

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MARIA CARLA FERREIRA PEREIRA TAVARES

ATIVIDADES PARA COMPROVAR O VOLUME DA ESFERA NO ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2024

MARIA CARLA FERREIRA PEREIRA TAVARES

ATIVIDADES PARA COMPROVAR O VOLUME DA ESFERA NO ENSINO MÉDIO

Activities to prove the volume of the sphere in High School

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4697>>.

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós.

CURITIBA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

RESUMO

Apresentamos neste recurso educacional atividades para comprovar o volume da esfera nas aulas de matemática no Ensino Médio. As atividades/experimentos exploram o emprego de materiais manipulativos e de tecnologias digitais, tais como impressora 3D e o GeoGebra 3D, associando conceitos físicos e matemáticos. Concluimos que as atividades propostas estão em consonância com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular - BNCC sobre a experimentação e o emprego de tecnologias digitais no ensino de matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: GeoGebra 3D; Lei da Alavanca; Princípio de Cavalieri; Princípio do Empuxo de Arquimedes.

ABSTRACT

In this educational resource, we present activities to demonstrate the volume of a sphere in High School mathematics lessons. The activities/experiments explore employing manipulatives and digital technologies, such as 3D printers and GeoGebra 3D while associating physical and mathematical concepts. The proposed activities align with the guidelines established by the National Common Curricular Base - BNCC regarding experimentation and using digital technologies in mathematics teaching in Basic Education.

Keywords: GeoGebra 3D; Lever Law; Cavalieri's Principle; Archimedes' Principle of Buoyancy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Bola de futebol que armazena energia elétrica através de energia cinética . . .	7
Figura 1.2 – Componentes magnéticos internos da bola que armazena energia	8
Figura 1.3 – Tanques esféricos para armazenamento de hidrogênio	9
Figura 1.4 – Globo de plasma: (a) em funcionamento; (b) reação ao toque de uma pessoa	9
Figura 1.5 – Fases da Lua em agosto de 2018	10
Figura 1.6 – Face da Lua iluminada pelo Sol	11
Figura 1.7 – Sistema Sol-Terra-Lua visto externamente	11
Figura 1.8 – Relação entre o Sol, a Lua e a Terra de um ponto de vista geométrico	13
Figura 1.9 – Regiões da Lua iluminadas pelo Sol: dia e noite	13
Figura 1.10–O alongamento da Lua	14
Figura 1.11–Áreas iluminadas da Lua para diferentes valores de A e de η : (a) $0 < A < \frac{29}{2}$ e $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$; (b) $0 < A < \frac{29}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$; (c) $A > \frac{29}{2}$ e $\pi < \eta < \frac{3\pi}{2}$; (d) $A > \frac{29}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < \eta < 2\pi$	15
Figura 2.1 – Volume de um sólido por imersão	16
Figura 2.2 – Vídeo sobre a coroa e Arquimedes	17
Figura 2.3 – Sólidos em acrílico	17
Figura 2.4 – Recipiente cilíndrico com água para imersão dos sólidos	18
Figura 2.5 – Equilíbrio segundo a lei da alavanca de Arquimedes	19
Figura 2.6 – Balança de Arquimedes em equilíbrio	22
Figura 2.7 – Balança de Arquimedes em desequilíbrio	22
Figura 2.8 – Construção da semiesfera de raio $\overline{AB} = 3\text{ cm}$	23
Figura 2.9 – Construção do cilindro de altura $\overline{AB} = 3\text{ cm}$ e raio $r = 3\text{ cm}$	23
Figura 2.10–Construção da semianticlépsidra	24
Figura 2.11–Determinação do plano secante à semiesfera e à semianticlépsidra	24
Figura 2.12–Seções na semiesfera e na semianticlépsidra	25
Figura 2.13–Área das seções na semiesfera e na semianticlépsidra	25
Figura 2.14–Volume da semiesfera e da semianticlépsidra	26

SUMÁRIO

1	APLICAÇÕES DA ESFERA	7
1.1	A bola de futebol que gera energia elétrica	7
1.2	Tanques de armazenamento de gás	8
1.3	Globo de plasma	9
1.4	As fases da Lua	10
2	ATIVIDADES SOBRE O VOLUME DA ESFERA	16
2.1	Experimento com o princípio do empuxo de Arquimedes	16
2.1.1	Etapas do experimento	17
2.2	Experimento com o princípio de equilíbrio de Arquimedes	19
2.2.1	Etapas do experimento	20
2.3	Animação sobre o princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D	21
2.3.1	Etapas da construção da animação	22
	REFERÊNCIAS	27

1 APLICAÇÕES DA ESFERA

Apresentamos neste recurso educacional algumas aplicações da esfera e três atividades para a sala de aula sobre o volume da esfera que podem ser adaptadas para o Ensino Médio (Nós; Tavares, 2021; Nós; Sano; Tavares, 2021; Tavares; Nós, 2022). Essas atividades abordam os princípios do empuxo e da alavanca de Arquimedes e o princípio de Cavalieri, sendo este último explorado no GeoGebra 3D (GeoGebra3D, 2024).

1.1 A BOLA DE FUTEBOL QUE GERA ENERGIA ELÉTRICA

A energia elétrica não é um benefício oferecido em todos os lugares do mundo, ou ainda, se é oferecida não há disponibilidade para todos os habitantes devido à insuficiência de dinheiro para se pagar por tal serviço.

Tendo em vista este problema, quatro estudantes americanas inventaram uma bola de futebol, ilustrada na Figura 1.1, e a distribuíram em alguns lugares sem acesso à energia elétrica. O objetivo era que a bola fosse usada durante o dia por crianças em um simples jogo de futebol, pois, segundo as inventoras, armazenaria energia suficiente para manter uma lâmpada de LED acesa à noite por 3 horas se utilizada por 30 minutos em um jogo.

Figura 1.1 – Bola de futebol que armazena energia elétrica através de energia cinética



Fonte: ConhecimentoCientífico (2019).

O princípio de funcionamento é gerar energia elétrica a partir da energia cinética associada ao movimento da bola. Michael Faraday (1791-1867), físico e químico britânico, descobriu em agosto de 1831 a indução eletromagnética, fenômeno no qual o movimento de um ímã nas proximidades de um condutor elétrico gera corrente elétrica. A descoberta foi uma grande revolução à época porque possibilitou a geração de energia elétrica.

A bola de futebol, batizada de Soccer, funciona por intermédio de componentes magnéticos internos, ilustrados na Figura 1.2, que geram corrente elétrica durante a rolagem da bola no

jogo. A carga elétrica gerada é armazenada em uma bateria interna à bola e, à noite, essa mesma bateria interna transmite energia elétrica para o funcionamento da lâmpada de LED.

Figura 1.2 – Componentes magnéticos internos da bola que armazena energia



Fonte: ConhecimentoCientífico (2019).

O segredo escondido por trás deste mecanismo é um pêndulo de zinco, responsável por captar energia do movimento. Ele aciona um gerador conectado a uma bateria Li-Ion que armazena a carga. O invólucro da bola é feito de plástico e espuma de EVA recicláveis que impedem a descarga acidental de corrente elétrica. As engrenagens internas fazem com que a bola pese cerca de 30 gramas a mais do que uma bola convencional.

A bola que gera energia é uma grande invenção utilizada em vilarejos africanos, beneficiando principalmente estudantes já que a iluminação proporcionada possibilita que eles se livrem do incômodo causado pela fumaça e gases tóxicos liberados pelas lamparinas e velas.

1.2 TANQUES DE ARMAZENAMENTO DE GÁS

Um tanque de armazenamento de gás pode ter vários formatos, porém o esférico é o mais recomendado porque essa forma geométrica permite que, quando esvaziado, um resíduo mínimo permaneça no interior do tanque. A ausência de vértices possibilita uma liberação mais eficiente do gás contido no tanque esférico. Com o aumento da utilização de gás natural liquefeito (GNL) no mundo, o transporte desse gás tem sido efetuado através dos oceanos por navios que carregam cerca de cinco tanques esféricos de alumínio.

