UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CAMPUS MARCO ZERO DO EQUADOR
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ARNALDO ALMEIDA DA NATIVIDADE

FRACTAL: UM MODELO PARA APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA

MACAPÁ – AP
2022

ARNALDO ALMEIDA DA NATIVIDADE

FRACTAL: UM MODELO PARA APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá- UNIFAP, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, como parte da exigência para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ – AP

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborada por Jamile da Conceição da Silva – CRB-2/1010

Natividade, Arnaldo Almeida da.
N278f Fractal: um modelo para aprendizagem no ensino da matemática / Arnaldo Almeida da Natividade. - 2022.
1 recurso eletrônico. 99 folhas.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Campus Marco Zero, Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Programa de Pós-graduação em Matemática, Macapá, 2022.
Orientador: Professor Doutor José Cárdenas Sótil

Modo de acesso: World Wide Web.
Formato de arquivo: Portable Document Format (PDF).

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria – Estudo e ensino. 3 Fractais. I. Sótil, José Cárdenas, orientador. II. Título.

Classificação Decimal de Dewey. 22 ed. 516.007

NATIVIDADE, Arnaldo Almeida da. **Fractal**: um modelo para aprendizagem no ensino da matemática. Orientador: José Cárdenas Sótil. 2022. 99 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Campus Marco Zero, Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Macapá, 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **Arnaldo Almeida da Natividade**, intitulada: *FRACTAL: UM MODELO PARA APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA*, após terem inquirido e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós Graduação.

Macapá, 29 de março de 2022.

gov.br
Documento assinado digitalmente
JOSE WALTER CARDENAS SOTIL
Data: 04/04/2022 21:41:16-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil
Presidente da Banca Examinadora (PROFMAT/UNIFAP)

gov.br
Documento assinado digitalmente
CARLOS ALEXANDRE SANTANA OLIVEIRA
Data: 05/04/2022 11:13:12-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira
Avaliador externo (IFAP)

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco
Avaliador interno (PROFMAT/UNIFAP)

Foi pensando nas pessoas mais importantes da minha vida que executei esta dissertação, por isso dedico este trabalho aos professores, acadêmicos de matemática e alunos da educação básica.

Agradeço primeiramente a Deus por me proporcionar saúde nesse momento tão difícil em que o mundo está passando por conta da pandemia de covid-19 e por me dar forças para chegar até o final deste trabalho.

Sou grato à minha família, principalmente à minha esposa, por sempre me incentivar durante a produção deste trabalho.

Quero agradecer também à Universidade e a todo o corpo docente do curso, em especial ao meu orientador que sempre me incentivou e me orientou satisfatoriamente.

Se as leis da Matemática referem-se à realidade, elas não estão corretas; e, se estiverem corretas, não se referem à realidade.

Albert Einstein

RESUMO

Um dos maiores desafios da modernidade é inovar e melhorar o ensino e aprendizagem dos alunos, principalmente nas áreas de exatas, em que a dificuldade e a complexidade da teoria se mostram mais evidentes, assim associando a teoria com a prática da rotina humana faz do estudo dos fractais uma proposta inovadora do ensino da matemática. Assim, este trabalho tem como problemático o que garante que a Geometria Fractal pode ser utilizada como uma alternativa que possibilite a aprendizagem mais interativa e eficaz. Objetivando verificar a teoria de Fractal, fornecendo alternativas e sugestões de se ministrar conteúdos matemáticos de forma mais atrativa aos alunos e os objetivos específicos: entender o surgimento dos fractais, descobrir suas características e comportamentos, utilizar os recursos pedagógicos digitais (Paint e Python) para a construção dos fractais com abordagem nos conteúdos matemáticos. Por meio de uma pesquisa é de caráter qualitativo, por meio da proposta pedagógica, baseadas em um referencial teórico e que têm o intuito de promover melhorias ou avanços nas práticas. Para obter dados desta pesquisa, utilizou-se pesquisa bibliográfica e estudos de casos. Inclusive trazendo propostas de prática pedagógica com o uso do Paint, ferramenta do Windows, e do Python como forma de ensino e aprendizagem dos fractais para os alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Fractais. Paint. Ferramenta. Teoria. Alunos.

ABSTRACT

One of the greatest challenges of modernity is to innovate and improve the teaching and learning of students, especially in the areas of exact sciences, where the difficulty and complexity of theory are more evident, thus associating theory with the practice of human routine makes the study of fractals an innovative proposal for teaching mathematics. Thus, this work has as problematic what guarantees that Fractal Geometry can be used as an alternative that allows a more interactive and effective learning. Aiming to verify the theory of Fractal, providing alternatives and suggestions to teach mathematical content in a more attractive way to students and the specific objectives: to understand the emergence of fractals, discover their characteristics and behaviors, use digital pedagogical resources (Paint and Python) to the construction of fractals with an approach to mathematical content. Through a qualitative research, through the pedagogical proposal, based on a theoretical framework and aimed at promoting improvements or advances in practices. To obtain data from this research, bibliographic research and case studies were used. Including proposals for pedagogical practice using Paint, a Windows tool, and Python as a way of teaching and learning fractals for high school students.

Keywords: Fractals. Paint. Tool. Theory. Students.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Construção do Triângulo de Sierpinski.. 29
Figura 2.2: Triângulo de Sierpinski.. 30
Figura 2.3: Autossimilaridade no Triângulo de Sierpinski................................ 30
Figura 2.4: Curva de Peano.. 31
Figura 2.5: Georg Cantor... 32
Figura 2.6: Poeira de Cantor.. 32
Figura 2.7: Helge von Koch.. 33
Figura 2.8: Curva de Koch.. 34
Figura 2.9: Floco de Neve de Koch... 34
Figura 2.10: Benoit Mandelbrot... 36
Figura 2.11: Histórico dos Fractais... 37
Figura 3.1: Lewis Fry Richardson e Benoit Mandelbrot.................................... 39
Figura 3.2: Mapa do Litoral Brasileiro.. 39
Figura 3.3: Mapa do Litoral brasileiro com régua de 500km............................. 40
Figura 3.4: Mapa do Litoral brasileiro com uma régua de 1m........................... 40
Figura 3.5: Mapa do Litoral brasileiro com distância direta............................. 41
Figura 3.6: Estrutura pulmonar... 42
Figura 3.7: Pulmão humano.. 42
Figura 3.8: Fragmentação vegetal.. 44
Figura 3.9: Ramificação vegetal.. 45
Figura 3.10: Efeitos Especiais no cinema... 46
Figura 3.11: Superfície Terrestre... 47
Figura 3.12: Crochê Hiperbólico.. 48
Figura 3.13: Bolsa de Valores sob o óptico fractal... 49
Figura 3.14: Fractal apresentado por Batty... 50
Figura 3.15: Cidade Fractal.. 51
Figura 3.16: Leão em Fractal.. 52
Figura 3.17: Baleia e a rugosidade... 52
Figura 3.18: Ostra em Fractal.. 53
Figura 3.19: Lagarto em Fractal... 53
Figura 4.1 Programa MS Paint... 55

Figura 4.2 Waclack Sierpinski......56
Figura 4.3 Triângulo fractal......56
Figura 4.4 Pesquisando triângulo equilátero......57
Figura 4.5 - Inserindo a figura no paint......58
Figura 4.6 - Arrastando a figura para baixo......58
Figura 4.7 - Colando dois novos triângulos......58
Figura 4.8 - Semente do triângulo de Sierpinski......59
Figura 4.9 - Selecionando o triângulo......59
Figura 4.10 - Replicando dois novos triângulos......60
Figura 4.11 - Segunda iteração do triângulo de Sierpinski......60
Figura 4.12 - Diminuindo o zoom do paint......61
Figura 4.13 - Área de trabalho do Paint ampliada......61
Figura 4.14 - Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração......62
Figura 4.15 - Triângulo fractal na quarta iteração no paint......62
Figura 4.16 - Triângulo fractal na quinta iteração no paint......63
Figura 4.17 - Inserindo um primeiro segmento......64
Figura 4.18 - Seleção retangular e seleção transparente......64
Figura 4.19 - Segmento colado......65
Figura 4.20 - Girando 90º à direita......65
Figura 4.21 - Segmento justapostos......65
Figura 4.22 - Novo objeto colado......66
Figura 4.23 - Semente do fractal de Levy......66
Figura 4.24 - Segunda iteração do fractal de Levy......67
Figura 4.25 - Terceira iteração do fractal de Levy......67
Figura 4.26 - Quarta iteração do Fractal de Levy......67
Figura 4.27 - Quinta iteração do Fractal de Levy......68
Figura 4.28 - Sexta iteração do fractal de Levy......68
Figura 4.29 - Sétima iteração do fractal de Levy......69
Figura 4.30 - Oitava iteração do fractal de Levy......69
Figura 4.31 - Nona iteração do fractal de Levy......69
Figura 4.32 - Décima iteração do fractal de Levy......70
Figura 4.33 - Décima primeira iteração do fractal de Levy......70
Figura 4.34 - Décima segunda iteração do fractal de Levy......71
Figura 4.35 - Décima terceira iteração do fractal de Levy......71

Figura 4.36 - Décima quarta iteração do fractal de Levy. 71
Figura 4.37: Fractal Triminó..72
Figura 4.38: Tela do Paint com quadrado.. 73
Figura 4.39: Triminó não reto.. 73
Figura 4.40: Triminó nível 2.. 73
Figura 4.41: Triminó nível 3.. 73
Figura 4.42: Fractal Pentominó em T - nível 1... 73
Figura 4.43: Fractal Pentominó – nível 2...75
Figura 4.44: Pentaminó - nível 3...75
Figura 4.45: Heptaminó - nível 1...76
Figura 4.46: Heptaminó - nível 2...76
Figura 4.47: Heptaminó - nível 3...76
Figura 5.1: Os principais conjuntos numéricos..78
Figura 5.2: Conjunto de Julia (c = −1)...86
Figura 5.3. Conjunto de Julia para $c = -0,744 + 0,148i$.................................... 87
Figura 5.4. Conjunto de Julia para $c = -0,8 + 0,156i$.. 87
Figura 5.5. Conjunto de Julia para $c = -1 + 0i$...87
Figura 5.6. Conjunto de Julia para $c = -0,8 - 0,25i$..88
Figura 5.7: Figura original à esquerda e Figura recortada à direita..................91
Figura 5.8: Arquivos recebidos das 8 partes do fractal......................................92
Figura 5.9: Junção das Figuras para obter o fractal.. 93

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Número de segmentos da Poeira de Cantor.....................................33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais..23

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO... 17

2 FRACTAIS.. 20

2.1 Educação Matemática e Diretrizes... 20

2.2 Educação Matemática e algumas correntes pedagógicas................................. 24

2.3 Construtivismo na visão de Jean Piaget.. 26

2.4 Educação Matemática com Geometria Fractal... 27

2.5 Características dos Fractais.. 28

2.6 Matemáticos relacionados com fractais.. 29

2.7 Histórico dos fractais.. 36

3 O MUNDO FRACTAL 36

3.1 Medida do litoral.. 36

3.1.1. Aspectos Matemáticos... 36

3.2 Pulmões.. 41

3.3 Florestas... 43

3.3.1 Análise Fractal da Fragmentação Florestal.. 43

3.4 Cinema.. 45

3.4.1 Os fractais no Cinema.. 45

3.5 Tricô... 47

3.5.1 Geometria hiperbólica e crochê... 47

3.6 Bolsa de valores.. 48

3.6.1 O mercado financeiro sob a óptica dos fractais.. 48

3.7 Cidades... 50

3.7.1 As Curvas das Cidades Fractais.. 50

3.8 Animais... 51

3.8.1 A fauna Fractal que nos rodeiam... 51

4 CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM O MICROSOFT PAINT........................... 55

4.1 Triângulos no Paint semelhante ao de Sierpinski... 55

4.1.1 proposta de construção do Triângulo de Sierpinski usando o Paint.............. 57

4.2 O fractal de Levy.. 63
4.2.1 Passo a passo da construção do Fractal de Levy no MS Paint.................... 63
4.3. Polimonós.. 72
4.3.1 Fractal Triminó.. 72
4.3.1.1 Construção no PAINT do Triminó.. 72
4.3.2 Fractal Pentaminó em T.. 74
4.3.3 Fractal Heptaminó em H... 75
5 CONJUNTOS DE JULIA E OS FRACTAIS... 78
5.1 Conceitos Preliminares... 78
5.2 Conjuntos de Julia.. 81
5.3 O Conjunto de Julia.. 86
5.4 Algoritmo em Python.. 88
5.5 Proposta didática para sala de aula... 90
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 94
REFERÊNCIAS.. 96

1 INTRODUÇÃO

O estudo da Matemática é um tanto que complexo para os alunos, principalmente, para os de Ensino Médio e ingressantes do ensino superior, por isso investir em meios e práticas modernas e simples de ensino e aprendizagem se faz necessário.

Ao trabalhar com a geometria fractal em suas aulas, o professor de matemática fornecerá a oportunidade para que o aluno possa vivenciar situações concretas, uma vez que há um diálogo constante desta “nova geometria” com diversas áreas do conhecimento, inclusive com outros ramos da matemática. Embora não seja obrigatória na educação básica, a geometria fractal proporciona ao professor de matemática a possibilidade de ampliar o diálogo com outras áreas do conhecimento e de apresentar situações problemas em contextos reais para seus alunos.

O ensino da Matemática deve ir muito mais além do que limitar-se a aspectos teóricos tradicionalmente desenvolvidos, agregando-os ao uso das tecnologias. Embora estudos sobre conhecimentos teóricos tenham impulsionado a evolução dos conhecimentos matemáticos, não esquecendo que a Matemática envolve um conceito prático atrelado às situações fáticas humanas. Segundo Boyer (1996, p. 1):

> [...] Noções primitivas relacionadas com o conceito de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres das matemáticas se encontram em forma de vida que podem datar milhões de anos antes da humanidade.

Devido à maneira tradicionalista de ensino, os alunos da Educação Básica passam por diversas dificuldades em se compreender de forma clara e objetiva os conteúdos da teoria matemática. Sobre a necessidade da prática de métodos inovadores de ensino, DOBROWOLSKI e BERTONI PINTO (2009, p. 2) comentam:

> [...]Para muitos professores das escolas brasileiras, a prática de ensino parece estar estática no tempo e espaço, quando se sabe que ao longo da história a disciplina Matemática defrontou-se com reformas que incidiram em mudança nos conteúdos e métodos que refletiram positivamente na aprendizagem do educando.

Diante da problemática apresentada, utilizaremos neste trabalho, os fractais clássicos como modelo matemático, baseado em suas construções, pois apresentam instrumentos didáticos eficientes no aprendizado dos alunos, tendo como objetivo orientar/encaminhar sugestões de atividades que possam ser realizadas em sala de aula com alunos do ensino médio, utilizando avanços tecnológicos para que o objetivo seja alcançado.

Por muito tempo, a teoria e a prática da geometria euclidiana eram consideradas a melhor forma de retratação da realidade humana. Isso mudou com a descoberta de geometrias não euclidianas visto que houve uma inovação ao analisar e representar objetos que descrevem certas formas e fenômenos naturais, como os fractais, por exemplo (FERREIRA, 2011).

Segundo Ferreira (2011), a proposta dos fractais surgiu dos estudos de alguns cientistas no período compreendido entre 1857 e 1913. Partindo destas teorias, foi possível conhecer alguns objetos geométricos. Ferreira (2011) destaca que em 1872, Karl Weierstrass, em seus estudos, descobriu uma função contínua, porém não diferencial, na qual seu gráfico gera um fractal.

Já no ano de 1904, Helge von Koch, não se deu por vencido com essa definição abstrata e analítica de Weierstrass, e criou o floco de neve de Koch, que será abordado com mais detalhes no capítulo 2 deste trabalho.

De acordo com Dalla (2012), foram realizados outros trabalhos relacionados aos fractais, mas esta ciência só avançou por completo a partir dos anos 60, tendo como auxílio à computação. Destaca-se, ao utilizar esta técnica, Benoît Mandelbrot, responsável por criar o termo fractal e pelo conjunto fractal que recebe o seu nome.

Mas afinal, o que garante que a Geometria Fractal pode ser utilizada como uma alternativa que possibilite a aprendizagem mais interativa e eficaz? Para responder a essa pergunta, produzimos esse trabalho tendo como:

- Objetivo geral: Verificar a teoria de Fractal, fornecendo alternativas e sugestões para ministrar conteúdos matemáticos de forma mais atrativa aos alunos;
- Objetivos específicos: entender o surgimento dos fractais, descobrir suas características e comportamentos, utilizar os recursos pedagógicos digitais (Paint e Python) para a construção dos fractais com abordagem nos conteúdos matemáticos.

Podendo ter como hipóteses: se o conteúdo de Progressões com Fractais, é uma alternativa, pois é uma modalidade de ensino instigadora, a qual os alunos participam de forma mais ativa em sua própria construção de conhecimento. Ou os agentes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem ensinam e aprendem em locais variados, promovendo a autonomia para que possam trabalhar em grupos e compartilhar conhecimentos? Se possibilita a personalização do ensino com a utilização de diferentes recursos didáticos?

Esta pesquisa é de caráter qualitativo, por meio da proposta pedagógica. Para Damiani et al. (2013), as intervenções pedagógicas são inovações propositadamente concretizadas por professores em suas práticas pedagógicas, baseadas em um referencial teórico e que têm o intuito de promover melhorias ou avanços nas práticas. Para obter dados desta pesquisa, utilizou-se pesquisa bibliográfica e estudos de casos.

Além desta introdução, nessa dissertação, há quatro capítulos e as considerações finais. Após a introdução, passando para o capítulo 2, destacam-se os fractais com a contextualização histórica, as diretrizes e as concepções pedagógicos que a norteiam. No 3º capítulo tem-se o mundo fractal que aborda diversas situações e fenômenos naturais em que os fractais se destacam. No capítulo 4, abordamos a construção de alguns fractais clássicos no Paint. Além disso, no 5º capítulo tem-se o Conjunto de Julia e os fractais, com a utilização do Python com sugestão de atividades para sala de aula. Por fim, as conclusões obtidas com este estudo.

2 FRACTAIS

Neste capítulo abordaremos as diretrizes voltadas para a Educação Básica, em especial as que tratam da matemática, com ênfase na sistematização do ensino, finalidade da matemática e nos objetivos a serem alcançados pelos alunos. Destacamos também as correntes pedagógicas adotadas no Brasil, as quais asseguram que a utilização dos fractais em sala é uma excelente alternativa para que o ensino da matemática possa ser visto de forma mais atrativa, como é o caso da visão construtivista de Jean Piaget. Por fim, abordaremos os fractais, destacando suas características e os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desta geometria.

2.1 Educação Matemática e Diretrizes

A matemática está presente em todas as ações humanas, mas com um diferencial, sem definir a finalidade de cada ação. Tem uma doutrina complexa, que em determinados momentos não fica claro para os alunos. A matemática não é ciência pronta e acabada, com respostas fechadas. O aprendizado da matemática é interessante por serem problemas com soluções, novas respostas para novas descobertas.

Como os problemas são grandes geradores de conhecimento devemos nos recorrer a eles constantemente. As ideias matemáticas possuem grandes histórias, desde a Grécia Antiga e Babilônia sendo aplicada até a atualidade pelas novas ciências com alguns aperfeiçoamentos.

Quando tratamos de sistematização da metodologia da matemática é necessário o amparo das leis e diretrizes curriculares nacionais.

Na Lei de Diretrizes e da Educação Nacional de 20 de dezembro de 1994, a educação escolar compõe-se de:

> Educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio; Educação superior. A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores. (adaptado de BRASIL, 1994).

Com duração mínima de três anos, o ensino médio é a etapa final da educação básica e suas finalidades são:

> A consolidação e o detalhamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática de cada disciplina. (BRASIL, 1994)

Nesse sentido, a Matemática é disciplina base para a Física, Química, Geografia, Artes, dentre outras, auxiliando no desenvolvimento raciocínio logico. Dessa forma, a Matemática serve para a cidadania, além de ser incentivadora de agentes de transformação.

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, explicita e implicitamente. Desde ao acordar e observar o despertador, estamos utilizando a matemática. “Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas da atividade humana”. (BRASIL, 2004, p. 3).

Quanto às competências gerais a Base Nacional Comum Curricular- BNCC, como forma de garantir o Componente Curricular Comum, propõe que as finalidades alcançadas sejam:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, seja atividades cotidianas, seja fatos da Natureza Humana, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

A Matemática tem o papel de retomar os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, oportunizando a continuidade dos estudos; preparando o estudante para a vida como cidadão e acesso ao mercado de trabalho, sendo capaz de adaptação com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores e contribuindo para a evolução da formação ética e o desenvolvimento do pensamento crítico e intelectual do aluno, ao passo que relaciona teoria e prática para a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos.

As Diretrizes Curriculares que regem a Educação preveem que a Matemática precisa ser desenvolvida de forma contextualizada e, preferencialmente de forma interdisciplinar para que sejam alcançados os objetivos propostos de Representação e comunicação.

