UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA
DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATÉMATICA –PROFMAT

LUIZ ANTONIO LEAL DA SILVA

ENSINO E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇOES CÚBICAS: A FÓRMULA DE CARDANO E A SUA IMPORTÂNCIA PARA O APRENDIZADO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

MACAPÁ-AP
2021

Luiz Antonio Leal da Silva

ENSINO E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇOES CÚBICAS: A FÓRMULA DE CARDANO E A SUA IMPORTÂNCIA PARA O APRENDIZADO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá – PROFMAT, como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática sob a orientação do Prof.: Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Macapá- AP

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá.
Elaborado por Mário das G. Carvalho Lima Júnior – CRB-2/1451

Silva, Luiz Antonio Leal da.

Ensino e resolução das equações cúbicas: a fórmula de Cardano e a sua importância para o aprendizado de matemática no ensino médio / Luiz Antonio Leal da Silva; orientador, José Walter Cárdenas Sotil. - Macapá, 2021.

78f.

Dissertação (Mestrado) - Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

1. Equações cúbicas. 2. Fórmulas – Cardano. 3. Matemática (Segundo grau). I. Cárdenas Sotil, José Walter, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

CDD – 510 / S586e

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Luiz Antonio Leal da Silva intitulada: ENSINO E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇOES CÚBICAS: A FÓRMULA DE CARDANO E A SUA IMPORTÂNCIA PARA O APRENDIZADO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO, após terem inquirido e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós Graduação.

Macapá, 19 de Novembro de 2021.

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil
Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira
Avaliador externo (IFAP)

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco
Avaliador interno (UNIFAP)

AGRADECIMENTOS

Nesses anos de estudo aprendi que o mestrado é uma longa viagem, que inclui uma trajetória permeada por inúmeros desafios, incertezas, angustias e muitas alegrias.

Nesta minha trajetória encontrei apoio, energia, força e coragem em indispensáveis pessoas, a quem dedico o meu sonho, o meu projeto de vida.

Especialmente aos meus pais, sobretudo a minha mãe Josefa, que incansavelmente me incentivou em todos os meus sonhos, plantando em meu coração o amor pela matemática, acreditando na minha capacidade mais que a mim mesmo.

Aos meus irmãos, meus filhos, que estiveram em cada etapa do processo, desde as primeiras tentativas de passar no tão sonhado PROFMAT. Angustiaram-se junto a mim quando não consegui, mas alegraram-se e vibraram até mais do que eu quando vimos meu nome naquela valiosa lista. Agradeço pelo encorajamento, por entenderem minhas ausências e por conseguirem tornar essa difícil jornada um pouco mais leve, validando meus sentimentos, meu cansaço e me ajudando a superar coisas as quais julgava insuperáveis.

Aos meus grandes amigos de turma, principalmente Ziro e Edesio, que foram incansáveis, mergulharam a fundo neste sonho que não é só meu, é nosso. Por todos os momentos onde nos reuníamos para estudar. Vocês elevaram meu nível científico, me enriqueceram com saberes excepcionais e me transbordaram através da parceria, generosidade e paciência.

Minha gratidão especial ao Prof. Dr. José Walter, meu orientador, pela pessoa e profissional que é. Por ter sido uma peça fundamental, sendo a bússola que conseguiu me guiar firmemente, não só me orientando, mas me ajudando enxergar as infinitas possibilidades a minha frente.

Por fim, o agradecimento mais importante: a Deus e Nossa Senhora, por estarem sempre comigo, me guiando, iluminando cada passo dado e me abençoando. Obrigado pela fé e por toda força necessária que me fizeram seguir firme, sem desistir. Sem essa força divina, nenhuma conquista seria possível. Agradeço mais ainda pelo grande presente que me deram, a vida do meu netinho Luca, que hoje me fortalece ainda mais, e me motiva a ir além.

“ A matemática, de um modo geral, é fundamentalmente a ciência das coisas que são evidentes por sim mesmas.”

(FELIX KLEIN)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino para a solução de equações de terceiro grau por meio de radicais com o uso da fórmula de Cardano, nos estudos das equações polinomiais de terceiro grau, em especial, para a solução de equações que possuem todas as raízes reais. Apesar dessa fórmula sempre levar a expressões com raízes quadradas de números negativos, mostraremos ser possível encontrar suas soluções sem utilizar números complexos, e sim por meio de funções trigonométricas. Nesse sentido, buscamos explorar conceitos relacionados a fórmula de Cardano que fundamentem a justificativa do seu uso na resolução das equações cúbicas. Para isso, baseamos nossos estudos em análises feitas em livros didáticos da Rede Pública de Ensino e em outras dissertações que abordam a fórmula de Cardano. Por fim, propomos uma sequência didática para ser aplicada no estudo das equações polinomiais no terceiro ano do ensino médio, a qual, permita ampliar as resoluções das equações cúbicas para o universo dos números reais, de forma que contemple aquelas que possuem todas as raízes irracionais, onde utilizaremos a fórmula de Cardano.

Palavras-chave: Equações cúbicas, fórmula de Cardano, resolução.

