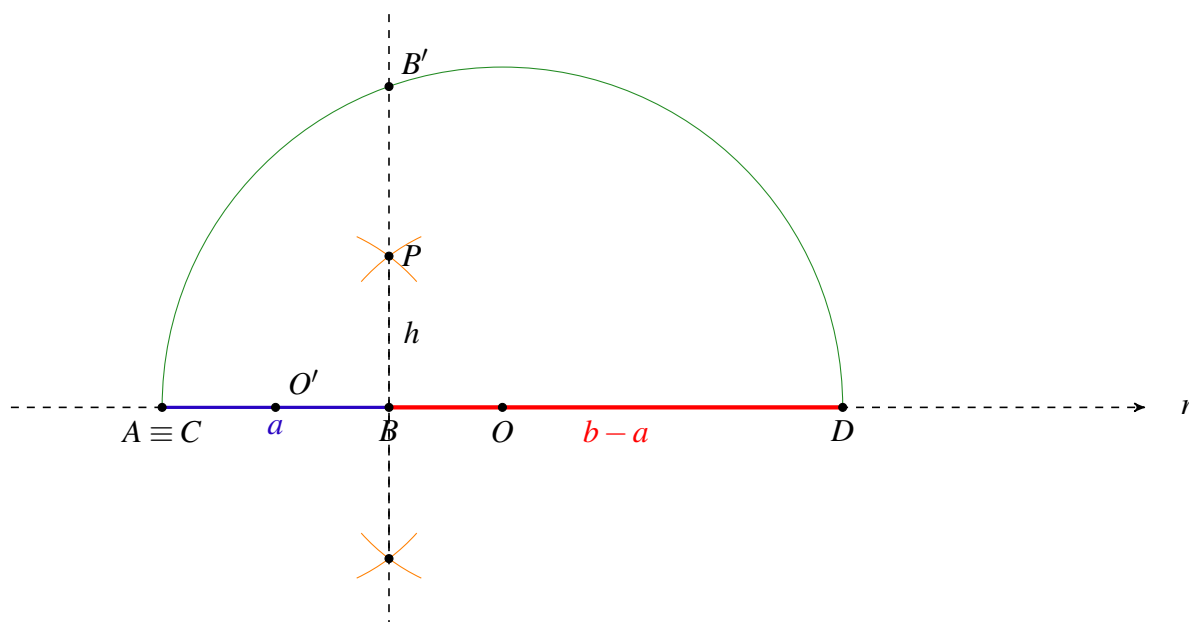
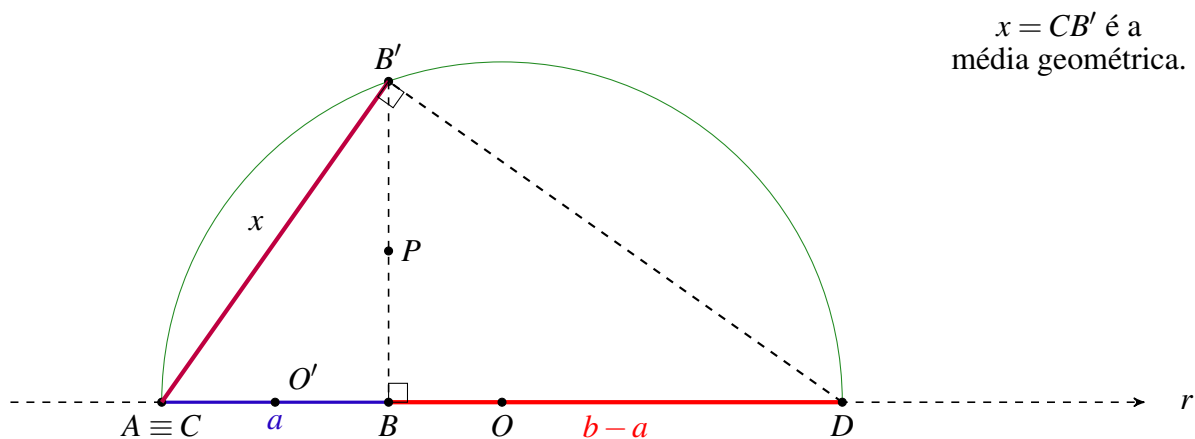


Figura 90 – Construção:  
Reta mediatriz  $m$  passando por  $B'$ ,  $P$  e  $B$ .

**Passo 14:** Destaque o segmento  $CB' = x$ , a média geométrica pelo método da subtração;



$x = CB'$  é a  
média geométrica.

Figura 91 – Construção:  
Triângulo retângulo  $AB'D$  com altura  $BB' = x$ , relações métricas.

Construção da média geométrica pelo método da subtração, em apenas uma figura, a partir do **passo 4.1** e o **passo 5.1**, onde sobrepomos o segmento  $BA$  em  $CD$ , a partir de  $D$ ;

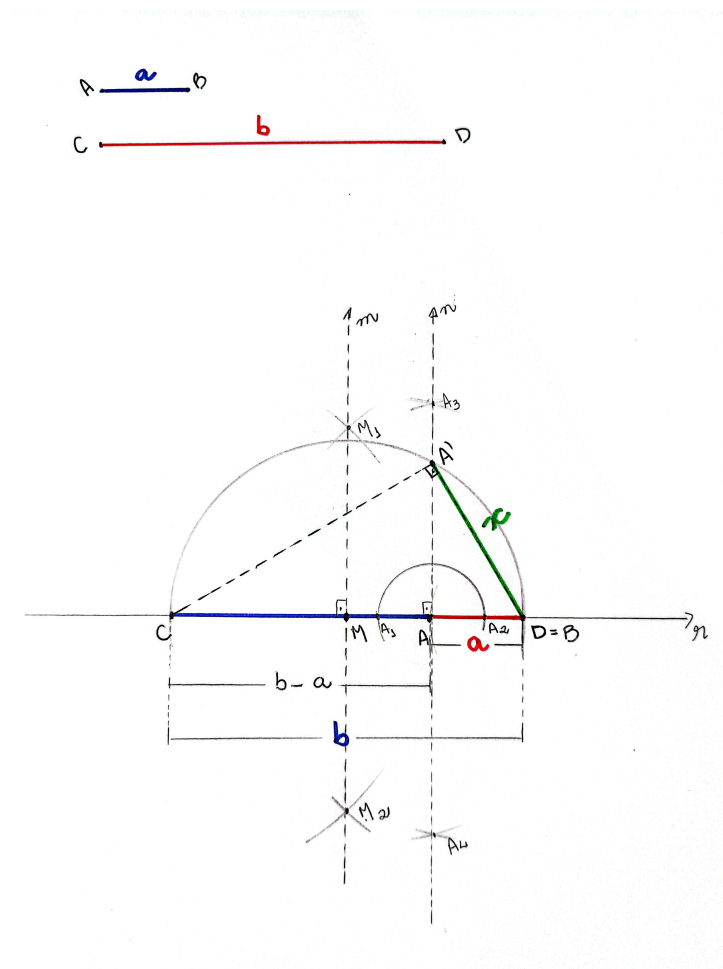


Figura 92 – Construção completa da média geométrica pelo método da subtração.

## 7.3 Construção da Quarta Proporcional

**Uma ideia de construção** – Construir a quarta proporcional utilizando o Teorema de Tales.

A quarta proporcional, que chamamos de  $x$ , é um segmento obtido a partir de outros três segmentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que estão em uma relação de razão e proporção. Ou seja,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  que é equivalente a  $ax = bc$ .

Considerando os segmentos  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $AC = c$ , e conseqüentemente,  $BD = x$  é o segmento da quarta proporcional obtido através do Teorema de Tales.

**Passo 1:** Considere os segmentos:  $OA = a$ ,  $OB = b$  e  $AC = c$  abaixo;



Figura 93 – Construção:  
Dados os segmentos  $a = OA$ ,  $b = OB$  e  $c = AC$ .

**Passo 2:** Considere  $r$  uma reta suporte, sobre ela, marque o ponto  $O$ ;

**Passo 3:** Passando pelo ponto  $O$  e um ângulo qualquer  $\alpha$ , não nulo, trace outra reta suporte  $s$ ;

**Passo 4:** A partir da Figura 93, transporte o segmento  $OA = a$  e  $AC = c$  para a reta  $r$ . Com ponta seca em  $O$ , transporte  $OA = a$  e marque  $A$  em  $r$ , destaque o segmento. Com ponta seca em  $A$ , transporte o segmento  $AC = c$  para a reta  $r$  a partir do ponto  $A$ , marque  $C$  em  $r$ , destaque o segmento;

**Passo 5:** A partir da Figura 93, transporte o segmento  $OB = b$  para a reta  $s$ . Ponta seca em  $O$  e abertura até  $B$  no segmento  $OB = b$ , e transporte para  $s$  a partir de  $O$ , marque  $B$  em  $s$  e destaque o segmento;

**Passo 6:** Na relação  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ , nós transferimos os numeradores  $a$  e  $c$  para a reta suporte  $r$  a partir de  $O$ , um segmento consecutivo ao outro. Na reta suporte  $s$ , transferimos o denominador  $b$ , para que, pelo Teorema de Tales, se obtenha o outro denominador  $x$  (quarta proporcional) por construção. Assim temos:

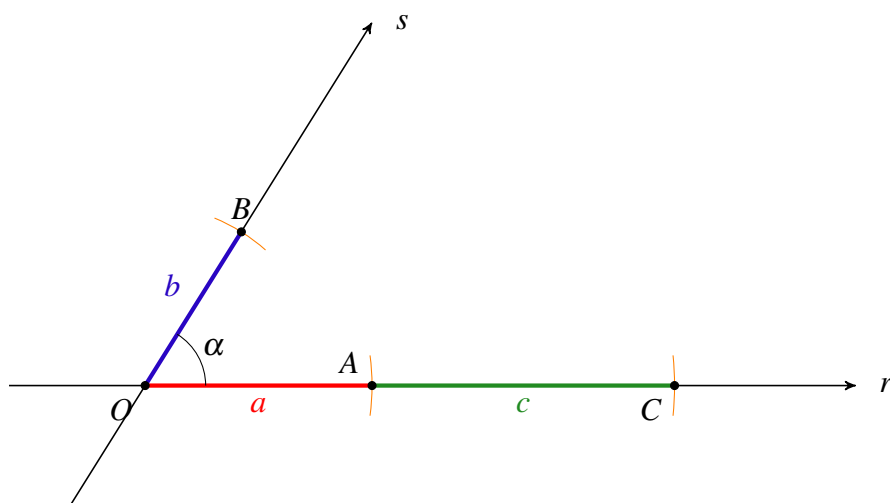


Figura 94 – Construção:  
Transporte dos segmentos  $a = OA$  e  $c = AC$  para  $r$  e  $b = OB$  para  $s$ .

**Passo 7:** Trace a reta suporte  $t_1$  passando pelos pontos  $A$  em  $r$ , e  $B$  em  $s$ ;

**Passo 8:** Construção da reta  $m$  perpendicular a  $t_1$  e passando pelo ponto  $A$ . Ponta seca em  $A$ , qualquer abertura do compasso, trace a semicircunferência  $\widehat{A_1A_2}$  centrada em  $A$ . Marque os pontos auxiliares  $A_1$  e  $A_2$ ;

**Passo 9:** Ponta seca em  $A_1$ , abertura maior que  $A_1A$ , e trace acima e abaixo de  $t_1$ . Ponta seca em  $A_2$ , mesma abertura, e trace acima e abaixo de  $t_1$ . Marque os pontos auxiliares  $A_3$  e  $A_4$ ;

**Passo 10:** Trace a reta  $m$  que passa por  $A_3$ ,  $A$  e  $A_4$ , e  $m$  é perpendicular a  $t_1$ ;

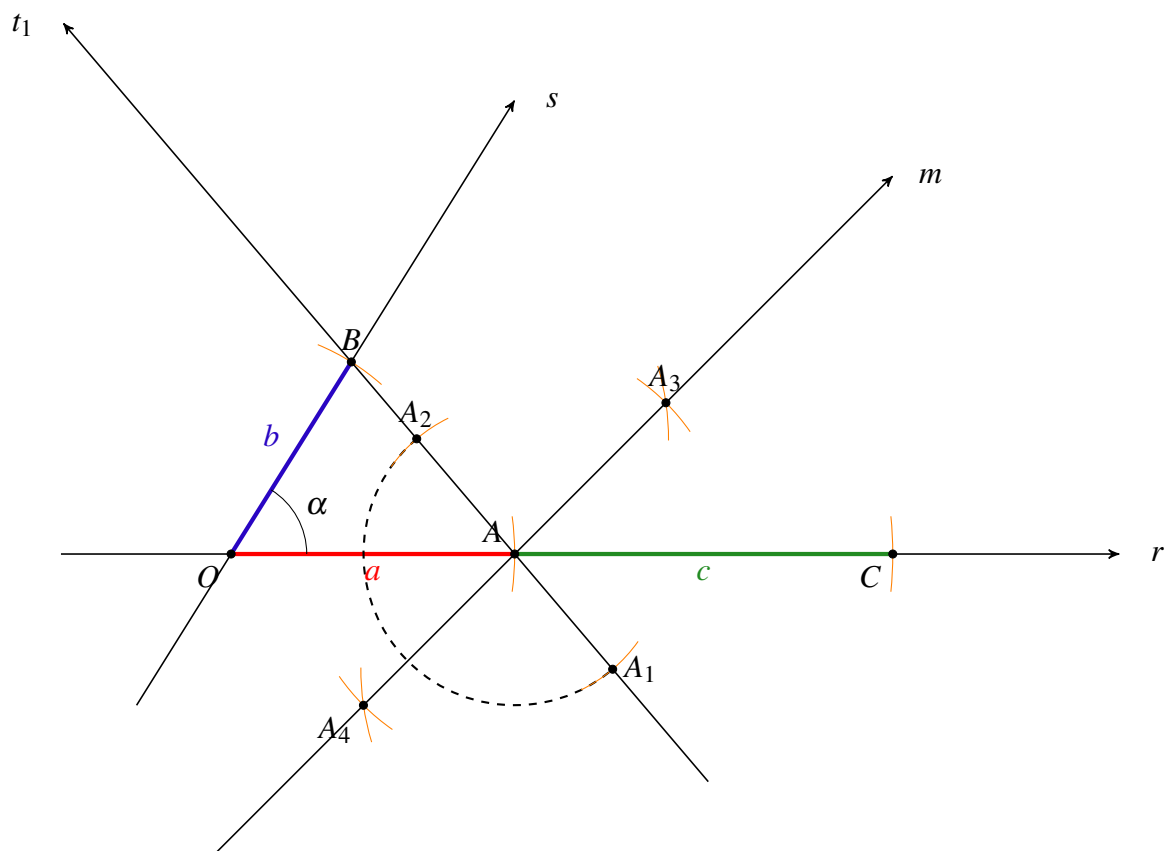


Figura 95 – Construção:  
Reta  $m$  perpendicular a  $t_1$  em  $A$ .

Construção da reta  $t_2$  perpendicular a  $m$  e paralela a  $t_1$  (feixe de retas paralelas do Teoremas de Tales), onde  $t_2$  passa pelo ponto  $C$ . A reta  $t_2$  também é perpendicular a  $s$  e intersecciona o ponto  $D$ , onde  $BD = x$ , a quarta proporcional procurada.

**Passo 11:** Ponta seca em  $C$ , abertura do compasso de tal maneira que a circunferência centrada em  $C$ , interseccione a reta  $m$  em dois pontos, marque  $M_1$  e  $M_2$ ;

**Passo 12:** Ponta seca em  $M_1$ , pode-se manter a mesma abertura anterior e trace acima e abaixo de  $m$ . Análogo para ponta seca em  $M_2$ , temos  $C$  e marque  $M_3$ ;

**Passo 13:** Trace  $t_2$  passando por  $M_3$  e  $C$ . Marque  $M$ , ponto médio entre  $M_1$  e  $M_2$ , é o ponto onde  $m$  e  $t_2$  são perpendiculares. Marque  $D$ , o ponto de intersecção entre  $t_2$  e  $s$ ;

**Passo 14:** Destaque  $BD = x$ , a quarta proporcional da relação  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ . Assim temos:



## GUIA PASSO A PASSO DE RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Iniciaremos a resolução de alguns exercícios relacionados às construções geométricas. É crucial salientar que essas práticas serão fundamentadas nas obras renomadas, como Construções Geométricas de (WAGNER, 2007) e Construções Geométricas - Exercícios e Soluções de (NETO, 2009).

### 8.1 Construção de um triângulo isósceles equivalente a um triângulo e com um ângulo congruente

**Exercício 1.** Dado um triângulo  $ABC$ , construir o triângulo  $A'B'C'$  equivalente (possuem a mesma área) a  $ABC$  e tal que  $\hat{A}' = \hat{A}$  e  $A'B' = A'C'$ .

**Resolução 1.** Seja o triângulo  $ABC$  e o triângulo  $A'B'C'$  onde  $(ABC)$  é a área do triângulo  $ABC$  e  $(A'B'C')$  é a área do triângulo  $A'B'C'$ .

Temos por hipótese que  $\hat{A} = \hat{A}'$  e que o triângulo  $A'B'C'$  é isósceles pois  $A'B' = A'C'$ .

Utilizando a lei dos senos, podemos calcular a área dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  da seguinte forma:

$$(ABC) = AB \cdot AC \cdot \sin(\hat{A}) \cdot \frac{1}{2}, \text{ e para } (A'B'C') = A'B' \cdot A'C' \cdot \sin(\hat{A}') \cdot \frac{1}{2}.$$

Como  $\hat{A} = \hat{A}'$  temos  $\sin(\hat{A}) = \sin(\hat{A}')$  e sabendo que  $A'B'C'$  é um triângulo, logo

$$\sin(\hat{A}) = \sin(\hat{A}') \neq 0.$$

Como  $(ABC) = (A'B'C')$ , temos a seguinte igualdade:

$$AB \cdot AC = A'B' \cdot A'C'.$$

Pela hipótese,  $A'B' = A'C'$  então  $AB \cdot AC = A'B' \cdot A'B'$ .

Logo  $AB \cdot AC = A'B'^2$  que é equivalente a  $\sqrt{AB \cdot AC} = A'B'$  e portanto  $A'B' = \sqrt{AB \cdot AC}$  e analogamente temos  $A'C' = \sqrt{AB \cdot AC}$ .

**Construção 1:** Para construir o triângulo  $A'B'C'$  equivalente ao triângulo  $ABC$ , determine a média geométrica  $x$ ;

**Passo 1.1:** Para determinar a média geométrica, inicialmente considere os segmentos  $AB$  e  $AC$ , dados na figura abaixo:

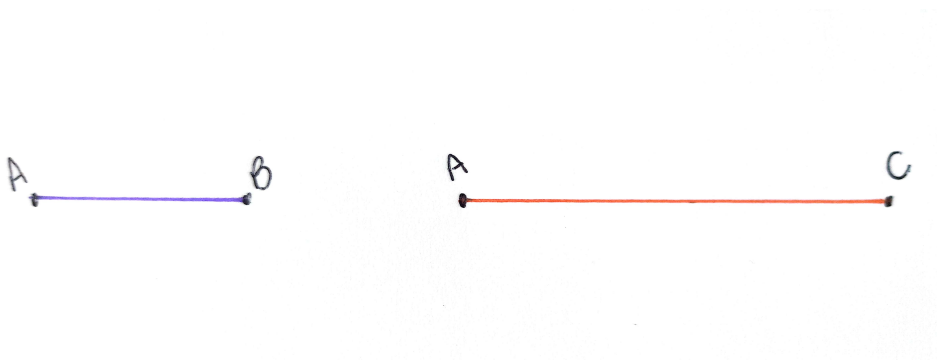


Figura 97 – Construção:  
Dados os segmentos  $AB$  e  $AC$ .

**Passo 1.2:** Considere a reta suporte  $r$  e marque o ponto  $C$  em qualquer lugar de  $r$ ;

Na [Figura 97](#), ponta seca em  $C$ , abertura até  $A$ , e transporte  $CA$  para a reta  $r$ , à esquerda de  $A$ . Ponta seca em  $A$ , abertura do compasso até  $B$ , e transporte o segmento  $AB$  para  $r$ , à direita de  $A$ ;

**Passo 1.3:** Temos o segmento  $CB = CA = AB$ .

Construção do ponto médio  $M$  e a reta mediatriz  $m$ . Abertura do compasso um pouco maior que a metade de  $CB$ . Ponta seca em  $C$  e, trace acima e abaixo de  $r$ , marque os pontos auxiliares  $M_1$  e  $M_2$ ;

**Passo 1.4:** Trace a reta mediatriz  $m$  de  $CB$ , passando por  $M_1$  e  $M_2$ , destaque o ponto médio  $M$ , que é o ponto de intersecção entre  $m$  e  $r$ ;

**Passo 1.5:** Ponta seca em  $M$ , abertura do compasso até  $B$  e trace a semicircunferência  $\widehat{CB}$ , centrada em  $M$ ;

**Passo 1.6:** Ponta seca em  $A$ , abertura até  $M$  e marque  $M_3$  à direita de  $A$ , destaque  $M_3$ ;

**Passo 1.7:** Trace a reta  $n$  passando por  $N_1$  e  $N_2$ , perpendicular a  $r$  em  $A$ .

Ponta seca em  $M$ , abertura do compasso maior que  $MA$  e trace acima e abaixo de  $r$ , análogo para ponta seca em  $M_3$ . Destaque  $N_1$  e  $N_2$ ;

**Passo 1.8:** Destaque o ponto  $A_1$ , a intersecção entre  $n$  e semicircunferência  $\widehat{CB}$ . Destaque  $AA_1 = x$  a média geométrica dos segmentos  $AB$  e  $AC$ ;

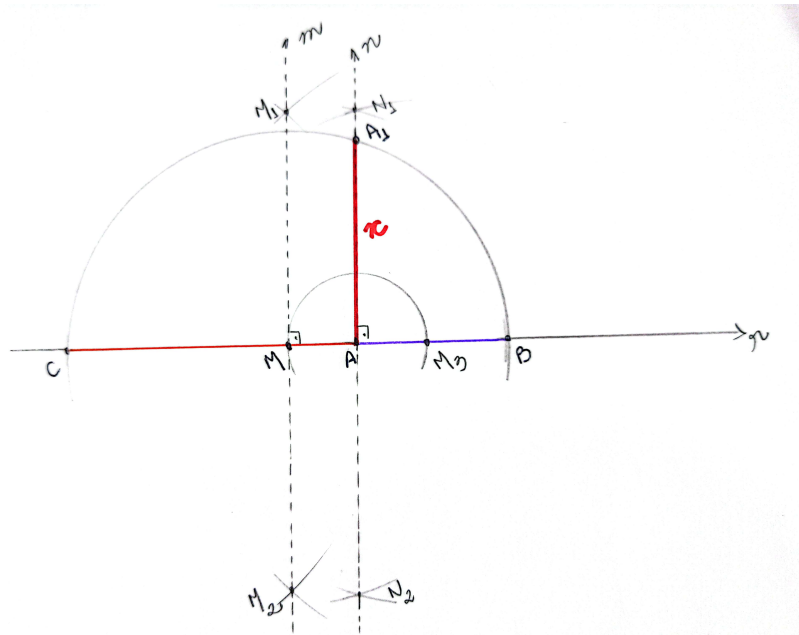


Figura 98 – Construção:  
Média geométrica  $x = AA_1$ .

**Passo 1.9:** Trace a circunferência  $\lambda$  de centro em  $A$  e raio  $x$  (média geométrica da Figura 98);

**Passo 1.10:** Trace  $p$ , a reta que contém  $AB$ , onde  $B'$  é a intersecção entre  $p$  e  $\lambda$ . Trace  $q$ , a reta que contém  $AC$ , onde  $C'$  é a intersecção entre  $Q$  e  $\lambda$ ;

**Passo 1.11:** Transporte e destaque o segmento  $AB$  em  $p$ , e o segmento  $AC$  em  $q$ . Destaque os pontos  $B'$  e  $C'$ . Trace os segmentos  $BC$  e  $B'C'$  e marque  $A = A'$ . Destaque o triângulo  $A'B'C'$ , e assim temos o triângulo  $A'B'C'$  com área equivalente ao triângulo  $ABC$ ;

## 8.2 Construção de um quadrado equivalente a um trapézio dado

**Exercício 2.** Construir um quadrado equivalente a um trapézio dado.

**Resolução 2.** Considere  $A_Q$  a área de um quadrado de lado  $\ell$  e  $A_T$  a área de um trapézio de bases  $a$  e  $b$  e altura  $h$ .

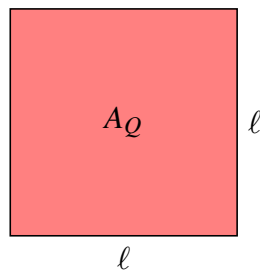


Figura 99 – Construção:  
Quadrado de lados  $\ell$  e área  $A_Q$ .

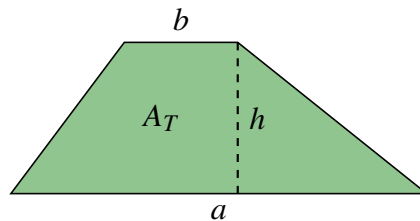


Figura 100 – Construção:  
Trapézio de bases  $a$  e  $b$ , altura  $h$  e área  $A_T$ .

Pela definição de área, a área do quadrado é  $A_Q = \ell^2$ .