A Contextualização sociocultural (BRASIL, 1996) para o desenvolvimento da capacidade de representação e comunicação é necessário:

> - Ler e interpretar textos de Matemática.
> - Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).
> - Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
> - Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
> - Produzir textos matemáticos adequados.
> - Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
> - Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. (BRASIL, 1996)

Desta forma é necessária a integração das disciplinas, incentivando o aluno a ler, escrever e interpretar as sequências matemáticas.

Ainda nas Diretrizes Curriculares está prevista que:

> Quanto aos objetivos, busca-se:
> 1. Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.)
> 2. Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> 3. Formular hipóteses e prever resultados.
> 4. Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> 5. Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> 6. Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> 7. Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (BRASIL, 1996)

Já para a contextualização social são exigidas:

> 1. Utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> 2. Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais.
> 3. Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 1996)

Dessa forma, a Matemática, como Ciência, tem um caráter formativo, na estruturação do pensamento e do raciocínio lógico visto que é uma ferramenta que acompanha em muitas atividades cotidianas do ser humano, tanto na própria matemática.

Segundo os PCNs:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para processos de pensamento e a aquisição de atitudes, podendo formar no aluno a resolução de problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL, 1999, p. 251)

Ainda nos PCNs, em relação à disciplina de Matemática:

> Além disso, tem um caráter instrumental quando é vista pelos alunos como técnicas e estratégias para serem aplicadas, assim como para a atividade profissional. Para que isso ocorra a matemática deve ser compreendida como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la". (BRASIL, 1999, p. 40)

No que diz respeito aos objetivos específicos da Matemática, os PCNs orientam:

> 1. Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> 2. Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> 3. Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática;
> 4. Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> 5. Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> 6. Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> 7. Estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento do currículo;

> 8. Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> 9. Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 1999.)

Para que estes objetivos sejam alcançados pretende-se construir o conhecimento de forma contextualizada e, principalmente, com significados concretos para a vida dos alunos mesmo que alguns conteúdos não apresentem estas características de fácil associação.

2.2 Educação Matemática e algumas correntes pedagógicas

Em relação às correntes pedagógicas há algumas divergências quantos às tendências adotadas no Brasil, como para Libâneo (1994) as classifica em liberais e Progressistas.

As liberais são divididas em tradicionais, Renovadora Progressiva, Renovadora não diretiva ou Escolanovista e a Tecnicista, enquanto a Progressista se divide em libertadora, libertária e crítico-social dos conteúdos (LIBÂNEO, 1994). Esta última teve e está sendo difundida com a criação da LDB destacando-se entre outros: Piaget, Vygotsky, Wallon e Montessori que defendem que o conhecimento se dá pela interação plena.

Já para Macedo (1994), existem duas visões que estão em pleno contraste: o construtivismo e o não construtivista.

> Visões não-construtivistas do conhecimento valorizam a transmissão; por isso mesmo, a linguagem é seu instrumento mais primoroso. Não poderia ser diferente. Quando uma pessoa ou uma comunidade supõe ter produzido um conhecimento sobre ou julgam que é importante transmiti-lo por alguém que não possui esse conhecimento, fazem pela via da linguagem. (MACEDO, 1994, p. 14)

É evidente que muitas vezes a linguagem é o melhor meio de transmissão de informações. O problema está na supervalorização desta ferramenta na transmissão de informações, como defendem os não-construtivistas. Para os construtivistas, o conhecimento se constrói pelas ações do sujeito que conhece. Para Macedo “o que importa é a ação de ler e interpretar o texto e não apenas aquilo, por ter se tornado linguagem, pôde ser transmitido por ele” (MACEDO, 1994, p. 15).

Para os nãos construtivistas, o conhecimento parte-se de já está constituída como objeto a ser constituído.

> Uma visão não-construtivista termina por assumir o conhecimento como uma teoria da representação da realidade, não importa se boa ou má. Ora, na perspectiva construtivista um conhecimento a respeito de algo só pode ocorrer enquanto uma teoria da ação, que produz esse conhecimento. E nessa teoria interessam, sobretudo, os aspectos lógicos e matemáticos da ação. Lógicos porque se trata de um sujeito ou uma sociedade construir ou reconstruírem os procedimentos necessários àquela produção. Tanto em termos físicos quanto em termos simbólicos algo só acontece se certos instrumentos ou meios forem coordenados no espaço e no tempo, de modo que as duas relações entre seus elementos produzam um resultado coerente com o objetivo. São matemáticos porque há uma “topologia”, uma “álgebra”, desses estados e posições, sem os quais algo não acontece, nem se constitui. Matemáticos porque há uma lei de composição que é estruturante do fenômeno que, enquanto tal, só se expressa em infinitas ações. (MACEDO, 1994, p. 18).

Na visão não construtivista a ação é induzida, enquanto na visão construtivista, ação espontânea do sujeito faz todo o sentido. Dentre as concepções teóricas não construtivistas destacam-se o racionalismo, o empirismo e o sócio interacionismo.

O racionalismo tem como foco os aspectos internos do indivíduo visto como oriundos da hereditariedade. Nesta concepção, o indivíduo tem a estrutura mental congênita.

A matemática é vista pelos racionalistas como instrumento racional para explicar a realidade. Partindo deste princípio, Descartes (1586-1650) elaborou um método dividido em quatro partes, baseado essencialmente na geometria:

> “O primeiro método era o de jamais acolher alguma coisa como a verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir os meus juízos que não se apresente tão clara e tão distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida. O segundo método era o de dividir em tantas parcelas quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las; O terceiro método era o de conduzir por ordem meus pensamentos começando pelos objetos mais simples de conhecer, para subir, pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros; O quarto método era o de fazer-me toda parte enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir” (Descartes, apud ABAGNANO, 2003).

O empirismo defende os aspectos exteriores ao indivíduo. Segundo esta concepção, o meio é o sujeito ao conhecimento, acreditando que as experiências são as principais formadoras de ideias. Dessa forma o conhecimento é transmitido e repassado pelos componentes dele e, por conta disto, o meio age sobre o sujeito.

Na perspectiva sócio interacionismo é tido como produção simbólica e material que tem lugar na dinâmica interativa. Para Vygotsky (1998), o desenvolvimento é alcançado por meio da linguagem. Sua concepção difere de a de Piaget, pois para ele é a aprendizagem que gera e promove o desenvolvimento, o que vem a implicar na relação sujeito-sujeito-objeto, isto é, a elaboração cognitiva se funda na relação externa (MOREIRA, 1999).

Para Vygotsky (1998), existem apenas duas ideias principais sobre o conhecimento formal na escola. A pré-história da aprendizagem escolar e o desenvolvimento proximal. Ao referir-se à pré-história da aprendizagem escolar, ele diz que o sujeito já desenvolveu alguma aprendizagem no cotidiano, faltando articular o conhecimento do dia a dia com o conhecimento formal, o que o chama de saber sistematizado universal. A zona de desenvolvimento proximal foi formulada dois níveis de desenvolvimento: um nível de desenvolvimento efetivo, obtido pelos processos já realizados; e o desenvolvimento potencial, quando o sujeito adquire do outro.

2.3 Construtivismo na visão de Jean Piaget

Jean Piaget (1896- 1980) grande conhecedor de Física, Biologia e Mecânica Quântica, criou a Epistemologia Genética para explicar a realidade de produção do conhecimento científico (PÁDUA, 2009, p. 22).

Para esta Ciência o homem, ao nascer, não consegue realizar qualquer operação de pensamento ou ato simbólico. Para Piaget, sujeito têm funções práticas, constituindo mutuamente na interação. O conhecimento é o resultado das relações recíprocas entre objeto e sujeito, surgindo, assim, as construções cognitivas constantes capazes de construir novas estruturas contínuas (PÁDUA, 2009, p. 25).

Segundo Oliveira e Gama:

> O homem aprende, quando a informação é processada pelos esquemas mentais e agregadas aos mesmos. O conhecimento construído vai sendo incorporado aos esquemas mentais, que são colocados para funcionar diante

> de situações desafiadoras e problematizadoras. (OLIVEIRA e GAMA, 2010, p. 255)

Desta forma, por meio dos conhecimentos já adquiridos e da relação (interação) com o mundo que o cerca, o aluno acaba encontrando suas próprias respostas na solução dos problemas.

Os próprios PCNs defendem a visão construtivista, quando trata dos rumos e desafios.

> Por volta de 1970 estabeleceu-se um núcleo conceitual teórico de diferentes correntes denominadas *construtivistas*, cujo pressuposto básico é tomar a aprendizagem como resultado da construção do conhecimento pelo aluno, processo em que se respeitam as ideias dos alunos prévias ao processo de aprendizagem. (BRASIL, 1998, p.48)

Ainda nos PCNs sobre o construtivismo:

> Esta proposta de condução do aprendizado tem sido aperfeiçoada de se levar em conta que o conhecimento científico envolve valores humanos, relaciona-se com a tecnologia e, mais em geral, com toda a vida em sociedade, de se enfatizar a organicidade conceitual das teorias científicas, de se explicitar a função essencial do diálogo e da interação social na produção coletiva. Tais redirecionamentos têm sido relevantes para a educação científica e matemática e, certamente, suas ideias influenciam o presente esforço de revisão de conteúdos e métodos para a educação científica. Será preciso, além disso, procurar suprir a carência de propostas interdisciplinares para o aprendizado, que tem contribuído para uma educação científica excessivamente compartimentada fazendo uso, por exemplo, de instrumentos com natural interdisciplinaridade, como os modelos moleculares, os conceitos evolutivos e as leis de conservação. (BRASIL, 1998, p. 48).

Não defendemos a visão construtivista como verdade absoluta, tampouco a visão não construtivista, mas sim como tendências complementares e fundamentais.

2.4 Educação Matemática com Geometria Fractal

A matemática nos dias de hoje vem sendo muito questionada principalmente com relação aos métodos utilizados pelos professores para ensiná-la em toda a educação básica.

Talvez não seja por falta de capacitação, ou mesmo por falta de interesse dos professores, muitas vezes existe de se procurar novas ferramentas para que a própria aula em si se torne mais interessante para o aluno.

Hoje temos o apelo muito forte do lúdico, pois com a manipulação de materiais concretos o aluno se interessa mais pela aula e assimila melhor os conceitos construídos.

Buscando associar o lúdico e o teórico, encontramos os fractais que faz uma ponte interessante entre esses elementos, ela com seus conceitos e construções, pode auxiliar o professor a mostrar conteúdos de matemática para estudantes da educação básica que outrora se mostram enfadonhos e tediosos.

2.5 Características dos Fractais

Falconer (2000) afirma que um fractal possui todas ou a maioria das suas características. Estas características serão descritas a seguir:

- **Estrutura fina**

A estrutura fina é o detalhamento infinito. Ampliando-se um fractal conseguimos visualizar novos detalhes, que seguem indefinidamente. O mesmo não ocorre com as figuras geométricas euclidianas.

- **Auto afinidade**

Conhecida também como homotetia interna, essa característica consiste em conseguir réplicas do todo em qualquer parte do fractal, ou seja, em qualquer iteração surgirá uma figura menor que ampliada será igual à figura original antes de se começar os processos de iterações.

- **Simplicidade na lei de formação**

Para construir um fractal, basta repetir cada iteração gerando assim sua lei de formação, o que nos leva a um processo simples.

• Difícil descrição

Como a própria nomenclatura já diz, não pode ser descrito de maneira simples seja por uma função analítica ou por uma linguagem geométrica tradicional devido ao fato de se constituírem através de processos iterativos.

• Dimensão Fractal

Diz respeito a dimensão espacial, ou seja, ao espaço que a figura ocupa. É estritamente maior e pode ser calculada de várias formas. Se a figura não possuir autossimilaridade.

Se possuir, por outro método um pouco mais simples. Todas estas características procuram definir um fractal, e como foi mencionado, os fractais reúnem algumas delas ou todas.

2.6 Matemáticos relacionados com fractais

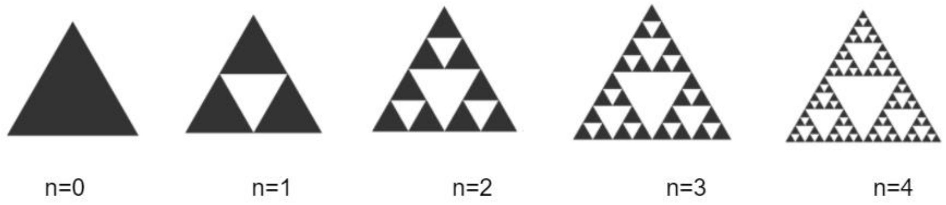
Tendo como base o artigo da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) sobre Fractalize: Modelagem Fractal nas Ciências e Engenharias do ano de 2021 temos as seguintes explicações:

- **Sierpinski**

O Triângulo de Sierpinski é tido como fractal autossimilar. Em homenagem ao matemático polonês Wacław Sierpiński tem esse nome, pois foi o primeiro a estudar essa estrutura.

Na Figura 2.1, o Triângulo de Sierpinski está estruturado até a quarta iteração (n = 4):

Figura 2.1: Construção do Triângulo de Sierpinski



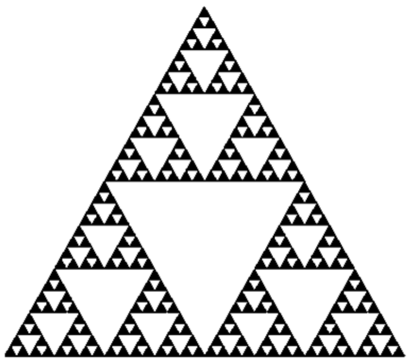
Fonte: UFJF, 2021.

Um método simples de construir o Triângulo de Sierpinski é por meio de iteração a partir de um triângulo equilátero. No primeiro momento, marca-se os pontos médios em cada lado do triângulo. Em seguida, traça-se segmentos a partir dos pontos médios, formando um triângulo dentro do triângulo inicial. Depois, retira-se esse triângulo central. Esta é a primeira iteração do Triângulo de Sierpinski.

Este processo será repetido nas próximas etapas (iterações) em cada triângulo restante.

Ao repetirmos o processo indefinidamente, daremos origem ao fractal clássico Triângulo de Sierpinski (Figura 2.2).

Figura 2.2: Triângulo de Sierpinski

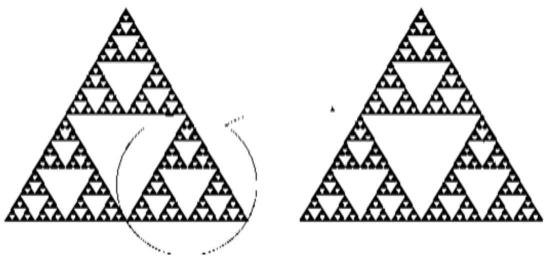


Fonte: UFJF, 2021.

Podemos perceber que o vértice de cada novo triângulo surge a partir do ponto médio do triângulo anterior

O ponto médio de cada lado do triângulo inicial se torna um vértice de um novo triângulo. Dessa forma, os triângulos gerados a cada iteração têm exatamente a metade do perímetro e a metade da altura do triângulo anterior. Além disso, a área de cada novo triângulo gerado tem um quarto da área do triângulo da etapa anterior, como é observado na Figura 2.3.

Figura 2.3: Autossimilaridade no Triângulo de Sierpinski



Fonte: UFJF, 2021.

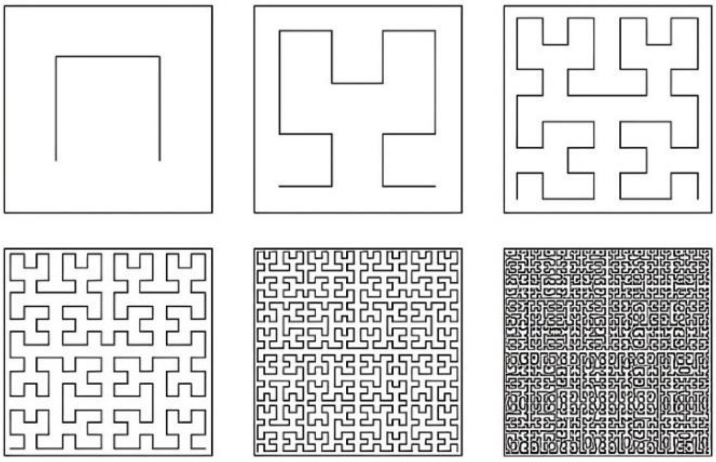
Podemos verificar na Figura 2.3, que o triângulo da direita é uma cópia ampliada da quarta parte do triângulo da esquerda, sendo assim, caracterizado como autossimilar.

- **Peano**

No ano de 1890 um matemático de nome Giuseppe Peano descobriu uma curva capaz de passar por todos os pontos de um quadrado (Figura 2.4). O processo para a construção desse tipo de curva é iterativo.

Para construir esta curva o ponto de partida é um quadrado de lado unitário. Partindo desta construção observa-se que o gerador foi reduzido pela metade, e girado 90 graus no sentido horário; depois o ponto inicial foi reduzido pela metade, e transladado 1/2 para cima; após o gerador foi reduzido pela metade, e transladado 1/2 para cima e 1/2 para direita; por fim o gerador foi reduzido pela metade, girado 90 graus no sentido anti-horário, e transladado 5/4 para direita. Dando sequência na iteração da curva, repetindo o mesmo procedimento, chegaremos a 64 quadrados menores.

Figura 2.4: Curva de Peano

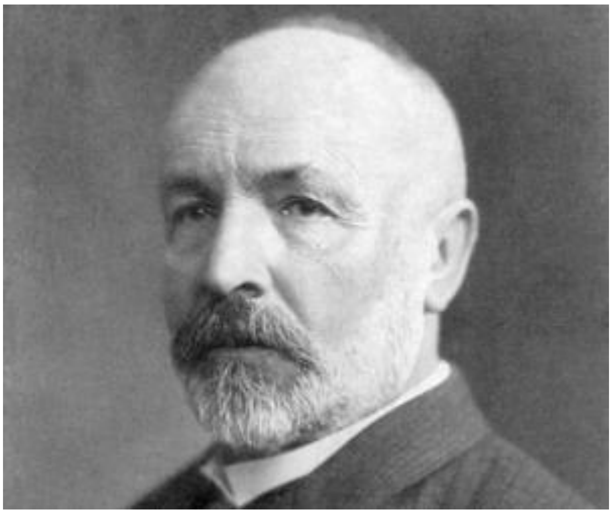


Fonte: asociacionceat.org, 2021.

- **Cantor**

De acordo com Graceli (2014), em homenagem a Georg Cantor (Figura 2.5), o Conjunto de Cantor, ou Poeira de Cantor (Figura 2.6), é um exemplo de fractal simples.

Figura 2.5: Georg Cantor

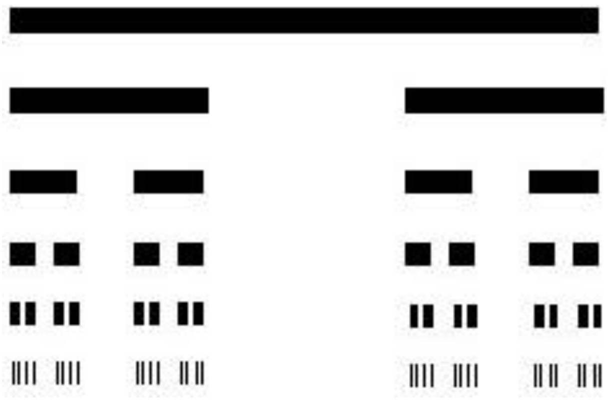


Fonte: thefamouspeople.com, 2021.

Seguimos os passos de BARBOSA (2005) para construí-lo.

1. Considerar uma reta;
2. Dividir a reta em três partes iguais e eliminar a central;
3. Repetir a construção 2 em cada segmento e, assim, sucessivamente e indefinidamente.

Figura 2.6: Poeira de Cantor



Fonte: antroposimetrica.blogspot.com, 2021.

Podemos chegar à conclusão de que o comprimento total dos segmentos restantes ao final da etapa de cálculos mais simplificados se dá conforme a Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Número de segmentos da Poeira de Cantor

Iterações	Número de segmentos
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
⋮	⋮
N	2^n

Fonte: Autor, 2021.

- **Koch**

Segundo Rabay (2013, p.8), Niels Fabian Helge von Koch (Figura 2.7) graduou-se em Matemática pela Universidade de Estocolmo, onde também adquiriu o título de doutor.

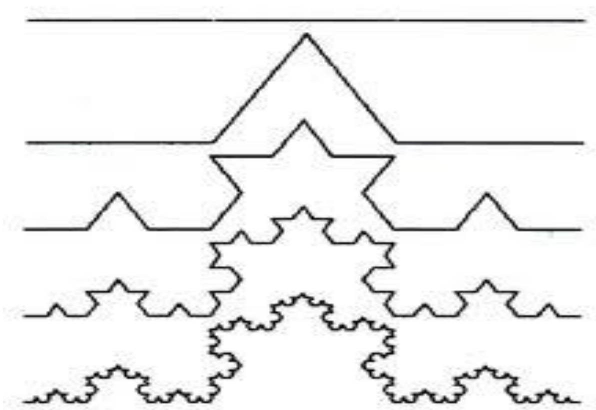
Figura 2.7: Helge von Koch

Fonte: forumservertwoplustwo, 2021.