ABSTRACT

This work aims to present a teaching proposal for the resolution of third-degree equations through radicals using Cardano's formula, within the studies of polynomial equations of third degree, especially for the ones that have only real roots. Although this formula leads to expressions with square roots of negative numbers, we are going to show it is possible to find solutions without using complex numbers, but with trigonometric functions. That way, we aim to explore concepts related to Cardano's formula which substantiate the justification for its use to solve cubic equations. For that matter, we based our studies on analysis done on textbooks from the public teaching system and other dissertations that tackle Cardano's formula. Finally, we propose a teaching sequence to be applied to the study of polynomial equations of third degree in high school, which enables the expansion of resolutions of cubic equations to the universe of real numbers, in order to include the ones that have only irrational roots, with which we are going to use Cardano's formula.

Keywords: Cubic equations, Cardano formula, resolution.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações.
>
> (GARBI, 2007).

O estudo da álgebra tem seu desenvolvimento diretamente relacionado à resolução de equações polinomiais. Por séculos, um dos grandes desafios dos matemáticos era encontrar a solução dessas equações por meio de radicas, ou seja, por métodos resolutivos que levem a determinação das raízes de uma equação polinomial em função de seus coeficientes, envolvendo somente as operações algébricas fundamentais e mais a extração de raízes que dependem do grau da equação.

Anos antes de Cristo, babilônios, egípcios e gregos já utilizavam técnicas capazes de resolver as equações de segundo grau. Babilônios e egípcios utilizavam-se de textos e símbolos como ferramenta auxiliar na resolução. Os gregos utilizavam a geometria para resolver problemas que envolvessem essas equações. O francês Viéte, matemático responsável pela modernização da álgebra, foi o primeiro a introduzir as letras no método resolutivo das equações quadráticas. Mas somente no século XII, graças à contribuição de Baskhara estabeleceu-se o método no para solução das equações de segundo grau por meio de radicais. Segundo Roque e Carvalho (2019) os desenvolvimentos algébricos mais importantes dos séculos XV deveram-se aos esforços de alguns matemáticos para encontrar uma solução da cúbica por radicas. Em 1545, Girolamo Cardano publicou no livro *Ars Magna* (A grande arte) uma fórmula que dava a solução para essas equações.

De acordo com Santos (2013), na mesma época, Loduvico Ferrari, discípulo de Cardano, conseguiu deduzir um método geral, puramente algébrico, que permitia resolver as equações polinomiais do 4º grau. O caminho trilhado por Ferrari basicamente reduzia o grau da equação, transformando a quártica num par de equações quadráticas.

Para as equações polinomiais de grau ≥ 5, de acordo com Neto (2012, pg 66), o matemático norueguês Niels H. Abel e o matemático francês Évariste Galois, ambos no século XIX, provaram independentemente que não existe fórmula, construída em termos dos coeficientes da equação, que forneça, de modo geral, a solução real das mesmas. Galois desenvolveu a chamada Teoria de Galois, que através da Teoria de Grupo determina em quais condições uma equação de qualquer grau pode ou não apresentar soluções por meio de radicais.

Portanto, hoje temos fórmulas que solucionam qualquer equação polinomial de grau maior que dois e menor e igual a quatro. No entanto, chegou-se à conclusão de que nem sempre é possível encontrar a solução de equações de grau maior ou igual a cinco expressas por meio de radicais.

Nos tempos atuais, normalmente a Educação Básica contempla o estudo das equações polinomiais do primeiro e segundo grau. No Ensino Fundamental são estudadas as equações polinomiais de *n* graus, mas sem desenvolvimentos de métodos de resolução geral de equações de terceiro e quarto grau. Desta forma, especificamente as equações cúbicas são trabalhadas bem superficialmente e são resolvidas por métodos que servem somente para aquelas que possuem pelo menos uma raiz racional, o que ao nosso ver deixa uma lacuna no estudo dessas equações. Pois, assim como a equação do segundo grau, a equação do terceiro grau possui uma fórmula para extração das raízes a partir de seus coeficientes. A fórmula em questão, conhecida como fórmula de Tartaglia-Cardano ou apenas fórmula de Cardano consiste em um método de resolução de equações cúbicas por meio de radicais que, apesar de não ser tão simples quanto a fórmula de Bhaskara, ela pode ser uma grande ferramenta na resolução de equações cúbicas.

Nessa perspectiva, esse trabalho apresenta uma proposta didática para o uso da fórmula de Cardano nos estudos das equações polinomiais de terceiro grau, em especial, para a solução de equações que possuem todas as raízes reais, as quais, essa fórmula sempre leva a expressões com raízes quadradas de números negativos, mostrando ser possível encontrá-las sem utilizar números complexos e sim por meio de funções trigonométricas. Nesse sentido, buscamos explorar conceitos relacionados a fórmula de Cardano que possam fundamentar a justificativa do seu uso na resolução das equações cúbicas. Para isso, baseamos nossos estudos em análises feitas em livros didáticos da Rede Pública de Ensino e em outras dissertações que abordam a fórmula de Cardano.

