

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Resta Um - Busca de Estratégias na Resolução

Jair Ferreira da Cunha

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Jair Ferreira da Cunha

Resta Um - Busca de Estratégias na Resolução

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
Março de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

C972r Cunha, Jair Ferreira da
Resta Um - Busca de Estratégias na Resolução /
Jair Ferreira da Cunha; orientador Alexandre
Casassola Gonçalves. -- São Carlos, 2021.
101 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Introdução Histórica. 2. Na Sala de Aula. 3.
Desvendando o Jogo. 4. Considerações Sobre as
Soluções. I. Gonçalves, Alexandre Casassola, orient.
II. Título.

Jair Ferreira da Cunha

Remains One - Strategy Search in Resolution

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
March 2021

*Este trabalho é dedicado à Deus,
que na sua infinita bondade e misericórdia, proporcionou-me força e coragem pra
superar as dificuldades.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, principalmente, ao Professor Doutor **Alexandre Casassola Gonçalves**, pelo empenho, dedicação e apoio no decorrer do curso.

Agradeço aos colegas de turma pela disposição, colaboração e apoio moral nos momentos de dificuldade.

Agradeço também aos colegas da Escola Estadual "**Anselmo Bispo dos Santos**", que durante os anos dedicados ao curso, estiveram sempre prontos a colaborar e incentivar.

Carinhoso agradecimento aos alunos da Escola Estadual "Anselmo Bispo dos Santos", pela colaboração e participação na pesquisa.

Agradecimentos especiais aos **FAMILIARES** pelo apoio e compreensão, nos momentos de distanciamento e pouca atenção dedicada.

Agradecimentos também ao **IMPA** pelo carinho e cuidado na realização do Projeto **ProfMat**.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”
(Isaac Newton)

RESUMO

CUNHA, J. F. **Resta Um - Busca de Estratégias na Resolução**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Esta dissertação é fruto de uma pesquisa sobre o jogo **Resta Um**, a qual deteve-se a solucionar o mesmo; buscou-se estratégias de resolução e novas formas de jogá-lo, que converteram-se em possibilidades de vencer os desafios. O resultado obtido foi uma variada quantidade de estratégias para a realização; uma *teoria* baseada em **congruências** e muitas soluções para o jogo.

Palavras-chave: Resta Um, Estratégias de Resolução, Teoria, Jogadas, Soluções.

ABSTRACT

CUNHA, J. F. **Remains One - Strategy Search in Resolution**. 2021. 101 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

This dissertation is the result of a research on the game **It remains One**, which stopped to solve the same; we sought strategies for resolution and new ways of playing it, which became possibilities to overcome the challenges. The obtained result was a varied amount of strategies for the realization; a *theory* based on **congruences** and many solutions to the game.

Keywords: Remains One, Strategies of Resolution, Theory, Plays, Solutions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A Princesa de Soubise jogando paciência - 1687	25
Figura 2 – Configuração Tradicional	27
Figura 3 – Objetivo Inicial	28
Figura 4 – Configuração Inglesa	28
Figura 5 – Configuração Alemã	29
Figura 6 – Configuração Assimétrica	29
Figura 7 – Configuração Diamante	30
Figura 8 – Configuração Francesa	30
Figura 9 – Alunos da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos".	35
Figura 10 – Alunos da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos".	35
Figura 11 – Configuração Numerada	36
Figura 12 – Restam 26 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	37
Figura 13 – Restam 15 - Solução dada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	40
Figura 14 – Restam 10 - Solução proposta pelo autor	40
Figura 15 – Restam 9 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	41
Figura 16 – Restam 9 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	42
Figura 17 – Restam 7 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	43
Figura 18 – Restam 7 - Proposto pelo autor	43
Figura 19 – Restam 7 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	44
Figura 20 – Restam 6 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	45

Figura 21 – Restam 6 - Solução encontrada por duas alunas da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	46
Figura 22 – Restam 5 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	47
Figura 23 – Restam 5 - Proposto pelo autor	47
Figura 24 – Restam 4 - Solução encontrada por duas alunas da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	48
Figura 25 – Restam 4 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	49
Figura 26 – Restam 3 - Solução encontrada por duas alunas da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	50
Figura 27 – Restam 3 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	50
Figura 28 – Restam 3 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	51
Figura 29 – Restam 3 - Proposto pelo autor	52
Figura 30 – Restam 3 - Proposto pelo autor	53
Figura 31 – Restam 2 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	53
Figura 32 – Resta Um - Solução dada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	54
Figura 33 – Resta Um - Solução encontrada por dois alunos da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	65
Figura 34 – Resta Um - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018	66
Figura 35 – Resta Um - Proposto pelo autor	67
Figura 36 – Resta Um - Proposto pelo autor	68
Figura 37 – Restam 17 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	69
Figura 38 – Restam 9 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019	69
Figura 39 – Sistema xOy associado ao Tabuleiro.	72
Figura 40 – Conjuntos de níveis de f e g no tabuleiro.	73

Figura 41 – Configuração Tradicional $F(0) = (10, 11, 11); G(0) = (10, 11, 11)$ e possíveis posições finais.	77
Figura 42 – Estado $\{(10, 10, 11), (10, 10, 11)\}$ e possíveis posições finais.	80
Figura 43 – Uma configuração $\{(8, 10, 11), (8, 10, 11)\}$ e possíveis posições finais.	81
Figura 44 – Uma configuração $\{(9, 10, 10), (9, 10, 10)\}$ e possíveis posições finais.	82
Figura 45 – Uma configuração $\{(8, 11, 11), (8, 11, 11)\}$ e possíveis posições finais.	83
Figura 46 – Uma configuração $\{(9, 10, 11), (9, 10, 11)\}$ e possíveis posições finais.	83
Figura 47 – Uma configuração $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$ e possíveis posições finais.	85
Figura 48 – Uma configuração $\{(10, 10, 10), (10, 10, 10)\}$ e possíveis posições finais.	86
Figura 49 – Uma configuração $\{(7, 11, 11), (7, 11, 11)\}$ e possíveis posições finais.	86
Figura 50 – Uma configuração $\{(11, 9, 9), (11, 9, 9)\}$ e possíveis posições finais.	87
Figura 51 – Exemplo de resolução para o ítem a	91
Figura 52 – Exemplo de resolução para o ítem b_i	92
Figura 53 – Exemplo de resolução para o ítem b_{ii}	92
Figura 54 – Configuração inicial tradicional e objetivo final.	93
Figura 55 – Uma configuração $\{(10, 10, 11), (10, 10, 11)\}$ com objetivo final.	94
Figura 56 – Uma configuração $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$ com objetivo final.	95
Figura 57 – Uma configuração $\{(8, 11, 11), (8, 11, 11)\}$ com objetivo final.	96
Figura 58 – Uma configuração $\{(9, 10, 11), (9, 10, 11)\}$ com objetivo final.	97
Figura 59 – Configuração inicial sem possibilidade de jogo	97
Figura 60 – Desafio 01 e objetivo final - proposto pelos alunos Matheus e Alvaro - 9º ano A - 2019.	98
Figura 61 – Desafio 02 e objetivo final - proposto pelo aluno Eduardo - 9º ano A - 2019.	99
Figura 62 – Desafio 03 e objetivo final - proposto pelo aluno Vitor - 9º ano A - 2019.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Solução 1	37
Tabela 2 – Solução 2	39
Tabela 3 – Solução 3	40
Tabela 4 – Solução 4	41
Tabela 5 – Solução 5	41
Tabela 6 – Solução 6	42
Tabela 7 – Solução 7	43
Tabela 8 – Solução 8	44
Tabela 9 – Solução 9	45
Tabela 10 – Solução 10	45
Tabela 11 – Solução 11	46
Tabela 12 – Solução 12	47
Tabela 13 – Solução 13	48
Tabela 14 – Solução 14	48
Tabela 15 – Solução 15	49
Tabela 16 – Solução 16	50
Tabela 17 – Solução 17	51
Tabela 18 – Solução 18	52
Tabela 19 – Solução 19	52
Tabela 20 – Solução 20	53
Tabela 21 – Solução 21	54
Tabela 22 – Solução 22	65
Tabela 23 – Solução 23	66
Tabela 24 – Solução 24	66
Tabela 25 – Solução 25	67
Tabela 26 – Solução 26	68
Tabela 27 – Solução 27	69

Tabela 28 – Solução para o item a	90
Tabela 29 – Solução para o item b_i	92
Tabela 30 – Solução para o item b_{ii}	92
Tabela 31 – $b = 2$ e $p(n) = 1$	94
Tabela 32 – $b = 2$ e $p(n) = 2$	95
Tabela 33 – $b = 3$ e $p(n) = 1$ (a)	96
Tabela 34 – $b = 3$ e $p(n) = 1$ (b)	96
Tabela 35 – Desafio 01	98
Tabela 36 – Desafio 02	98
Tabela 37 – Desafio 03	99

SUMÁRIO

1	NO MUNDO DO RESTA UM - O JOGO	23
2	NA SALA DE AULA	33
2.1	Apresentação aos alunos	33
2.2	Estratégias desenvolvidas em sala de aula	36
3	DESVENDANDO O MITO	71
3.1	Aspectos Matemáticos	71
3.2	Análise do Jogo com o uso do Teorema 2	76
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS	101

NO MUNDO DO RESTA UM - O JOGO

Jogos! Como seria a humanidade sem eles?

É notório, como ao decorrer de séculos, a humanidade busca meios para se livrar do ócio e do tédio, durante os longos dias de sua pobre existência terrestre.

Na ânsia de encontrar meios para driblar a ociosidade, os seres humanos são capazes de reagir à inércia; achar o que fazer e criarem coisas (algumas delas perduram por séculos) para ocupar o tempo. Surgem ideias mirabolantes, que dão origem a projetos e invenções, que com certeza alavancam o progresso, a **Ciência** e modo como vivemos neste pequeno Planeta, que chamamos de TERRA.

Algumas dessas ideias são tão criativas que originam distrações e passatempos. Perduram algum lapso de tempo, podendo ser alguns momentos ou até mesmo séculos. Em meio a essas idéias surgem os **JOGOS**.

Alguns deles criados para pessoas confrontarem outras; fazerem apostas; usurpar de meios materiais e morais de outro indivíduo e até mesmo, para demonstração de riqueza e poder. Enfim, servem como meios para exibicionismos e, ao mesmo tempo, criarem conflitos. Em sua maioria são os chamados Jogos de Azar.

Mas existem ideias sensacionais, de pessoas providas de bom caráter, que visam apenas o bem estar de toda a humanidade. Servem para brincar e se divertir, além do aprimoramento do raciocínio e da melhoria da qualidade de vida de seus semelhantes. Es-

ses são os casos dos **Jogos Educativos**. Utilizados no processo de ensino-aprendizagem em muitas Unidades de Ensino, de acordo com os objetivos da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (PAULO, 2011) e também das adequações ao novo Currículo Paulista (PAULO, 2019), com mais ou com menos intensidade, dependendo do projeto pedagógico de cada uma.

Um caso (especial) refere-se aos jogos de tabuleiro. Aqui nos deteremos em um deles, conhecido no mundo como PEG SOLITAIRE e no Brasil como **RESTA UM**. Um jogo que foi "**febre**" na Europa no século XVII.

Educativo, divertido e viciante. Fascina adultos e crianças, pela facilidade de compreensão na forma de jogar e ao mesmo tempo, pelo desafio do raciocínio, da criatividade e da perseverança nas resoluções. Jogo este que mexe com a humanidade há alguns séculos.

“Peg solitaire (ou Solo Noble) é um jogo de tabuleiro de Madagascar para um jogador envolvendo movimento de pinos em uma mesa com buracos. Alguns conjuntos usam mármore em uma placa com indentações. O jogo é conhecido simplesmente como Solitaire no Reino Unido, onde os jogos de cartas são chamados de Paciência . É também referido como Brainvita (especialmente na Índia).

A primeira evidência do jogo pode ser rastreada até a corte de Luís XIV, e a data específica de 1687, com uma gravura feita naquele ano por Claude Auguste Bery de Anne de Rohan-Chabot , Princesa de Soubise, com o quebra-cabeça ao seu lado. A edição de agosto de 1687 da revista literária francesa *Mercurie galant* contém uma descrição do quadro, regras e exemplos de problemas. Esta é a primeira referência impressa conhecida do jogo ”.([ATTRIBUTION-SHAREALIKE, 2019](#))



Figura 1 – A Princesa de Soubise jogando paciência - 1687

disponível em <<https://en.wikipedia.org/wiki/Peg-solitaire>>, acesso em 24/01/2019

Existem relatos de que em uma carta escrita em 1716, **Gottfried von Leibniz**, o filósofo e matemático alemão, exaltava as virtudes do jogo, por ser um passatempo que viralizava na Europa daquela época.

Mas todo jogo quando criado, para que fique até mesmo mais interessante, é sempre cercado de um certo mistério. Não é diferente com o **Resta Um**. Quando questiona-se sobre o seu surgimento, a maioria dos relatos são submetidos a uma história onde conta-se que um nobre francês chamado **PELLISON**, para driblar o tédio e a solidão que sentia, preso na solitária da masmorra da Bastilha, tendo a seu dispor somente uma versão física do jogo “**RAPOSAS E GANSOS**”, jogo este para ser disputado entre dois jogadores, fez uma adaptação do mesmo para jogar sozinho. Surge-se assim, o **Resta Um**.

Há muitas semelhanças entre os dois jogos. A ideia de um suporte físico, peças, a forma de jogar e principalmente o fato de sobrar apenas uma peça final. No “**RAPOSAS E GANSOS**”, feito para jogar em dupla, a intenção dos jogadores é que um drible o outro para que possa ganhar o jogo. O “**Raposa**” deve **comer** as peças “**Gansos**” e terminar como peça única. Já os “**Gansos**” possuem como referência principal, o bloqueio dos caminhos do “**Raposa**” para que este não consiga mais evoluir e assim, ganharem o jogo.

Percebe-se uma semelhança de ideias na concepção dos dois jogos. No **Resta Um**, aparentemente uma adaptação, todas as peças são raposas e também gansos. O objetivo é o mesmo: reinar absoluto no final da partida, ou não permitir que a partida termine e, assim, o jogo não apresente solução.

O leitor poderá, a seu critério, utilizar as dicas dadas em (ATTRIBUTION-SHAREALIKE, 2019) e realizar uma interessante viagem aos tempos da **Civilização Francesa** do século XVII, conhecendo o modo de vida daquela época e compreendendo melhor os fatos relatados acima.

Façamos agora um pequeno "tour" pelos dias atuais deste incrível desafio. Um jogo, mundialmente conhecido como **Peg Solitaire**. No Brasil: **Resta Um**.

Envolvente, Desafiador e Motivador. Criado para corresponder aos anseios de um único jogador solitário. Possibilidades de jogadas e estratégias, que motivam milhares de pessoas ao redor do planeta Terra. Um divertimento clássico que possui o poder de envolver e agrupar toda a família, proporcionando momentos de inclusão e convivência dos membros; algo um pouco esquecido na realidade contemporânea.

Para a realização do estudo proposto neste trabalho, torna-se necessário integrarmos alguns conceitos ao mesmo. Então, definimos:

- **Base:** objeto físico que serve de plataforma ou suporte para a alocação dos componentes móveis (peças), que podem ser pinos, bolas, pedras ou outros materiais, necessários para a realização do jogo;
- **Configuração:** disposição inicial das peças sobre a base;
- **Tabuleiro:** cada n -ésima etapa percorrida do jogo, juntamente com a disposição das peças;
- **Jogo:** sucessão de tabuleiros obtidos nas n etapas percorridas.

Observação: Neste trabalho usaremos a palavra **pino(s)** para referirmo-nos à peça(s) do jogo. Também, para melhor compreensão do mesmo, usaremos ilustrações construídas com o pacote Tikzpicture, auxiliado pelo trabalho de Lana Mara R. dos Santos.(SANTOS, 2016)

O jogo, no modelo clássico, apresenta 33 posições ocupáveis (casas) e 32 pinos. Deixa-se vazia uma das posições na configuração ¹ inicial para dar início ao jogo, que tem como objetivo principal, deixar sobrar apenas **um pino** no tabuleiro ² final.

¹ forma como são colocados os pinos na base para início do jogo

² etapa final do jogo juntamente com o pino restante

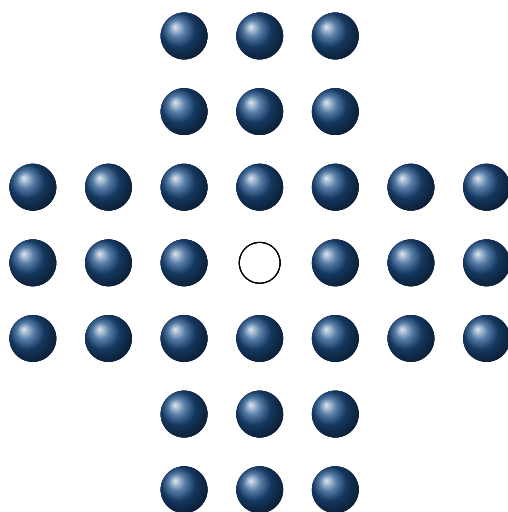


Figura 2 – Configuração Tradicional

Fonte: Elaborada pelo autor.

Joga-se solitariamente nesta configuração obedecendo as seguintes regras:

1. Pular sobre o pino vizinho, ocupando a posição vazia próxima;
2. É proibido pular sobre mais de um pino;
3. É proibido pular sobre uma ou mais posições vazias;
4. Os movimentos são permitidos *somente* nos sentidos horizontal e/ou vertical;
5. Não é permitido mover os pinos no sentido diagonal;
6. O pino pulado é "comido" e retirado do jogo;
7. Se houver a possibilidade de pular mais de um pino em sequência, conta-se uma mesma jogada.
8. Ganha-se o jogo, restando apenas um pino no tabuleiro final.

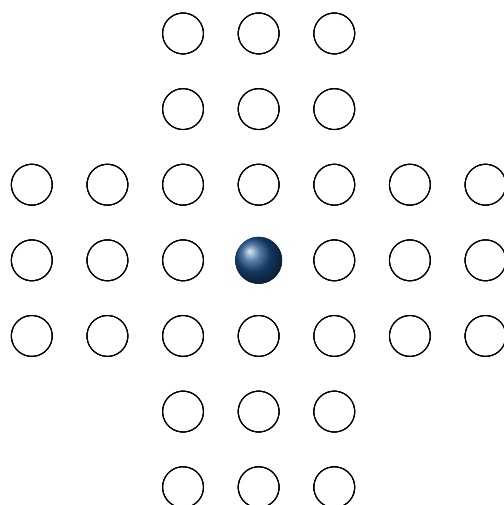


Figura 3 – Objetivo Inicial

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir são apresentadas as principais configurações do jogo ao redor do mundo.

• CONFIGURAÇÃO INGLESA

Também chamado de configuração padrão ou tradicional. É constituída por 33 posições fisicamente ocupáveis, dispostas simetricamente em uma base com forma de cruz e 32 pinos.

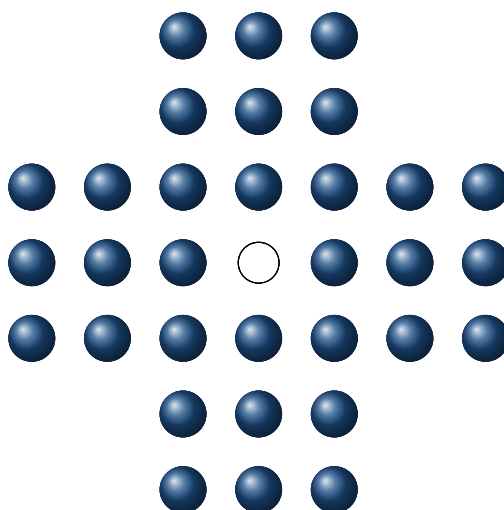


Figura 4 – Configuração Inglesa

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **CONFIGURAÇÃO ALEMÃ**

Uma base composta por 45 posições (dispostas em uma base com forma de cruz simétrica, com 5 quadrados 3x3) e 44 pinos.

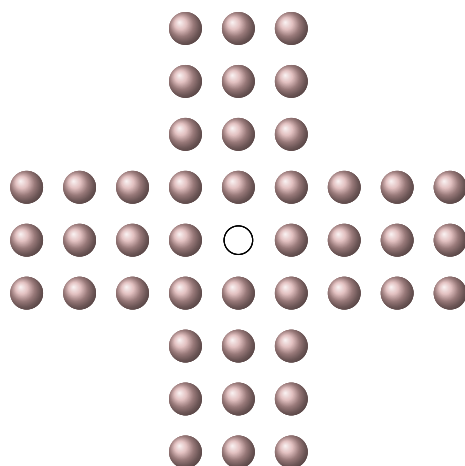


Figura 5 – Configuração Alemã

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **CONFIGURAÇÃO ASSIMÉTRICA** Possui 39 posições (dispostas em um tabuleiro com forma de cruz assimétrica, com 3 quadrados 3x3 e 2 retângulos 2x3) e 38 pinos, conforme mostrado na figura a seguir.

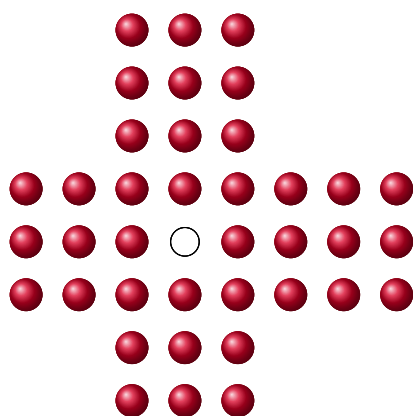


Figura 6 – Configuração Assimétrica

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **CONFIGURAÇÃO DIAMANTE**

Composta por 41 posições, dispostas de forma simétrica em uma base losangular, com 40 pinos, conforme figura a seguir:

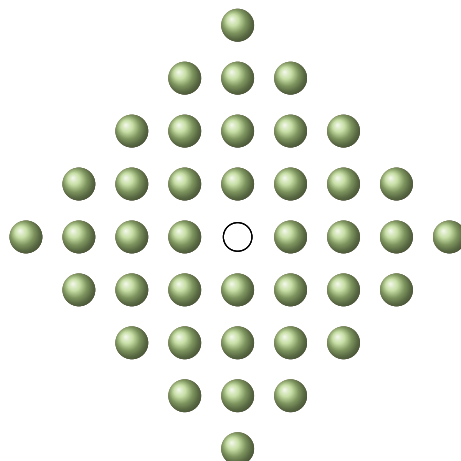


Figura 7 – Configuração Diamante

Fonte: Elaborada pelo autor.

- **CONFIGURAÇÃO FRANCESA** - Formada por 37 posições, dispostas de forma simétrica, em uma base de forma hexagonal com 36 pinos, conforme figura a seguir:

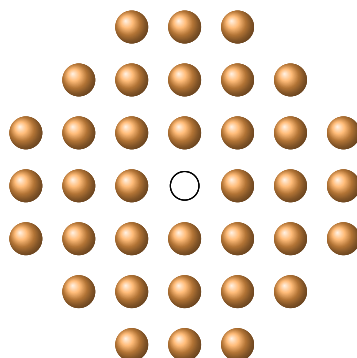


Figura 8 – Configuração Francesa

Fonte: Elaborada pelo autor.

Há outras configurações que não foram explicitadas neste trabalho. Além disso, é possível utilizar apenas parte do jogo e criar desafios, da maneira e na quantidade de pinos que o jogador desejar. A resolução desses desafios, com certeza conduzirá o leitor (jogador) à solução completa do jogo.

Como **foco principal** deste trabalho, atentaremos-nos à **configuração padrão**, composta de 33 posições fisicamente ocupáveis e 32 pinos, em cujo desenvolvimento e possibilidades de resolução, originam-se jogadas e pensamentos estratégicos. Cada jogador, em seu íntimo, busca sempre e cada vez mais, maneiras eficientes de se chegar ao resultado esperado. Durante a execução do jogo são realizadas muitas tentativas de obtenção de sucesso. Nessas tentativas surgem também muitos erros, que por vias tortuosas, tornam-se soluções para o jogo.

No Brasil, a maioria das bases (com respectivos pinos) são acompanhados de um manual, na qual são explicadas as regras acima e apresentam uma classificação para o jogador, sendo:

1. Sobram 6 pinos: **Muito Mal**. (Você está começando a entender como funciona a brincadeira, mas precisa melhorar muito);
2. Sobram 5 pinos: **Mal**. (Você precisa persistir nas melhorias);
3. Sobram 4 pinos: **Regular**. (Você provavelmente já compreende bem as regras do jogo, mas ainda é possível melhorar);
4. Sobram 3 pinos: **Bom**. (Agora você já se encontra em nível satisfatório de entendimento, raciocínio e com naturalidade conseguirá vencer o desafio principal);
5. Sobram 2 pinos: **Muito Bom**. (Você é um(a) jogador(a) ótimo(a); está quase lá; não desista!);
6. Sobra 1 pino: **Ótimo**. Você é excelente, Parabéns! (Conseguiu chegar ao objetivo inicialmente proposto, ou seja, *Ganhou o Jogo*.)