A Curva de Kock (Figura 2.8), segundo BARBOSA, os passos para sua construção são:

1. Considera-se uma reta;
2. Divide-se em 3 segmentos iguais, substituindo o segmento do meio por um triângulo equilátero sem a base (segmento intermediário);
3. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente e iterativamente.

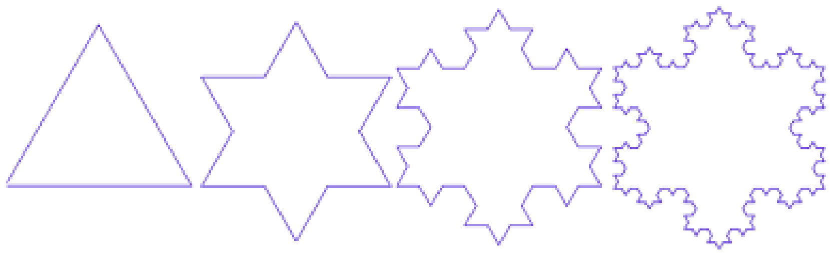
Figura 2.8: Curva de Koch



Fonte: OSA, 2005.

Outra forma de explorarmos os fractais começando as iterações por um triângulo de lados iguais. Nesse caso, teremos uma figura denominada de Floco de Neve de Koch, conforme a Figura 2.9.

Figura 2.9: Floco de Neve de Koch



Fonte: viastral, 2021.

Na primeira iteração, temos um triângulo com todos os lados iguais, no qual iremos dividir cada um de seus lados em três segmentos iguais e sobre o segmento central construiremos outro triângulo equilátero suprimindo a sua base, transformando-se assim cada segmento do triângulo anterior em quatro segmentos, fazendo um total de $\mathbf{3 \cdot 4 = 12}$ segmentos. No passo seguinte, repetindo a operação, teremos $\mathbf{3 \cdot 4 \cdot 4 = 48}$ segmentos na 2ª etapa de construção. Repetindo o processo pela 3ª vez, observamos que para cada segmento obteremos quatro novos, ficando assim: $\mathbf{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192}$ segmentos na 3ª etapa do processo. Para concluir poderemos observar os resultados e chegar a uma equação para a determinação do número de segmentos em uma determinada etapa n da construção de Von Koch:

1ª etapa: $\mathbf{S_1 = 3 \cdot 4^1}$

2ª etapa: $\mathbf{S_2 = 3 \cdot 4^2}$

3ª etapa: $\mathbf{S_3 = 3 \cdot 4^3}$

4ª etapa: $\mathbf{S_4 = 3 \cdot 4^4}$

$\vdots$

$\mathbf{n}$ etapa: $\mathbf{S_n = 3 \cdot 4^n}$

Novamente percebemos a formação de uma progressão geométrica.

- **Julia**

Baseado em http://commons.wikimedia.org no ano de 2021, aborda-se que o conjunto de Julia é um fractal criado pelo matemático francês Gaston Julia. O estudo desste fractal que havia sido esquecido, foi resgatado por Benoît Mandelbrot em 1980 quando realizou um trabalho sobre o conjunto de Julia. Este Fractal será apronfudado no capítulo 5 deste trabalho.

- **Mandelbrot**

De acordo com a Revista na veia, Benoit Mandelbrot (Figura 2.10) criou em 1975 a palavra “fractal” quando publicou o livro “Os Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão”.

De acordo com a Revista na veia, um objeto geométrico que mantém a estrutura despresando a distancia em que o objeto é observado, é considerado um fractal. Por possuirem uma dimensão fracionária, Mandelbrot os denominou assim seus objetos de estudo.

Figura 2.10: Benoit Mandelbrot

Fonte: Wikipedia, 2021.

2.7 Histórico dos Fractais

De acordo com Santana e Sá (2016), a cronologia da construção da teoria dos fractais, também ilustrada na Figura 2.11, é a seguinte:

1500 - Dürer desenvolve os fractais que recebe o seu nome.

1883 – George Cantor publica a Curva de Cantor.

1890 – A Curva de Peano é Publicada.

1891 - Hilbert apresenta sua curva.

1904 - Koch publica a Curva de Koch .

1918 - Hausdorff publica resultados sobre a Dimensão de Hausdorff.

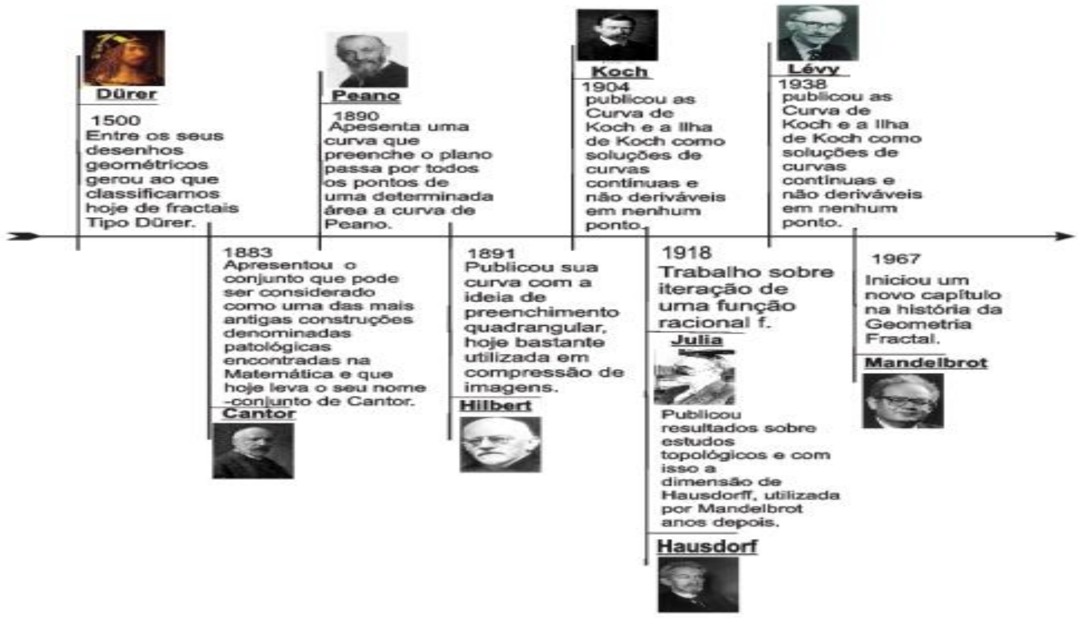
1918 - Julia publica seu conjunto gerado num plano complexo.

1921 - Menger apresenta a Esponja de Menger.

1938 - Lévy descreve sobre auto-similaridade.

1967 - Mandelbrot publica sobre a Geometria Fractal.

Figura 2.11: Histórico dos Fractais



Fonte: Google, 2021.

Por meio deste histórico, percebe-se a contribuições e os avanços de cada matemático para a Geometria Fractal.

3. O MUNDO FRACTAL

Neste capítulo é interessante mostrar aos estudantes como alguns dos elementos da natureza não seguem a geometria euclidiana, ela é mais bem descrita com os fractais, devido a sua relação com a natureza.

Por vezes vê-se a natureza como algo imprevisível. Isto ocorre quando, por exemplo, estuda-se o clima, em que cada variável é tão oculta que é humanamente impossível estudar sem o auxílio de instrumentos tecnológicos de ponta que se tornam cada vez mais gigantescos e difíceis de serem resolvidos.

Na visão de Baptista (2013, p.44):

> [...] Um grande número de sistemas físicos tende a apresentar comportamentos semelhantes em diferentes pontos de observação. A principal atração dos fractais deriva da sua capacidade de descrever a forma irregular ou fragmentada de recursos naturais bem como de outros objetos complexos que a euclidiana tradicional não consegue analisar. Este fenômeno é muitas vezes expresso por leis e dimensionamento estatísticos no domínio do tempo e caraterizado principalmente pelo comportamento de lei de potência de sistemas físicos do mundo real. [...].

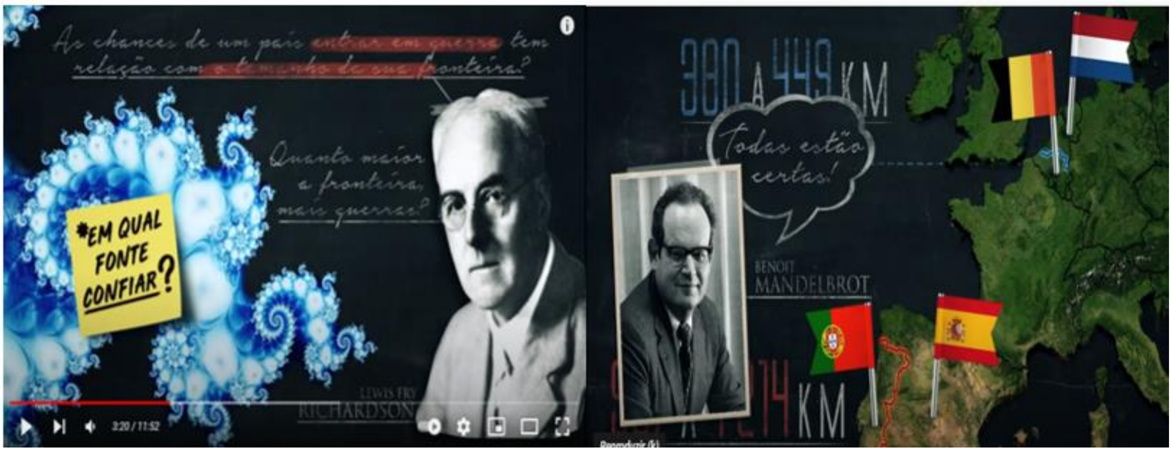
Analisar sistemas físicos reais resulta em incógnitas muito complexas, que muitas das vezes não são tratadas no Ensino Superior, particularmente na graduação, trabalha-se de forma maciça em torno de situações ideais. Vejamos os exemplos a seguir:

3.1 Medida do litoral

3.1.1. Aspectos Matemáticos

O estudo do litoral é o exemplo de uma medida imprecisa. Isso resulta das propriedades semelhantes aos fractais das linhas costeiras. O primeiro estudo registrado deste fenômeno foi por Richardson e aprimorado por Benoit Mandelbrot (Figura 3.1).

Figura 3.1: Lewis Fry Richardson e Benoit Mandelbrot



Fonte: Nerdologia, 2021.

A precisão da extensão do litoral depende do método e do grau cartográfico utilizado. Tendo em vista que a Terra possui vários elementos, com peso e massa diferentes em todas as escalas. Observe a (Figura 3.2).

Figura 3.2: Mapa do Litoral Brasileiro

Fonte: Youtube, 2021.

Problema este que não é observado em objetos planos e retos, em que a precisão da medida pode ser alcançada com mais facilidade. Observe a Figura 3.3.

Figura 3.3: Mapa do Litoral brasileiro com régua de 500km

Fonte: Youtube, 2021.

A precisão da medida depende do objeto de medição. Assim há uma variação no comprimento exato do litoral, com variações em metros e quilômetros.

Figura 3.4: Mapa do Litoral brasileiro com uma régua de 1m

Fonte: Nerdologia, 2021.

Por meio de três dimensões o litoral é extensivo para as superfícies dos fractais e a área torna-se variável, dependendo da resolução da medição. Na Figura 3.5, temos o mapa do litoral brasileiro com distância direta.

Figura 3.5: Mapa do Litoral brasileiro com distância direta

Fonte: Youtube, 2021.

A teoria euclidiana explica o comprimento do litoral, pois para esta teoria, uma reta representa menor distância entre dois pontos, já que possui apenas um comprimento. Diferente quando é numa esfera em que os pontos são medidos com o centro da esfera. Mais complicado ainda torna-se o comprimento de arcos e curvas, sendo que com régua há uma aproximação maior de precisão das medidas de ambos.

Todavia, segundo WEISSTEIN, algumas curvas precisam ser analisadas e medidas de forma diferente do que o uso de régua. Uma curva, por exemplo, mais complexaria de acordo com a escala que se adota para medição. Se por um lado, uma curva que apresenta suavidade converge para um valor aproximado sempre que a medição se torna mais precisa. Por outro lado, quando o valor medido se torna um fractal, a expressão (medida) não converge.

Dessa forma, ao medirmos um litoral, utilizando a dimensão fractal, o comprimento das dobras (ou curvas) curtas aumentaria, uma vez que a dimensão fractal tende ao infinito.

As linhas da costa do litoral possuem irregularidades, enquanto os fractais, por definição, são formados por iterações (simples ou mais detalhadas), que se repetem o quanto forem necessárias formando sequências matemáticas.

3.2 Pulmões

O pulmão, além de um órgão do sistema respiratório, está fortemente ligado ao sistema circulatório, pois faz o transporte de oxigênio por todo o corpo. A estrutura deste órgão segue um modelo fractal semelhante (Figura 3.6), seja nas suas vias respiratórias, seja nos vasos sanguíneos associados.

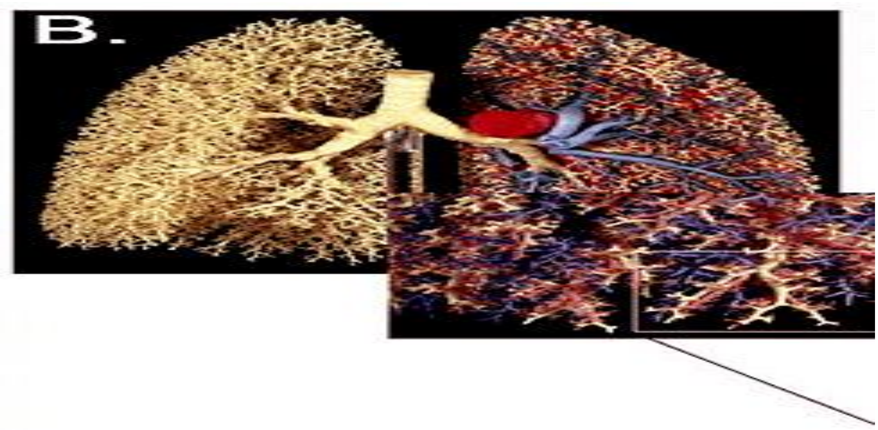
Figura 3.6: Estrutura pulmonar

Fonte: Nerdologia, 2021.

Neves (2014) aponta que:

> [...]A essa estrutura em formato de árvores das vias respiratórias e vasculares humanas é considerada uma estrutura geométrica. É salutar que esta estruturação pulmonar torna-se as funções pulmonares mais eficazes e céleres. Então o sistema fractal destas ramificações em formato de árvores entrelaçadas auxilia na condução do sangue e oxigênio pelo corpo humano[...]

Figura 3.7: Pulmão humano.



Fonte: (http://gl/sgsp18).

Na Figura 3.7, acima, as vias respiratórias estão em branco, à árvore vascular arterial na cor vermelha e a árvore venosa de azul. Para tal, a matemática fractal combina-se com as formas.

As vias respiratórias e vasculares pulmonares, em sua análise geométrica, mais do que estrutura arquitetônica, é vista como um resultado de fractais.

3.3 Florestas

3.3.1 Análise Fractal da Fragmentação Florestal

Os fractais são considerados métodos para análises de dados da paisagem. Por exemplo, os modelos fractais podem descrever as rugosidades superficiais, mostrando a semelhança de algumas características que persistem em várias escalas espaciais (PACHEPSCKY e RITCHIE, 1998, apud YAMAJI, 2001, p. 25).

Segundo Yamaji (2001, p.25), O'Neill et al. (1988) e Turner (1990), defendem que o fractal é um parâmetro de medida para padrões da paisagem e PALMER (1988) diz que a flora é um exemplo típico de fractal, porque ela apresenta detalhes espaciais de tal natureza.

Segundo GAINES et al. (1999, apud YAMAJI, 2001, p. 25), o fractal é o fragmento complexo da paisagem natural.

A vegetação é composta por uma mistura de formas e padrões. Muitas questões de interesse na área florestal (como a diversidade e a distribuição das espécies) envolvem tais padrões.

Ainda, um fator determinante da vegetação é sua natureza dinâmica: são as mudanças na distribuição e os componentes da vegetação que ocorrem no tempo (CHAPMAN, 1976, apud YAMAJI, 2001, p. 25).

Segundo LaGRO (1991, apud YAMAJI, 2001, p. 25), a estrutura de uma paisagem é definida por seus parâmetros espaciais, os quais incluem a forma, o tamanho, o número e a distribuição de cada tipologia. E conforme LAM (1990, apud YAMAJI, 2001, p. 25), no uso prático dos fractais também se incluem as análises de padrões, formas e estruturas.

Alguns autores têm questionado a acurácia dos fractais como índices de padrões da paisagem (Cale e Hobbs, 1994; Groom e Schumaker, 1996; Schumaker, 1996, citados por GAINES et al., 1999, apud YAMAJI, 2001, p. 26). Mas, ainda segundo GAINES et al. (1999, apud YAMAJI, 2001, p. 26), acima de tudo, deve-se ter muita atenção para as diferenças de escalas e dimensões dos mapas quando se compara índices de padrões entre paisagens de diferentes locais. Por exemplo, Turner (1989, 1990, apud YAMAJI, 2001, p. 26), Lehmkuhl e Raphael (1993), citados por GAINES et al., (1999, apud YAMAJI, 2001, p. 26), encontraram que muitos índices de padrões diferem, simplesmente, porque as dimensões dos mapas são diferentes.

Segundo PUZACHENKO (2000, apud YAMAJI, 2001, p. 26), o fractal pode ser considerado como uma medida de textura da imagem. Ainda segundo o autor, diferenças nas dimensões fractais estão relacionadas com diferentes origens de estruturas, conforme a Figura 3.8.

Figura 3.8: Fragmentação vegetal

Fonte: Google, 2021.

Uma das formas para o acompanhamento do estudo de uma floresta é com a utilização de satélite que capturam as imagens a serem estudadas. O conteúdo de uma imagem baseia-se tanto na intensidade de cada pixel, como no seu arranjo espacial.

Contudo, a maioria das técnicas de classificação disponíveis baseiam-se apenas nos valores de intensidade espectral. DeCOLA (1989, apud YAMAJI, 2001, p. 27), admitiu que pouco uso é feito das informações espaciais, e que isto se deve à própria complexidade das imagens.

Isto faz com que as técnicas padrão de classificação analisem apenas as características espectrais (Figura 3.9).

Figura 3.9: Ramificação vegetal

Fonte: Google, 2021.

PALMER (1988, apud YAMAJI, 2001, p. 27) usou as relações entre Geoestatística (Matheron, 1963) e fractais para demonstrar que estes métodos podem ser úteis para descrever a variação existente na vegetação. A sua área de estudo envolveu seis tipos de comunidades de plantas existentes na Carolina do Norte. Segundo o autor, os resultados mostraram que a o fractal pode ser determinado pelo método semi variograma[1]. Outro resultado foi a observação da existência de escalas espaciais onde a vegetação pode ser considerada homogênea. Isto tem importante implicação na teoria ecológica e nos métodos de amostragem da vegetação.

Yamaji, destaca que no Brasil, os trabalhos sobre fractais e as florestas, apenas uma citação (BATISTELLA e SOARES, 1999) foi encontrada. Um desses índices utilizados foi calculado da relação área-perímetro. Eles utilizaram o índice de dimensão fractal para avaliar a complexidade da geometria das manchas dos elementos da paisagem. Por conseguinte, mudanças na forma da mancha de uma paisagem deveriam ser refletidas por mudanças no fractal (YAMAJI, 2001, p. 30).

3.4 Cinema

3.4.1 Os fractais no Cinema

Segundo Uva, a geometria dos fractais é um ramo matemática que se destina ao estudo do comportamento dos fractais e às propriedades a ele pertencentes. Em

[1] O semivariograma (ou variograma) é uma medida da variância espacial e é a principal ferramenta para qualquer estimativa geoestatística (Deutsch e Journel, 1992).

associação à geometria euclidiana, ciência, tecnologia e arte, a geometria fractal pode ser gerada por computador.

A partir da descoberta do matemático polonês Benoit, os fractais tornaram-se conhecidos e despertaram curiosidades, sendo que seus estudos é o ponto de partida, palavra que do latim significa “irregular” ou “quebrado”. O que fez com que vários tipos de fractais fossem entendidos como instrumentos da Matemática (Bueno, 2011).

Em diversas situações, o uso da geometria euclidiana não satisfaz aos anseios dos problemas propostos como, por exemplo, no estudo de vários fenômenos da natureza. Em algumas dessas ocasiões, a geometria fractal é se torna mais eficiente no estudo destes fenômenos.