Nosso objetivo é propor uma sequência didática para ser aplicada no estudo das equações polinomiais no terceiro ano do ensino médio, a qual, permita ampliar as resoluções das equações cúbicas para o universo dos números reais, de forma que contemple aquelas que possuem todas as raízes irracionais, onde utilizaremos a fórmula de Cardano com a mesma finalidade que a fórmula de bhaskara é aplicada no 9º ano do Ensino Fundamental, ou seja, para determinar somente as raízes reais da equação.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos. No primeiro capítulo buscamos fazer uma abordagem de como as equações de terceiro grau são trabalhadas no Ensino Médio, através de análises realizadas em livros didáticos. Como seque-se o mesmo padrão tomamos como referência o livro *Matemática – Ciência e Aplicações*, onde observou-se que os principais métodos utilizados na resolução das equações cúbicas não podem ser aplicados para muitos casos desse tipo de equação, limitando suas soluções para aquelas que possuem pelo menos uma raiz racional em que geralmente é preciso ter algumas informações previas sobre algumas delas.

No segundo capítulo procuramos fazer uma abordagem da fórmula de Cardano, onde primeiro foi feito a apresentação da fórmula, seguido de uma breve síntese do seu contexto histórico, demonstração e do estudo da análise das raízes da equação de terceiro grau.

No terceiro capítulo, tratamos da solução dos casos irredutíveis, que são os casos de equação de terceiro grau que tem as três raízes reais e sempre recaem em números complexos quando resolvidos pela fórmula de Cardano. Mostramos que é possível resolvê-los através de funções trigonométricas.

E por fim, no quarto capítulo, apresentamos uma sequência didática para soluções de equações de terceiro grau indicada para ser aplicada nos estudos das equações polinomiais no 3º ano do ensino médio.

2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

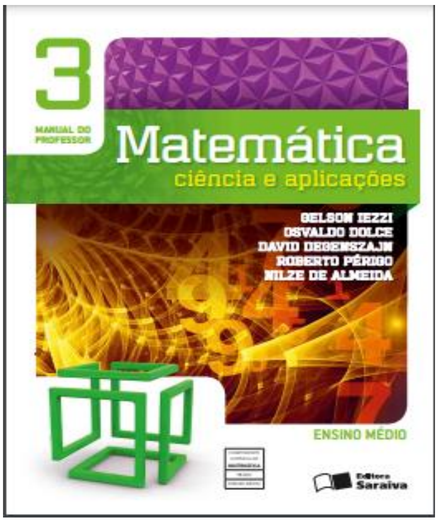
Neste capítulo faremos uma análise de livros didáticos disponíveis na maioria das escola públicas referente ao ensino de equações do 3º grau.

2.1 MÉTODO UTILIZADOS NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS NO ENSINO MÉDIO.

Partindo da análise de alguns livros didáticos usados no 3º ano do Ensino Médio na rede pública, verificou-se que diferente das equações de primeiro e segundo grau, não existe um estudo específico para equações cúbicas, mas sim, uma generalização teórica, a qual, insere a resolução dessas equações nos estudos das equações polinomiais de *n* graus. No entanto, os livros didáticos trazem alguns métodos de resoluções das equações de terceiro grau. Os principais são o dispositivo prático de Briot-Ruffini, Relações de Girard e pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica.

Abordaremos os métodos mencionados, conforme estão apresentados no livro *Matemática – Ciência e Aplicações* - Vol.3, ano 2016, escrito pelos autores Gelson Iezze, Osvaldo Dolce, David Degrnsszanln, Roberte Périgo e Nilze de Almeida, o qual segue um roteiro parecido com todos os outros analisados.

Figura 2.1 – Imagem da Capa do livro Matemática – Ciência e Aplicações.



Fonte disponível em: https://www.leonardoportal.com/p/acervo-de-matematica.htm acesso 20 de fev., 2021.

Os três métodos analisados são válidos para polinômios de *n* graus. Por isso são trabalhados pelos livros didáticos junto ao conteúdo referente a operações com polinômios e equações polinomiais de *n* graus. Mas como o foco desse trabalho são as equações de terceiro grau, iremos expor apenas suas aplicações para essas equações.

2.1.1 Dispositivo prático de Briot - Ruffini

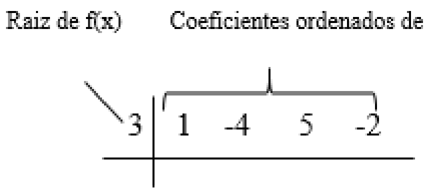
O dispositivo de Briot-Ruffini é utilizado na divisão de polinômios de qualquer grau por $x - \alpha$, mas em especial quando “α” for uma raiz da equação algébrica. O resto da divisão será igual a zero, e assim reduz em um grau a equação original.

O livro *Matemática – Ciência e Aplicações* traz no capítulo 8, página 215, que trata sobre polinômios, na parte de operações de polinômios, a seguinte “montagem” do dispositivo de Briot Ruffini usando um exemplo numérico:

Seja a divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $g(x) = x - 3$.