Outra justificativa para o uso de tanques de armazenamento esféricos é o armazenamento de hidrogênio líquido. Para atingir o estado líquido, o hidrogênio deve estar abaixo do seu ponto de ebulição à pressão ambiente (-253°C) em um tanque muito bem isolado, geralmente com vácuo entre duas camadas, como em uma garrafa térmica. Os tanques de armazenamento não precisam ser altamente reforçados como acontece com os cilindros de alta pressão, mas precisam ser adequadamente robustos para aplicações automotivas (AmbienteBrasil, 2019).

Como todos os tanques permitem a troca de calor com o ambiente externo, o calor faz com que parte do hidrogênio evapore e a pressão interna no tanque diminua, o que ocasiona uma perda de gás. Para diminuir a perda por evaporação, a maioria dos tanques para armazenamento de hidrogênio líquido tem o formato esférico, como ilustrado na Figura 1.3, pois a taxa de transferência de calor, que depende da área da superfície do tanque, será menor uma vez que a forma esférica tem a menor superfície para um determinado volume.

Figura 1.3 – Tanques esféricos para armazenamento de hidrogênio

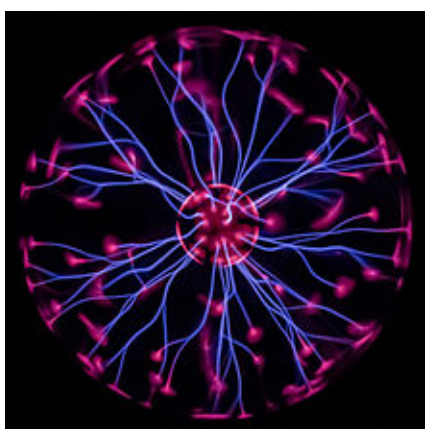


Fonte: AmbienteBrasil (2019).

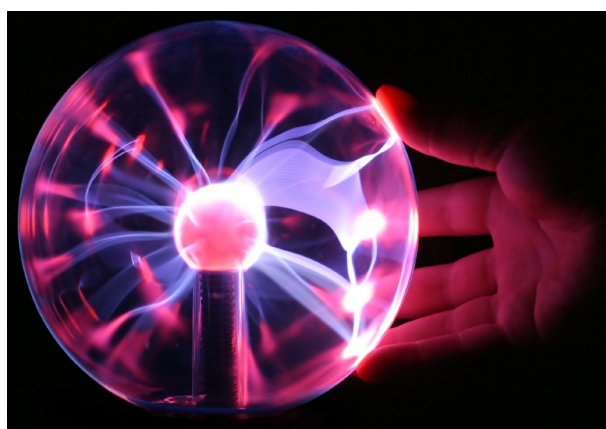
1.3 GLOBO DE PLASMA

O globo de plasma é uma estrutura constituída por uma esfera de vidro, preenchida com um gás em baixa pressão, e por um eletrodo central em alta voltagem. Nessa estrutura, descargas elétricas provocam a excitação e a ionização dos átomos de gás, que emitem luz quando voltam ao estado inicial, como mostra a Figura 1.4(a).

Figura 1.4 – Globo de plasma: (a) em funcionamento; (b) reação ao toque de uma pessoa



(a)



(b)

Fonte: Wikipédia (2023).

De maneira análoga ao tanque de armazenamento de hidrogênio, o globo de plasma tem formato esférico devido à presença de gás inerte, comumente hélio, néon (neônio) ou argônio. A baixa pressão interna aumenta o caminho livre médio entre os átomos antes que estes colidam uns com os outros. Se o percurso livre médio é longo, os átomos portadores de cargas aceleram durante maior intervalo de tempo e, com isso, adquirem maior energia cinética entre as colisões e, o mais importante, fazem isso com a aplicação de um campo elétrico moderado. Desse modo, os efeitos das descargas elétricas são mais fortes em um gás rarefeito submetido a campos elétricos moderados do que os observados em gases sob pressão atmosférica submetidos a campos elétricos intensos.

Sob o efeito do campo elétrico que cerca o eletrodo central do globo, ocorre a ionização do gás rarefeito e se observa então o abundante faiscamento entre o eletrodo central e a superfície do globo. O faiscamento não tem direção privilegiada, uma vez que o eletrodo central é equidistante da superfície do globo de vidro. Quando uma lâmpada fluorescente ou um corpo aterrado qualquer, como a mão de uma pessoa por exemplo, se aproxima do globo, o campo elétrico fica mais intenso entre o eletrodo central e o corpo, uma vez que este passa a ser o condutor elétrico e induz a corrente em sua direção, como ilustra a Figura 1.4(b).

1.4 AS FASES DA LUA

As posições relativas do Sol, da Terra e da Lua influenciam as fases lunares. Podemos determinar a fase lunar para um determinado dia e calcular a porcentagem da Lua iluminada pelo Sol. Nesses cálculos, consideramos a superfície lunar como sendo esférica.

Ao viajar pelo entorno da Terra ao longo de um mês, a Lua passa por um ciclo de fases de aproximadamente 29,5 dias, o que parece variar gradualmente a sua forma, como mostra a Figura 1.5.

Figura 1.5 – Fases da Lua em agosto de 2018



Fonte: UFRGS (2024).

Segundo Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), as fases da Lua, um corpo não luminoso, resultam do fato desta ser iluminada pela luz do Sol. Assim, a fase lunar representa o quanto da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra, como ilustra a Figura 1.6.

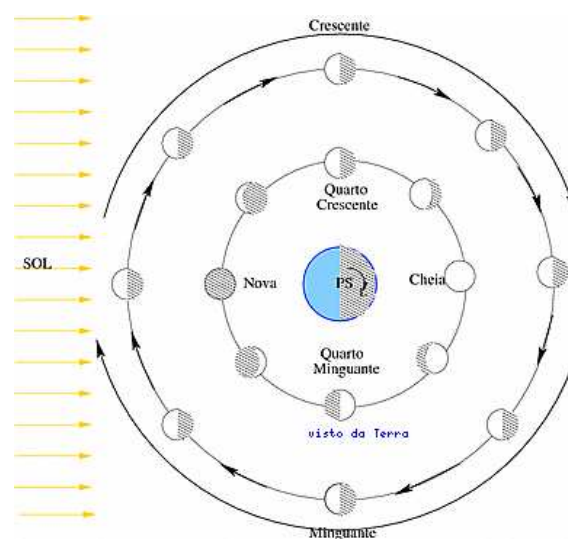
Figura 1.6 – Face da Lua iluminada pelo Sol



Fonte: UFRGS (2024).

Durante metade do ciclo lunar, a porção iluminada da Lua está aumentando (lua crescente) e, durante a outra metade, está diminuindo (lua minguante). Tradicionalmente, apenas as quatro fases mais características do ciclo recebem nome: lua nova, quarto crescente, lua cheia e quarto minguante, porém a porção que vemos iluminada varia dia a dia. Por essa razão, os astrônomos definem a fase da Lua a partir do número de dias decorridos desde a Lua Nova (de 0 a 29,5) e da fração iluminada da face visível, como esquematizado na Figura 1.7.

Figura 1.7 – Sistema Sol-Terra-Lua visto externamente



Fonte: UFRGS (2024).

O período sinódico da Lua, também denominado luação ou mês lunar, é o intervalo de tempo entre duas luas novas sucessivas e corresponde a 29,53059 dias. O período sideral ou mês sideral da lua é o intervalo de tempo necessário para que ela realize uma revolução completa em torno da Terra e corresponde a 27,32166 dias. A Lua se move cerca de 13° por dia para leste em relação às estrelas. Esse movimento é um reflexo da translação da Lua em torno da Terra, completada em um mês sideral. O Sol se move cerca de 1° por dia para leste, refletindo a translação da Terra em torno do Sol, completada em um ano sideral, que equivale a 365,2564 dias. Portanto, a Lua se move cerca de 12° por dia em relação ao Sol, e a cada dia a Lua cruza o meridiano local aproximadamente 48 *min* mais tarde do que no dia anterior. Dessa forma, o dia lunar tem 24 horas e 48 minutos.