Mas, e agora? Consegue criar os seus desafios? Consegue resolvê-los?

A pergunta principal em relação ao jogo é: "**Existe sempre solução**"?

Cabe ao leitor a interpretação do que seria solução. A proposição de um desafio e o modo estratégico para resolvê-lo, com certeza é uma solução para o jogo. Então, **Vamos lá! Coragem e boa diversão.**

Uma observação importante é que os erros cometidos geram ideias interessantes (desafios) e empolgam o jogador na busca de soluções para o jogo. Algumas dessas soluções serão apresentadas no próximo capítulo, incluindo uma série de esquemas (maneiras de fazer as jogadas) encontrados por alunos em sala de aula e também pelo autor do trabalho, como motivação e inserção do leitor(a) no mundo das ideias do RESTA UM.

NA SALA DE AULA

Neste capítulo analisamos a situação onde a tarefa era: uma atividade prática com o jogo **Resta Um** em uma Unidade Escolar, com o objetivo de desenvolver e descrever estratégias de resolução do mesmo.

Para a introdução do trabalho foi feito o convite para uma turma de alunos de 8º ano.

2.1 Apresentação aos alunos

Escolheu-se uma turma do **8º ano** do *Ensino Fundamental Público* (turma de 2018) da Escola Estadual "Anselmo Bispo dos Santos", para com eles buscar a implantação e o desenvolvimento projeto: "**Resta Um - Busca de Estratégias de Resoluções**".

O professor inicialmente falou sobre o objetivo do trabalho e de como o jogo poderia mudar a rotina da sala, incrementando as aulas, trazendo diversão, melhora do raciocínio lógico e conseqüentemente, aprendido.

Feito (e aceito) o convite, o professor deixou alguns dias para que os alunos pensassem sobre o assunto. Ao mesmo tempo criou-se nos mesmos uma expectativa quanto ao que estaria por vir. Ficaram empolgados num primeiro momento. Com o decorrer das aulas passaram a demonstrar inquietude, fobia e descrédito em tudo o que foi dito.

O descrito no parágrafo anterior deve-se ao fato dos alunos da escola pública não darem créditos ao que é dito em sala de aula. Precisam de provas materiais e imediatas que terão algum resultado. A desvalorização dos professores e a falta de aperfeiçoamento profissional contribuem para a falta de credibilidade. Também há o fato de muitos alunos não gostarem e não estarem dispostos a estudos aprofundados, principalmente sobre matemática. Se for necessário estudar então há o desmotivo imediato.

Na introdução do trabalho, foi apresentada aos alunos uma versão eletrônica do jogo (baixada da internet ou pré-instalada nos equipamentos), instalada pelos alunos em seus aparelhos celulares. Combinou-se com os mesmos que não haveria cópia de internet. Deveriam fazer a pesquisa sem a influência de resultados prontos. Fariam tentativas, com erros e acertos, durante as aulas, buscando solucionar o jogo. As regras foram apresentadas. Os alunos brincaram e pesquisaram maneiras de encontrar soluções.

Durante a realização das primeiras jogadas, os alunos demonstraram nervosismo e pouca compreensão do que se estava buscando fazer. Foram necessárias muitas explicações e muita paciência para com os mesmos, sempre com o intuito de não gerar desmotivação.

Na 2ª semana de desenvolvimento do projeto, foi apresentado aos alunos a versão física do jogo. Daí em diante, já conseguiram realizar jogadas de maneira natural e clara. Divertiram-se com os erros e com os esquemas que apareceram. Começaram a sobrar algumas peças no tabuleiro final que formavam desenhos, os quais, eles acharam engraçados. Ficaram mais inspirados com os resultados que surgiram e passaram, com o estímulo do professor, a tentar organizar jogadas futuras.



Figura 9 – Alunos da E.E."Anselmo Bispo dos Santos".

De maneira natural, surgiram soluções diversas para o jogo. Alguns alunos divertiram-se buscando maneiras de não mais ser possível mover as peças, ou como disseram em sala, "travar o jogo". Outros começaram a organizar o pensamento na busca de encontrar soluções organizadas e criativas. Nasceram, assim, os primeiros resultados claros e concisos. Jogadas pensadas e trabalhadas, de maneira otimizada, sempre em direção à solução do desafio proposto.



Figura 10 – Alunos da E.E."Anselmo Bispo dos Santos".

Na próxima seção são elencados algumas possibilidades ("esquemas") para a realização do jogo.

2.2 Estratégias desenvolvidas em sala de aula

A "**maneira**"¹ encontrada pela turma, foi numerar a configuração inicial e construir tabelas para ilustrar as jogadas realizadas em cada etapa.

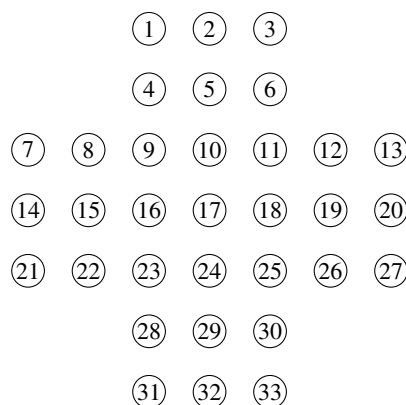


Figura 11 – Configuração Numerada

Guiados pelo objetivo, nas experimentações iniciais, nem todos conseguiram chegar às soluções, mas aqueles que perseveraram, conseguiram eventualmente alcançá-las. Para que não ocorra dúvidas nas interpretações das sequências de jogadas, leia-se "**Da Casa**", o pino alocado na posição que origina a jogada e "**Para Casa**", a posição de destino final do pino em questão.

- *Jogo 1* - O objetivo aqui é jogar com a configuração inicial (posição central vazia), retirar o mínimo possível de pinos e terminar em um tabuleiro onde não haja continuidade no mesmo. Para isto, movem-se 6 pinos, totalizando 6 etapas. Sobra um tabuleiro com 26 pinos e não é possível mover mais nenhum deles, deixando o jogo sem continuidade, conforme o esquema a seguir:

¹ ideia mais rápida que surgiu no início das discussões e que foi totalmente aceita por todos os alunos participantes

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6
Da Casa (nº)	5	24	32	15	18	20
Para Casa (nº)	17	10	24	17	16	18

Tabela 1 – Solução 1

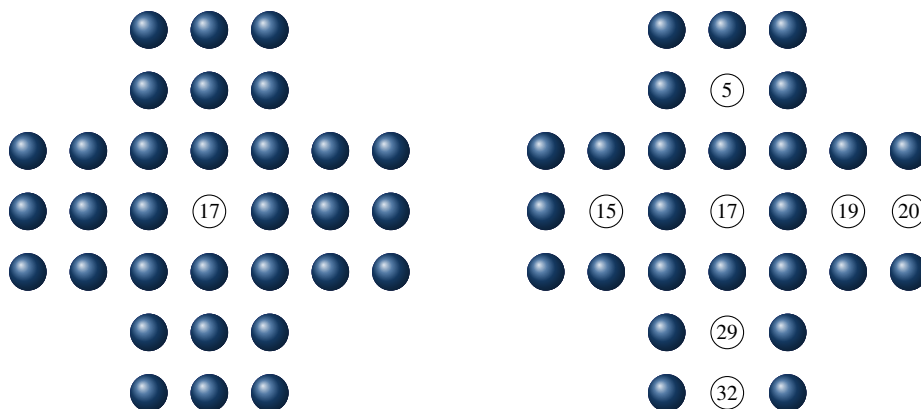
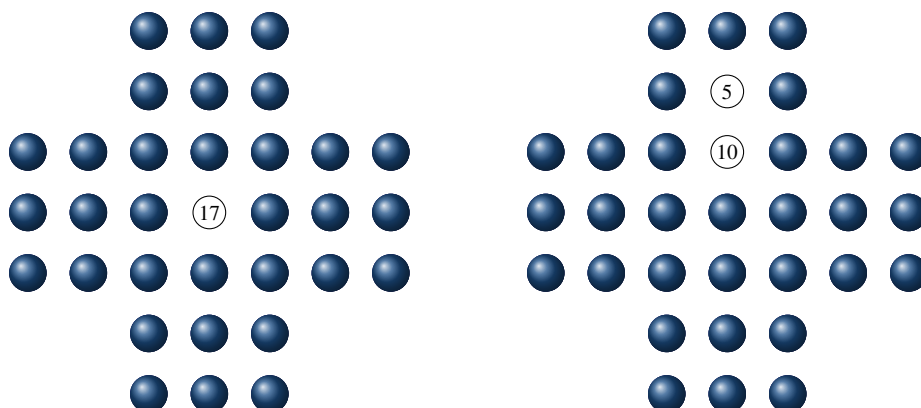


Figura 12 – Restam 26 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

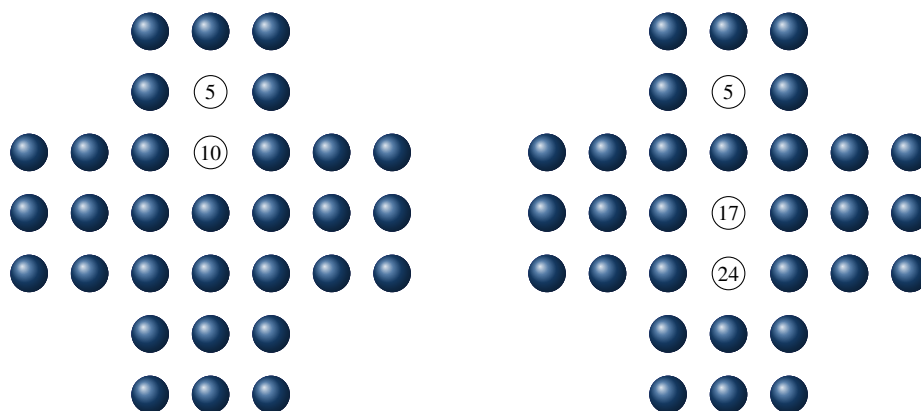
Fonte: Elaborada pelo autor.

Este jogo deverá ser interpretado da seguinte forma:

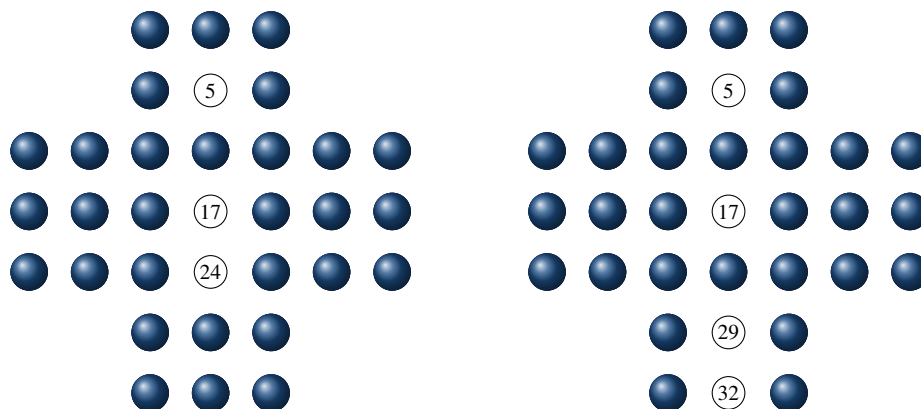
Etapa 1 - Mudar o pino da casa 5 para a casa 17.



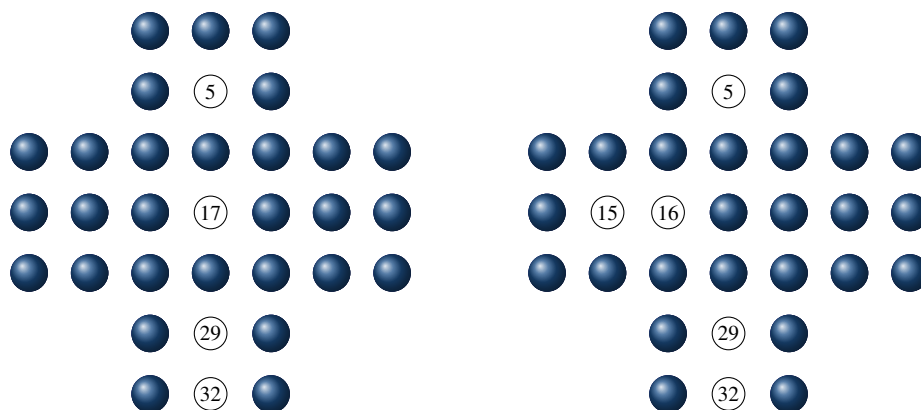
Etapa 2 - Mudar o pino da casa 24 para a casa 10.



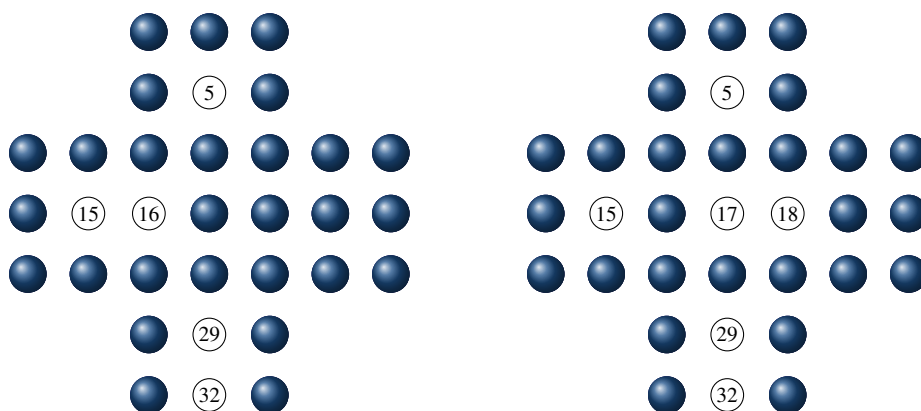
Etapa 3 - Mudar o pino da casa 32 para a casa 24.



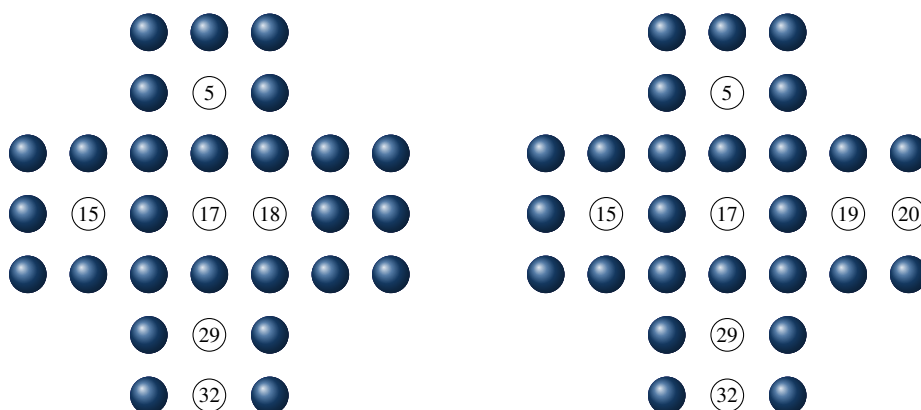
Etapa 4 - Mudar o pino da casa 15 para a casa 17.



Etapa 5 - Mudar o pino da casa 18 para a casa 16.



Etapa 6 - Mudar o pino da casa 20 para a casa 18.



As ilustrações seguintes do trabalho devem ser interpretadas da mesma forma.

• *Jogo 2*

Com o objetivo de restar 15 pinos no tabuleiro final, inicia - se com a posição central (17) vazia e com 16 etapas chega-se à sobra desejada.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Da Casa (nº)	29	10	8	5	24	11	22	25	15	18	27	30	19	17	13	6	14
Para Casa (nº)	17	24	10	17	10	9	24	23	17	16	25	18	17	15	11	18	16

Tabela 2 – Solução 2

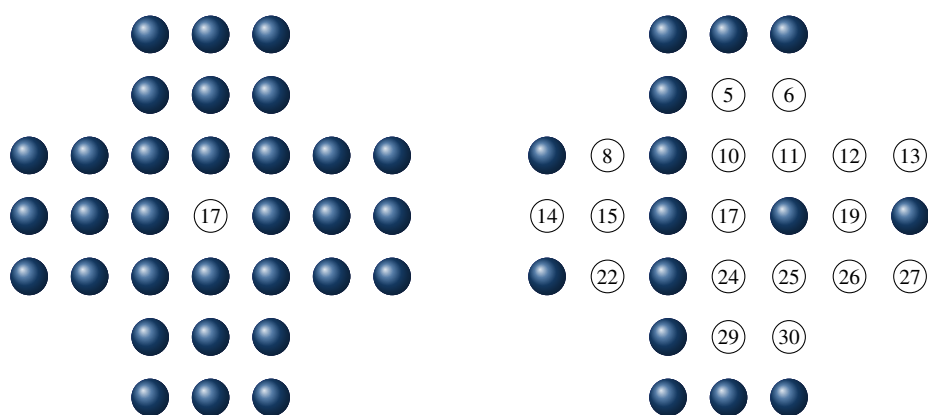


Figura 13 – Restam 15 - Solução dada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 3* - Aqui, o objetivo é a retirada de 22 pinos e terminar em um tabuleiro com apenas 10 pinos, nas posições 7,8,9,10,11,12,13,28,30,32. A solução encontrada consiste em iniciar o jogo com a posição central (17) vazia e com 22 etapas realizadas chega-se ao objetivo.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Da Casa (nº)	15	4	6	1	3	16	1	28	17	14	21
Para Casa (nº)	17	16	4	9	1	4	9	16	15	16	23
Etapa (n)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Da Casa (nº)	16	29	18	31	16	26	33	24	20	27	18
Para Casa (nº)	28	17	16	23	28	24	25	26	18	25	30

Tabela 3 – Solução 3

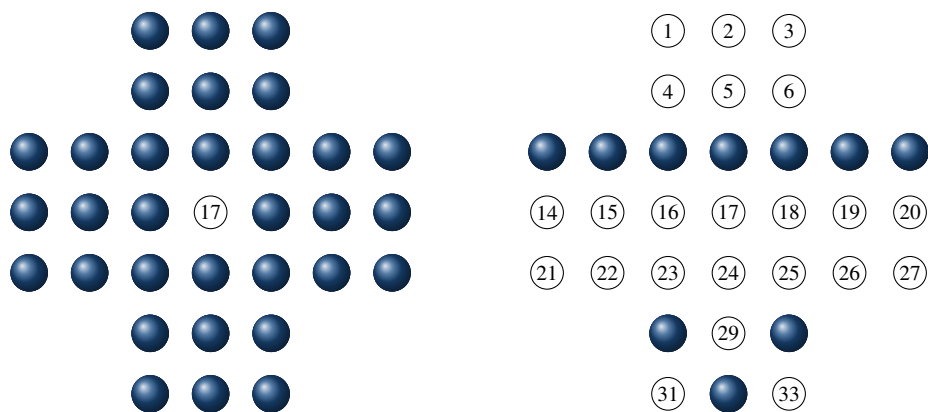


Figura 14 – Restam 10 - Solução proposta pelo autor

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 4* - O objetivo neste 4º jogo consiste em deixar apenas 9 pinos no tabuleiro final. A solução aqui apresentada consiste em: deixar vazia a posição central e com as 23 etapas realizadas terminar com 9 pinos.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Da Casa (nº)	19	6	4	3	1	18	3	16	28	15	21	30
Para Casa (nº)	17	18	6	11	3	6	11	18	16	17	23	28
Etapa (n)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Da Casa (nº)	18	23	10	25	28	27	30	11	9	13	7	
Para Casa (nº)	30	25	24	23	16	25	18	25	23	11	9	

Tabela 4 – Solução 4

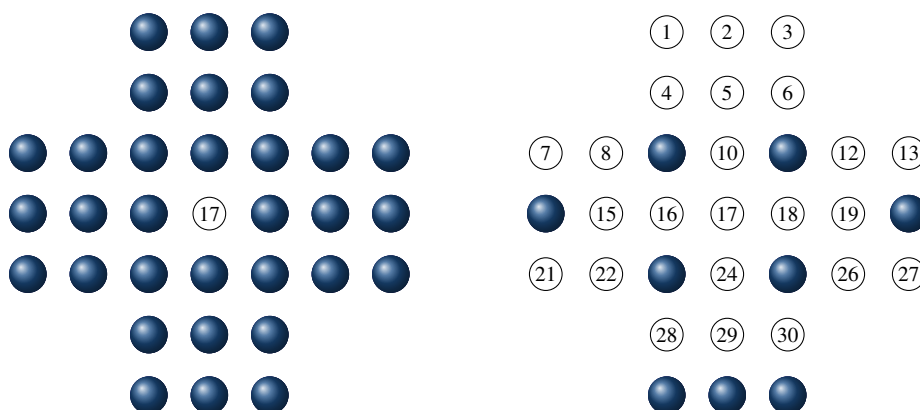


Figura 15 – Restam 9 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 5* - Ainda neste jogo, o objetivo é, também, terminar com 9 pinos, porém, em um tabuleiro com os pinos restantes nas posições 7,8,9,10,11,12,13,23,25. Uma solução encontrada foi iniciar-se com a posição central (17) vazia e após 23 etapas, restam 9 pinos, num desenho bem interessante, conforme o objetivo proposto.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Da Casa (nº)	19	6	4	3	1	18	3	16	14	29	17	20
Para Casa (nº)	17	18	6	11	3	6	11	18	16	17	19	18
Etapa (n)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Da Casa (nº)	22	31	24	21	33	16	31	25	27	18	33	
Para Casa (nº)	24	23	22	23	31	28	23	33	25	30	25	

Tabela 5 – Solução 5

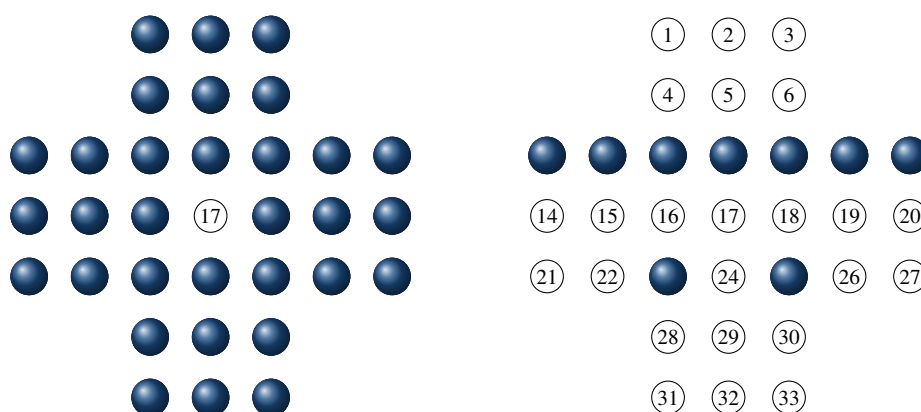


Figura 16 – Restam 9 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos próximos 3 jogos, que diferenciam-se quanto ao número de etapas e/ou a posição inicial vazia, é possível, após os passos dados, cumprir o objetivo de chegar-se ao resto de 7 pinos.

