UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO WOJCIK JUNIOR

# IDENTIDADES ENVOLVENDO NÚMEROS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI DEMONSTRADAS POR PROVA COMBINATORIAL E INDUÇÃO FINITA

CURITIBA

2022

EDUARDO WOJCIK JUNIOR

# IDENTIDADES ENVOLVENDO NÚMEROS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI DEMONSTRADAS POR PROVA COMBINATORIAL E INDUÇÃO FINITA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana.

CURITIBA

2022

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

W847i Wojcik Junior, Eduardo

Identidades envolvendo números da sequência de Fibonacci demonstradas por prova combinatorial e indução finita [recurso eletrônico] / Eduardo Wojcik Junior - Curitiba, 2022.

Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Setor de Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

1. Matemática. 2. Sequências (Matemática). 3. Análise combinatória. I. Universidade Federal do Paraná. II. Santana, Luiz Antonio Ribeiro de. III. Título.

CDD 515.24

Bibliotecário: Nilson Carlos Vieira Junior CRB9/1797

# TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EDUARDO WOJCIK JUNIOR** intitulada: **IDENTIDADES ENVOLVENDO NÚMEROS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI DEMONSTRADAS POR PROVA COMBINATORIAL E INDUÇÃO FINITA**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Fevereiro de 2022.

Assinatura Eletrônica
06/02/2022 15:07:18.0
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
07/02/2022 10:13:48.0
CRISTIAN SCHMIDT
Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANA)

Assinatura Eletrônica
07/02/2022 16:42:18.0
PAULA ROGÉRIA LIMA COUTO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

## Agradecimentos

A Deus pela saúde e capacidade dadas a mim para conseguir tal conquista e a todas outras obtidas em minha vida.

Aos meus pais e familiares pelo apoio em cada decisão que tomei desde minha infância, muitas delas precisavam de auxílio e eles estavam dispostos a me ajudar.

Ao meu orientador Luizão, por ter aceitado ajudar e instruir um estudante desesperado buscando direção para concluir o curso. Obrigado por cada minuto destinado a me auxiliar.

A todos professores com o qual tive contato ao longo da vida. Absolutamente influenciaram em cada escolha durante a vida acadêmica e profissional.

Aos meus amigos, para cada momento de descontração durante os períodos de dificuldades e nervosismo ao longo do curso.

Àqueles que de alguma forma me auxiliou a obter o título de mestre. Obrigado.

**Resumo**

O presente trabalho tem como objetivo apresentar ao leitor identidades envolvendo os números da sequência de Fibonacci e prová-las utilizando principalmente dois métodos de demonstração: princípio da indução finita e prova combinatória. Acredita-se que, ao empregar poucos métodos de demonstração para diversas identidades, podem resultar em uma compreensão mais concreta e profunda. Nas identidades em que utilizou-se da prova combinatória, a ideia de quantas maneiras podemos completar um canteiro com blocos quadrados e blocos retangulares, foi amplamente usada e fundamental.

Palavras-chave: Fibonacci, Princípio da Indução Finita, Prova Combinatória.

**ABSTRACT**

The present work aims to present the reader with identities involving Fibonacci numbers and to prove them using mainly two proof methods: proof by induction and combinatorial proof. It is believed that using few demonstration methods for different identities, can be used to explain more concretely, leading to a deeper understanding. In the identities in which the combinatorial test was used, the idea of how many ways we can complete a tilling with square blocks and rectangular blocks was widely used and fundamental.

Keywords: Fibonacci, Proof by Induction, Combinatorial Proof.

Sumário

# 1 INTRODUÇÃO

Um dos assuntos que vem sendo frequentemente estudado por matemáticos desde o século XX são os números da sequência de Fibonacci. A sequência recebeu o nome devido ao matemático italiano Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci que, no início do século XIII, descreveu o crescimento da população de coelhos partindo de algumas premissas. Desde então, muito se discutiu os resultados obtidos deste estudo como também suas possíveis consequências. Ao longo do tempo, inúmeras identidades envolvendo esta sequência foram alcançadas e demonstradas por matemáticos de diferentes áreas da matemática e, consequentemente, foram utilizados distintos métodos de demonstração.

O objetivo central desta pesquisa é, além de reunir e apresentar algumas das inúmeras identidades envolvendo números da sequência de Fibonacci aos leitores, mas também demonstrá-las utilizando apenas dois métodos de demonstração, sendo por prova combinatória ou por indução finita

Com relação a organização do trabalho, primeiramente, encontra-se um capítulo destinado à apresentação de definições e conceitos que são importantes para a compreensão sobre o que é cada identidade e do processo de sua demonstração.

Em seguida temos um capítulo destinado às identidades com os quais são utilizadas as provas combinatórias como forma de demonstração. Para cada uma destas, utilizamos canteiros de dimensões $n \times 1$, onde deseja-se completá-los com blocos quadrados $1 \times 1$ ou com blocos retangulares $2 \times 1$. O objetivo é contar, de duas maneiras, de quantas maneiras pode-se distribuir os blocos nestes canteiros.

No capítulo seguinte, as identidades apresentadas estão diretamente relacionando máximo divisor comum aos números da sequência de Fibonacci. Para a demonstração destas igualdades, utilizou-se principalmente o princípio da indução finita. Como resultado imediato destas identidades, vê-se que dados dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, nota-se que o máximo divisor comum entre eles é igual a um, ou seja, são primos entre si. Além disso, dados quaisquer dois números da sequência, é possível identificar facilmente o máximo divisor comum destes, utilizando o algoritmo euclidiano.

# 2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos definições e conceitos sobre temas que são essenciais para os capítulos seguintes.

## 2.1 SOMATÓRIO

Seja $a_k$ uma sequência, com $k \in \mathbb{N}$. Dados naturais $r$ e $s$ tais que $r \leqslant s$, a notação $\sum_{i=r}^{s} a_i$ representa a soma $a_r + a_{r+1} + \cdots + a_{s-1} + a_s$ onde $r$ e $s$ são chamados limites inferior e superior, respectivamente, e $i$ é chamado índice do somatório (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 9).

## 2.2 FATORIAL

Definimos o fatorial de um natural $n$, simbolizado por $n!$, como o resultado do produto dos $n$ primeiros números naturais, ou seja, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Por convenção, temos que $0! = 1$.

## 2.3 COMBINAÇÕES SIMPLES

Combinações simples de $n$ elementos tomados $p$ a $p$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n \geqslant p$, são todas as escolhas não ordenadas de $p$ desses $n$ elementos (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 62). Matematicamente, intitularemos com a expressão $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ a quantidade de combinações de $n$ elementos tomados $p$ a $p$. Se $p > n$, define-se $C_n^p = 0$.

### 2.3.1 Princípio Aditivo

Se $A_1,\ A_2, \cdots,\ A_{n-1},\ A_n$ são conjuntos, disjuntos dois a dois, e se $A_i$ possui $a_i$ elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 40).

### 2.3.2 Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento $A_i$ pode ocorrer de $m_i$ maneiras diferentes, para $i = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$, então esses $n$ eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ formas distintas

(SANTOS; MELLO; MURARI, 2007, p. 40).

## 2.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Os números da sequência de Fibonacci podem ser apresentadas de diversas formas, mas exibiremos duas delas e que serão utilizadas nos próximos capítulos.

A primeira, comumente usada e considerada forma tradicional, é uma sequência definida recursivamente onde $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n$ natural e $n \geqslant 2$.

Já a segunda configuração, também sendo uma sequência definida recursivamente, é dada considerando as condições iniciais como $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n$ natural e $n \geqslant 2$.

Notemos sobre estas duas maneiras de se obter os números da sequência de Fibonacci é que, além de tratar da mesma relação recorrência, com a diferença de mudar os primeiros termos, podemos relacioná-las através da igualdade $f_{n-1} = F_n$.

## 2.5 MÁXIMO DIVISOR COMUM

As definições e propriedades apresentadas neste capítulo foram adaptadas de (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 39), de modo que, no livro, estas foram apresentadas para os números inteiros e, por este trabalho lidar especialmente com os números da sequência de Fibonacci, que são números naturais, tomou-se a decisão da adequação.

Dados $x$ e $y$ inteiros, diremos que $x$ *divide* $y$, $y$ *é divisível por* $x$ ou que $y$ é *múltiplo* $x$ quando existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $y = k \cdot x$.

Sejam $a_1, a_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ aonde um destes seja diferente de zero. Um elemento $d$, natural, se diz máximo divisor comum de $a_1$ e $a_2$ se cumpre as seguintes condições:

- $d$ divide $a_1$ e $d$ divide $a_2$;
- Se $d'$ é um natural tal que $d'$ divide $a_1$ e $d$ divide $a_2$, então $d'$ divide $d$ (ou seja, todo divisor comum a $a_1$ e $a_2$ também é divisor de $d$).

Podemos expressar $d$, sendo o máximo divisor comum de $a_1$ e $a_2$, através da igualdade $d = mdc(a_1, a_2)$.

A definição de máximo divisor comum pode ser estendida de maneira orgânica para $n$ números naturais $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n$ tal que ao menos um destes seja diferente de zero. Logo, um elemento $f$ natural é dito máximo divisor comum de $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n$ se:

- $f$ divide $a_1$, $f$ divide $a_2$, $f$ divide $a_3$,... e $f$ divide $a_n$;
- Se $f'$ é um natural tal que $f'$ divide $a_1$, $f'$ divide $a_2$, $f'$ divide $a_3$,... e $f'$ divide $a_n$ então $f'$ divide $f$.

Da mesma forma, podemos expressar $f$, sendo o máximo divisor comum de $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n$, através da igualdade $f = mdc(a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n)$.

### 2.5.1 Propriedade 1

Dado $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $mdc(a+1, a) = 1$.

De fato, seja $mdc(a+1, a) = p$; $p \in \mathbb{N}$. Então, pela definição de máximo divisor comum, $p$ divide $a+1$ e $a$. Logo, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ naturais onde $a+1 = k_1 \cdot p$ e $a = k_2 \cdot p$. Somando $1$ na ultima igualdade, obtemos $a+1 = k_2 \cdot p + 1$. Das igualdades envolvendo a parcela $a+1$, temos $k_1 \cdot p = k_2 \cdot p + 1 \Rightarrow p \cdot (k_1 - k_2) = 1$. Logo, como temos o produto de números inteiros, então, ou $k_1 - k_2 = 1$ e $p = 1$ ou $k_1 - k_2 = -1$ e $p = -1$. Mas como $p \in \mathbb{N}$, então a opção verdadeira é $k_1 - k_2 = 1$ e $p = 1$, implicando então em $mdc(a+1, a) = p = 1$.

### 2.5.2 Propriedade 2

Dados $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde ao menos um dos termos seja diferente de zero, então $mdc(a+b, a) = mdc(b, a)$.

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{N}$; $x = mdc(b, a)$ e $y = mdc(a+b, a)$. Provaremos que $x$ divide $y$ e que $y$ divide $x$.