Para calcular a fase da lua de um determinado dia no hemisfério norte por exemplo, basta determinar a data específica (dia, mês, ano) no calendário juliano¹. Esta data é transformada em Dia Juliano (*DJ*), sistema de medição de tempo usado pela comunidade astronômica. O *DJ* tem a vantagem de apresentar o turno da noite, que é justamente o período de observação astronômica, em um mesmo dia do calendário, facilitando assim a forma de indicação do período de observação. Sua origem é o meio-dia do dia primeiro de janeiro de 4713 a.C. pelo calendário juliano, ou 24 de novembro de 4714 a.C., pelo calendário gregoriano². Para calcular o *DJ* (Vinuales; Galín, 2018), devemos resolver inicialmente as seguintes equações:

$$d = \frac{14 - \text{mês}}{12}; \quad (1.1)$$

$$m = \text{mês} + 12d - 3; \quad (1.2)$$

$$a = \text{ano} + 4800 - d. \quad (1.3)$$

Com as equações (1.1)-(1.3), podemos determinar o *DJ* com a equação

$$DJ[\text{dia,mês,ano}] = \text{dia} + \frac{153m + 2}{5} + 365a + \frac{a}{4} - \frac{a}{100} + \frac{a}{400} - 32045.$$

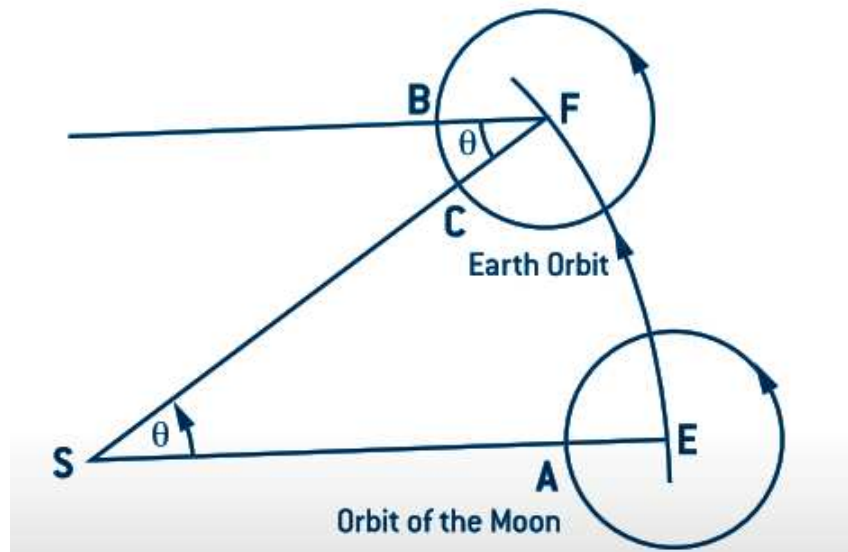
Na divisão do *DJ* pelo intervalo de tempo *SC* entre duas luas novas sucessivas, ilustrado na Figura 1.8, a parte inteira do quociente representa o número de dias decorridos desde a última lua nova, enquanto o resto da divisão representa a idade *A* da fase lunar.

Desta forma, é simples atribuir um número para cada uma das quatro fases da lua. Fazendo isto no sentido anti-horário, como na Figura 1.9, obtemos o valor 0 para a lua nova, 7, 38 para o quarto crescente, 14, 76 para a lua cheia e 22, 15 para o quarto minguante.

¹ Calendário criado pelo imperador romano Júlio César no ano 46 a.C. A reforma, que transformou o calendário romano em um calendário solar, com 365 dias, 12 meses e o ano bissexto, entrou em vigor em primeiro de janeiro de 45 a.C.

² Calendário de origem européia, promulgado pelo Papa Gregório XIII (1502-1585) em 24 de fevereiro de 1582. O calendário gregoriano corrigiu distorções do calendário juliano.

Figura 1.8 – Relação entre o Sol, a Lua e a Terra de um ponto de vista geométrico



Fonte: Viñuales e Galín (2018).

Figura 1.9 – Regiões da Lua iluminadas pelo Sol: dia e noite



Fonte: Viñuales e Galín (2018).

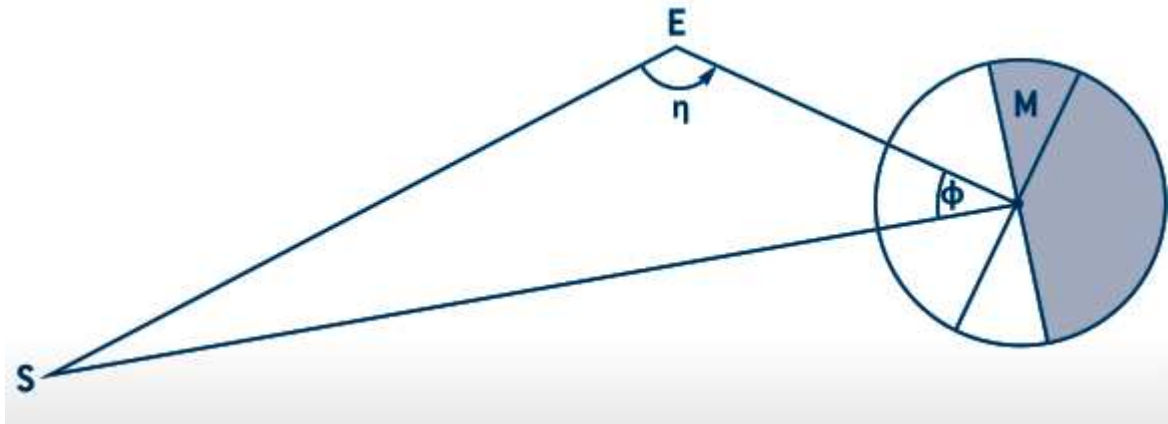
Além de saber a fase da Lua em determinado dia, podemos calcular a porcentagem P da parte iluminada (Viñuales; Galín, 2018) através da relação

$$P = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{360^\circ}{SC} A \right) \right], \quad (1.4)$$

onde SC é o intervalo de tempo entre duas luas novas e A é a idade da fase lunar.

Em (1.4), $P = 0$ indica que a fase é lua nova; $P = 1$, lua cheia. E $P = \frac{1}{2}$ indica qual fase lunar? Para responder a esta pergunta precisamos considerar outros aspectos, tais como a idade A da fase lunar e a medida do alongamento da Lua, dada por $\eta = \frac{360^\circ}{SC}A$ e ilustrada na Figura 1.10.

Figura 1.10 – O alongamento da Lua



Fonte: Viñuales e Galín (2018).

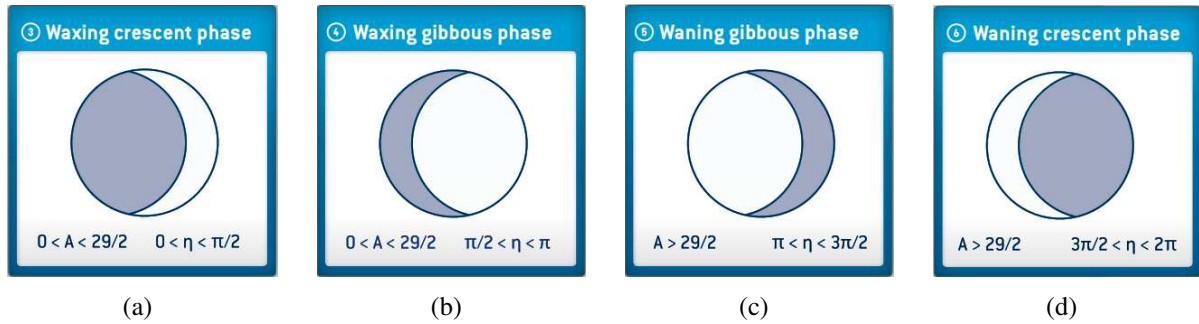
Assim, com base na Figura 1.10, quando o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados nesta ordem, $\eta = 180^\circ$, a lua é cheia, $\frac{29}{2} = 14,5$ dias se passaram desde a última lua nova e podemos fazer as suposições descritas a seguir.