As estruturas fractais podem ser encontradas nas artes, uma vez que os resultados obtidos na aplicação de sentenças matemáticas podem gerar animações, vistos que os cálculos matemáticos são geradores de imagens fractais. Também podemos encontrar nas cifras musicais, pois os resultados dos cálculos são transformados em sons (partições).

Os fractais são complexos e belos, associados aos elementos presentes na natureza, à vida existente no planeta e ao conhecimento do universo. Pertencem à arte abstrata que se repete em diversos pontos, como é o caso dos efeitos especiais no cinema (Figura 3.10).

Figura 3.10: Efeitos Especiais no cinema

Fonte: Google, 2021.

De acordo com Bueno (2011), a existência da geometria é dotada de complexidade não convencional, remetida ao século XIX, apesar de existir muito antes, mas, sua consolidação vem acontecendo com as invenções tecnológicas, relacionadas também com a física, química, astronomia, dentre outras.

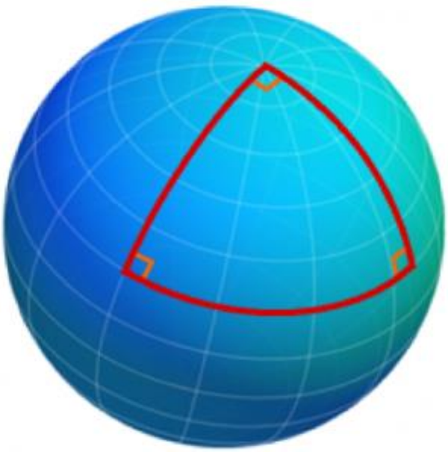
Outro elemento do estudo dos fractais é na tecnologia gráfica, bem utilizada no cinema na criação de cenários naturais, como rios, explosões, conjunto montanhoso e plantas. Levando em consideração a boa aproximação da representação destes através dos fractais, o modelo topológico utilizado simplifica o que seria bastante trabalhoso se fossem utilizadas outras técnicas para fazê-lo. Além das técnicas de compressão de imagens também são utilizados algoritmos baseados em fractais. Pode-se dizer que a geometria fractal casou uma revolução na computação gráfica e o avanço do recurso computacional possibilitou o engrandecimento dos estudos do fractal.

3.5 Tricô

3.5.1 Geometria hiperbólica e crochê

Segundo Barrueco (2015), antes dos avanços no estudo da Matemática só se sabia da existência da geometria euclidiana e da esférica. Enquanto a geometria é conhecida pelo estudo do ponto, plano, retas, polígonos, ângulos etc. e a que demonstre melhor o próprio tecido do universo, a geometria esférica, como o próprio nome já diz, é a que se destina ao estudo das esferas. Observe a Figura 3.11 da superfície terrestre.

Figura 3.11: Superfície Terrestre



Fonte: Google, 2021.

Barrueco (2015) afirma que no início do século XIX a geometria hiperbólica foi descoberta. Esta geometria é responsável pelo estudo do plano hiperbólico, que pode ser entendido esfera “ao contrário, ou seja, infinita e sua curvatura aumenta indefinidamente em progressão geométrica. Como observa-se na (Figura 3.12), que permite estruturas mais robustas que as de papel.

O crochê, por sua vez, permite que a sua estrutura se desenvolva exponencialmente, simplesmente com dois pontos a mais “ligados” a um ponto já existente. Assim, de forma natural, curvaturas negativas são desenvolvidas.

Figura 3.12: Crochê Hiperbólico

Fonte: Google, 2021.

Os planos hiperbólicos de crochê retratam a matemática de forma prática e simples, porque se estuda, o que muitas vezes é tratado como teórico e obsoleto, como algo real presente na rotina de muitos alunos.

3.6 Bolsa de valores

3.6.1 O mercado financeiro sob a óptica dos fractais

Por meio do estudo da geometria fractal pretende-se, com maior precisão na modelagem da turbulência, descontinuidade e não periodicidade dos fenômenos oriundos dos mercados financeiros atuais (WERON, 2000, apud, SILVA et. al).

Como Mandelbrot (2004, p.5, apud, SILVA et. al) afirma: “minha principal contribuição foi descobrir um ramo da matemática que percebe a ordem oculta na desordem aparente, o plano no não planejado, o padrão regular na irregularidade e na rugosidade da natureza”.

Lorenz (1996, p.99, apud, SILVA et. al), questiona, em relação a teoria do caos, “[...] por que deveríamos ser capazes de fazer qualquer tipo de previsão? Por que, efetivamente, deveríamos esperar ver o futuro, ou uma pequena parte dele?”. Quanto ao comportamento de preços de ativos em mercados financeiros, existe uma real importância econômica que envolve o futuro de milhares de empresas e investidores mundiais.

O estudo dos fractais é um assunto pouco estudado, como aponta Grabbe (1999, apud, SILVA et. al): “o assunto não era ensinado nos departamentos de economia, porque nenhum dos professores o compreendia [...]”.

Segundo Kimura (2005), o comportamento turbulento do mercado financeiro (Figura 3.13) se assemelha a vários fatos ocorridos na natureza, como é o caso das manchas provenientes do óleo, das manchas ocasionadas pelo sol, do formato das nuvens, dentre outros.

Figura 3.13: Bolsa de Valores sob o óptico fractal

Fonte: Google, 2021.

Originalmente definida por Mandelbrot (1983, p. 15, apud, MELO) a teoria da bolsa de valores é: “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff Besicovitch excede a dimensão topológica. Todo conjunto com dimensão fracionária é um fractal”.

Segundo Karas e Serra (1997, p.5, apud HAYASHI, 2002): “fractais são figuras com propriedades e características peculiares que os diferenciam das figuras geométricas habituais”.

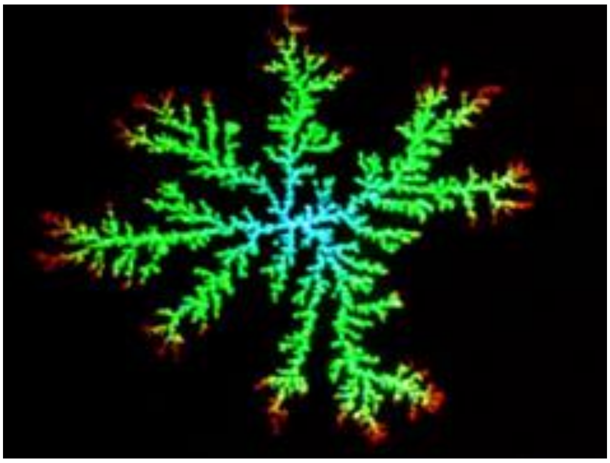
3.7 Cidades

3.7.1 As Curvas das Cidades Fractais

Observando o crescimento urbano, as cidades são fractais em sua forma e em sua estrutura. Quanto à estrutura temos os processos socioeconômicos, resultado das decisões dos agentes envolvidos na ação. Sendo que a Geometria Fractal é uma excelente ferramenta para que se possa entender o desenvolvimento urbano, uma vez que pode ser trabalhada em paralelo com a matemática para que se possa entender o desenvolvimento urbano (BUENO; BALBINOT; BICCA; 2010).

A (Figura 3.14) mostra a relação geométrica das cidades com o fractal, visto que ele se desenvolve mantendo um espaçamento adequado entre as folhas para que uma não ultrapasse o limite estabelecido por outa folha.

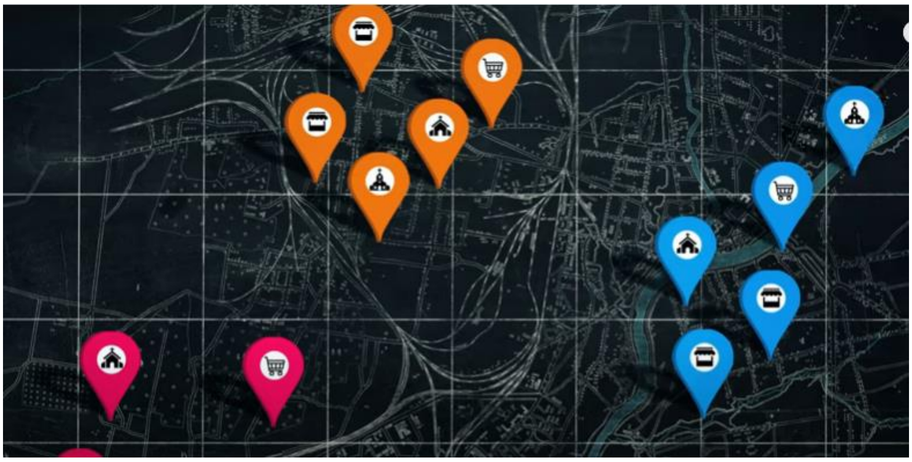
Figura 3.14: Fractal apresentado por Batty



Fonte: Michael Batty

Assim como outros elementos naturais as cidades têm que (Figura 3.15), por um lado, crescer e expor as suas belezas naturais e humana pensando na qualidade de vida de seus habitantes.

Figura 3.15: Cidade Fractal



Fonte: Google, 2021.

Ao crescer sem deixar esses interstícios à cidade estagna. Assim, os simuladores de fractais são extremamente importantes, pois permitem desenvolver modelos mais aconchegantes e promissores.

3.8 Animais

3.8.1 A fauna fractal que nos rodeia

O conceito da matemática estática e fixa torna-se inaplicável quando se tem o estudo dos fractais, pois por meio destes objetos reais explicam as teorias matemáticas.

Na natureza, podemos observar diversas formas relacionadas à geometria. Por exemplo, as abelhas constroem células hexagonais para manter o seu mel. Outra utilização na natureza dos fractais é das aspirais logarítmicas. Ferreira Filho (2015, p. 36), aponta que o mais intrigante é que os aspirais são muito encontrados, como é o caso do arranjo das sementes de girassol ou na configuração da couve-flor, por exemplo.

Essa curva fascina os matemáticos desde o século XVII quando Jacob Bernoulli se dedicou a um estudo de várias curvas planas (FERREIRA FILHO, 2015, p. 36).

Quando procuramos relacionar a geometria com a natureza, uma das primeiras características geométricas é a simetria, encontrada com facilidade no mundo animal, como é o caso do leão apresentado na Figura 3.16.

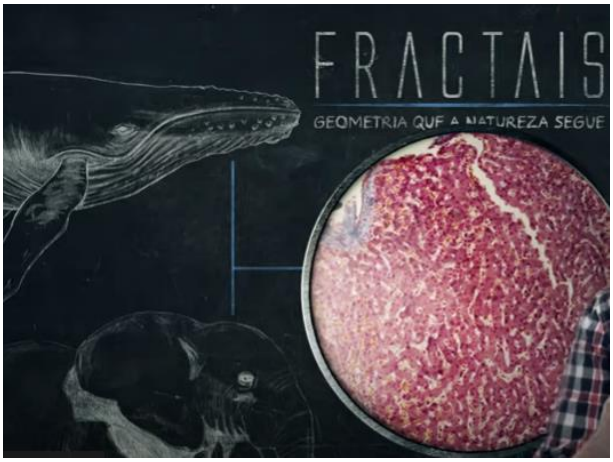
Figura 3.16: Leão em Fractal

Fonte: Google, 2021.

Quando, por exemplo, olhamos o dorso de uma borboleta, podemos observar um eixo que divide suas asas anteriores e posteriores em duas metades verticais e simétricas. Algo similar também ocorre ao observarmos um animal (visto de cima), uma barata, por exemplo, quando se verifica que a metade esquerda é idêntica a outra metade, ocorrendo, dessa forma, a simetria no eixo horizontal do referido animal.

Porém, existem diferentes formas de simetria, seja a radial, presente na maçã, bastante comum entre as plantas e entre os animais mesmo que presentes em poucas espécies, ressalvando-se, exemplos como a conhecida baleia (Figura 3.17).

Figura 3.17: Baleia e a rugosidade



Fonte: Google, 2021.

Muitas mais formas geométricas existem em abundância no mundo a nossa volta. No mundo mineral, a geometria está presente nos elementos que tendem a cristalizar, podemos verificar sempre que observamos na neve e no gelo ou em uma simples ostra, conforme a Figura 3.18.

Figura 3.18: Ostra em Fractal

Fonte: Google, 2021.

Nos exemplos supracitados podemos perceber a presença da rugosidade que são pequenas saliências e reentrâncias que caracterizam uma superfície. Dessa forma, devemos usar o termo rugosidade ou irregularidade? Para responder a essa pergunta, devemos levar em consideração o ponto de vista e da necessidade, aqui no estudo dos fractais vamos adotar o termo rugosidade. Ferreira Filho (2015, p. 38) destaca que para Mandelbrot, nem todas as superfícies são lisas, aliás quando nos referimos a natureza poucas superfícies são lisas, como por exemplo o lagarto da Figura 3.19.

Figura 3.19: Lagarto em Fractal

Fonte: Google, 2021.

Se olharmos a natureza em nossa volta com um olhar de Mandelbrot, perceberemos que o tronco de uma árvore não é um cilindro, suas folhas não são retângulas, suas flores não são pontos e nem seus frutos círculos (FERREIRA FILHO, 2015, p. 38). As formas que observamos no meio ambiente e as formas Euclidianas quase nunca são semelhantes. Na maior parte dos casos os objetos da teoria Euclidiana e a natureza não passam de uma comparação grosseira, pois a natureza consegue sempre surpreender.

Tão importante quanto perceber as irregularidades das formas presentes na natureza é saber calcular seus perímetros, áreas e volumes.

Na contramão dessa realidade, o mundo tecnológico permaneceu Euclidiano, porém, utilizando cada vez mais características dessas estruturas naturais para potencializá-lo. Nessa captação de informações que entra o fractal, pois seu conceito é estritamente matemático, por outro lado, diversas formas presentes na natureza satisfazem as condições necessárias para que sejam representados por uma linguagem matemática adequada.

4. CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS COM O MICROSOFT PAINT

Neste capítulo vamos descrever como construir passo a passo uma série de fractais usando o programa da Microsoft “PAINT”. Por meio de uma proposta metodológica simples e prática para que estudantes construam diversos fractais.

Figura 4.1 - Programa MS Paint

Fonte: Google, 2021.

Microsoft Paint é um programa de computador utilizado para fazer desenhos simples e para a edição de imagens. O programa pertence ao sistema operacional Windows, da Microsoft (Figura 4.1).

4.1. Triângulos no Paint semelhante ao de Sierpinski

Waclaw Sierpinski, (1882-1969), Figura 4.2, foi um matemático polonês, que teve grande destaque nas teorias matemáticas. Um dado curioso é o fato de uma das crateras da lua levar seu próprio nome (TAVARES, 2016. Disponível em https://matematicadorenato.blogspot.com/2016/04/fractais-tapete-de-sierpinski.html. Acesso em 24/12/2021).

Figura 4.2 Waclack Sierpinski

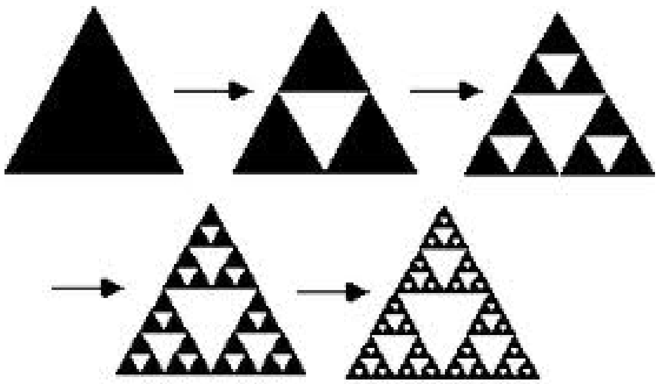
Fonte: bbaw, 2021.

Existem várias maneiras de se construir este triângulo, a mais usada é a de remoção de triângulos a partir de um triângulo equilátero.

Conforme o autor BARBOSA (2005), têm os seguintes passos para construção do Triângulo Fractal (Figura 4.3):

1. A considerar-se um triângulo com todos os lados iguais;
2. Marca-se os vértices de um dos lados equilátero, formando, assim, 4 “novos triângulos;
3. Remove-se um triângulo no centro;
4. Repete-se em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3;
5. Repetir a operação 4 sucessivamente.

Figura 4.3 - Triângulo fractal



Fonte: Barbosa, 2005.

O Triângulo Fractal apresenta todas as características da geometria fractal. Por esse motivo, ele será uma ótima ferramenta para a apreensão de conteúdos matemáticos no ensino matemático, principalmente Progressões Geométricas.

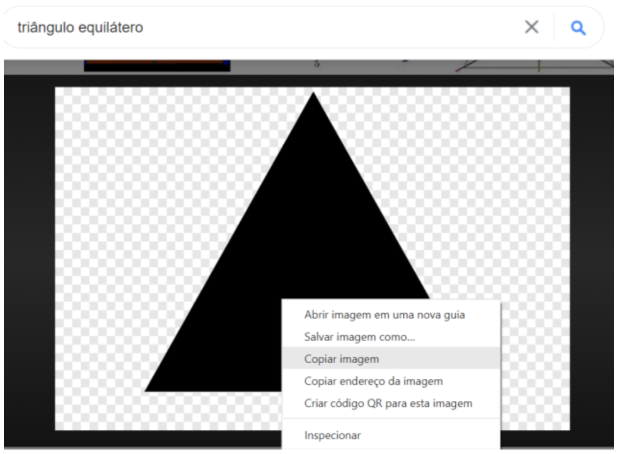
4.1.1 Proposta de construção do triângulo de Sierpinski usando o Paint

No paint não temos as ferramentas para fazer a construção descrita acima por Barbosa (2005), pois partindo de um triângulo maior é necessário particionar em 4 triângulos, para o qual precisamos de determinar os pontos médios cuja construção não é disponibilizada no paint, por não ter recursos de construção geométrica similares ao geogebra, por exemplo.

Propomos aqui partir de um triângulo equilátero, e logo construir uma semente fazendo duas copias de este triângulo, e num processo iterativo se vão acrescentando copias maiores das figuras resultantes. No lugar de dividir um triângulo, duplicamos os triângulos para formar figuras maiores similares à semente original. A seguir este processo é descrito em detalhe.

1. Primeiramente, pesquise por um triângulo equilátero na internet, de preferência na cor preta, e copie a imagem, conforme a Figura 4.4.

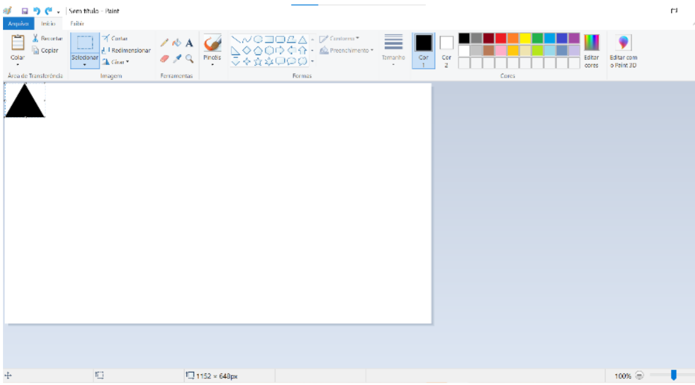
Figura 4.4 - Pesquisando triângulo equilátero



Fonte: O autor, 2021.

2. Usando o Paint, numa tela branca, cole a figura copiada na internet (ctrl + v). A imagem aparecerá na parte superior esquerda (Figura 4.5).

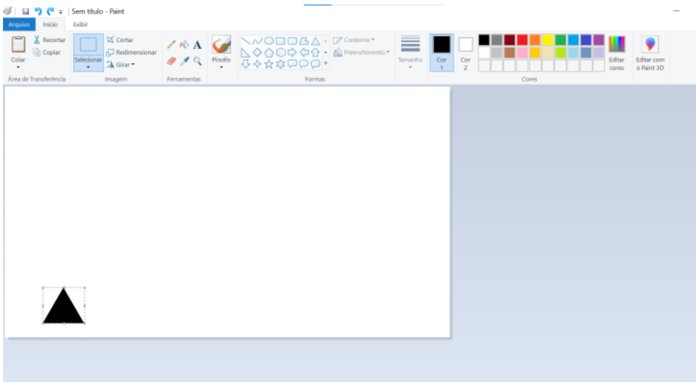
Figura 4.5 - Inserindo a figura no paint



Fonte: O autor, 2021.

3. Selecione a figura e arraste para baixo. (Figura 4.6).

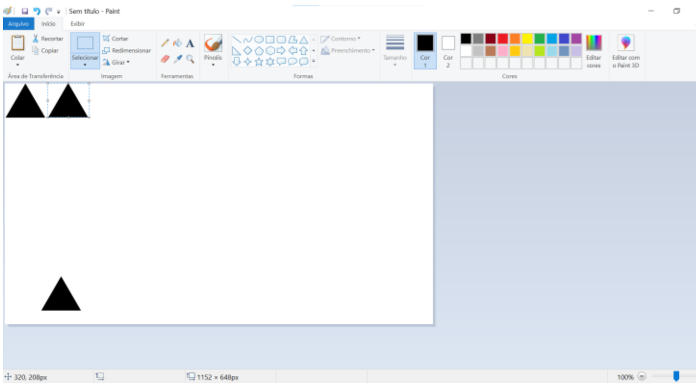
Figura 4.6 - Arrastando a figura para baixo



Fonte: O autor, 2021.