A área do trapézio é definida pelo produto da altura  $h$  e a média aritmética das bases. Considere  $\bar{b}$  a média aritmética das bases, logo  $\bar{b} = \frac{a+b}{2}$ , então  $A_T = \bar{b} \cdot h$ .

$$\text{Portanto } A_T = \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot h.$$

Como  $A_Q$  é equivalente a  $A_T$ , então  $A_Q = A_T$ , o que implica  $\ell^2 = \left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot h$  se, e

somente se  $\ell = \sqrt{\left( \frac{a+b}{2} \right) \cdot h}$ , assim temos  $\ell = \sqrt{\bar{b} \cdot h}$ .

**Construção 2:** Para construir um quadrado de lado  $ell$  equivalente ao trapézio de bases  $a$ ,  $b$  e altura  $h$ , vamos determinar a média geométrica  $x$  da base média  $\bar{b} = \frac{a+b}{2}$  e da altura  $h$  do trapézio;

**Passo 2.1:** Considere como reta suporte  $r$ , nela serão transportados as bases maior e menor do trapézio, e utilizando a construção da reta mediatriz da soma desses segmentos, encontraremos o ponto médio, que nos dá a média aritmética das bases:  $\bar{b} = \frac{a+b}{2}$ ;

**Passo 2.2:** Marque o ponto  $A$  na reta suporte  $r$ , transporte o comprimento  $a$ , a base maior do trapézio da Figura 100. Ponta seca em  $A$ , marque o ponto  $B$ . Transporte o comprimento  $b$ , a base menor do trapézio da Figura 100. Ponta seca em  $B$ , marque o ponto  $C$ . Destaque  $AB = a$  e  $BC = b$ ;

**Passo 2.3:** Note que  $AB + BC = AC = a + b$ , assim encontramos o ponto médio  $M$  de  $AC$  através da construção da reta mediatriz de  $AC$ . Ponta seca em  $A$ , abertura do compasso maior que a metade de  $AC$ , trace acima e abaixo de  $r$ , e analogamente para a ponta seca em  $C$ . Marque os pontos  $S_1$  e  $S_2$  e trace  $s$ , a mediatriz de  $AC$ , passando por eles;

**Passo 2.4:** Destaque  $M$  o ponto de intersecção entre  $r$  e  $s$ , e destaque  $AM = MC = \bar{b} = \frac{a+b}{2}$ ;

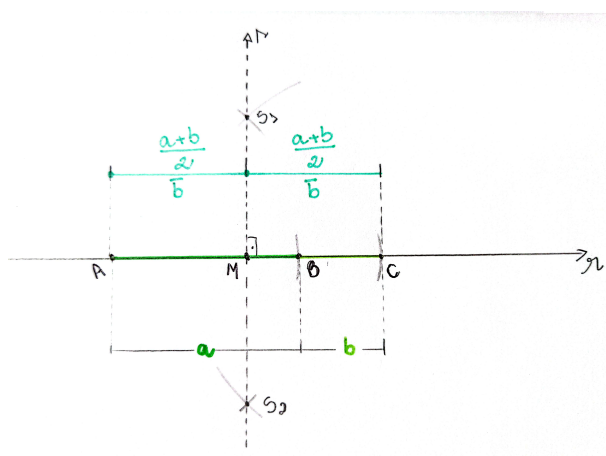


Figura 101 – Construção:  
Base média do trapézio.

**Passo 2.5:** Considere  $t$  como reta suporte, nela serão transportados os segmentos de reta  $AM = MC$  da Figura 101 e a altura  $h$  do trapézio da Figura 100, consecutivamente. Utilizando o método da soma para calcular a média geométrica  $x$ , de  $\bar{b}$  e  $h$ ;

**Passo 2.6:** Marque o ponto  $D$  em  $t$ , transporte o comprimento  $\bar{b}$ , a média das bases do trapézio da Figura 101, ponta seca em  $D$  e marque o ponto  $E$ ;

**Passo 2.7:** Transporte o comprimento  $h$ , a altura do trapézio da Figura 100 para  $t$ . Ponta seca em  $E$  e marque o ponto  $F$ ;

**Passo 2.8:** Observe que  $DE + EF = DF = \bar{b} + h$ . Construção de  $x$ , o valor da média geométrica entre a média das bases e a altura do trapézio, utilizando o método da soma;

**Passo 2.9:** Construção da mediatriz  $m$  passando pelo ponto  $N$ , ponto médio de  $DF = \bar{b} + h$ . Ponta seca em  $D$ , abertura maior que a metade de  $DF$ , trace acima e abaixo de  $t$ , e o mesmo processo para ponta seca em  $F$ . Marque os pontos auxiliares  $M_1$  e  $M_2$  e trace a a reta  $m$ . Marque o ponto  $Q$ , ponto médio de  $DF$  e a intersecção entre  $r$  e  $m$ ;

**Passo 2.10:** Ponta seca em  $Q$ , abertura até  $D$  e construa a semicircunferência  $\widehat{DF}$ , destaque-a;

**Passo 2.11:** Construção de  $q$ , reta perpendicular a  $t$  passando por  $E$ . Ponta seca em  $E$ , abertura até  $Q$  e trace o ponto auxiliar  $Q_1$  em  $t$ . Ponta seca em  $Q$ , abertura maior que  $QE$ , e trace acima e abaixo de  $t$ . Análogo para ponta seca em  $Q_1$ . Marque os pontos auxiliares  $Q_2$  e  $Q_3$ . Trace  $q$  a reta perpendicular a  $t$  em  $E$ , passando por  $Q_2$  e  $Q_3$ ;

**Passo 2.12:** Destaque  $E_1$ , o ponto de intersecção entre  $q$  e a semicircunferência  $\widehat{DF}$ . Destaque  $x = EE_1$ , a média geométrica da média das base e a altura do trapézio;

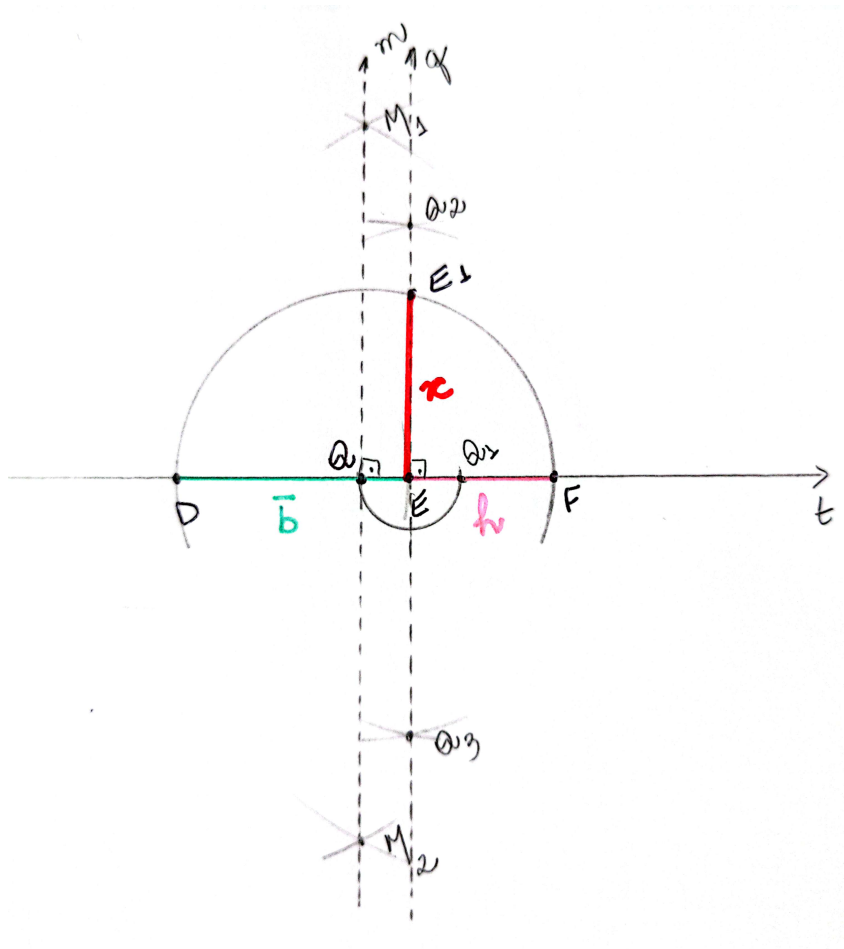


Figura 102 – Construção:  
Média geométrica  $x = EE_1$  da base média do trapézio.

**Passo 2.13:** Construção do quadrado de lado  $\ell$ , de área equivalente à área do trapézio de bases  $a$ ,  $b$  e altura  $h$ . Considere  $p$  uma reta suporte, onde vamos transportar o segmento  $EE_1 = x$  a média geométrica;

**Passo 2.14:** Marque o ponto  $E$  em qualquer lugar de  $p$ , ponta seca em  $E$ , e abertura até  $E_1$ , transporte  $x$  para a reta  $p$ , com ponta seca em  $E$  e marque  $E_1$ . Destaque  $EE_1$ ;

**Passo 2.15:** Construção das retas  $i$  e  $j$  perpendiculares a  $p$  em  $E$  e  $E_1$ , respectivamente.

Ponta seca em  $E$  e trace  $P_1$  e  $P_2$  em  $p$ . Ponta seca em  $P_1$ , trace acima e abaixo de  $p$  e análogo para a ponta seca em  $P_2$ . Marque os pontos  $P_3$  e  $P_4$ . Trace a reta  $i$  perpendicular a  $p$ , passando pelos pontos auxiliares  $E$ ; Analogamente, construímos a reta  $j$ , perpendicular a  $p$  passando por  $E_1$ ;

**Passo 2.16:** Ponta seca em  $E$ , abertura do compasso até  $E_1$  e trace até interseccionar a reta  $i$ , marque o ponto  $E_3$ . Ponta seca em  $E_1$ , mesma abertura e trace de  $E$  até interseccionar a reta  $j$ , marque o ponto  $E_4$ ;

**Passo 2.18:** Destaque  $E_1E_2 = EE_3 = E_3E_2 = x$ . Tome  $x = \ell$ , lados do quadrado  $EE_1E_2E_3$  de área equivalente à área do trapézio dado;

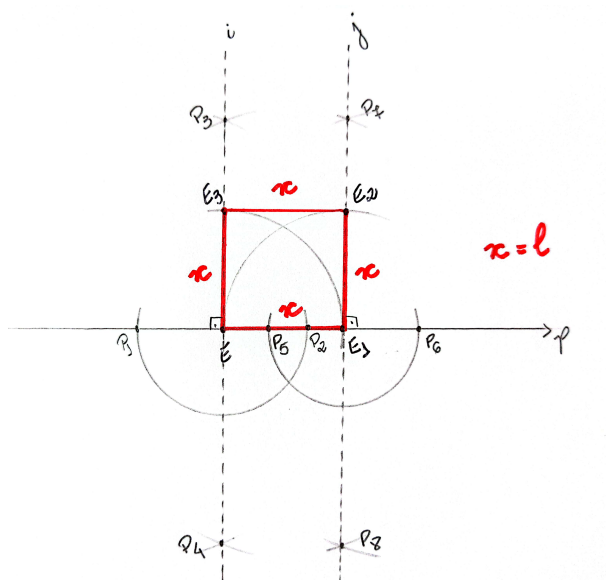


Figura 103 – Construção:  
Quadrado de lado  $x$ , a média geométrica da base média do trapézio.

Abaixo uma figura contendo todas as construções:

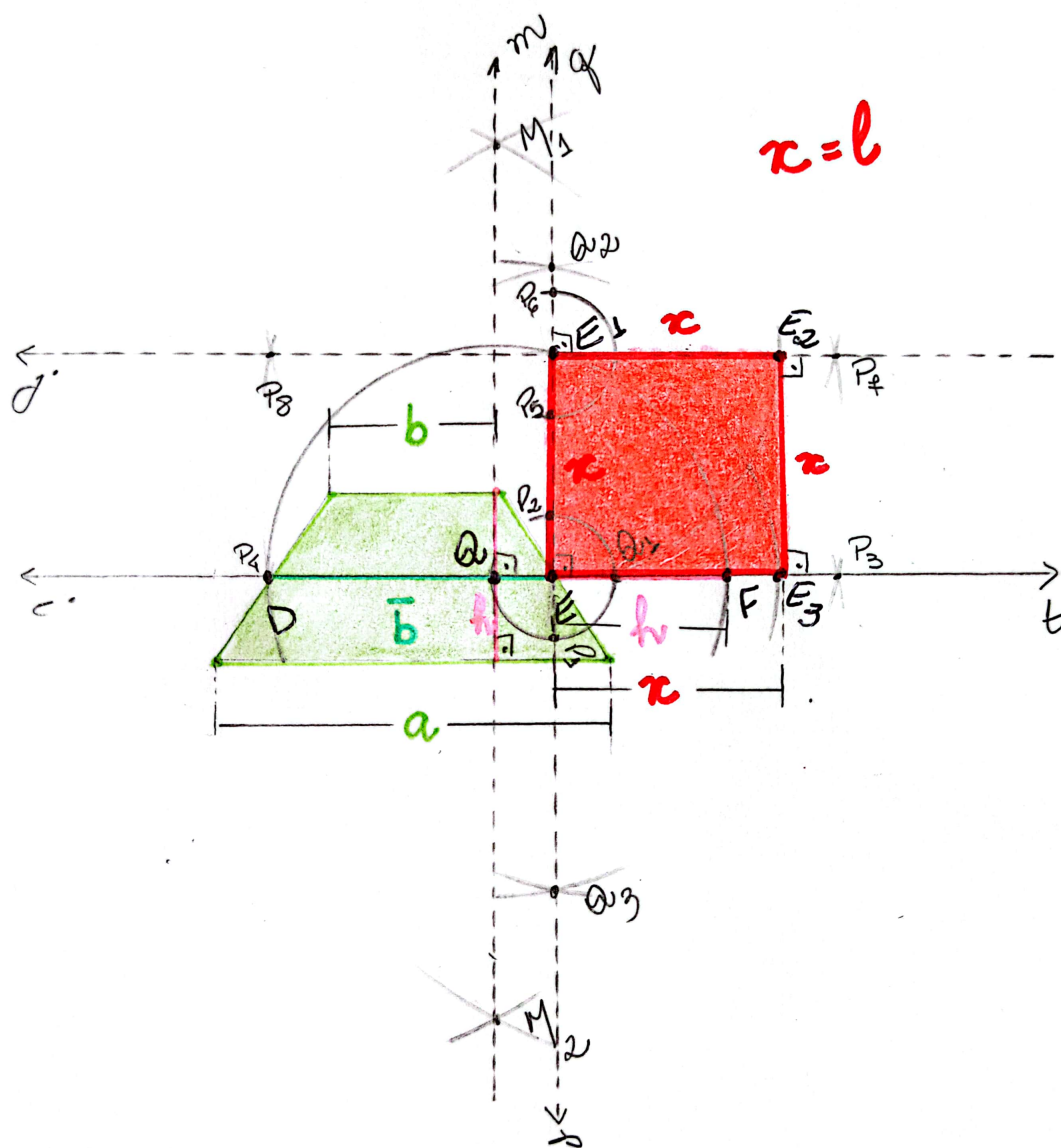


Figura 104 – Construção completa do quadrado de área equivalente ao trapézio dado.

## 8.3 Construção de um quadrado equivalente a dois quadrados dados

**Exercício 3.** Construir um quadrado cuja área seja a soma das áreas de dois outros quadrados dados.

**Resolução 3.** Dados os quadrados  $A_1B_1C_1D_1$  de lados  $\ell_1$  e  $A_2B_2C_2D_2$  de lados  $\ell_2$ , vamos construir um quadrado  $ABCD$  de lados  $\ell$  de tal maneira que a soma das áreas dos quadrados de lados  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , seja igual à área do quadrado de lados  $\ell$ , ou seja,  $(A_1B_1C_1D_1) + (A_2B_2C_2D_2) = (ABCD)$  o que implica que  $\ell_1^2 + \ell_2^2 = \ell^2$ .

**Construção 3:** Dados os quadrados  $A_1B_1C_1D_1$  de lado  $\ell_1$  e  $A_2B_2C_2D_2$  de lados  $\ell_2$ , ilustrados nas figuras abaixo:

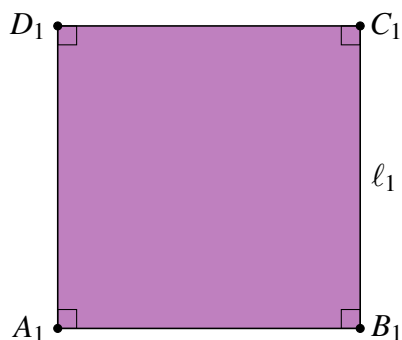


Figura 105 – Construção:  
Quadrado dado de lados  $\ell_1$ .

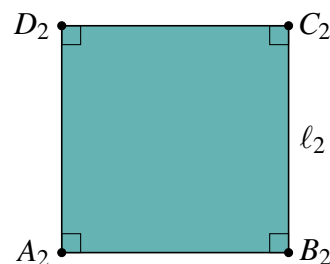


Figura 106 – Construção:  
Quadrado dado de lados  $\ell_2$ .

**Passo 3.1:** Considere  $r$  uma reta suporte. Marque o ponto  $A_1$ , e transporte o comprimento  $A_1B_1 = \ell_1$  obtido na [Figura 105](#), ponta seca em  $A_1$  e marque, em  $r$ ,  $B_1$ . Destaque  $A_1B_1$ ;

**Passo 3.2:** Construção da reta suporte  $s$ , perpendicular a  $r$  passando por  $A_1$ . Ponta seca em  $A_1$ , qualquer abertura do compasso, traçar os pontos auxiliares  $R_1$  e  $R_2$ , marcar-los em  $r$ ;

**Passo 3.3:** Ponta seca em  $R_1$ , abertura do compasso maior  $R_1A_1$ , e trace acima e abaixo de  $r$ . Análogo para a ponta seca em  $B_1$ . Marque os pontos auxiliares  $S_1$  e  $S_2$ . Trace a reta  $s$  que passa por  $S_1$ ,  $A_1$  e  $S_2$ , temos  $s$  perpendicular  $r$ ;

**Passo 3.4:** Construção da reta suporte  $t$  perpendicular a  $r$  passando por  $B_1$ . Ponta seca em  $B_1$ , abertura do compasso até  $R_2$ , e traçar em  $r$  o ponto auxiliar  $R_3$  e marcar-lo;

**Passo 3.5:** Ponta seca em  $R_2$ , abertura do compasso maior  $R_2B_1$ , e trace acima e abaixo de  $r$ . Análogo para a ponta seca em  $R_3$ . Marque os pontos auxiliares  $T_1$  e  $T_2$ . Trace a reta  $t$  que passa

por  $T_1$ ,  $B_1$  e  $T_2$ , temos  $t$  perpendicular  $r$ ;

**Passo 3.6:** Construção da reta suporte  $u$  perpendicular a  $r$ , passando por  $D_2$ . Ponta seca em  $D_2$ , abertura do compasso até  $R_1$ , e traçar em  $r$  o ponto auxiliar  $R_4$  e marcar-lo em  $r$ ;

**Passo 3.7:** Ponta seca em  $R_1$ , abertura do compasso maior  $R_1D_2$ , e trace acima e abaixo de  $r$ . Análogo para a ponta seca em  $R_4$ . Marque os pontos auxiliares  $U_1$  e  $U_2$ . Trace a reta  $u$  que passa por  $U_1$ ,  $D_2$  e  $U_2$ , temos  $u$  perpendicular  $r$ ;

**Passo 3.8:** Construção do quadrado  $A_1B_1C_1D_1$  Ponta seca em  $A_1$ , abertura do compasso até  $B_1$  e transporte  $A_1B_1 = \ell_1$  para a reta  $s$ , abaixo de  $r$  e marque  $D_1$ , analogamente, com a ponta seca em  $B_1$ , marque em  $t$  o ponto  $C_1$ . Destaque  $A_1D_1 = B_1C_1 = D_1C_1 = \ell_1$ ;

**Passo 3.9:** Construção do quadrado  $A_2B_2C_2D_2$  Ponta seca em  $A_1$ , abertura do compasso até  $D_2$  e transporte  $A_1D_2 = \ell_2$  para a reta  $s$ , acima de  $r$  e marque  $B_2$ , analogamente, com a ponta seca em  $D_2$ , marque em  $u$ , o ponto  $C_2$ . Tome  $A_1 = A_2$  e destaque  $A_2B_2 = B_2C_2 = D_2C_2 = \ell_2$ ;

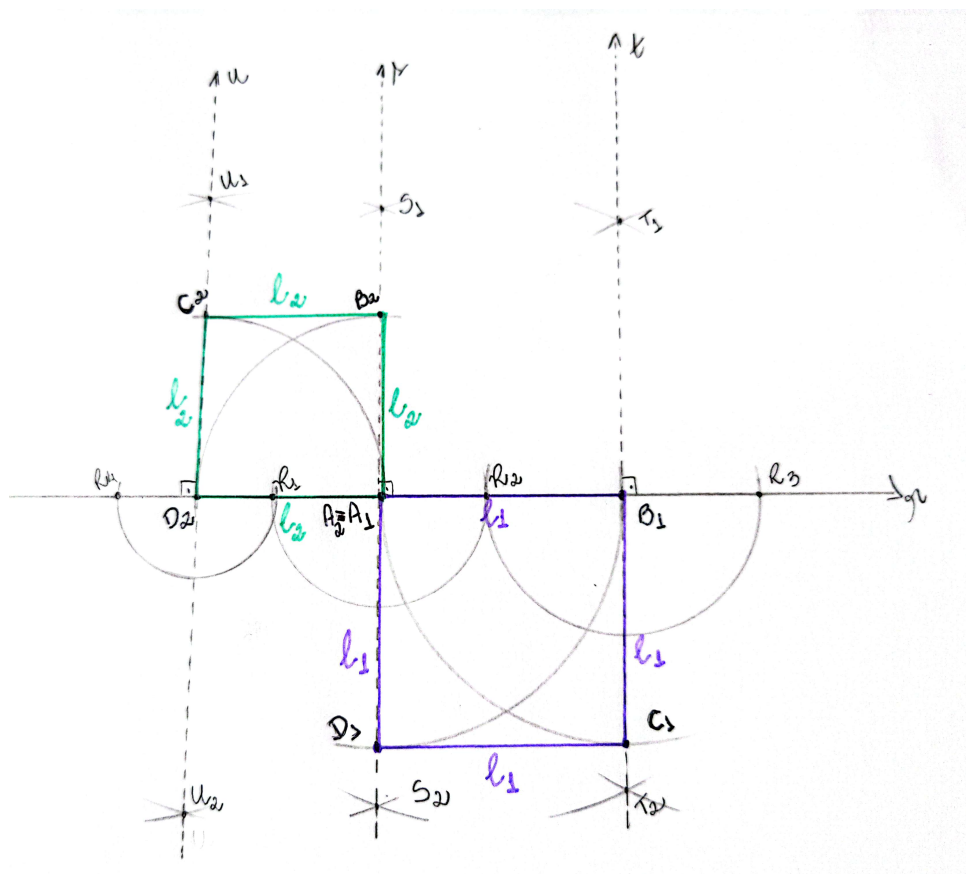


Figura 107 – Construção dos quadrados de lados  $\ell_1$  e  $\ell_2$ .

Pelo Teorema de Pitágoras, temos  $A_1B_1$  é perpendicular a  $A_2B_2$  onde  $A_1 = A_2$ , logo  $A_1B_1 = \ell_1$  e  $A_2B_2 = \ell_2$  são os catetos de um triângulo retângulo, assim temos  $B_1B_2$  é a hipotenusa desse triângulo retângulo. Seja  $B_1B_2 = \ell$  e assim teremos  $\ell_1^2 + \ell_2^2 = \ell^2$ .

Construção do quadrado  $ABCD$  de lados  $\ell$ , concluindo que

$$(A_1B_1C_1D_1) + (A_2B_2C_2D_2) = (ABCD).$$

**Passo 3.10:** Trace a reta suporte  $v$  passando por  $B_1$  e  $B_2$ . Destaque a hipotenusa  $B_1B_2$  do triângulo retângulo em  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$  e  $B_1B_2 = \ell$ . Tome  $B_1 = C$  e  $B_2 = B$ ;

**Passo 3.11:** Utilize a sequência de passos para construir o quadrado  $ABCD$ , assim como foi utilizada nos outros dois quadrados,  $A_1B_1C_1D_1$  e  $A_2B_2C_2D_2$ ;

**Passo 3.11:** Construa mais duas retas suportes perpendiculares a  $v$ , as retas  $i$  passando por  $B_2 = B$  e reta  $j$  passando por  $B_1 = C$ , seguindo os passos para a construção análoga de  $s$ ,  $t$  e  $u$ ;

**Passo 3.12:** Marque  $D$  e trace  $CD$  em  $j$ , marque  $A$  e trace  $AB$  em  $i$  e, conseqüentemente, trace  $AD$  onde  $AB = BC = CD = DA = \ell$  e  $(ABCD) = \ell^2$ .

Construindo assim, a área de  $ABCD$  equivalente a soma das áreas de  $A_1B_1C_1D_1$  e  $A_2B_2C_2D_2$ .