Demonstrando que $x$ divide $y$:

- Como $x = mdc(b, a)$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $x$ divide $b$ e $x$ divide $a$. Logo, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $b = k_1 \cdot x$ e $a = k_2 \cdot x$. Somando as duas últimas igualdades, temos $a + b = k_2 \cdot x + k_1 \cdot x = (k_2 + k_1) \cdot x$. Como $(k_2 + k_1) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então temos que $x$ divide $a+b$. Por $x$ dividir $a$ e $a+b$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $x$ divide $mdc(a+b, a) = y$.

Demonstrando que $y$ divide $x$:

- Como $y = mdc(a+b, a)$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $y$ divide $a+b$ e $y$ divide $a$. Logo, existem $k_3, k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $a+b = k_3 \cdot y$ e $a = k_4 \cdot y$. Efetuando a diferença da penúltima igualdade pela última igualdade, temos $a+b-a=k_3 \cdot y-k_4 \cdot y \Rightarrow b=(k_3-k_4) \cdot y$. Como $(k_3-k_4) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então temos que $y$ divide $b$. Por $y$ dividir $a$ e $b$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $y$ divide $mdc(b,a)=x$.

### 2.5.3 Propriedade 3

Sejam $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde ao menos um dos termos seja diferente de zero e $t \in \mathbb{N}$, então $mdc(a,b) \cdot t = mdc(a \cdot t, b \cdot t)$.

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{N}$; $mdc(a,b)=x$ e $mdc(a \cdot t, b \cdot t)=y$. Provaremos que $x \cdot t$ divide $y$ e que $y$ divide $x \cdot t$.

Demonstrando que $x \cdot t$ divide $y$:

- Como $x=mdc(a,b)$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $x$ divide $a$ e $x$ divide $b$. Logo, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $a=k_1 \cdot x$ e $b=k_2 \cdot x$. Multiplicando as duas últimas igualdade por $t$, temos $t \cdot a = t \cdot k_1 \cdot x$ e $t \cdot b = t \cdot k_2 \cdot x$. Como $t \cdot k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $t \cdot k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então temos que $x$ divide $t \cdot a$ e $t \cdot b$. Como $mdc(a \cdot t, b \cdot t)=y$ e pela definição do máximo divisor comum, temos que $x$ divide $y$.

Demonstrando que $y$ divide $x \cdot t$:

- Como $y=mdc(a \cdot t, b \cdot t)$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $y$ divide $a \cdot t$ e $b \cdot t$. Logo, existem $k_3, k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $a \cdot t = k_3 \cdot y$ e $b \cdot t = k_4 \cdot y$. Podemos reescrever as equações como $a = k_3 \cdot \frac{y}{t}$ e $b = k_4 \cdot \frac{y}{t}$ concluindo que $\frac{y}{t}$ divide $a$ e $b$ e, pela definição de máximo divisor comum, temos que $\frac{y}{t}$ divide $mdc(a,b)=x$, ou seja, que $y$ divide $mdc(a,b) \cdot t = x \cdot t$.

### 2.5.4 Propriedade 4

Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $mdc(t \cdot a, a) = a$.

De fato, seja $x \in \mathbb{N}$; $mdc(t \cdot a, a)=x$. Novamente demonstraremos $x=a$ ao provar que $x$ divide $a$ e que $a$ divide $x$.

Demonstrando que $x$ divide $a$:

- Como $mdc(t \cdot a, a)=x$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $x$ divide $t \cdot a$ e, especialmente, que $x$ divide $a$.

Demonstrando que $a$ divide $x$:

- Pode-se observar que $a$ divide $a$ e $t \cdot a$, uma vez que podemos que escrever, $a \cdot 1 = a$ e $a \cdot t = a \cdot t$ onde $1, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo, pela definição de máximo divisor comum, temos que $a$ divide $mdc(t \cdot a, a) = x$.

### 2.5.5 Propriedade 5

Sejam $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde ao menos um dos termos seja diferente de zero e $t, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $mdc(t \cdot c + b, a) = mdc(b, a)$ onde $t$ é múltiplo de $a$.

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{N}$; $mdc(t \cdot c + b, a) = x$ e $mdc(b, a) = y$. Provaremos que $x$ divide $y$ e que $y$ divide $x$.

Demonstrando que $x$ divide $y$:

- Como $mdc(t \cdot c + b, a) = x$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $x$ divide $t \cdot c + b$ e $x$ divide $a$. Logo, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $k_1 \cdot x = t \cdot c + b$ e $k_2 \cdot x = a$. Como $t$ é múltiplo de $a$, então existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $k \cdot a = t$. Substituindo os valores de $t$ e $a$, obtidos nas últimas equações, na equação envolvendo a parcela $t \cdot c + b$, temos $k_1 \cdot x = t \cdot c + b = (k \cdot a) \cdot c + b = k \cdot (k_2 \cdot x) \cdot c + b$. Isolando $b$ da última equação, obtemos $b = k_1 \cdot x - k \cdot k_2 \cdot x \cdot c = x \cdot (k_1 - k \cdot k_2 \cdot c)$. Como $(k_1 - k \cdot k_2 \cdot c) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então temos que $x$ divide $b$. Por $x$ dividir $a$ e $b$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $x$ divide $mdc(b, a) = y$.

Demonstrando que $y$ divide $x$:

- Como $mdc(b, a) = y$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $y$ divide $b$ e $y$ divide $a$. Logo, existem $k_3, k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $k_3 \cdot y = b$ e $k_4 \cdot y = a$. Multiplicando a última equação por $c \cdot k$, temos $c \cdot k \cdot k_4 \cdot y = c \cdot k \cdot a$. Mas $k \cdot a = t$, então $c \cdot k \cdot k_4 \cdot y = c \cdot k \cdot a = c \cdot t$. Somando $k_3 \cdot y = b$ à última identidade, temos $c \cdot t + b = k_3 \cdot y + c \cdot k \cdot k_4 \cdot y = y \cdot (k_3 + c \cdot k \cdot k_4)$. Como $(k_3 + c \cdot k \cdot k_4) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então temos que $y$ divide $c \cdot t + b$. Por $y$ dividir $a$ e $c \cdot t + b$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $yx$ divide $mdc(t \cdot c + b, a) = x$.

### 2.5.6 Propriedade 6

Dados $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde ao menos um dos termos seja diferente de zero, então $mdc(a, mdc(b, c)) = mdc(mdc(a, b), c) = mdc(a, b, c)$.

De fato, tomemos $f, g \in \mathbb{N}$ onde $f = mdc(a, mdc(b, c))$ e $g = mdc(mdc(a, b), c)$. Para mostrar que $f = g$, demonstraremos que $f$ divide $g$ e que $g$ divide $f$.

Provando que $f$ divide $g$:

- Como $f = mdc(a, mdc(b, c))$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $f$ divide $a$ e $f$ divide $mdc(b, c)$. Logo, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $a = k_1 \cdot f$ e $mdc(b, c) = k_2 \cdot f$. Da última igualdade e pela definição do máximo divisor comum, temos que $k_2 \cdot f$ divide $b$ e $k_2 \cdot f$ divide $c$. Logo, existem $k_3, k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $b = k_3 \cdot (k_2 \cdot f)$ e $c = k_4 \cdot (k_2 \cdot f)$. Como $(k_3 \cdot k_2), (k_4 \cdot k_2) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $f$ divide $b$ e $f$ divide $c$. Por $f$ dividir $a$ e $b$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $f$ divide $mdc(a, b)$ e, também pela definição, temos que $f$ divide $g = mdc(mdc(a, b), c)$.

Provando que $g$ divide $f$:

- Como $g = mdc(mdc(a, b), c)$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $g$ divide $c$ e $g$ divide $mdc(a, b)$. Logo, existem $k_5, k_6 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $c = k_6 \cdot g$ e $mdc(a, b) = k_5 \cdot g$. Da última igualdade e pela definição do máximo divisor comum, temos que $k_5 \cdot g$ divide $a$ e $k_5 \cdot g$ divide $b$. Logo, existem $k_7, k_8 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $a = k_7 \cdot (k_5 \cdot g)$ e $b = k_8 \cdot (k_5 \cdot g)$. Como $(k_7 \cdot k_5), (k_8 \cdot k_5) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $g$ divide $a$ e $g$ divide $b$. Por $g$ dividir $b$ e $c$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $g$ divide $mdc(b, c)$ e, também pela definição, temos que $g$ divide $f = mdc(a, mdc(b, c))$.

Para provar que $mdc(mdc(a, b), c) = mdc(a, b, c)$, tomemos $h \in \mathbb{N}$ de modo que $h = mdc(a, b, c)$ e consideremos $g = mdc(mdc(a, b), c)$ com os resultados já obtidos da demonstração anterior. Novamente provaremos que $g$ divide $h$ e que $h$ divide $g$.

Para $g$ divide $h$:

- Como $g = mdc(mdc(a, b), c)$ e que foi mostrado no ítem anterior que $g$ divide $a$, $b$ e $c$, pela definição do máximo divisor comum, temos que $g$ divide $mdc(a, b, c) = h$.

Para $h$ divide $g$:

- Como $h = mdc(a, b, c)$ e pela definição do máximo divisor comum apresentada, temos que $h$ divide $a$, $h$ divide $b$ e $h$ divide $c$. Por $h$ dividir $a$ e $b$, temos que $h$ divide $mdc(a, b)$. Logo, de $h$ dividir $mdc(a, b)$ e $h$ dividir $c$, temos que $h$ divide $g = mdc(mdc(a, b), c)$.

## 2.6 ALGORITMO EUCLIDIANO

A igualdade $mdc(n, m) = mdc(m, r);\ n \geqslant m,\ n = q \cdot m + r$ com $m \in \mathbb{N}$, $q, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $r \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$, se faz necessário e o demonstraremos a seguir.

Sejam $mdc(n,m) = x$ e $mdc(m,r) = y$ onde $n \geqslant m,\ n = q \cdot m + r$ com $m \in \mathbb{N}$, $q, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $r \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Provaremos que $x = y$ ao mostrar que $x$ divide $y$ e que $y$ divide $x$.

Demonstrando que $x$ divide $y$:

- Como $mdc(n,m) = x$, temos, pela definição do máximo divisor comum, que $x$ divide $m$. Nota-se que qualquer que seja o múltiplo de $m$, este é também divisível por $x$, ou seja, para todo $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $x$ divide $q \cdot m$. Por $q \cdot m$ ser divisível por $x$, temos que existe $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $q \cdot m = k_1 \cdot x$. Mas temos que $x$ também divide $n$, por conta da definição de máximo divisor comum, logo existe $k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $n = k_2 \cdot x$. Fazendo $n - q \cdot m$, temos $n - q \cdot m = (k_2 \cdot x) - (k_1 \cdot x) = (k_2 - k_1) \cdot x$. Como $(k_2 - k_1) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $x$ divide $n - q \cdot m$, mas $n = q \cdot m + r \Rightarrow r = n - q \cdot m$. Logo, temos que $x$ divide $r$. Pelo fato de $x$ ser um divisor comum de $m$ e $r$ e que $mdc(m,r) = y$ então, pela definição do máximo divisor comum, concluímos que $x$ divide $mdc(m,r) = y$.