1. Se $0 < A \leq \frac{29}{2}$, então $0 < \eta \leq \pi$ e temos os seguintes casos:
 - a) Para $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, a fase lunar é o quarto crescente, a sombra está à esquerda e a parte iluminada é menor do que a metade do disco lunar - Figura 1.11(a);
 - b) Para $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$, a fase lunar é a lua gibosa³, a sombra está à esquerda e a parte iluminada é maior do que a metade do disco lunar - Figura 1.11(b).
2. Se $A = \frac{29}{2}$, então $\eta = \pi$ e a lua é cheia.
3. Se $A \geq \frac{29}{2}$, então $\pi < \eta \leq 2\pi$ e temos os seguintes casos:
 - a) Para $\pi < \eta < \frac{3\pi}{2}$, a fase lunar é a minguante convexa⁴, a sombra está à direita e a porção iluminada é maior do que a metade do disco lunar - Figura 1.11(c);
 - b) Para $\frac{3\pi}{2} < \eta < 2\pi$, a fase lunar é o quarto minguante, a sombra está à direita e a parte iluminada é menor do que a metade do disco lunar - Figura 1.11(d).

³ Lua crescente convexa, marcada pela transição do quarto crescente para a lua cheia.

⁴ Marcada pela transição da lua cheia para o quarto minguante

Figura 1.11 – Áreas iluminadas da Lua para diferentes valores de A e de η : (a) $0 < A < \frac{29}{2}$ e $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$; (b) $0 < A < \frac{29}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$; (c) $A > \frac{29}{2}$ e $\pi < \eta < \frac{3\pi}{2}$; (d) $A > \frac{29}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < \eta < 2\pi$



Fonte: Viñuales e Galín (2018).

Das discussões anteriores, podemos concluir que $P = \frac{1}{2}$ em (1.4) indica que a fase lunar é o quarto crescente ou o quarto minguante.

2 ATIVIDADES SOBRE O VOLUME DA ESFERA

O volume da esfera é comumente abordado nos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio e no trabalho em sala de aula através da simples apresentação da relação $\frac{4}{3}\pi r^3$. Contudo, é muito mais enriquecedor propor alternativas para justificar ou deduzir essa relação.

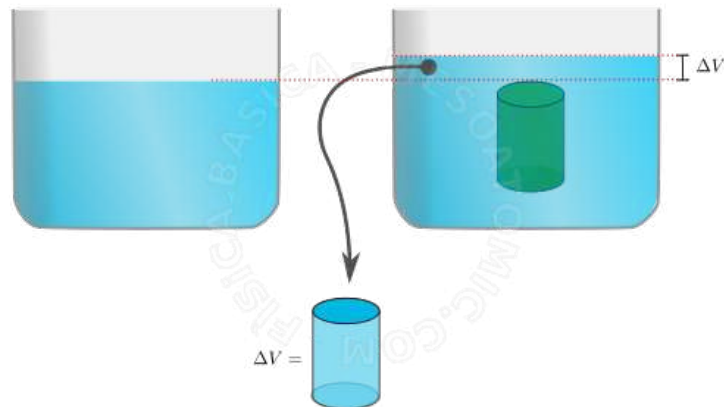
2.1 EXPERIMENTO COM O PRINCÍPIO DO EMPUXO DE ARQUIMEDES

O objetivo do experimento (Rodrigues; Rezende; Queiroz, 2024) é estabelecer uma relação entre os volumes do cone, da esfera e do cilindro empregando o Princípio 2.1 ou princípio do empuxo de Arquimedes.

Princípio 2.1 (do empuxo). *Todo corpo mergulhado em um fluido sofre a ação de um empuxo¹ vertical igual ao peso do líquido deslocado.*

Pelo Princípio 2.1, podemos concluir que o volume de um sólido completamente imerso em um líquido, como água por exemplo, é igual ao volume do líquido deslocado na imersão, como ilustra a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Volume de um sólido por imersão



Fonte: Mesoatomic (2018).

Como queremos determinar o volume da esfera a partir de dois volumes conhecidos, o volume do cilindro e o volume do cone, precisamos inicialmente relacionar esses dois volumes. Assim, a primeira fase do experimento consiste em comparar os volumes do cilindro e do cone de bases e alturas congruentes, ou seja, determinar quantas vezes o cone cabe no cilindro. Já a segunda fase consiste em estabelecer uma relação entre o volume do cilindro, do cone e da esfera de mesmo raio.

¹ Força vertical, dirigida para cima, que todo líquido exerce sobre um corpo nele mergulhado.

2.1.1 ETAPAS DO EXPERIMENTO

1. Iniciar mostrando sólidos geométricos como o cubo, o paralelepípedo reto retângulo, o cilindro, o cone e a esfera, indagando maneiras de determinação do volume de cada um deles. Espera-se que as relações para o cálculo do volume do cubo, do paralelepípedo reto retângulo e do cilindro sejam determinadas rapidamente e que os estudantes proponham alternativas para o cálculo do volume do cone e da esfera.
2. Por intermédio do vídeo “Arquimedes”, ilustrado na Figura 2.2, apresentar o princípio do empuxo de Arquimedes e o problema que deu origem ao mesmo.

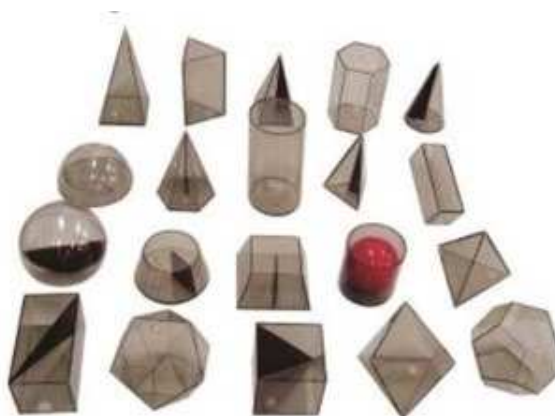
Figura 2.2 – Vídeo sobre a coroa e Arquimedes



Fonte: Nunes (2009).

3. Instruir os estudantes, divididos em grupos, a preencher com areia fina e lacrar três sólidos vazados confeccionados em acrílico, como os ilustrados na Figura 2.3: uma semiesfera de raio r , um cone reto de raio r e altura r e um cilindro reto de raio r e altura r^2 .

Figura 2.3 – Sólidos em acrílico

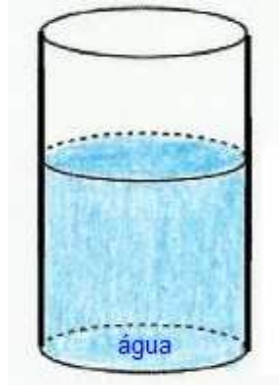


Fonte: Play (2010).

² Há vários conjuntos de sólidos em acrílico disponíveis para compra. Contudo, provavelmente em nenhum deles encontraremos a semiesfera, o cone e o cilindro de mesmo raio r e altura r . Assim, será preciso confeccionar esses moldes primeiramente.

4. Orientar os estudantes a mergulhar separadamente cada um dos três sólidos preenchidos com areia fina em um recipiente cilíndrico contendo água, como o da Figura 2.4.

Figura 2.4 – Recipiente cilíndrico com água para imersão dos sólidos



Fonte: Os autores.

O recipiente deve ter altura maior do que $2r$ e raio não muito maior do que o raio r dos sólidos mergulhados para que o deslocamento de água seja evidente. Os estudantes devem medir a altura da água deslocada na imersão e anotar as medidas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Experimento 1: altura da água deslocada na imersão

	Altura da água deslocada
cone	
cilindro	
semiesfera	

Fonte: Os autores.

5. Como o raio do recipiente cilíndrico com água é conhecido, a partir da altura da água deslocada, anotada na Tabela 2.1, os estudantes podem calcular o volume do cilindro correspondente ao volume de cada um dos três sólidos mergulhados (princípio do empuxo de Arquimedes). Com os dados da Tabela 2.1, os estudantes devem comparar o volume dos três sólidos mergulhados e preencher a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Experimento 1: razão entre os volumes do cone, do cilindro e da semiesfera

	Razão entre os volumes
$\mathcal{V}(\text{cone}) / \mathcal{V}(\text{cilindro})$	
$\mathcal{V}(\text{cone}) / \mathcal{V}(\text{semiesfera})$	
$\mathcal{V}(\text{cilindro}) / \mathcal{V}(\text{semiesfera})$	

Fonte: Os autores.