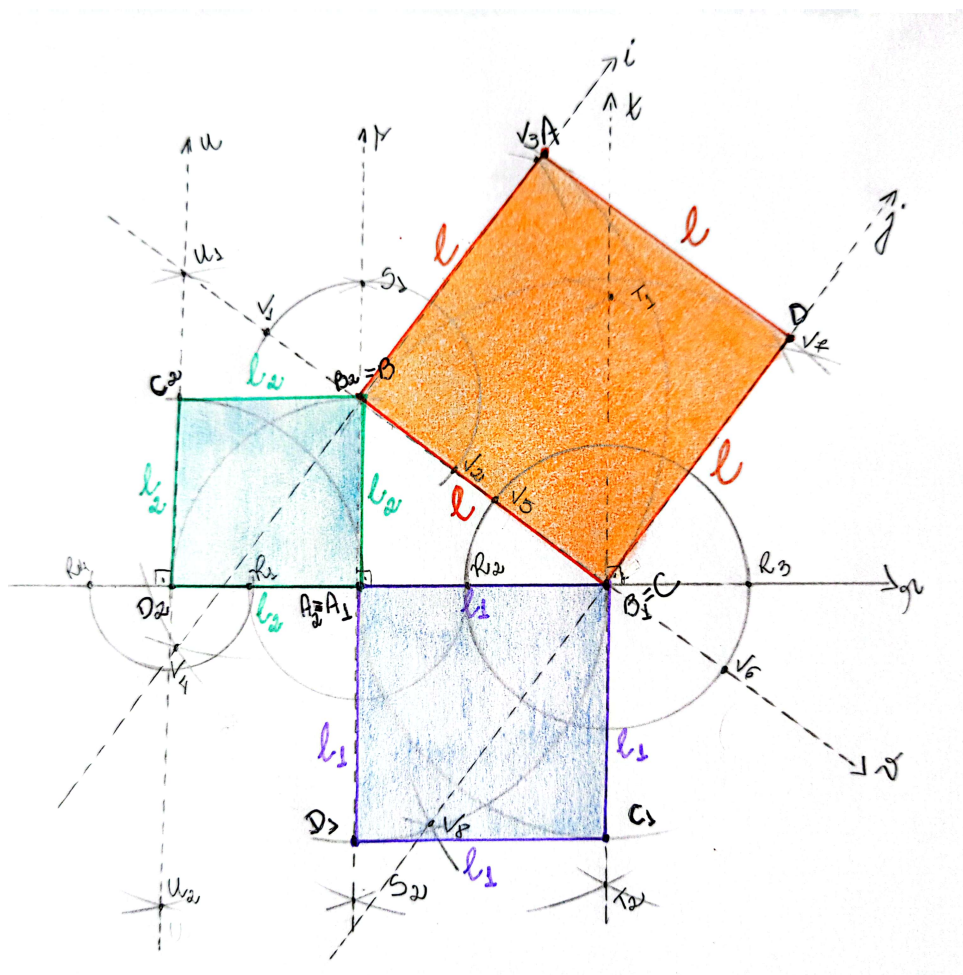


Figura 108 – Construção:

Do quadrado de lados  $l$  de área equivalente a soma das áreas dos quadrados de lados  $l_1$  e  $l_2$ .

## 8.4 Construção de um triângulo equilátero equivalente a dois triângulos equiláteros dados

**Exercício 4.** Construir um triângulo equilátero cuja área seja a diferença das áreas de dois outros triângulos equiláteros dados.

**Resolução 4.** Considere o triângulo equilátero  $ABC$  de lados  $\ell$  a ser construído. Sua área, por definição é  $(ABC) = \frac{\ell \cdot h}{2}$ , onde  $h$  que é a altura de um triângulo equilátero, e é dada por  $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ .

Substituindo  $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$  em  $(ABC) = \frac{\ell \cdot h}{2}$ , temos  $(ABC) = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}$ , ou seja,

$$(ABC) = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}, \text{ logo } (ABC) = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Considerando os outros dois triângulos equiláteros  $A_1B_1C_1$  e  $A_2B_2C_2$  de lados  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , respectivamente, obtemos, de forma análoga, que  $(A_1B_1C_1) = \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$  e  $(A_2B_2C_2) = \frac{\ell_2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ .

Queremos um triângulo equilátero de lado  $\ell$ , cuja área seja a diferença entre as áreas dos triângulos equiláteros de lados  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Sem perda de generalidade, consideremos  $\ell_1$  maior que  $\ell_2$ , assim temos:  $(ABC) = (A_1B_1C_1) - (A_2B_2C_2)$ , ou seja,  $\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\ell_1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\ell_2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ .

Colocando o termo comum  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  em evidência  $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ell^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\ell_1^2 - \ell_2^2)$  e dividindo ambos os lados da igualdade por  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , obtendo  $\ell^2 = \ell_1^2 - \ell_2^2$ , logo  $\ell^2 + \ell_2^2 = \ell_1^2$ .

Assim temos, pelo Teorema de Pitágoras, que  $\ell$  é um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa  $\ell_1$ , portanto:  $\ell_1^2 = \ell_2^2 + \ell^2$ .

**Construção 4:** Considere os triângulos equiláteros  $A_1B_1C_1$  de lados  $\ell_1$  e  $A_2B_2C_2$  de lados  $\ell_2$ , dados, como ilustrados na figura abaixo:

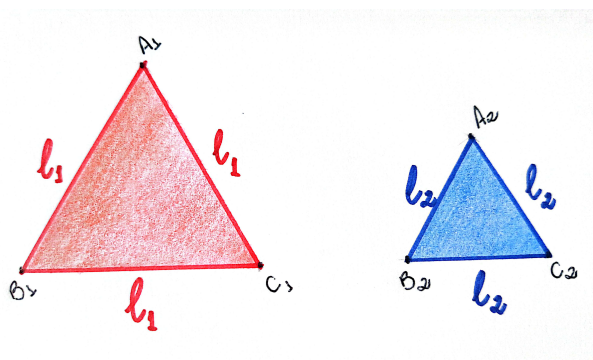


Figura 109 – Construção:  
Triângulos equiláteros dados de lados  $\ell_1$  e  $\ell_2$ .

**Passo 4.1:** Considere  $r$  a reta suporte e sobre ela transporte o segmento  $A_1B_1 = \ell_1$ . Em  $r$ , marque

o ponto  $D$ , ponta seca do compasso em  $A_1$  e abertura até  $B_1$  na Figura 109, e transporte para a figura abaixo a partir de  $D$ ;

**Passo 4.2:** Ponta seca em  $D$ , abertura  $A_1B_1 = \ell_1$  e trace sobre  $r$ , marcando o ponto  $B$ . Temos  $DB = \ell_1$ ;

**Passo 4.3:** Construção de  $M$ , ponto médio de  $DB$ , onde  $m$  é a reta mediatriz passando por  $M_1$  e  $M_2$ , pontos auxiliares. Ponta seca em  $B$ , abertura maior que a metade de  $DB$  e trace acima e abaixo de  $DB$ . Análogo para ponta seca em  $B$  com a mesma abertura e marque  $M_1$  e  $M_2$ ;

**Passo 4.4:** Trace  $m$ , a mediatriz passando por  $M_1$  e  $M_2$ . Marque o ponto  $M$  que é a intersecção de  $m$  e  $r$ , ponto médio de  $DB$ ;

**Passo 4.5:** Ponta seca em  $M$ , abertura até  $D$  e trace a semicircunferência  $\widehat{DB}$ ;

**Passo 4.6:** Na Figura 109, ponta seca em  $A_2$ , abertura do compasso até  $B_2$  e transporte o segmento  $A_2B_2 = \ell_2$  para  $r$  com ponta seca em  $D$ , e trace  $D_1$  à esquerda de  $D$ . Destaque  $DD_1 = \ell_2$ ;

**Passo 4.7:** Ponta seca em  $D$ , abertura até  $D_1$ ,  $DD_1 = \ell_2$  e trace a semicircunferência  $\widehat{D_1D_2}$ , centrada em  $D$  e marque  $D_2$ ;

**Passo 4.8:** Marque o ponto  $C$ , onde  $C$  é a intersecção das semicircunferências  $\widehat{DB}$  e  $\widehat{D_1D_2}$ ;

**Passo 4.9:** Destaque  $DC = \ell_2$  e  $BC = \ell$ , os catetos do triângulo retângulo e  $DB = \ell_1$  é a hipotenusa do triângulo  $DBC$ . Assim temos o triângulo  $DBC$ , retângulo em  $C$ , de cateto  $\ell_2$  e hipotenusa  $\ell_1$  conhecidos, e  $\ell$  o cateto construído;

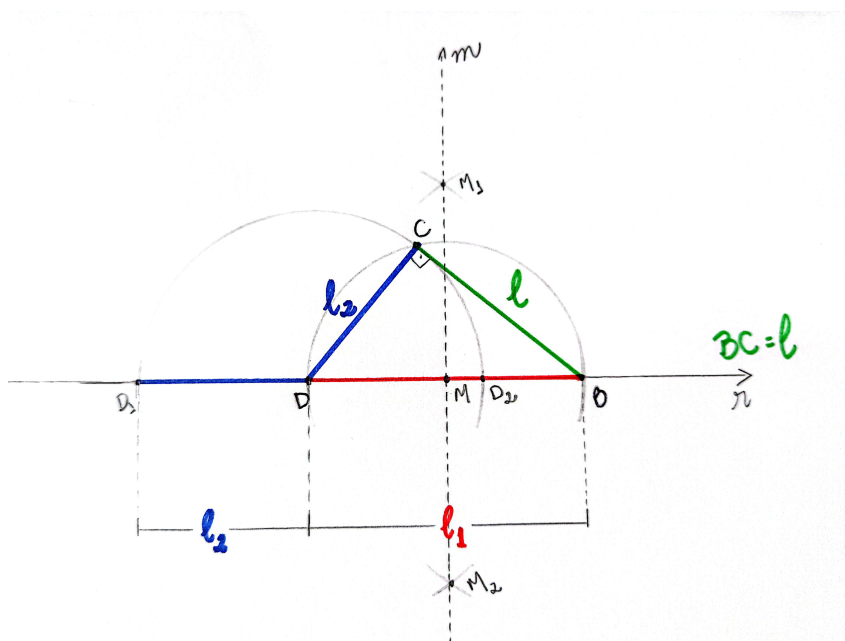


Figura 110 – Construção:  
Triângulo retângulo  $DCB$  de hipotenusa  $\ell_1$  e catetos  $\ell_2$  e  $\ell$ .

**Passo 4.10:** Construção dos triângulos equiláteros  $A_1B_1C_1$  de lados  $\ell_1$ ,  $A_2B_2C_2$  de lados  $\ell_2$  e  $ABC$  de lados  $\ell$ . Ponta seca em  $D$ , abertura até  $B$  e trace abaixo de  $r$ , análogo para ponta seca em  $B$ . Marque  $A_1$  e tome  $B = B_1$  e  $D = B_2$ . Assim, temos o triângulo  $A_1B_1C_1$  de lados  $\ell_1$ ;

**Passo 4.11:** Ponta seca em  $C$ , abertura até  $D$  e trace acima de  $DC$ . Análogo para ponta seca em  $C$ . Marque  $A_2$  e tome  $D = B_2$  e  $C = C_2$ . Assim, temos o triângulo  $A_2B_2C_2$  de lados  $\ell_2$ ;

**Passo 4.12:** Ponta seca em  $C$ , abertura até  $B$  e trace acima de  $BC$ . Análogo para ponta seca em  $C$ . Marque  $A$ , assim temos o triângulo  $ABC$  de lados  $\ell$ ;

**Passo 4.13:** Destaque o triângulo equilátero  $ABC$  de lados  $\ell$ , cuja área é a diferença entre as áreas dos triângulos de lados  $\ell_1$  e  $\ell_2$ .

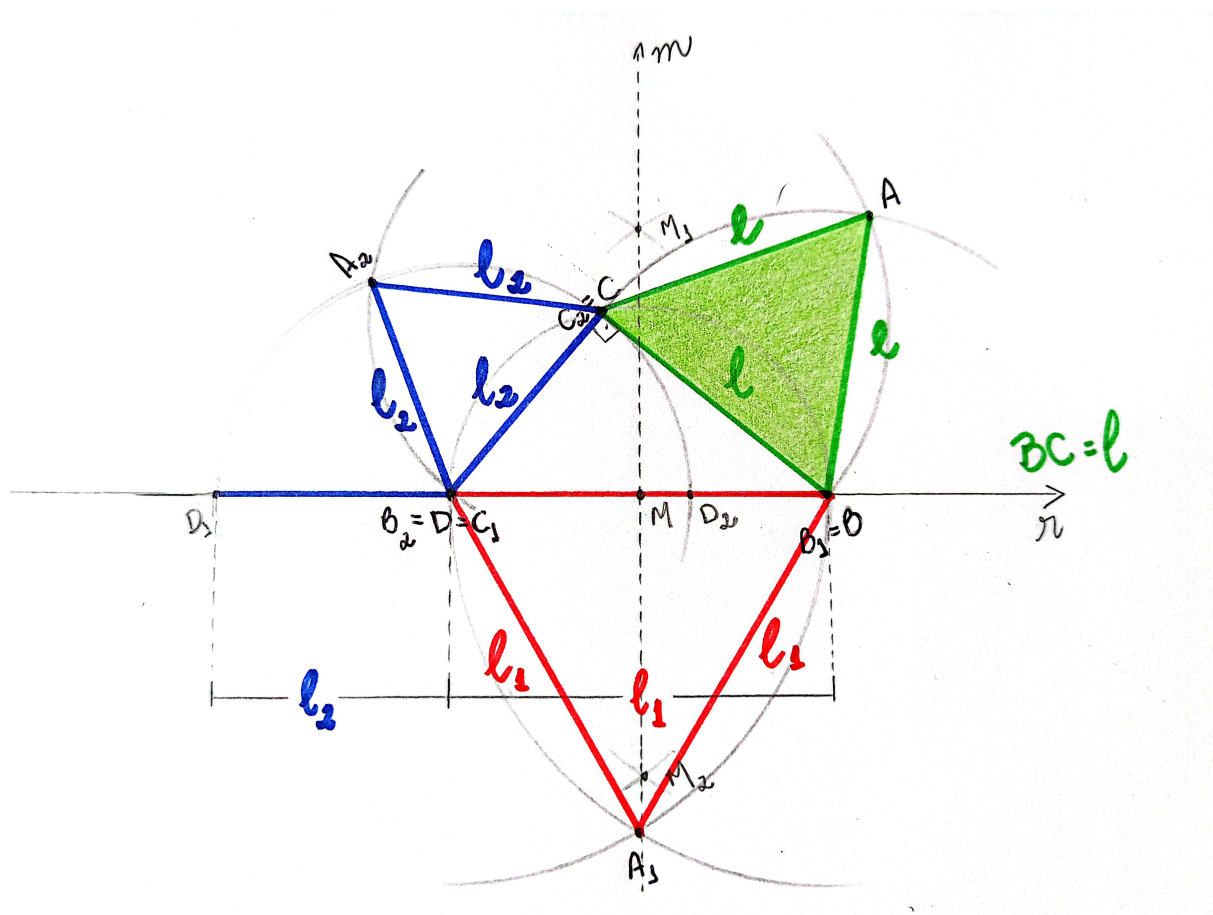


Figura 111 – Construção:

Triângulo equilátero de lados  $l$  de área equivalente à diferença das áreas dos triângulos de lados  $l_1$  e  $l_2$ .

## 8.5 Construção de um triângulo equilátero equivalente a um triângulo dado

**Exercício 5.** Construir um triângulo equilátero equivalente a um triângulo dado.

**Resolução 5.** Seja o triângulo  $ABC$  dado e o triângulo  $DEF$  o triângulo equilátero desejado.

Considere  $(ABC)$  e  $(DEF)$  as áreas dos triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , respectivamente.

Seja  $a$  o lado  $BC$  do triângulo dado e  $h_a$  a sua altura relativa a esse lado.

Como o triângulo  $DEF$  é equilátero, seus lados são todos iguais, vamos denotar por  $\ell$  o tamanho desses lados.

Pela definição do cálculo de áreas de triângulos, temos  $(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2}$  e  $(DEF) = \frac{\ell \cdot h_\ell}{2}$ .

Sabemos que a altura de um triângulo equilátero é dada por  $h_\ell = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$ , logo temos a área do triângulo  $DEF$  é  $(DEF) = \frac{\ell \cdot \ell \cdot \sqrt{3}}{2}$ , ou seja,  $(DEF) = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$ , logo  $(DEF) = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ .

Como a área do triângulo  $ABC$  é equivalente a área do triângulo  $DEF$ , temos  $(ABC) = (DEF)$ , então  $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ .

Multiplicando, ambos os lados da igualdade  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ , temos  $\frac{4 \cdot a \cdot h_a}{2\sqrt{3}} = \ell^2$  de onde obtemos  $\ell^2 = \frac{4 \cdot a \cdot h_a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3}$ , simplificando e reescrevendo a expressão, temos finalmente:  $\ell^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot h_a$ .

**Construção 5:** Para construir o triângulo equilátero  $DEF$  de lados  $\ell = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot h_a}$ , podemos interpretar essa igualdade com o cálculo da média geométrica entre  $x_1 = \frac{4 \cdot h_a}{3}$  e  $x_2 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ .

Construção de  $x_1 = \frac{4 \cdot h_a}{3}$  a partir do triângulo  $ABC$  de base  $a$  e altura  $h_a$ ;

**Passo 5.1:** Construção da altura  $h_a$  do triângulo  $ABC$ . Considere a reta suporte  $r$ , nela marque o ponto  $B$ , a uma distância qualquer de  $B$ , marque o ponto  $C$ , assim definimos  $BC = a$ , a base do triângulo  $ABC$ ;

**Passo 5.2:** Ponta seca em  $B$ , abertura do compasso menor que a metade de  $BC$  e marque em  $BC = a$  o ponto  $H_A$ ;

**Passo 5.3:** Ponta seca em  $H$ , qualquer abertura, trace a semicircunferência centrada em  $H$  e marque os pontos auxiliares  $H_1$  e  $H_2$  em  $BC$ ;

**Passo 5.4:** Ponta seca em  $H_1$ , qualquer abertura maior que  $H_1H$  e trace acima e abaixo de  $r$ . Ponta seca em  $H_2$ , a mesma abertura e trace acima e abaixo de  $r$ . Marque os pontos auxiliares  $H_3$  e  $H_4$ ;

**Passo 5.5:** Trace a reta suporte  $s$  passando por  $H_3$ ,  $H_A$  e  $H_4$ , perpendicular a  $BC = a$  em  $H_A$ . Marque o ponto  $A$  do triângulo  $ABC$  em algum lugar da reta suporte  $s$ , definindo assim  $AH = h_a$  a altura do triângulo  $ABC$  em relação a base  $BC = a$ ;

**Passo 5.6:** Complete o triângulo  $ABC$  com os segmentos  $AB$  e  $AC$ , construindo o triângulo  $ABC$  com a altura  $h_a$ ;

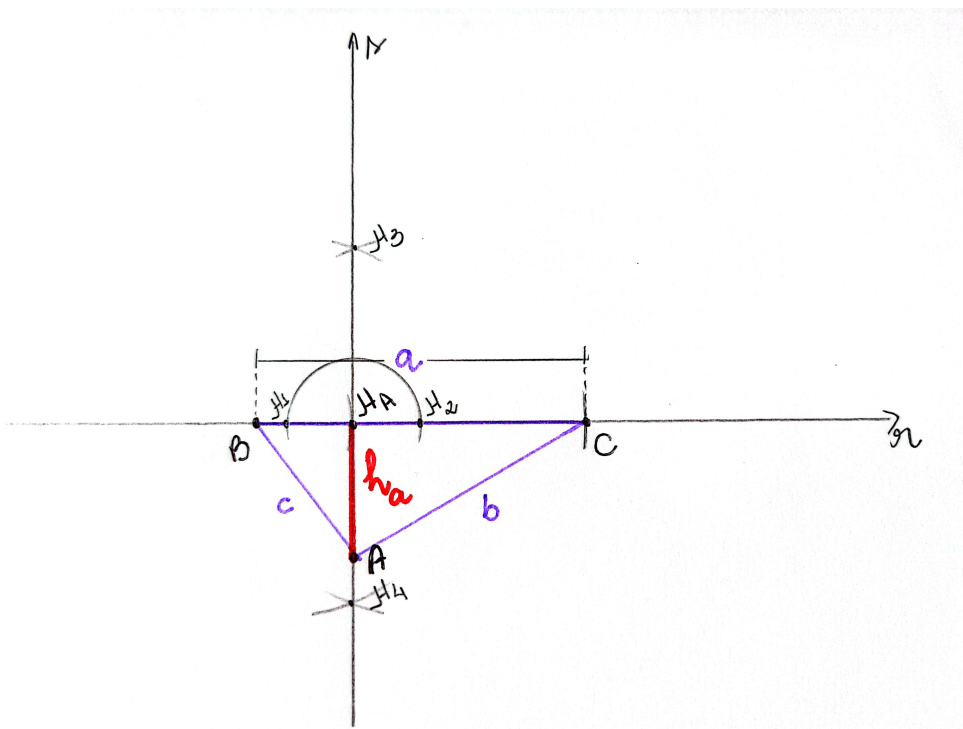


Figura 112 – Construção:  
Triângulo  $ABC$  de altura  $h_a$ .

Para melhor visualização, a construção de  $x_1 = \frac{3}{4}h_a$  será transportada e feita na parte superior da reta  $r$ .

**Passo 5.7:** Ponta seca em  $H_A$ , abertura do compasso até  $A$ , marque  $A'$  em  $s$ , transportando  $h_a = A'H_A$ ;

Usaremos a divisão de segmentos e o Teorema de Tales para obter  $\frac{3}{4} \cdot h_a = x_1$  e a construção de uma reta paralela passando por um ponto.

**Passo 5.8:** Trace uma reta suporte  $t$ , passando por  $H_A$  e formando um ângulo  $\alpha$  com a reta  $s$  em  $H_A$ ;

**Passo 5.9:** Abertura qualquer do compasso, ponta seca em  $H_A$  e trace à esquerda de  $s$  três pontos formando segmentos consecutivos de mesmo comprimento. Marque o ponto  $P_1$  em  $t$ , ponta seca em  $P_1$ , mesma abertura do compasso e, consecutivamente trace e marque  $P_2$ , e da mesma maneira trace e marque  $P_3$ , assim temos  $H_AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3$  tais segmentos de mesmo comprimento;

**Passo 5.10:** Trace uma reta  $t_2$  que passa por  $P_3A'$ . Destaque o segmento  $P_3A'$ ;

**Passo 5.11:** Construção da reta  $t_2$  paralela a  $t_1$  passando por  $P_2$  e obtendo o segmento  $P_2A''$ , onde  $A''$  é a intersecção entre  $t_2$  e  $s$ . Ponta seca em  $P_2$ , abertura do compasso até  $P_3$ , e a partir de  $P_3$  marque o ponto  $Q$  em  $t_1$  tal que esses pontos sejam a intersecção dessa semicircunferência com  $t_1$ ;

**Passo 5.12:** Mesma abertura do compasso, ponta seca em  $P_3$  e trace acima de  $t_1$ . Analogamente para a ponta seca em  $Q$ . Destaque o ponto  $P'_2$ ;

**Passo 5.13:** Trace a reta  $q$  passando por  $P'_2$  e  $P_2$  que é perpendicular a  $t_1$  no ponto  $Q_1$ ;

**Passo 5.14:** Ponta seca em  $P_2$ , abertura do compasso até  $Q_1$  e marque  $Q_2$  em  $q$ , abaixo de  $P_2$ . Ponta seca em  $Q_1$ , abertura do compasso maior que  $Q_1P_2$  e trace à esquerda e à direita de  $q$ . Mesma abertura, ponta seca em  $Q_2$  e trace à esquerda da reta  $q$ . Marque o ponto  $P''_2$  e  $P'''_2$ ;

**Passo 5.15:** Trace a reta  $t_2$  que passa por  $P''_2$ ,  $P_2$  e  $P'''_2$ ,  $t_2$  é perpendicular a  $q$  e paralela a  $t_1$ . Marque  $A''$ , que é a intersecção de  $t_2$  e  $s$ , destaque  $A'A'' = \frac{1}{3}h_a$ ;

**Passo 5.16:** Ponta seca em  $A'$ , abertura do compasso até  $A''$  e transporte acima de  $A'$  em  $s$ , e marque o ponto  $H$ . Destaque  $HA' = \frac{1}{3}h_a$ . Assim, temos  $HH_A = \frac{4}{3} \cdot h_a = x_1$ ;