Demonstrando que $y$ divide $x$:

- Como $mdc(m,r) = y$, temos, pela definição do máximo divisor comum, que $y$ divide $m$. Nota-se que qualquer que seja o múltiplo de $m$, este é também divisível por $y$, ou seja, para qualquer $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que $x$ divide $q \cdot m$. Por $q \cdot m$ ser divisível por $y$, temos que existe $k_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $q \cdot m = k_3 \cdot y$. Mas temos que $y$ também divide $r$, por conta da definição de máximo divisor comum, logo existe $k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $r = k_4 \cdot y$. Como $n = q \cdot m + r$, temos que $n = q \cdot m + r = (k_3 \cdot y) + (k_4 \cdot y) = (k_3 + k_4) \cdot y$. Logo, temos que $y$ divide $n$. Pelo fato de $y$ ser um divisor comum de $n$ e $m$ e que $mdc(n,m) = x$ então, , pela definição do máximo divisor comum, concluímos que $y$ divide $mdc(n,m) = x$.

A igualdade demonstrada garante o algoritmo, denotado por Algoritmo Euclidiano ou Algoritmo de Euclides, onde, através de um processo sucessivo, é possível obter o máximo divisor comum de dois naturais ($n$ e $m$) ao dividi-los e tomar o máximo divisor comum do quociente $q$ e o resto $r$. Já para obter o $\mathrm{mdc}(q,r)$, podemos repetir o processo, dividir o quociente pelo resto, e obter um novo quociente $q_1$ e um novo resto $r_1$. Este processo termina ao obtermos um quociente ($q_k$) onde o resto relacionado a este $r_k$, seja igual a zero, uma vez que $\mathrm{mdc}(q_k, 0) = q_k$. Então teríamos: $\mathrm{mdc}(n,m) = \mathrm{mdc}(q,r) = \mathrm{mdc}(q_1, r_1) = \mathrm{mdc}(q_2, r_2) = \cdots = \mathrm{mdc}(q_k, 0) = q_k$.

Exemplificando, ao aplicar o algoritmo euclidiano para descobrir o máximo divisor comum de $1126$ e $522$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{mdc}(1126, 522) &= \mathrm{mdc}(522, 82) = \mathrm{mdc}(82, 30) \\ &= \mathrm{mdc}(30, 22) = \mathrm{mdc}(22, 8) \\ &= \mathrm{mdc}(8, 6) = \mathrm{mdc}(6, 2) \\ &= \mathrm{mdc}(2, 0) = 2.\end{aligned}$$

Logo, temos que o máximo divisor comum de $1126$ e $522$ é $2$.

## 2.7 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Seja $p(n)$ uma função proposicional cujo universo é o conjunto dos inteiros maiores que ou iguais a um inteiro dado $a$. Suponhamos que se consiga provar o seguinte:

1. $p(a)$ é verdadeira;
2. Se $r \geqslant a$ e $p(r)$ é verdadeira, então $p(r+1)$ também é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geqslant a$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 31).

## 2.8 PROVA COMBINATÓRIA

O termo Prova Combinatória, ou *combinatorial proof*, é utilizado como dois tipos de prova matemática. Sendo

- Prova por contagem dupla: Uma identidade combinatória é demonstrada pela contagem do número de elementos de um conjunto escolhido de duas maneiras diferentes para obter diferentes expressões na identidade. Como essas expressões contam os mesmos objetos, então elas devem ser iguais.
- Prova bijetiva: Dois conjuntos são demonstrados como tendo o mesmo número de elementos ao mostrar que há uma bijeção, isto é, uma correspondência um a um, entre eles.

# 3 IDENTIDADES ENVOLVENDO NÚMEROS DE FIBONACCI

Neste capítulo iremos apresentar diversas identidades envolvendo os números da sequência Fibonacci e os demonstraremos utilizando prova combinatória. Para estes, são considerados canteiros onde deseja-se completá-los com blocos quadrados e retangulares, sendo os blocos retangulares indistinguíveis, assim como os quadrados. O objetivo é contar, de duas maneiras, a quantidade de formas possíveis de distribuir os blocos nestes canteiros.

## 3.1 IDENTIDADE 1

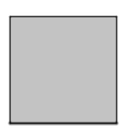
$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-p}^{p} = f_n;\ n \in \mathbb{N}$$

Seja um canteiro de dimensões $n \times 1$. Desejamos completá-lo com blocos quadrados $1 \times 1$ ou com blocos retangulares $2 \times 1$. Vejamos quantas maneiras pode-se preencher este canteiro.

Modo 1: Analisemos de quantos modos podemos organizar os blocos para cada valor de $n \in \mathbb{N}$. Considerando que $g_n$ conta o canteiro $n \times 1$, então:

- Para $n = 1$ temos um canteiro de dimensões $1 \times 1$ e, consequentemente, $g_1 = 1$ maneira de ordenar, sendo por um bloco quadrado, representado por

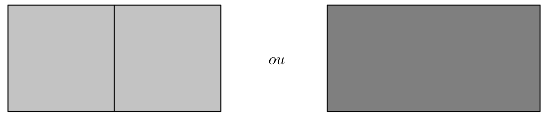
FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA CANTEIRO DE LARGURA 1



FONTE: Elaborada pelo autor

- Para $n = 2$ temos um canteiro de dimensões $2 \times 1$ e podemos ocupá-lo dessas $g_2 = 2$ formas,

FIGURA 2 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA CANTEIRO DE LARGURA 2




FONTE: Elaborada pelo autor

- Para $n = 3$ temos um canteiro de dimensões $3 \times 1$ e repara-se que há $g_3 = 3$ formas de preenchê-lo, sendo

FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA CANTEIRO DE LARGURA 3


FONTE: Elaborada pelo autor

- Para $n = 4$ temos um canteiro de dimensões $4 \times 1$ com $g_4 = 5$ maneiras de organizá-lo, sendo

FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA CANTEIRO DE LARGURA 4


FONTE: Elaborada pelo autor

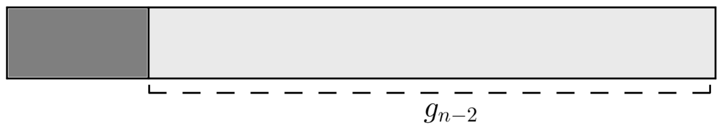
No caso geral, podemos também observar que, para $n \times 1$, temos duas opções: ou a primeira peça é um quadrado, ou a primeira peça é um retângulo. Se o primeiro bloco for um quadrado, então teríamos $n - 1$ espaços a serem ocupados e com isso $g_{n-1}$ maneiras de completá-los.

FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA CANTEIRO DE LARGURA $n$ ONDE O PRIMEIRO BLOCO É QUADRADO


FONTE: Elaborada pelo autor

Caso a primeira peça seja um retângulo, então teríamos $n-2$ espaços e com isso $g_{n-2}$ formas de preencher.

FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA CANTEIRO DE LARGURA $n$ ONDE O PRIMEIRO BLOCO É RETANGULAR




FONTE: Elaborada pelo autor

Pelo princípio aditivo da contagem, tem-se:

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}.$$

Nota-se que $g_n$ se comporta exatamente como a sequência de Fibonacci definida anteriormente, ou seja, temos que $g_n = f_n$.

Modo 2: Seja $p$ a quantidade de retângulos utilizados para preencher o canteiro de dimensões $n \times 1$. Nota-se que estes $p$ retângulos ocupam $2p$ espaços. Logo sobram $n-2p$ lacunas. Como cada quadrado ocupa um espaço, são necessários $n-2p$ quadrados para preencher o local restante. Então a quantidade total de peças utilizadas para ocupar o canteiro é de $(n-2p)+p = n-p$. De quantas maneiras estas $n-p$ peças podem ser distribuídas no canteiro?

Para responder esta, vale ressaltar que a quantidade de blocos retangulares $p$, que ocupam $2p$ espaços, depende das dimensões $n \times 1$ do canteiro. Sendo assim, $n \geqslant 2p \geqslant 0 \ \rightarrow \dfrac{n}{2} \geqslant p \geqslant 0$. Logo, a quantidade $p$ de blocos retangulares, que podem ser alocados no canteiro, varia de 0 ao maior inteiro de modo que seja menor ou igual a $\dfrac{n}{2}$. Este inteiro é denominado por $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. Sendo assim, das $n-p$ peças, devemos escolher quais destas serão ocupadas pelos $p$ retângulos. Nota-se que podemos fazer de $C^p_{n-p}$ maneiras diferentes. Como temos $p \in \left\{0, 1, 2, \cdots, \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \right\}$ retângulos possíveis, então:

- Para $p=0$, temos $C^0_{n-0}$ maneiras de organizar as peças no canteiro;
- Para $p=1$, temos $C^1_{n-1}$ maneiras de organizar as peças no canteiro;
- Para $p=2$, temos $C^2_{n-2}$ maneiras de organizar as peças no canteiro;

$$\cdots$$

- Por fim, para $p = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, temos $C_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ maneiras de organizar as peças no canteiro.

Logo, utilizando o princípio aditivo da contagem, temos

$$C_{n-0}^{0} + C_{n-1}^{1} + C_{n-2}^{2} + \cdots + C_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-p}^{p}.$$

## 3.2 IDENTIDADE 2

$$f_{n-1}^{2} + f_{n}^{2} = f_{2n};\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

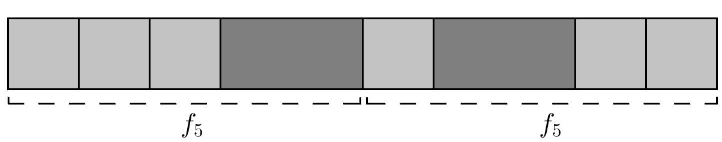
Demonstraremos esta identidade ao contar o número de situações possíveis de distribuir os blocos retangulares e quadrados em um canteiro de dimensões $2n \times 1$.

Modo 1: Vimos, na identidade anterior, que para um canteiro de largura $n$ temos $f_n$ formas de alocar os blocos. Logo, para um canteiro de largura $2n$, podemos organizá-lo de $f_{2n}$ maneiras distintas.

Modo 2: Agora analisemos o que ocorre com este mesmo canteiro ao tentar separar este em duas partes de tamanhos iguais. Isto significa, em teoria, que o objetivo é separá-lo ao meio para obter partes com largura $\dfrac{2n}{2} = n$.

Para exemplificar o termo *separar* e suas variações na prática, consideremos um canteiro de largura dez. A disposição dos blocos, como mostrado na figura abaixo, nos mostra que é possível separá-lo de modo que tenhamos duas parcelas $5 \times 1$. Então, para cada parte, poderíamos contar de quantos modos é possível distribuir os blocos, resultando em $f_5$ à cada segmento.