4. Selecione o triângulo equilátero, copie e cole duas vezes, replicando, assim, dois triângulos idênticos ao inicial. (Figura 4.7).

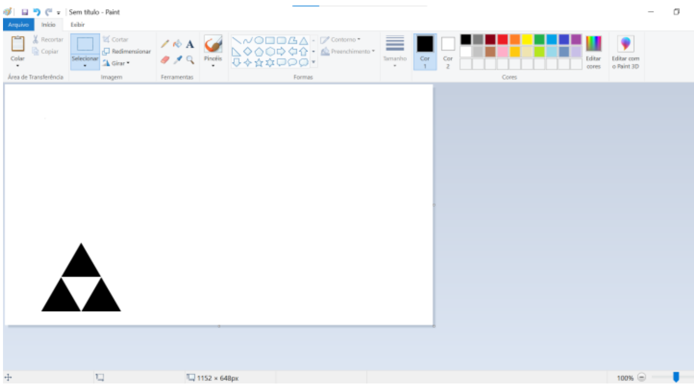
Figura 4.7 - Colando dois novos triângulos



Fonte: O autor, 2021.

5. Arraste os dois triângulos e “encaixe-os”, um ao lado do inicial e outro em cima dos dois, fazendo a primeira iteração do triângulo de Sierpinski, conforme a Figura 4.8, obtém-se assim a semente do triângulo de Sierpinski~~.~~

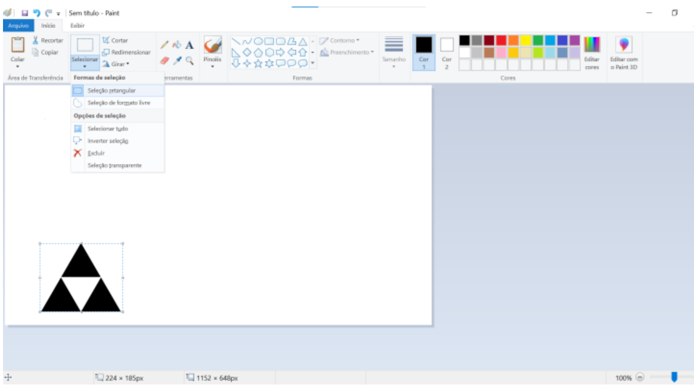
Figura 4.8 - Semente do triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor, 2021.

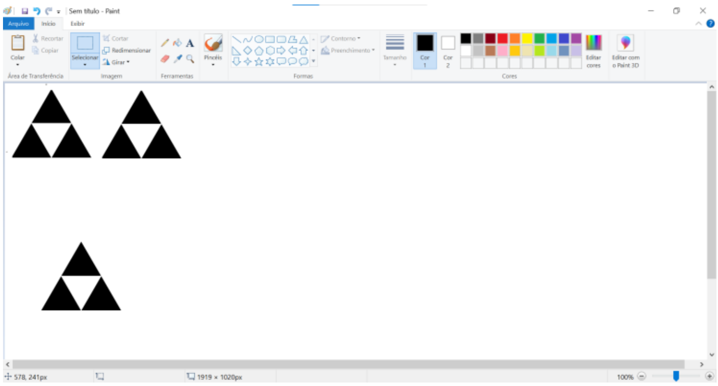
6. No passo seguinte, selecione (usando no paint a opção seleção retangular) o triângulo feito na primeira iteração, copie e cole outros dois triângulos, conforme a Figura 4.9 e Figura 4.10.

Figura 4.9 - Selecionando o triângulo



Fonte: O autor, 2021.

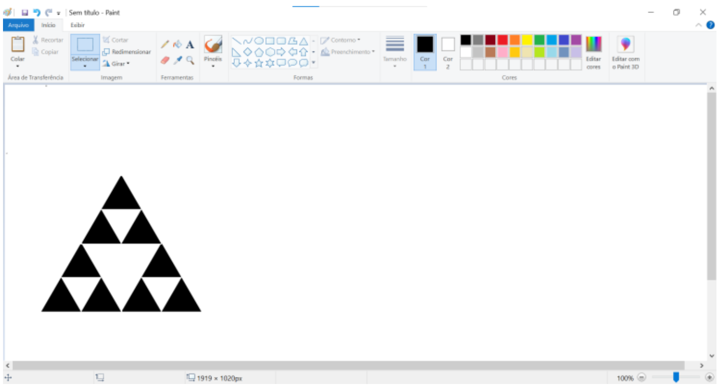
Figura 4.10 - Replicando dois novos triângulos



Fonte: O autor, 2021.

7. Arraste os dois triângulos e “encaixe-os”, um ao lado do inicial e outro em cima dos dois, conforme a Figura 4.11.

Figura 4.11 - Segunda iteração do triângulo de Sierpinski

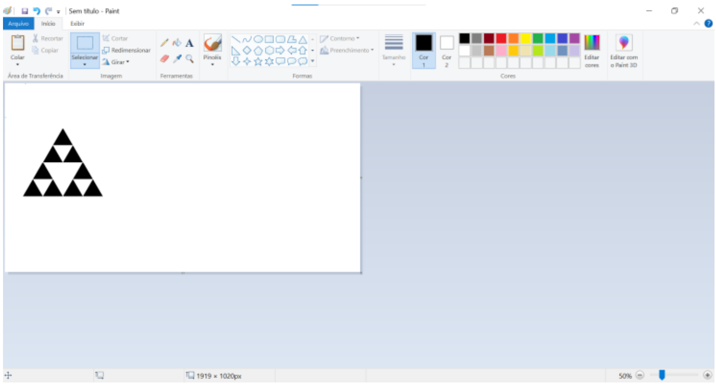


Fonte: O autor, 2021.

Como esta segunda iteração é formada por três triângulos similares à semente a qual é formada por 3 triângulos pretos, teremos um total de $3 \cdot 3 = 3^2$ triângulos pretos.

Para que se dê continuidade na construção do fractal é importante que se diminua o *zoom* da área de trabalho do Paint, (recomenda-se *zoom* menor ou igual a 50%), tal como na figura 4.12.

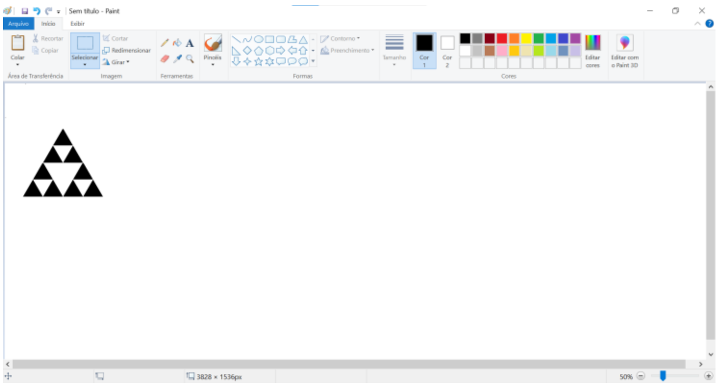
Figura 4.12 - Diminuindo o zoom do paint



Fonte: O autor, 2021.

8. Selecione e arraste o vértice inferior direito da folha para ampliar a área de trabalho do Paint (Figura 4.13).

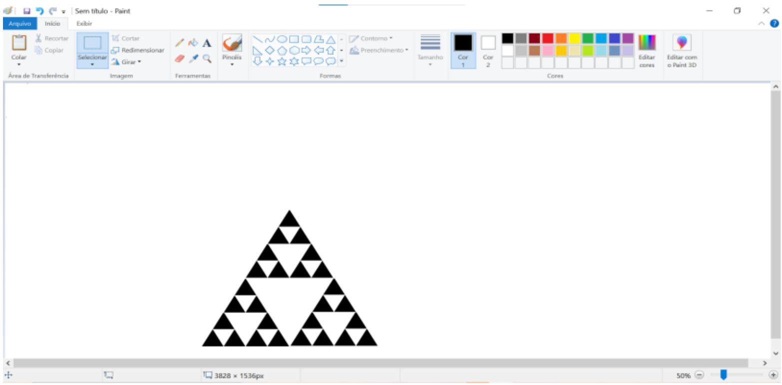
Figura 4.13 - Área de trabalho do Paint ampliada



Fonte: O autor, 2021.

9. Na terceira iteração repetimos as etapas desde o passo 6, mas copiando e colando o triângulo obtido na segunda iteração, obtendo um triângulo maior com as mesmas características da semente, como mostra a Figura 4.14. Como cada triângulo da segunda iteração tem 3^2 triângulos pretos, temos agora $3 \cdot 3^2 = 3^3$ triângulos pretos.

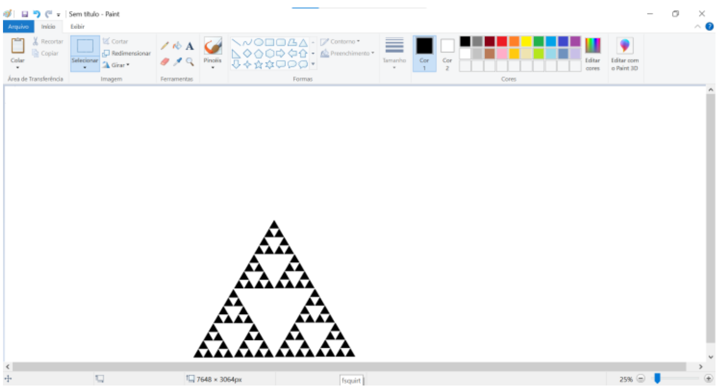
Figura 4.14 - Triângulo de Sierpinski após a terceira iteração



Fonte: O autor, 2021.

10. Na quarta iteração repetimos os passos 6 a 9 copiando e colando o triângulo obtido na terceira iteração, obtendo agora $3 \cdot 3^3 = 3^4$ triângulos pretos como se mostra na Figura 4.15.

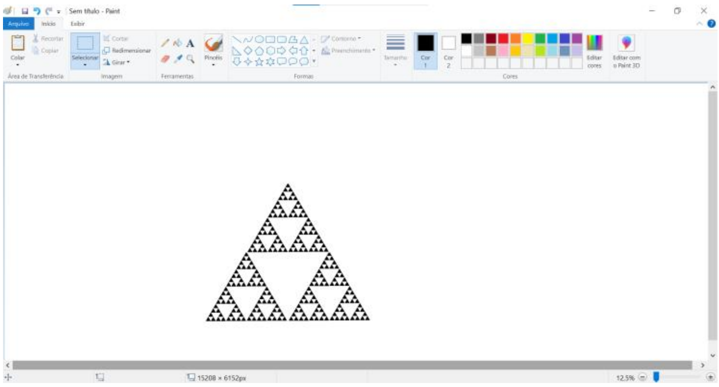
Figura 4.15 - Triângulo fractal na quarta iteração no paint



Fonte: O autor, 2021.

11. Na quinta iteração repetimos os passos 6 a 9 copiando e colando o triângulo obtido na quarta iteração, obtendo agora $3 \cdot 3^4 = 3^5$ triângulos pretos como se mostra na Figura 4.16.

Figura 4.16 - Triângulo fractal na quinta iteração no paint



Fonte: O autor, 2021.

Continuando com este processo iterativo, obtém-se sempre um triângulo com as mesmas características da semente, isto é, com estrutura fractal. Como sempre se replica 3 vezes o último triângulo obtido, o número de triângulos pretos forma uma progressão geométrica de razão 3, pelo qual o número de triângulos pretos na n-ésima iteração é de 3^n.

Com este processo construtivo dos triângulos realizado pelos alunos no laboratório de informática, espera-se que eles tenham uma primeira noção prática do que significa um fractal, ao observar que as partes e o todo compartilham as mesmas características.

4.2 O fractal de Levy

O matemático italiano Ernesto Cesàro Lévy desenvolveu um fractal autossimilar, o qual representou e forneceu o modelo de construção deste fractal.

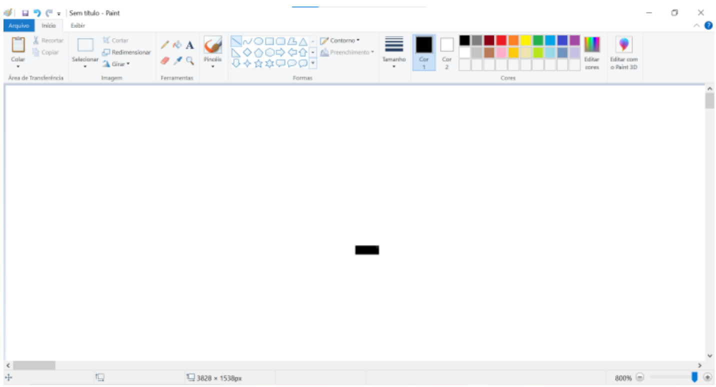
Para a construção deste fractal, se faz uma semente a qual tem o formato de uma U, a qual se replicará formando novas sementes, conforme detalhado no MS paint.

4.2.1. Passo a Passo da construção do Fractal de Levy no MS Paint

A partir de um segmento de reta, iniciamos a construção do fractal de Levy fazendo cópias e giros de 90° para a direita que, por meio de iterações, vão justapondo-se uma a outra dando, desta maneira, as sementes. A seguir descrevemos passo a passo a forma de construir este fractal.

1. Para começar crie uma tela grande no Paint e desenhe um segmento de reta conforme a Figura 4.17, utilizando o ícone linha na barra de ferramentas. Sugerimos que o *zoom* da tela seja o máximo permitido, nesse caso, 800%.

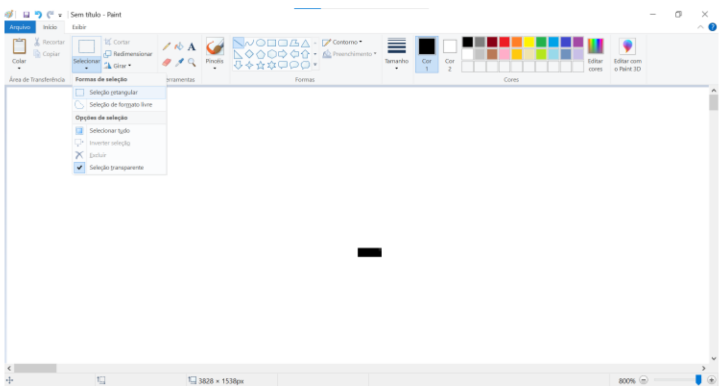
Figura 4.17 - Inserindo um primeiro segmento



Fonte: O autor, 2021.

2. Em seguida, selecione (usando no paint a opção seleção retangular) o segmento, conforme a Figura 4.18. É extremamente importante que a opção “seleção transparente” esteja marcada em todo o processo de construção do fractal. Além disso, recomenda-se que a região selecionada seja um quadrado ou próximo de um para que, ao girar o objeto, ele não saia cortado.

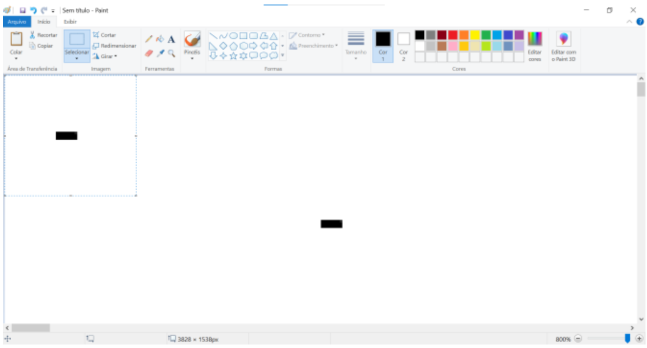
Figura 4.18 - Seleção retangular e seleção transparente



Fonte: O autor, 2021.

3. Copie (ctrl + c), cole (ctrl + v) o segmento selecionado. Nesta etapa o segmento colado aparecerá no canto superior esquerdo de acordo com a Figura 4.19.

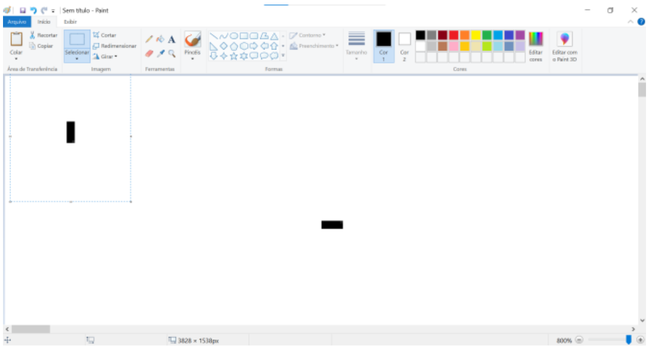
Figura 4.19 - Segmento colado



Fonte: O autor, 2021.

4. Faça um giro de 90° para a direita (usando no paint a opção girar 90° para a direita) no objeto colado do item anterior, conforme a Figura 4.20.

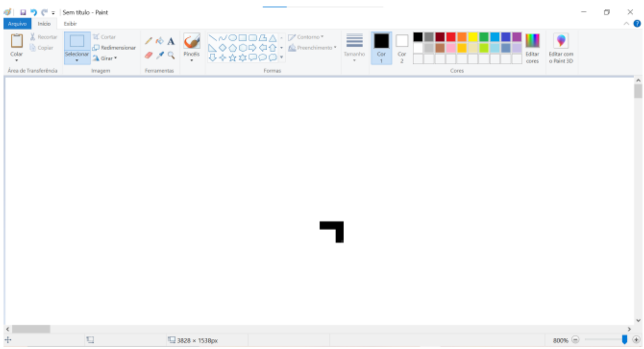
Figura 4.20 - Girando 90º à direita



Fonte: O autor, 2021.

5. Arraste o segmento selecionado, justapondo à direita do segmento inicial, como na Figura 4.21.

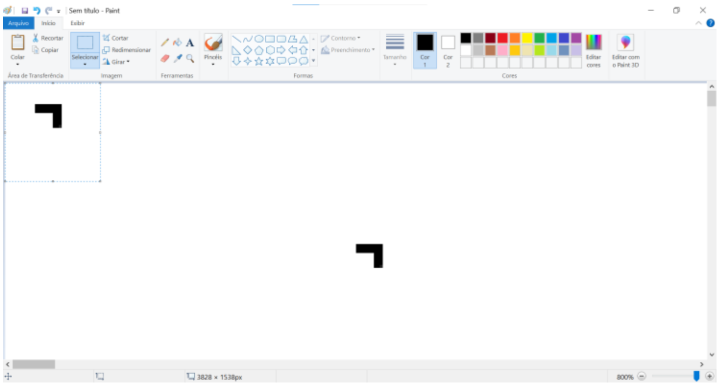
Figura 4.21 - Segmento justapostos



Fonte: O autor, 2021.

6. Selecione, copie e cole este “novo objeto” semelhante ao que foi feito nos itens 2 e 3 da construção deste fractal, segundo a Figura 4.22.

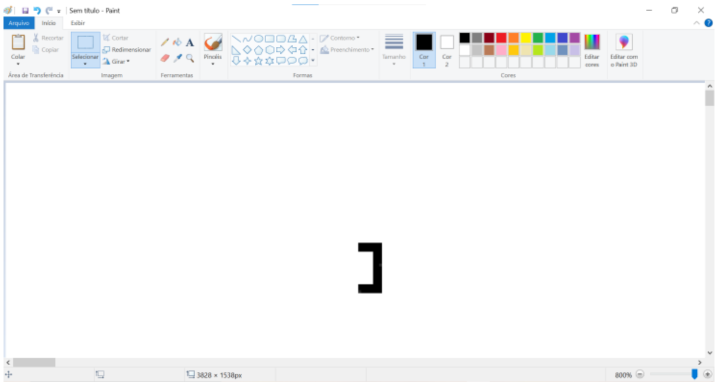
Figura 4.22 - Novo objeto colado



Fonte: O autor, 2021.

7. Repetimos os passos 4 a 6 para justapor os objetos, de acordo com a Figura 4.23. Nesta etapa teremos a semente que gera o fractal (primeira iteração).