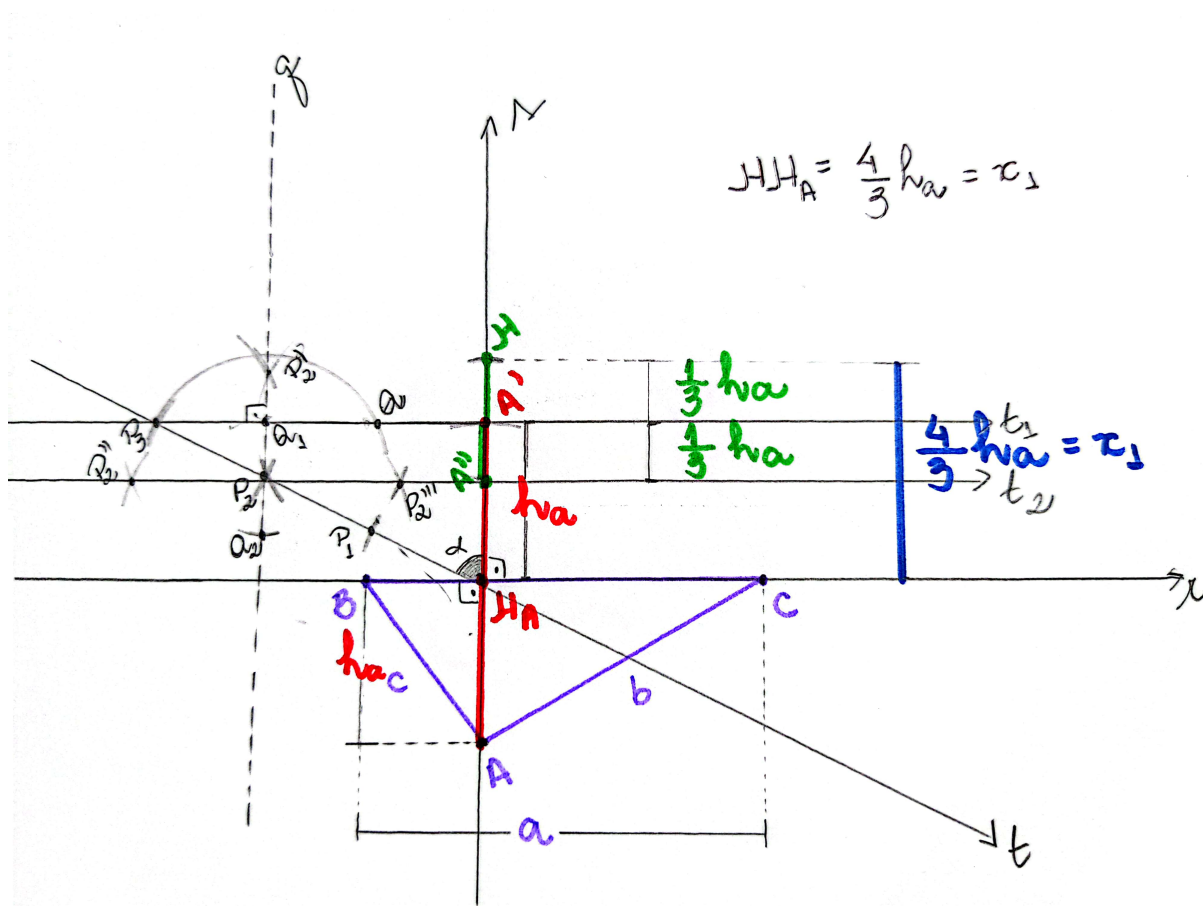


Figura 113 – Construção:

$$HH_A = \frac{4}{3} \cdot h_a = x_1.$$

**Passo 5.17:** Construção de  $x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  a partir do triângulo  $ABC$  de base  $a$  e altura  $h_a$ . Considere a construção realizada até a [Figura 112](#). A partir dela, a construção de um triângulo equilátero  $A_1BC$  de lados  $A_1B = BC = A_1C = a$ , assim temos  $h_{a_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  pelo Teorema de Pitágoras;

**Passo 5.18:** Ponta seca em  $B$ , abertura até  $C$ , trace acima e abaixo de  $BC$ . Mesma abertura do compasso, ponta seca em  $C$ , e trace acima e abaixo de  $BC$ . Marque os pontos auxiliares  $A_1$  e  $A_2$ ;

**Passo 5.20:** Trace os lados  $A_1B$  e  $A_1C$ , onde  $A_1B = A_1C = BC = a$ , formando o triângulo equilátero  $A_1BC$  de lados  $a$ ;

**Passo 5.21:** Trace a reta  $m$  passando por  $A_1$  e  $A_2$  e marque o ponto  $H_{A_1}$ , ponto de intersecção entre  $m$  e  $BC$ ;

**Passo 5.22:** Destaque o segmento  $HA_1 = h_{a_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = x_2$ , a altura do triângulo equilátero de lados  $a$ , o triângulo  $A_1BC$ ;

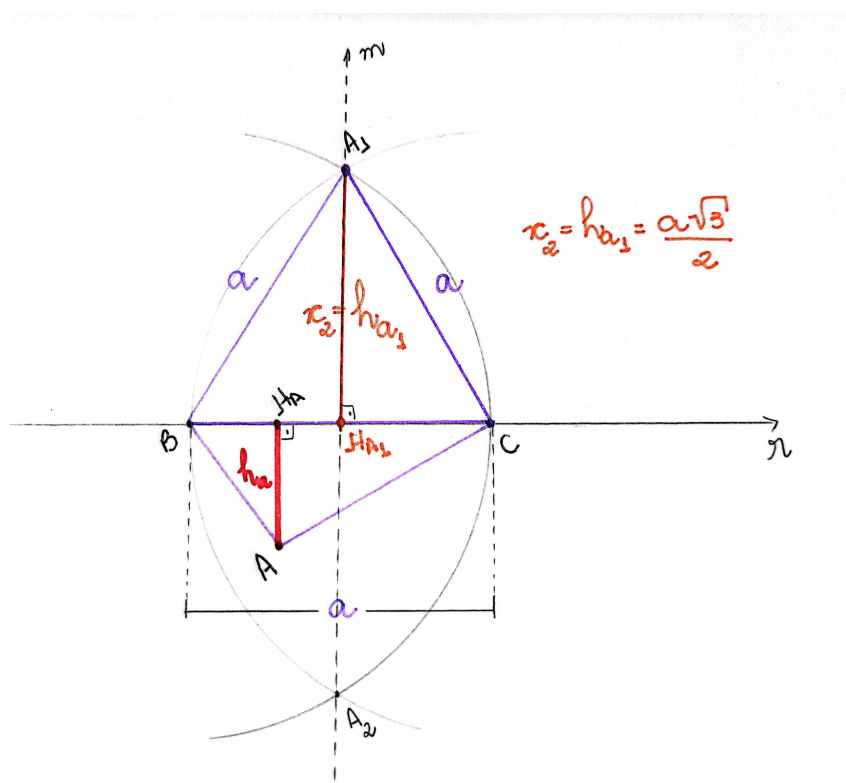


Figura 114 – Construção:

$$HA_1 = h_{a_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = x_2.$$

**Passo 7.23:** Construção da média geométrica, onde  $x_1 = \frac{4h_a}{3}$ ,  $x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  e tomaremos  $x = \ell$ , lado do triângulo equilátero  $DEF$  de área equivalente ao triângulo dado  $ABC$ ;

Os passos a seguir, estão de forma resumida, pois a construção da média geométrica completa pelo método da soma, encontra-se na [Seção 7.1](#)



## 8.6 Construção de um triângulo, conhecendo dois de seus lados e equivalente a um triângulo dado

**Exercício 6.** Dado o triângulo  $ABC$ , construir o triângulo  $A'B'C'$  equivalente a  $ABC$  conhecendo dois lados de  $A'B'C'$ .

**Resolução 6.** Considere os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , respectivamente de áreas  $(ABC)$  e  $(A'B'C')$ .

Seja  $a$  um lado do triângulo  $ABC$  e  $h_a$  a altura relativa à base  $BC = a$ .

Seja  $b'$  e  $c'$  os lados conhecidos do triângulo  $A'B'C'$  onde  $A'C' = b'$  e  $A'B' = c'$  e  $\hat{A}'$  o ângulo formado pelos lados  $b'$  e  $c'$  conhecidos.

Assim, temos  $(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2}$  e  $(A'B'C') = \frac{b' \cdot c' \cdot \sin(\hat{A}')}{2}$ , pela Lei dos Senos.

Como  $(ABC) = (A'B'C')$ , pois são equivalentes, então  $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b' \cdot c' \cdot \sin(\hat{A}')}{2}$ .

Multiplicando os dois lados da igualdade por 2, obtemos  $a \cdot h_a = b' \cdot c' \cdot \sin(\hat{A}')$ .

Sabemos que  $b'$  e  $c'$  são diferentes de zero, logo podemos dividir ambos os lados da expressão por  $b' \cdot c'$ , o que implica em  $\frac{a \cdot h_a}{b' \cdot c'} = \sin(\hat{A}')$ .

**Construção 6:** Observe que o  $\sin(\hat{A}') = \frac{ah_a}{b'c'}$ , e por definição,  $\sin(\hat{A}')$  é o cateto oposto ao ângulo dividido pela hipotenusa. Assim, do triângulo  $ABC$  de altura  $h_a$ , temos  $\sin(\hat{A}') = \frac{h_a}{x}$ , onde  $x$  é a quarta proporcional dos lados conhecidos  $a$ ,  $b'$  e  $c'$ .

Logo temos:  $\frac{ah_a}{b'c'} = \frac{h_a}{x}$ .

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\frac{c'}{h_a}$  e temos  $\frac{a}{b'} = \frac{c'}{x}$ .

Construção da quarta proporcional  $x$  de  $\frac{a}{b'} = \frac{c'}{x}$ .

Considere o triângulo  $ABC$  e a altura  $h_a$ , ilustrados na figura a seguir:

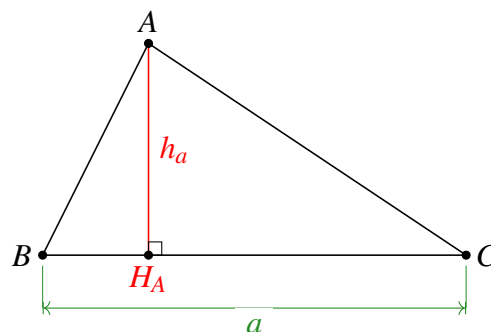


Figura 116 – Construção:  
Triângulo  $ABC$  de altura  $h_a$ .

Considere os lados  $b'$  e  $c'$  conhecidos do triângulo  $A'B'C'$ :

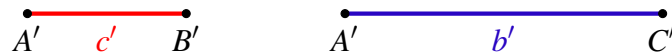


Figura 117 – Construção:  
Dados os segmentos  $c' = A'B'$  e  $b' = A'C'$ .

**Passo 6.1:** Considere  $r$  uma reta suporte e  $s$  outra reta suporte, neste caso, usaremos o ângulo reto na intersecção entre elas. Marque  $O$  em  $r$  e com os pontos auxiliares  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  e  $O_4$  construímos  $s$  perpendicular a  $r$  em  $O$ ;

**Passo 6.2:** Transporte dos segmentos  $ae$   $c'$  dados para as retas suporte  $s$ . Ponta seca em  $B$ , abertura do compasso até  $C$  na Figura 116, transporte  $a$  a partir do ponto  $O$  e marque  $C$  em  $s$ , tal que  $OC = BC = a$ , destaque  $a$ ;

**Passo 6.3:** Ponta seca em  $A'$  e abertura até  $B'$  na Figura 117 e transporte  $c'$  para o ponto  $C$  em  $s$  e marque  $B'$  em  $s$ , tal que  $A'B' = CB' = c'$ , destaque  $c'$ ;

**Passo 6.4:** Transporte dos segmentos  $b'$  dado para as retas suporte  $r$ . Ponta seca em  $A'$  e abertura até  $C'$  na Figura 117 e transporte  $b'$  para o ponto  $O$  e marque  $C'$  em  $r$ , onde  $A'C' = OC' = b'$ , destaque  $b'$ ;

**Passo 6.5:** Trace a reta  $t_1$  passando pelos pontos  $C$  em  $s$  e  $C'$  em  $r$ ;

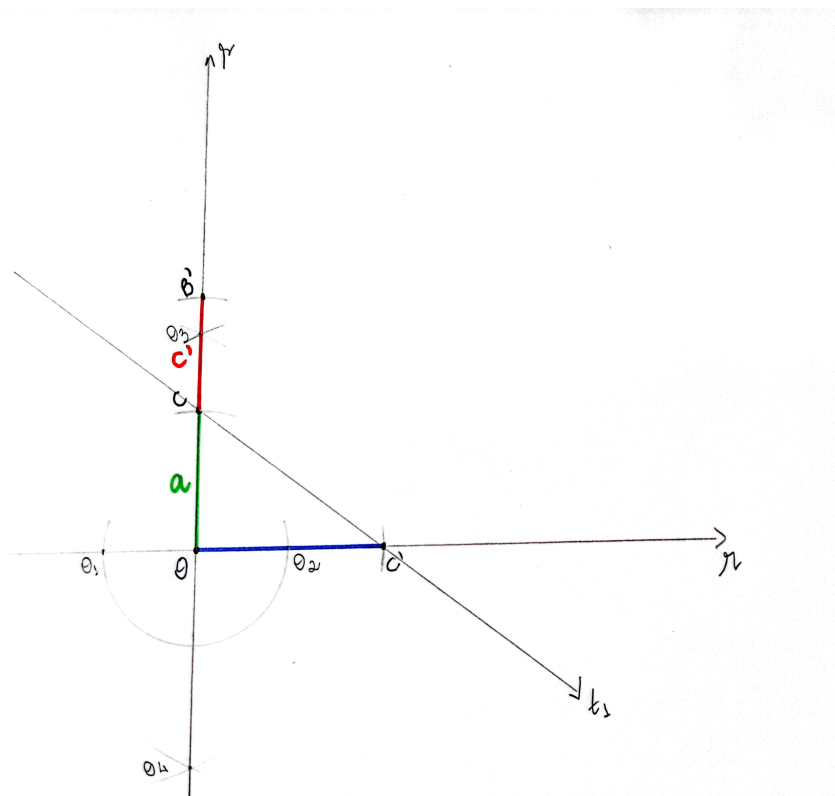


Figura 118 – Construção:  
Reta auxiliar  $t_1$  passando por  $C$  e  $C'$ .



na figura abaixo. Ponta seca em  $A$  e abertura do compasso até  $H_A$  e transporte para ponta seca em  $C'$  e marque  $H_A$  em  $\widehat{C'B'_4}$ ;

**Passo 6.15:** Trace  $C'H_A = h_a$  e destaque  $h_a$ ;

**Passo 6.16:** Trace uma reta suporte  $u$  passando por  $B'_4$  e  $H_A$ , sendo que  $u$  e  $C'H_A = h_a$  são perpendiculares em  $H_A$ ;

**Passo 6.17:** O ângulo  $\widehat{C'B'_4H_A}$  é o ângulo  $\widehat{A'}$ . Destaque  $\widehat{A'}$ ;

**Passo 6.18:** Transporte  $A'C' = b'$  da [Figura 117](#) para a reta suporte  $u$ . Ponta seca em  $A'$  e abertura até  $C'$  e transporte para a figura abaixo: Ponta seca em  $B'_4$  e marque  $C' = C'_1$  em  $u$ . Destaque  $B'_4C'_1 = b'$ ;

**Passo 6.19:** Transporte de  $A'B' = c'$  da [Figura 117](#) para a reta suporte  $r$ . Ponta seca em  $A'$  e abertura até  $B'$  e transporte  $c'$  com ponta seca em  $B'_4$  e marque  $B' = B'_5$  em  $r$  á esquerda de  $B'_4$ . Destaque  $B'_4B'_5 = c'$  em  $r$ ;

**Passo 6.20:** Trace  $B'_5C'_1 = a_1$  o lado oposto ao vértice  $B'_4$ . Tome  $B'_4 = A'$ ,  $B'_5 = B'$  e  $C'_1 = C'$ , assim temos o triângulo  $B'_4B'_5C'_1$  equivalente ao triângulo  $A'B'C'$  procurado.

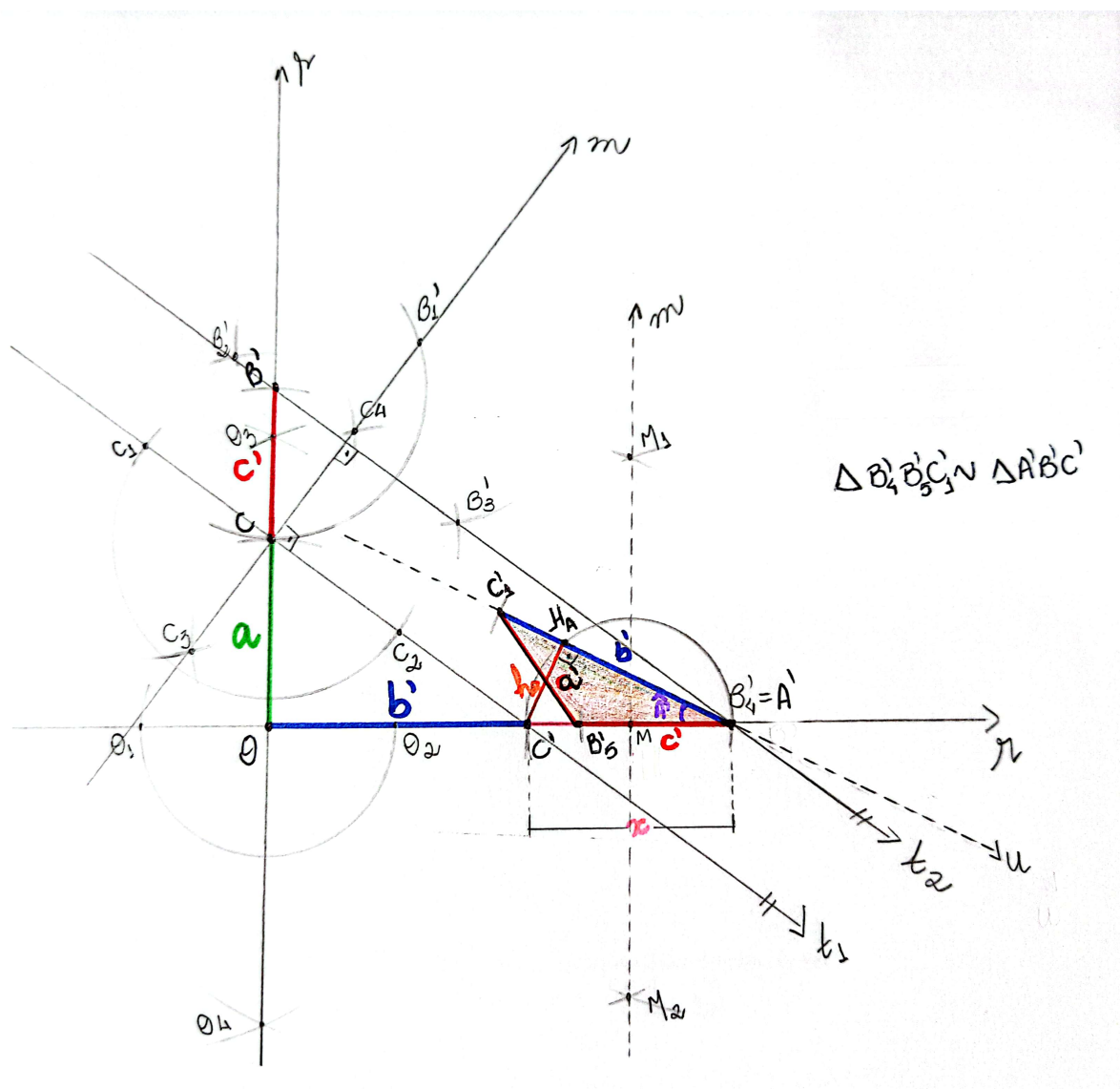


Figura 120 – Construção completa do triângulo  $A'B'C'$  de área equivalente ao triângulo  $ABC$  dado.

## 8.7 Traçar por um vértice de um quadrado dado, uma reta que divida sua área em partes proporcionais a dois segmentos distintos dados

**Exercício 7.** São dados um quadrado e dois segmentos  $m$  e  $n$ . Traçar por um vértice do quadrado uma reta que divida sua área em partes proporcionais a  $m$  e  $n$ .

**Resolução 7.** Seja o quadrado  $ABCD$  de lados  $AB = BC = CD = DA = \ell$  e sua área  $(ABCD) = \ell \cdot \ell = \ell^2$ .

Considere o triângulo  $ABE$ , onde  $BE = x$  a base desse triângulo e  $\ell = AB$  a sua altura como ilustrado na figura abaixo:

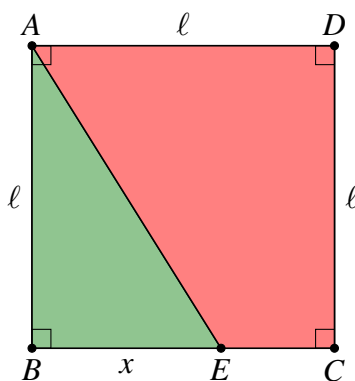


Figura 121 – Construção:  
Quadrado  $ABCD$  e o triângulo  $ABE$  dados.

Seja a área do triângulo  $ABE$  dada por  $(ABE) = \frac{x \cdot \ell}{2}$  hachurado em verde na [Figura 121](#). E a área complementar ao triângulo em rosa na [Figura 121](#) dada por:  $(AECD) = (ABCD) - (ABE)$ , assim temos  $(AECD) = \ell^2 - \frac{x \cdot \ell}{2}$ .

Calculando o mínimo múltiplo comum da expressão da área, temos:

$$(AECD) = \frac{2 \cdot \ell^2 - x \cdot \ell}{2},$$

colocando  $\ell$  em evidência obtemos a seguinte expressão:

$$(AECD) = \frac{\ell \cdot (2\ell - x)}{2},$$

melhor escrevendo,  $(AECD) = \frac{\ell}{2}(2\ell - x)$ .

Considere  $m < n$ , sem perda de generalidade. Para que as áreas  $(ABE)$  e  $(AECD)$  sejam proporcionais a  $m$  e  $n$ , temos:

$$\frac{(ABE)}{(AECD)} = \frac{m}{n}, \text{ se, e somente se,}$$

$$\frac{\frac{\ell \cdot x}{2}}{\frac{\ell}{2}(2\ell - x)} = \frac{m}{n}, \text{ simplificando } \frac{\ell}{2}, \text{ temos:}$$

$$\frac{x}{2\ell - x} = \frac{m}{n}. \text{ Logo, } xn = m(2\ell - x).$$

Aplicando a regra da distributiva  $xn = 2m\ell - xm$  e somando  $xm$  em ambos os lados da igualdade, obtemos  $xn + xm = 2m\ell$ . Colocando  $x$  em evidência no primeiro membro, temos:

$$x(n + m) = 2m\ell$$

Ao multiplicar ambos os lados da igualdade por  $\frac{1}{n + m}$ , finalmente obtemos

$$x = \frac{2m\ell}{m + n}$$

**Construção 7:** A partir de  $x = \frac{2m\ell}{m + n}$ , podemos reescrever a expressão de tal maneira onde  $x$  é a quarta proporcional procurada.

Multiplique ambos os lados da igualdade por  $m + n$  obtendo  $x(m + n) = 2m\ell$ . Multiplique os dois lados da igualdade por  $\frac{1}{2\ell x}$  e teremos  $\frac{m + n}{2\ell} = \frac{m}{x}$ , onde  $x$  é a quarta proporcional.

**Passo 7.1:** Considere a reta suporte  $r$  e sobre ela transporte o lado  $BC$  do quadrado  $ABCD$  da [Figura 121](#). Ponta seca em  $B$  e abertura até  $C$  na [Figura 121](#). Em  $r$ , marque o ponto  $B$ , transfira  $BC = \ell$  para  $r$  e marque o ponto  $C$  e destaque  $BC = \ell$ ;

**Passo 7.2:** Construção dos lados  $AB$  e  $CD$  do quadrado  $ABCD$ . Ponta seca em  $B$ , qualquer abertura do compasso e trace os pontos auxiliares  $B_1$  e  $B_2$  e marque  $B_1B_2$ ;

**Passo 7.3:** Ponta seca em  $B_1$  e trace acima e abaixo de  $r$ , análogo para ponta seca em  $B_2$ . Marque  $B_3$  e  $B_4$ , pontos auxiliares;

**Passo 7.4:** Trace a reta  $s$  que passa por  $B_3$ ,  $B$  e  $B_4$ , perpendicular a  $r$  em  $B$ ;

**Passo 7.5:** Ponta seca em  $B$ , abertura até  $C$  e marque o ponto  $A$  em  $m$ . Destaque  $AB = \ell$  lado do quadrado  $ABCD$ ;

**Passo 7.6:** Construção de  $CD = \ell$ , lado do quadrado  $ABCD$ . Análogo do **passo 7.1** até o **passo 7.5**, destaque  $CD = \ell$ ;

**Passo 7.7:** Destaque  $AD = \ell$ , lado do quadrado  $ABCD$ ;

**Passo 7.8:** Ponta seca em  $B$ , abertura do compasso até  $A$  e transfira  $AB = \ell$  para a reta  $r$  a partir de  $B$ , à esquerda, marque  $A_1$  e destaque  $A_1B = \ell$ ;

**Passo 7.9:** Ponta seca em  $A_1$  e mesma abertura, marque  $A_2$  a esquerda de  $A_1$  em  $r$ , tal que  $A_1A_2 = \ell$ . Sendo assim, obtemos  $A_2B = A_2A_1 + A_1B = \ell + \ell = 2\ell$ ;

**Passo 7.10:** Construção da reta suporte  $k$ , perpendicular a  $r$  no ponto  $A_2$ . Ponta seca em  $A_2$ , abertura qualquer do compasso e trace a os pontos auxiliares  $A'_2$  e  $A''_2$ ;

**Passo 7.11:** Ponta seca em  $A'_2$  e trace acima e abaixo de  $r$  e repita o mesmo procedimento para a ponta seca em  $A''_2$ . Marque os pontos  $A'''_2$  e  $A''''_2$ . Trace a reta  $k$  que passa por  $A'''_2$ ,  $A_2$  e  $A''''_2$  e é perpendicular a  $r$  em  $A_2$ ;

**Passo 7.12:** Considere  $m$  e  $n$  os segmentos tal que  $FG = m$  e  $GH = n$  onde  $m < n$  abaixo:

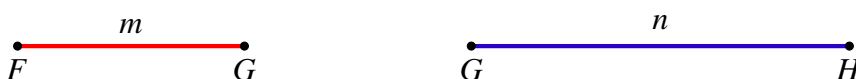


Figura 122 – Construção:  
Dados os segmentos  $FG = m$  e  $GH = n$ .