FIGURA 7 – ILUSTRAÇÃO DE UM CASO PARTICULAR DA IDENTIDADE 3.1, NO CASO $n = 5$, ONDE O CANTEIRO PODE SER DIVIDIDA EXATAMENTE AO MEIO




FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 358)

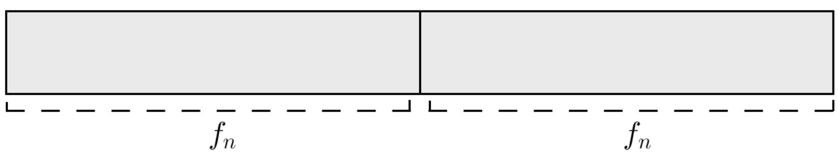
Já na ilustração seguinte, com a ordem das peças distribuídas desta forma, vê-se que não há como separar o canteiro na largura cinco, justamente porque há um bloco retangular impedindo. Então, para contornar esta situação, tomaremos os segmentos, sendo o primeiro constituído pelas quatro primeiras células e o segundo como sendo as quatro últimas. Com isso, para cada segmento, temos $f_4$ formas de ordená-las.

FIGURA 8 – ILUSTRAÇÃO DE UM CASO PARTICULAR DA IDENTIDADE 3.1, NO CASO $n = 5$, ONDE A PEÇA CENTRAL DO CANTEIRO É UM RETÂNGULO


FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 358)

De modo geral, para o canteiro de dimensões $2n \times 1$, em que seja possível separar, teríamos duas partes de largura $n$ sendo que cada um poderia ser organizada de $f_n$ maneiras distintas. Logo, das duas partes, pelo princípio fundamental da contagem, teríamos $f_n \cdot f_n = f_n^2$.

FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PEÇAS EM UM CANTEIRO DE LARGURA $2n$ ONDE SEJA VIÁVEL SEPARAR AO MEIO




FONTE: Elaborada pelo autor

Caso não seja separável, teríamos duas partes de $n - 1$ de largura e um bloco retangular separando-os. Logo, para cada segmento de dimensão $(n - 1) \times 1$, temos $f_{n-1}$ maneiras de organizar. Desta forma, também pelo princípio fundamental da contagem, teríamos $f_{n-1} \cdot 1 \cdot f_{n-1} = f_{n-1}^2$.

FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PEÇAS EM UM CANTEIRO DE LARGURA $2n$ ONDE NÃO SEJA VIÁVEL SEPARAR AO MEIO


FONTE: Elaborada pelo autor

Das duas situações únicas possíveis, ser separável ou não ser separável, ou uma ocorre ou a outra ocorre. Então pelo princípio aditivo, temos o total de $f_n^2 + f_{n-1}^2$ formas de dispor os blocos.

## 3.3 IDENTIDADE 3

$$f_m \cdot f_r + f_{m-1} \cdot f_{r-1} = f_{m+r};\ m, r \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Notamos que a identidade 3.2 generaliza a identidade 3.1, no sentido que ela se reduz à anterior fazendo $m = r = n$. Demonstraremos esta identidade ao contar o número de situações possíveis de distribuir os blocos retangulares e quadrados em um canteiro de dimensões $(m + r) \times 1$.

Modo 1: De maneira análoga ao que foi apresentado nas identidades anteriores, temos $f_{m+r}$ maneiras distintas de organizar os blocos quadrados e retangulares no canteiro de largura $m + r$.

Modo 2: Ao invés de analisarmos as possibilidades de distribuição dos blocos ao tentar separar o canteiro, na célula $n$, cuja as dimensões são $2n \times 1$, verifiquemos o que ocorre quando se deseja separar em qualquer célula do canteiro, não apenas na metade. Para tal, com o canteiro de dimensões $(m + r) \times 1$, pretendemos separar o canteiro na célula $m$.

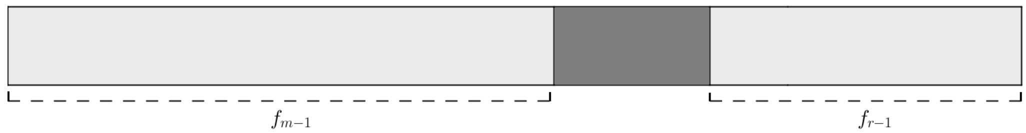
Caso seja separável, teríamos dois segmentos: um de largura $m$ seguido de outro com $r$ de largura, onde o primeiro nos da $f_m$ maneiras distintas de distribuir os blocos, enquanto o segundo traz $f_r$ possibilidades. Pelo princípio fundamental da contagem, temos $f_m \cdot f_r$.

FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PEÇAS EM UM CANTEIRO DE LARGURA $m + r$ ONDE SEJA VIÁVEL SEPARAR NA LARGURA $m$


FONTE: Elaborada pelo autor

Caso não seja separável, significa que o bloco disposto após a célula $m - 1$ é retangular. Isto quer dizer que temos uma parte com largura $m - 1$, um bloco retangular e outra parte de largura $(m + r) - (m + 1) = r - 1$, dando $f_{m-1}$, $1$ e $f_{r-1}$ maneiras respectivas de distribuição. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos $f_{m-1} \cdot f_{r-1}$.

FIGURA 12 – REPRESENTAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PEÇAS EM UM CANTEIRO DE LARGURA $m+r$ ONDE NÃO SEJA VIÁVEL SEPARAR NA LARGURA $m$




FONTE: Elaborada pelo autor

Das duas situações únicas possíveis, ser separável ou não ser separável, temos, utilizando princípio aditivo, o total de $f_m \cdot f_r + f_{m-1} \cdot f_{r-1}$ formas de dispor os blocos.

## 3.4 IDENTIDADE 4

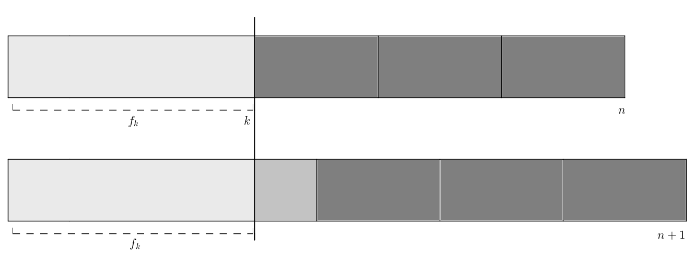
$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1};\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Demonstraremos esta identidade ao contar o número de situações possíveis de distribuir os blocos retangulares e quadrados em dois canteiros, sendo um tendo dimensões $n \times 1$ e outro de $(n+1) \times 1$.

Modo 1: Tomando os canteiros apresentado acima, temos $f_n$ maneiras de organizar o primeiro canteiro e $f_{n+1}$ modos para o segundo. Logo, utilizando princípio fundamental da contagem, obtemos $f_n \cdot f_{n+1}$ meios de contar ambos os canteiros.

Modo 2: Consideremos os mesmos canteiros e os coloquemos um acima do outro. Para cada célula de ambos canteiros, tentemos separá-los simultaneamente. A figura que vem a seguir indica que a célula $k$ é a última célula em que seja possível separar os canteiros ao mesmo tempo e é justamente nela que focaremos. Nota-se ainda que os blocos após $k$ tem que ser retangulares exceto por apenas um bloco quadrado, que deve ser seguido de $k$ e em apenas um dos canteiros. Caso contrário, $k$ não seria a última célula em que seja possível separar simultaneamente os canteiros.

FIGURA 13 – ILUSTRAÇÃO DE DOIS CANTEIROS DE LARGURAS $n$ E $n+1$ COM A ÚLTIMA SEPARAÇÃO OCORRENDO NA CÉLULA $k$




FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 358)

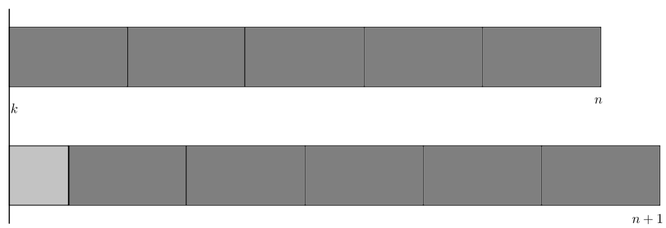
Analisemos a quantidade de modos de organizar os canteiros até largura $k$ e após ele.

Para as partes após a célula $k$, vimos que a disposição das peças devem ser únicas, pela mesma justificativa de que, caso contrário, $k$ não seria a última a ser separável.

Para as partes dos canteiros até a célula $k$, examinemos a distribuição de blocos possíveis. Notemos que $k$ pode assumir qualquer valor do conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$. Isto ocorre porque há a possibilidade de não ter como separar os canteiros simultaneamente, ou a última célula separável pode ser a primeira, segunda, terceira e assim por diante até a enésima. Em cada caso, temos:

- Para $k = 0$, temos $1 = f_0$ maneira de organizar cada um dos canteiros, isso porque teríamos apenas as partes após a célula $k$ que são únicas. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos $f_0 \cdot f_0 = f_0^2$ formas de distribuir os blocos;

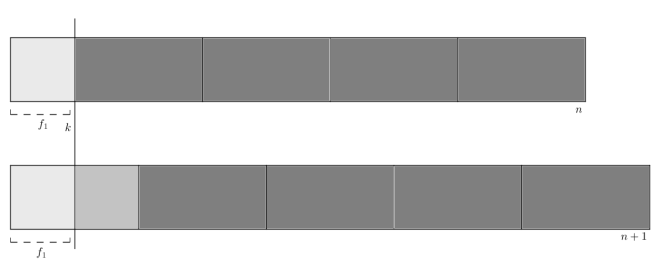
FIGURA 14 – ILUSTRAÇÃO EM QUE A ÚLTIMA CÉLULA SEPARÁVEL ENTRE CANTEIROS DE LARGURAS $n$ E $n+1$ É $k = 0$




FONTE: Elaborada pelo autor

- Para $k = 1$, temos duas partes de canteiros com $1$ de largura, consequentemente $f_1$ maneira de organizar cada um dos canteiros. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, $f_1 \cdot f_1 = f_1^2$ maneiras de distribuir os blocos;

FIGURA 15 – ILUSTRAÇÃO EM QUE A ÚLTIMA CÉLULA SEPARÁVEL ENTRE CANTEIROS DE LARGURAS $n$ E $n+1$ É $k = 1$




FONTE: Elaborada pelo autor

- Para $k = 2$, temos duas partes de canteiros com $2$ de largura, consequentemente temos $f_2$ maneiras de organizar cada um dos canteiros. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, $f_2 \cdot f_2 = f_2^2$ formas de distribuir os blocos;

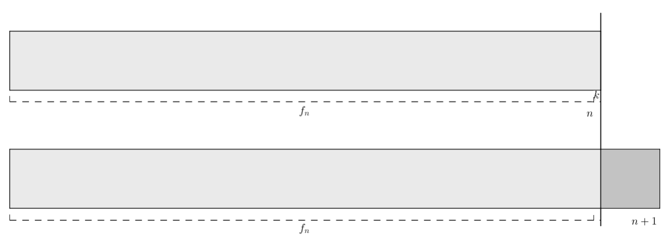
FIGURA 16 – ILUSTRAÇÃO EM QUE A ÚLTIMA CÉLULA SEPARÁVEL ENTRE CANTEIROS DE LARGURAS $n$ E $n + 1$ É $k = 2$


FONTE: Elaborada pelo autor

...