• 1º passo: Calculamos a raiz do divisor $g(x)$ e, ao seu lado, colocamos os coeficientes ordenados do dividendo $f(x)$, segundo potências de expoentes decrescentes de x:

Raiz de $g(x) = x - 3 \Rightarrow x = 3$



• 2º passo: Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo (1) e o multiplicamos pela raiz do divisor $(1 \cdot 3 = 3)$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

• 3º passo: Adicionamos o produto obtido (3) ao coeficiente seguinte (-4). A soma $(3 + (-4) = -1)$ é colocada abaixo desse coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

• 4º passo: Com a soma obtida (-1), repetimos as operações (multiplicamos pela raiz e adicionamos o coeficiente seguinte), e assim por diante.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}$$

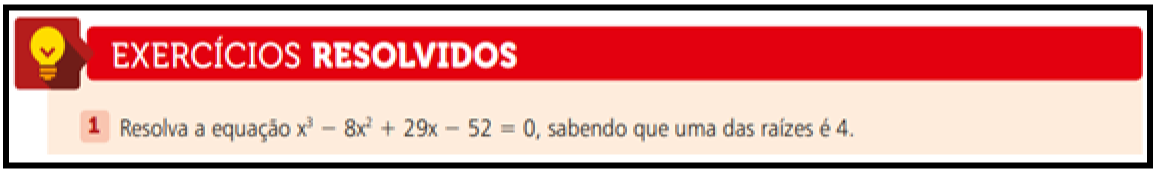
O último dos números obtidos no dispositivo ou algoritmo de Briot-Ruffini é o resto da divisão. Assim, $r(x) = 4$.

Os demais números obtidos nesse algoritmo correspondem aos coeficientes ordenados (segundo potências de expoentes decrescentes de x) do quociente da divisão. Assim:

$$g(x) = 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 2 = x^2 - x + 2$$

No capítulo seguinte, que trata sobre as equações polinomiais , o autor utiliza o dispositivo para resolver o seguinte exemplo na figura 2.2:

Figura 2.2 – Imagem do exercicio 1


EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 29x - 52 = 0$, sabendo que uma das raízes é 4.

Fonte: Matemática: contexto e aplicações, vol.3: ensino médio, 1ª edição. S.Paulo:Àtica, 2012

Resolução

Seja $p(x)$ o polinômio dado e 4 uma de suas raízes. Isto é,

$$p(x) = (x - 4) \cdot q(x)$$

Assim, $p(x)$ é divisível por $(x - 4)$ e o quociente dessa divisão é $q(x)$. Usando Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 \quad -8 \quad 29 & -52 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -4 \quad 13}_{\text{Coeficientes de } q(x)} & 0 \end{array}$$

Desse modo, as demais raízes são obtidas de $q(x) = 0$, ou seja, $x^2 - 4x - 13 = 0$.

Portanto, a solução da equação da equação $p(x) = 0$ é:

Utilizando Bhaskara para resolver q(x), temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$x_1 = 2 + 3i \quad e \quad x_2 = 2 - 3i$$

Portanto, o conjunto solução da p(x) é:

$$S = \{4,\ \ 2 + 3i,\ \ 2 - 3i\}$$

Nesse exemplo, podemos verificar que o dispositivo prático de Briot-Ruffini é uma ferramenta muito interessante na resolução das equações cúbicas. No entanto, para a sua utilização, é necessário que se conheça uma das raízes da equação, o que impede a generalização para a resolução de todas as equações do terceiro grau.

2.1.2 Relação de Girard

Dando sequência a este capítulo que trata sobre equações polinomiais, segundo os autores do livro *Matemática – Ciência e Aplicações* algumas relações entre os coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes, conhecidas como relações de Girard (Albert Girard, matemático francês, 1590-1633) constituem uma ferramenta importante no estudo das raízes de um polinômio quando conhecemos alguma informação sobre tais raízes. Para estudo importa apenas aqueles relacionados as relações de Girard na Equação de terceiro grau, conforme exemplo a seguir:

Sejam $r_1,\ r_2\ e\ r_3$ as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Dividindo os dois membros por a ($com\ a \neq 0$), temos:

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhante, temos que:

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2) \cdot (x - r_3) \Rightarrow$$

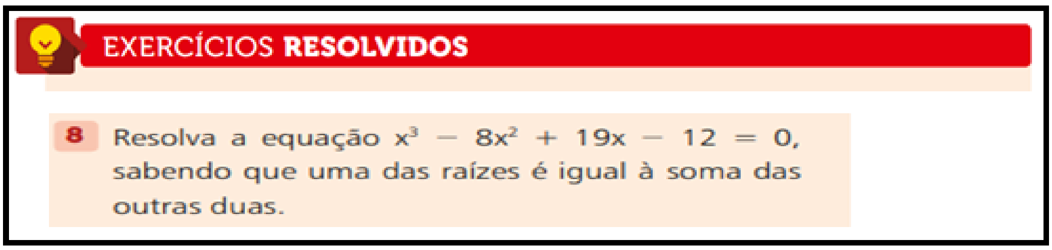
$$\Rightarrow x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Da igualdade dos polinômios, seque que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Na página 229, temos os seguintes exemplos (figuras 2.3 e 2.4), aplicados a resolução de equações cúbicas.

Figura 2.3 – Imagem do exercicio resolvido 08.



EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

8 Resolva a equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$, sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas.