- *Jogo 6*

Este 6º jogo, com o objetivo de restarem 7 pinos, foi pensado da seguinte forma: deixa-se vazia a posição 18 e com as 25 etapas a serem realizadas deixa-se uma sobra de 7 pinos.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Da Casa (nº)	30	11	3	20	17	15	4	11	8	17	14	23	10
Para Casa (nº)	18	25	11	18	19	17	16	9	10	15	16	9	8
Etapa (n)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Da Casa (nº)	7	13	2	21	26	29	10	12	9	24	27	28	
Para Casa (nº)	9	11	10	23	12	17	24	10	11	26	25	16	

Tabela 6 – Solução 6

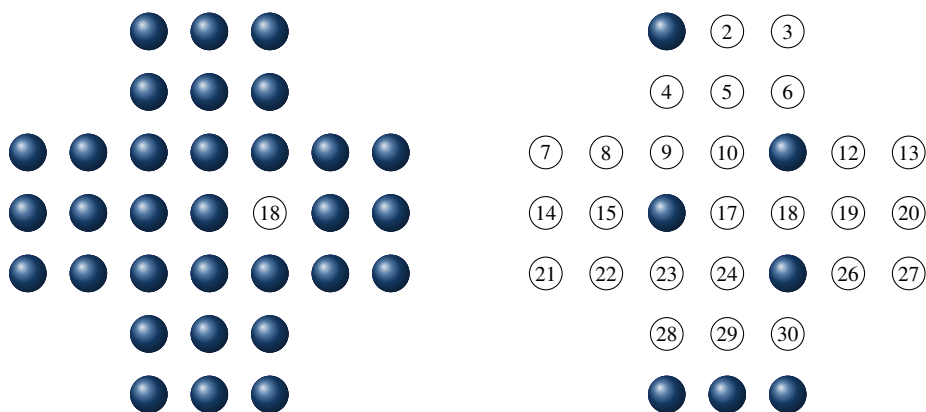


Figura 17 – Restam 7 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 7* - Continuando com o mesmo objetivo, buscou terminar o jogo com 7 pinos, porém, num tabuleiro diferente do anterior. A solução encontrada foi iniciar-se com a posição central vazia, percorrer as 25 etapas necessárias e concluir o objetivo.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Da Casa (nº)	19	6	4	3	1	18	3	16	28	21	15	17	20
Para Casa (nº)	17	18	6	11	3	6	11	18	16	23	17	19	18
Etapa (n)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Da Casa (nº)	30	28	25	16	31	33	27	18	7	9	11	13	
Para Casa (nº)	28	16	23	28	23	31	25	30	21	7	9	11	

Tabela 7 – Solução 7

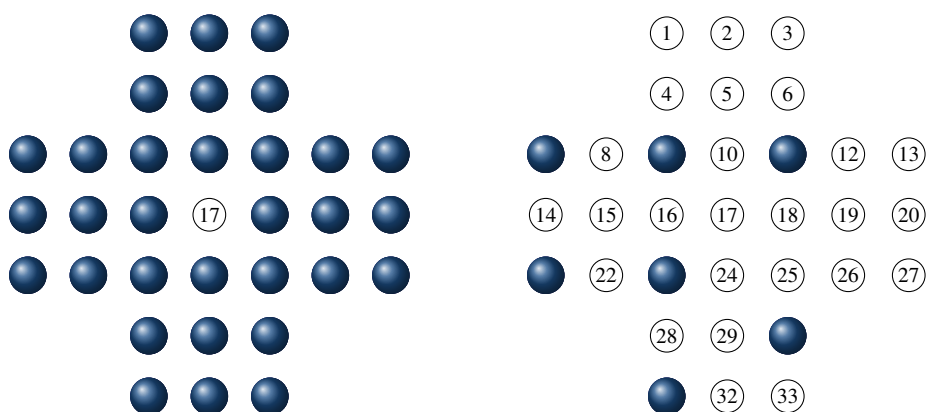


Figura 18 – Restam 7 - Proposto pelo autor

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 8*

Neste jogo o objetivo também é terminar com 7 pinos, dispostos de forma simétrica (posições 9,11,23,25,31,32,33) no tabuleiro final. A solução encontrada foi iniciar-se com a posição central vazia e com 25 etapas concluir o objetivo.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Da Casa (n^o)	19	6	4	3	1	18	3	16	28	15	25	22	27
Para Casa (n^o)	17	18	6	11	3	6	11	18	16	17	23	24	25
Etapa (n)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Da Casa (n^o)	25	30	28	17	12	13	27	9	7	21	10	7	
Para Casa (n^o)	23	28	16	19	26	27	25	23	9	7	8	9	

Tabela 8 – Solução 8

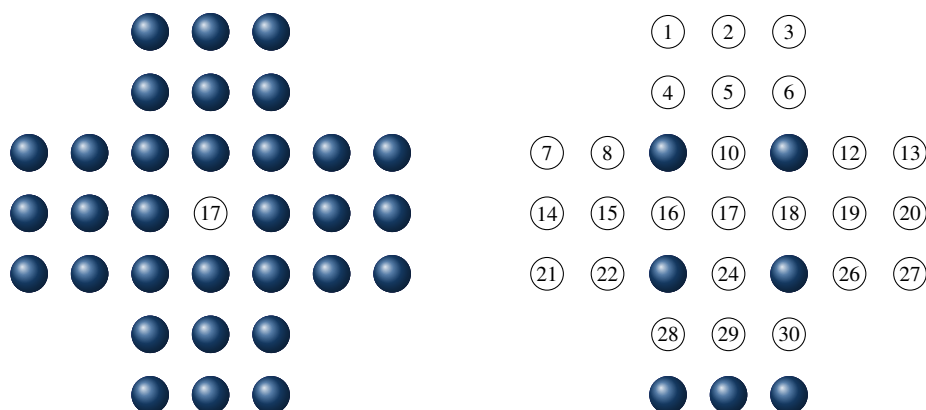


Figura 19 – Restam 7 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir são apresentados mais dois esquemas. Variam-se o número de etapas sendo possível deixar apenas 6 pinos no tabuleiro final.

- *Jogo 9*

Agora, o objetivo é deixar apenas 6 pinos restantes (posições 1,11,13,16,27,30). A solução encontrada foi jogar inicialmente com 32 pinos; a posição central fica vazia e são realizadas 26 etapas, chegando-se ao objetivo proposto.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Da Casa (n^o)	19	16	28	21	16	14	31	33	16	31	30	28	25
Para Casa (n^o)	17	18	16	23	28	16	23	31	28	23	28	16	23
Etapa (n)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Da Casa (n^o)	27	13	11	9	7	2	10	3	12	9	23	4	18
Para Casa (n^o)	25	27	13	11	9	10	12	11	10	11	9	16	30

Tabela 9 – Solução 9

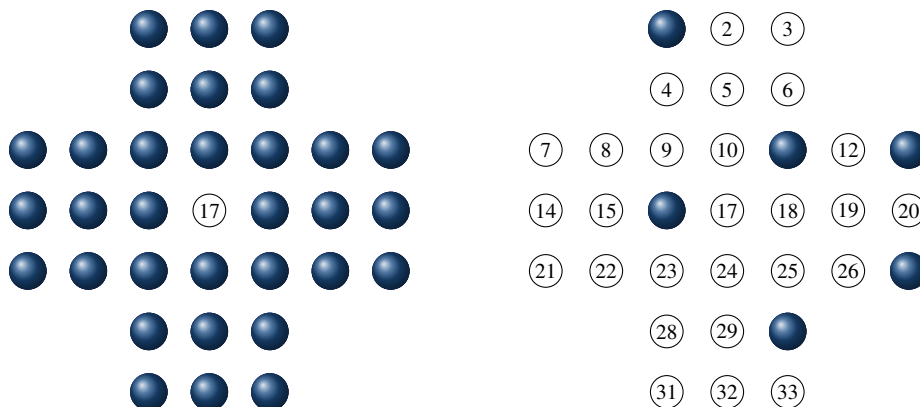


Figura 20 – Restam 6 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 10*

Jogo com objetivo de deixar-se 6 pinos, de forma simétrica no tabuleiro final (posições 1,3,16,18,31,33). A solução foi jogar inicialmente com 32 pinos; posição central vazia e 26 etapas alcançando-se o objetivo proposto.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Da Casa (n^o)	29	10	8	22	7	21	10	7	12	9	26	12	25
Para Casa (n^o)	17	24	10	8	9	7	8	9	10	11	12	10	11
Etapa (n)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Da Casa (n^o)	10	13	27	33	23	31	2	10	13	4	25	23	6
Para Casa (n^o)	12	11	13	25	9	33	10	12	11	16	23	31	18

Tabela 10 – Solução 10

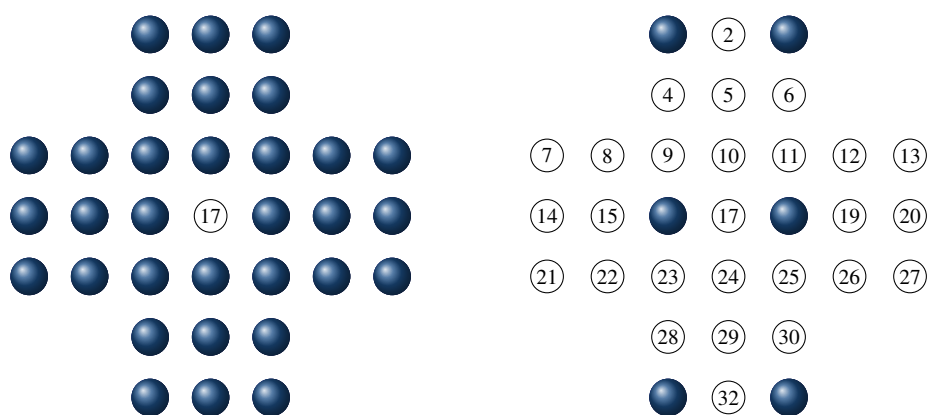


Figura 21 – Restam 6 - Solução encontrada por duas alunas da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

Existe ainda a possibilidade de variar novamente o número de jogadas e chegar ao resultado de 5 pinos restantes, conforme esquemas a seguir:

- *Jogo 11*

Para cumprir-se o objetivo foi necessário iniciar o jogo com 32 pinos; posição central vazia e 27 etapas necessárias para o cumprimento do objetivo inicial. A disposição final dos pinos fica de forma assimétrica.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Da Casa (nº)	19	30	27	13	17	12	28	30	27	18	33	16	31	4
Para Casa (nº)	17	18	25	27	19	26	30	18	25	30	25	28	23	16
Etapa (n)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Da Casa (nº)	11	3	2	16	1	14	24	10	8	23	10	7	21	
Para Casa (nº)	9	11	10	4	9	16	26	12	10	9	8	9	23	

Tabela 11 – Solução 11

- *Jogo 13* - Este 13º jogo possui o objetivo inicial de restarem 4 pinos (posições 11,23,25,27). A solução encontrada foi iniciar-se com a posição **11** vazia; realizar-se 28 etapas e terminar-se com **4** pinos, cumprindo o objetivo.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Da Casa (nº)	3	1	4	16	17	7	14	12	19	30	27	13	3	4
Para Casa (nº)	11	3	6	4	5	9	16	10	17	18	25	27	11	6
Etapa (n)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Da Casa (nº)	28	16	21	18	6	9	23	25	33	31	28	9	18	33
Para Casa (nº)	30	28	23	16	18	11	9	23	25	33	16	23	30	25

Tabela 13 – Solução 13

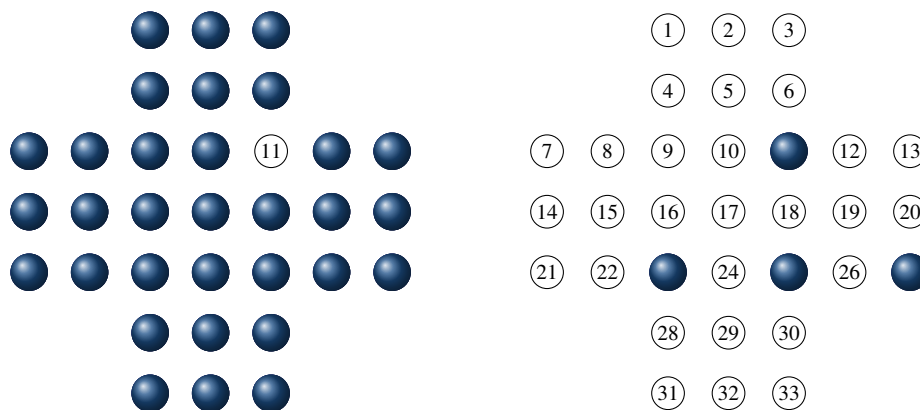


Figura 24 – Restam 4 - Solução encontrada por duas alunas da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 14* - Este 14º jogo também possui o objetivo de restar 4 pinos, porém, de forma simétrica, no centro do tabuleiro (posições 9,11,23,25). Para isto, inicia-se com a posição **17** vazia. Realizando-se 28 etapas, conforme esquema a seguir, obtém-se também **4 pinos** restantes, de acordo com o objetivo proposto.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Da Casa (nº)	15	4	6	18	17	13	27	26	12	3	10	13	7	21
Para Casa (nº)	17	16	4	6	5	11	13	12	10	11	12	11	9	7
Etapa (n)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Da Casa (nº)	2	10	7	23	31	24	21	33	16	31	30	28	9	1
Para Casa (nº)	10	8	9	21	23	22	23	31	28	23	28	16	23	9

Tabela 14 – Solução 14

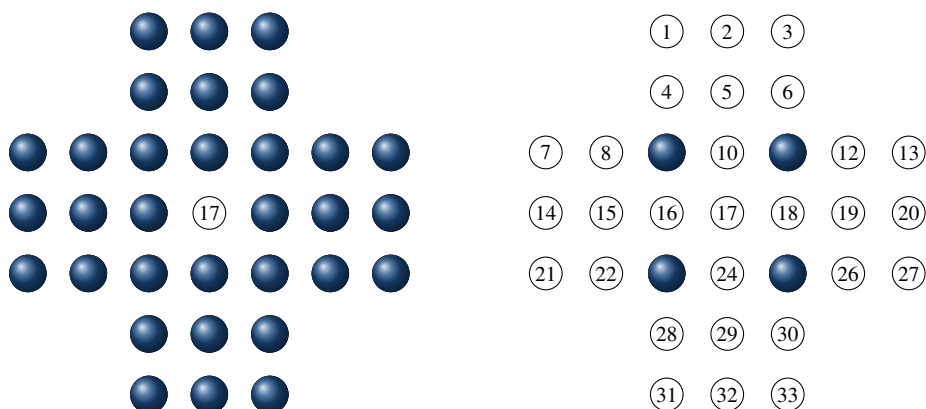


Figura 25 – Restam 4 -Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguem agora mais 4 jogos, cujo objetivo é restarem apenas 3 pinos no tabuleiro final, diferenciando-se cada um deles pelo número de etapas e/ou pela posição deixada inicialmente vazia.

- *Jogo 15*

Configuração inicial com a posição **17** vazia; realizam-se 29 etapas e deixam-se 3 pinos restantes, de acordo com objetivo inicial:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Da Casa (nº)	15	18	5	17	12	3	10	13	20	18	1	3	4	23	25
Para Casa (nº)	17	16	17	15	10	11	12	11	18	6	3	11	16	9	23
Etapa (n)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Da Casa (nº)	27	30	28	33	31	18	22	33	25	8	14	23	10	7	
Para Casa (nº)	25	18	30	25	33	30	24	25	23	10	16	9	8	9	

Tabela 15 – Solução 15

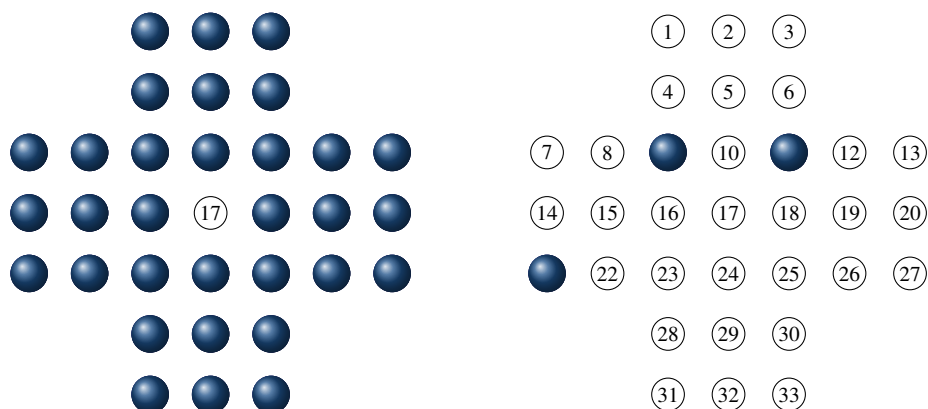


Figura 26 – Restam 3 - Solução encontrada por duas alunas da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 16* - Permanece o objetivo de restarem 3 pinos, porém, não centralizados. A solução (particular) encontrada foi deixar vazia, inicialmente, a posição 17 (central) e realizar 29 etapas, sendo possível restar 3 pinos (posições 5,9,11).

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Da Casa (nº)	29	22	8	21	24	7	21	10	1	3	6	8	1	17	28
Para Casa (nº)	17	24	22	23	22	21	23	28	9	1	4	10	9	15	16
Etapa (n)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Da Casa (nº)	26	33	31	18	33	24	27	20	18	13	6	15	17	25	
Para Casa (nº)	24	25	33	30	25	26	25	18	6	11	18	17	5	11	

Tabela 16 – Solução 16

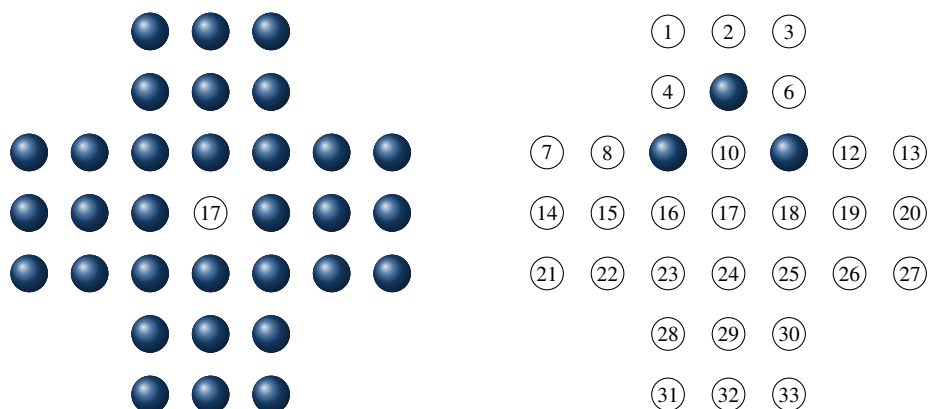


Figura 27 – Restam 3 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 17*

Aqui, persiste o objetivo do jogo anterior, porém, com 3 pinos centralizados (posições 10,23,25) no tabuleiro final. Opta-se por deixar vazia a posição 17 (central) e realizando-se 29 etapas, forma-se um triângulo isósceles no centro do tabuleiro, conforme mostrado a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Da Casa (nº)	19	30	27	18	33	24	13	27	28	30	31	11	3	4	6
Para Casa (nº)	17	18	25	30	25	26	27	25	30	18	33	25	11	6	18
Etapa (n)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Da Casa (nº)	18	1	33	9	16	18	3	22	8	21	7	24	21	12	
Para Casa (nº)	30	3	25	11	18	6	11	24	22	23	21	22	23	10	

Tabela 17 – Solução 17

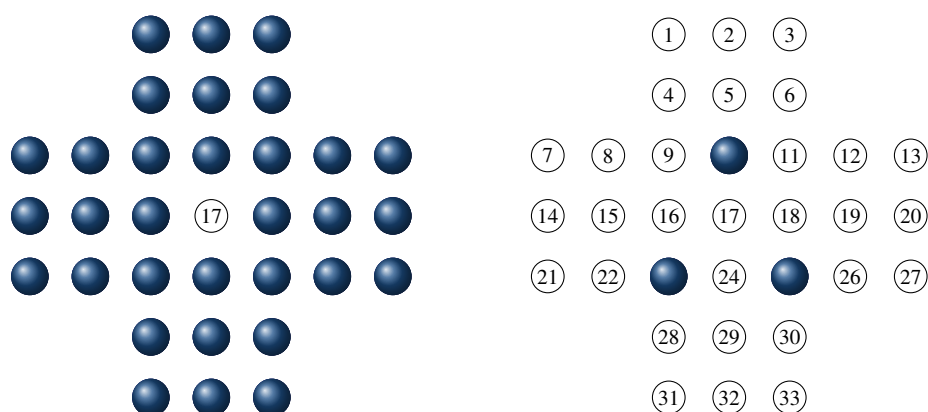


Figura 28 – Restam 3 - Solução encontrada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 18*

No 18º jogo, o objetivo é deixar 3 pinos restantes (casas 18,23,30). O interessante aqui é a opção de iniciar o jogo com a posição **27** vazia, deixando-se imóveis (protegidos) nos tabuleiros, os pinos de nº 17 e nº 25. Na 22ª etapa, salta-se ("come-se") sobre o pino da posição 25 e na última etapa (25ª) salta-se sobre o pino da posição 17, deixando o tabuleiro final de acordo com o objetivo proposto.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Da Casa (nº)	13	11	3	1	18	3	4	6	26	13	16	7	28
Para Casa (nº)	27	13	11	3	6	11	6	8	12	11	4	9	16
Etapa (n)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Da Casa (nº)	21	16	31	30	28	9	11	4	24	27	18	16	
Para Casa (nº)	23	28	23	28	16	23	9	16	26	25	30	18	

Tabela 18 – Solução 18

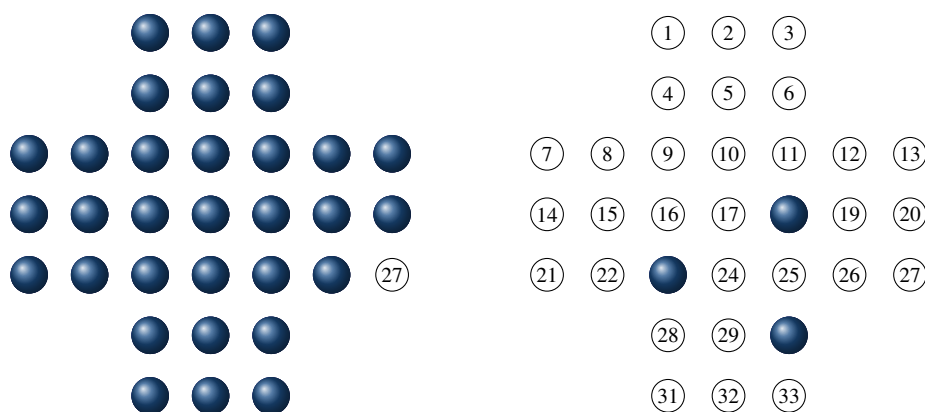


Figura 29 – Restam 3 - Proposto pelo autor

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 19*

O objetivo aqui ainda é deixarem 3 pinos (casas 8,11,21). A solução encontrada foi iniciar-se o jogo com a posição **27** vazia. Deixam-se imóveis os pinos nº 17, nº 25 e nº 26 (esses pinos ficam protegidos durante o jogo). Eles participam das jogadas apenas nas etapas finais. São necessárias 29 etapas e o tabuleiro final fica conforme o esquema a seguir, cumprindo-se assim, o objetivo proposto:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Da Casa (nº)	13	18	27	6	13	18	9	6	4	3	1	18	3	23	8
Para Casa (nº)	27	20	13	18	11	6	11	18	6	11	3	6	11	9	10
Etapa (n)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Da Casa (nº)	22	7	21	31	30	24	33	31	10	7	23	26	24	10	
Para Casa (nº)	8	9	7	23	28	22	31	23	8	9	21	24	10	8	

Tabela 19 – Solução 19

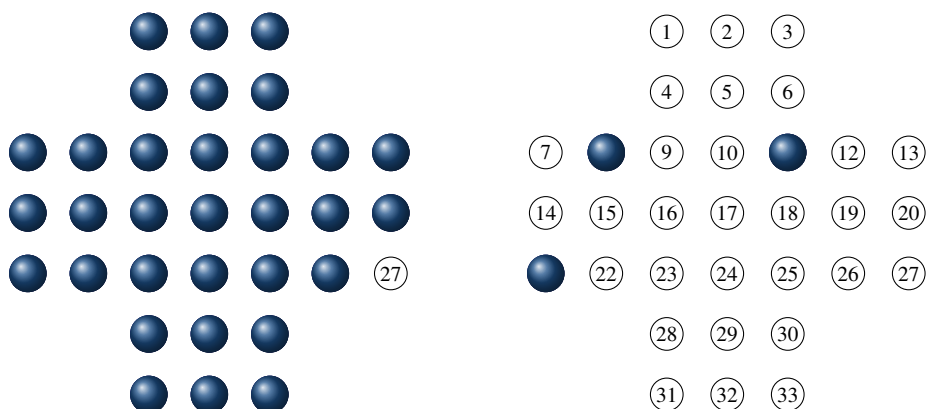


Figura 30 – Restam 3 - Proposto pelo autor

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 20* - Neste 20º jogo, o objetivo é terminar com 2 pinos centralizados. A solução (particular) foi iniciar com a posição central 17 vazia. Perfazer 30 etapas e deixar 2 pinos no centro (posições 16,18) do mesmo, conforme esquema a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Da Casa (nº)	5	12	3	10	8	17	2	1	10	13	7	18	16	20	14
Para Casa (nº)	17	10	11	12	10	5	10	9	8	11	9	6	4	18	16
Etapa (n)	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Da Casa (nº)	25	23	6	4	27	21	24	31	22	25	16	33	31	30	28
Para Casa (nº)	11	9	18	16	25	23	22	23	24	23	28	31	23	28	16

Tabela 20 – Solução 20

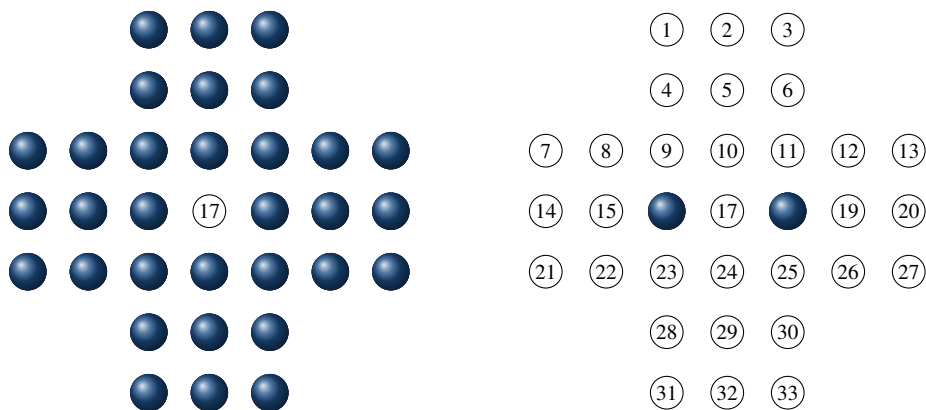


Figura 31 – Restam 2 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, passemos aos jogos mais interessantes de todo este trabalho. São aqueles nos quais é possível "**ganhar o jogo**", no sentido mais amplo, como definido nas regras, ou seja, deixar apenas **1 pino restante** no tabuleiro final, consagrando-se assim o nome, **RESTA UM**.