- Para $k = n$, temos duas partes de canteiros com $n$ de largura, consequentemente temos $f_n$ maneiras de organizar cada um dos canteiros. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, $f_n \cdot f_n = f_n^2$ maneiras de distribuir os blocos;

FIGURA 17 – ILUSTRAÇÃO EM QUE A ÚLTIMA CÉLULA SEPARÁVEL ENTRE CANTEIROS DE LARGURAS $n$ E $n + 1$ É $k = n$




FONTE: Elaborada pelo autor

Utilizando o princípio aditivo, para cada $k$ possível, obtemos $f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2$.

## 3.5 IDENTIDADE 5

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1;\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

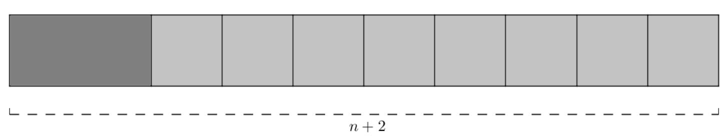
Demonstraremos esta identidade ao contar o número de situações possíveis de distribuir os blocos retangulares e quadrados em um canteiro dimensões $(n + 2) \times 1$ onde se deseja ter ao menos um bloco retangular nele.

Modo 1: Se contarmos a quantidade de maneiras possíveis de organizar os blocos onde ao menos tenha um retângulo, teremos $f_{n+2} - 1$ possibilidades. A justificativa para tal é dada pelo fato de $f_{n+2}$ ser a quantidade de possibilidades para o canteiro, sem restrições, de dimensões $(n + 2) \times 1$ e o $-1$ é dado devido a retirada da possibilidade de se ter o canteiro composto sem algum bloco retangular, ou seja, aquele composto apenas por quadrados.

Modo 2: Como temos ao menos um bloco retangular para qualquer combinação de blocos, veremos o que ocorre ao analisarmos a posição relativa do último bloco retangular do canteiro e as distribuições possíveis das peças nas demais posições.

- Caso 0: Se o último bloco retangular ocupar a primeira posição do canteiro, então os outros $n$ espaços a direita serão ocupados por apenas blocos quadrados. Logo, temos $1 = f_0$ maneira de organizar;

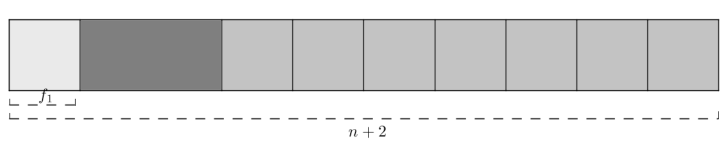
FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $n + 2$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO RETANGULAR OCUPA A POSIÇÃO $1$




FONTE: Elaborada pelo autor

- Caso 1: Se o último bloco retangular ocupar a segunda posição, então os outros $n - 1$ espaços a direita serão ocupadas por apenas blocos quadrados e teremos a primeira posição para contar a distribuição dos blocos possíveis. Logo, temos $f_1$;

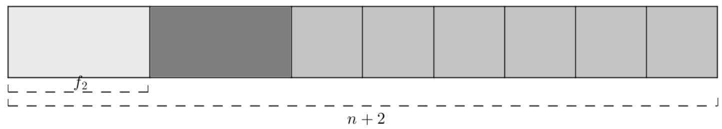
FIGURA 19 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $n + 2$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO RETANGULAR OCUPA A POSIÇÃO $2$




FONTE: Elaborada pelo autor

- Caso 2: Se o último bloco retangular ocupar a terceira posição, então os outros $n - 2$ espaços a direita serão ocupadas por apenas blocos quadrados e teremos as duas primeiras posições para contar a distribuição dos blocos possíveis. Logo, temos $f_2$;

FIGURA 20 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $n+2$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO RETANGULAR OCUPA A POSIÇÃO $3$

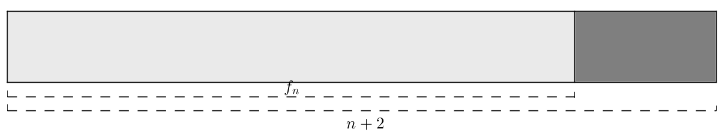



FONTE: Elaborada pelo autor

...

- Caso $n$: Se ocupar a $(n+1)$-ésima posição, então não haverá blocos quadrados após ele e teremos as $n$ primeiras posições para contar a distribuição dos blocos possíveis. Logo, temos $f_n$;

FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $n+2$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO RETANGULAR OCUPA A POSIÇÃO $n$




FONTE: Elaborada pelo autor

Logo, pelo princípio aditivo, obtemos $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.

## 3.6 IDENTIDADE 6

$$f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1};\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

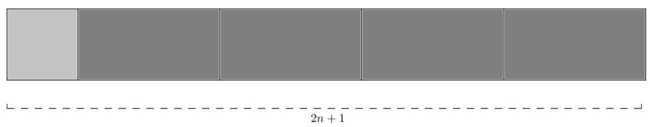
Demonstraremos esta identidade ao contar o número de situações possíveis de distribuir os blocos retangulares e quadrados em um canteiro dimensões $(2n+1) \times 1$

Modo 1: Se contarmos a quantidade de maneiras possíveis de organizar os blocos, temos $f_{2n+1}$ possibilidades.

Modo 2: Seja o canteiro de dimensões como mencionado acima. Como a medida da largura do canteiro é ímpar para qualquer que seja o $n$ natural, então não há a possibilidade termos um canteiro composto por apenas blocos retangulares, já que cada retângulo ocupa duas células. Logo, qualquer que seja as possibilidades de canteiros possíveis, temos nele ao menos um bloco quadrado. Analisemos a posição relativa do último bloco quadrado e as distribuições possíveis das peças nas demais posições. Nota-se ainda que o último bloco quadrado não pode ocupar as posições pares, isto porque as células à direita serão preenchidas apenas por blocos retangulares e isso daria uma largura par para o canteiro, que não é possível. Então,

- Caso 0: Se o último bloco quadrado ocupar a primeira posição, os outros $(2n+1)-1 = 2n$ espaços a direita serão ocupadas por apenas blocos retangulares. Logo, temos $1 = f_0$ maneira de organizarmos as peças;

FIGURA 22 – ILUSTRAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n+1$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $1$




FONTE: Elaborada pelo autor

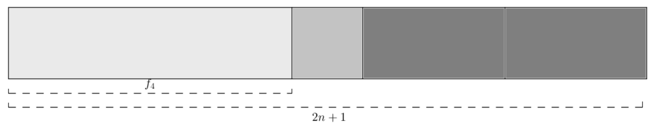
- Caso 1: Se o último bloco quadrado ocupar a terceira posição, os outros $(2n+1)-3 = 2n-2$ espaços a direita serão ocupados por apenas blocos retangulares e teremos as duas primeiras posições para a distribuição de peças. Logo, temos $f_2$ distribuições possíveis;

FIGURA 23 – ILUSTRAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n+1$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $3$


FONTE: Elaborada pelo autor

- Caso 2: Se o último bloco quadrado ocupar a quinta posição, os outros $(2n+1)-5 = 2n-4$ espaços a direita serão ocupadas por apenas blocos retangulares e teremos as quatro primeiras posições para a distribuição de peças. Logo, temos $f_4$ formas de preenchimento;

FIGURA 24 – ILUSTRAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n+1$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $5$

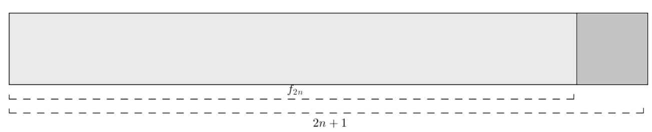



FONTE: Elaborada pelo autor

$$\dots$$

- Caso $n$: Se o último bloco quadrado ocupar a $(2n+1)$-ésima posição, não haverá blocos após ele e teremos as $2n$ primeiras posições para organizar. Logo, temos $f_{2n}$ formas de distribuirmos as peças.

FIGURA 25 – ILUSTRAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n+1$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $2n+1$




FONTE: Elaborada pelo autor

Logo, pelo princípio aditivo, obtemos $f_0+f_2+f_4+\cdots+f_{2n}$ formas de preenchimento.

## 3.7 IDENTIDADE 7

$$f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n}-1;\ n\in\mathbb{N}$$

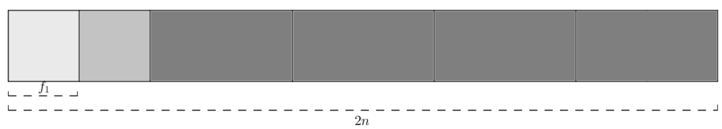
Demonstraremos esta identidade ao contar o número de situações possíveis de distribuir os blocos retangulares e quadrados em um canteiro dimensões $2n\times 1$ aonde se deseja ter ao menos um bloco quadrado nele.

Modo 1: Se contarmos a quantidade de maneiras possíveis de organizar os blocos onde ao menos tenha um quadrado, teremos $f_{2n}-1$ possibilidades. A justificativa para tal é dada pelo fato de $f_{2n}$ ser a quantidade de possibilidades para o canteiro, sem restrições, de dimensões $2n\times 1$ e o $-1$ é dado devido a retirada da possibilidade se ter o canteiro composto sem algum bloco quadrado, ou seja, aquele composto apenas por retângulos.

Modo 2: Seja o canteiro de mesmas dimensões ao que foi citado acima. Se considerarmos ter ao menos um bloco quadrado à cada possibilidade de disposição dos blocos, então podemos excluir a possibilidade de termos canteiro constituído apenas por retângulos. Analisemos a posição relativa do último bloco quadrado do canteiro. Nota-se também que o último bloco quadrado não pode ocupar as posições ímpares, isto porque as células restantes serão preenchidas apenas por blocos retangulares e isso daria uma largura ímpar para o canteiro, que não é possível. Logo,

- Caso 1: Se o último bloco quadrado ocupar a segunda posição, as outras $2n-2$ posições a direita serão ocupadas por apenas blocos retangulares e teremos a primeira posição para a distribuição de peças. Logo, temos $f_1$ formas de preenchimento;

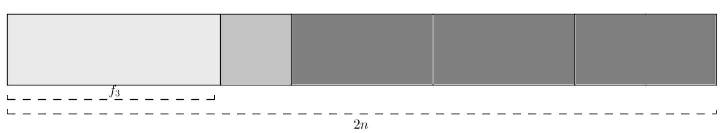
FIGURA 26 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $2$




FONTE: Elaborada pelo autor

- Caso 2: Se o último bloco quadrado ocupar a quarta posição, as outras $2n-4$ posições a direita são ocupadas por apenas blocos retangulares e teremos as três primeiras posições para a distribuição de peças. Logo, temos $f_3$ distribuições possíveis;

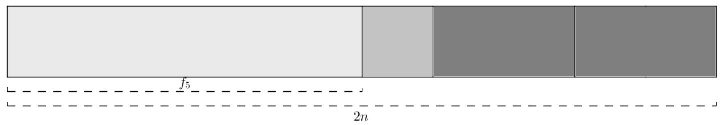
FIGURA 27 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $4$




FONTE: Elaborada pelo autor

- Caso 3: Se o último bloco quadrado ocupar a sexta posição, as outras $2n-6$ posições a direita são ocupadas por apenas blocos retangulares e teremos as cinco primeiras posições para a distribuição de peças. Logo, temos $f_5$;

FIGURA 28 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $6$

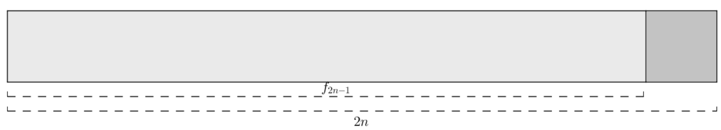



FONTE: Elaborada pelo autor

$$\cdots$$

- Caso $n$: Se ocupar a $2n$-ésima posição, não haverá blocos à direta dele e teremos as $2n-1$ primeiras posições para a distribuição de peças. Logo, temos $f_{2n-1}$ distribuições possíveis.