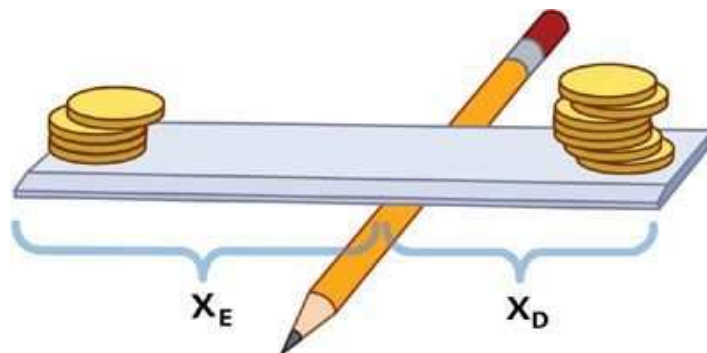
6. A partir das razões anotadas na Tabela 2.2, espera-se que os estudantes concluam que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= 3\mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= 2\mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= \frac{3}{2}\mathcal{V}(\text{semiesfera}); \\ \frac{\mathcal{V}(\text{cone})}{1} &= \frac{\mathcal{V}(\text{semiesfera})}{2} = \frac{\mathcal{V}(\text{cilindro})}{3}; \\ \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 2\mathcal{V}(\text{semiesfera}) = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

2.2 EXPERIMENTO COM O PRINCÍPIO DE EQUILÍBRIO DE ARQUIMEDES

A maior contribuição de Arquimedes para a geometria está no trabalho “O Método”, no qual explora a determinação de volumes através da alavanca, que define um sistema mecânico de equilíbrio de pesos em uma alavanca (Archimedes; Heath, 1953; Assis; Magnaghi, 2014), ilustrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Equilíbrio segundo a lei da alavanca de Arquimedes



Fonte: Antônio (2015).

Como a matemática grega era essencialmente geométrica, Arquimedes não determinou a relação para o cálculo do volume da esfera, entretanto demonstrou a proporcionalidade entre as massas de dois sólidos através da lei da alavanca, o que nos permite deduzir a relação.

Em sua obra *Sobre a esfera e o cilindro* (Archimedes; Heath, 1953), Arquimedes demonstrou o Teorema 2.1 utilizando um método semelhante ao da exaustão.

Teorema 2.1 (Segundo teorema de Arquimedes). *O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera, enquanto que o volume do cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera.*

O objetivo do experimento (Pinto, 2005) é estabelecer a relação entre os volumes do cone, da esfera e do cilindro descrita no Teorema 2.1 empregando a lei da alavanca, também denominada princípio de equilíbrio de Arquimedes.

2.2.1 ETAPAS DO EXPERIMENTO

1. Orientar os estudantes, divididos em grupos, a preencher com areia fina e lacrar três sólidos vazados confeccionados em acrílico, como os ilustrados na Figura 2.3: uma esfera de raio r , um cone reto de raio r e altura r e um cilindro equilátero de raio r^3 .
2. Desprezando-se o volume de acrílico nos três sólidos, a razão entre os volumes pode ser representada pela razão entre as massas. Dessa forma, usando uma barra de madeira e um ponto de apoio (fulcro) para construir uma alavanca similar àquela representada na Figura 2.5, os estudantes devem comparar as massas dos três sólidos, dois a dois, estabelecendo o equilíbrio na alavanca e anotando na Tabela 2.3 a distância dos sólidos comparados em relação ao ponto de apoio.

Tabela 2.3 – Experimento 2: distância dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

Sólidos comparados	Distância dos sólidos em relação ao ponto de apoio
Cone e cilindro	
Cone e esfera	
Cilindro e esfera	

Fonte: Os autores.

3. Com os dados da Tabela 2.3, os estudantes devem calcular a razão entre as distâncias dos sólidos em relação ao ponto de apoio da alavanca e anotar os resultados na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Experimento 2: razão entre as distâncias dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

Sólidos comparados	Razão entre as distâncias em relação ao ponto de apoio
Cone e cilindro	
Cone e esfera	
Cilindro e esfera	

Fonte: Os autores.

4. A partir das razões anotadas na Tabela 2.4, espera-se que os estudantes concluam que:
 - a) o ponto de apoio da alavanca não é equidistante dos objetos comparados e que o equilíbrio ocorre de maneira inversamente proporcional à medida das massas, ou seja, o objeto de maior massa está mais próximo do ponto de apoio enquanto o de menor massa está mais distante;

³ Há vários conjuntos de sólidos em acrílico disponíveis para compra. Contudo, provavelmente em nenhum deles encontraremos a esfera, o cone e o cilindro descritos. Assim, será preciso confeccionar esses moldes inicialmente.

b) as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= 6\mathcal{V}(\text{cone}); \\
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 4\mathcal{V}(\text{cone}); \\
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{4}{3}\pi r^3; \\
 \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= \frac{3}{2}\mathcal{V}(\text{esfera}); \\
 \frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} &= \frac{5}{6}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

5. Os estudantes podem finalmente comprovar a relação (2.1) comparando os três sólidos na alavanca. Reescrevendo (2.1) como

$$6 [\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})] = 5\mathcal{V}(\text{cilindro}),$$

temos que o cone e a esfera, a uma distância de $6uc$ do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro, este a uma distância de $5uc$ do fulcro da alavanca.

No Capítulo 2, provamos empregando a lei da alavanca que, para uma esfera de raio r , um cone reto de raio $2r$ e altura $2r$ e um cilindro reto de raio $2r$ e altura $2r$, vale a relação

$$\frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} = \frac{1}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$2 [\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})] = \mathcal{V}(\text{cilindro}). \tag{2.2}$$

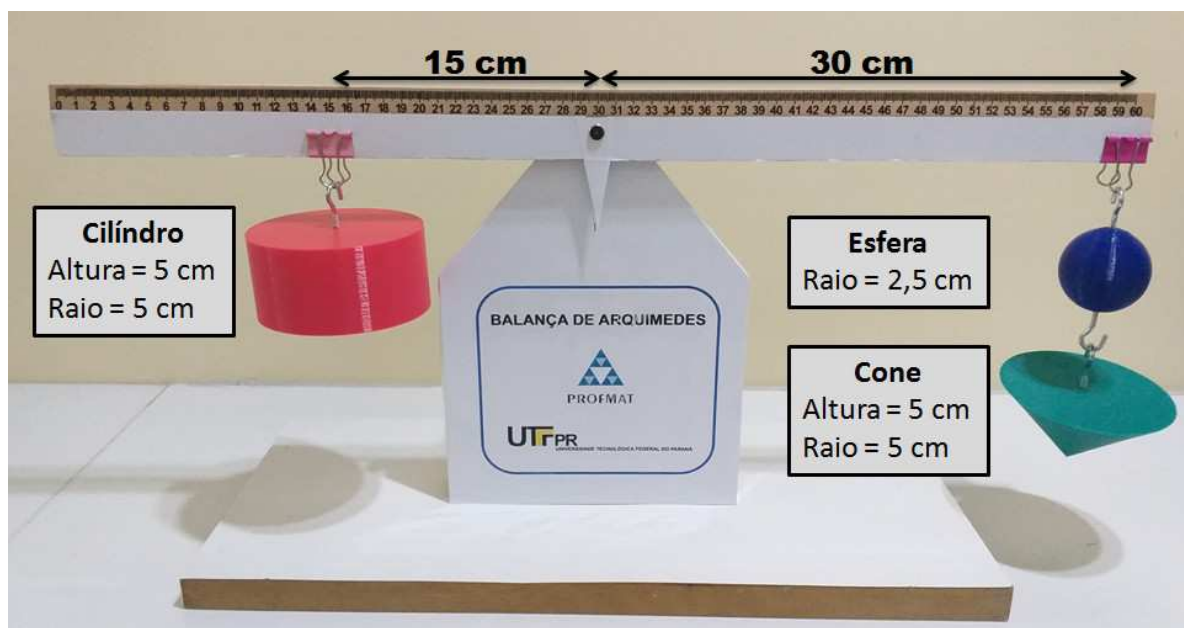
Dessa forma, pela relação (2.2) temos que o cone e a esfera, a uma distância d do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro a uma distância $\frac{d}{2}$ do fulcro da alavanca. As Figuras 2.6 e 2.7 ilustram a relação (2.2), para $r = 2,5 \text{ cm}$, na balança de Arquimedes em equilíbrio e em desequilíbrio, respectivamente.