- *Jogo 21* - Objetiva-se deixar um pino no centro do tabuleiro final. Joga-se inicialmente com 32 pinos. Deixa-se vazia a posição central (Nº 17). Realizam-se 31 etapas e termina-se o jogo, com o último pino exatamente na posição central, conforme mostrado a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	29	26	33	31	18	33	6	13	27	10	13	8	1	3	16	1
Para Casa (nº)	17	24	25	33	30	25	18	11	13	12	11	10	9	1	4	9
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	28	21	7	24	21	16	18	9	28	10	12	26	15	24	5	
Para Casa (nº)	16	23	21	22	23	28	16	23	16	12	26	24	17	10	17	

Tabela 21 – Solução 21

Este 21º jogo será detalhado por tratar-se de uma solução vencedora. Da mesma forma que no **jogo 1** basta seguir as etapas conforme a ilustração.

Etapa 1 - Da casa 29 para a casa 17.

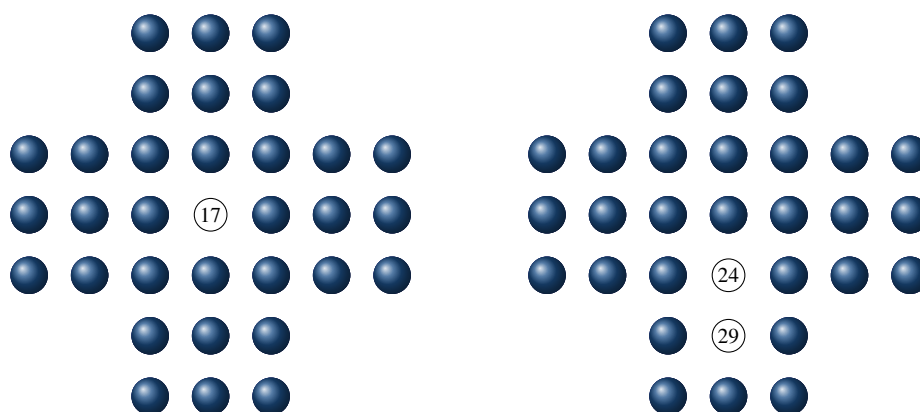
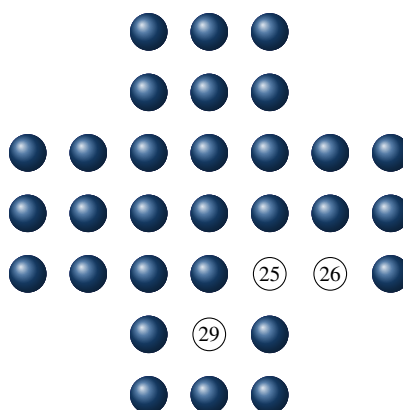
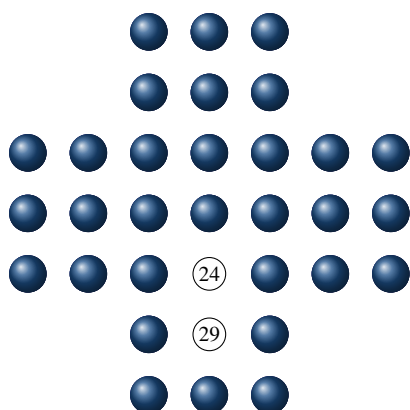


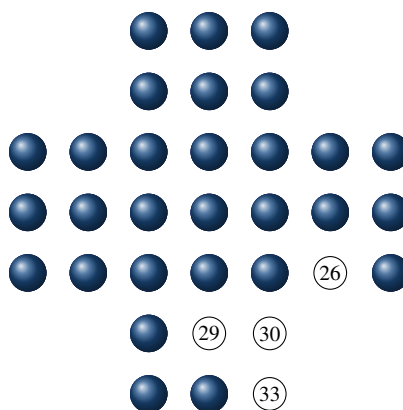
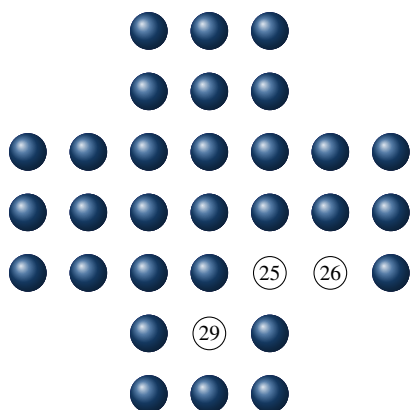
Figura 32 – Resta Um - Solução dada por uma aluna da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos- 2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

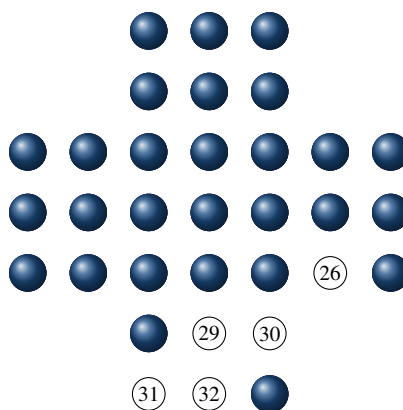
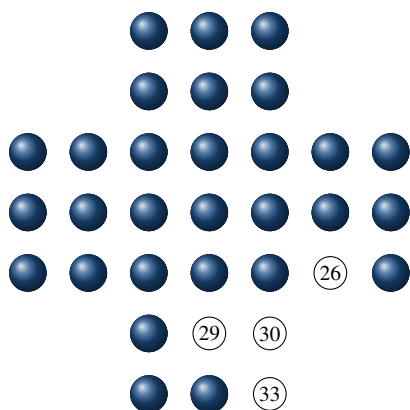
Etapa 2 - Da casa 26 para a casa 24.



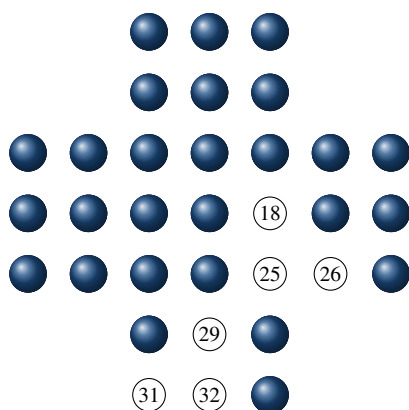
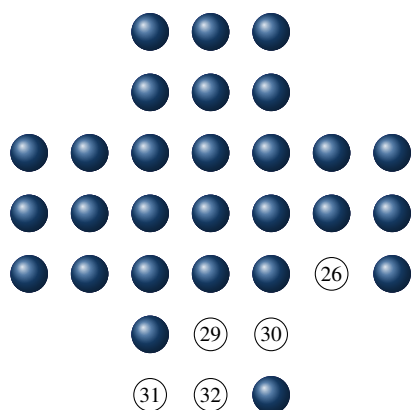
Etapa 3 - Da casa 33 para a casa 25.



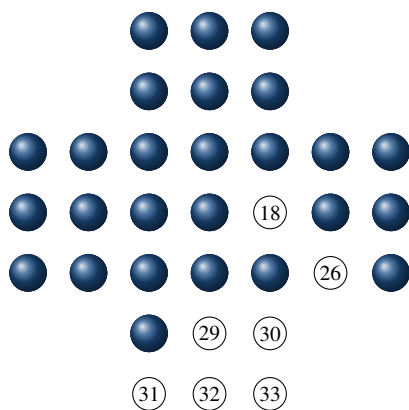
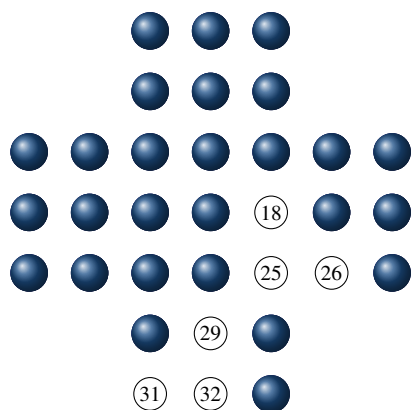
Etapa 4 - Da casa 31 para a casa 33.



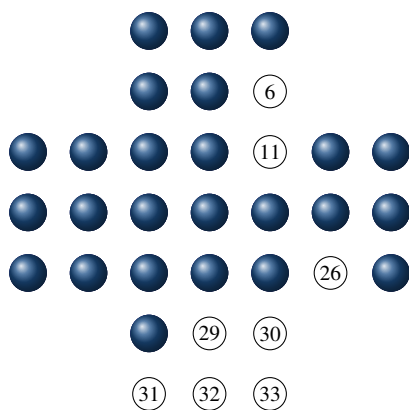
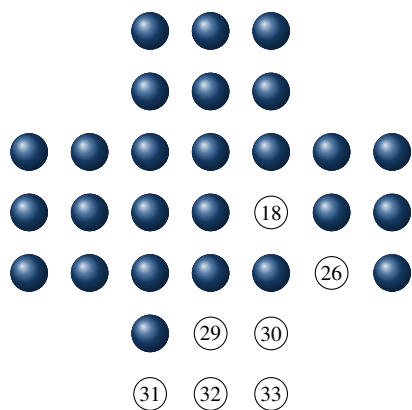
Etapa 5 - Da casa 18 para a casa 30.



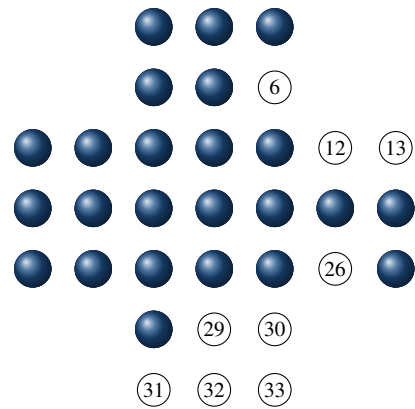
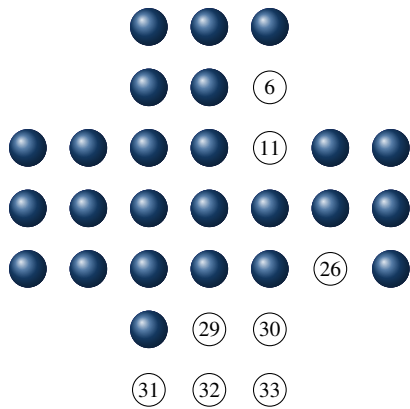
Etapa 6 - Da casa 33 para a casa 25.



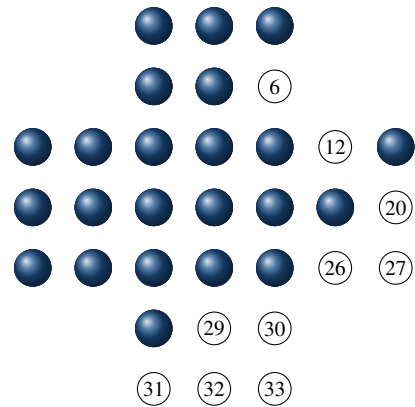
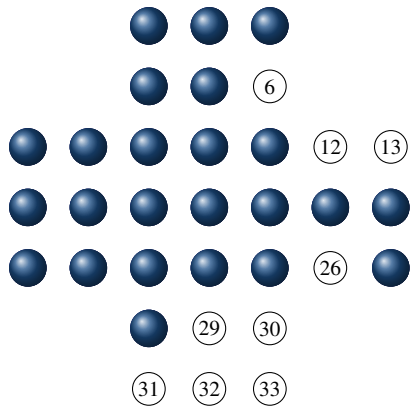
Etapa 7 - Da casa 6 para a casa 18.



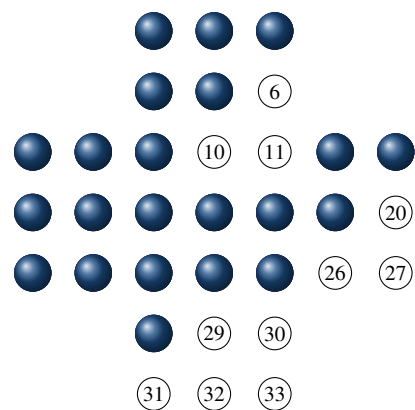
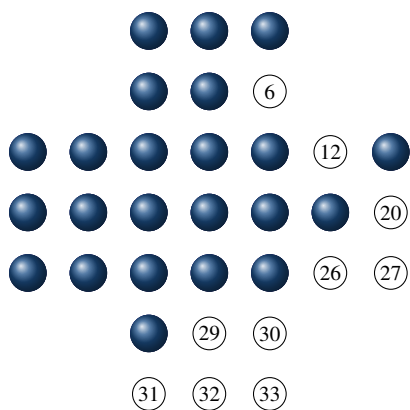
Etapa 8 - Da casa 13 para a casa 11.



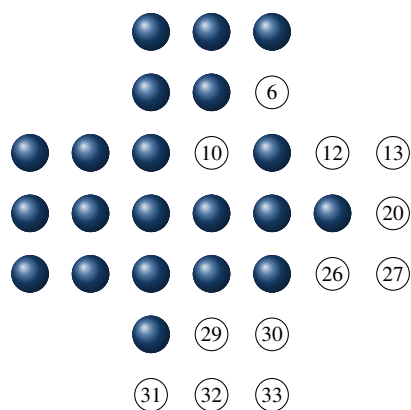
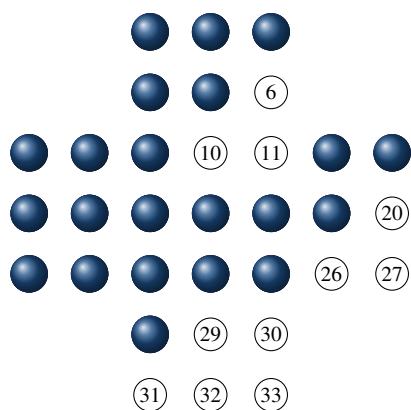
Etapa 9 - Da casa 27 para a casa 13.



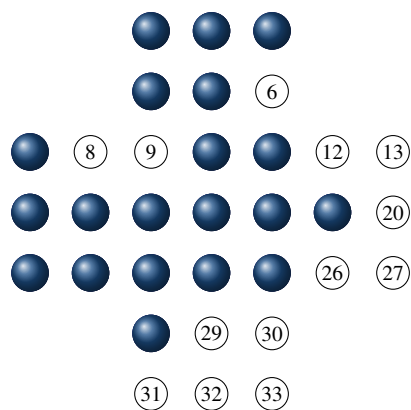
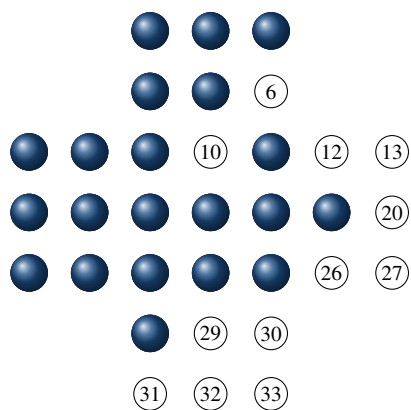
Etapa 10 - Da casa 10 para a casa 12.



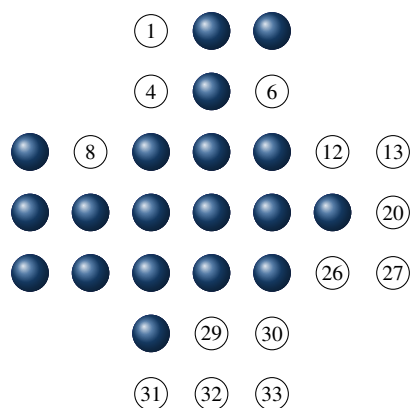
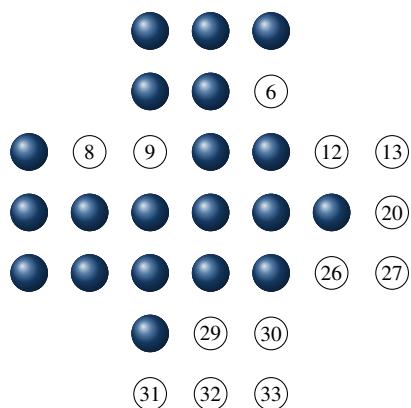
Etapa 11 - Da casa 13 para a casa 11.



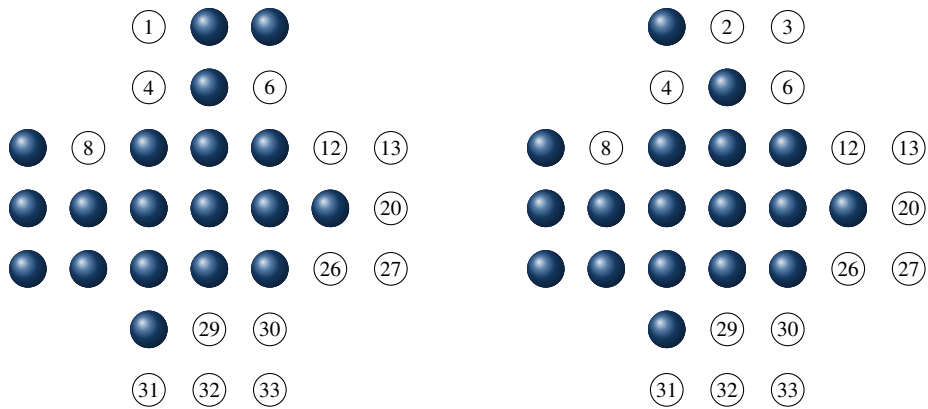
Etapa 12 - Da casa 8 para a casa 10.



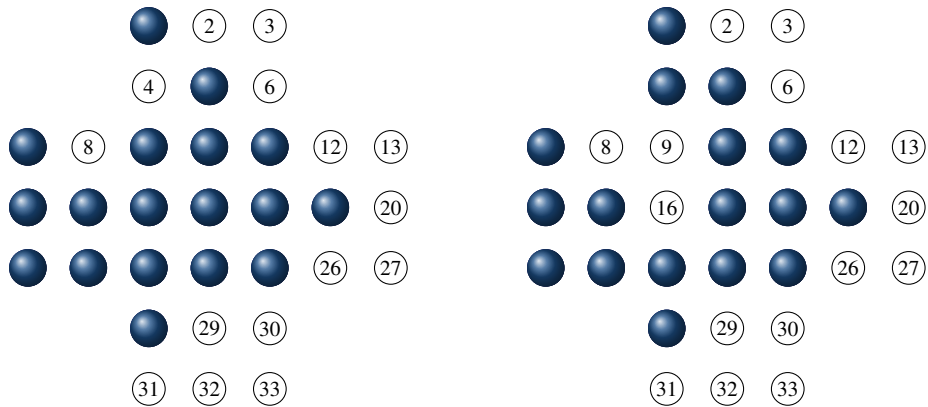
Etapa 13 - Da casa 1 para a casa 9.



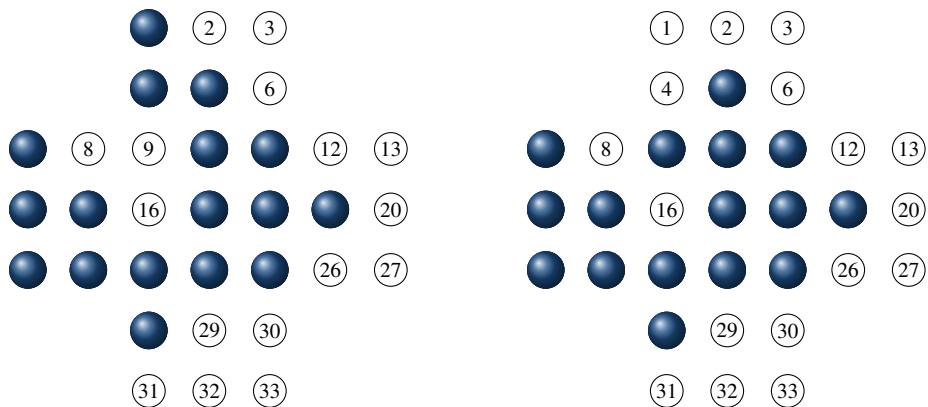
Etapa 14 - Da casa 3 para a casa 1.

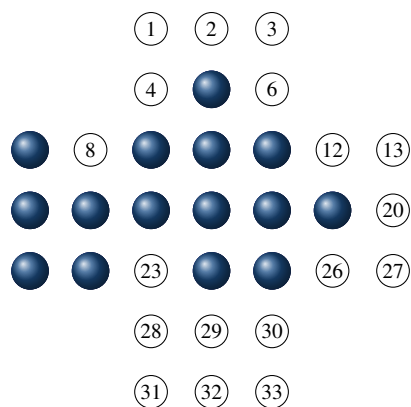
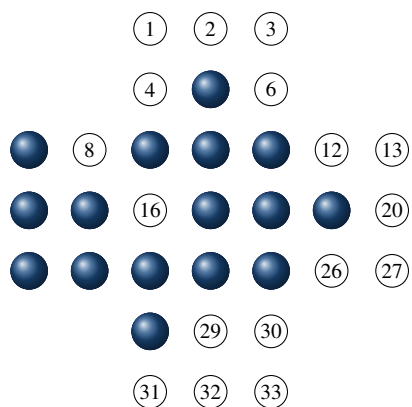
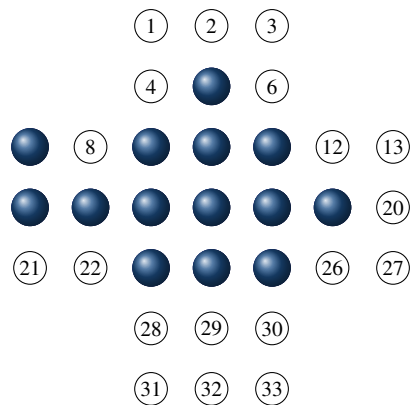
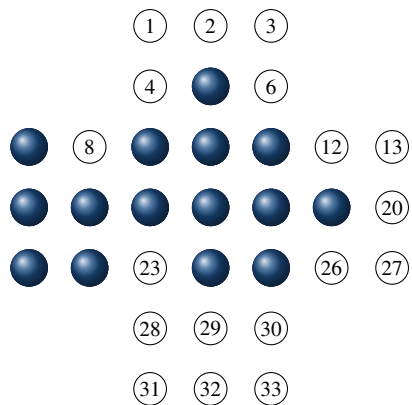
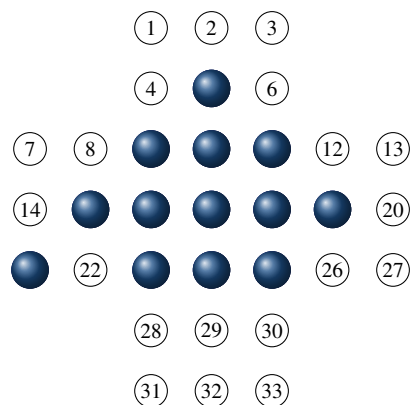
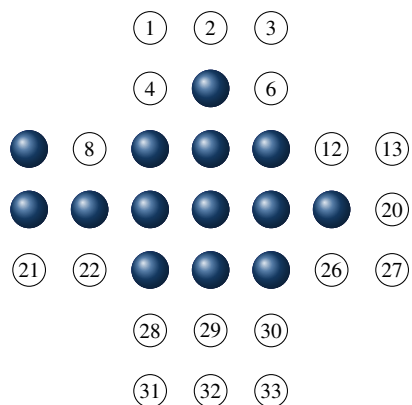


Etapa 15 - Da casa 16 para a casa 4.