Fonte: Matemática: contexto e aplicações, vol.3: ensino médio, 1ª edição. S.Paulo:Àtica, 2012

Resolução

Sejam $r_1,\ r_2\ e\ r_3$ as raízes procuradas. Escrevendo as Relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 8 & (1) \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = 19 & (2) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 12 & (3) \end{cases}$$

Do enunciado, temos que:

$$r_1 = r_2 + r_3 \qquad (4)$$

Substituindo $(4)\ em\ (1)$

$$r_1 + \underbrace{r_2 + r_3}_{r_1} = 8 \Rightarrow 2r_1 = 8 \Rightarrow r_1 = 4$$

O polinômio dado, então, é divisível por $x - 4$:

1	-8	19	-12	
	1	-4	3	0

As demais raízes seguem da solução da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ (1)

Por Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad e \quad x_2 = 1$$

Com isso temos a solução da equação : $S = \{1,\ 3,\ 4\}$

Figura 2.4 – Imagem do exercicio resolvido 09.

9 Resolva a equação $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são números inversos (ou recíprocos).

Fonte: Matemática: contexto e aplicações, vol.3: ensino médio, 1ª edição. S.Paulo:Àtica, 2012

Resolução

A raízes que equação possui podem ser representadas por:

$$r_1,\ \frac{1}{r_1},\ r_2 \qquad (1)$$

Escrevemos as relações de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{13}{4} & (2) \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = -\dfrac{13}{4} & (3) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -1 & (4) \end{cases}$$

Usando (1), podemos escrever um (4):

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -1 \Rightarrow\ r_1 \cdot \frac{1}{r_1} \cdot r_3 = -1 \Rightarrow r_3 = -1$$

Assim, o polinômio dado é divisível por $x + 1$:

-1	4	-13	-13	4
	4	-17	4	0

A outras raízes seguem de:

$$x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow r_2 = 4 \quad e \quad r_3 = \frac{1}{4}$$

Pode-se observar no exemplo acima descrito que as relações de Girard conseguem resolver algumas equações cúbicas, entretanto, para a sua utilização há a necessidade de conhecermos uma característica das suas raízes, o que também não generaliza a resolução de todas as equações do terceiro grau.

2.1.3 **Teorema das raízes racionais**

O terceiro método de resolução de equações algébricas apresentado pelos livros didáticos, ainda dentro dos conteúdos de equações polinomiais no Ensino Médio, é o teorema das raízes racionais para as equações algébricas que possuem coeficientes inteiros, através dele pode-se fazer uma pesquisa das possíveis raízes racionais de uma equação, conforme o que se observa na citação abaixa extraída do livro *Matemática – Ciência e Aplicações.*

Se uma equação polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, de coeficientes inteiros, admite um raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

O livro traz o seguinte exemplo para equação de terceiro grau:

Suponhamos que se queira encontrar as três raízes da equação $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$. Como não dispomos de qualquer informação sobre as raízes dessa equação e considerando que ela tem todos os coeficientes inteiros, vamos pesquisar possíveis raízes racionais.

Por meio do teorema, sabemos que, se a equação tiver alguma raiz racional, ela será da forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de -2 e q é divisor de 3, isto é, $p \in \{-1,\ 1,\ -2,\ 2\}$ e $q \in \{-1,\ 1,\ -3,\ 3\}$ Os “candidatos” a raízes racionais são, portanto:

$$1, -1,\ \frac{1}{3}, -\frac{1}{3},\ 2, -2,\ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

Seja f o polinômio dado, façamos as verificações:

$f(1) = 2$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$	$f(2) = 10$	$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9}$
$f(-1) = -20$	$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{50}{9}$	$f(-2) = -70$	$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-34}{3}$

Verificamos que a única raiz racional dessa equação é $\frac{1}{3}$.

Como a equação é de grau 3 e já encontramos uma raiz ($\frac{1}{3}$) , o polinômio dado é divisível por $x - \frac{1}{3}$. Fazendo essa divisão (pelo método da chave ou Briot-Ruffini), obtemos um quociente $q(x)$ de grau 2. Bastaria, então, fazer $q(x) = 0$ para encontrar as demais raízes.

Conforme IEZZI (2010, p.195): “O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros. Caso existam raízes racionais, o teorema fornece todas as possibilidades para tais raízes”. Esse teorema é uma grande ferramenta auxiliar na resolução das equações cúbicas. Mas também não podemos generalizar, visto que, ele só vale para equações com coeficientes inteiros e que tenham raízes racionais. Com isso, observa-se que nenhum dos métodos exposto acima garante a solução para todos os casos de equações cúbicas. Pois, para usar o dispositivo de Briot Ruffini e as Relações de Girard é necessário que se conheça ou se tenha previamente alguma informação sobre uma da raiz racional da equação. Já com o Teorema das Raízes Racionais só podemos determinar se houve as raízes racionais da equação. Porém, existe equações cúbicas sem raízes racionais, como por exemplo a equação $4x^3 - 6x + 1 = 0$.

Vejamos que de fato, pelo Teorema das raízes racionais, se a equação tivesse alguma raiz racional, ela deveria estar entre os seguintes valores:

$$1, -1, \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, -\frac{2}{4}$$

Testando-os, temos:

$f(1) = -1$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ $\qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16}$

$f(-1) = 3$ $\qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$ $\qquad f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{39}{16}$

Verifica-se de acordo com o exemplo acima que nenhum desses valores racionais é raiz da equação. Logo ela não pode ser resolvida pelos métodos aplicados no Ensino Médio. Então, o que fazer com essas equações? Deve- se simplesmente afirmar que elas não têm solução?. Existem alguma fórmula para resolvê-las?