O cilindro, o cone e a esfera presentes nas Figuras 2.6 e 2.7 foram confeccionados em impressora 3D.

2.3 ANIMAÇÃO SOBRE O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO GEOGEBRA 3D

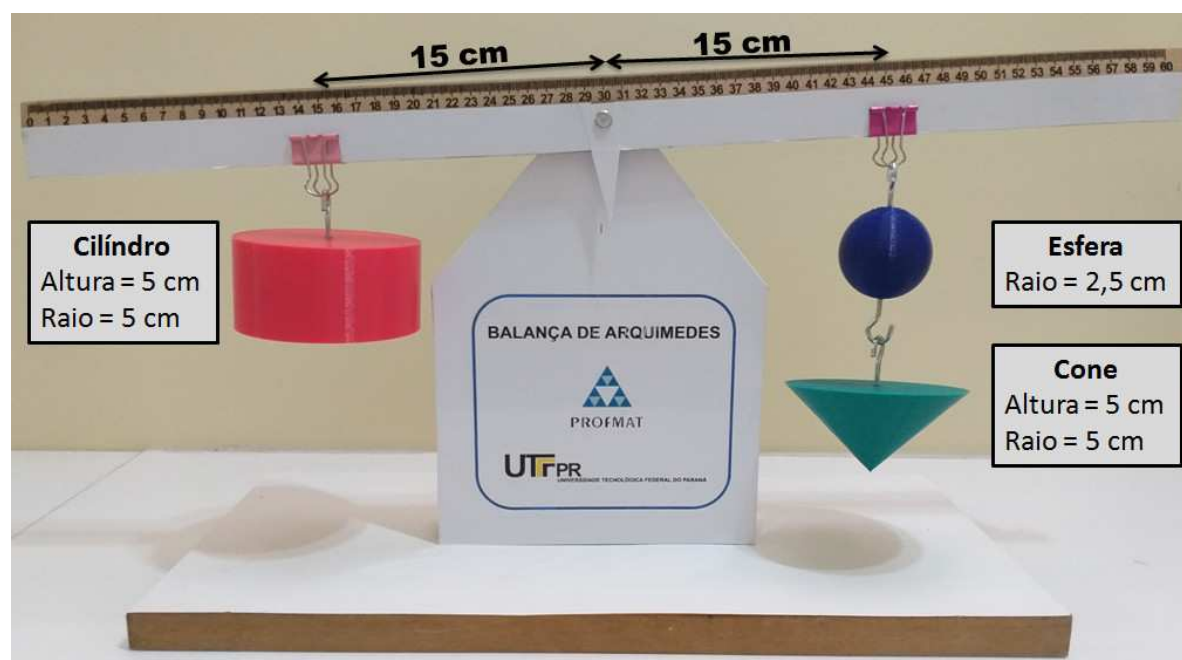
O objetivo da atividade é construir uma sequência didática no GeoGebra 3D para comprovar o volume da esfera empregando o princípio de Cavalieri. Descrevemos a seguir as etapas de construção da animação.

Figura 2.6 – Balança de Arquimedes em equilíbrio



Fonte: Os autores.

Figura 2.7 – Balança de Arquimedes em desequilíbrio

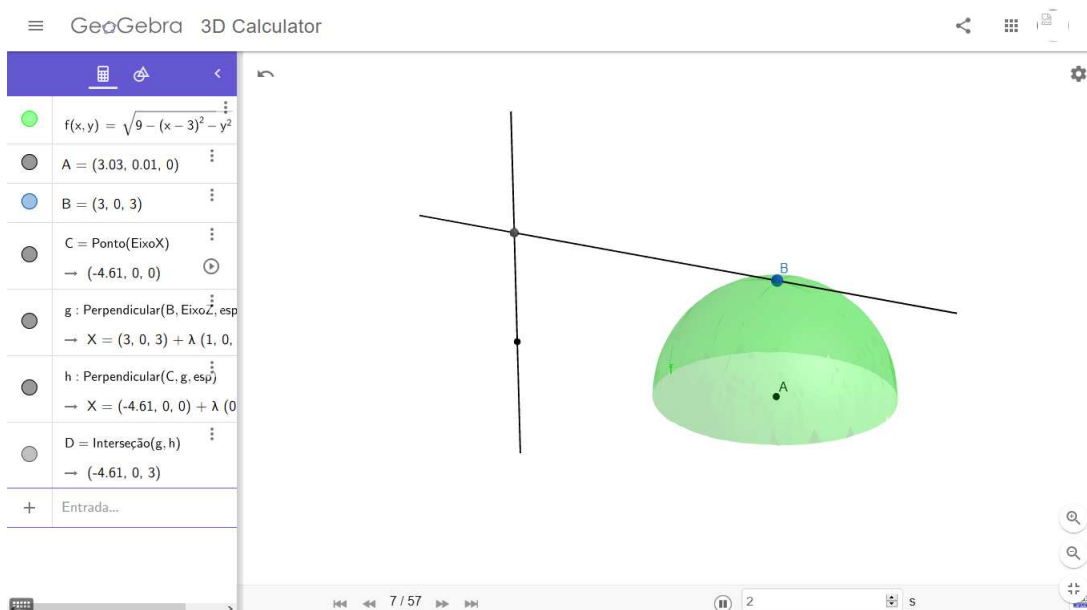


Fonte: Os autores.

2.3.1 ETAPAS DA CONSTRUÇÃO DA ANIMAÇÃO

1. Construir uma semiesfera de raio 3 cm através da função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Marcar o centro A do círculo máximo da semiesfera e o raio \overline{AB} perpendicular ao plano desse círculo. Finalizar traçando duas retas, a primeira passando pelo ponto B e a segunda paralela ao raio \overline{AB} e perpendicular à primeira, como na Figura 2.8.

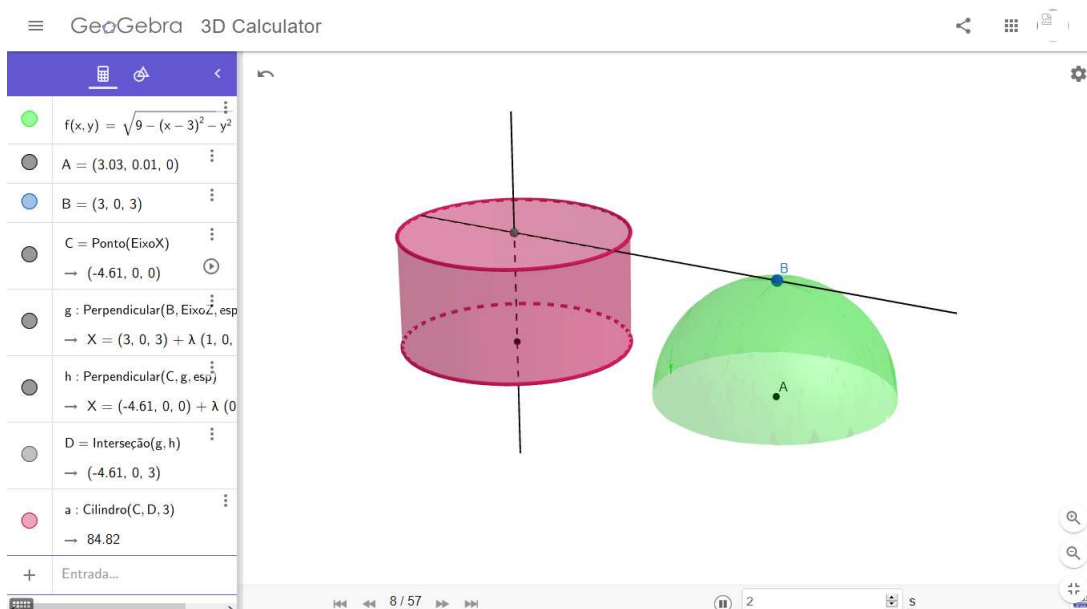
Figura 2.8 – Construção da semiesfera de raio $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$



Fonte: Os autores.