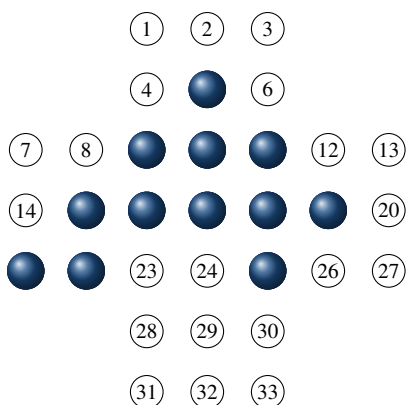
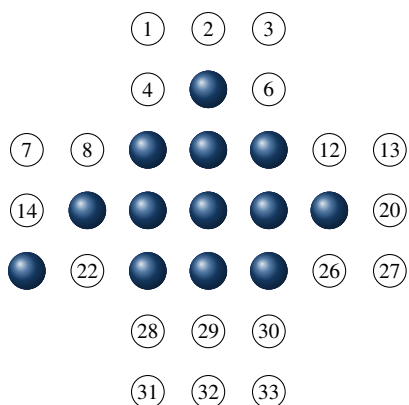


Etapa 16 - Da casa 1 para a casa 9.

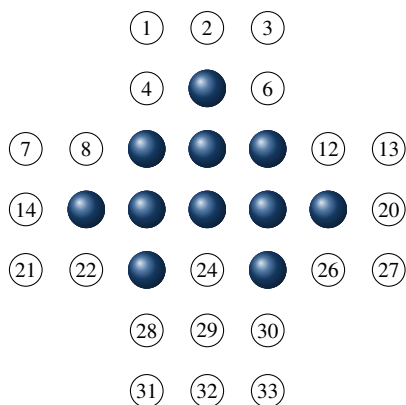
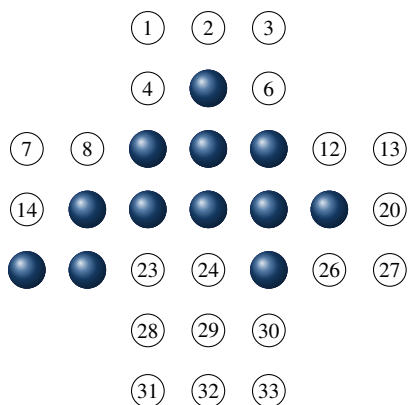


Etapa 17 - Da casa 28 para a casa 16.**Etapa 18** - Da casa 21 para a casa 23.**Etapa 19** - Da casa 7 para a casa 21.

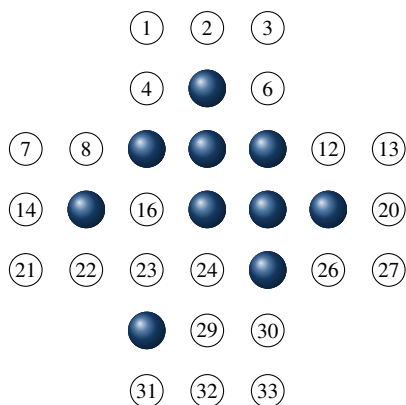
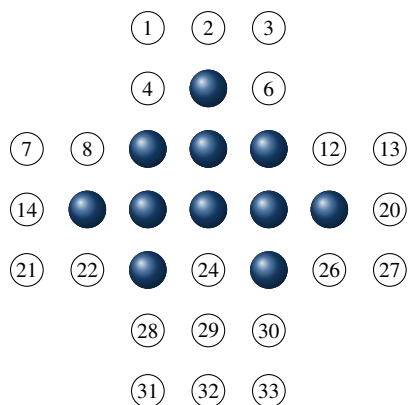
Etapa 20 - Da casa 24 para a casa 22.

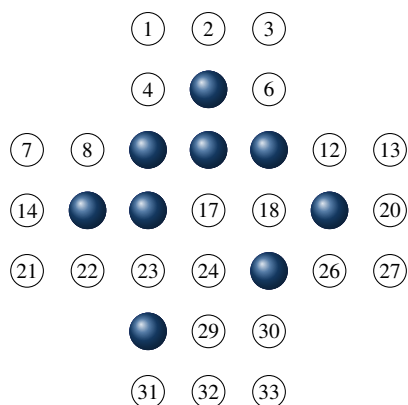
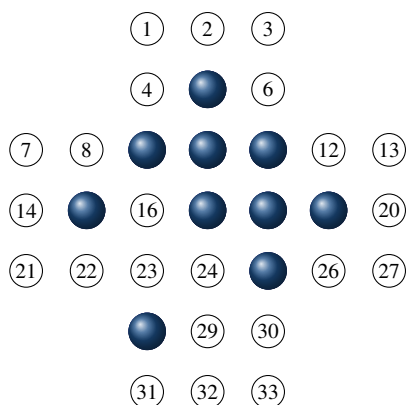
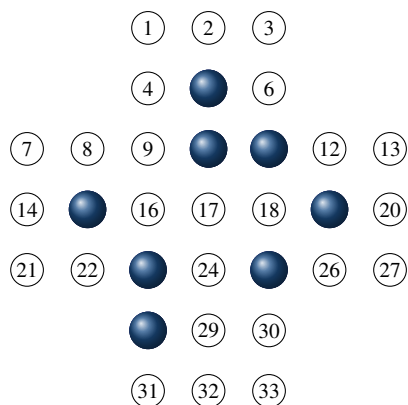
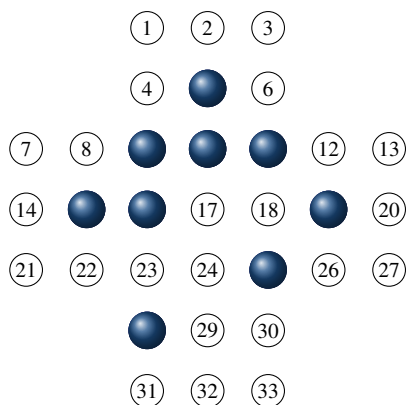
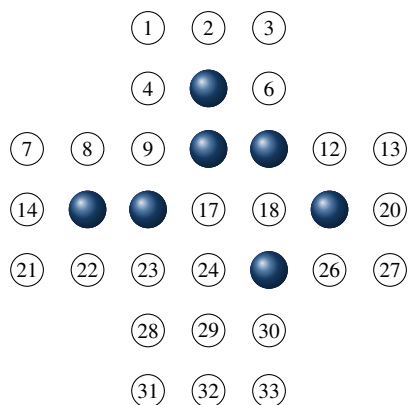
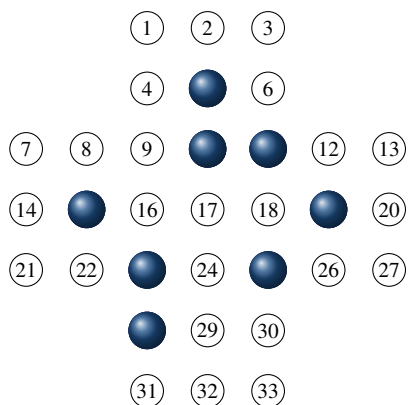


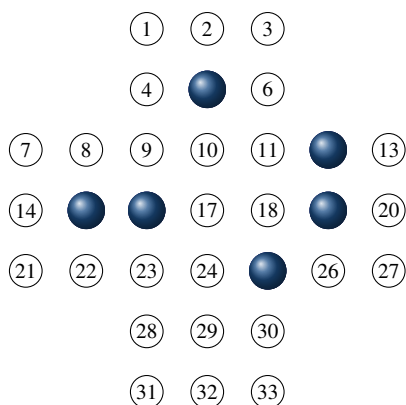
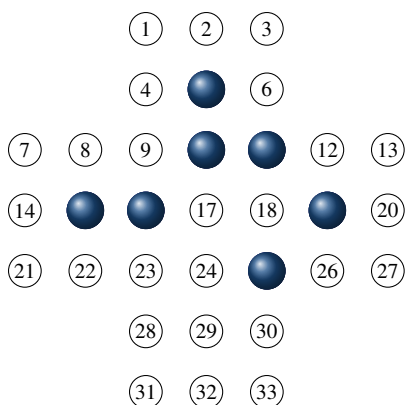
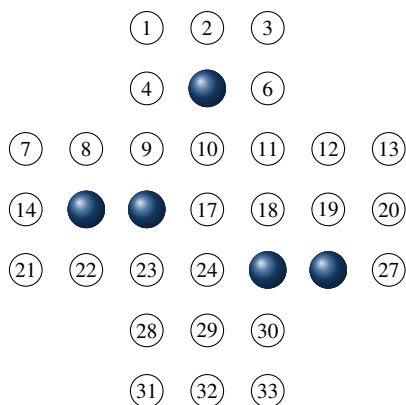
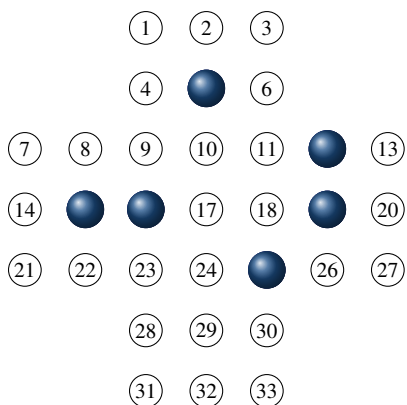
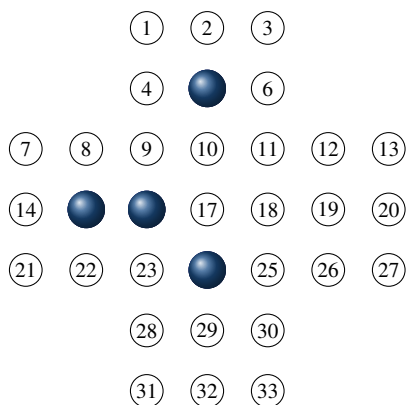
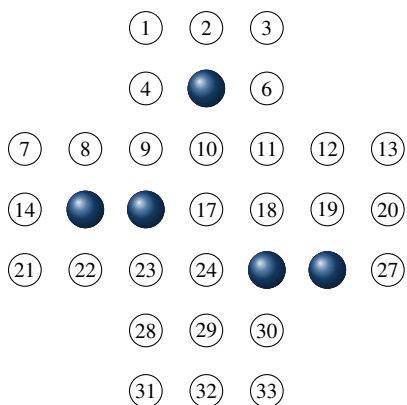
Etapa 21 - Da casa 21 para a casa 23.

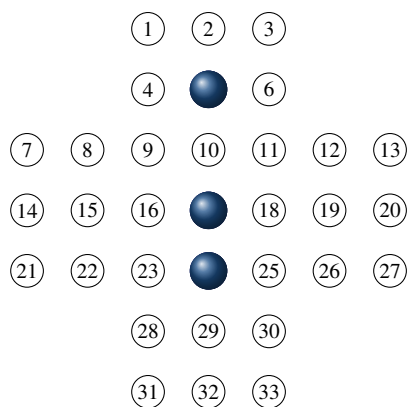
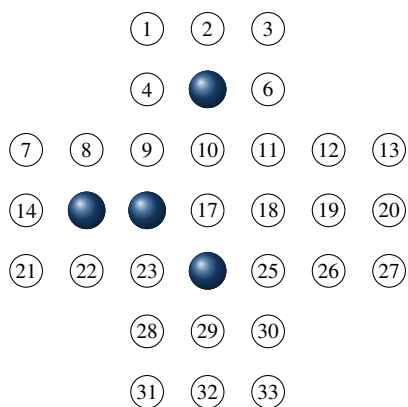
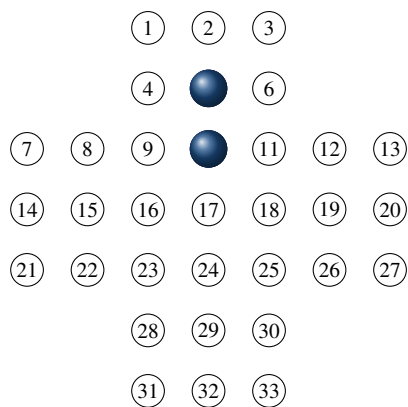
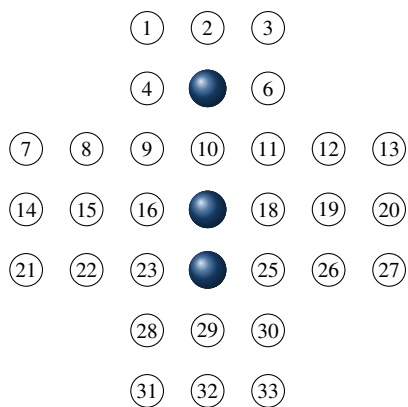
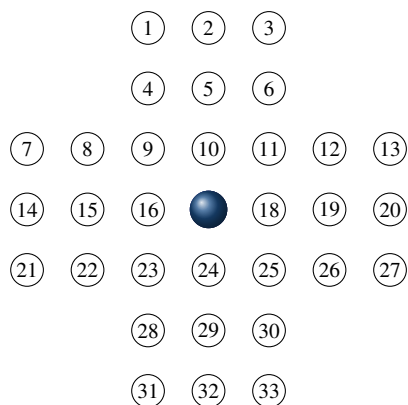
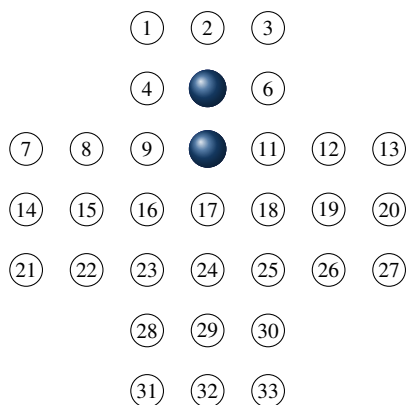


Etapa 22 - Da casa 16 para a casa 28.



Etapa 23 - Da casa 18 para a casa 16.**Etapa 24** - Da casa 9 para a casa 23.**Etapa 25** - Da casa 28 para a casa 16.

Etapa 26 - Da casa 10 para a casa 12.**Etapa 27** - Da casa 12 para a casa 26.**Etapa 28** - Da casa 26 para a casa 24.

Etapa 29 - Da casa 15 para a casa 17.**Etapa 30** - Da casa 24 para a casa 10.**Etapa 31** - Da casa 5 para a casa 17.

- *Jogo 22*

Aqui o objetivo é deixar 1 pino restante, na mesma casa deixada vazia na configuração inicial, porém, não central. Inicia-se o jogo com 32 pinos. Deixa-se vazia a posição **nº 10**. Realizam-se 31 etapas e termina-se o jogo, com o último pino exatamente na posição **nº 10**, conforme mostrado a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	12	3	18	26	13	6	17	20	24	27	25	10	2	9	12	1
Para Casa (nº)	10	11	6	12	11	18	19	18	26	25	11	12	10	11	10	9
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	33	22	25	32	24	31	16	7	4	21	22	7	10	23	8	
Para Casa (nº)	25	24	23	24	22	23	4	9	16	7	8	9	8	9	10	

Tabela 22 – Solução 22

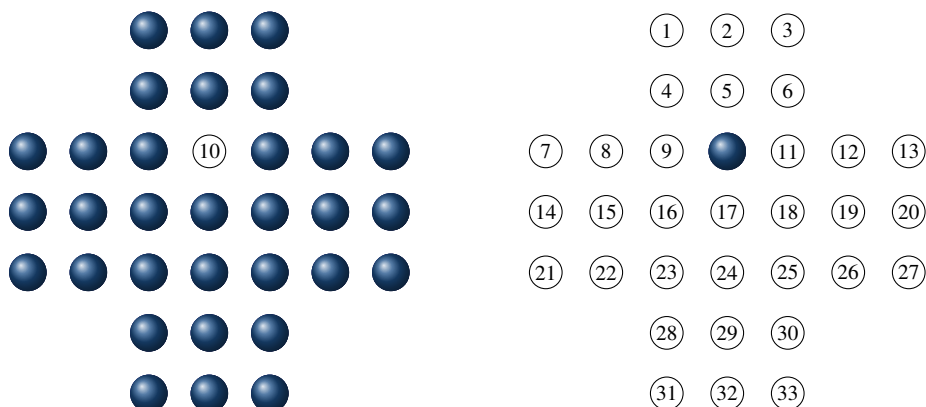


Figura 33 – Resta Um - Solução encontrada por dois alunos da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 23*

Neste jogo o objetivo é iniciar com uma posição vazia qualquer (não central) e terminar com 1 pino exatamente na posição central. A solução encontrada foi deixar vazia a posição de **nº 2** e realizando-se as mesmas 31 etapas, também termina-se o jogo com o último pino na posição **nº17** (central), de acordo com o esquema a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	10	12	3	10	8	17	1	2	10	13	7	18	16	20	14	25
Para Casa (nº)	2	10	11	12	10	5	9	10	8	11	9	6	4	18	16	11
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	23	6	4	27	21	24	31	33	16	31	22	29	17	30	19	
Para Casa (nº)	9	18	16	25	23	22	23	31	28	23	24	17	19	18	17	

Tabela 23 – Solução 23

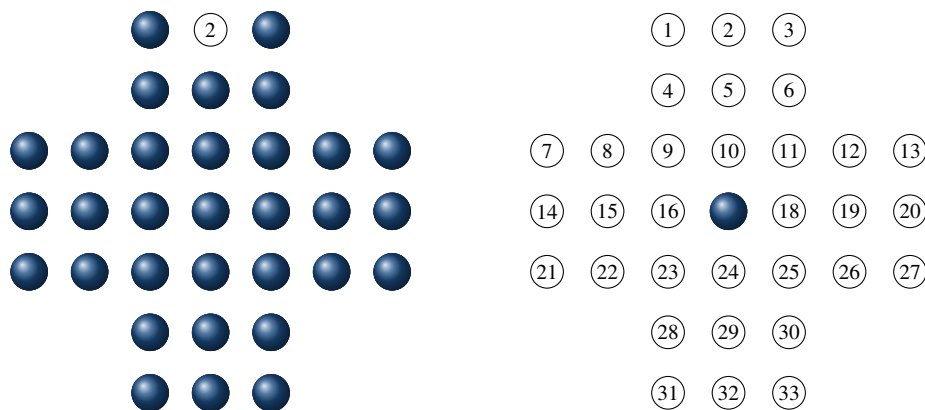


Figura 34 – Resta Um - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2018

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 24* - O objetivo aqui é iniciar o jogo com uma posição vazia qualquer (não central). Proteger o pino central durante todo o jogo e terminar com um pino em uma posição não central. Como **caso particular**, a solução encontrada foi iniciar o jogo com a posição vazia de **nº 33** (posição inferior direita); deixar o pino da posição central *imóvel*, ou seja, proteger esse pino durante a realização das jogadas e perfazer 31 etapas necessárias. Na última etapa salta-se sobre o pino protegido (imóvel) terminando-se assim o jogo, com um pino na posição **nº 18**, conforme segue-se:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	25	27	13	24	27	12	26	28	33	31	18	33	6	4	3	1
Para Casa (nº)	33	25	27	26	25	26	24	30	25	33	30	25	18	6	11	3
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	18	3	16	11	4	16	7	14	9	28	21	16	25	28	16	
Para Casa (nº)	6	11	4	9	16	28	9	16	23	16	23	28	23	16	18	

Tabela 24 – Solução 24

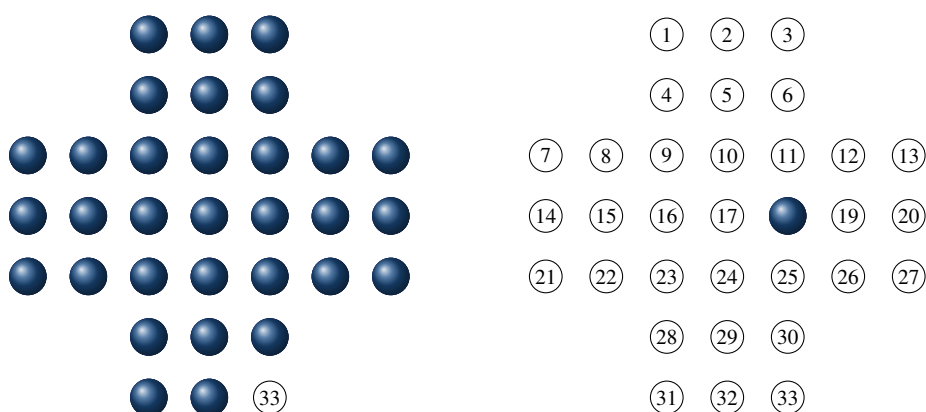


Figura 35 – Resta Um - Proposto pelo autor

Fonte: Elaborada pelo autor.

- *Jogo 25*

Neste 25º jogo, o objetivo é deixar apenas um pino restante em uma posição não central, porém, protegendo-se o máximo possível, 3 pinos na configuração inicial. A solução **particular** encontrada foi deixar protegidos (imóveis) 3 pinos (posição **nº 17, nº 25 e nº 26**). Inicia-se o jogo com a posição vazia **nº 27**. Realizam -se 31 etapas, durante as quais, nas 25 primeiras, não toca-se nos pinos citados. Na etapa 27 usa-se o pino da posição 26 para saltar sobre os restantes, terminando-se o jogo com um único pino na posição **nº 24**, de acordo com o objetivo inicial.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Da Casa (nº)	13	18	27	6	13	18	9	6	4	3	1	18	3	23	21	7	
Para Casa (nº)	27	20	13	18	11	6	11	18	6	11	3	6	11	9	23	21	
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
Da Casa (nº)	24	8	11	31	30	28	21	16	33	31	26	24	22	8	10		
Para Casa (nº)	22	10	9	23	28	16	23	28	31	23	24	22	8	10	24		

Tabela 25 – Solução 25

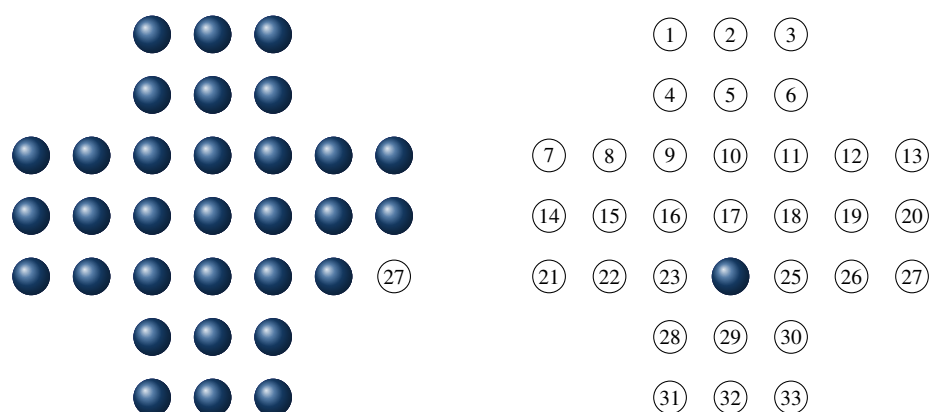


Figura 36 – Resta Um - Proposto pelo autor

Fonte: Elaborada pelo autor.

Um trabalho cansativo, de muita persistência, colaboração de muitos e principalmente, dedicação. Foram muitos dias desenvolvendo o projeto. Por sinal, mais de "DOIS ANOS", contando com a dedicação e o empenho dos alunos e amigos.

Foram também muitos dias de uma brincadeira prazerosa, estimulante, envolvente, que levou os alunos a vencerem a barreira do medo e da incredulidade, mostrando-lhes que eram capazes "**sim**", de elaborarem estratégias, desenvolverem o potencial individual e coletivo, resolverem e vencerem um desafio proposto.