Nos próximos capítulos, vamos nos ater em apresentar respostas para essas indagações. Começando pelo estudo da Fórmula de Cardano, um método que resolve toda e qualquer equação de terceiro grau por meio de radicais, e que acreditamos ser uma importante ferramenta para preencher essa lacuna deixada no estudo das equações cúbicas no ensino médio.

3 EQUAÇÃO DE TERCEIRO GRAU

Para este capítulo faremos uso da fórmula resolutiva da equação de terceiro grau e um pouco da sua história.

3.1 FÓRMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO DE TERCEIRO GRAU

Em 1545, Girolamo Cardano publicou no livro *Ars Magna* uma fórmula que dava a solução para as equações cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$ (cúbica reduzida, sem o termo quadrático). Em notação atual a fórmula de Cardano para a resolução da equação cúbica reduzida é dada pela equação 2:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (2)$$

Ainda que nessa forma a fórmula só valha para equações cúbicas sem o termo quadrático, isso não é um grande problema, pois toda equação na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode se reduzida para a forma $x^3 + cx + d = 0$, basta fazer alguns cálculos através de mudança de variável $x = y - \frac{b}{3a}$, onde por resultado determina-se $c = p$ e $d = q$. Depois de encontrar a solução em y, é só determinar o valor correspondente para a variável x.

Segundo Lima (1987), a história da solução da equação do terceiro grau tem vários aspectos interessantes em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente para estudo e discussão entre professores e alunos de Matemática. Por isso, antes de demonstrar como a Fórmula de Cardano foi devidamente deduzida, faremos um breve relato da história do descobrimento dessa fórmula que foi um grande marco para o desenvolvimento da matemática.

3.2 A HISTÓRIA DA FÓRMULA DE CARDANO

A solução da equação de terceiro grau tem sua história cercada por mistérios que deixam seu estudo bastante interessante. Parcioli, em 1494, classificou como impossíveis a solução de equações $x^3 + px = q$ e $x^3 + q = px,$ o que despertou o interesse de vários matemáticos a resolver tais equações. É importante observar que, embora os babilônios, por volta de mil e setecentos anos antes de cristo, já utilizassem as técnicas capazes de resolver equação de segundo grau, somente quase três mil anos mais tarde Scipione Del Ferro, um professor de Matemática da Universidade de Bolonha consegue solucionar as equações de terceiro grau.

Segundo Eves (2004), por volta de 1510, Del Ferro encontrou uma forma geral de resolver as equações do tipo $x^3 + px = q$, mas ele não publicou sua descoberta, pois ao ser desafiado para uma competição, levaria vantagens sobre seus adversários. No entanto, repassou o segredo da solução dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número" $(x^3 + px = q)$ "cubo igual a coisas e número" $(x^3 = px + q)$ a seus discípulos Annibale Della Nave (mais tarde seu genro e sucessor na cadeira de Matemática em Bolonha) e Antônio Maria Fiore.

Após a morte de Dell Ferro, apropriando-se de sua descoberta para se destacar entre os grandes matemáticos, Fiore decidiu chamar Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia que já era muito famoso por ter vencido outras disputas, para um duelo matemático, onde o prêmio eram trinta banquetes pagos pelo perdedor ao vencedor. Essas competições, muito comuns nesta época, eram presididas por algumas autoridades e vistas por muitas pessoas. Muitos professores, que tinham contratos temporários, dependiam dos resultados dessas disputas para continuar dando aula nas universidades.

De acordo com Garbi (2010) Tartaglia teve uma infância muito difícil. Nascido em Brescia na Itália, teve sua casa invadida por tropas francesas, que o atacaram deixando-o quase morto. Aos cuidados de sua mãe, ele acabou adquirindo uma cicatriz na boca que dificultou a sua fala, então o apelido Tartaglia, que em italiano quer dizer gago, sem condição de frequentar a escola passou a estudar em casa com ajuda de livros que encontrava na rua, além de ir ao cemitério, onde escrevia com carvão sobre as lápides dos túmulos, pois não tinha dinheiro para comprar papel, pena e tinta. Quando adulto se tornou professor de ciências em Veneza, Verona, Vicenza e Bréscia de onde conseguia seu sustento.

Foi Fiore que propôs 30 problemas, todos envolvendo equações do terceiro grau. Tartaglia fez também sua lista, de natureza bem mais variada. Tinha a seu favor, seu grande conhecimento e sua inteligência. Fiore tinha a fórmula para resolução das cúbicas, mas Dell Ferro não repassou as provas para ele. Mas pouco antes da data marcada, Tartaglia soube que seu adversário já conhecia o método descoberto pelo falecido professor Scipione del Ferro para resolver as equações por ele propostas.