**Passo 7.13:** Ponta seca em  $F$  e abertura até  $G$  na figura anterior, transporte  $FG = m$  para a reta  $k$  a partir de  $A_2$ , marque  $G$  e destaque  $m$ ;

**Passo 7.14:** Ponta seca em  $G$  e abertura até  $H$  na Figura 122 e transporte  $GH = n$  para a reta  $s$  a partir de  $G$ , marque  $H$  e destaque  $GH = n$ . Temos assim o segmento  $A_2H = A_2G + GH = m + n$ ;

**Passo 7.15:** Ponta seca em  $F$  e abertura até  $G$  na Figura 122, transfira  $FG = m$  para a reta  $s$  a partir de  $H \equiv F$ , marque  $G_1$  em  $s$ , e destaque  $FG = HG_1 = m$ ;

**Passo 7.16:** Trace a reta  $u_1$  passando pelo ponto  $H$  em  $k$  e por  $B$  em  $r$ ;

**Passo 7.17:** Construção da quarta proporcional  $x$ : ponta seca em  $H$ , abertura qualquer do compasso e trace os pontos auxiliares  $H_1$  e  $H_2$  em  $u_1$ . Marque  $H_1$  e  $H_2$ ;

**Passo 7.18:** Ponta seca em  $H_1$ , abertura maior que  $H_1H$  e trace acima e abaixo de  $u_1$ , análogo para ponta seca em  $H_2$ . Marque os pontos auxiliares  $H_3$  e  $H_4$  e trace a reta  $v$  passando por  $H_3$ ,  $H$  e  $H_4$ , perpendicular a  $u_1$  em  $H$ ;

**Passo 7.19:** Ponta seca em  $G_1$ , abertura do compasso até  $H$  e trace a semicircunferência de centro em  $G_1$  e diâmetro  $HG_2$ . Marque  $G_2$ , ponto auxiliar;

**Passo 7.20:** Ponta seca em  $G_2$ , mesma abertura do passo anterior e trace abaixo da reta  $v$ , da mesma maneira, trace abaixo de  $v$  com ponta seca em  $H$ , marque  $G_3$ ;

**Passo 7.21:** Trace a reta  $u_2$  paralela a  $u_1$  e perpendicular a  $v$  passando por  $G_1$  e  $G_3$ . E  $u_2$  intersecciona  $r$  no ponto  $E$ , marque  $E$ ;

**Passo 7.22:** Destaque  $BE = x$ , quarta proporcional;

**Passo 7.23:** Trace  $AE$ , formando o triângulo retângulo  $ABE$ , destaque o triângulo  $ABE$ . Destaque o quadrilátero  $AECD$ , onde:

$$(ABE) + (AECD) = (ABCD) \text{ e } \frac{(ABE)}{(AECD)} = \frac{m}{n}.$$



## 8.8 Inscrição de um retângulo de área equivalente a um quadrado dado, em um círculo dado

**Exercício 8.** Inscrever em um círculo dado um retângulo equivalente a um quadrado dado.

**Resolução 8.** Considere o quadrado  $ABEF$  de lados  $\ell$  e o círculo  $\lambda$  de diâmetro  $D$ , dados do problema, e o retângulo  $GHIJ$  de lados  $HI = GJ = a$  e  $GH = IJ = b$  a figura a ser construída, ilustradas abaixo:

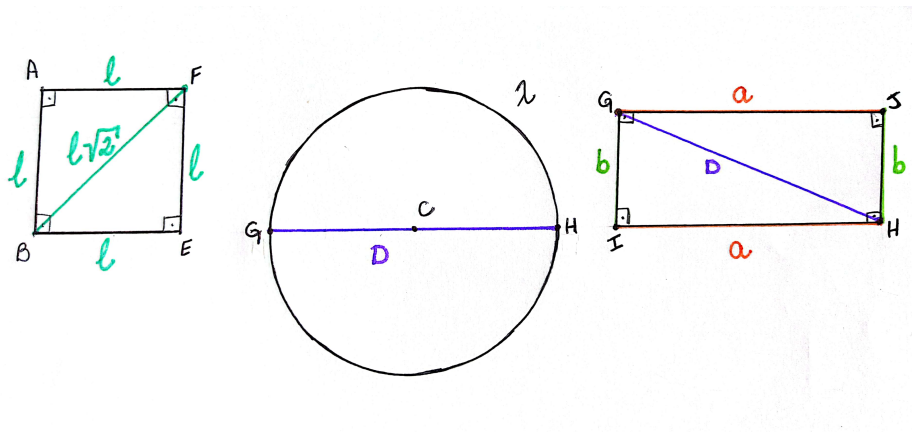


Figura 124 – Construção:

Quadrado de lados  $\ell$ , circunferência de diâmetro  $D$  e retângulo de lados  $a$  e  $b$ .

Como o retângulo  $GHIJ$  está inscrito no círculo  $\lambda$ , temos o diâmetro  $D$  de  $\lambda$  e a diagonal do retângulo  $GHIJ$  são iguais, assim  $GI = HJ = D$ .

Como a área do quadrado  $ABEF$  é equivalente a área do retângulo  $GHIJ$ , temos  $(ABEF) = (GHIJ)$ , logo

$$\ell^2 = a \cdot b. \quad (8.1)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, no retângulo  $GHIJ$  temos

$$D^2 = a^2 + b^2. \quad (8.2)$$

Assim temos o seguinte sistema linear:

$$I) \begin{cases} \ell^2 &= a \cdot b & (8.1) \\ D^2 &= a^2 + b^2 & (8.2) \end{cases}$$

Utilizando o método de completamento de quadrado na 8.2, ou seja, somar em ambos os lados o termo  $2 \cdot a \cdot b$ , obtemos:  $D^2 + 2 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$ . Como  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$ , temos a equação após a substituição:  $D^2 + 2 \cdot a \cdot b = (a+b)^2$ .

No sistema linear temos a 8.1,  $\ell^2 = a \cdot b$  e substituindo na equação anterior, obtemos:  $D^2 + 2 \cdot \ell^2 = (a + b)^2$ . Extraíndo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade, temos

$$a + b = \sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} \quad (8.3)$$

Analogamente, utilizando o método de completamento de quadrado na 8.2, mas agora subtraindo o termo  $2 \cdot a \cdot b$  em ambos os lados da igualdade, temos:  $D^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$ .

Como  $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ , após a substituição, a equação será  $D^2 - 2 \cdot a \cdot b = (a - b)^2$ .

Temos 8.1,  $\ell^2 = a \cdot b$ , então  $D^2 - 2\ell^2 = (a - b)^2$ , extraíndo a raiz quadrada, finalmente obtemos

$$a - b = \sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2} \quad (8.4)$$

Logo temos o seguinte sistema linear:

$$II) \begin{cases} a + b = \sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} & (8.3) \\ a - b = \sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2} & (8.4) \end{cases}$$

Aplicando o método da soma para a resolução de sistemas lineares, temos a seguinte equação:

$2 \cdot a = \sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} + \sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2}$  e multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{2}$ , teremos o valor de  $a$ :

$$a = \frac{\sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} + \sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2}}{2} \quad (8.5)$$

No sistema linear II), a 8.4, multiplique ambos os lados da igualdade por  $(-1)$

$$-a + b = -\sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2}, \quad (8.6)$$

então obtemos o sistema abaixo:

$$III) \begin{cases} a + b = \sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} & (8.3) \\ -a + b = -\sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2} & (8.6) \end{cases}$$

Analogamente ao sistema II), aplicando o método da soma para a resolução de sistemas lineares, temos:  $2 \cdot b = \sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} - \sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2}$  e multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{2}$ , obtemos:

$$b = \frac{\sqrt{D^2 + 2 \cdot \ell^2} - \sqrt{D^2 - 2 \cdot \ell^2}}{2} \quad (8.7)$$

Assim, temos os lados  $a$  e  $b$  do retângulo inscrito na circunferência de diâmetro  $D$ .

**Construção 8:** Construção do retângulo de lados  $a = \frac{x_1+x_2}{2}$  e  $b = \frac{x_1-x_2}{2}$  inscrito na circunferência  $\lambda$  de diâmetro  $D$  conhecido, onde esse retângulo tem área equivalente a de um quadrado de lados  $\ell$  dado.

Considere o quadrado  $ABEF$  de lados  $\ell$ , sua diagonal  $\ell\sqrt{2}$  e a circunferência  $\lambda$  de diâmetro  $D$  dados, construídas abaixo:

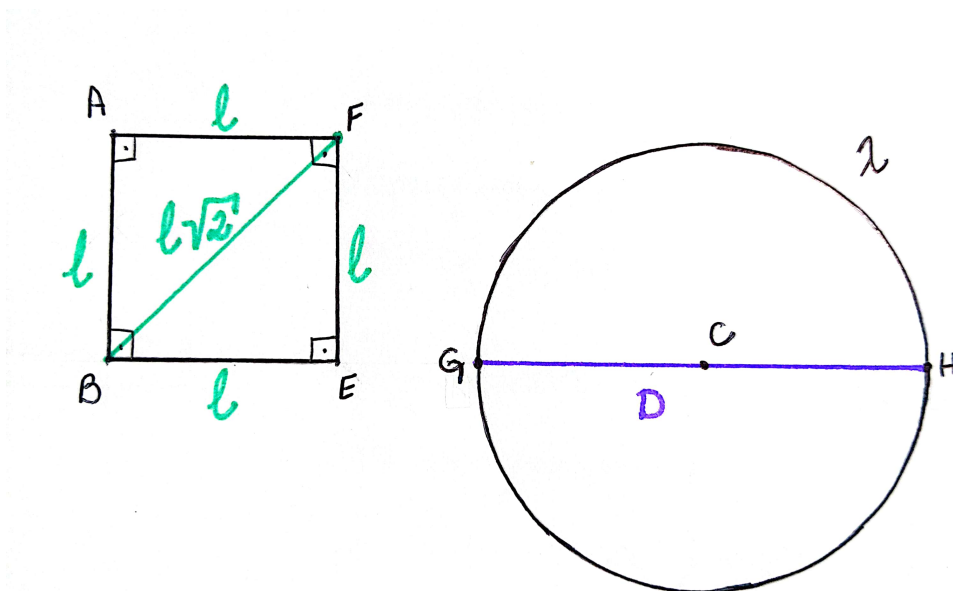


Figura 125 – Construção:  
Quadrado de lados  $\ell$  e circunferência de diâmetro  $D$ .

**Passo 8.1:** Construção do triângulo retângulo de catetos  $D$  e  $\ell\sqrt{2}$  determinando a hipotenusa  $x_1 = \sqrt{D^2 + 2\ell^2}$ , ( $x_1 = a + b$ );

**Passo 8.2:** Considere  $r$  a reta suporte e sobre ela transfira o diâmetro  $D = GH$ . Marque sobre  $r$  o ponto  $G$ ;

**Passo 8.3:** Ponta seca em  $G$  na Figura 125, abertura do compasso até  $H$  e transfira para a reta  $r$  a partir de  $G = B$ . Marque  $H = H_1$  e destaque o diâmetro  $D$  (cateto);

**Passo 8.4:** Construção de  $s$ , reta suporte perpendicular a  $r$  passando por  $G$ . Ponta seca em  $G$ , qualquer abertura e trace os pontos auxiliares  $G_1$  e  $G_2$ ;

**Passo 8.5:** Ponta seca em  $G_1$ , abertura maior que  $G_1G$  e trace acima e abaixo de  $r$ . Ponta seca em  $G_2$ , mesma abertura e trace acima e abaixo de  $r$ . Marque  $G_3$  e  $G_4$ , pontos auxiliares e trace  $s$  passando por eles;

**Passo 8.6:** Ponta seca em  $B$  no quadrado da Figura 125, e abertura até  $F$ , ou seja,  $BF = \ell\sqrt{2}$  a diagonal do quadrado de lados  $\ell$ . Transfira  $BF$  para a reta  $s$  a partir de  $G = B$  e marque  $F = F_1$  em  $s$ . Destaque  $BF_1 = \ell\sqrt{2}$  (cateto);

**Passo 8.7:** Destaque  $F_1H_1 = x_1$  a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos  $D$  e  $\ell\sqrt{2}$ , onde  $x_1 = \sqrt{D^2 + 2\ell^2}$ , ou  $(x_1 = a + b)$ ;

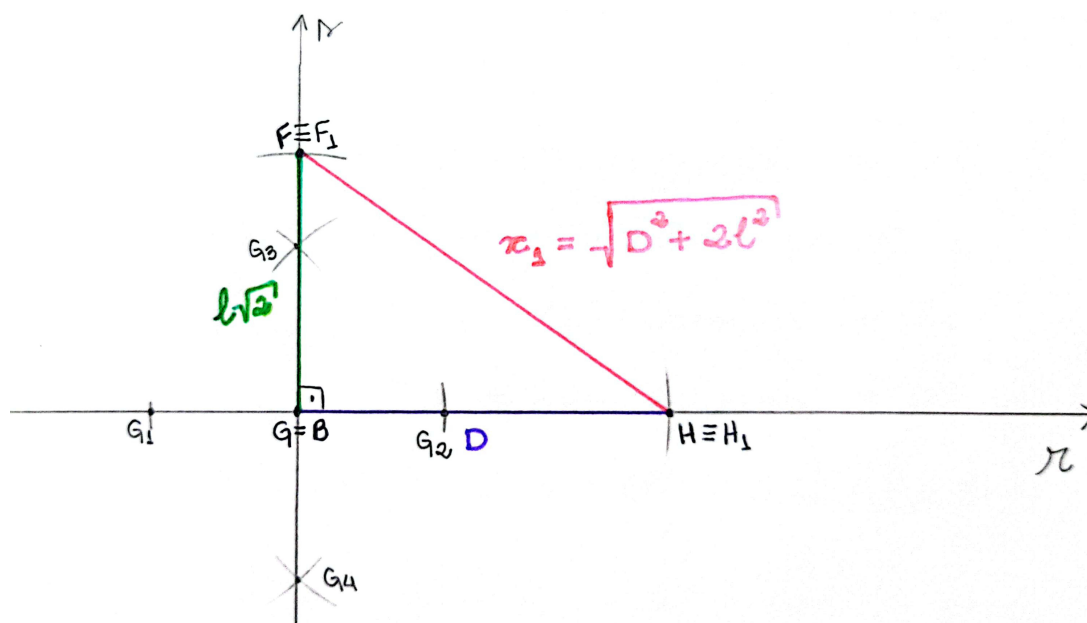


Figura 126 – Construção: Hipotenusa  $x_1$ .

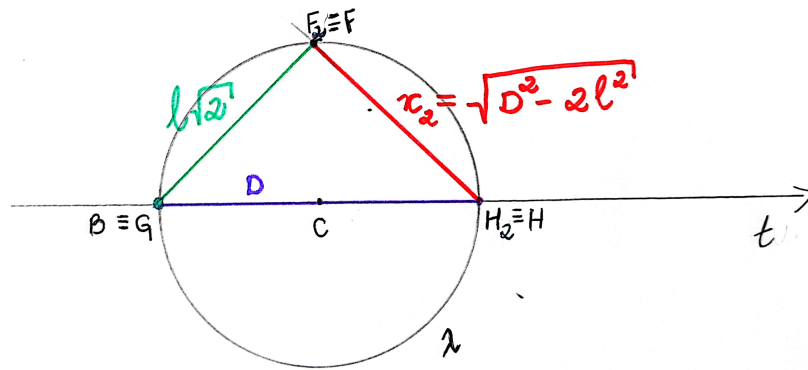
**Passo 8.8:** Construção do triângulo retângulo com a hipotenusa  $D$ , um cateto  $\ell\sqrt{2}$  e determinando o outro cateto  $x_2 = \sqrt{D^2 - 2\ell^2}$ , ou  $(x_2 = a - b)$ ;

**Passo 8.9:** Considere  $t$  uma reta suporte e sobre ela transfira  $D = GH$ , o diâmetro da circunferência  $\lambda$ . Marque sobre  $t$  o ponto  $C$ , o centro de  $\lambda$ ;

**Passo 8.10:** Ponta seca em  $C$  na Figura 125, abertura até  $G$  ou  $H$  (raio da circunferência). Ponta seca em  $C$  (na construção abaixo) e transporte a circunferência  $\lambda$ , destacando  $G = B$  e  $H = H_2$  os pontos de intersecção de  $t$  e  $\lambda$ . Destaque o diâmetro  $D = GH = BH_2$  (hipotenusa);

**Passo 8.11:** Ponta seca em  $B$  no quadrado da Figura 125, e abertura até  $F$  e transporte  $BF = \ell\sqrt{2}$  com a ponta seca em  $G = B$ , marque sobre a circunferência  $\lambda$  o ponto  $F = F_2$ , destaque  $GF = BF_2 = \ell\sqrt{2}$  (cateto);

**Passo 8.12:** Destaque  $H_2F_2 = x_2$  o outro cateto, onde  $x_2 = \sqrt{D^2 - 2\ell^2}$ , ou  $(x_2 = a - b)$ ;

Figura 127 – Construção: Cateto  $x_2$ .

**Passo 8.13:** Construção do retângulo de lados  $a$  e  $b$  inscrito na circunferência  $\lambda$  de diâmetro  $D$ . Construção de  $GJ = IH = a$  e  $GI = JH = b$  lados do retângulo  $GIHJ$  inscrito em  $\lambda$ , a circunferência de diâmetro  $D = GH = IJ$  as diagonais do retângulo;

**Passo 8.14:** Temos  $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$  e  $b = \frac{x_1 - x_2}{2}$ . Considere  $u$ , uma reta suporte e sobre ela transporte  $H_1F_1 = x_1$  da Figura 126. Em  $u$  marque o ponto  $H_1$ , a partir dele transporte  $H_1F_1 = x_1$  e marque  $F_1$ . Destaque  $x_1$ ;

**Passo 8.15:** Transporte  $F_2H_2 = x_2$  da Figura 127 a partir do ponto  $F_1 = F_2$  na construção abaixo e marque o ponto  $H_2$  em  $u$ . Assim, temos  $H_1F_1$  e  $F_2H_2$  segmentos consecutivos e  $H_1H_2 = x_1 + x_2$ ;

**Passo 8.16:** Construção do ponto médio  $M$  de  $H_1H_2$ , onde  $M = \frac{x_1 + x_2}{2} = a$ . Ponta seca em  $H_1$ , abertura do compasso maior que a metade de  $H_1H_2$  e marque acima e abaixo de  $u$ ; Análogo para a ponta seca em  $H_2$ ;

**Passo 8.17:** Marque  $M_1$  e  $M_2$ , pontos auxiliares e trace uma reta  $u_1$  passando por  $M_1$  e  $M_2$ . A intersecção entre as retas suportes  $u$  e  $u_1$  é o ponto médio  $M$  de  $H_1H_2$ . Logo  $a = H_1M = MH_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

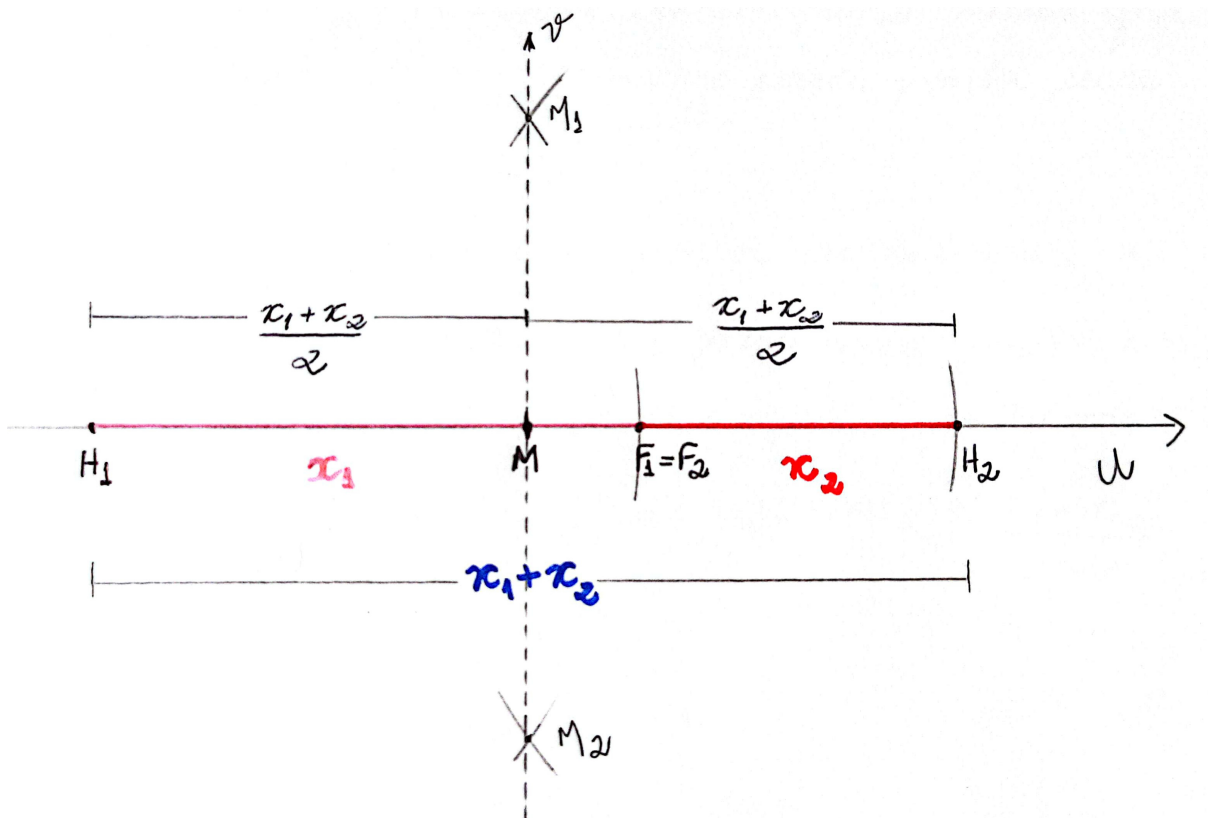


Figura 128 – Construção:  
Média aritmética de  $x_1$  e  $x_2$ .

**Passo 8.18:** Considere  $v$ , uma reta suporte e sobre ela transporte  $H_1F_1 = x_1$  da [Figura 126](#). Em  $v$  marque o ponto  $H_1$  e a partir dele transporte  $H_1F_1 = x_1$  e marque  $F_1$ . Destaque  $x_1$ ;

**Passo 8.19:** Transporte  $F_2H_2 = x_2$  da [Figura 127](#), a partir do ponto  $H_1$ , onde  $H_1 = F_2$  e marque o ponto  $H_2$  em  $v$ , assim temos o seguimento  $H_2F_1 = x_1 - x_2$ . Destaque  $H_2F_1$ ;

**Passo 8.20:** Construção do ponto médio  $N$  de  $H_2F_1$  onde  $N = \frac{x_1 - x_2}{2} = b$ . Ponta seca em  $H_2$ , abertura do compasso maior que a metade de  $H_2F_1$  e marque acima e abaixo de  $v$ . Análogo para a ponta seca em  $F_1$ ;

**Passo 8.21:** Marque  $N_1$  e  $N_2$  pontos auxiliares e trace uma reta  $v_1$  passando por  $N_1$  e  $N_2$ . A intersecção entre  $v$  e  $v_1$  é o ponto médio  $N$  de  $H_2F_1$ . Logo  $b = H_2N = NF_1 = \frac{x_1 - x_2}{2}$ ;

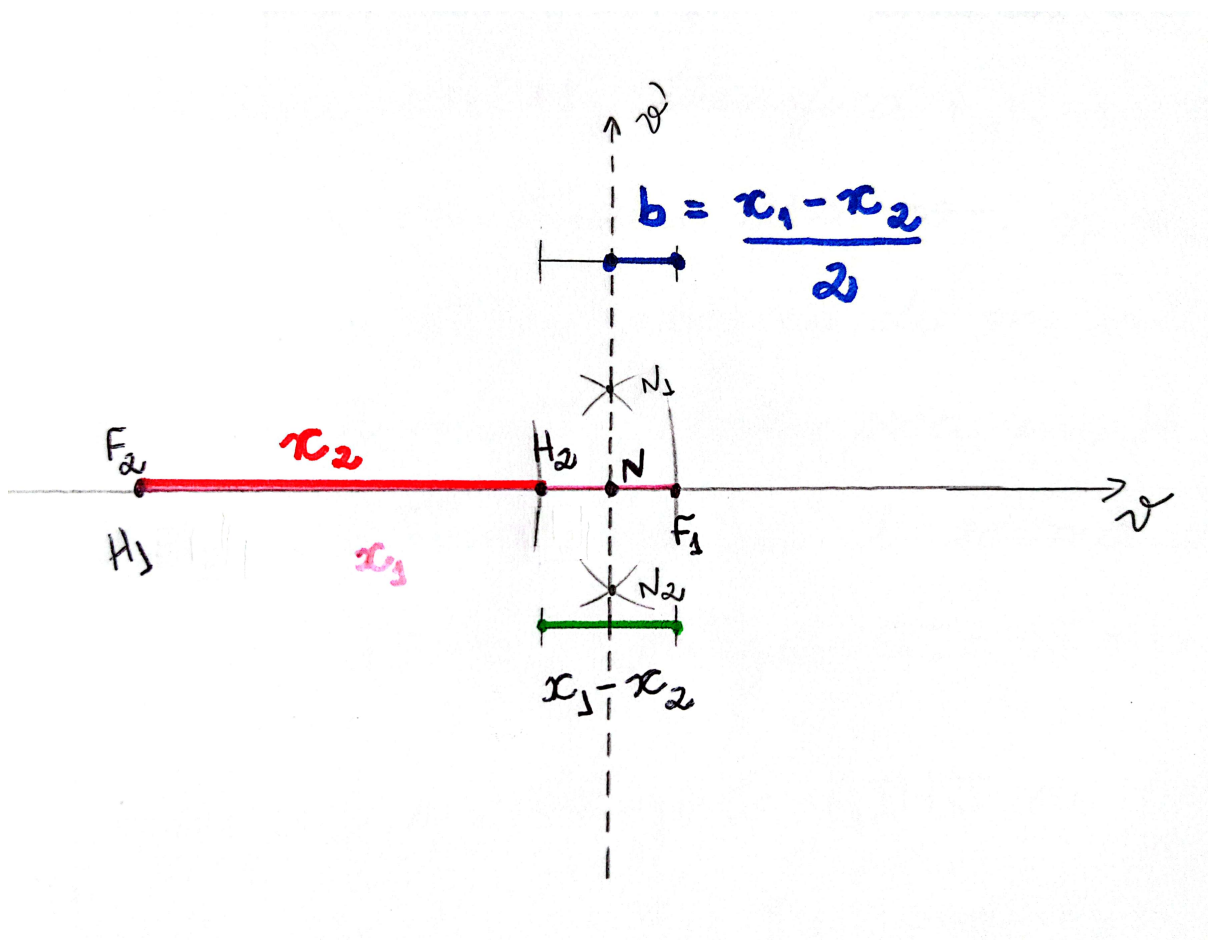


Figura 129 – Construção:  
Metade da diferença entre  $x_1$  e  $x_2$ .