Uma brincadeira bem DIVERTIDA com a configuração inicial proposta por um aluno do 9º ano (2019) do Ensino Fundamental. Consiste em movimentar **dois pinos** a cada vez, ou seja, em duplas. Deixam-se vazias as posições **24 e 25**. Realizam-se 14 etapas e chega-se ao final, com 17 pinos restantes, de acordo com a configuração a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Da Casa (nº)	10	11	29	30	2	3	10	11	13	20	8	15	11	18
Para Casa (nº)	24	25	17	18	10	11	24	25	11	18	10	17	9	16

Tabela 26 – Solução 26

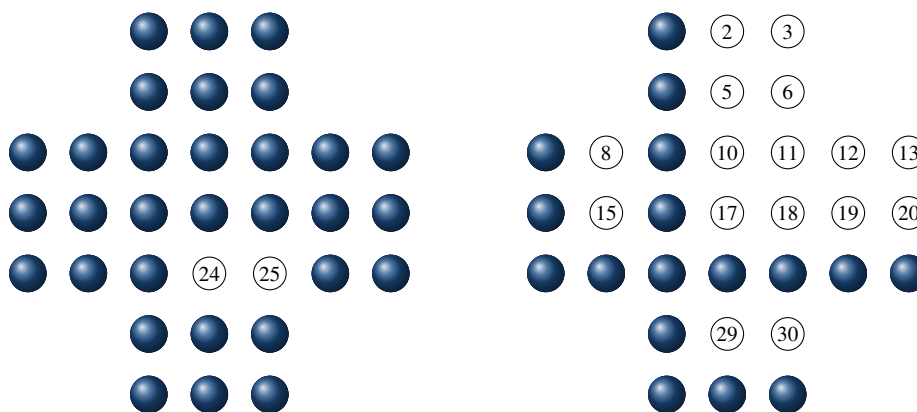


Figura 37 – Restam 17 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda na onda da brincadeira da simetria surge outro tabuleiro. Inicialmente vazias as posições **10,16,18** e com a realização de 15 etapas, restam no tabuleiro, **9 pinos**, conforme esquema a seguir;

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Da Casa (nº)	8	11	22	8	13	11	26	27	28	2	33	29	4	11	16
Para Casa (nº)	10	9	8	10	11	9	12	13	11	10	25	24	16	9	18

Tabela 27 – Solução 27

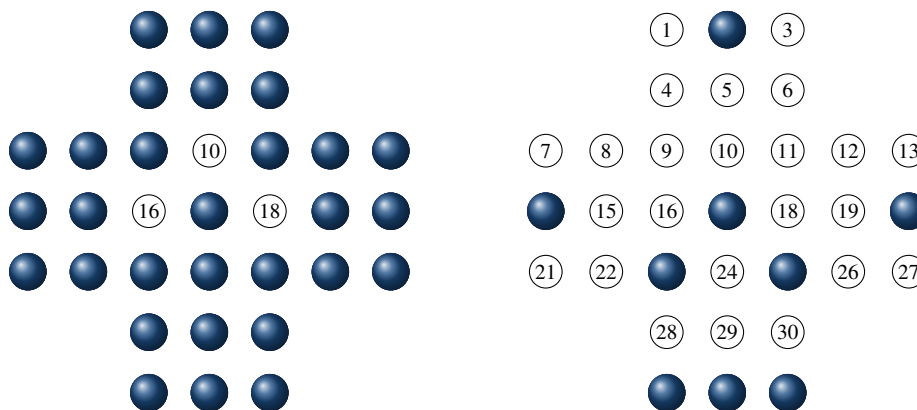


Figura 38 – Restam 9 - Solução encontrada por um aluno da E.E. "Anselmo Bispo dos Santos-2019

Fonte: Elaborada pelo autor.

A maior vitória, porém, estaria por vir. Com a empolgação e o gosto pelo jogo, os alunos levaram a ideia para casa e envolveram familiares e amigos. Perceberam que poderiam passar horas de diversão (sem a distração das redes sociais) ao lado dos seus, coisa um pouco esquecida nos dias atuais.

Também os alunos de outros anos (séries) tomaram conhecimento e optaram por fazer parte do projeto. No final do ano de 2018, *todas* as salas pertencentes ao professor, autor do trabalho, e alunos de outras salas estavam participando e divertindo-se com o jogo.

Surgiram muitos outros esquemas de resolução. Os aqui apresentados são apenas alguns exemplos e os alunos citados foram aqueles que se destacaram e /ou coordenaram grupos de estudos, tendo o carinho e o capricho de elaborarem o passo-a-passo de cada um deles, para que pudessem dar sua contribuição para o projeto em si, para o "**Progresso da Ciência**" e em especial, da *Matemática*.

DESVENDANDO O MITO

Utilizaremos alguns conceitos de Aritmética Modular para analisarmos a dinâmica do jogo Resta Um.

Lembrando que se n é um número natural e a e b são inteiros, dizemos que a é congruente a b módulo n e indicamos $a \equiv b \pmod{n}$ se n divide $a - b$.

Um *sistema completo de resíduos módulo n* é um conjunto de n inteiros $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ que são, dois a dois, não congruentes módulo n . Em especial, se n é primo, o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ é um sistema completo de resíduos módulo n .

Faremos uso no que segue apenas dos sistemas de módulos 2 e 3, que embora elementares, são extremamente eficientes para caracterizar a movimentação das peças e passagem de tabuleiros do jogo Resta Um.

3.1 Aspectos Matemáticos

Seja xOy um sistema de coordenadas cartesianas associado ao tabuleiro, onde cada posição do mesmo seja representada por um par ordenado (x, y) de números inteiros. Então, trabalharemos no conjunto \mathbb{Z}^2 .

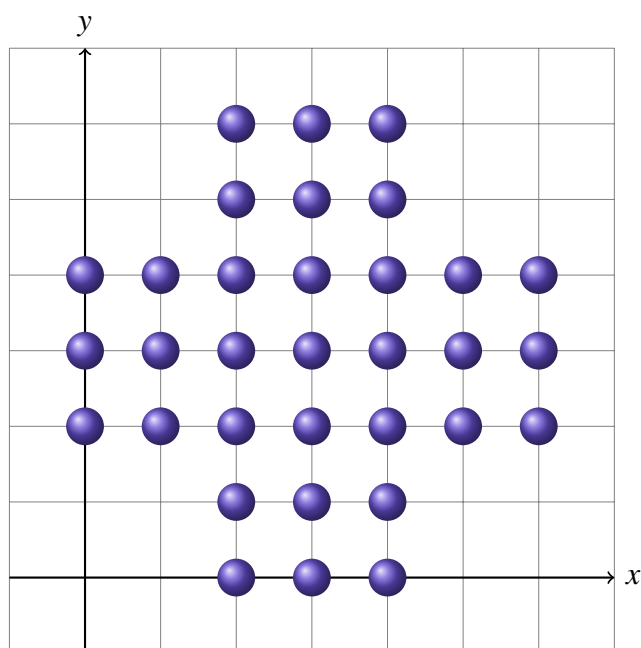


Figura 39 – Sistema xOy associado ao Tabuleiro.

Seja também \mathbb{Z}_3 o conjunto completo de resíduos módulo 3 dado pelos restos de divisões inteiras por 3, $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. O resto da divisão de um número inteiro n por 3 será denotado $n \bmod 3$.

Tomaremos duas funções f e g , com $f, g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3$, dadas por:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + y) \bmod 3 \\ g(x, y) &= (x - y) \bmod 3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

É fundamental para nossa análise compreender os **conjuntos de níveis** das funções f e g . Se i é um elemento de \mathbb{Z}_3 , o conjunto de nível i de f , denotado de forma simplificada $f^{-1}(i)$, é a coleção de pares ordenados (x, y) tais que $f(x, y) = i$. De forma análoga definimos o conjunto de nível $g^{-1}(i)$.

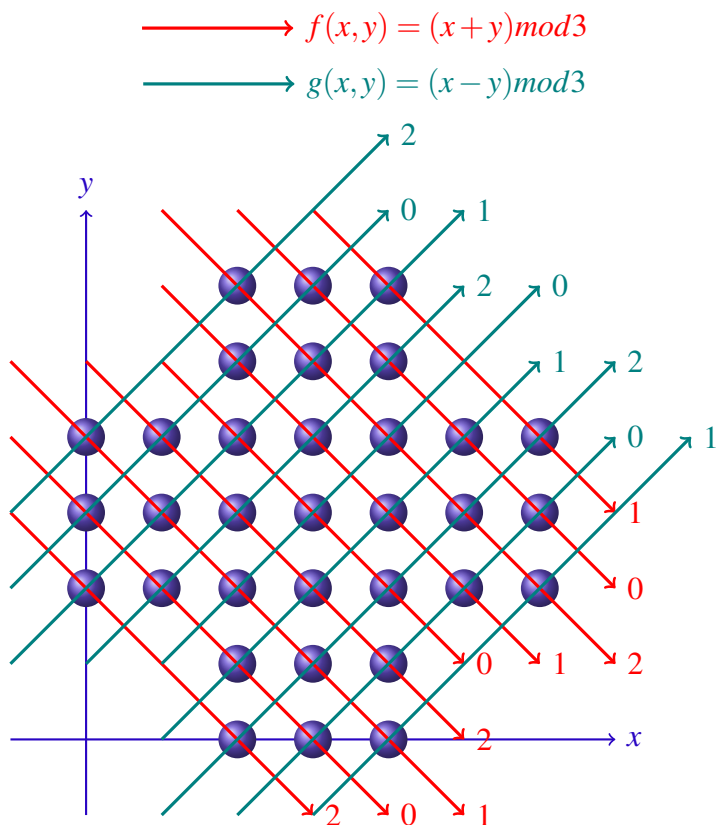


Figura 40 – Conjuntos de níveis de f e g no tabuleiro.

Torna-se interessante definir funções para *contar* a quantidade de pinos existentes num dado conjunto de nível de f , ou g , num certo tabuleiro. Definimos então para todo $i \in \mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned}
 F_i &= |f^{-1}(i)| = \text{número de pinos que estão no nível } i \text{ de } f, \\
 G_i &= |g^{-1}(i)| = \text{número de pinos que estão no nível } i \text{ de } g,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

onde a notação $|A|$ designa a *cardinalidade* de um conjunto A .

A notabilidade sobre a dinâmica do jogo Resta Um está no fato de que, em cada etapa, dois dos três conjuntos de níveis de cada função f ou g , sofrem decrementos, enquanto o terceiro sofre um incremento, sempre unitários. Para rastreamos essas mudanças vamos designar por $F_i(n)$ e $G_i(n)$ os valores de F_i e G_i , respectivamente, na n -ésima etapa do jogo. Isso está resumido no resultado abaixo.

Teorema 1. Se $n \geq 0$ designa o n -ésimo tabuleiro num jogo então para dois valores distintos $i, j \in \mathbb{Z}_3$ temos

$$\begin{aligned} F_i(n+1) &= F_i(n) - 1; \\ F_j(n+1) &= F_j(n) - 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e para o terceiro valor $k \in \mathbb{Z}_3 - \{i, j\}$ ocorre

$$F_k(n+1) = F_k(n) + 1. \quad (3.4)$$

Relações análogas são satisfeitas por $G_i(n)$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Observação 1. Designaremos por "buraco" à uma posição física não ocupada por pino.

Demonstração. Consideremos na etapa n um pino que pula outro à sua direita e termina à direita deste, em posição anteriormente vaga. As demais possibilidades de movimento podem ser estudadas de forma análoga.

Então temos pinos nas posições (x, y) e $(x+1, y)$, e um buraco na posição $(x+2, y)$. Se $f(x, y) = i$, $f(x+1, y) = j$ e $f(x+2, y) = k$, é fácil ver que i, j, k são dois a dois distintos. Nessa transição para a etapa $n+1$ os níveis i e j perderam um, e o nível k ganhou um pino. Isso justifica as equações (3.3) e (3.4).

Relações equivalentes para G_i , $i \in \mathbb{Z}_3$, são obtidas analisando-se os valores $g(x, y)$, $g(x+1, y)$ e $g(x+2, y)$, o que conclui a demonstração. \square

De maneira geral, definamos $p(n)$ como sendo o número total de pinos presentes no tabuleiro na n -ésima etapa ($n=0$ refere-se ao tabuleiro inicial). Daí:

$$p(n) = F_0(n) + F_1(n) + F_2(n) = G_0(n) + G_1(n) + G_2(n). \quad (3.5)$$

Independentemente de para quais dos níveis $\{0, 1, 2\}$ ocorrerá perda de pinos e para qual ocorrerá o ganho, podemos escrever:

$$\begin{aligned} p(n+1) &= F_0(n+1) + F_1(n+1) + F_2(n+1) \\ &= F_0(n) + F_1(n) + F_2(n) - 1 - 1 + 1 \\ &= p(n) - 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Usando a notação do operador de diferença para seqüências de números reais, temos:

$$\begin{aligned}\Delta F_i(n) &= F_i(n+1) - F_i(n) = \pm 1, \\ \Delta G_i(n) &= G_i(n+1) - G_i(n) = \pm 1.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Será útil contabilizar a variação total de F_i e G_i da etapa 0 até a etapa n . Definimos

$$\delta F_i(n) = F_i(0) - F_i(n), \text{ e } \delta G_i(n) = G_i(0) - G_i(n).\tag{3.8}$$

A não ser que conheçamos o tabuleiro nas etapas n e $n+1$ do jogo, não sabemos para que índices $i, j \in \mathbb{Z}_3$ teremos $\Delta F_i(n)$ e $\Delta G_j(n)$ mais um ou menos um. Mas podemos obter informação decisiva para a resolução do jogo se conhecermos o tabuleiro inicial, o tabuleiro final (almejado) e aplicarmos o teorema seguinte.

Teorema 2. Designemos por $n \geq 0$ uma etapa de um jogo. Então para qualquer $i \in \mathbb{Z}_3$ temos:

$$n \equiv \delta F_i(n) \equiv \delta G_i(n) \pmod{2}.\tag{3.9}$$

Demonstração. Mostraremos que $n \equiv \delta F_i(n) \pmod{2}$. A demonstração da segunda congruência é similar.

Definimos $N_i = N_i(n)$ como o número de etapas entre os tabuleiros 0 e n nos quais $\Delta F_i(n) = -1$. E definimos $P_i = P_i(n)$ como o número de etapas nos quais $\Delta F_i(n) = 1$, na mesma seqüência de tabuleiros. As seqüências $N_i(n)$ e $P_i(n)$, $n \geq 0$, tem a tarefa de contar o número de etapas entre 0 e n nas quais houve decremento ou incremento de F_i , respectivamente. Em cada etapa exatamente uma das duas seqüências aumenta de uma unidade. Portanto

$$N_i + P_i = n.\tag{3.10}$$

E é imediato que

$$N_i - P_i = F_i(0) - F_i(n) = \delta F_i(n).\tag{3.11}$$

Subtraindo as equações (3.10) e (3.11) obtemos $2P_i = n - \delta F_i(n)$, e logo

$$n \equiv \delta F_i(n) \pmod{2},$$

concluindo a demonstração. □

3.2 Análise do Jogo com o uso do Teorema 2

O resultado principal estabelecido no Teorema 2 pode ser assim interpretado: as paridades de $\delta F_i(n)$ e $\delta G_i(n)$ são as mesmas de n . Ou seja, em um jogo com um número ímpar de etapas, as paridades de $F_i(n)$ e $F_i(0)$, e de $G_i(n)$ e $G_i(0)$, serão opostas. E em um jogo com um número par de etapas, as paridades de $F_i(n)$ e $F_i(0)$, e de $G_i(n)$ e $G_i(0)$, serão as mesmas.

A aplicação desse fato será prever quais posições **permitidas** serão ocupadas por pinos na etapa n e quais tabuleiros iniciais **não podem** gerar aquela configuração.

Seja b o número inicial de *buracos* no tabuleiro. Como há, em nosso tabuleiro padrão, 33 posições fisicamente ocupáveis, podemos escrever:

$$p(0) + b = 33. \quad (3.12)$$

Na etapa n já foram retirados n pinos do tabuleiro, portanto

$$p(n) = p(0) - n. \quad (3.13)$$

Das equações (3.12) e (3.13) deduzimos

$$n = 33 - b - p(n). \quad (3.14)$$

E para qualquer $n \geq 0$ vale

$$p(n) = F_0(n) + F_1(n) + F_2(n) = G_0(n) + G_1(n) + G_2(n). \quad (3.15)$$

Para exprimir nossos resultados torna-se útil definir um **estado** na etapa n como duas triplas de números $\{F(n), G(n)\}$:

$$\begin{aligned} F &= F(n) = (F_0(n), F_1(n), F_2(n)), \\ G &= G(n) = (G_0(n), G_1(n), G_2(n)). \end{aligned}$$

Façamos a análise de alguns valores possíveis para b , $p(n)$ e $\{F(0), G(0)\}$.

Exemplo 1. Sejam $b = 1$ e $p(n) = 1$. Considere o estado inicial dado por $F(0) = (10, 11, 11)$ e $G(0) = (10, 11, 11)$. Esse estado é o que ocorre na saída mais tradicional do jogo “Resta Um”, como na figura 4.

Então,

$$n = 33 - 1 - 1 = 31 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{2}. \tag{3.16}$$

Logo $\delta F_i(31)$ é ímpar, assim como $\delta G_i(31)$. Em consequência, as paridades das componentes de $F(31)$ e $G(31)$ são opostas, respectivamente, em relação às mesmas componentes de $F(0)$ e $G(0)$. Teremos $F_0(31)$ e $G_0(31)$ ímpares, e $F_i(31)$ e $G_i(31)$ pares para $i = 1, 2$.

Como $p(31) = 1$, o único estado compatível com as condições de paridade é $F(31) = (1, 0, 0)$ e $G(31) = (1, 0, 0)$.

Então a configuração final ocorre na interseção dos níveis 0 de f e g , ou seja, o pino final encontra-se em $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$.

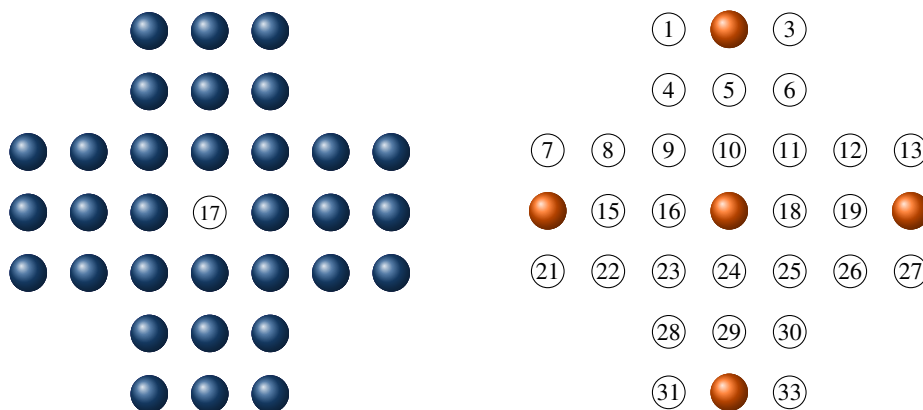


Figura 41 – Configuração Tradicional $F(0) = (10, 11, 11)$; $G(0) = (10, 11, 11)$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O exemplo 1 ilustra as possibilidades para pino final do jogo. De acordo com o 2 as posições finais pertencerão às mesmas curvas de níveis da posição do buraco inicial. Não é difícil ver que isso não depende do buraco estar no centro do tabuleiro. Torna-se útil então a definição abaixo.

Definição 1. A **grade** de uma posição (x, y) no tabuleiro é a interseção dos conjuntos de níveis de f e de g que contem (x, y) .

$$T_{(x,y)} = f^{-1}(f(x,y)) \cap g^{-1}(g(x,y)) . \tag{3.17}$$

O conceito de grade define uma *relação de equivalência* entre os pontos do tabuleiro, pois se A e B são pontos, então $A \in T_B \Leftrightarrow T_A = T_B$.

Em particular, duas grades são iguais, ou são disjuntas. Como cada grade está associada a uma interseção de níveis de f e g , podemos denotar

$$T_{ij} = f^{-1}(i) \cap g^{-1}(j), \quad (3.18)$$

onde $(i, j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Existem portanto 9 grades no tabuleiro.

Corolário 3. Uma condição necessária para que exista um jogo que se inicie com um buraco na posição A e termine com um pino na posição B é que A e B pertençam à mesma grade.

Justificativa 1. Considerar o enunciado na **Definição 1**, no **Teorema 2** e também na **equação 3.18**.

Seria a *condição necessária* do corolário 3 também *suficiente*? No caso de A e B estarem na grade T_{00} a resposta é “sim”, desde que A e B não se correspondam por uma rotação de 90° no tabuleiro. Mas adiaremos a justificativa desse fato até o próximo capítulo.

Vamos generalizar o exemplo 1 analisando alguns valores de b para $p(n) = 1$.

Lema 4. Considere um jogo que começa com b buracos e termina, na etapa n , com 1 pino na grade T_{ij} . Então as paridades de $F_i(0)$ e $G_j(0)$ serão opostas a de b , e as demais componentes de $F(0)$ e $G(0)$ terão a mesma paridade de b .

Demonstração. Da equação (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} n = 33 - b - 1 = 32 - b &\Rightarrow n \equiv b \pmod{2} \\ \implies \delta F_k(n) \equiv \delta G_l(n) &\equiv b \pmod{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}_3. \end{aligned}$$

Logo

$$F_k(0) \equiv F_k(n) + b \pmod{2}, \quad \text{e} \quad G_l(0) \equiv G_l(n) + b \pmod{2}.$$

Na etapa n temos $F_i(n) = G_j(n) = 1$ e as demais componentes de $F(n)$ e $G(n)$ nulas, portanto as paridades de $F_k(0)$ e $G_l(0)$ são invertidas em relação à de b somente nos índices i, j respectivamente. \square

Exemplo 2. Um jogo começa com $b \geq 2$ buracos e termina com um pino na grade T_{ij} . Aplicando o Lema 4 obtemos:

- $b = 2$: Se os dois buracos estiverem num mesmo nível de f (ou de g) então dois níveis da etapa inicial terão 11 pinos, e o terceiro terá 9 pinos, configurando três componentes ímpares. O que é incompatível com o estado final, de duas componentes pares e uma ímpar. Um estado inicial admissível para esse jogo precisa de dois níveis com 10 pinos e um com 11 pinos, para f e g . Como exemplo, o estado inicial $\{(10, 10, 11), (10, 11, 10)\}$ é compatível, e o pino final deve estar na grade T_{21} . Mas os estados $\{(11, 9, 11), (11, 9, 11)\}$ e $\{(10, 11, 10), (11, 11, 9)\}$ não são compatíveis.

Detalhando o que dissemos acima, vamos considerar o estado inicial dado por $\{(10, 10, 11), (10, 10, 11)\}$, sendo $b = 2$ e $p(n) = 1$. Então:

$$n = 33 - 2 - 1 = 30 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2} \quad (3.19)$$

Logo, $\delta F_k(30)$ é par, assim como $\delta G_k(30)$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Em consequência, as paridades das componentes de $F(30)$ e $G(30)$ são iguais, respectivamente, em relação às mesmas componentes de $F(0)$ e $G(0)$. Teremos $F_k(30)$ e $G_k(30)$ pares para $k = 0, 1$ e $F_2(30)$ e $G_2(30)$ ímpares.

Sendo $p(30) = 1$ o único estado compatível com as condições de paridade é $\{(0, 0, 1), (0, 0, 1)\}$. Então a configuração final ocorre em $f^{-1}(2) \cap g^{-1}(2)$, ou seja, na grade T_{22} .

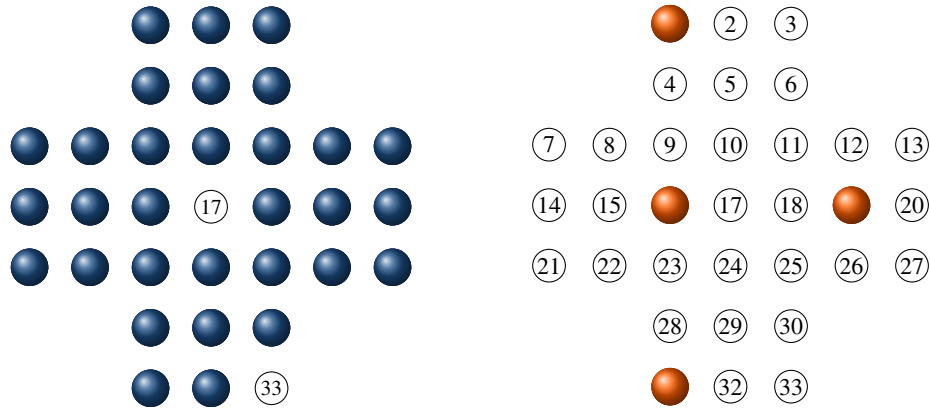


Figura 42 – Estado $\{(10, 10, 11), (10, 10, 11)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se considerarmos o estado inicial dado por $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$, assim como suas combinações na grade T_{ij} , temos que $\delta F_i(30)$ é par, assim como $\delta G_i(30)$. Em consequência, as paridades das componentes de $F(30)$ e $G(30)$ são iguais, respectivamente, em relação às mesmas componentes de $F(0)$ e $G(0)$. Teremos $F_i(30)$ e $G_i(30)$ ímpares para $i = 0, 1, 2$, implicando que existirá pelo menos um pino em cada nível e pelo menos 3 pinos restantes no tabuleiro final. Este fato torna $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$ **incompatível** com o enunciado no Lema 4.

- Sejam $b = 4$ e $p(n) = 1$:

a) Pensaremos inicialmente no caso onde os 4 buracos estejam no mesmo nível de f (ou de g). Então, na etapa inicial, teremos dois níveis com 11 pinos e 1 nível com 7 pinos. Desse modo serão 3 níveis com componentes ímpares, contradizendo o Lema 4.

Como consequência teremos pelo menos um pino em cada nível e pelo menos 3 pinos no tabuleiro final, sendo dessa forma **não admissíveis**.