Então, sentindo-se ameaçado, conforme mais tarde relatou o próprio Tartaglia, “mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535” (TARTAGLIA *apud* SOBRENOME, ano, p.). Indo ainda mais longe, Tartaglia, além de resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, também, achou a fórmula geral para as equações do tipo $x^3 + x^2 + q = 0$, que Fiori não conhecia.

Desta forma, Tartaglia resolveu todos os problemas propostos por Fiore, que perdeu a disputa e ainda saiu humilhado, pois não tinha conhecimento do método encontrado por seu oponente.

Informações sobre a descoberta Tartaglia acabou chegando ao conhecimento de seu amigo Girolamo Cardano. O mesmo ficou sabendo, em Milão, do concurso e os elementos dos problemas envolvidos, o que lhe despertou uma enorme curiosidade sobre como fora conseguido aquilo que Pacioli julgara impossível. Além de matemático Cardano era médico, astrônomo, astrólogo, filosofo, jogador inveterado. Recebia castigos de seus pais, que chegavam a deixá-lo muito doente. Também era amigo de Leonardo Da Vinci que conduziu a sua educação. Era um personagem rico em facetas contraditórias e com talentos variados. Sua vida lhe trouxe alternâncias de fama, fortuna, prestígio, desgraça familiar, severas punições e pobreza. Se descrevia como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obsceno, desonesto, vicioso e portador de total desprezo pela religião.

Cardano ficou sabendo que Tartaglia achara a solução e resolveu pedir-lhe que a revelasse para que fosse publicada em seu livro *Prática Arithmeticae Generalis*, mas Tartaglia, que não tinha o costume de divulgar seus métodos de resolução, logo não aceitou de imediato. No entanto, após muita insistência e jurando que iria manter o método em segredo, em 1539 Cardano obteve, mas apenas em formato de versos e sem nenhuma prova, a regra para resolver a equação $x^3 + px = q$. Com a ajuda do discípulo Ludovico Ferrari (1522 - 1565), Cardano conseguiu demonstrar o método desenvolvido por Tartaglia para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$

Mas depois de alguns anos, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha e lá obtiveram os manuscritos deixados por Ferro, entre os quais continha os mesmos resultados de Tartaglia. Então Cardano quebrou sua promessa, com a justificativa que seu juramento o proibia de publicar a solução de Tartaglia, mas não a de Dell Ferro, e publicou a fórmula no seu livro *Ars Magna*, em 1545, em que não só constava a solução sobre a equação cúbica, mas também as equações de 4º grau. Nessa publicação, mesmo fazendo diversos elogios a Tartaglia, Cardano revelou que Dell Ferro, trinta anos antes, também havia chegado ao mesmo resultado.

Ciente da publicação de Cardano, Tartaglia divulgou imediatamente sua versão da história, denunciando Cardano por haver traído seu juramento sobre a bíblia. Mas seu discípulo Ludovico Ferrari, rebateu a acusação de Tartaglia, acusando-o de ter plagiado Del Ferro.

Após debates e longas trocas de insultos que durou mais de um ano, Tartaglia propôs um desafio a Cardano, mas Ferrari foi quem compareceu para o duelo, contudo não se sabe quem foi o vitorioso.

A história que aqui vimos, confirma que a fórmula da equação do terceiro grau, por muitos séculos, foi conhecida como "fórmula de Cardano", embora Cardano tenha mencionado em seu livro que Tartaglia foi seu verdadeiro descobridor, obteve todo o mérito por ter sido o primeiro a publicar a fórmula.

3.3 DESENVOLVIMENTO ALGÉBRICO DA FÓRMULA DE CARDANO

Para a demonstração do método descoberto por Dell Ferro e Tartaglia seguiremos os passos de Lima (1987) os quais descrevemos a seguir:

Seja a equação cúbica $y^3 + px + q = 0$ (03)

Primeiro pensa-se numa solução como a soma de duas parcelas:

$y = u + v$ (04)

Elevando os dois lados da equação (04) ao quadrado,

$$y^3 = (u + v)^3 \rightarrow$$
$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \rightarrow$$
$$(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u+v) + v^3 \rightarrow$$
$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0 \qquad (05)$$

Comparando essa equação (05) com $y^3 + px + q = 0$

Obtem-se,

$$\begin{cases} -3uv = p \Rightarrow 3uv = -p \ \Rightarrow uv = -\frac{p}{3} \\ -(u^3 + v^3) = q \Rightarrow u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Elevando os dois lados de (06) ao cubo ,

$$u.v = -\frac{p}{3} \qquad (06)$$

Tem-se,

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \qquad (07)$$

Então, $u^3 \ e \ v^3$ podem ser considerados como as raízes de uma equação de segundo grau por soma e produto.

Como,

$$w^2 - sw + p = 0 \qquad (08)$$

Temos,

$$w^2 - (-q)w + \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0 \qquad (09)$$

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (10)$$

Usando a fórmula de bhaskara,

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \qquad (11)$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)}$$

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad w_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Como u^3 e v^3 são as raízes da equação $w^2 + qw - \frac{p^3}{27}$, podemos escrever,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad e \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

como $y = u + v$, a solução da equação $y^3 + py + q = 0$

Que também pode ser escrita como,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad . \tag{12}$$

3.4 GENERALIZAÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO

De acordo com Roque e Carvalho (2019) dentre os métodos mais importantes introduzido por Cardano no *Ars magna* está a transformação ou redução de equações. Reduzia-se uma equação de terceiro grau a outra sem o termo quadrático, que significa reescrever a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em uma nova variável, sendo a,b,c,d pertencente ao conjunto reais e com a≠0. Fazendo $x = y - \frac{b}{3}$ obtém-se uma equação onde o termo em y^2 é nulo. Observa -se primeiramente, que toda equação geral de terceiro grau pode ser simplificada para outra com $a = 1$. Para isso, basta dividir os membros da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ por a , sendo $a \neq 0$.