**Passo 8.22:** Sobre uma reta suporte  $m$  marque o ponto  $C$  e transfira a circunferência  $\lambda$  de diâmetro  $GH$  e raio  $GC = CH$  da Figura 124. Marque os pontos  $G$  e  $H$ ;

**Passo 8.23:** Na Figura 128, ponta seca em  $H_1$  e abertura até  $M$ , transfira  $H_1M = a = \frac{x_1+x_2}{2}$  para a construção abaixo. Ponta seca em  $G$  e marque o ponto  $J$  em  $\lambda$  acima de  $m$ ,  $GH = a$ . Ponta seca em  $H$  e marque o ponto  $I$  em  $\lambda$  abaixo de  $m$ .  $HI = a$ . Destaque  $GJ = HI = a$

**Passo 8.24:** Na Figura 129, ponta seca em  $H_2$  e abertura até  $N$ , transfira  $H_2N = b = \frac{x_1-x_2}{2}$  para a construção abaixo. Ponta seca em  $G$  e trace abaixo de  $m$  interseccionando  $\lambda$  em  $I$ ,  $GI = b$ . Ponta seca em  $H$  e trace interseccionando  $\lambda$  acima de  $m$  em  $J$ ,  $HJ = b$ . Destaque  $GI = HJ = b$ ;

**Passo 8.25:** Destaque o retângulo  $GIHJ$  de lados  $a = \frac{x_1+x_2}{2}$  e  $b = \frac{x_1-x_2}{2}$ , onde  $x_1 = \sqrt{D^2 + 2\ell^2}$  e  $x_2 = \sqrt{D^2 - 2\ell^2}$  inscrito na circunferência de diâmetro  $D$ , e de área equivalente a um quadrado de lados  $\ell$ ;

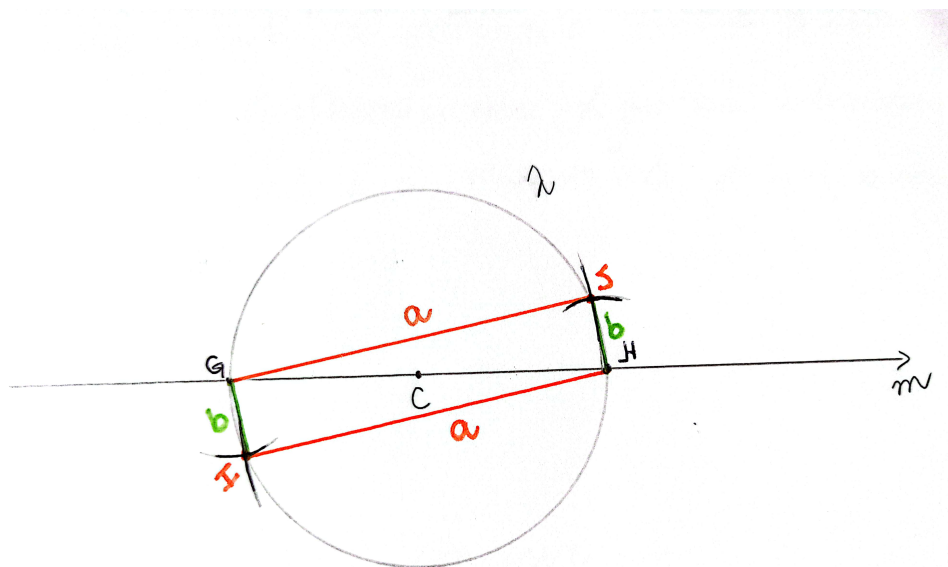


Figura 130 – Construção completa de uma possibilidade do retângulo  $GIHJ$  inscrito no circunferência de diâmetro  $D$ .

**Observação:** Note que temos dois retângulos inscritos na circunferência  $\lambda$  com lados  $a$  e  $b$ . Os retângulos  $GIHJ$  e  $GI_1HJ_1$  como construídos nas figuras abaixo. O retângulo  $GI_1HJ_1$  é construído de forma análoga ao retângulo  $GIHJ$ ;

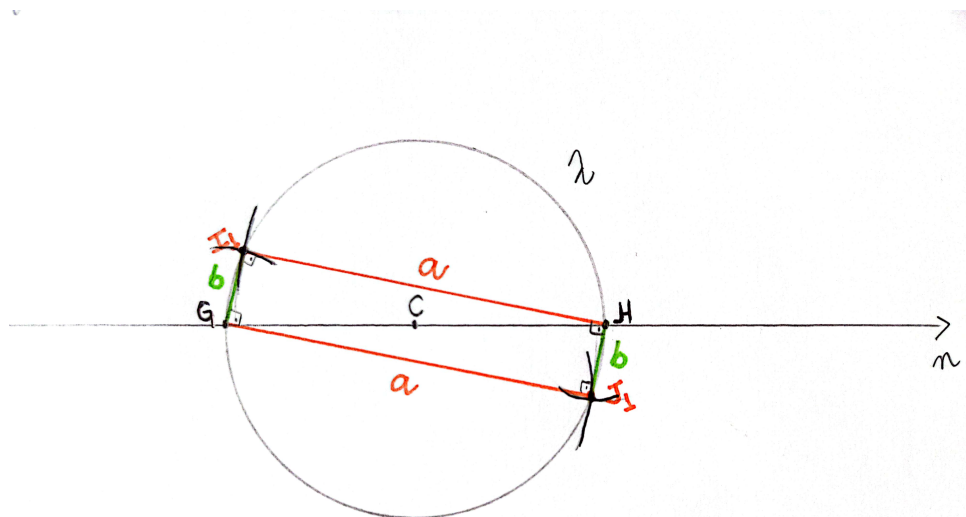


Figura 131 – Construção completa de outra possibilidade do retângulo  $GI_1HJ_1$  inscrito no circunferência de diâmetro  $D$ .

## 8.9 Traçar uma paralela a base de um triângulo dado tal que a área do novo triângulo seja dois terços do triângulo dado

**Exercício 9.** Dado um triângulo  $ABC$  traçar  $DE$  paralelo a  $BC$  de forma que a área de  $ADE$  seja  $\frac{2}{3}$  da área de  $ABC$ .

**Resolução 9.** Sejam  $(ABC)$  e  $(ADE)$  as áreas dos triângulos  $ABC$  e  $ADE$ , respectivamente. Considere  $AH_A = h_a$  a altura do triângulo  $ABC$  e  $AH'_A = h'_a$  a altura do triângulo  $ADE$ , como na figura abaixo:

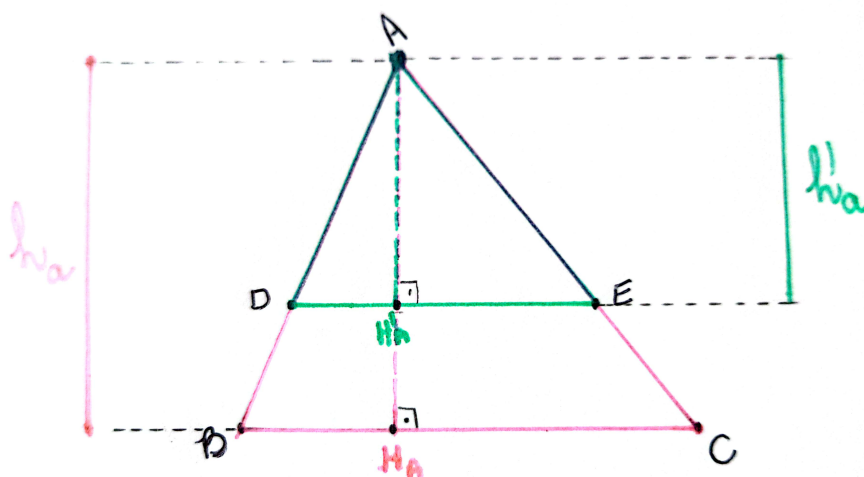


Figura 132 – Construção:  
Triângulos semelhantes  $ABC$  e  $ADE$ .

Temos os triângulos  $ABC$  e  $ADE$  são semelhantes e as constantes de proporcionalidade:

$$\frac{(ADE)}{(ABC)} = k^2 \quad (8.8)$$

$$\frac{(AH'_A)}{AH_A} = \frac{h'_a}{h_a} = k \quad (8.9)$$

Queremos que  $(ADE) = \frac{2}{3}(ABC)$ , multiplicando ambos os lados da igualdade por  $(ABC)$ , temos:

$$\frac{(ADE)}{(ABC)} = \frac{2}{3}, \quad (8.10)$$

assim substituindo a [Equação 8.8](#) em, [Equação 8.10](#), obtemos  $K^2 = \frac{2}{3}$ , extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, temos

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (8.11)$$

Da [Equação 8.9](#), temos  $\frac{h'_a}{h_a} = k$ , assim substituindo por [Equação 8.11](#), então  $\frac{h'_a}{h_a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , ou seja,  $\frac{h'_a}{h_a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

Multiplicando o segundo membro da equação por  $1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ , temos  $\frac{h'_a}{h_a} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$ . Finalmente, multiplicando ambos os lados por  $h_a$ , então  $h'_a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot h_a$ , ou seja,

$$h'_a = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot h_a. \quad (8.12)$$

**Construção 9:** Considere  $r$  a reta suporte e sobre ela transporte o segmento  $BC$  do triângulo  $ABC$ , um triângulo qualquer [Figura 132](#), transporte  $BA$  e  $BC$  e marque o ponto  $A$ . Destaque o triângulo  $ABC$ ;

**Passo 9.1:** Construa a altura  $h_a = AH_A$  do triângulo  $ABC$ . Ponta seca em  $A$  e abertura do compasso de tal maneira que interseccione a reta  $r$ , nos pontos auxiliares  $A_1$  e  $A_2$ . Marque  $A_1$  e  $A_2$  em  $r$ ;

**Passo 9.2:** Ponta seca em  $A_1$ , abertura do compasso maior que a metade de  $A_1A_2$ , trace acima e abaixo de  $r$ . Análogo para ponta seca em  $A_2$ . Marque os pontos auxiliares  $A_3$  e  $A_4$ ;

**Passo 9.3:** Trace a reta suporte  $s$  que passa por  $A$ ,  $A_3$  e  $A_4$  e intersepta o segmento  $BC$  em  $H_A$ . Marque  $H_A$  e destaque  $AH_A = h_a$  a altura do triângulo  $ABC$ ;

**Passo 9.4:** Construção do triângulo equilátero  $AH_AF$  de lados  $AH_A = h_a$  e sua altura  $FH_f = h_f$ . Ponta seca em  $A$ , abertura do compasso até  $H_A$  e trace à direita e à esquerda de  $s$ .

**Passo 9.5:** Ponta seca em  $H_A$ , mesma abertura do passo anterior e trace à direita e à esquerda de  $s$ . Marque o ponto auxiliar  $F_1$  e o ponto  $F$ , vértice do triângulo equilátero;

**Passo 9.6:** Trace os segmentos  $AF$  e  $FH_A$ , construindo o triângulo equilátero  $AH_AF$  de lados  $h_a$ .

**Passo 9.7:** Trace a reta suporte  $t$  passando por  $F$  e  $F_1$ , que intersecciona  $AH_A$  em  $H_f$ . Marque  $H_f$  e destaque  $FH_f = h_f$  a altura do triângulo equilátero  $AH_AF$ . Onde  $h_f = \frac{h_a\sqrt{3}}{2}$ ;



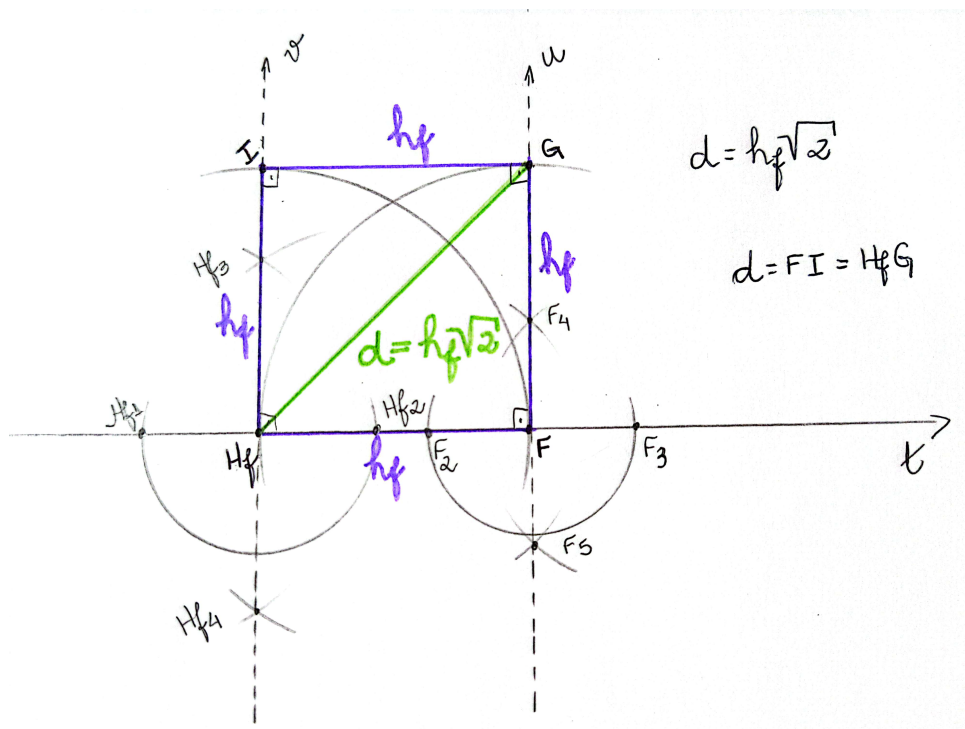


Figura 134 – Construção:  
Quadrado de lados  $h_f$ .

**Passo 9.16:** Construção de  $\frac{2}{3}$  da diagonal  $d$ . Considere uma reta suporte  $k$  que contém o segmento  $H_fG = d = h_f\sqrt{2}$ ;

**Passo 9.17:** Trace uma reta suporte  $\ell$ , passando por  $H_f$ , com um ângulo  $\alpha$  qualquer. Na reta  $\ell$ , a partir de  $H_f$ , marque três pontos consecutivos com a mesma abertura do compasso, e marque  $H_{f1}$ ,  $H_{f2}$  e  $H_{f3}$  tal que  $H_fH_{f1} = H_{f1}H_{f2} = H_{f2}H_{f3}$ ;

**Passo 9.18:** Trace a reta suporte  $j$  passando pelos pontos  $H_{f3}$  e  $G$ . Para obter  $\frac{2}{3}h_f$ , basta construir a reta  $i$  paralela a  $j$ , passando por  $H_{f2}$  e interseccionando  $H_fG$  em  $G_1$ ;

**Passo 9.19:** Construção da perpendicular  $j_1$  a  $j$  passando por  $H_{f2}$ ;

**Passo 9.20:** Construção da perpendicular  $j_2$  a reta  $j_1$ , passando por  $H_{f2}$  e interseccionando  $H_fG$  em  $G_1$ . Marque  $G_1$ ;

**Passo 9.21:** Destaque  $H_fG_1 = \frac{2}{3}H_fG$ ;

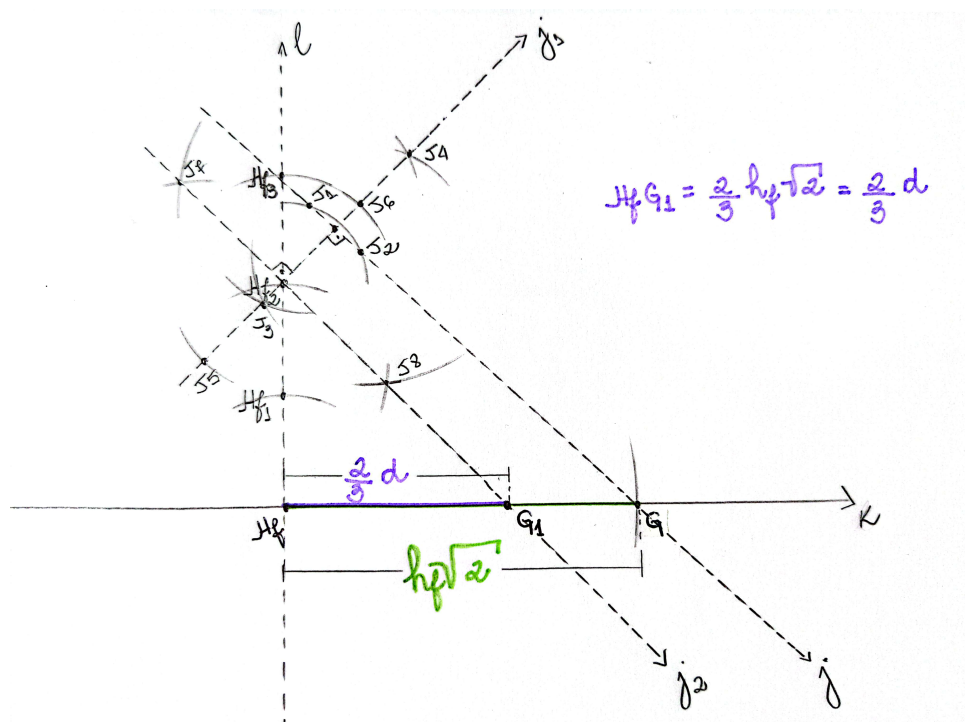


Figura 135 – Construção:

$$H_f G_1 = \frac{2}{3} H_f G.$$

**Passo 9.22:** Construção do triângulo  $ADE$  de altura  $AH'_A = h'_a$  e inicialmente considere apenas o triângulo  $ABC$  e a altura  $AH_A = h_a$  da Figura 133;

**Passo 9.23:** Transporte  $H_f G_1 = \frac{2}{3} h_f \sqrt{2}$  para o seguimento  $AH_A = h_a$ . Ponta seca em  $H_f$  e abertura até  $G_1$  na Figura 135 e transporte para a Figura 136 a partir de  $A$ , e marque em  $AH_A$  tal comprimento. Marque o ponto  $H'_A$ ;

**Passo 9.24:** Destaque o segmento  $AH'_A = h'_a$  a altura do triângulo  $ADE$  proporcional ao triângulo  $ABC$ ;

**Passo 9.25:** Construção da reta  $r_1$  paralela a  $r$ , onde  $r_1$  passa por  $H'_A$  ponto de intersecção entre  $r_1$  e  $AH_A$ ;

**Passo 9.26:** Ponta seca em  $H'_A$ , abertura do compasso até  $H_A$  e trace a semicircunferência  $H_A A_1$  de centro  $H'_A$ . Ponta seca em  $A_1$ , abertura do compasso maior que a  $A_1 H'_A$  e trace à esquerda e à direita de  $AH_A$ . Ponta seca em  $H_A$ , mesma abertura anterior, trace nos dois lados de  $AH_A$ . Os pontos  $A_1, A_2$  e  $A_3$  são pontos auxiliares da construção de  $r_1$  paralela a  $r$ ;

**Passo 9.27:** Destaque  $A_2$  e  $A_3$  e trace  $r_1$  paralela a  $r$  passando por  $A_2, H'_A$  e  $A_3$ . Marque  $D$ , a intersecção de  $r_1$  com  $AC$  e marque  $E$ , a intersecção de  $AC$  com  $r_1$ . Destaque o segmento  $DE$ ,  $AD$  e  $AE$ ;

Assim temos o triângulo  $ADE$  tal que  $(ADE) = \frac{2}{3}(ABC)$  onde  $h'_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{h_a \sqrt{6}}{2}$ , ou seja,  $h'_a = h_a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$ .



## 8.10 Determinar um ponto $P$ , interior a um triângulo qualquer, tal que as áreas dos três triângulos formados sejam equivalentes

**Exercício 10.** Determine o ponto  $P$  no interior do triângulo  $ABC$  de forma que as áreas dos triângulos  $PAB$ ,  $PBC$  e  $PCA$  sejam iguais.

**Resolução 10.** Considere  $(ABC)$  a área do triângulo  $ABC$  e  $P$  um ponto pertencente ao interior do triângulo  $ABC$ .

Temos assim três triângulos com um dos vértices sendo ponto  $P$ , triângulos  $APB$ ,  $APC$  e  $BPC$  como observa-se na figura a seguir:

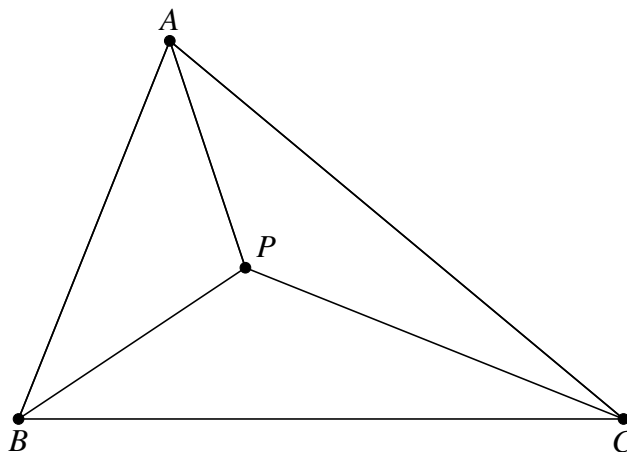


Figura 137 – Construção:  
Triângulos  $ABC$ ,  $APB$ ,  $APC$  e  $BPC$ .

$$\text{Logo } (APB) + (APC) + (BPC) = (ABC).$$

Suponha que as áreas desses três triângulos sejam equivalentes, assim temos  $(APB) = (APC) = (BPC)$ . Logo  $(APB) + (APB) + (APB) = (ABC)$ , ou seja,  $3(APB) = (ABC)$ , utilizando a fórmula da área de triângulos, temos  $3 \cdot \left( \frac{AB \cdot h_{PAB}}{2} \right) = \frac{AB \cdot h_c}{2}$ . Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\frac{2}{AB}$ , temos  $3 \cdot h_{PAB} = h_c$ , e na sequência dividimos ambos os lados da igualdade por 3,  $h_{PAB} = \frac{h_c}{3}$ , ou seja,  $h_{PAB} = \frac{1}{3} \cdot h_c$ .

Analogamente, obtemos  $h_{PBC} = \frac{1}{3} \cdot h_a$  e  $h_{PAC} = \frac{1}{3} \cdot h_b$ , para os triângulos  $BPC$  e  $APC$ , respectivamente.

O ponto  $P$  é a intersecção das retas paralelas às bases  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  a uma distância de  $\frac{1}{3}$  relativa às suas respectivas alturas com seus vértices correspondentes, como esboçado na figura abaixo:

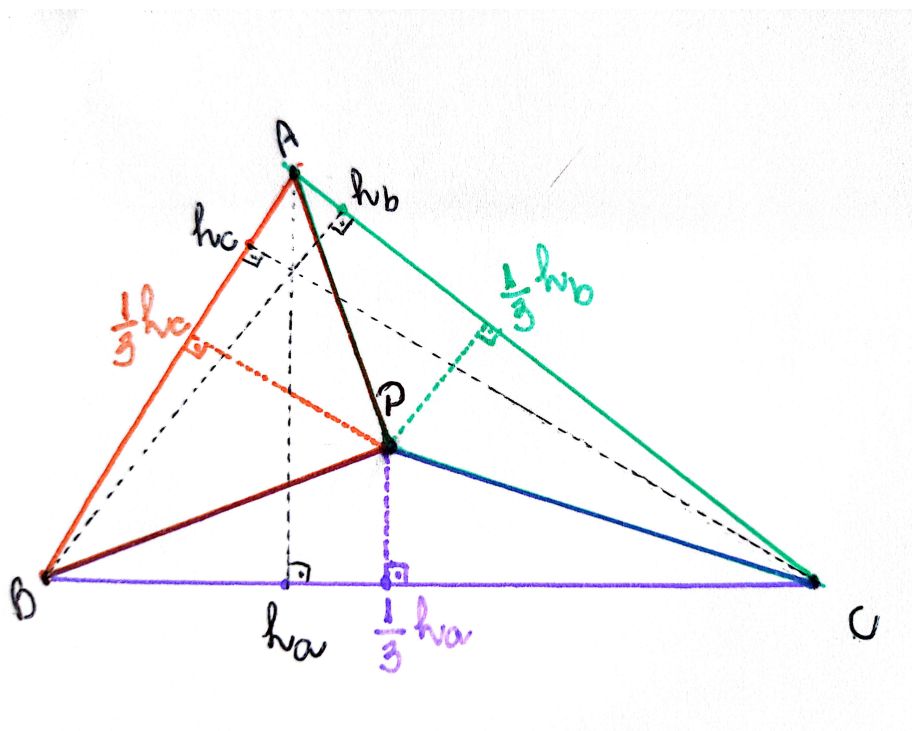


Figura 138 – Construção:  
esboço de  $\frac{1}{3}$  da altura de cada um dos três triângulos.