Observação 2. No nosso caso específico (tabuleiro padrão), os estados $\{(7, 11, 11), (11, 7, 11)\}$; $\{(7, 11, 11), (11, 11, 7)\}$; $\{(11, 7, 11), (7, 11, 11)\}$ e $\{(11, 11, 7), (7, 11, 11)\}$ não são possíveis, por apresentarem apenas 3 posições disponíveis em cada respectiva grade.

b) Pensando agora na situação onde os 4 buracos **não** estão todos na mesma grade, teremos pelo Lema 4, que uma das componentes de $F(0)$ será ímpar e as demais serão pares. Se a componente ímpar for 11 então as pares serão: 10 e 8. Se a componente ímpar for 9, as pares serão 10 e 10. Assim há um grande número de possibilidades para $F(0)$, que também ocorrem para $G(0)$ de forma independente.

Por exemplo, os estados $\{(8, 10, 11), (10, 11, 8)\}$, $\{(8, 11, 10), (10, 11, 8)\}$, $\{(8, 10, 11), (11, 8, 10)\}$, $\{(9, 10, 10), (9, 10, 10)\}$ e $\{(10, 9, 10), (10, 10, 9)\}$, são considerados admissíveis e determinarão um pino restante na grade T_{21} , T_{11} , T_{20} , T_{00} e T_{12} , respectivamente. Mas o estado $\{(7, 11, 11), (11, 7, 11)\}$ é **incompatível**, assim como as combinações de grade de $\{(9, 9, 11), (9, 9, 11)\}$, sendo considerados **inadmissíveis**.

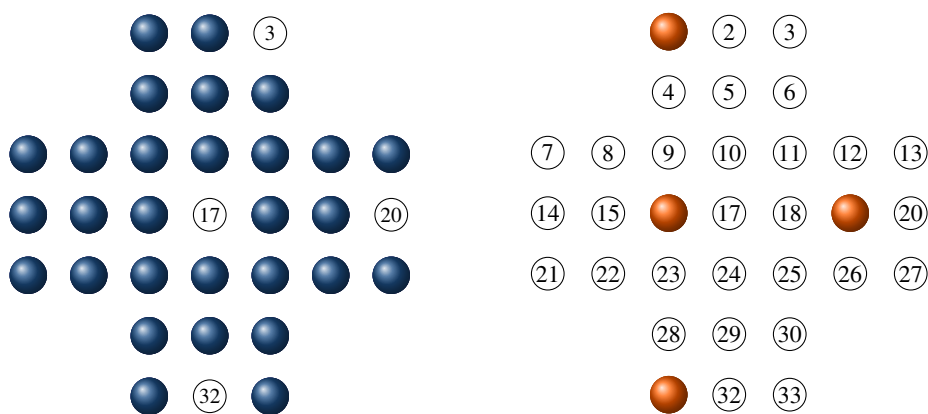


Figura 43 – Uma configuração $\{(8, 10, 11), (8, 10, 11)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

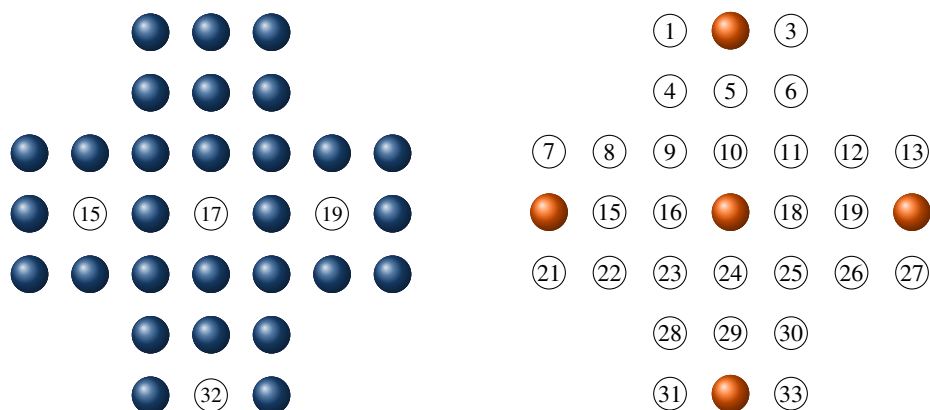


Figura 44 – Uma configuração $\{(9, 10, 10), (9, 10, 10)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Sendo $p(n) = 1$ e $b = 6$, teremos pelo Lema 4 que uma das componentes de $F(0)$ será ímpar e as demais serão pares. Se a componente ímpar for 11 então as pares serão: 10 e 6 ou 8 e 8. Se a componente ímpar for 9, as pares serão 10 e 8. E se a componente ímpar for 7 as pares serão 10 e 10. Assim há um grande número de possibilidades para $F(0)$, que também ocorrem para $G(0)$ de forma independente.

Por exemplo, são admissíveis os estados $\{(6, 10, 11), (10, 11, 6)\}$, $\{(7, 10, 10), (8, 11, 8)\}$ e $\{(8, 8, 11), (9, 8, 10)\}$.

Também pelo Lema 4 serão **inadmissíveis** os estados $\{(7, 9, 11), (7, 9, 11)\}$; $\{(9, 9, 9), (9, 9, 9)\}$; $\{(5, 11, 11), (5, 11, 11)\}$; bem como todas as suas combinações de grade.

Observação 3. No caso do estado $\{(5, 11, 11), (5, 11, 11)\}$ é necessário verificar que, no nosso tabuleiro padrão, ele não é possível de ser construído, uma vez que temos no máximo 5 posições ocupáveis numa mesma grade (caso: T_{00}).

Passaremos agora à análise dos casos onde o número de buracos é ímpar.

- Se $p(n) = 1$ e $b = 3$, pelo Lema 4, necessitaremos agora que o estado inicial tenha duas componentes ímpares e uma par. Assim temos:
 - a) A componente par de $F(0)$ é 8. Então as componentes ímpares são 11 e 11.

b) A componente par de $F(0)$ vale 10. As componentes ímpares são 9 e 11. Combinando as possibilidades a) e b) para $F(0)$, e também para $G(0)$, obtemos como **exemplos** de estados iniciais admissíveis $\{(11, 8, 11), (10, 9, 11)\}$ e $\{(11, 11, 8), (8, 11, 11)\}$.

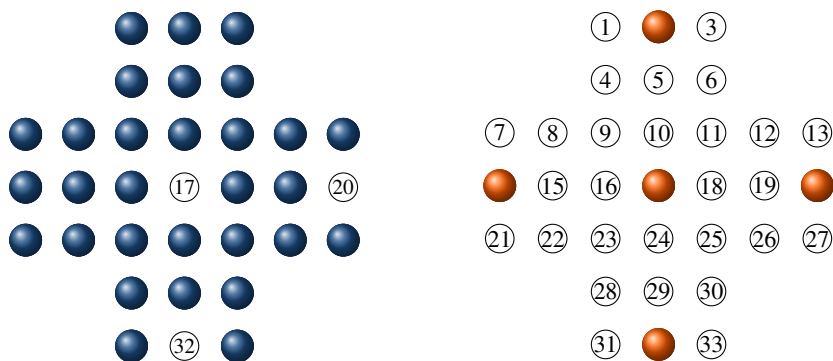


Figura 45 – Uma configuração $\{(8, 11, 11), (8, 11, 11)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

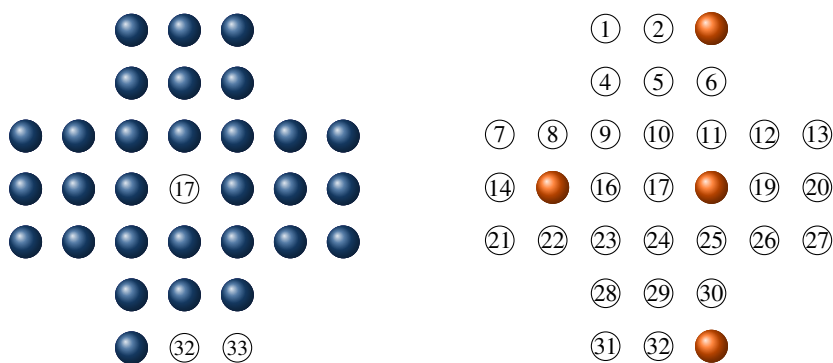


Figura 46 – Uma configuração $\{(9, 10, 11), (9, 10, 11)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

c) O estado $\{(10, 10, 10), (10, 10, 10)\}$ é claramente **inadmissível**; pois $\delta F_i(29)$ é ímpar, assim como $\delta G_i(29)$. Em consequência, as paridades das componentes de $F(29)$ e $G(29)$ são opostas, respectivamente, em relação às mesmas componentes de $F(0)$ e $G(0)$. Teremos $F_i(29)$ e $G_i(29)$ ímpares para $i = 0, 1, 2$. Em especial,

haverá ao menos um pino em cada estado, e ao menos 3 pinos no tabuleiro, o que contradiz o resultado almejado $p(29) = 1$.

- Para o caso de $p(n) = 1$ e $b = 5$, novamente pelo Lema 4, necessitaremos que o estado inicial tenha duas componetes ímpares e uma par. Assim, existem duas situações a serem analisadas:

a) Se os 5 buracos estão todos na mesma grade, teremos uma componente par para $F(0)$, assim como para $G(0)$, de valor 6. Então as duas componetes ímpares terão valor 11, gerando várias possibilidades de formação para o estado inicial. Assim, como exemplo, temos que o estado $\{(11, 6, 11), (11, 11, 6)\}$, com suas combinações de grade, é **admissível**. No nosso caso específico (tabuleiro padrão), este estado é possível apenas na configuração $\{(6, 11, 11), (6, 11, 11)\}$, estando os 5 buracos na grade T_{00} , assim como o pino final.

b) Se os 5 buracos não estão todos na mesma grade, então poderemos ter:

(i) - A componente par de $F(0)$, assim como para $G(0)$, vale 10. Então as componentes ímpres serão (7 e 11) ou (9 e 9), gerando como exemplo de estados admissíveis: $\{(7, 10, 11), (7, 10, 11)\}$; $\{(10, 7, 11), (11, 10, 7)\}$, $\{(9, 9, 10), (9, 9, 10)\}$; e também suas combinações de grade.

(ii) - A componente par de $F(0)$, também para $G(0)$, vale 8. Então as componenes ímpares serão (9 e 11). Assim teremos como exemplos de estados admissíveis: $\{(8, 9, 11), (8, 9, 11)\}$; $\{(11, 8, 9), (9, 11, 8)\}$; com suas respectivas combinações de grade.

(iii) - O estado $\{(8, 10, 10), (8, 10, 10)\}$; e suas combinações de grade, pelo Lema 4 é **inadmissível**.

Lema 5. Considere um jogo que começa com $b \geq 2$ buracos e termina, na etapa n , com 2 pinos na grade T_{ij} . Então **todas** as componentes de $F(0)$ e $G(0)$ têm a mesma paridade de $b + 1$.

Demonstração. Da equação (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} n &= 33 - b - 2 = 31 - b \Rightarrow n \equiv b + 1 \pmod{2} \\ \implies \delta F_k(n) &\equiv \delta G_l(n) \equiv b + 1 \pmod{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

Na etapa n temos $F_i(n) = 2$ e $F_k(n) = 0$ se $k \neq i$, logo $F_k(n)$ é par para todo $k \in \mathbb{Z}_3$. Similarmente $G_l(n)$ é par para $l \in \mathbb{Z}_3$. Logo para $k, l \in \mathbb{Z}_3$.

$$F_k(0) \equiv F_k(n) + b + 1 \equiv b + 1 \pmod{2}, \quad \text{e} \quad G_l(0) \equiv G_l(n) + b + 1 \equiv b + 1 \pmod{2}.$$

Portanto todas as componentes de $\{F(0), G(0)\}$ são pares se b for ímpar, e vice-versa. □

Exemplo 3. • Se $b = 2$ e $p(n) = 2$. Pelo Lema 5, vamos considerar o estado inicial dado por: $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$.

Temos que $\delta F_i(29)$ é ímpar, assim como $\delta G_i(29)$. Em consequência, haverá apenas um dos níveis de f e um dos níveis de g preenchidos com 2 pinos. Tanto $F(29)$ como $G(29)$ serão uma das três triplas $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$, que combinadas, geram 9 estados possíveis distintos.

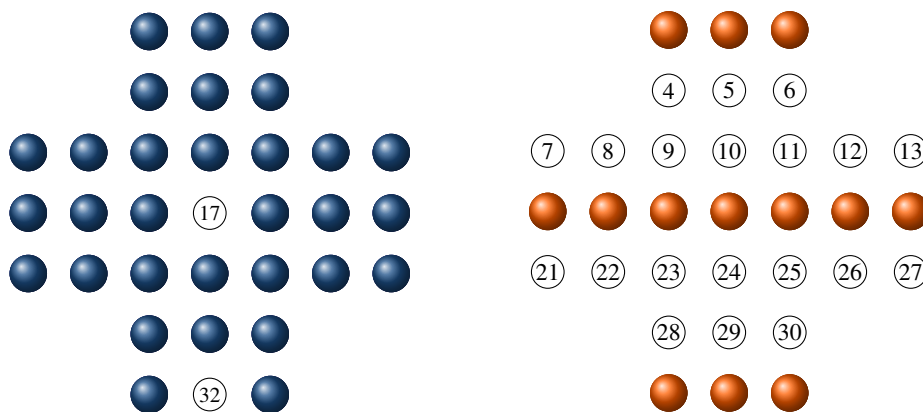


Figura 47 – Uma configuração $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Outros estados compatíveis com o enunciado acima são $\{(9, 11, 11), (11, 11, 9)\}$ e $\{(11, 9, 11), (11, 11, 9)\}$.

- Se $b = 3$ e $p(n) = 2$, então pelo Lema 5, teremos como estado possível apenas $\{(10, 10, 10), (10, 10, 10)\}$.

Temos que $\delta F_i(28)$ é par, assim como $\delta G_i(28)$. Em consequência, os pinos restantes ocuparão apenas 1 dos níveis de f e de g . Tanto $F(28)$ como $G(28)$ serão uma das três triplas $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$.

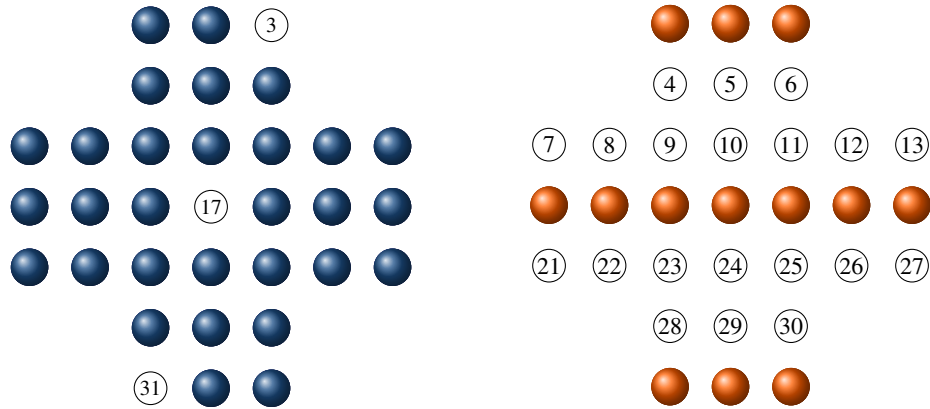


Figura 48 – Uma configuração $\{(10, 10, 10), (10, 10, 10)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Se $b = 4$ e $p(n) = 2$, então pelo Lema 5, teremos como possíveis, os estados:

a) $\{(7, 11, 11), (7, 11, 11)\}$ e suas combinações de grade. Temos $\delta F_i(27) \equiv \delta G_i(27) \equiv b + 1 \pmod{2}$, com as paridades das componentes de $F(27)$ e $G(27)$ contrárias, respectivamente, em relação às mesmas componentes de $F(0)$ e $G(0)$. Dai $F_i(27)$ e $G_i(27)$ ímpares para $i = 0, 1, 2$. Assim, um estado compatível com as condições de paridade pertence à uma combinação de grade das triplas $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$, com 2 pinos finais em T_{ij} , com $(i, j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

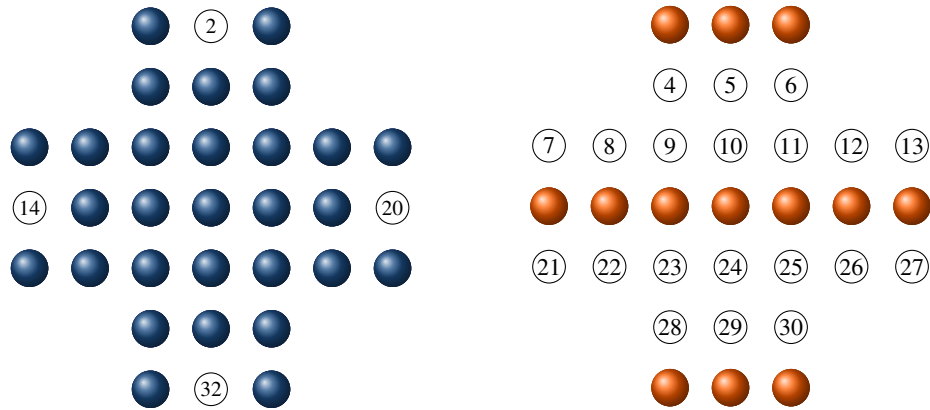


Figura 49 – Uma configuração $\{(7, 11, 11), (7, 11, 11)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

b) Outros estados compatíveis com o enunciado no ítem acima são:
 $\{(9, 9, 11), (9, 9, 11)\}$, $\{(9, 11, 9), (11, 7, 11)\}$.

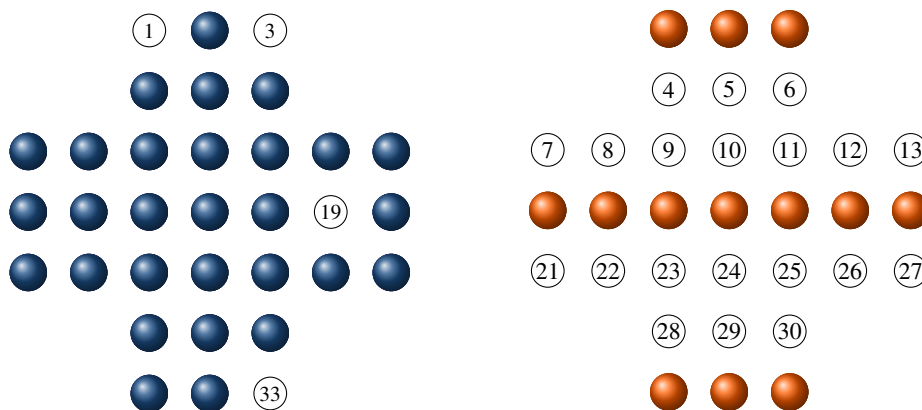


Figura 50 – Uma configuração $\{(11, 9, 9), (11, 9, 9)\}$ e possíveis posições finais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Se $b = 5$ e $p(n) = 2$, então pelo Lema 5, teremos como possíveis, os estados $\{(8, 10, 10), (8, 10, 10)\}$ e suas combinações de grade, com os estados finais pertencentes à uma combinação de grade das triplas $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$, com 2 pinos restantes em T_{ij} , com $(i, j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
- Se $b = 6$ e $p(n) = 2$, então pelo Lema 5, e obedecendo as observações 2 e 3 teremos como possíveis, os estados:
 - a) $\{(5, 11, 11), (5, 11, 11)\}$ e suas combinações de grade. Os estados finais compatíveis pertencem às combinações de grade de $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$, com 2 pinos restantes em T_{ij} , com $(i, j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Devemos observar porém, que em nosso tabuleiro padrão, este estado não é possível, pois a grade T_{ij} , com maior quantidade de casa disponíveis para os buracos é a grade T_{00} , com apenas 5 casas.

b) Outros estados compatíveis são: $\{(9, 9, 9), (9, 9, 9)\}$ e $\{(7, 9, 11), (7, 9, 11)\}$, com suas respectivas combinações de grade.

Há a possibilidade de elaboração de outras configurações. As aqui apresentadas servem como exemplos para o leitor elaborar a sua configuração ideal, propor o seu desafio e encontrar a solução (vencer o jogo).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo desenvolvemos algumas estratégias de solução do jogo, partindo de tabuleiros iniciais com um ou mais buracos e chegando em tabuleiros finais com um pino, ou então, com poucos pinos. Algumas dessas estratégias foram desenvolvidas por nossos alunos em atividades dirigidas em sala de aula.

Apresentamos também alguns resultados na forma de Lemas ou Teoremas de **existência** e que completam outros que obtivemos no capítulo 3.

Usamos as ideias citadas na figura 11; na figura 39 e também na figura 40.

Vamos primeiro responder a uma pergunta feita na teoria do Capítulo 3.

Lema 6. Considere um jogo que começa com um único buraco na grade T_{00} .

- a) Se o buraco estiver no centro do tabuleiro, então para cada posição da grade T_{00} existe uma solução que termina com um pino nessa posição.
- b) Se o buraco não estiver no centro do tabuleiro então existem soluções que terminam, respectivamente, com:
 - (i) um pino na posição central;
 - (ii) um pino na posição de T_{00} oposta (relativamente ao centro do tabuleiro) à do buraco inicial.

Demonstração. A ideia aqui é partir de soluções já construídas, e obter variações simples que satisfaçam às condições do Lema.

Para o caso a) utilizamos a solução clássica dada pela tabela 21, que iniciando-se com o buraco na posição central, termina com um pino nessa mesma posição (vide figura ??).

Analisemos a última etapa do jogo: para um pino terminar na posição central (coordenadas $(x, y) = (3, 3)$ seguindo o sistema ilustrado na figura 39) é necessário que haja, na penúltima etapa do jogo, um pino em uma das 4 posições adjacentes à posição central. Sem perda de generalidade digamos que este pino estivesse na posição $(3, 2)$. Haveria então dois pinos na penúltima etapa, ocupando as posições $(3, 2)$ e $(3, 1)$.

A solução original corresponde ao pino de $(3, 1)$ pular para $(3, 3)$. A solução alternativa seria o pino de $(3, 2)$ pular para $(3, 0)$. Isso mostra que a posição de T_{00} na parte inferior do tabuleiro pode ser alcançada pelo pino final. Essa solução, completa, está descrita na tabela 28.

Por fim, usando um argumento de simetria do tabuleiro por rotações de 90° , vê-se que qualquer posição de T_{00} além da central pode ser destino do último pino. Especificamente, digamos por exemplo, que se deseja terminar com um pino na posição $(6, 3)$. Esta posição “corresponde” à posição $(3, 0)$ após uma rotação anti-horária do tabuleiro de 90° . Portanto para construir a solução com pino final em $(6, 3)$, saindo do tabuleiro inicial, rotacionamos o mesmo em 90° no sentido horário, aplicamos a solução descrita na tabela 28, e por fim, rotacionamos de volta em 90° no sentido anti-horário. Isso conclui a parte a).

Para a leitura das tabelas e esquemas de resolução, também neste capítulo, seguimos as condições já definidas no capítulo 2.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (n^o)	15	4	7	21	10	7	12	3	1	18	3	30	27	13	24	27
Para Casa (n^o)	17	16	9	7	8	9	10	11	3	6	11	18	25	27	26	25
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (n^o)	22	31	33	16	31	24	18	16	4	6	19	10	23	26	24	
Para Casa (n^o)	24	23	31	28	23	26	16	4	6	18	17	24	25	24	32	

Tabela 28 – Solução para o ítem a

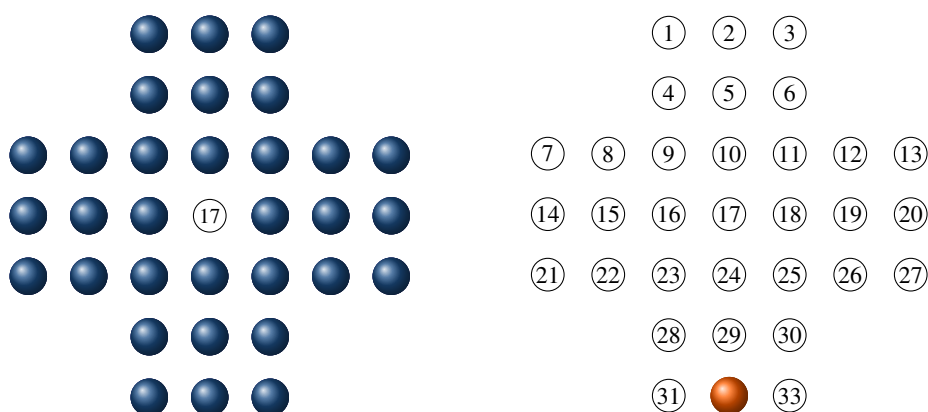


Figura 51 – Exemplo de resolução para o ítem **a**.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisemos a parte b) nos seus dois casos:

- Em b_i , partimos de um tabuleiro inicial com o buraco pertencente a grade T_{00} , não sendo a posição central (podemos supor o buraco na posição $(x,y) = (3,6)$ - vide figura 52 - e resumir nossa análise ao que foi explanado no caso b). Uma solução completa para esse caso é descrita na tabela 29. Por argumento de simetria análogo ao item a), podemos adaptar essa solução para o caso de qualquer buraco inicial em $T_{00} - \{(3,3)\}$.
- Em b_{ii} , partimos de uma situação similar ao item b_i (Veja figura 30), chegando porém, na antepenúltima etapa com 4 pinos em condições de fazer o movimento e atingir o objetivo.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que começamos com o buraco na posição $(0,3)$. Os pinos finais estarão nas posições $(3,3), (4,3), (4,4), (4,5)$. Fazemos os pinos pularem da posição $(3,3)$ para $(5,3)$; de $(4,5)$ para $(4,3)$ e finalmente, de $(4,3)$ para $(6,3)$ (Veja figura 53). A solução deste caso está na tabela 30. Contrariamente aos casos a) e b_i), não podemos usar aqui um argumento de simetria visando alcançar qualquer posição de $T_{00} - \{(0,0)\}$ para o pino final. As soluções para alcançar as posições $(3,0)$ ou $(3,6)$ devem ser *originais*, caso existam.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	10	12	3	1	18	3	30	27	13	24	27	22	31	24	21	33
Para Casa (nº)	2	10	11	3	6	11	18	25	27	26	25	24	23	22	23	31
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	16	31	7	8	4	16	28	21	10	24	11	26	23	30	19	
Para Casa (nº)	28	23	21	22	16	28	30	23	24	26	25	24	25	18	17	

Tabela 29 – Solução para o ítem b_i .