2. Construir o cilindro reto de altura \overline{AB} e raio 3 cm cujo eixo é a segunda reta traçada na etapa 1, como na Figura 2.9. O eixo do cilindro deve distar mais de 6 cm da reta suporte de \overline{AB} .

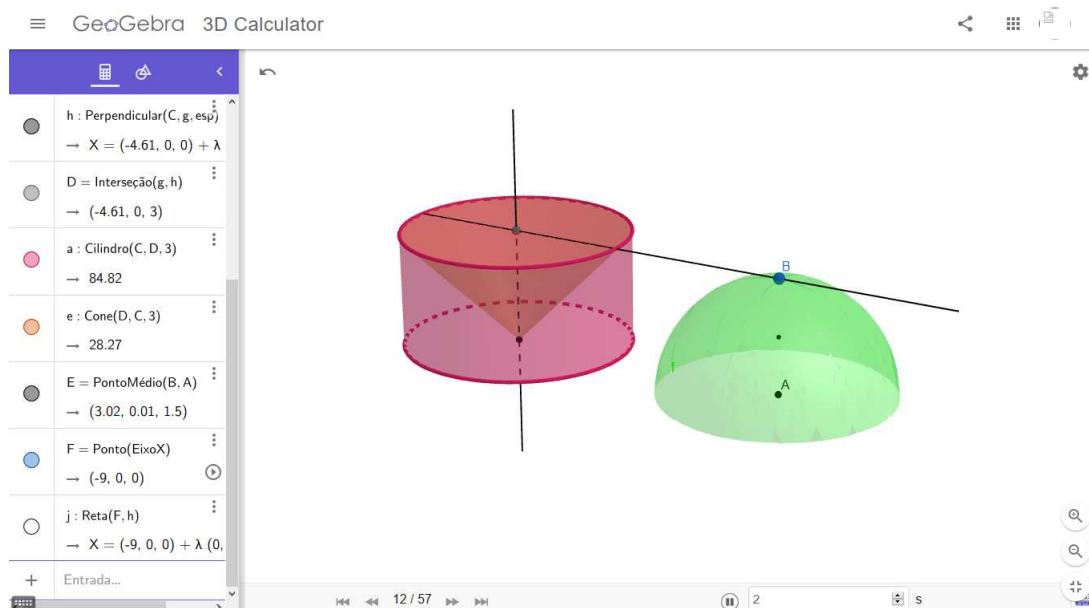
Figura 2.9 – Construção do cilindro de altura $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ e raio $r = 3 \text{ cm}$



Fonte: Os autores.

3. Construir um cone reto de altura \overline{AB} e raio 3 cm , cujo vértice é o centro da base inferior do cilindro construído na etapa 2, como na Figura 2.10. O sólido formado pelo cilindro menos o cone é a semianticlépsidra.

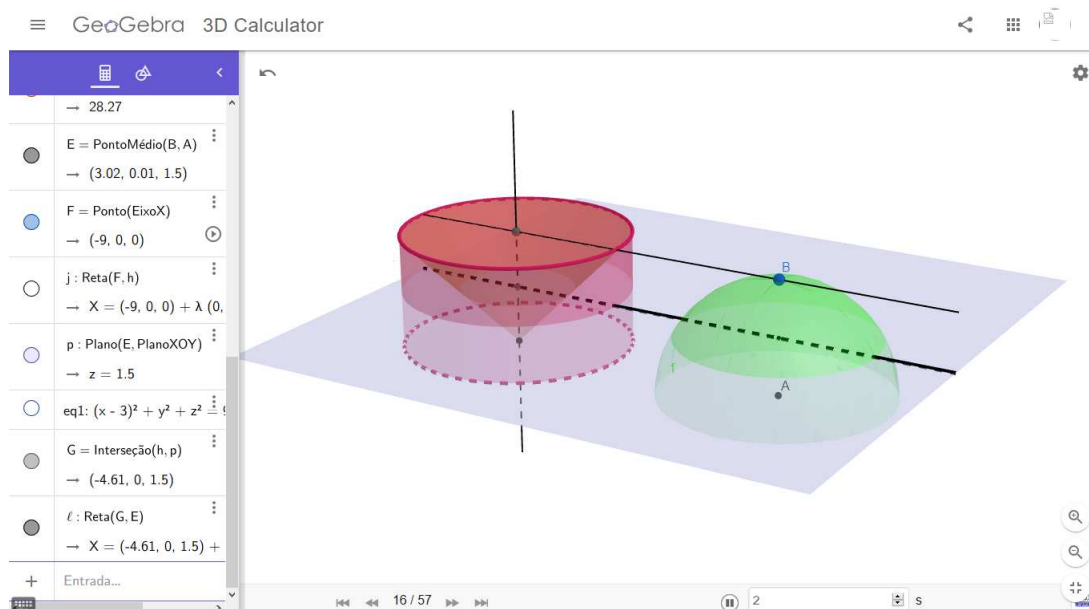
Figura 2.10 – Construção da semianticlépsida



Fonte: Os autores.

4. Determinar o ponto médio de \overline{AB} e traçar o plano secante à semiesfera e à semianticlépsida que passa por esse ponto médio e é perpendicular ao eixo do cilindro, como na Figura 2.11.

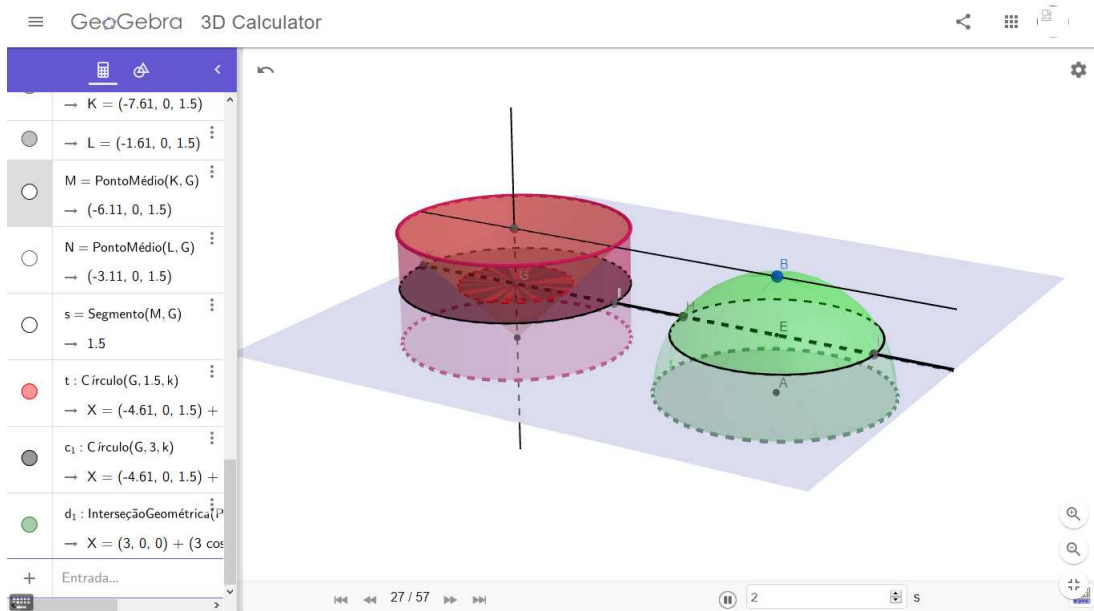
Figura 2.11 – Determinação do plano secante à semiesfera e à semianticlépsida



Fonte: Os autores.