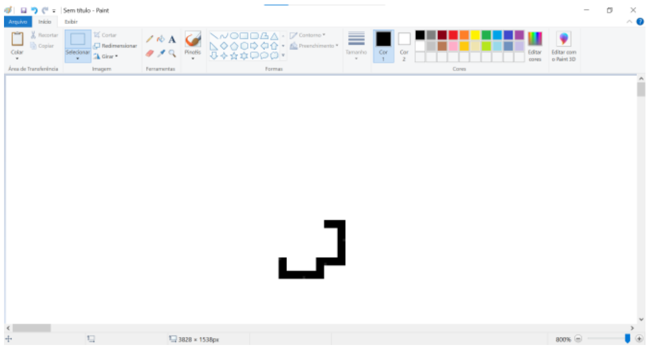
Figura 4.23 - Semente do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

8. Para a segunda iteração, copiamos, giramos à direita 90º e colamos a semente, conforme a Figura 4.24.

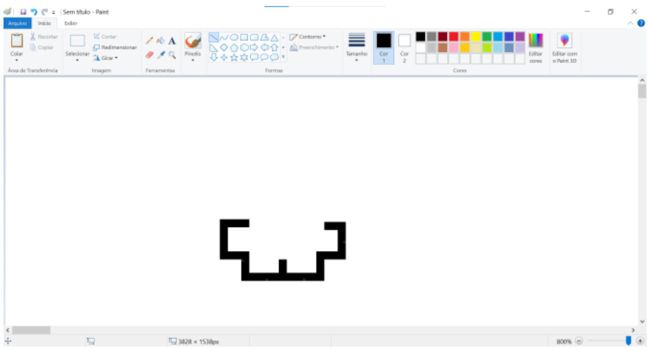
Figura 4.24 - Segunda iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

9. Na terceira iteração, copiamos, giramos à direita 90º e colamos a figura do item 8, para unir os objetos como na Figura 4.25.

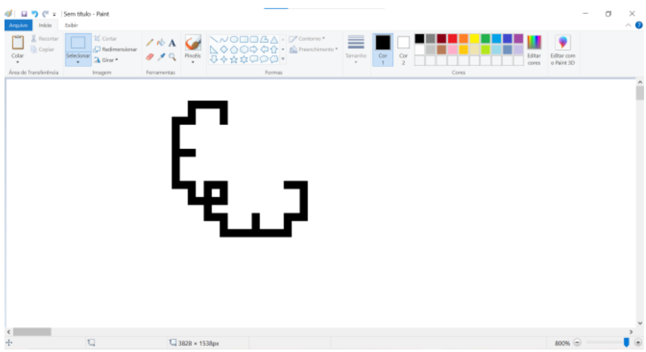
Figura 4.25 - Terceira iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

10. Na quarta iteração, siga os passos já mencionados de selecionar, copiar, colar, gira 90° a direita e arrastar o objeto do item 9, para formar a Figura 4.26.

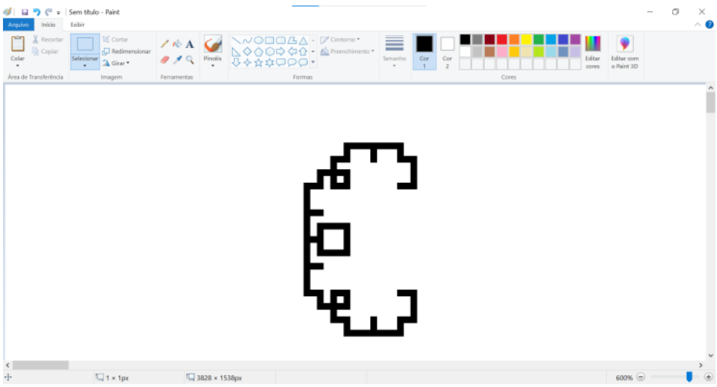
Figura 4.26 - Quarta iteração do Fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

11. A partir da quinta iteração, recomendamos que *zoom* seja diminuído gradativamente para aproveitar, ao máximo, a área de trabalho do paint. Siga procedimentos já citados para mais iterações. Na Figura 4.27, o *zoom* foi diminuído para 600%.

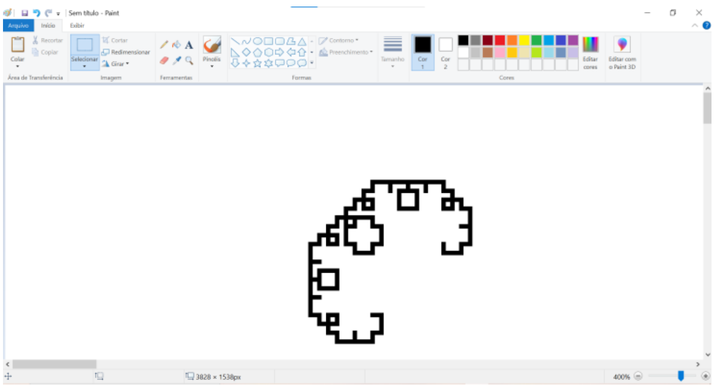
Figura 4.27 - Quinta iteração do Fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

12. Na sexta iteração o *zoom* está em 400%. Selecionar, copiar, colar, girar 90° a direita e arrastar o objeto do item 11, para formar a Figura 4.28.

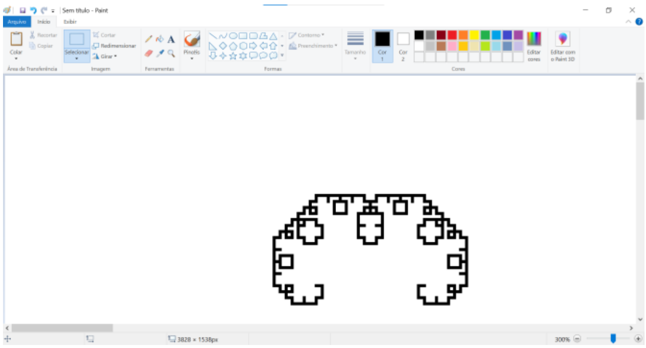
Figura 4.28 - Sexta iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

13. Na sétima iteração o *zoom* está em 300%. Selecionar, copiar, colar, girar 90° a direita e arrastar o objeto do item 12, para formar a Figura 4.29.

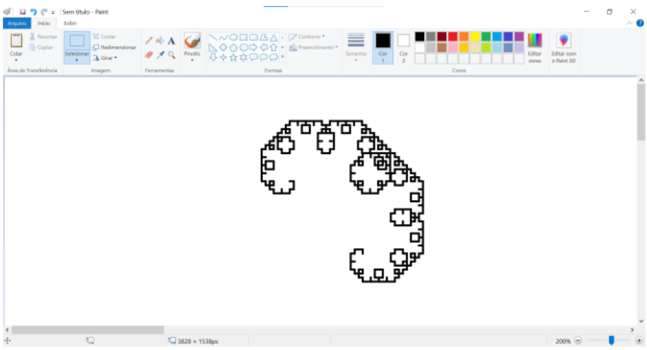
Figura 4.29 - Sétima iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

14. Na oitava iteração, continuamos reduzindo o, desta vez para 200%, seguindo os passos anteriores, como na Figura 4.30.

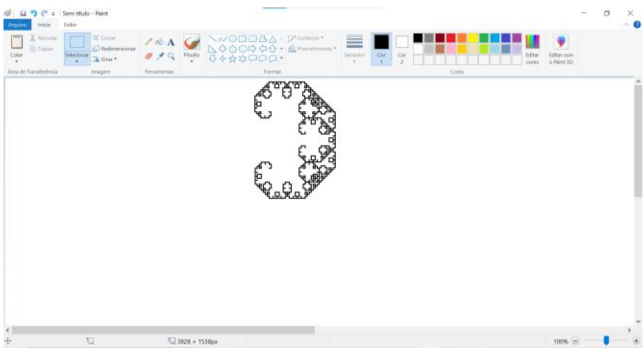
Figura 4.30 - Oitava iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

15. Na nona iteração o zoom foi reduzido a 100%. Copiando, girando 90º à direita e colando o objeto do item 14, obtém-se o fractal da Figura 4.31.

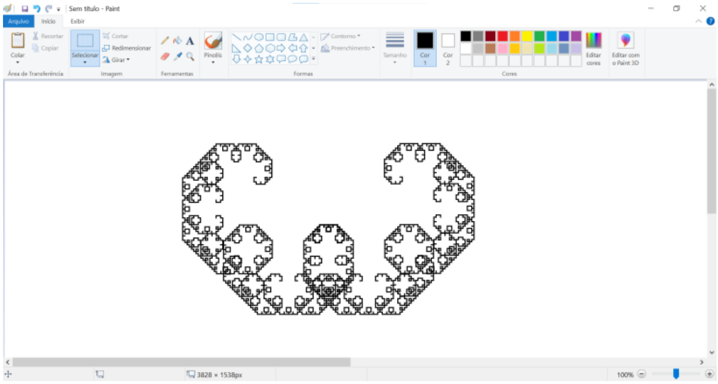
Figura 4.31 - Nona iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

16. Na décima iteração o zoom é mantido em 100%. Copiando, girando 90º à direita e colando o objeto do item 15, resulta o fractal da Figura 4.32.

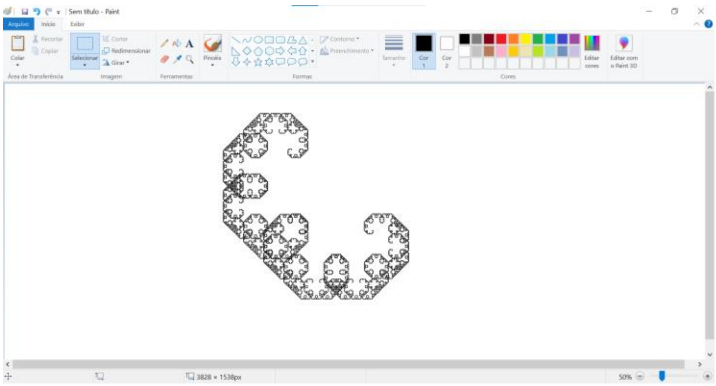
Figura 4.32 - Décima iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

17. Na décima primeira iteração o zoom foi reduzido a 50%. Copiando, girando 90º à direita e colando o objeto do item 16, resulta o fractal da Figura 4.33.

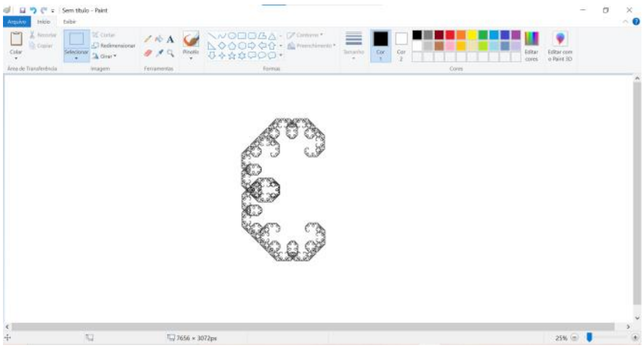
Figura 4.33 - Décima primeira iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

18. Na décima segunda iteração o zoom foi reduzido a 25%. Copiando, girando 90º à direita e colando o objeto do item 17, resulta o fractal da Figura 4.34.

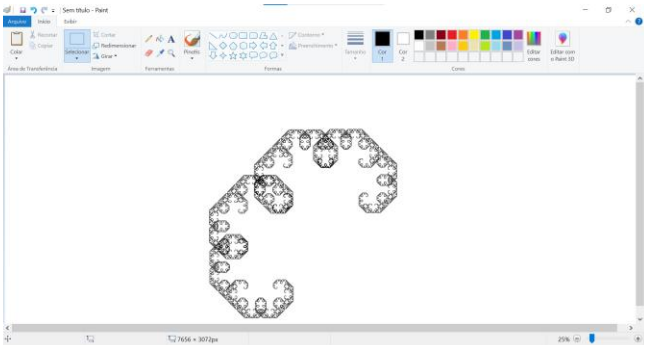
Figura 4.34 - Décima segunda iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

19. Na décima terceira iteração o zoom foi mantido a 25%. Copiando, girando 90º à direita e colando o objeto do item 18, resulta o fractal da Figura 4.35.

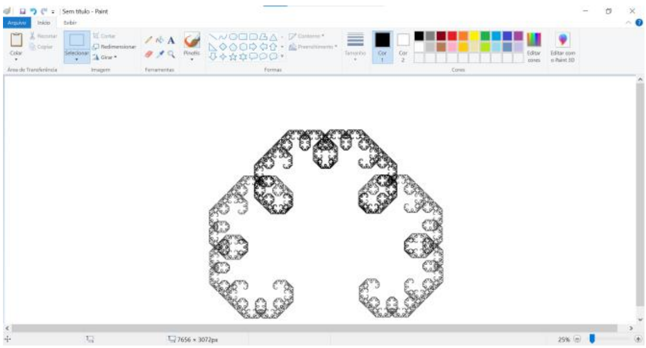
Figura 4.35 - Décima terceira iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

20. Na décima quarta iteração o zoom continua mantido a 25%. Copiando, girando 90º à direita e colando o objeto do item 19, resulta o fractal da Figura 4.36.

Figura 4.36 - Décima quarta iteração do fractal de Levy



Fonte: O autor, 2021.

Com um programa simples como o MS Paint e seguindo os passos aqui descritos, os alunos conseguem reproduzir e analisar o fractal de Levy.

Na construção deste fractal, espera-se que o aluno perceba que a cada iteração o número de segmentos (desprezando as sobreposições) é o dobro da iteração anterior, ou seja, uma Progressão Geométrica de razão 2.

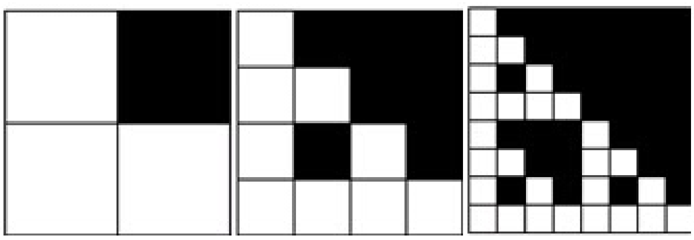
4.3 Polimінós

Existem os fractais chamados poliminós, eles podem ser construídos facilmente e são de grande utilidade no estudo das progressões. Entre os mais utilizados estão o Triminó, o Pentaminó e o Heptaminó que serão detalhados a seguir.

4.3.1 Fractal Triminô

O Fractal Triminó é utilizado com sequências numéricas e progressões geométricas. Para o desenvolvimento deste fractal, deve-se considerar três quadrados, justapondo-se em forma de L que será o nível 1. Para obter o próximo nível 2, devemos acrescentar um triminó em forma de L idêntico ao construído no passo anterior. Para o nível 3, repete-se a etapa anterior. Os próximos níveis são obtidos analogamente aos níveis anteriores, como mostra a Figura 4.37 abaixo.

Figura 4.37: Fractal Triminó

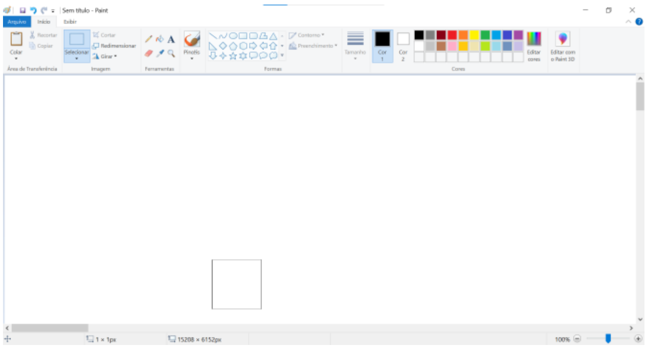


Fonte: Unipampa, 2014.

4.3.1.1 Construção no PAINT do Triminó

Assim como na construção do triângulo de Sierpinski, pesquise na internet um quadrado (de preferência branco com borda preta), copie e cole no Paint, como a Figura 4.38.

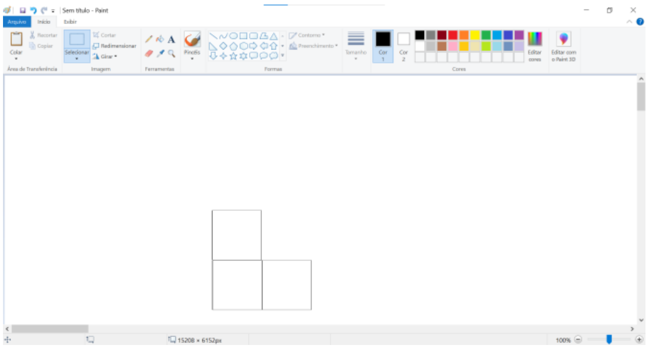
Figura 4.38: Tela do Paint com quadrado



Fonte: Autor, 2021.

Em seguida, copie e cole dois novos quadrados, unindo-os para fazer a primeira iteração, conforme a Figura 4.39.

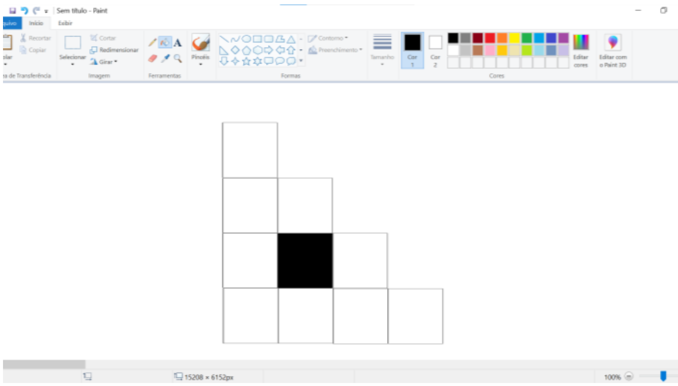
Figura 4.39: Triminó não reto



Fonte: Autor, 2021.

O aluno deverá copiar e colar, como forma de substituir cada peça quadrada por um triminó, pintando o minó central. (Figura 4.40).

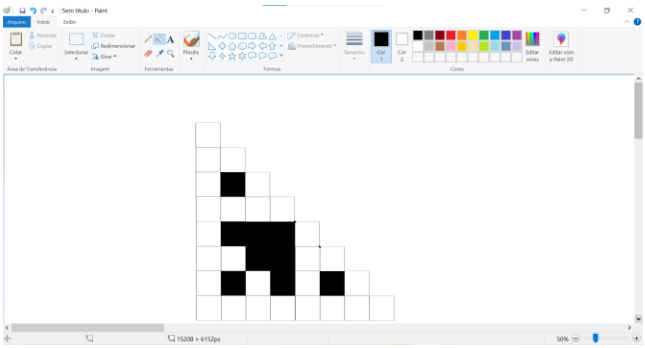
Figura 4.40: Triminó nível 2



Fonte: Autor, 2021.

Novamente o aluno deverá copiar, colar e unir os triminós (Figura 4.41).

Figura 4.41: Triminó nível 3



Fonte: Autor, 2021.

Contam-se os quadrados, resultando numa sequência crescente, seguindo este passo a passo:

Etapa 1: 3 quadrados = 3^1 quadrados

Etapa 2: 3 · 3 quadrados = 3^2 quadrados

Etapa 3: 3 · 3 · 3 quadrados = 3^3 quadrados

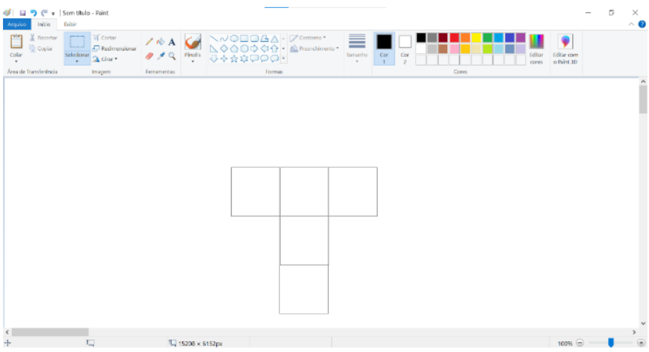
E assim por diante.

Podemos observar que a quantidade de peças aumenta infinitamente em progressão geométrica de razão 3, isto é, em cada nível, o número de “minós” é o triplo do nível anterior.

4.3.2 Fractal Pentaminó em T

Faça um “T” com 5 quadrados, analogamente como feito no triminó. Observe a Figura 4.42:

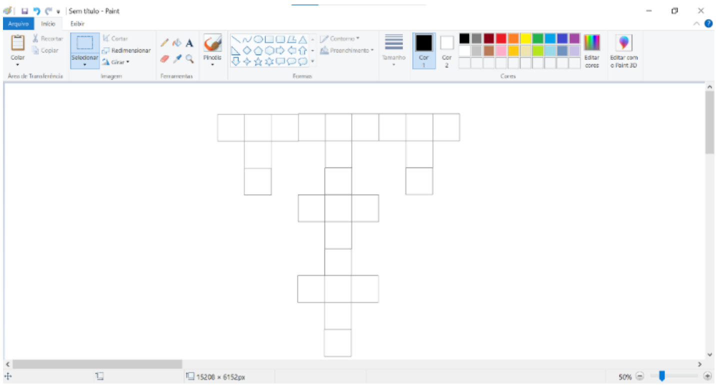
Figura 4.42: Fractal Pentominó em T - nível 1



Fonte: Autor, 2021.

Agora, copie e cole os “T’s” conforme a Figura 4.43:

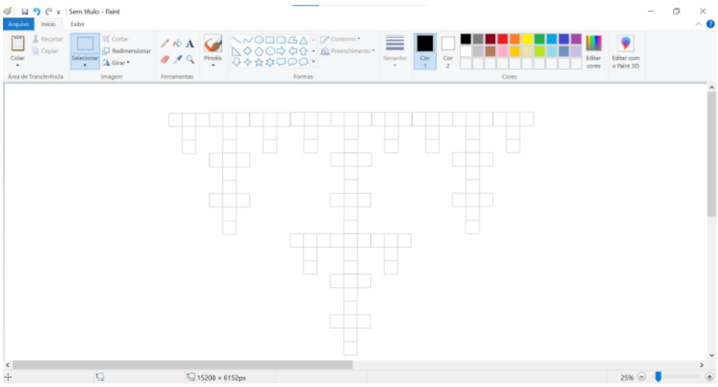
Figura 4.43: Fractal Pentominó – nível 2



Fonte: Autor, 2021.