FIGURA 29 – REPRESENTAÇÃO DE UM CANTEIRO DE LARGURA $2n$ ONDE O ÚLTIMO BLOCO QUADRADO OCUPA A POSIÇÃO $2n$




FONTE: Elaborada pelo autor

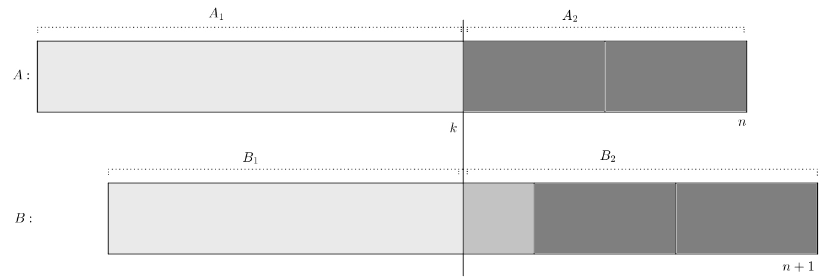
Logo, pelo princípio aditivo, obtemos $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}$ formas distintas de preenchimento do canteiro.

## 3.8 IDENTIDADE 8

$$f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^n;\ n \in \mathbb{N}$$

Tomemos dois canteiros de largura $n$ e dispomos um acima do outro e desloquemos o canteiro de baixo em uma medida à direita em relação ao canteiro de cima. Situemos, então, que o primeiro canteiro está distribuído da posição $0$ até a posição $n$ e o segundo indo da posição $1$ até $n+1$. Nomeemos o canteiro de cima como sendo $A$ e o de baixo como $B$. Seja $k$ o último bloco onde seja possível *separar* $A$ e $B$. Para cada canteiro, temos duas partes: aquela que vai até a célula $k$ e a que vai após $k$. Para $A$, denominemos por $A_1$ a região localizada antes da célula $k$ e $A_2$ para a região após $k$ e, em $B$, denominemos por $B_1$ a região antes de $k$ e $B_2$ a parte que fica após a célula $k$. A figura abaixo mostra a situação descrita.

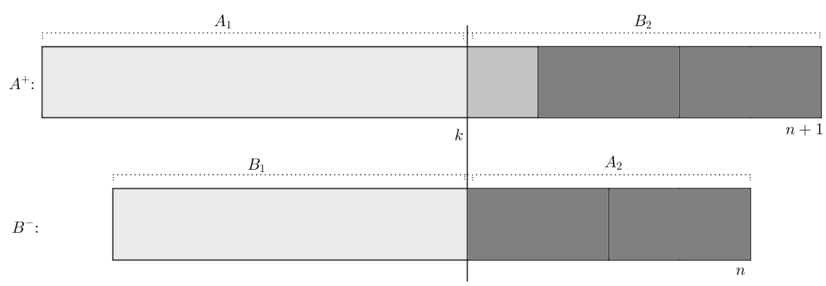
FIGURA 30 – IMAGEM QUE REPRESENTA DOIS CANTEIROS DE LARGURA $n$, COM $B$ DESLOCADO EM UMA UNIDADE DE $A$, ONDE $k$ É A ÚLTIMA CÉLULA SEPARÁVEL DE $A$ E $B$. NOMEOU-SE AS PARTES OBTIDAS DESTA SEPARAÇÃO




FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 359)

Agora permutemos, entre os canteiros, as partes que ficam após $k$. Definimos então $A^+$o canteiro formado por $A_1B_2$ e $B^-$ o canteiro formado por $B_1A_2$, como visto na figura abaixo.

FIGURA 31 – IMAGEM QUE RETRATA CANTEIROS HERDADOS NA TROCA DAS PARTES $A_2$ E $B_2$ ENTRE OS CANTEIROS REPRODUZIDOS NA FIGURA 4




FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 359)

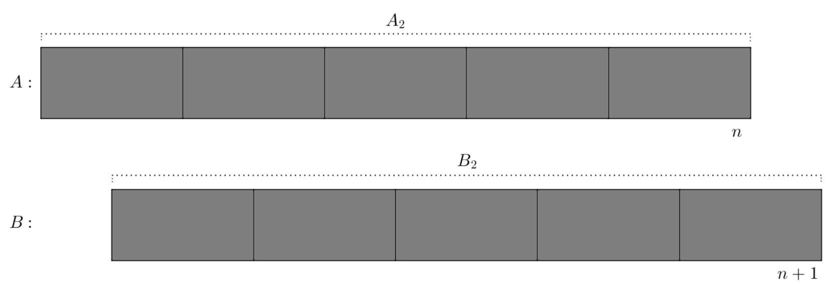
Analisando agora as larguras desses novos canteiros, temos que a de $A^+$ é $n+1$, já que $A_1$ mede $k$ e $B_2$ mede $n-k+1$. Já $B^-$ mede $n-1$, uma vez que $B_1$ tem $k-1$ e $A_2$ tem $n-k$. Então, a quantidade de maneiras distintas a ser organizadas as peças para os canteiros $A$ e $B$, de largura $n$, é de $f_n \cdot f_n = f_n^2$ e para os canteiros $A^+$ e $B^-$ é de $f_{n-1} \cdot f_{n+1}$.

Notemos que ao trocar as partes em que não há separação entre $A$ e $B$, para gerar $A^+$e $B^-$, não altera qual é a última célula em pudesse separar, ou seja, $k$ continua sendo a última a ser separável. Então poderíamos trocar novamente $A_2$ e $B_2$ entre os canteiros $A^+$ e $B^-$ para voltar aos canteiros $A$ e $B$. A pergunta é: generalizando, há tantos pares de canteiros de largura $n$ como existem pares de canteiros de larguras $n-1$ e $n+1$? Se a resposta for sim, a igualdade $f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1}$ é verdadeira, o mesmo vale para

$f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = 0$. Mas a resposta para a pergunta é não, isto é, $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} \neq 0$. Tal situação ocorre justamente por conta da disposição dos canteiros em que não há como separá-los, que são justamente os canteiros compostos apenas por blocos retangulares. Vejamos o que ocorre com $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1}$, caso $n$ for ímpar e caso $n$ for par, onde não há como separar.

- Quando $n$ for par, existe uma distribuição de blocos onde $A$ e $B$ são compostos apenas por retângulos. Como visto na figura abaixo, tal situação implica que não haja algum bloco que permite a separação.

FIGURA 32 – REPRESENTAÇÃO DE CANTEIROS, DE MESMO TAMANHO, COMPOSTOS POR APENAS BLOCOS RETANGULARES

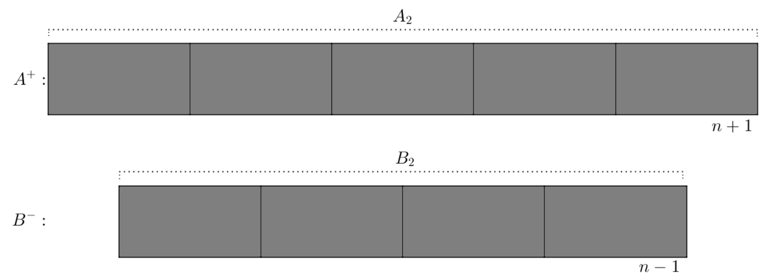



FONTE: Adaptada de BOGOMOLNY (2012)

Desta forma, temos que há somente uma forma de distribuição de peças nestas condições, implicando em $f_n = 1$ e, como há somente as partes $A_2$ e $B_2$ e não encontra-se formas de obter as partes $A_1$ e $B_1$ de $A$ e $B$, consequentemente, também não há como conseguir os canteiros $A^+$ e $B^-$, resultando em $f_{n-1} = f_{n+1} = 0$. Logo, $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = 1 - 0 = 1$.

- Quando $n$ for ímpar, $n-1$ e $n+1$ são pares. Logo, existe uma distribuição de blocos onde $A^+$ e $B^-$ são compostos apenas por retângulos, não permitindo separação. Como visto na imagem abaixo.

FIGURA 33 – REPRESENTAÇÃO DE CANTEIROS, DIFERINDO DE UM RETÂNGULO E COMPOSTOS POR APENAS BLOCOS RETANGULARES




FONTE: Adaptada de BOGOMOLNY (2012)

Logo, utilizando o mesmo raciocínio ao aplicado para $n$ par, temos que há somente uma forma de distribuição de peças para $A^+$ e $B^-$, implicando em $f_{n-1} = f_{n+1} = 1$ e, como há somente as partes $A_2$ e $B_2$ e não encontra-se formas de obter as partes $A_1$ e $B_1$ de $A^+$ e $B^-$, consequentemente, também não há como conseguir $A$ e $B$, resultando em $f_n = 0$. Logo, $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = 0 - 1 = -1$.

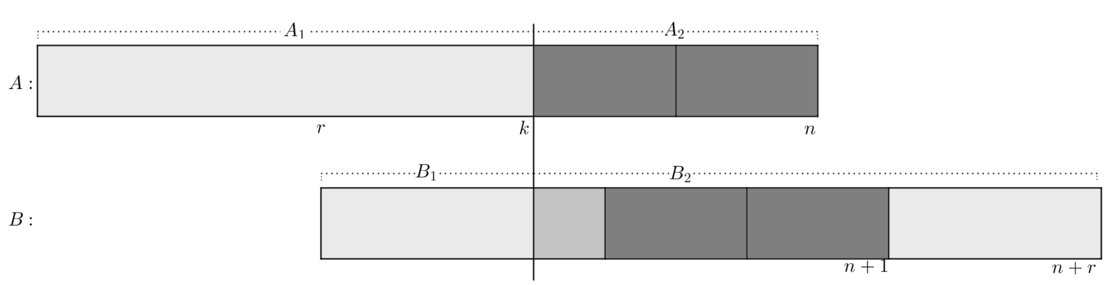
Dos dois itens anteriores, temos $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^n;\ n \in \mathbb{N}$.

## 3.9 IDENTIDADE 9

$$f_n^2 - f_{n-r} \cdot f_{n+r} = (-1)^{n-r+1} \cdot f_{r-1}^2;\ n, r \in \mathbb{N}$$

Tomemos os canteiros de largura $n$, como o que foram considerados na identidade anterior, com a diferença de que, ao invés do deslocamento do canteiro $B$ em relação ao canteiro $A$ ser de uma unidade, consideremos esse distanciamento sendo $r$ unidades. Seja $k$ a última célula onde seja possível separar $A$ e $B$, obtendo assim $A_2$ e $B_2$.