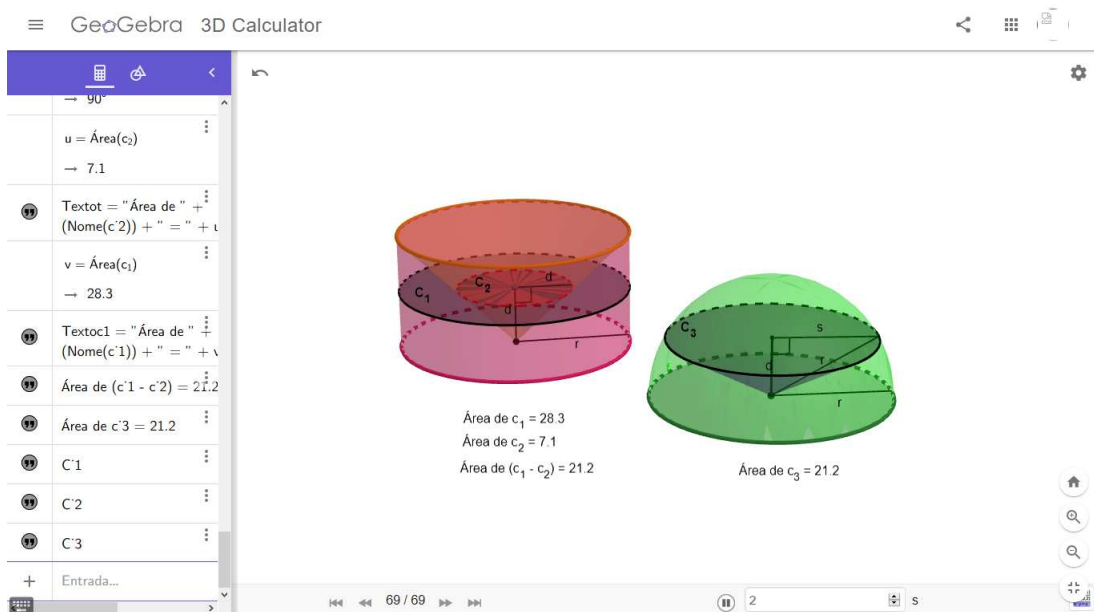
5. Destacar a intersecção do plano secante com a semiesfera, um círculo, e com a semianticlépsida, uma coroa circular, como na Figura 2.12.
6. Calcular a área das seções na semiesfera e na semianticlépsida e concluir que as seções são equivalentes, como na Figura 2.13.

Figura 2.12 – Seções na semiesfera e na semianticlépsida



Fonte: Os autores.

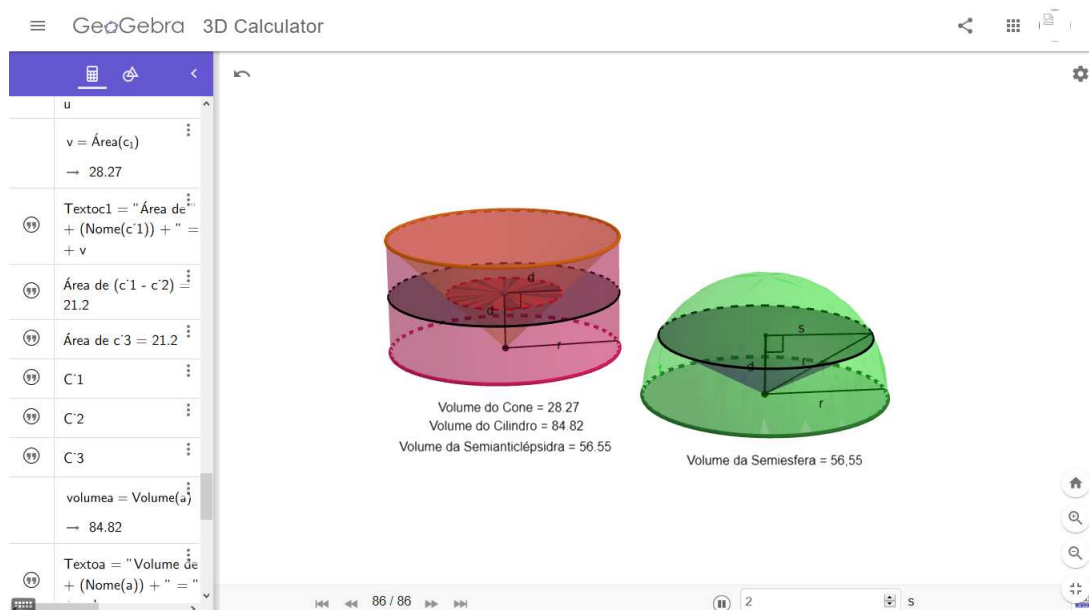
Figura 2.13 – Área das seções na semiesfera e na semianticlépsida



Fonte: Os autores.

7. Calcular o volume da semiesfera e da semianticlépsida, como na Figura 2.14.

Figura 2.14 – Volume da semiesfera e da semianticlépsida



Fonte: Os autores.

A animação descrita nesta atividade está disponível em

<https://www.geogebra.org/3d/dd4eh7dz>.

REFERÊNCIAS

- AMBIENTEBRASIL. **Armazenamento de hidrogênio**. 2019. Disponível em: <https://ambientes.ambientebrasil.com.br/energia/celula_combustivel/armazenamento_de_hidrogenio.html>. Acesso em: 24 out. 2019. 8, 9
- ANTÔNIO, J. C. **Alavancas e equilíbrio**. 2015. Disponível em: <<https://www.institutonetcclaroembratel.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/alavancas-e-equilibrio/>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 19
- ARCHIMEDES; HEATH, T. L. **The works of Archimedes**. New York: Dover, 1953. 19
- ASSIS, A. K. T.; MAGNAGHI, C. P. **O método ilustrado de Arquimedes: utilizando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade**. Montreal: Apeiron, 2014. 19
- CONHECIMENTOCIENTÍFICO. **Você sabia que existe uma bola de futebol que gera energia elétrica?** 2019. Disponível em: <<https://conhecimentocientifico.r7.com/voce-sabia-que-existe-uma-bola-de-futebol-que-gera-energia-eletrica/>>. Acesso em: 24 out. 2019. 7, 8
- GEOGEBRA3D. **GeoGebra 3D calculator**. 2024. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/3d>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 7
- MESOATOMIC. **Princípio de Arquimedes**. 2018. Disponível em: <<https://www.mesoatomic.com/pt-br/fisica/fluidos/hidrostatica/empuxo>>. Acesso em: 14 nov. 2019. 16
- NÓS, R. L.; SANO, M.; TAVARES, M. C. F. P. Using bernoulli numbers to generalize a limit of finite sum arising from volume computations with the squeeze theorem. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 6, n. 3, p. 77–96, 2021. 7
- NÓS, R. L.; TAVARES, M. C. F. P. Comprovando o volume da esfera nas aulas de matemática do ensino médio. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. São Carlos: SBMAC, 2021. Disponível em: <<https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/3605>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 7
- NUNES, G. **Arquimedes**. 2009. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=X8c3AdgMi9w>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 17
- PINTO, F. de A. Arquimedes, as alavancas e o volume da esfera. **Revista do Professor de Matemática**, n. 58, p. 18–20, 2005. 20
- PLAY, J. **Sólidos geométricos em acrílico**. 2010. Disponível em: <<https://www.jottplay.com.br/produto/solidos-geometricos-acrilico/530>>. Acesso em: 20 dez. 2019. 17
- RODRIGUES, C. I.; REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Cilindro = cone + esfera/2?** 2024. Disponível em: <<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1000>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 16
- TAVARES, M. C. F. P.; NÓS, R. L. Comprovando o volume da esfera nas aulas de matemática. In: _____. **O fortalecimento do ensino e da pesquisa científica da matemática 2**. Curitiba: Atena, 2022. Disponível em: <<https://atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/o-fortalecimento-do-ensino-e-da-pesquisa-cientifica-da-matematica-2>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 7

UFRGS. **Fases da Lua**. 2024. Disponível em: <<http://www.astro.ufrgs.br/lua/lua.htm>>. Acesso em: 28 dez. 2024. 10, 11

VIÑUALES, C. V.; GALÍN, E. V. **Phases of the Moon**. 2018. Disponível em: <https://www.science-on-stage.eu/images/download/iStage\10_Phases_of_the_Moon.pdf>. Acesso em: 26 out. 2019. 12, 13, 14, 15

WIKIPÉDIA. **Globo de plasma**. 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Globo_de_plasma>. Acesso em: 28 dez. 2024. 9