**Construção 10:** Construção das alturas relativas às bases de um triângulo qualquer  $ABC$ , considere um triângulo  $ABC$  qualquer;

**Passo 10.1:** Considere  $r$  a reta suporte de  $AB$ ,  $s$  a reta suporte de  $BC$  e  $t$  a reta suporte de  $AC$ ;

**Passo 10.2:** Ponta seca em  $A$ , abertura do compasso de tal maneira que interseccione  $BC$  ou  $s$  em dois pontos auxiliares, trace e marque  $A_1$  e  $A_2$ ;

**Passo 10.3:** Ponta seca em  $A_1$ , abertura maior que a metade de  $A_1A_2$  e trace abaixo e acima de  $s$ , análogo para ponta seca em  $A_2$ . Marque  $A_3$  e  $A_4$ , pontos auxiliares;

**Passo 10.4:** Trace a reta  $r_1$  perpendicular a  $r$  passando pelos pontos  $A$ ,  $A_3$  e  $A_4$ ;

**Passo 10.5:** Marque  $H_A$  ponto de intersecção entre  $r$  e  $r_1$  e destaque  $AH_A = h_a$  a altura relativa do triângulo  $ABC$  a base  $BC$ ;

**Passo 10.6:** Seguindo do **passo 10.2** até o **passo 10.5** analogamente, são construídas  $BH_B = h_b$  a altura relativa a base  $AC$  e  $CH_C = h_c$  a altura relativa a base  $AB$  do triângulo  $ABC$ ;

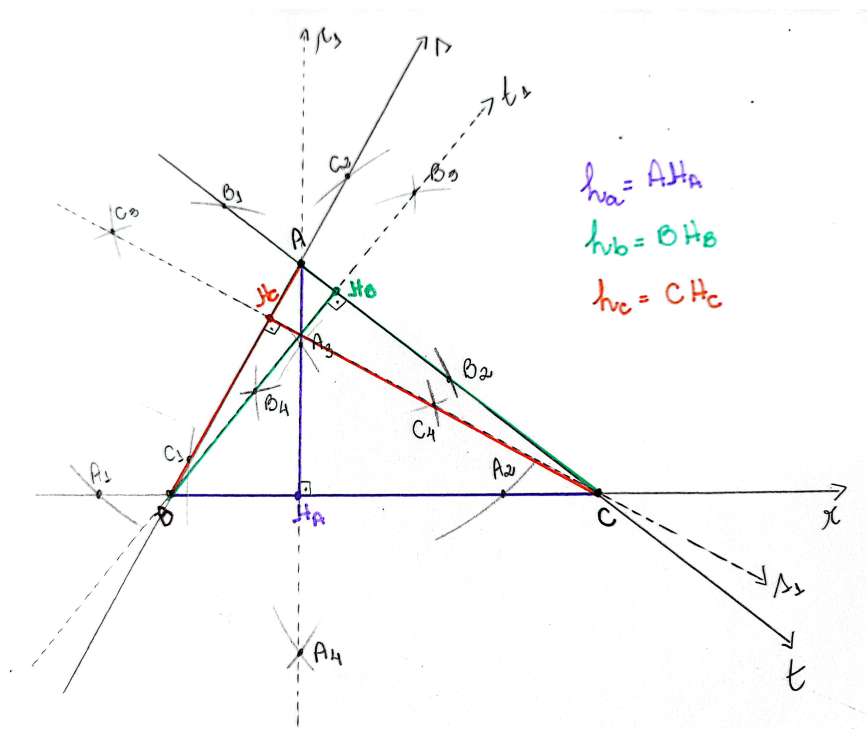


Figura 139 – Construção:  
 $h_a = AH_A$ ,  $h_b = BH_B$  e  $h_c = CH_C$ .

**Passo 10.7:** Construção da terça parte de cada altura,  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ ;

**Passo 10.8:** Considere a reta suporte  $r_1$  e contido nela, o segmento  $AH_A = h_a$  a altura relativa ao lado  $BC$  do triângulo  $ABC$ , como na [Figura 139](#);

**Passo 10.9:** Passando por  $A$ , trace uma reta  $r_2$ , com qualquer ângulo  $\alpha$ ;

**Passo 10.10:** Qualquer abertura do compasso, ponta seca em  $A$  e trace  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  pontos consecutivos em  $r_2$ , ou seja, após traçar  $A_1$ , ponta seca nele e com a mesma abertura, trace  $A_2$ , ponta seca em  $A_2$  e trace  $A_3$ . Nomeie os pontos  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  em  $r_2$ ;

**Passo 10.11:** Trace a reta  $r_3$  que passa por  $A_3$  e  $H_A$ . Destaque o segmento  $A_3H_A$ ;

**Passo 10.12:** Construção de  $r_4$  perpendicular a  $r_3$ . Ponta seca em  $A_2$ , abertura do compasso de tal maneira que intersecte a reta  $r_3$  nos pontos auxiliares  $H_{A_1}$  e  $H_{A_2}$ . Destaque tais pontos. Ainda com a mesma abertura, ponta seca em  $H_{A_1}$ , trace nos dois lados de  $r_3$  e faça o mesmo para a ponta seca em  $H_{A_2}$ . Destaque os pontos auxiliares  $H_{A_3}$  e  $A_2$ . Trace a reta  $r_4$  perpendicular a  $r_3$  em  $H$ . Destaque o ponto  $H$ ;

**Passo 10.13:** Construção de  $r_5$  paralela a  $r_3$ , tal que  $r_5$  passa por  $A_2$  e intersecciona  $r_1$  em  $H_{A_1}$  onde  $H_{A_1}H_A = \frac{1}{3}h_a$ ;

**Passo 10.14:** Ponta seca em  $A_2$ , abertura do compasso até  $H$  e marque em  $r_4$ , à direita de  $A_2$ , o ponto  $H$  e à esquerda de  $A_2$ , o ponto auxiliar  $H_1$ ;

**Passo 10.15:** Ponta seca em  $H$ , abertura do compasso maior que a metade de  $HA_2$  e trace acima e abaixo de  $r_4$ , análogo para ponta seca em  $H_1$ . Marque os pontos auxiliares  $H_2$  e  $H_3$ ;

**Passo 10.16:** Trace  $r_5$  passando por  $H_2$ ,  $A_2$  e  $H_3$ , onde  $r_5$  é perpendicular a  $r_4$  em  $A_2$ , além disso,  $r_5$  é paralela a  $r_3$ ;

**Passo 10.17:** Destaque o ponto  $H_{A_1}$  onde,  $r_5$  intersecciona  $r_1$  e temos  $A_2H_{A_1}$  paralelo a  $HH_A$  e, consequentemente,  $H_{A_1}H_A = \frac{1}{3}h_a$ , destaque  $H_{A_1}H_A$ ;

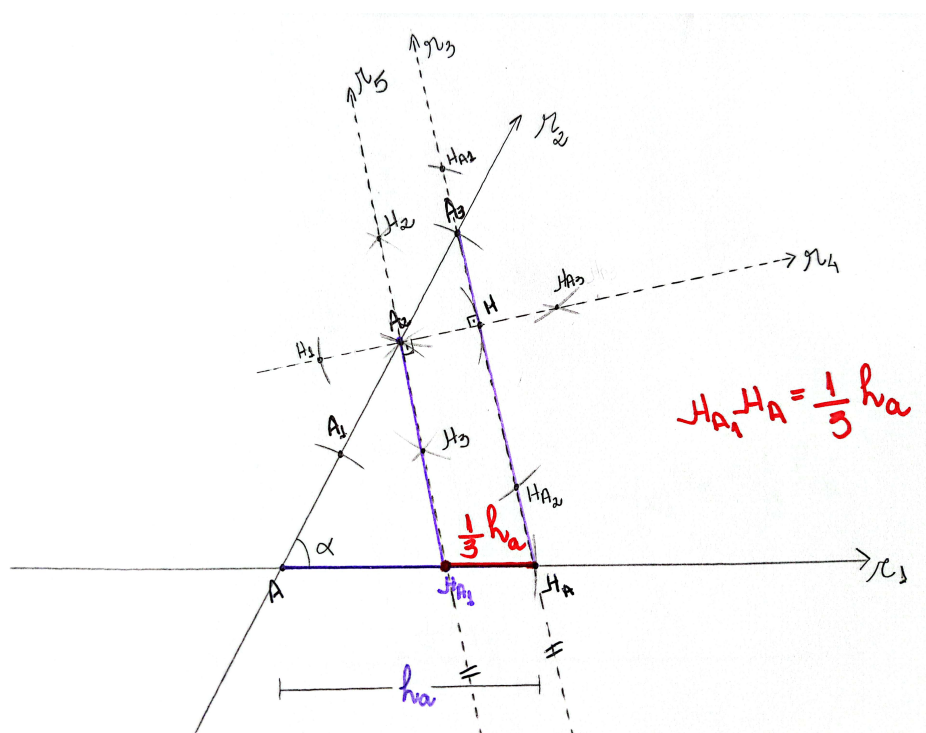


Figura 140 – Construção:  
 $\frac{1}{3}$  de  $h_a$ .

**Passo 10.18:** Considere a reta suporte  $t_1$  e contido nela, o segmento  $BH_B = h_b$  a altura relativa ao lado  $AC$  do triângulo  $ABC$ , como na [Figura 139](#);

**Passo 10.19:** Construção de  $HB_1H_B = \frac{1}{3}h_b$  análoga a  $H_{A_1}H_A = \frac{1}{3}h_a$  do **passo 10.9** ao **passo 10.16**;

**Passo 10.20:** Destaque o ponto  $H_{B_1}$ , onde  $t_5$  intersecciona  $t_1$  e temos  $B_2H_{B_1}$  paralelo a  $HH_B$  e consequentemente  $H_{B_1}H_B = \frac{1}{3}h_b$ , destaque  $H_{B_1}H_B$ ;

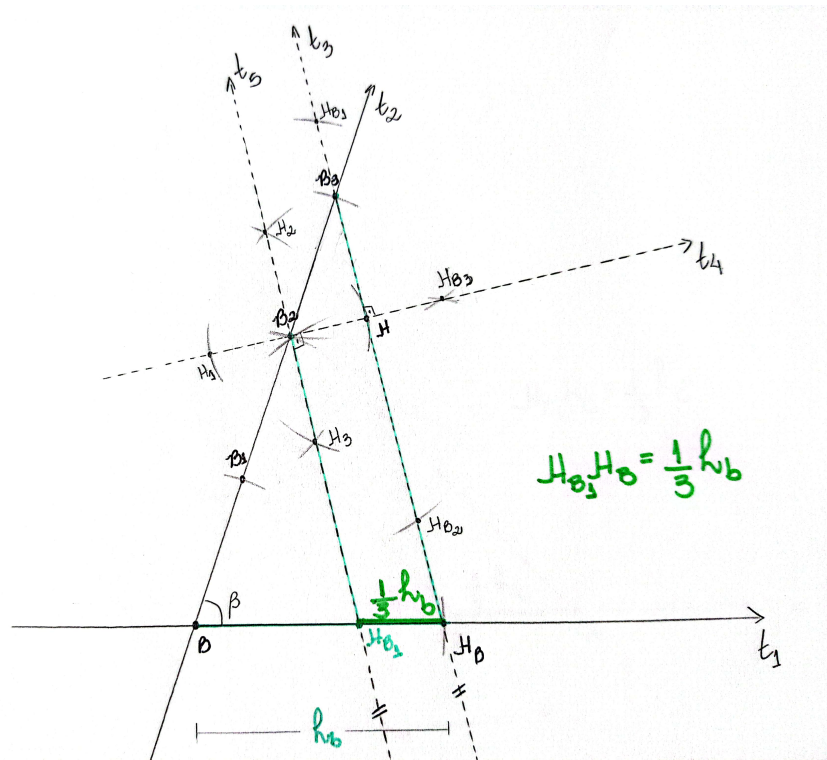


Figura 141 – Construção:  
 $\frac{1}{3}$  de  $h_b$ .

**Passo 10.21:** Considere a reta suporte  $s_1$  e nela o segmento  $CH_C = h_c$  a altura relativa ao lado  $AB$  do triângulo  $ABC$ .

**Passo 10.22:** Construção de  $H_{C_1}H_C = \frac{1}{3}h_c$  análoga a  $HA_1H_A = \frac{1}{3}h_a$  e a  $HB_1H_B = \frac{1}{3}h_b$  do **passo 10.9** ao **passo 10.16**.

**Passo 10.23:** Destaque o ponto  $H_{C_1}$  onde  $s_5$  intersecciona  $s_1$  e temos  $C_2H_{C_1}$  paralelo a  $HH_C$  e consequentemente  $H_{C_1}H_C = \frac{1}{3}h_c$ , destaque  $H_{C_1}H_C$ ;

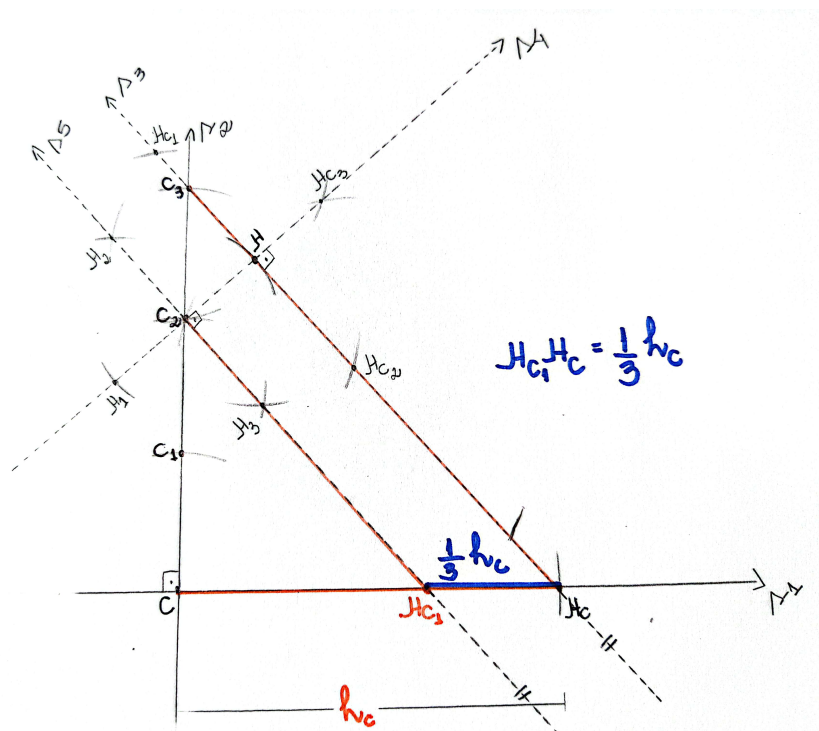


Figura 142 – Construção:  
 $\frac{1}{3}$  de  $h_c$ .

**Passo 10.24:** Construção das retas paralelas as bases  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  internas ao triângulo  $ABC$  a  $\frac{1}{3}h_a$ ,  $\frac{1}{3}h_b$  e  $\frac{1}{3}h_c$ , respectivamente relativas suas bases  $A$  intersecção entre essas três paralelas é o ponto  $P$ . Considere o triângulo  $ABC$  e sua altura  $AH_A = h_a$  para a construção de  $B'C'$  o segmento paralelo a  $BC$  a uma distância  $\frac{1}{3}h_a$  com a base  $BC$  sobre a reta suporte  $r$ ;

**Passo 10.25:** Marque o ponto  $B$  em  $r$  e transporte o segmento  $BC$  da Figura 139 para a figura abaixo, e também transporte a altura  $AH_A = h_a$ , marque  $H_A$  e destaque a altura  $h_a$ ;

**Passo 10.26:** Na Figura 140, ponta seca em  $H_A$ , abertura até  $H_{A_1}$  e transporte o segmento para a Figura 143 partir de  $H_A$ , o comprimento  $\frac{1}{3}h_a$ , marque  $H_{A_1}$  e destaque  $H_A H_{A_1} = \frac{1}{3}h_a$ ;

**Passo 10.27:** Marque  $H_{A_2}$  em qualquer ponto de  $BC$  e construa  $m$  reta mediatriz de  $S_1 S_2$  pontos auxiliares com  $m$  perpendicular a  $r$  em  $H_{A_2}$  passando por  $S_3 S_4$ , pontos auxiliares. Trace  $m$ ;

**Passo 10.28:** Ponta seca em  $H_{A_1}$ , abertura do compasso suficiente para marcar  $S_5 S_6$  em  $m$  pontos auxiliares para a construção da reta  $n$  paralela a  $r$ . Ponta seca em  $S_5$ , abertura maior que a metade de  $S_5 S_6$  e trace á direita e à esquerda de  $m$ , análogo para ponta seca em  $S_6$ . Marque  $S_7$  e  $S_8$  pontos auxiliares;

**Passo 10.29:** Construa  $n$  reta mediatriz de  $S_5 S_6$  passando pelos pontos auxiliares  $S_{37}$  e  $S_8$  e interseccionando  $m$  perpendicularmente em  $S_9$  e interseccionando  $h_a$  perpendicularmente em  $H_{A_1}$ . Assim temos  $n$  é paralela a  $r$ ;

**Passo 10.30:** Marque  $B'$  intersecção de  $AB$  com  $n$  e  $C'$  intersecção de  $AC$  com  $n$ . Destaque  $B'C'$ , assim temos  $BC$  paralelo a  $B'C'$  a  $\frac{1}{3}h_a$  de distância;

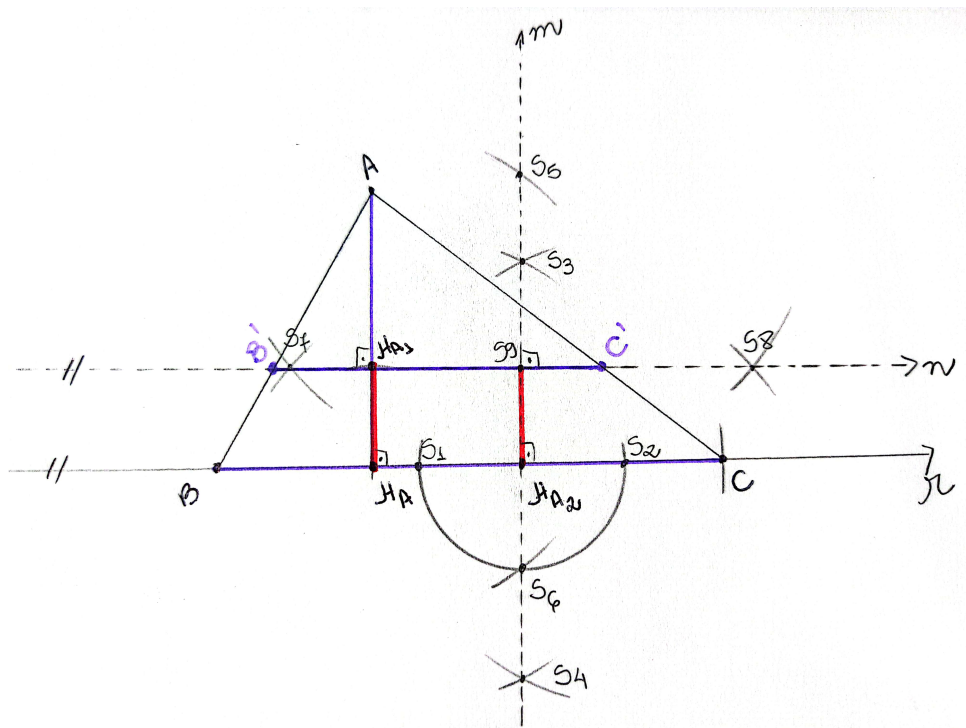


Figura 143 – Construção:  
 $n$  paralela a base  $BC$  a  $\frac{1}{3}$  de  $h_a$ .

**Passo 10.31:** Considere o triângulo  $ABC$  e sua altura  $BH_B = h_b$  para a construção de  $A'C''$  o segmento paralelo a  $AC$  a uma distância  $\frac{1}{3}h_b$ ;

**Passo 10.32:** Para essa construção seguiremos do **passo 10.25** até o **passo 10.29** analogamente a construção de  $BC$  paralelo a  $B'C'$ , temos  $AC$  paralelo a  $A'C''$ ;

**Passo 10.33:** Marque  $A'$  intersecção de  $AB$  com  $j$  e  $C''$  intersecção de  $BC$  com  $j$ . Destaque  $A'C''$ , assim temos  $AC$  paralelo a  $A'C''$  a  $\frac{1}{3}h_b$  de distância;

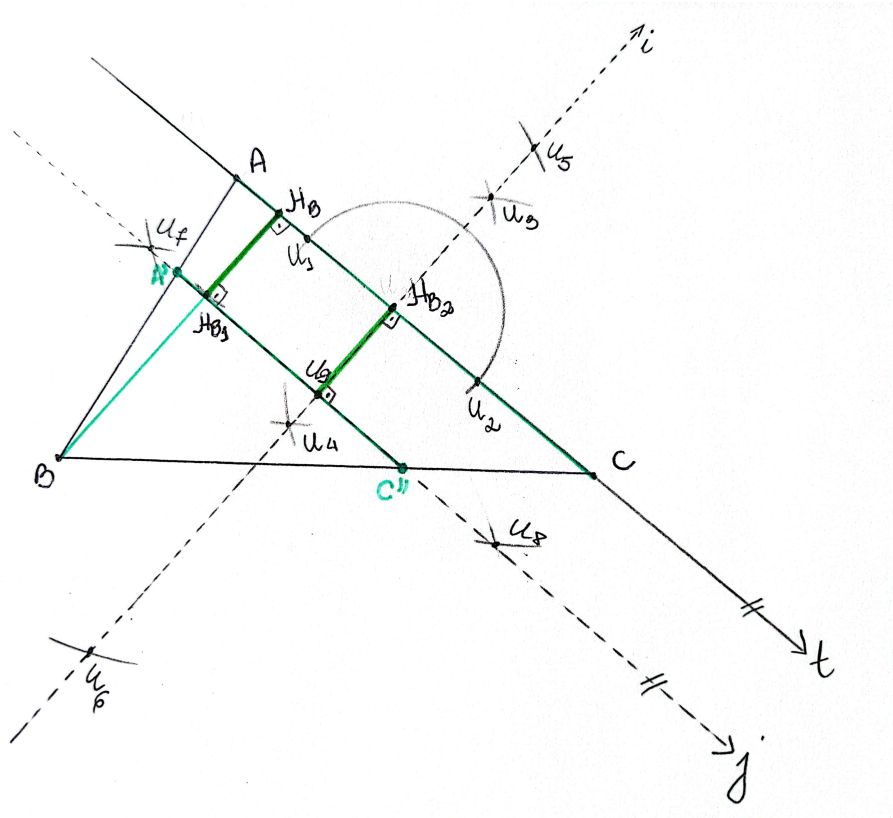


Figura 144 – Construção:  
 $j$  paralela a base  $AC$  a  $\frac{1}{3}$  de  $h_b$ .

**Passo 10.34:** Considere o triângulo  $ABC$  e sua altura  $CH_C = h_c$  para a construção de  $A''B''$  o segmento paralelo a  $AB$  a uma distância  $\frac{1}{3}h_c$ ;

**Passo 10.35:** Para essa construção seguiremos do **passo 10.25** até o **passo 10.29**, analogamente à construção de  $BC$  paralelo a  $B'C'$ , temos  $AB$  paralelo a  $A''B''$ ;

**Passo 10.36:** Marque  $A''$ , intersecção de  $AC$  com  $ll$  e  $B''$ , intersecção de  $BC$  com  $ell$ . Destaque  $A''B''$ , assim temos  $AB$  paralelo a  $A''B''$  a  $\frac{1}{3}h_c$  de distância;

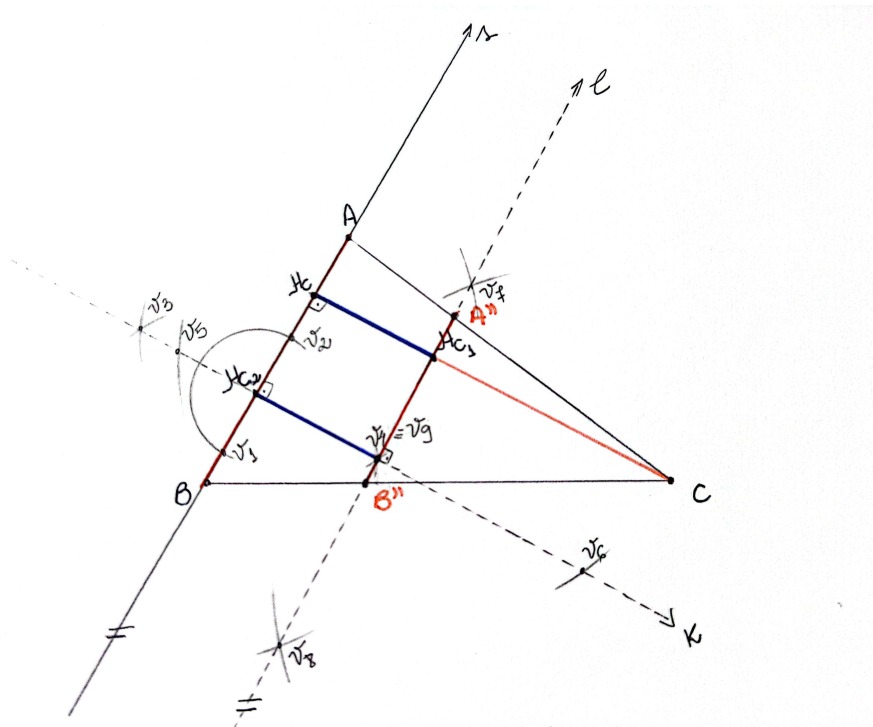


Figura 145 – Construção:  
 $l$  paralela a base  $AB$  a  $\frac{1}{3}$  de  $h_c$ .