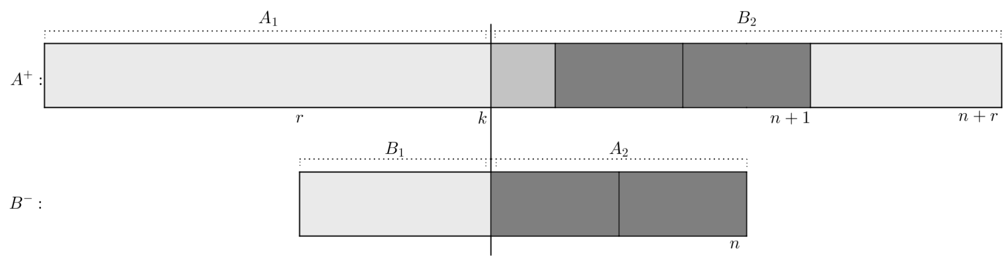
FIGURA 34 – IMAGEM QUE REPRESENTA DOIS CANTEIROS DE LARGURA $n$, COM $B$ DESLOCADO EM $r$ UNIDADES DE $A$, ONDE $k$ É A ÚLTIMA CÉLULA SEPARÁVEL DE $A$ E $B$. NOMEOU-SE AS PARTES OBTIDAS DESTA SEPARAÇÃO




FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 359)

Permutemos $A_2$ e $B_2$ a ponto de obtermos os canteiros $A^+$ e $B^-$, assim como realizado na identidade passada.

FIGURA 35 – IMAGEM QUE RETRATA CANTEIROS HERDADOS NA TROCA DAS PARTES $A_2$ E $B_2$ ENTRE OS CANTEIROS REPRODUZIDOS NA FIGURA 8




FONTE: Adaptada de Benjamin e Quinn (2006, p. 359)

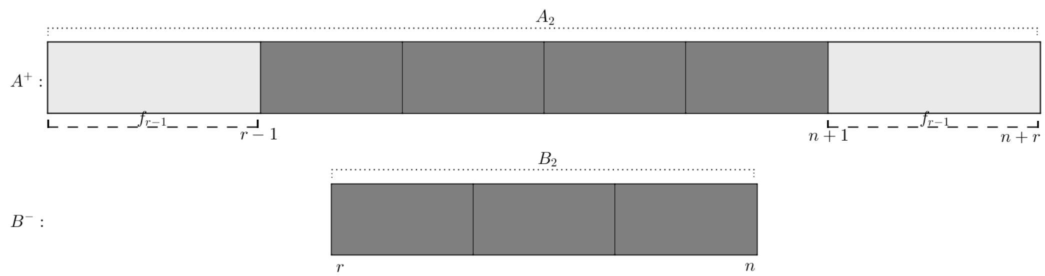
Dessa vez, notemos que a largura de $A^+$ é $n+r$, já que $A_1$ mede $k$ e $B_2$ $r+n-k$. Já a largura de $B^-$ é $n-r$, haja vista que $B_1$ mede $k-r$ e $A_2$, $n-k$. Logo, temos $f_n \cdot f_n = f_n^2$ maneiras organizar os blocos quadrados e retangulares no par de canteiros $A$ e $B$, já para $A^+$ e $B^-$, são $f_{n-r} \cdot f_{n+r}$ possibilidades. Assim como na identidade passada, $k$ continua sendo a última célula onde seja possível efetuar a separação e com isso podemos, partindo de $A^+$ e $B^-$, permutar $A_2$ e $B_2$ para obter $A$ e $B$. Podemos então considerar que há tantos pares de canteiros de largura $n$ como existem pares de canteiros de larguras $n-r$ e $n+r$? A resposta também é não, ou seja, $f_n^2 - f_{n-r} \cdot f_{n+r} \neq 0$, justamente por conta dos canteiros em que não há como separar. Mas, diferentemente da identidade anterior, considerar todos blocos sendo retangulares não á única opção de combinação de peças em que não há separação entre os canteiros. Vê-se que nas partes, onde o primeiro deles vai da largura $0$ ao $r-1$ e o segundo vai de $n+1$ ao $n+r$, não há como separar simultaneamente os canteiros, pois não haverá blocos em outro canteiro para que ocorra tal divisão, logo, estas partes devem ser levadas em consideração e notemos que podem ser organizadas sem alguma limitação. Já para as partes restantes, de largura $n-r$, para que não tenham como separar, devem ser completados apenas com blocos retangulares. Agora vejamos qual é o resultado obtido para expressão $f_n^2 - f_{n-r} \cdot f_{n+r}$ de acordo com a paridade de $n-r$.

- Caso $n-r$ seja par, para que não seja possível separar, $B^-$ deve ser formado por blocos retangulares e $A^+$ tem, da $(r-1)$-ésima à $(n+1)$-ésima largura, também apenas blocos retangulares. Isso nos da uma possibilidade de organização para este local em cada canteiro. E para as posições restantes em $A^+$? Na parte esquerda de $(r-1)$, temos $r-1$ espaços para organizar os blocos, dando à esta parte $f_{r-1}$

maneiras distintas. Para a parte direita de $n+1$, temos da posição $n+2$ ao $n+r$ para organizar os blocos, dando à esta parte $r-1$ de largura, resultando $f_{r-1}$ maneiras distintas. Logo, utilizando o princípio fundamental da contagem no canteiro $A^+$, que tem largura $n+r$, temos $f_{n+r} = f_{r-1} \cdot 1 \cdot f_{r-1} = f_{r-1}^2$ possibilidades. Já para o canteiro $B^+$, por ser composto apenas por retângulos, temos $f_{n-r} = 1$.

Agora, como não há separação entre $A^+$ e $B^-$, então não encontra-se formas de obter as partes $A_1$ e $B_1$ destes. Logo, também não há como conseguir $A$ e $B$ de largura $n$, resultando em $f_n = 0$.

FIGURA 36 – IMAGEM QUE RETRATA A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA OS CANTEIROS $A^+$ E $B^-$ ONDE NÃO É POSSÍVEL SEPARÁ-LOS



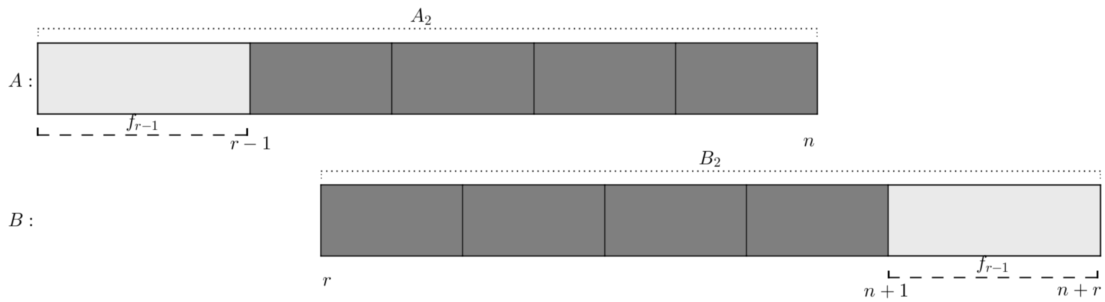

FONTE: Elaborada pelo autor

Logo, $f_n^2 - f_{n-r} \cdot f_{n+r} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot f_{r-1}^2 = -f_{r-1}^2$ formas de organizar.

- Caso $n-r$ seja ímpar, para que não seja possível separar, consideramos, no canteiro $A$, que os blocos da $(r-1)$-ésima posição ao $n$-ésimo sejam retangulares e, no canteiro $B$, sejam retangulares também os blocos ocupando $(r)$-ésima até $(n+1)$-ésima posição. Isso nos da uma possibilidade de organização para estes locais em cada canteiro. Cabe ainda verificar a quantidade de maneiras de organizar os blocos nas posições restantes. Para a parte esquerda de $A$, temos até a largura $r-1$ para distribuir as peças, resultando em $f_{r-1}$ maneiras distintas. Para $B$, da posição $n+2$ ao $n+r$, temos também $r-1$ células para organizar os blocos, que resulta $f_{r-1}$ maneiras distintas. Logo, para as $n$ células totais de $A$, utilizando o princípio fundamental da contagem, temos $f_n = f_{r-1} \cdot 1 = f_{r-1}$. Para as $n$ células totais de $B$, também utilizando o princípio fundamental da contagem, temos $f_n = 1 \cdot f_{r-1} = f_{r-1}$.

  Agora, como não há separação entre $A$ e $B$, então não encontra-se formas de obter as partes $A_1$ e $B_1$ e, consequentemente, também não há como conseguir $A^+$ e $B^-$ de largura $n+r$ e $n-r$, resultando em $f_{n-r} \cdot f_{n+r} = 0$.

FIGURA 37 – IMAGEM QUE RETRATA A DISTRIBUIÇÃO DE BLOCOS PARA OS CANTEIROS $A$ E $B$ ONDE NÃO É POSSÍVEL SEPARÁ-LOS




FONTE: Elaborada pelo autor

Logo, $f_n^2 - f_{n-r} \cdot f_{n+r} = f_{r-1} \cdot f_{r-1} - 0 \cdot 0 = f_{r-1}^2$ formas de organizar.

Dos dois itens anteriores, temos $f_n^2 - f_{n-r} \cdot f_{n+r} = (-1)^{n-r+1} \cdot f_{r-1}^2;\ n, r \in \mathbb{N}$.

# 4 IDENTIDADES ENVOLVENDO FIBONACCI E MDC

Neste capítulo apresentaremos duas identidades onde veremos a relação entre o máximo divisor comum com os números da sequência de Fibonacci. Para ambos, utilizamos a definição tradicional da sequência de Fibonacci que é representado por $F_k$. Na primeira identidade, vemos esta relação para dois naturais consecutivos ($n$ e $n+1$) em $F_k$. Na segunda identidade, vemos esta relação para qualquer dois naturais e, além disto, apresentamos a semelhança desta com o algoritmo euclidiano.

## 4.1 IDENTIDADE 10

$$\mathrm{mdc}(F_{n+1}, F_n) = F_{\mathrm{mdc}(n+1,n)} = 1; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Demonstraremos a identidade $\mathrm{mdc}(F_{n+1}, F_n) = F_{\mathrm{mdc}(n+1,n)} = 1$ por Indução Finita sobre $n$.

1. Para $n = 0$, temos $\mathrm{mdc}(F_{0+1}, F_0) = \mathrm{mdc}(F_1, F_0) = \mathrm{mdc}(1, 0) = 1 = F_1 = F_{\mathrm{mdc}(1,0)}$.
2. Supondo que para certo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale $\mathrm{mdc}(F_{k+1}, F_k) = F_{\mathrm{mdc}(k+1,k)} = 1$. Devemos mostrar que para $n = k+1$, teríamos verdadeira a relação $\mathrm{mdc}(F_{k+2}, F_{k+1}) = F_{\mathrm{mdc}(k+2,k+1)} = 1$.