Copiando e colando sucessivamente os “T’s”, vai dando forma ao Pentaminó (Figura 4.44).

Figura 4.44: Pentaminó - nível 3



Fonte: Autor, 2021.

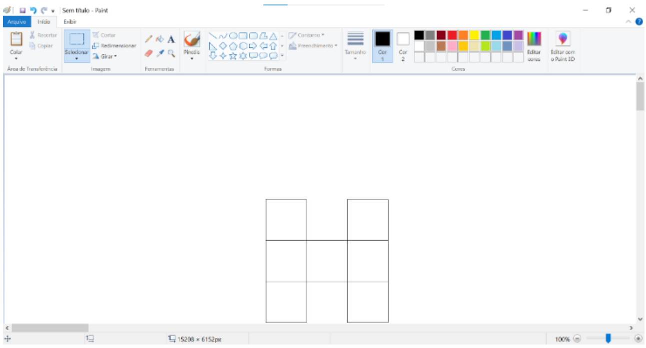
Perceba que na primeira iteração há 5 quadrados, na segunda 25 e na terceira 125, isto é, cada iteração do pentaminó o número de quadrados aumenta em progressão geométrica de razão 5.

4.3.3 Fractal Heptaminó em H

O heptaminó em H, assim como o triminó e o pentaminó, também pode ser feito no Paint, seguindo as etapas a seguir:

Copie e um quadrado da internet, cole sete vezes no Paint, organizando, conforme a Figura 4.45, para fazer a primeira iteração deste fractal.

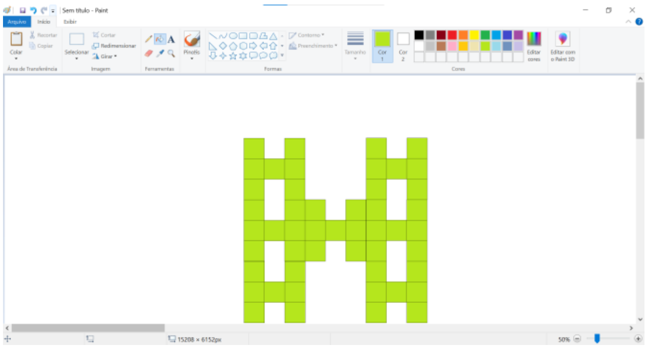
Figura 4.45: Heptaminó - nível 1



Fonte: Autor, 2021.

Em seguida, copie e cole os "H's" conforme a Figura 4.46. nesta etapa, é interessante que o aluno pinte o heptaminó para destacá-lo.

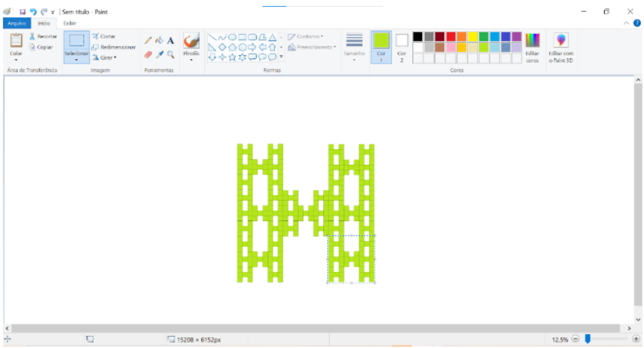
Figura 4.46: Heptaminó - nível 2



Fonte: Autor, 2021.

Continue com o processo de copiar, colar e unir os heptaminós para chegar no nível 3, conforme a Figura 4.47.

Figura 4.47: Heptaminó - nível 3



Fonte: Autor, 2021.

Com a utilização do heptaminó em H, é esperado que o aluno chegue à conclusão de que em cada nível, os quadrados formam uma progressão geométrica de razão 7, como pode ser visto a seguir.

Nível 1: 7 quadrados = 7^1 quadrados

Nível 2: $7 \cdot 7 = 49$ quadrados = 7^2 quadrados

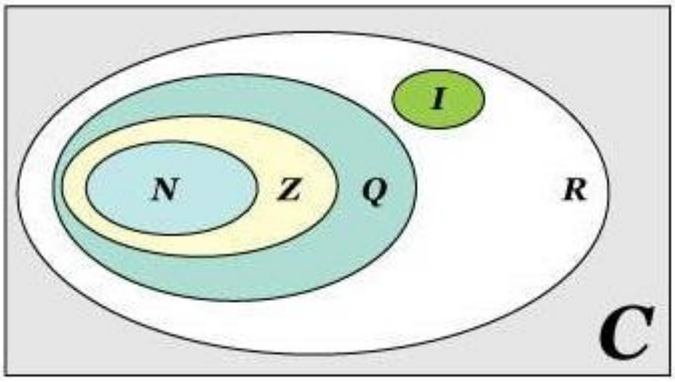
Nível 3: $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ quadrados = 7^3 quadrados

5. CONJUNTOS DE JÚLIA E OS FRACTAIS

5.1 Conceitos Preliminares

Quantos aos conjuntos numéricos estão organizados da seguinte forma, de acordo com a figura abaixo:

Figura 5.1: Os principais conjuntos numéricos.



Fonte: Educa Mais Brasil

• A letra (N) representa o Conjunto dos números naturais composto pelos números inteiros, não negativos;

• Conjunto dos números inteiros (Z): além dos elementos dos números naturais, esse conjunto engloba os números negativos simétricos aos naturais;

• Formado por números que podem ser escritos em frações na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b diferente de zero, tem-se o Conjunto dos números racionais (Q);

• Conjunto dos números irracionais (I): composto pelos números infinitos e não periódicos, ou seja, aqueles que não podem ser representados na forma de frações;

• Conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$: É a união dos números racionais e irracionais;

• Conjunto dos números complexos $(\mathbb{C})$: esse conjunto engloba todos os outros mencionados e contempla as raízes quadradas de números negativos. Este é o ponto central do estudo.

No desenvolver da matemática surgiam resultados que levavam a radicais negativos. Nesses casos concluía-se que o problema não tinha solução. Muitos matemáticos se debateram com esse problema e tentaram resolvê-lo.

CAIUSCA (2019), destaca que após o conhecimento de muitos estudiosos, Raphael Bombelli, por volta de 1572, definiu que a partir de uma equação do tipo $x^3 - 15x - 4 = 0$, ele sabia que o resultado de $x = 4$, contudo não havia cálculos válidos a partir de números reais capazes para chegar esse resultado. Com isso ele percebeu a existência de números até então não definidos, o que na época lhe pareceu estranho, conforme relata CAIUSCA (2019): “Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova”.

Os números complexos podem ser representados na forma algébrica e na forma trigonométrica. Neste trabalho, daremos ênfase na sua representação na forma algébrica. Nesta forma, os números complexos são representados por

$$Z = a + bi$$

Nesta representação, a e b são números reais chamados, respectivamente, de parte real Z e parte imaginária de Z, enquanto i é a unidade imaginária.

Na prática têm-se as operações com números complexos, como:

- **Adição e multiplicação**

A adição é realizada entre a parte real com a parte real e a parte imaginária com parte imaginária.

Utilizamos a propriedade distributiva para realizarmos a multiplicação. Acompanhe a seguir.

Dados os números complexos $Z_1 = a + bi$ e $Z_2 = c + di$, na multiplicação entre eles o resultado é:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = ac + adi + bci - bd$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = ac - bd + adi + bdi$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = ac - bd + (ad + bd)i$$

Exemplo 5.1: Adição

$$Z_1 + Z_2 = (2 + 5i) + (4 - 3i)$$

$$= (2 + 5i) + (4 - 3i)$$

$$= 2 + 4 + 5i - 3i$$

$$= (2 + 4) + (5 - 3)i$$

$$= 6 + 2i$$

Portanto,

$$Z_1 + Z_2 = 6 + 2i$$

Exemplo 5.2: Multiplicação

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 + 5i) \cdot (4 - 3i)$$

$$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3i) + 5i \cdot 4 + 5i \cdot 3i$$

$$= 8 - 6i + 20i + 15i^2$$

lembre-se que $i^2 = -1$, logo

$$= 8 - 6i + 20i + 15 \cdot (-1)$$

$$= 8 - 6i + 20i - 15$$

$$= 8 - 6i + 20i - 15$$

$$= 8 - 15 - 6i + 20i$$

$$= (8 - 15) + (-6i + 20i)$$

$$= (8 - 15) + (-6 + 20)i$$

$$= -7 + 14i$$

Assim,

$$Z_1 \cdot Z_2 = -7 + 14i$$

Por meio destes exemplos percebemos como se aplica as operações fundamentais dos Números Complexos na forma algébrica.

Além da adição e multiplicação dos números complexos, destacamos as definições de módulo e conjugado deste conjunto numérico, como segue abaixo.

- **Módulo de um número complexo**

Pode-se atribuir um número real positivo a um número complexo associado, denominado módulo.

O módulo de um número complexo, representado por $|Z|$ é determinado quando se calcula a raiz quadrada da soma dos quadrados de a e b.

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplo 5.3

Seja $Z = 3 - 4i$, o módulo de Z será

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|Z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$
$$|Z| = \sqrt{9 + 16}$$
$$|Z| = \sqrt{25}$$
$$|Z| = 5$$

- **Conjugado de um número complexo**

Dado um número complexo na forma $Z = a + bi$, o conjugado desse número, representado por $\bar{Z}$, é obtido ao somarmos a parte real com o simétrico da parte imaginária.

Seja $Z = a + bi$, o conjugado de Z é $\bar{Z} = a - bi$

Exemplo 5.4

Considere $Z = 8 + 9i$, o conjugado de Z será $\bar{Z} = 8 - 9i$

5.2 Conjuntos de Julia

Os conjuntos de Julia são conjuntos no plano complexo que surgiu no estudo da dinâmica polinomial complexa. Em homenagem a Gaston Julia foram denominados assim. Gaston Maurice Julia foi um matemático francês que viveu entre 1893 à 1978 e foi quem estudou os conjuntos e suas propriedades de forma primária (MACHADO e HOYOS, 2019, p.22).

Machado e Hoyos (2019, p.12) afirmam que a base de Julia nestes conjuntos surgiu a partir do artigo de Arthur Cayley intitulado de “The Newton-Fourier imaginary problem" no qual destacou as raízes da função $f(z) = z^2 + c$, onde $z \in \mathbb{C}$ e c é uma constante complexa.

Julia estudou além das funções de grau 3, as funções polinomiais de vários graus e até funções racionais, segundo a Revista de Matemática da UFOP.

Seu estudo completo sobre esses conjuntos foi publicado em 1918, destacando os conjuntos de Julia gerados pela função quadrática $fc(z) = z^2 + c$ onde z é uma variável complexa e c é um parâmetro complexo.

O conjunto de Julia, representado por J_c, gerado pela função $f_c(z)$ é a fronteira do conjunto de Julia preenchido, denotado por K_c. O conjunto de Julia preenchido, K_c, é por definição o conjunto de pontos do plano complexo que possuem órbita limitada pela função $f_c(z)$.

Os conjuntos possuem para cada $c \in \mathbb{C}$ tem-se um conjunto de Julia K_c associado.

Gaston Maurice Julia (1893-1978) foi um matemático francês, interessado no estudo de sistemas dinâmicos complexos. Julia pesquisou o comportamento de iterações de funções complexas racionais e polinomiais. As iterações de funções quadráticas do tipo $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é uma constante complexa.

Denomina-se órbita de um ponto z_0, a sequência formada por pontos, de uma função complexa $\forall$ $\mathbb{C}$ dada por

$$\boldsymbol{z_0, f(z_0), f(f(z_0)), f(f(f(z_0))), f(f(f(f(z_0)))), \ldots}$$

Dada uma função f em $\mathbb{C}$ e um ponto z_0, dizemos que $O_f(z_0)$ é limitada se existe um M real maior que 0 (zero) tal que

$$\boldsymbol{|f^n(z_0)| \leq M, \forall\, n \in N}$$

Quando $f(x_0) = x_0, x_0$ é um ponto fixo da função f. Neste caso, $f^n(x_0) = x_0, \forall\, n \in N$ e f é limitada.

Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 5.5

Considere a função $f(x) = x^2 – 2\ e\ x_0 = –1$.

$$f^0 = x_0 = -1$$

$$f^1 = f(-1) = -1$$

$$f^2 = f(-1) = -1$$

$$f^3 = f(-1) = -1$$

$$f^4 = f(-1) = -1$$

$$f^5 = f(-1) = -1$$

$$f^6 = f(-1) = -1$$

Observe que $f^0 = f^1 = f^2 = f^3 = f^4 = f^5 = f^6 =, \ldots, f^n$. Logo $-\ 1$ é um ponto fixo de f e $O_f(-\ 1)$ é uma sequência limitada.

Para $|f^n(z_0)| \to +\infty$, se $n \to +\infty$, a órbita escapa para o infinito. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo 5.6: Dada a função $f(x) = x^2 - 1$ e um valor arbitrário para x_0.

Inicialmente, faremos $x_0 = 1{,}8$, então;

$$f^0 = x_0 = 1{,}8$$

$$f^1 = f(1{,}8) = 2{,}24$$

$$f^2 = f(2{,}24) = 4{,}02$$

$$f^3 = f(4{,}02) = 15{,}16$$

$$f^4 = f(15{,}16) = 228{,}83$$

$$f^5 = f(228{,}83) = 52.362{,}17$$

$$f^6 = f(52362{,}17) = 2.741.796.846{,}11$$

Faremos, agora, $x_0 = 1{,}1$.

$$f^0 = x_0 = 1{,}1$$

$$f^1 = f(1{,}1) = 0{,}21$$

$$f^2 = f(1{,}25) = -\ 0{,}96$$

$$f^3 = f(0{,}56) = -\ 0{,}08$$

$$f^4 = f(-\ 0{,}08) = -\ 0{,}99$$

$$f^5 = f(-\ 0{,}99) = -\ 0{,}02$$

$$f^6 = f(-\ 0{,}02) = -\ 0{,}99$$

Note que no ponto $x_0 = 1{,}8$, a órbita cresce indefinidamente. Por outro lado, no ponto $x_0 = 1{,}1$, as iterações formam uma sequência limitada.

Pode-se perceber que, conforme o exemplo acima, uma função pode produzir órbitas limitadas e ilimitadas.

Vejamos a seguir como as órbitas se comportam no conjunto dos números complexos para a função $f_c(z) = z^2 + c$, segundo o estudo da Revista de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (2019).

O Conjunto de Julia preenchido da função complexa polinomial $f_c(z) = z^2 + c$, denotado por K_c, é o conjunto de pontos do plano complexo cuja órbita é limitada, isto é,

$$K_c = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid O_{fc}(z_0) \text{ é limitada}\}.$$

Enquanto o Conjunto de Julia é a fronteira de K_c.

De acordo com Machado e Hoyos (2019), os conjuntos quadráticos em que $|c|$ é maior que 2 são denominados Conjuntos de Cantor. Por este motivo, nos limitaremos a apresentar exemplo em que $|c| \leq 2$.

Exemplo 5.6

Dada a função $f_{-1}(z) = z^2 - 1$. Note que $c = -1$. Vamos determinar pontos fixos e órbitas de outros pontos.

Para determinarmos pontos fixos da função complexa acima, fazemos $f_{-1}(z) = z$, logo

$$z^2 - 1 = z$$

$$\Rightarrow z^2 - 1 - z = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Assim, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são pontos fixos de $f_{-1}\,(z) \;=\; z^2 -\, 1$ e, portanto, pertencem a K_c.

Vamos determinar a órbita de $z_0 \;=\; i \; e \; z_0 \;=\; 1{,}2 + 0i$

Para $z_0 \;=\; i$, temos

$$z_0 = i$$
$$z_1 = f^1(i) = -2$$
$$z_2 = f^2(i) = f(-2) = 3$$
$$z_3 = f^3(i) = f(3) = 8$$
$$z_4 = f^4(i) = f(8) = 63$$
$$z_5 = f^5(i) = f(63) = 3.968$$
$$z_6 = f^6(i) = f(3.968) = 15.745.023$$

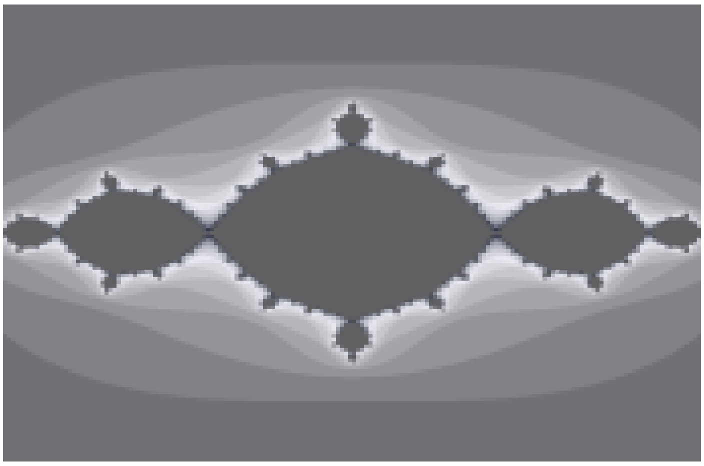
Portanto, tende ao infinito e não pertence a K_c.

$$z_0 = 1{,}2$$
$$z_1 = f^1(1{,}2) = 0{,}44$$
$$z_2 = f^2(1{,}2) = f(0{,}44) = -0{,}81$$
$$z_3 = f^3(1{,}2) = f(-0{,}81) = -0{,}34$$
$$z_4 = f^4(1{,}2) = f(-0{,}34) = -0{,}88$$
$$z_5 = f^5(1{,}2) = f(-0{,}88) = -0{,}23$$
$$z_6 = f^6(1{,}2) = f(-0{,}23) = -0{,}9$$

Percebe-se que esta sequência é limitada, portanto o ponto $x_0 = 1{,}2$ pertence a K_c.

O conjunto apresentado acima é um fractal e recebe o nome de Basílica, devida a sua semelhança com a Basílica de São Pedro situada no Vaticano. Sua representação após várias iterações está ilustrada na Figura 5.2.

Figura 5.2: Conjunto de Julia (c = −1)



Fonte: Revista de Matemática da UFOP (2237-8103): v.06 pp:31-39 2019

5.3 O conjunto de Julia

O conjunto de Julia é gerado pela seguinte recursão discreta:

$$\begin{cases} z_k = f(z_{k-1}) \\ z_0 = z \end{cases}, \quad k \geq 1$$

onde, z_k são números complexos e z_0 é o valor inicial da recorrência.

Consideramos neste trabalho o caso $f(z) = z^2 + c$, onde c é um número fixo pré-determinado e que define o fractal de Julia a ser gerado, portanto resulta a recorrência:

$$\begin{cases} z_k = z_{k-1}^2 + c \\ z_0 = z \end{cases}, \quad k \geq 1$$

Seja o conjunto de Julia J formados pelos números $z_0 = z$ tal que as iterações z_k estejam no interior do círculo de raio 2 no plano complexo:

$$J = \{z\colon\ |z_k| < 2\}$$

O objetivo é fazer a representação gráfica do conjunto de Julia, para o qual consideramos uma região do plano complexo. Cada ponto desta região é a condição inicial da recorrência, a qual é iterada n vezes, sendo que a iteração é parada se o ponto z_k está fora do círculo de raio 2, caso contrário a iteração contínua até atingir as n iterações. Cada ponto da região recebe uma cor associada ao número de iterações que realizou na recorrência.

Desenvolvemos o código em python (ver detalhes na seção 5.4) e apresentamos alguns fractais para vários valores da constante complexa c.

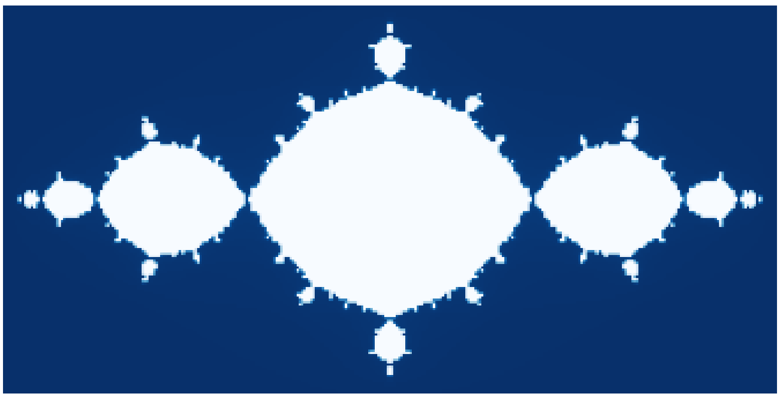
Figura 5.3. Conjunto de Julia para $c = -0{,}744 + 0{,}148i$

Fonte: O autor

Figura 5.4. Conjunto de Julia para $c = -0{,}8 + 0{,}156i$

Fonte: O autor

Figura 5.5. Conjunto de Julia para $c = -1 + 0i$



Fonte: O autor

Figura 5.6. Conjunto de Julia para $c = -0{,}8 - 0{,}25i$

Fonte: O autor

Observa-se que variando o valor da constante complexa c os gráficos geram diferentes fractais no conjunto de Julia J.