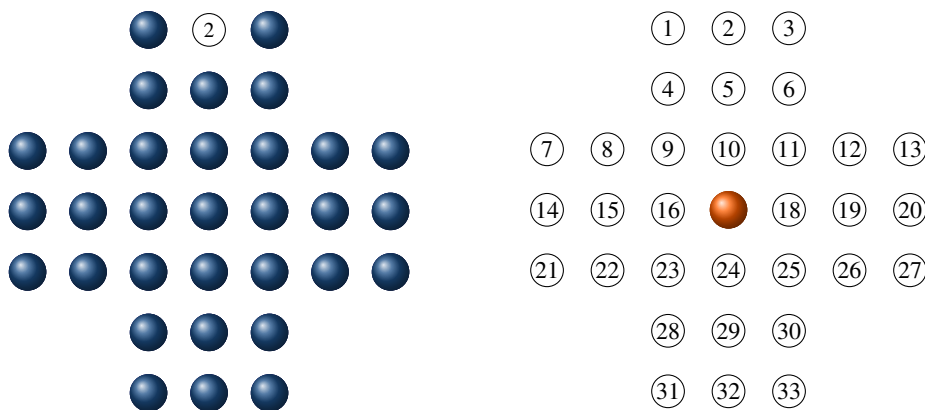


Figura 52 – Exemplo de resolução para o ítem b_i .

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	16	4	7	21	10	7	12	3	10	13	2	16	1	18	9	28
Para Casa (nº)	14	16	9	7	8	9	10	11	12	11	10	4	9	6	11	16
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	25	22	30	31	33	16	31	20	23	18	27	30	17	6	18	
Para Casa (nº)	23	24	28	23	31	28	23	18	25	30	25	18	19	18	20	

Tabela 30 – Solução para o ítem b_{ii} .

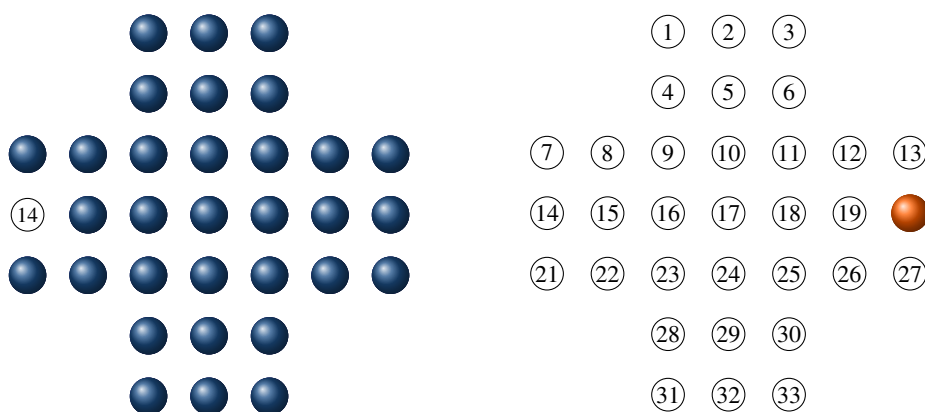


Figura 53 – Exemplo de resolução para o ítem b_{ii} .

Fonte: Elaborada pelo autor.



Pensando na proposta inicial de começar o jogo com alguma posição física não ocupada e chegar ao objetivo final de restar apenas **um pino**, vamos estudar algumas possibilidades de resoluções. Partiremos da configuração mais tradicional: casa central $(x,y) = (3,3)$, inicialmente vazia e chegar com último pino na mesma posição $(x,y) = (3,3)$.

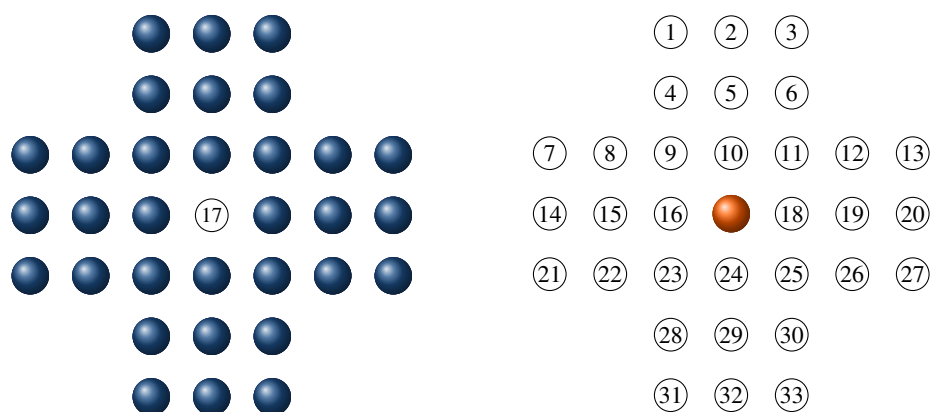


Figura 54 – Configuração inicial tradicional e objetivo final.

A principal pergunta a ser respondida é: "Jogar com mais posições não ocupadas por pinos facilita ganhar o jogo"?

Resposta: "*Nem Sempre*".

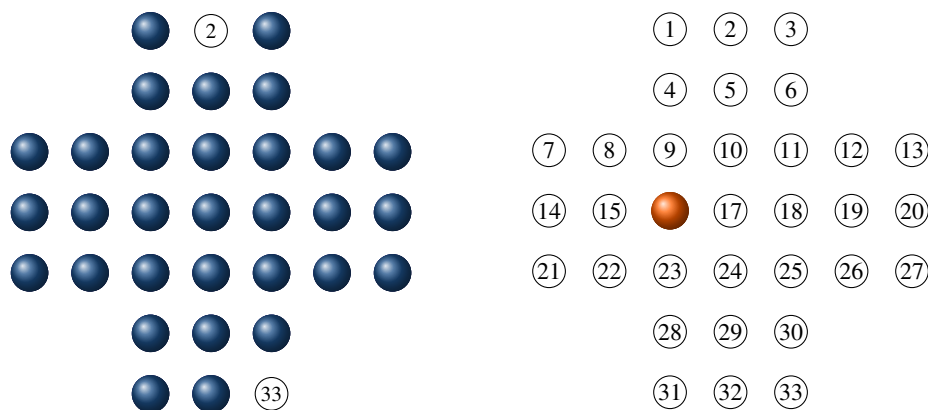
A seguir são propostas algumas atividades com o objetivo de elucidar a pergunta acima.

Atividade Proposta 1. "Com 2 posições não ocupadas por pinos ($b = 2$) na configuração inicial é possível restar 1 pino"?

Segue uma resolução para o estado inicial $\{(10, 10, 11), (10, 10, 11)\}$. Neste jogo tomamos o cuidado para que as casas vazias fiquem suficientemente longe para **não** serem consideradas a 2ª etapa de um jogo iniciado com **um** buraco.

Como $b = 2$ e $p(n) = 1$, então: $n = 33 - 2 - 1 = 30 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2}$. Daí, pelo Lema 4, obteremos um pino final em $f^{-1}(\{2\}) \cap g^{-1}(\{2\}) = T_{22}$.

Etapa n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (n^o)	10	12	3	1	18	3	30	27	13	24	27	22	31	24	21	32
Para Casa (n^o)	2	10	11	3	6	11	18	25	27	26	25	24	23	22	23	24
Etapa n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (n^o)	16	25	28	10	19	24	9	11	4	23	14	16	7	4		
Para Casa (n^o)	28	23	16	24	17	10	23	9	16	9	16	4	9	16		

Tabela 31 – $b = 2$ e $p(n) = 1$ Figura 55 – Uma configuração $\{(10, 10, 11), (10, 10, 11)\}$ com objetivo final.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade Proposta 2. "É possível restar apenas 1 pino se as 2 posições não ocupadas estiverem numa mesma diagonal"?

Resposta: "NÃO".

Seja $b = 2$ e $p(n) = 1$. Então $n = 33 - 2 - 1 = 30 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2}$. Como ambos os buracos devem estar na mesma diagonal, então ao menos uma das funções f ou g terá 9 pinos em um de seus níveis na etapa 0. Por exemplo, podemos supor, sem perda de generalidade, $F_0(0) = 9$. Consideramos o estado $\{(9, 11, 11), (10, 11, 10)\}$. Pelo Lema 4, torna-se *impossível* obter apenas **UM PINO** restante.

Atividade Proposta 3. "Jogando-se com 2 posições vazias é possível sobraem exatamente 2 pinos 'distantes' um do outro, suficientemente, para não haver mais possibilidade de continuidade do jogo"?

Resposta: "Sim".

Como já discutimos no capítulo 3, teremos $b = 2$ e $p(n) = 2$. Então: $n = 33 - 2 - 2 = 29 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{2}$.

Considere o estado $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$. Pelo Lema 5 teremos a configuração final compatível com as triplas $\{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$, que combinadas geram 9 estados possíveis e, portanto, dois pinos restantes ocupando os níveis $f^{-1}(\{i\}) \cap g^{-1}(\{j\})$, para $(i, j) \in \mathbb{Z}_3$.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (n^o)	29	22	31	24	26	33	24	21	27	18	12	13	27	30	16	8
Para Casa (n^o)	17	24	23	22	24	25	26	23	25	30	26	27	25	18	28	22
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (n^o)	7	21	28	17	6	19	4	3	17	16	2	1	10			
Para Casa (n^o)	21	23	16	19	18	17	6	11	5	4	10	9	12			

Tabela 32 – $b = 2$ e $p(n) = 2$.

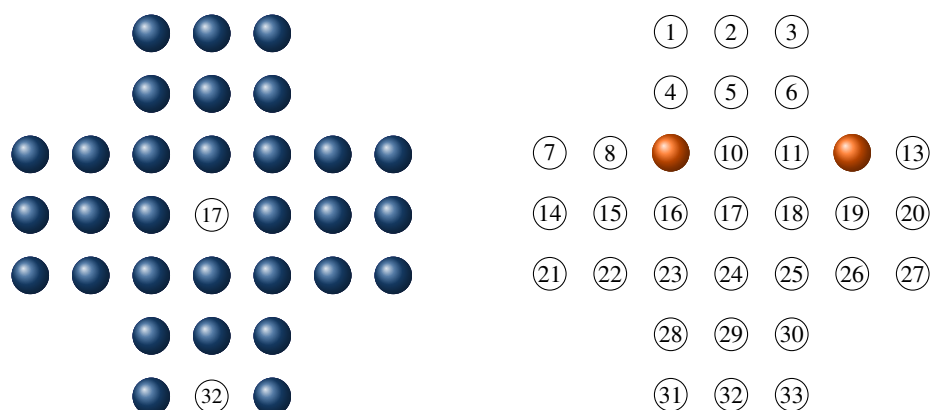


Figura 56 – Uma configuração $\{(9, 11, 11), (9, 11, 11)\}$ com objetivo final.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade Proposta 4. "Se o número de casas não ocupadas for 3, fica mais fácil restar apenas **um** pino"?

Para esta atividade, consideraremos que trata-se de um jogo onde os buracos estão suficientemente longe para não serem considerados um caso de 3^a etapa de um jogo de 1 buraco, nem a 2^a etapa de um jogo de 2 buracos.

Resposta: "Teremos apenas a diminuição de uma etapa", em relação a 3.19. A seguir são apresentadas duas configurações iniciais possíveis, juntamente com suas resoluções, e uma impossível.

- Seja $b = 3$ e $p(n) = 1$. Então $n = 33 - 3 - 1 = 29 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod 2$.

Considere o estado:

a) $\{(8, 11, 11), (8, 11, 11)\}$. Pelo Lema 4 teremos a configuração final compatível em $\{(1, 0, 0), (1, 0, 0)\}$, ou seja, ocorre em $f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\})$.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	24	26	33	31	18	33	23	21	16	7	8	21	24	31	22	24
Para Casa (nº)	32	24	25	33	30	25	31	23	28	21	22	23	22	23	24	26
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	6	13	18	3	10	27	13	30	12	10	1	8	5			
Para Casa (nº)	18	11	6	11	12	13	11	18	10	8	9	10	17			

Tabela 33 – $b = 3$ e $p(n) = 1$ (a)

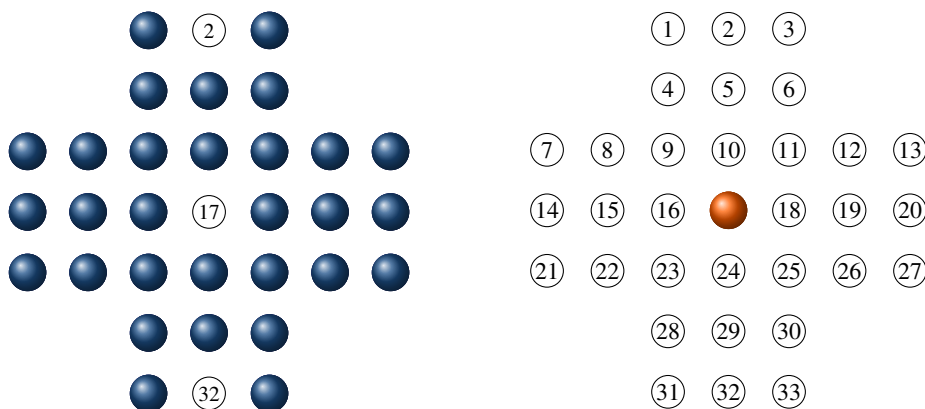


Figura 57 – Uma configuração $\{(8, 11, 11), (8, 11, 11)\}$ com objetivo final.

Fonte: Elaborada pelo autor.

b) $\{(9, 10, 11), (9, 10, 11)\}$. Pelo Lema 4 teremos a configuração final compatível em $\{(0, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, ou seja, ocorre em $f^{-1}(\{1\}) \cap g^{-1}(\{1\})$.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Da Casa (nº)	15	4	7	21	10	7	12	1	3	10	13	17	29	18	6	4
Para Casa (nº)	17	16	9	7	8	9	10	3	11	12	11	15	17	6	4	16
Etapa (n)	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Da Casa (nº)	22	24	15	31	30	27	18	33	20	18	10	23	30			
Para Casa (nº)	24	10	17	23	18	25	30	25	18	30	24	25	18			

Tabela 34 – $b = 3$ e $p(n) = 1$ (b)

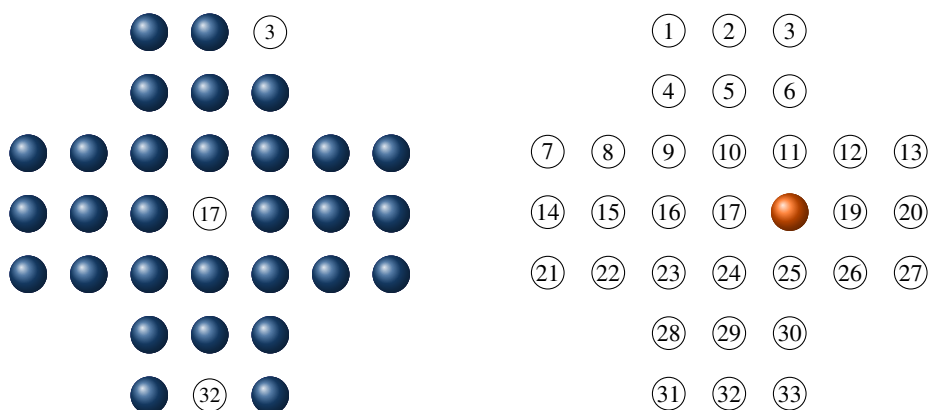


Figura 58 – Uma configuração $\{(9, 10, 11), (9, 10, 11)\}$ com objetivo final.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- c) $\{(10, 10, 10), (10, 10, 10)\}$. Pelo Lema 4 teremos que **não** é possível chegar-se ao objetivo de um pino restante.

Concretizando as discussões realizadas até o momento, são apresentadas a seguir mais algumas possibilidades de jogo. Com uma quantidade maior de casas não ocupadas por pinos na configuração inicial, presume-se que o nível de dificuldade do jogo está no modo como essas posições são dispostas. Seguem alguns exemplos:

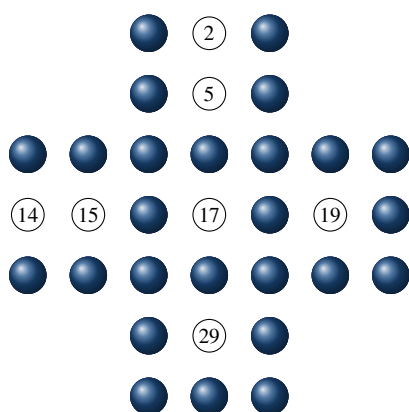


Figura 59 – Configuração inicial sem possibilidade de jogo

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível usar as configurações a seguir como inspiração e criar novos desafios; instigar a curiosidade e chegar com êxito à conclusão do jogo.

Desafio 1. Configuração inicial com 24 posições não ocupadas. Perfazem-se 08 etapas e termina-se com 01 pino restante.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8
Da Casa (nº)	16	12	5	30	18	9	28	15
Para Casa (nº)	28	10	17	18	16	23	16	17

Tabela 35 – Desafio 01

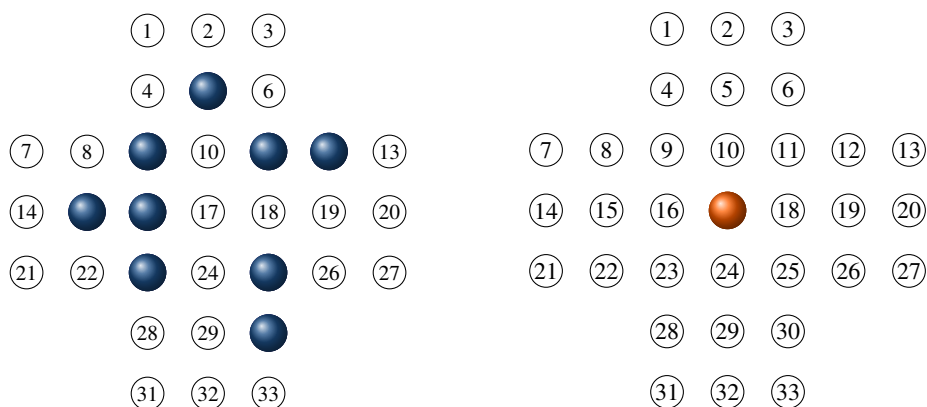


Figura 60 – Desafio 01 e objetivo final - proposto pelos alunos Matheus e Alvaro - 9º ano A - 2019.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Desafio 2. Configuração inicial com 24 posições não ocupadas e os pinos dispostos, centralizados, em forma de cruz. Perfazem-se 08 etapas e termina-se com 01 pino restante.

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8
Da Casa (nº)	18	16	5	17	20	29	18	15
Para Casa (nº)	20	18	17	19	18	17	16	17

Tabela 36 – Desafio 02

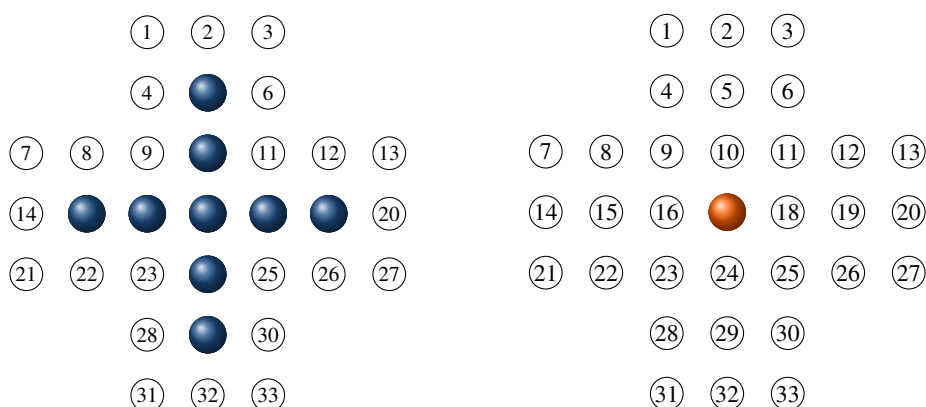


Figura 61 – Desafio 02 e objetivo final - proposto pelo aluno Eduardo - 9º ano A - 2019.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Desafio 3. Configuração inicial com 22 posições não ocupadas e os pinos concentrados no centro do mesmo. São necessárias 10 etapas para obter-se apenas 01 pino restante, de acordo com o esquema a seguir:

Etapa (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Da Casa (nº)	10	25	12	9	24	11	16	1	28	16
Para Casa (nº)	12	11	10	11	10	9	4	9	16	4

Tabela 37 – Desafio 03

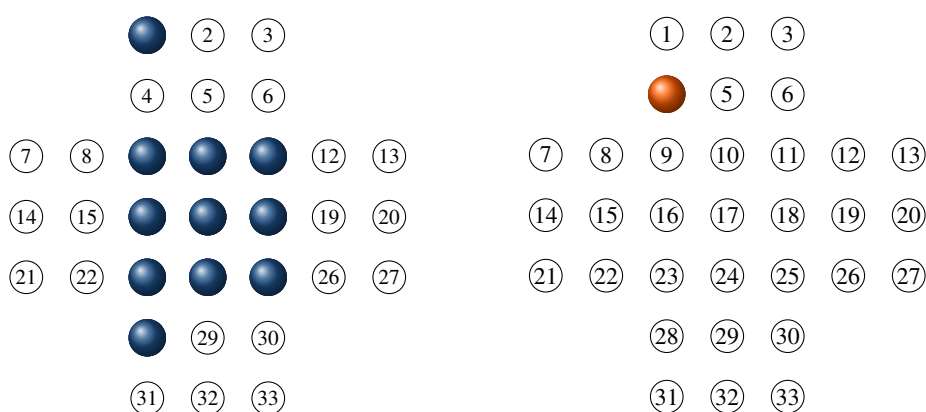


Figura 62 – Desafio 03 e objetivo final - proposto pelo aluno Vitor - 9º ano A - 2019.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 4. Todo este trabalho foi confeccionado com o utilização dos comandos do latex, auxiliado pela Apostila de Latex.(TELECOMUNICAÇÕES, 2004)

Existem muitas formas para propor e resolver desafios no jogo *Resta Um*.

O desejo é que este **trabalho** sirva de inspiração e motivação para que muitas pessoas possam gozar de momentos divertidos, individualmente ou em família, melhorando o raciocínio lógico, o aprendizado, e conseqüentemente, a compreensão da **Ciência Mãe: MATEMÁTICA**.

REFERÊNCIAS

ATTRIBUTE-SHAREALIKE, L. C. C. **Peg Solitaire**. 2019. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Peg_solitaire>. Acesso em: 22/01/2019. Citado nas páginas 24 e 26.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Nenhuma citação no texto.

PAULO, G. do estado de S. **Proposta Curricular de Matemática**. 2011. Disponível em: <<https://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>>. Acesso em: 23/03/2018. Citado na página 24.

_____. **Currículo paulista**. 2019. Disponível em: <<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>>. Acesso em: 19/02/2020. Citado na página 24.

SANTOS, L. M. R. dos. **MAT 172 – Matemática Computacional - Introdução ao TikZ**. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG, 2016. Citado na página 26.

TELECOMUNICAÇÕES, P. E. de T. **Apostila de Latex**. 2004. Disponível em: <www.telecom.uff.br/pet/>. Acesso em: 21/03/2019. Citado na página 100.