Por um lado, vimos na propriedade $1$ que o máximo divisor comum de dois naturais consecutivos é igual a um, logo, temos que $mdc(k+2, k+1) = 1$. Como consequência, $F_{mdc(k+2,k+1)} = F_1 = 1$.

Por outro lado, temos que $mdc(F_{k+2}, F_{k+1}) = mdc(f_{k+1}, f_k)$, por conta da relação entre as duas sequências Fibonacci definidas recursivamente. Porém, $mdc(f_{k+1}, f_k) = mdc(f_k \cdot f_1 + f_{k-1} \cdot f_0, f_k)$, por conta da terceira identidade. Mas $mdc(f_k \cdot f_1 + f_{k-1} \cdot f_0, f_k) = mdc(f_k \cdot 1 + f_{k-1} \cdot 1, f_k) = mdc(f_k + f_{k-1}, f_k) = mdc(f_{k-1}, f_k)$, a última igualdade se dá por conta da propriedade $2$. Como $mdc(f_{k-1}, f_k) = mdc(F_k, F_{k+1})$ pela relação entre as duas sequências Fibonacci e, pela hipótese de indução, que $mdc(F_k, F_{k+1}) = 1$, temos que $mdc(F_{k+2}, F_{k+1}) = 1$.

Logo, $\mathrm{mdc}(F_{k+2}, F_{k+1}) = 1 = F_{\mathrm{mdc}(k+2,k+1)}$.

O resultado imediato desta identidade é que, tomados quaisquer dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, o máximo divisor comum destes é sempre igual a um, ou seja, eles são primos entre si. Tal relação transparece uma semelhança ao observar o conjunto dos naturais, uma vez que dois naturais consecutivos são primos entre si.

## 4.2 IDENTIDADE 11

$\mathrm{mdc}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{mdc}(n,m)}$; $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e ao menos um destes difere de zero

Demonstraremos esta identidade separando-o em dois casos: onde $n$ e $m$ sejam múltiplos e onde não sejam múltiplos.

- Suponha que $n$ seja múltiplo do $m$. Logo, existe $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $n = q \cdot m$.

Provaremos por indução finita sobre $q$ que $F_n = F_{qm}$ é múltiplo de $F_m$, ou seja, que existe $x \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ F_{qm} = x \cdot F_m$.

1. Para $q = 0$, temos $F_n = F_{qm} = F_{0m} = F_0 = 0 = 0 \cdot F_m$.
2. Supondo que para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vale $F_n = F_{km} = x_1 \cdot F_m$, onde $x_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Devemos mostrar que para $q = k + 1$, teríamos verdadeira a relação $F_n = F_{qm} = F_{(k+1)m} = x_2 \cdot F_m$, onde $x_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Temos que, para $q = k + 1$, $F_n = F_{qm} = F_{(k+1)m} = F_{km+m} = f_{km+m-1}$, sendo a última igualdade devido relação entre as duas sequências Fibonacci apresentadas. Pela terceira identidade, temos que $f_{(km)+(m-1)} = f_{km} \cdot f_{m-1} + f_{km-1} \cdot f_{m-2}$ e, pela relação entre as duas sequências Fibonacci, chegamos em $f_{km} \cdot f_{m-1} + f_{km-1} \cdot f_{m-2} = F_{km+1} \cdot F_m + F_{km} \cdot F_{m-1}$. Como por hipótese de indução nos garante que existe $x_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ onde $F_{km} = x_1 \cdot F_m$, então $F_{km+1} \cdot F_m + F_{km} \cdot F_{m-1} = F_{km+1} \cdot F_m + (x_1 \cdot F_m) \cdot F_{m-1} = F_m \cdot (F_{km+1} + x_1 \cdot F_{m-1})$. Como existe $x_2 = (F_{km+1} + x_1 \cdot F_{m-1}) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $F_n = F_{qm} = F_{(k+1)m} = F_m \cdot x_2$. Logo, $F_{qm}$ é múltiplo de $F_m$.

Por $F_{qm}$ ser múltiplo de $F_m$, então $mdc(F_n, F_m) = mdc(F_{qm}, F_m) = mdc(x \cdot F_m, F_m)$. Mas, pela propriedade $4$, temos que $mdc(x \cdot F_m, F_m) = F_m$. Como $mdc(q \cdot m, m) = m$, também pela propriedade $4$, então $F_m = F_{mdc(q \cdot m, m)} = F_{mdc(n,m)}$. Logo, $mdc(F_n, F_m) = F_{mdc(n,m)}$.

- Suponha que $n$ e $m$ não sejam múltiplos e, por questão de ordem, $n > m$. Logo, podemos escrever $n = q \cdot m + r$ onde $r \in \mathbb{N}$ e $r \leqslant m - 1$.

Então, $mdc(F_n, F_m) = mdc(F_{qm+r}, F_m) = mdc(f_{qm-1+r}, F_m)$, onde a última se da pela relação entre as duas sequências Fibonacci. Porém, temos que $mdc(f_{qm-1+r}, F_m) = mdc(f_{qm-1} \cdot f_r + f_{qm-2} \cdot f_{r-1}, F_m)$ por conta da terceira identidade. Logo, $mdc(f_{qm-1} \cdot f_r + f_{qm-2} \cdot f_{r-1}, F_m) = mdc(F_{qm} \cdot F_{r+1} + F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$ se dá novamente pela relação entre as duas sequências Fibonacci. Pela propriedade $5$, temos que $mdc(F_{qm} \cdot F_{r+1} + F_{qm-1} \cdot F_r, F_m) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$. Das passagens realizadas até esta parte, chegamos que $mdc(F_n, F_m) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$.

Provaremos que $mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m) = mdc(F_r, F_m)$. Partindo do lado direito da igualdade, $mdc(F_r, F_m) = mdc(1 \cdot F_r, F_m) = mdc(mdc(F_{qm}, F_{qm-1}) \cdot F_r, F_m)$, uma vez que $mdc(F_{qm}, F_{qm-1}) = 1$, pois $qm$ e $qm - 1$ são números consecutivos e, pela identidade anterior, $F_{qm}$ e $F_{qm-1}$ são primos entre si. Continuando, temos que $mdc(mdc(F_{qm}, F_{qm-1}) \cdot F_r, F_m) = mdc(mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_{qm} \cdot F_r), F_m)$ pela propriedade $3$ e, por consequência, $mdc(mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_{qm} \cdot F_r), F_m) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, mdc(F_{qm} \cdot F_r, F_m))$ pela associatividade do máximo divisor comum. Mas temos que $mdc(F_{qm} \cdot F_r, F_m) = mdc(x \cdot F_m \cdot F_r, F_m)$ por $F_{qm}$ ser múltiplo de $F_m$ e que $mdc(x \cdot F_m \cdot F_r, F_m) = F_m$ por conta da propriedade $4$. Logo, temos que $mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, mdc(F_{qm} \cdot F_r, F_m)) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$. Chegando então que $mdc(F_r, F_m) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$.

Como $mdc(F_n, F_m) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$ e $mdc(F_r, F_m) = mdc(F_{qm-1} \cdot F_r, F_m)$, então $mdc(F_n, F_m) = mdc(F_r, F_m)$.

A última igualdade nos garante a veracidade da identidade desta seção. Para isto, consideremos $\mathrm{mdc}(n, m) = g$. Aplicando o algoritmo euclidiano, chegamos que $\mathrm{mdc}(n, m) = \mathrm{mdc}(m, r)$ resulta, eventualmente, em $mdc(n, m) = mdc(m, r) = \cdots = \mathrm{mdc}(g, 0) = g$. Então o algoritmo apresentado, onde $mdc(F_n, F_m) = \mathrm{mdc}(F_m, F_r)$, acaba resultando, eventualmente, em $\mathrm{mdc}(F_n, F_m) = \mathrm{mdc}(F_m, F_r) = \cdots = \mathrm{mdc}(F_g, F_0)$. Como $F_0 = 0$, então $\mathrm{mdc}(F_n, F_m) = \mathrm{mdc}(F_m, F_r) = \cdots = \mathrm{mdc}(F_g, F_0) = \mathrm{mdc}(F_g, 0) = F_g$. Logo, temos que $\mathrm{mdc}(F_n, F_m) = \mathrm{mdc}(F_m, F_r) = \cdots = \mathrm{mdc}(F_g, F_0) = \mathrm{mdc}(F_g, 0) = F_g = F_{\mathrm{mdc}(g,0)} = \cdots = F_{\mathrm{mdc}(m,r)} = F_{\mathrm{mdc}(n,m)}$. Portanto, $\mathrm{mdc}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{mdc}(n,m)}$.

Observemos que a identidade demonstrada nos garante que o máximo divisor comum entre dois números da sequência de Fibonacci também é um número desta sequência. Para obter qual é este número, devemos localizar quais termos, em $F_k$, representam os números envolvidos no máximo divisor comum. Estabelecido os termos, basta então efetuar o máximo divisor comum entre estes, utilizando o algoritmo euclidiano. O resultado é o termo referente ao número da sequência.

Como exemplo, tomemos $46368$ e $2584$ dois números da sequência de Fibonacci que correspondem a $F_{24} = 46368$ e $F_{18} = 2584$. A identidade apresentada neste capítulo nos garante que $\mathrm{mdc}(46368, 2584) = \mathrm{mdc}(F_{24}, F_{18}) = F_{\mathrm{mdc}(24,18)}$. Mas facilmente conseguimos identificar, utilizando o algoritmo euclidiano, que $\mathrm{mdc}(24, 18) = 6$. Logo, $F_{\mathrm{mdc}(24,18)} = F_6 = 8$. Então temos que $\mathrm{mdc}(46368, 2584) = 8$.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia principal deste texto foi, além de divulgar algumas identidades envolvendo os números da sequência de Fibonacci, demonstrá-los utilizando prova combinatória ou o princípio da indução finita.

Vimos que podemos aplicar o estudo sobre a distribuição de blocos quadrados e retangulares em canteiros para demonstrar diversas destas identidades. Com isto, por aplicar um método apenas para estas, a intenção é facilitar não só a leitura do texto, mas também de manter a continuidade do processo de aprendizagem sobre o decorrer de cada identidade.

Para as identidades envolvendo o máximo divisor comum e os números da sequência de Fibonacci, utilizamos principalmente do princípio da indução finita como fator importante da demonstração. Na última identidade, identificamos semelhanças entre esta e a equação utilizada para o algoritmo euclidiano, de modo que possamos localizar o resultado do máximo divisor comum entre quaisquer dois números da sequência de Fibonacci e o resultado será também um número de Fibonacci. Tal resultado também facilita o cálculo do máximo divisor de dois números de Fibonacci, haja vista o exemplo utilizado para este capitulo.

# Referências

BENJAMIN, A. T; QUINN, J. J. Delving Deeper: Revisiting Fibonacci and Related Sequences. **The Mathematics Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 99, n. 5, p. 357–361, 2006.

BOGOMOLNY, A. **Cut The Knot**: Fibonacci Tilings. 2012. : https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.shtml. Acesso em: 15 dez. 2021.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.