5.4 Algoritmo em Python

As simulações numéricas são implementadas em Python, que é uma linguagem de alto nível de distribuição gratuita, desenvolvida por Guido Van Rossum em 1991 (SANTANA, 2020) e conta com uma comunidade de desenvolvedores para aplicações em diversas áreas do conhecimento. Os algoritmos são fáceis de implementar e a seguinte proposta permite iniciar ao estudante de ensino médio nas simulações práticas em fractais.

Consideramos uma malha de m=256 pontos na horizontal (parte real) e n=128 pontos na vertical (parte imaginária), totalizando 32768 pontos (números complexos) a analisar se estão ou não no conjunto de Julia.

Estes pontos são transformados para os intervalos

$$-\frac{5}{3} \leq x_j \leq \frac{5}{3} \quad \text{e} \; -\frac{5}{6} \leq y_k \leq \frac{5}{6}$$

onde,

$$x_j = \frac{5 * j}{(m+n)}, \quad j = -\frac{m}{2}, \cdots, \frac{m}{2}$$

$$e$$

$$y_k = \frac{5 * k}{(m+n)}, \quad k = -\frac{n}{2}, \cdots, \frac{n}{2}$$

isto define os números complexos $z_{j,k} = x_j + iy_k$ como as condições iniciais da recorrência de Julia.

Cada ponto $z_{j,k}$ é iterado uma determinada quantidade de vezes usando a fórmula recursiva. Aconselhamos ao aluno fazer a simulação com 32, 64, 128 e 256 iterações para visualizar a diferenças nas representações gráficas, quando maior é o número de iterações as representações gráficas dos fractais ficam mais nítidas.

Após o final da iteração de cada ponto $z_{j,k}$ o número de iterações é alocado numa matriz N de dimensão $m \times n$ na posição (j,k). Cada elemento da matriz N representa uma cor e sua representação gráfica desta matriz gera a visualização do fractal do conjunto de Julia.

A malha será dividida verticalmente em 8 partes verticais, gerando 8 partes do fractal, unindo estas partes obtém-se o fractal completo.

No Algoritmo 5.1 se apresenta a consolidação computacional do fractal gerado pelo conjunto de Julia, mediante a função **julia** em python.

Algoritmo 5.1: Função que gera o fractal do conjunto de Julia

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def julia(parte, numiter,c):
    # parte = 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8
    # quantas iterações deseja realizar em z_k = z_{k-1}^2 + c
    m = 256
    n = 128
    s = (m+n)*2/5
    x = np.linspace(-m / s, m / s, num=m).reshape((1, m))
    y = np.linspace(-n / s, n / s, num=n).reshape((n, 1))
    m1 = 32
```

```
x1 = np.zeros((1,m1))
x1[0,:] = x[0,(parte-1)*m1:parte*m1]
Z1 = np.tile(x1, (n, 1)) + 1j * np.tile(y, (1, m1))
N = np.zeros((n, m1))
for j in range(n):
    for k in range(m1):
        i = 0
        while np.abs(Z1[j,k]) < 2 and i < numiter:
            Z1[j,k] = Z1[j,k] * Z1[j,k] + c
            i = i +1
        N[j,k] = i-1
plt.imshow(N, extent=[(parte-1)*32,parte*32-1,128,0],cmap='Blues_r')
plt.axis('off')
```

Fonte: O autor

5.5 Proposta didática para sala de aula

Para trabalhar em sala de aula o professor pode instalar o python nos computadores do laboratório de informática da escola e rodar o código ou pode trabalhar remotamente usando o google colab [(https://colab.research.google.com/)](https://colab.research.google.com/) acessando pela conta do gmail sem necessidade de instalar nenhum software nos computadores locais.

Para as atividades o professor deverá fornecer grupos de 9 alunos, sendo que oito deles deverão receber um número de 1 a 8 indicando que parte do fractal irão simular.

Cada um dos 8 alunos executará a função julia segundo a seguinte instrução:

julia(parte, número de iterações, c)

onde,

- parte é um número de 1 a 8 indicando que parte do fractal irá a simular
- número de iterações, pode ser 32, 64, 128 ou 256 indicando quantas iterações vai usar no algoritmo recursivo

- c é a constante complexa que define a forma do fractal, no python um número complexo se escreve na forma $c = a + bj$, onde a é a parte real e b é a parte imaginária

Por exemplo, se $parte = 2$, $número\ de\ iterações = 256$ e $c = -0{,}744 + 0{,}148i$, o aluno executará a seguinte instrução:

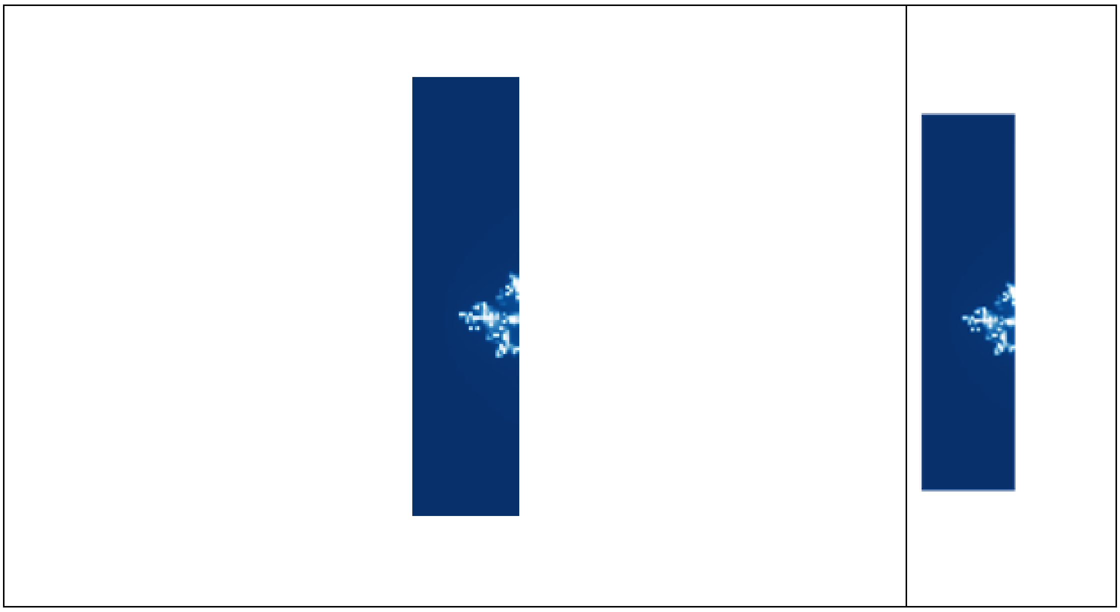
$$julia(2{,}256, -0.744 + 0.148j)$$

a saída será a representação da parte 2 do fractal, sendo gerado no diretório de trabalho um arquivo da figura com o nome fig_julia2.png.

Após gerada a figura cada aluno deve fazer o seguinte procedimento:

1. Abrir no Microsoft word a figura fig_juliak.png, onde k indica a parte do fractal que o aluno gerou
2. Fazendo click na figura, ir na aba '**Formato de imagem'** e logo na opção '**Cortar**', para recortar a imagem nas partes laterais, superior e inferior como mostra a Figura 5.7, deixar a figura recortada com altura 5 cm e largura 1,28cm

Figura 5.7: Figura original à esquerda e Figura recortada à direita



Fonte: O Autor

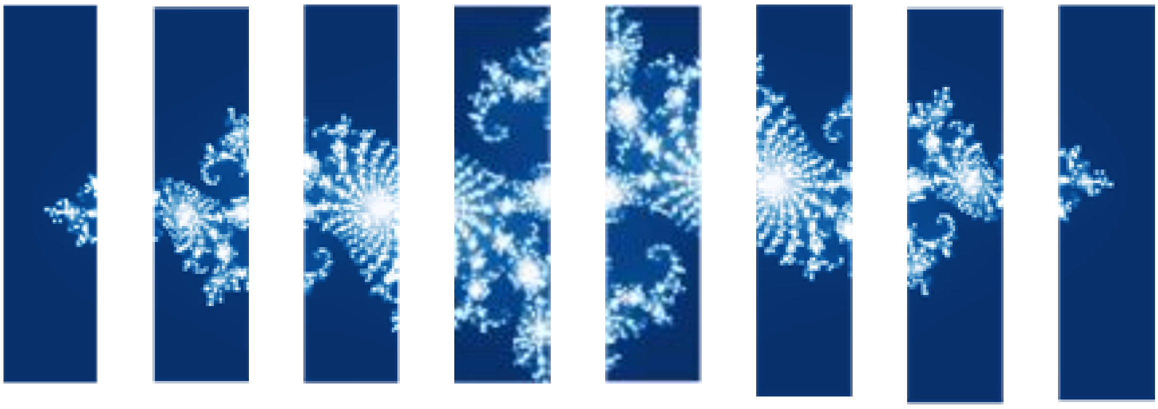
3. Clicando com o botão direito do mouse sobre a figura recortada, salvar esta figura com o mesmo nome da figura original fig_juliak.png.

4. Cada aluno enviara ao e-mail do nono aluno que não participou da geração do fractal a figura recortada que gerou na simulação computacional.

5. Cada aluno deve descrever a figura gerada e se observa algum comportamento fractal.

6. O nono aluno deve abrir um arquivo novo no Microsoft Word, e na opção inserir deve abrir os 8 arquivos recebidos de seus colegas, ele deve ter uma lista de arquivos ordenados como mostra a Figura 5.8. Caso alguma das figuras tenha tamanho diferente, ele pode ser corrigido para ter as dimensões corretas.

Figura 5.8: Arquivos recebidos das 8 partes do fractal

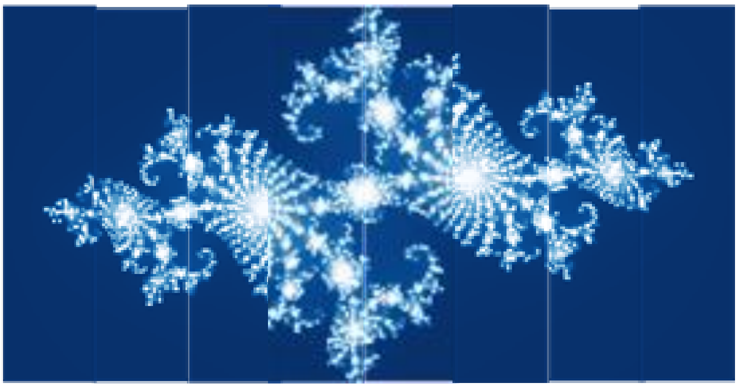


Fonte: O Autor

7. Em “opções de layout” escolha a opção quadrado para movimentar cada uma das figuras.

8. Movimentando as figuras, junte elas até obter o fractal completo como mostra a Figura 5.8.

Figura 5.9: Junção das Figuras para obter o fractal



Fonte: O Autor

9. Os alunos devem discutir o resultado da junção das Figuras e se conseguem agora visualizar com mais detalhes o fractal gerado.

10. Se repete o procedimento desde o passo 1 para outros grupos de 9 alunos, para os outros fractais da seção 5.3 com os seguintes valores de c:

- $c = -0{,}8 + 0{,}156j$
- $c = -1 + 0j$
- $c = -0{,}8 - 0{,}25j$

Esta atividade colaborativa entre alunos, em que simultaneamente cada um gera independentemente uma parte do fractal e um nono aluno faz a junção das partes mostra a base da computação paralela. Cada um dos oito alunos é um processador em paralelo que faz uma parte das operações e todos enviam seus resultados a uma unidade central de processamento (o nono aluno) que juntando toda as partes da informação obtém o resultado geral das simulações.

Uma outra atividade para cada um dos oitos alunos é executar o código mudando o número de iterações para 32, 64 e 128 e 256 iterações, cada aluno deve discutir que observa de diferente nas figuras geradas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho concluiu-se que o uso dos fractais em sala de aula rompe com o paradigma de que a matemática é uma ciência estática e finalizada e que tem aplicações práticas e de fácil compreensão, e reconhecido a semelhança com diversos elementos da própria natureza, mostra que a matemática que se estuda é flexível. Podendo inclusive utilizar programas de computadores, provocando mais fascínio para quem ensina e para quem aprende. Mesmo que abordados em diferentes níveis, os fractais provocam nos alunos um olhar diferenciado no mundo que está inserido.

Comprovou-se que utilizar fractais é uma alternativa inovadora de aprendizagem, pois como o exemplo apresentado nesta monografia o uso do Paint, software da Microsoft, pode ser uma forma mais interativa e eficaz de estudar a geometria.

Ao pesquisar sobre objetos fractais, e a necessidade de criá-lo em um ambiente gráfico adquiri uma maior experiência na utilização destes, utilizando de forma práticas vários conhecimentos relacionados a Teoria dos Números, Números Complexos, Sequências, Geometria Analítica e Álgebra Linear. Essa nova experiência me capacitou melhor para a utilização desses softwares no ambiente da sala de aula, inclusive com outras abordagens além do uso de fractais.

Atingindo tanto o objetivo geral como os específicos deste trabalho, o geral verificou-se a teoria de Fractal, sobre a viabilidade de ministrar um conteúdo mais avançado, adaptando-o aos requisitos que a turma possui como apresentados nos capítulos quatro e cinco da pesquisa, além de permitir ao aluno descobrir as propriedades e os comportamentos em fractais considerados e analisar os recursos pedagógicos digitais utilizados como o Microsoft Paint e o Python para construção de conhecimento matemático.

Uma das dificuldades encontradas na pesquisa foi relacionada com o material a ser utilizado. Encontram-se facilmente na internet sites que abordam o tema, e uma quantidade razoável de dissertações e teses recentes sobre o tema apresentando, na sua maioria, aplicações práticas utilizando a geometria fractal para modelar diversos fenômenos, porém necessitamos de mais material publicado na área de desenvolvimento matemático.

A pesquisa respondeu positivamente as hipóteses de que o conteúdo de Fractais é uma modalidade de ensino instigadora, a qual os alunos participam de forma mais ativa em sua própria construção de conhecimento, além dos professores e os alunos ensinarem e aprenderem em tempos e locais variados, promovendo a autonomia para que possam trabalhar em grupos e compartilhar conhecimentos e a personalização do ensino com a utilização de diferentes recursos didáticos.

A pesquisa é de caráter qualitativo com proposta de aplicação pedagógica, como exposto no item 5.5 do trabalho, em que as intervenções pedagógicas são inovações propositadamente concretizadas por professores em suas práticas na sala de aula, baseadas em um rico referencial teórico promovendo melhorias ou avanços nas práticas.

Enfim, espero seguir pesquisando e descobrindo novos recursos e aplicações para utilizar em sala de aula nesse fascinante mundo da geometria fractal.

REFERÊNCIAS

ABAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a Geometria Fractal para a sala deaula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARRUECO, Caroline. Como se Comprovou, Graças ao Crochê, que Euclides Estava Errado**. 2015.** Disponível em**:** https://noosfera.com.br/como-uma-delicada-forma-de-artesanato-revolucionou-nossa-maneira-de-perceber-a-matematica/. Acesso em: 04/02/2022.

BOYER, C. B. História da Matemática – 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. PCN + Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Orientações Educacionais Complementares. Disponível em « http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza .pdf» Acesso em 20/11/2021.

BRASIL. PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em « http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf ». Acesso em 20/11/2021.

BUENO, Lee. "A teoria do Caos no cinema". 2011. Disponível em https://cine-caos.blogspot.com/2011/06/fractais.html

BUENO, Aline Callegaro de Paula. BALBINOT, Antenor. BICCA, Paulo Renato. A Geometria Fractal como ferramenta para a compreensão do desenvolvimento urbano. XII Salão de Iniciação Científica PUCRS. 2010.

CAIUSCA, Alana. Números Complexos. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/numeros-complexos. Acesso em: 23/12/2021.

CURVA DE LÉVY. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em:

DALLA, Marcelo. O que é um fractal. 2012. Disponível em: http://www.marcelodalla.com/2012/03/o-que-e-fractal.html. Acesso em 20/11/2021.

DAMIANI, Magda Floriana. ROCHEFORT, Renato Siqueira. DE CASTRO, Rafael Fonseca. DARIZ, Marion Rodrigues. PINHEIRO, Silvia Siqueira: Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. 2013.

Deutsch, Clayton V., and Andre G. Journel. Geostatistical software library and user’s guide. New York :1992.

DOBROWOLSKI, E. N; BERTONI PINTO, N. IX Congresso da Educação Nacional: Movimento da Matemática Moderna nas Práticas Escolares e suas Repercussões na Maneiras de Ensinar, 2009.

FALCONER, Kenneth: Techniques in Fractal Gemetry. JOHN WILEY& SONS, Incorporated, John in inglish. 2000.

FERREIRA, João Pimentel. MATEMÁTICA VIVA: Considerações sobre os fractais. 2011. Disponível em: https://www.matematicaviva.pt/2011/05/consideracoes-sobre-os-fractais.html?m=0. Acesso em 20/11/2021.

FERREIRA FILHO, José Roberto. Geometria fractal: da natureza para a sala de aula. 2015. 84 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

FRACTALIZE: Modelagem Fractal nas Ciências e Engenharia. 2021. Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/. Acesso em: 17/12/2021.

GRACELI. Anselmo Luiz: Geometria e cálculo fractual e varicional indeterminista. 2014. Disponível em: geometriagracelifractual.blogspot.com. Acesso em: 17/12/2021.

KIMURA, Herbert. O mercado financeiro sob a óptica dos fractais. RAE-Revista de administração de empresas, vol. 45, n. 4, 2005.

LIBÂNEO, José Carlos. Didática. Ed. Cortez. São Paulo: 1994.

MACEDO, L. de. Ensaios Construtivistas. 5ª edição - São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

MACHADO, Eduardo Estevão. HOYOS, Mariana Garabini Cornelissen. Conjuntos de Julia Quadráticos. Revista de Matemática da UFOP. 2019.

MATHERON, Georges. Principles of geostatistics. Economic geology, v. 58, n. 8, p. 1246-1266, 1963.

MELO, Dirceu. “O que são fractais?”. 2020. Disponível em: https://fractaisconceitosaplicacoes.blogspot.com/2020/05/fractais-fundamentos-e-dimensao-fractal.html. Acesso em: 04/02/2022.

MOREIRA, M. A. Teorias de Aprendizagem. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

NEVES, Hélia. “O que tem o pulmão humano em comum com … o leito de um rio, uma fortificação ou um cristal de gelo?”. Cientistas descobrem que. Disponível em: https://cientistasdescobriramque.com. Acesso em: 04/02/2022.

OLIVEIRA, E. S. G. de; GAMA, Z. J. Prática de ensino 3 para licenciaturas – métodos e técnicas de avaliação. v. 1 – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

PÁDUA, Gelson Luiz Daldagan de. A Epistemologia Genética de Jean Piaget. Revista FACEVV: 2009.

RABAY, Yara Silvia Freire: Estudo e aplicações da Geometria Fractal. Universidade Federal da Paraíba-UFPB. 2013

REVISTA NA VEIA: O significado da palavra “fractais”. 2008. Disponível em: https://matematica-na-veia.blogspot.com/2008/02/o-significado-da-palavra-fractais.html. Acesso em: 17/12/2021.

SANTANA, Anderson Marcolino de. SÁ, Lucilene Antunes Correia Marques De: Abordagem histórica da teoria dos fractais na generalização cartográfica. VI Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife-PE. 2016.

SANTANA, Leonardo. “Porque escolher o Python para o desenvolvimento de software?”. 2020.

TAVARES, Renato: Fractais – Tapete de Sierpiiensk. Disponível em: https://matematicadorenato.blogspot.com/2016/04/fractais-tapete-de-sierpinski.html. Acesso em: 26/12/2021.

UVA, Marcelo. “O que são fractais?”. Disnível em: https://www.marcelouva.com.br/o-que-sao-fractais/. Acesso em: 04/02/2022.

VYGOTSKY, L. S. Pensamento e Linguagem. Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1998.

YAMAJI, Fábio Minoru. Análise Fractal de uma Floresta Ombrófila Mista Através de Imagens de Satélite. UFPR-Curitiba. 2001.

WEISSTEIN, Eric W. "Paradoxo do Litoral". De MathWorld - um recurso web wolfram. https://mathworld.wolfram.com/CoastlineParadox.html. Acesso em: 04/02/2022.

<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Curva_de_L%C3%A9vy&oldid=61870276
>. Acesso em: 07/02/2022.