Assim, construímos

$B'C'$  paralelo a  $BC$  a uma distância  $H_A H_{A_1} = \frac{1}{3} h_a$ ,

$A'C''$  paralelo a  $AC$  a uma distância  $H_B H_{B_1} = \frac{1}{3} h_b$  e

$A''B''$  paralelo a  $AB$  a uma distância  $H_C H_{C_1} = \frac{1}{3} h_c$

no triângulo  $ABC$ .

**Passo 10.37:** Considere o triângulo  $ABC$  e o transporte dos segmentos obtidos anteriormente,  $B'C'$ ,  $A'C''$  e  $A''B''$  para esse triângulo;

**Passo 10.38:** Ponta seca em  $B$  e abertura até  $B'$  na Figura 143 e transporte para  $BA$  na Figura 146, análogo para  $CC'$  em  $CA$ , destaque o segmento  $B'C'$ ;

**Passo 10.39:** Ponta seca em  $A$  e abertura de  $A'$  na Figura 144 e transporte para  $AB$  na Figura 146, análogo para  $CC''$  em  $CB$ , destaque o segmento  $A'C'$ ;

**Passo 10.40:** Ponta seca em  $A$  e abertura até  $A''$  na Figura 145 e transporte para  $AC$  na Figura 146, análogo para  $BB''$  em  $BC$ , destaque o segmento  $A''B''$ ;

**Passo 10.41:** A intersecção dos segmentos  $B'C'$ ,  $A'C''$  e  $A''B''$  é o ponto  $P$ ;

**Passo 10.42:** Construção dos triângulos  $APB$ ,  $APC$  e  $BPC$  e destaque dos mesmos.

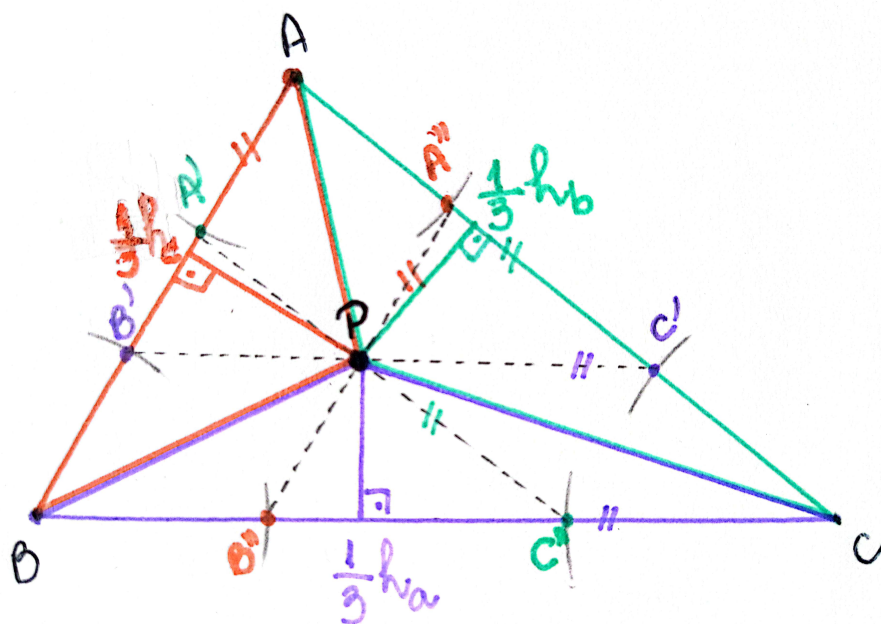


Figura 146 – Construção:

Ponto  $P$  que é a intersecção das três paralelas a  $\frac{1}{3}$  da base de suas respectivas alturas.

Finalmente temos na figura abaixo que

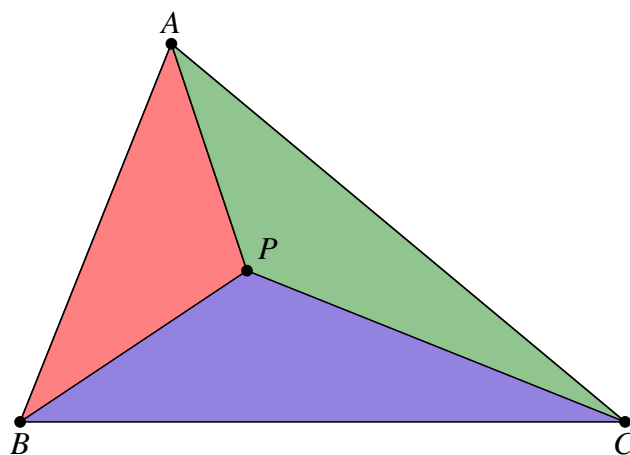
triângulo  $BPC$  com altura  $\frac{1}{3}h_a$ ,

triângulo  $APC$  com altura  $\frac{1}{3}h_b$  e

triângulo  $APB$  com altura  $\frac{1}{3}h_c$ , ou seja,

as áreas desses três triângulos são iguais:

$$(BPC) = (APC) = (APB).$$

Figura 147 – Construção completa  $(ABC) = (BPC) + (APC) + (APB)$ .

---

## REFLEXÃO E CONCLUSÃO

---

Neste capítulo, apresentaremos a análise dos dados observados e coletados durante os anos de docência e pesquisa sobre o ensino de áreas no Ensino Básico. Os resultados obtidos fornecem ideias valiosas sobre a eficácia das abordagens inovadoras no aprendizado dos alunos e destacam as principais contribuições e limitações do estudo.

### 9.1 Análise de Dados

A análise dos dados coletados durante os anos de docência revelou resultados promissores em relação ao uso de abordagens inovadoras e o estudo do erro no ensino de áreas. Os alunos que foram expostos a metodologias ativas, recursos tecnológicos e conexões com situações reais demonstraram maior engajamento, interesse e compreensão dos conceitos de áreas.

Os alunos que participaram de atividades práticas, como o projeto multidisciplinar, fazendo a medição de áreas de figuras em ambientes reais, relataram uma melhor compreensão dos conceitos e uma maior motivação para aprender matemática, já que puderam visualizar a aplicação dos conceitos de áreas em seu cotidiano, o que os ajudou a perceber a relevância desses conhecimentos.

No projeto multidisciplinar não houve a aplicação de recursos tecnológicos, como softwares educacionais e aplicativos interativos. Tais ferramentas foram inteiramente utilizadas as aulas no período da pandemia de COVID-19, quando o isolamento, por quase dois anos, obrigou que as aulas acontecessem online e com muita limitação. Nesse momento, a utilização desses recursos teve um impacto positivo no aprendizado dos alunos, uma vez que se envolveram ativamente na exploração e manipulação de figuras geométricas, o que os ajudou a compreender melhor as relações entre os elementos das figuras e a desenvolver estratégias para calcular áreas. A representação visual e interativa desses conceitos matemáticos facilitou a compreensão e a retenção das informações, principalmente em um período longe do professor fisicamente.

A utilização de um guia passo a passo de exercícios também se mostrou eficaz na promoção da aprendizagem dos alunos, pois foram capazes de seguir uma sequência estruturada de atividades, progredindo gradualmente em seu aprendizado. Um guia forneceu explicações claras, exemplos ilustrativos e dicas úteis, o que os ajudou a compreender e aplicar os conceitos de áreas de forma mais confiante e autônoma.

## 9.2 Considerações finais

### 9.2.1 Contribuições

Este estudo sobre o ensino de áreas no Ensino Básico teve como objetivo explorar abordagens inovadoras e sua eficácia no aprendizado dos alunos. Ao longo do estudo, identificamos diversas contribuições significativas que podem beneficiar o ensino de matemática como um todo. Uma das principais contribuições deste estudo é a evidência de que o estudo e análise do erro, algumas abordagens inovadoras, como metodologias ativas, recursos tecnológicos, conexões com situações reais, podem promover uma aprendizagem mais significativa e envolvente no ensino de áreas, posto que despertam o interesse, a curiosidade e a motivação dos alunos, tornando o estudo de áreas mais acessível e prazeroso.

A utilização de um guia passo a passo de exercícios, que mesmo remetendo um pouco à ideia do ensino tradicional, ainda assim, mostra-se uma ferramenta eficaz para auxiliar os alunos na compreensão e estudo dessa sequência, como também, auxiliar professores na elaboração de conteúdos didáticos para as aulas de geometria. Ele fornece um recurso prático e abrangente aos professores, estratégias de resolução, dicas e exemplos ilustrativos para abordar cada exercício de forma eficaz. Consequentemente, facilita a compreensão e a assimilação dos conteúdos, permitindo que os estudantes progridam de forma gradual e principalmente segura em seu aprendizado.

Outra contribuição importante deste estudo é a constatação de que as abordagens inovadoras no ensino de áreas promovem o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais aos alunos. Ao utilizar metodologias ativas, o estudo do erro, os alunos são estimulados a pensar criticamente, a resolver problemas de forma criativa e a se comunicar matematicamente, habilidades que são fundamentais não apenas para o aprendizado da matemática, mas também para o desenvolvimento geral dos alunos, preparando-os para enfrentar desafios em suas vidas pessoais e profissionais.

Além das contribuições diretas para o ensino de matemática, as abordagens inovadoras no ensino de áreas também promovem a interdisciplinaridade, uma vez que, ao conectar os conceitos de áreas com situações do cotidiano, os estudantes são incentivados a explorar as relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, como a arquitetura, a engenharia, a física, a biologia e a economia.

Essa interconexão entre disciplinas permite que os alunos compreendam a importância da matemática como uma ferramenta para a solução de problemas em diferentes contextos, ampliando seu horizonte de conhecimento e estimulando seu interesse por outras áreas do saber. Podemos concluir claramente a partir do projeto multidisciplinar relatado no [Capítulo 5](#).

Outra contribuição relevante deste estudo é a promoção da inclusão e da diversidade no ensino de matemática, pois ao utilizar abordagens inovadoras, os professores podem adaptar as atividades de ensino de áreas para atender às necessidades individuais de cada aluno. Por exemplo, estudantes com habilidades visuais limitadas ou não, podem beneficiar-se do uso de recursos tecnológicos que permitem a manipulação de figuras geométricas. Estudantes com habilidades táteis desenvolvidas, podem envolver-se em atividades práticas como a medição de áreas, via uso de instrumentos, como compasso, régua, transferidor e esquadros. Dessa forma, as abordagens inovadoras no ensino de áreas permitem que os alunos desenvolvam suas habilidades e potenciais de maneira inclusiva, respeitando suas características individuais.

Além das contribuições diretas para o ensino de áreas, este estudo também destaca a importância da formação contínua dos professores, a fim de que implementem com sucesso as abordagens inovadoras. Logo, os professores precisam estar atualizados com as últimas pesquisas e práticas pedagógicas, ou seja, é essencial investir na formação dos professores, proporcionando-lhes oportunidades de aprendizado e desenvolvimento profissional. Isso inclui a oferta de cursos de capacitação, *workshops*, grupos de estudo e acesso a materiais educacionais atualizados. Ao investir nessa formação, podemos fortalecer a qualidade do ensino de matemática e garantir que as abordagens inovadoras sejam implementadas de forma eficaz e permanente.

Por fim, é importante ressaltar que as contribuições deste estudo não se limitam apenas ao contexto escolar, mas, também, de forma mais ampla à sociedade, pois o desenvolvimento de habilidades matemáticas sólidas é fundamental para a formação de cidadãos críticos e participativos, capazes de tomar decisões informadas e contribuir de maneira significativa para o progresso social e econômico.

Além disso, ao despertar o interesse e a motivação dos alunos pelo estudo de áreas, as abordagens inovadoras no ensino de matemática podem influenciar positivamente a escolha de carreiras relacionadas à ciência, tecnologia, engenharia e matemática STEM<sup>1</sup>, áreas que desempenham um papel fundamental no desenvolvimento e inovação de uma sociedade.

Em suma, este estudo sobre o ensino de áreas no ensino básico identificou diversas contribuições significativas das abordagens inovadoras. Através do uso de metodologias ativas, recursos tecnológicos, conexões com situações reais, guias de exercícios e formação contínua dos professores, é possível promover uma aprendizagem mais significativa, envolvente e inclusiva no ensino de áreas.

---

<sup>1</sup> STEM é um acrônimo em língua inglesa para “*science, technology, engineering and mathematics*” (“ciência, tecnologia, engenharia e matemática”), que representa um sistema de aprendizado científico, que agrupa disciplinas educacionais nessas áreas.

Portanto, essas abordagens não apenas aprimoram o desempenho dos alunos em matemática, como também desenvolvem habilidades cognitivas essenciais, promovem a interdisciplinaridade, fomentam a inclusão e diversidade, impactando positivamente a sociedade como um todo. Por essa razão, é fundamental que educadores, pesquisadores, gestores educacionais e demais envolvidos no campo da educação matemática valorizem e adotem essas abordagens inovadoras, buscando sempre aprimorar a qualidade do ensino de matemática e proporcionar aos alunos as melhores oportunidades de aprendizado.

### **9.2.2 Limitações**

É importante destacar que a eficácia das abordagens inovadoras no ensino de áreas pode variar de acordo com o contexto educacional, nas características dos alunos e com as condições de implementação. Diferentes escolas, regiões e sistemas educacionais podem apresentar desafios e recursos diversos que influenciam quanto a implementação e os resultados das abordagens inovadoras.

Portanto, é necessário considerar essas variáveis contextuais ao avaliar a generalização dos resultados deste estudo para outros ambientes educacionais. Outra limitação a ser considerada é a necessidade de recursos adequados para a implementação das abordagens inovadoras, já que o uso de metodologias ativas e recursos tecnológicos requer investimentos em materiais, equipamentos e formação dos professores. Nem todas as escolas possuem recursos financeiros e infraestrutura adequada para adotar essas abordagens de forma abrangente, o qual pode limitar a viabilidade e a sustentabilidade da implementação das abordagens inovadoras em algumas realidades educacionais. Assim, é importante que os gestores educacionais considerem essas limitações financeiras e estruturais ao planejar a adoção de abordagens inovadoras no ensino de áreas.

Outra limitação importante a ser mencionada é a resistência a mudanças por parte dos professores e demais atores envolvidos no processo educativo. A implementação de abordagens inovadoras requer uma mudança de paradigmas em relação às práticas docentes tradicionais, o que pode gerar resistência e desafios relacionados à aceitação e adaptação dos professores, os quais precisam estar dispostos a experimentar novas metodologias, adquirir novas habilidades e lidar com possíveis obstáculos durante o processo de mudança para a implementação.

A resistência à mudanças pode comprometer a eficácia e a sustentabilidade das abordagens inovadoras no ensino de áreas. Portanto, é fundamental investir em programas de formação e apoio aos professores, visando capacitá-los e motivá-los a adotar práticas inovadoras em suas salas de aula.

Uma limitação adicional a ser considerada é a avaliação dos resultados. Embora este estudo tenha fornecido evidências promissoras sobre a eficácia das abordagens inovadoras no ensino de áreas, é necessário estabelecer mecanismos adequados de avaliação para medir de forma precisa e abrangente os impactos dessas abordagens no aprendizado dos alunos.

A avaliação deve ir além da simples mensuração do conhecimento matemático adquirido, abrangendo também a compreensão dos conceitos, o desenvolvimento de habilidades cognitivas, a motivação dos alunos, entre outros aspectos relevantes. Logo, é fundamental que pesquisadores e educadores trabalhem em conjunto para desenvolver instrumentos de avaliação validados e alinhados com os objetivos das abordagens inovadoras.

Por fim, é importante ressaltar que a implementação das abordagens inovadoras no ensino de áreas requer um compromisso coletivo e contínuo de todos os envolvidos no processo educativo. É necessário um ambiente favorável, com políticas educacionais que valorizem e apoiem a adoção de práticas inovadoras, bem como uma cultura escolar que encoraje a experimentação e a reflexão sobre as práticas de ensino. A colaboração entre os diferentes atores, incluindo educadores, gestores educacionais, pesquisadores e comunidade escolar, é essencial para superar as limitações e promover uma transformação efetiva no ensino de áreas.

Em suma, embora este estudo sobre o ensino de áreas tenha apresentado contribuições significativas das abordagens inovadoras, é importante considerar as limitações inerentes à pesquisa. A amostra limitada, a duração do estudo, a necessidade de recursos adequados, a resistência às mudanças e a avaliação dos resultados são aspectos que devem ser levados em conta ao interpretar e generalizar os resultados deste estudo.

No entanto, essas limitações não diminuem a relevância e o potencial das abordagens inovadoras no ensino de áreas. Ao contrário, elas destacam a importância de aprimorar continuamente a pesquisa e a prática educacional, visando superar essas limitações e promover uma educação matemática de qualidade, inclusiva e significativa para todos os alunos.

### **9.2.3 Sugestões para trabalhos futuros**

Com base nos resultados obtidos e nas limitações identificadas neste estudo sobre o ensino de áreas no ensino básico, surgem diversas sugestões para trabalhos futuros que podem ampliar nosso conhecimento sobre o tema e aprimorar a eficácia das abordagens inovadoras. Nesta seção, discutiremos algumas dessas sugestões com maiores detalhes.

Uma sugestão importante para pesquisas futuras é a realização de estudos com amostras maiores e mais diversificadas. Embora este estudo tenha fornecido ideias valiosas e algumas experiências, é necessário ampliar a amostra para obter resultados mais generalizáveis.

A inclusão de diferentes contextos educacionais, como escolas urbanas e rurais, públicas e privadas, permitiria investigar possíveis variações nos efeitos das abordagens inovadoras. Igualmente, diferentes realidades socioeconômicas, culturais e geográficas podem influenciar a eficácia dessas abordagens, portanto, é importante considerar a diversidade dos contextos educacionais.

Além disso, sugere-se a realização de estudos longitudinais que acompanhem os alunos ao longo de um período mais extenso do que um bimestre ou um ano letivo. Embora este estudo tenha fornecido uma visão das melhorias observadas em um curto prazo, é fundamental investigar a durabilidade desses efeitos. Estudos que acompanhem os alunos por vários anos permitiriam avaliar se os benefícios observados durante a implementação das abordagens inovadoras se mantêm ao longo do tempo, ajudando a determinar a sustentabilidade dessas abordagens e a compreender como elas contribuem para a construção de uma base sólida de conhecimento matemático.

Outra sugestão para trabalhos futuros é aprofundar a investigação da implementação das abordagens inovadoras em diferentes instituições de ensino. Cada escola possui suas próprias características e desafios específicos, portanto adaptar as abordagens inovadoras às necessidades particulares de cada instituição pode potencializar ainda mais os resultados positivos, já que é possível ver a diferença de resultados em salas diferentes. Nesse sentido, é relevante investigar como os professores se apropriam dessas abordagens, quais adaptações são feitas e quais obstáculos podem surgir durante o processo de implementação. Estudos que explorem os aspectos forneceriam informações valiosas sobre como promover a adoção efetiva das abordagens inovadoras no ensino de áreas.

Também é importante notar que, além do ensino de áreas, é interessante explorar o potencial das abordagens inovadoras em outros tópicos da matemática. Embora este estudo tenha se concentrado especificamente no ensino de áreas, existem muitos outros conceitos matemáticos que podem se beneficiar dessas abordagens. Investigar a aplicação das metodologias ativas, dos recursos tecnológicos, o estudo do erro e as conexões com situações reais em outros temas matemáticos, permitiria uma compreensão mais abrangente da eficácia dessas estratégias de ensino. Por exemplo, poderiam ser explorados estudos sobre ensino de geometria, álgebra, estatística e trigonometria, entre outros.

Adicionalmente, é relevante considerar a formação contínua dos professores como um aspecto-chave no uso efetivo das abordagens inovadoras. Investir em programas de capacitação e atualização para os educadores, que abordem as estratégias de ensino inovadoras, pode fortalecer a implementação dessas abordagens nas salas de aula. Os professores desempenham um papel fundamental no processo educacional, por isso é essencial que estejam preparados para utilizar as abordagens inovadoras de forma eficaz.

É necessário mudar o conceito de erro e, a partir de cada erro, o professor tenha a habilidade de construir o conhecimento a fim de que o aluno de fato aprenda. Em outras palavras, fazer com que o erro deixe de ser um trauma ou uma vergonha para o aluno e passe a ser uma ferramenta poderosa de incentivo à investigação e compreensão do que aconteceu com seu raciocínio induzindo-o ao erro.

Dessa maneira, pesquisas futuras podem se concentrar em desenvolver e avaliar programas de formação continuada que promovam a aquisição de conhecimentos, habilidades e competências necessárias para a implementação bem-sucedida das abordagens inovadoras no ensino de áreas.

Outra direção interessante para pesquisas futuras é a investigação dos impactos das abordagens inovadoras no desenvolvimento de habilidades cognitivas e não cognitivas dos alunos. Apesar de que este estudo tenha se concentrado na aprendizagem de conceitos matemáticos, as abordagens inovadoras têm o potencial de promover o desenvolvimento de uma ampla gama de habilidades, como pensamento crítico, resolução de problemas, trabalho em equipe e comunicação. Pesquisas adicionais poderiam explorar esses efeitos, examinando como as abordagens inovadoras influenciam o desenvolvimento de habilidades cognitivas e socio-emocionais, além de investigar possíveis relações entre essas habilidades e o desempenho acadêmico dos alunos.

Em relação aos recursos tecnológicos, é importante continuar a explorar sua utilização de maneira crítica e reflexiva. Ainda que a tecnologia possa trazer benefícios significativos para o ensino de áreas, é necessário considerar as limitações e desafios associados ao seu uso. Assim, estudos futuros podem investigar questões como acesso equitativo à tecnologia, formação dos professores para a utilização de recursos tecnológicos, desenvolvimento de softwares educacionais eficazes e avaliação da eficácia desses recursos no aprendizado de áreas. Essas pesquisas contribuiriam para uma compreensão mais completa dos benefícios e desafios da integração de recursos tecnológicos no ensino de matemática.

Além disso, sugere-se a realização de estudos comparativos entre diferentes abordagens inovadoras. Embora este estudo tenha investigado algumas abordagens, como metodologias ativas e conexões com situações reais, existem outras estratégias de ensino inovadoras que também podem ser exploradas. Estudos comparativos entre diferentes abordagens permitiriam identificar quais são as mais eficazes e em quais contextos elas se aplicam melhor. Logo, compreender as nuances e os efeitos específicos de cada abordagem contribuiria para orientar a prática pedagógica e a tomada de decisões dos educadores.

Considerando a amplitude e a complexidade do tema, é importante destacar que esta dissertação representa apenas um ponto de partida para futuras investigações. As sugestões apresentadas fornecem uma base para a continuidade da pesquisa no campo do ensino de áreas no ensino básico.

A realização de estudos adicionais com amostras mais representativas, acompanhamento longitudinal dos alunos, investigação da implementação em diferentes instituições de ensino, exploração de outras áreas da matemática e consideração da formação contínua dos professores contribuirão para o avanço do conhecimento e aprimoramento do ensino de matemática, além de estender a aplicação de metodologias ativas e inovadoras no ensino de áreas no ensino superior.

Em conclusão, este estudo revelou a eficácia de abordagens inovadoras, como metodologias ativas, recursos tecnológicos e conexões com situações reais, no ensino de áreas. As contribuições identificadas sugerem que essas abordagens promovem uma aprendizagem mais significativa, despertam o interesse e a motivação dos alunos, somando ao fato de facilitar a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos relacionados às áreas.

No entanto, é importante continuar a explorar e a aprimorar essas abordagens por meio de pesquisas adicionais e adaptações contextuais, visando a melhoria contínua do ensino de matemática. Ao abordar as sugestões para trabalhos futuros, espera-se que este estudo sirva como ponto de partida para investigações mais aprofundadas e contribua para o avanço do campo do ensino de áreas no ensino básico, visando o ensino superior.

## REFERÊNCIAS

---

- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2024. Maio. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>>. Citado na página 53.
- CARIANHA, M. S. *et al.* O erro matemático como processo de ensino-aprendizagem. **II Semana de Educação Matemática. UESB. Salvador**, p. 25–28, 2010. Citado na página 41.
- DANTE, L. R. **Matemática: volume único**. [S.l.]: Ática, 2005. ISBN 978-85-08-09801-9. Citado na página 59.
- DELARUE, G. **Deixe sempre uns trocados para a lâmina de barbear**. [S.l.]: UICLAP, 2022. ISBN 978-65-00-42007-4. Citado na página 11.
- D'AMBROSIO, U. Etnomatemática e modelagem. In: **Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática–CBEm-1**. [S.l.: s.n.], 2000. p. 142. Citado na página 41.
- ESTADO DE SÃO PAULO. **Currículo Paulista**. [S.l.], 2024. Maio. Disponível em: <<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>>. Citado na página 53.
- EUCLIDES. **Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo**. [S.l.]: UNESP, 2009. ISBN 978-85-7139-935-8. Citado nas páginas 33 e 59.
- NETO, S. L. **Construções Geométricas - Exercícios e Soluções**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 156 p. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 9788585818425. Citado na página 113.
- ONUCHIC, L. d. I. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP**, p. 199–220, 1999. Citado na página 41.
- PONTE, J. B. João Pedro da; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: [s.n.], 2019. 160 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática). ISBN 978-85-513-0585-0. Citado na página 41.
- SANTOS, C. A. M. dos; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática: volume único**. 6. ed. [S.l.]: Ática, 2000. ISBN 85-08-07665-7. Citado na página 59.
- SEDUC. **Transparência Educação**. 2024. Maio. Disponível em: <<https://transparencia.educacao.sp.gov.br/Home/DetalhesEscola?codesc=17310>>. Citado na página 50.
- SOUZA, M. H. de; SPINELLI, W. **Matemática: 6ª série**. [S.l.]: Ática, 1999. ISBN 85-08-07414-X. Citado na página 59.
- WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 127 p. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 9788585818722. Citado na página 113.