Com isso, teremos a equação (13),

$$\frac{a}{a}x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \tag{13}$$

Onde obtém-se,

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \quad , \quad a = 1. \tag{14}$$

Ou seja,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{15}$$

Fazendo $x = y + m$, (na equação (15) tem-se:

$$(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0. \tag{16}$$

Desenvolvendo essa equação (16) , vem:

$$y^3 + 3y^2m + 3ym^3 + m^3 + b(y^2 + 2ym + m^2) + cy + cm + d = 0,$$

$$y^3 + 3y^2m + 3ym^3 + m^3 + by^2 + 2bym + bm^2 + cy + cm + d = 0,$$

$$y^3 + (3m + b)y^2 + (3m^2 + 2bm + c)y + m^3 + bm^3 + cm + b = 0. \tag{17}$$

Como o objetivo é anular o termo de y^2 na equação (17) ,considera-se então

$$3m + b = 0 . \tag{18}$$

Onde,

$$m = -\frac{b}{3} . \tag{19}$$

Com isso, a equação geral de terceiro grau pode ser reduzida com a mudanças de variáveis até chegar ao resultado de equação cúbica sem o termo da equação de segundo grau, fazendo a substituição $x = y - \frac{b}{3}$ na equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

O que resulta em,

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0, \tag{20}$$

$$y^3 - \frac{3y^2b}{3} + \frac{3yb^2}{9} - \frac{b^3}{27} + by^2 - \frac{2b^2y}{3} + \frac{b^3}{9} + cy - \frac{cb}{3} + d = 0,$$

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0. \tag{21}$$

Considerando,

$p = c - \frac{b^2}{3}$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$,

Portanto, a nova equação em y é $y^3 + py + q = 0$, (22)

e para encontrar a solução de $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta retomar $x = y - \frac{b}{3}$.

.

3.5 EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO CÚBICAS PELA FÓRMULA DE CARDANO

Exemplo 3.1

Use a Fórmula de Cardano para encontrar uma das raízes da equação $x^3 - 12x - 16 = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$p = -12$$
$$q = -16$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} + \sqrt{\frac{(-16)^2}{4} + \frac{(-16)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} - \sqrt{\frac{(-16)^2}{4} + \frac{(-16)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{\frac{256}{4} + \frac{(-1728)}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-16)}{2} - \sqrt{\frac{256}{4} + \frac{(-1728)}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{64 - 64}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 64}}$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{0}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} \quad + \quad \sqrt[3]{8} = 2 + 2 = 4$$

Logo, uma das raízes é $x = 4$.

Exemplo 3.2

Use a Fórmula de Cardano para determinar uma raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$

Nesse exemplo a equação esta na forma geral $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, então é preciso primeiramente fazer a mudança de variável $x = y - \frac{b}{3}$ e assim reduzi-la para forma $y^3 + py + q = 0$.

Já vimos que para eliminar o termo quadrático da equação de terceiro grau, basta considerar $p = c - \frac{b^2}{3}$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$.

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0 \quad \begin{cases} b = -6 \\ c = 6 \\ d = -5 \end{cases}$$

$$p = 6 - \frac{(-6)^2}{3} = -6$$

$$q = \frac{2.(-6)^3}{27} - \frac{(-6).6}{3} - 5 = -16 + 12 - 5 = -9$$

Então, determinar uma das raízes da equação da equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$ é equivalente a encontrar a solução da equação $y^3 - 6y - 9 = 0$ e depois, fazer $x = y - \frac{b}{3}$.

Primeiramente vamos calcular uma das raízes ultilizando a Fórmula de Cardano.

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$p = -6$

$q = -9$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}},$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} \;,$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{24}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{24}{3}}} \;,$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \;,$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} \;,$$

$y = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$,

$y = 2 + 1,$

$y = 3.$

Como $x = y - \frac{b}{3}$,

$$x = 3 - \frac{(-6)}{3} = 3 + 2 = 5$$

Logo, uma das raízes é $x = 5$.

Como vimos nos exemplos 3.1 e 3.2 , acima expostos, o método desenvolvido por Dell Ferro e Tartaglia para a solução de equações de terceiro grau só fornecem uma raiz. No entanto, se pela Fórmula de Bhaskara encontramos, de maneira simples, duas raízes da equação de segundo grau, então, como encontrar as outras raízes da equação de terceiro grau pela Fórmula de Cardano?

Antes de apresentar as respostas para essas perguntas, na próxima seção, faremos um estudo das raízes das equações de terceiro grau no sentido de ter melhor compreensão sobre como determiná-las através da Fórmula de Cardano.

3.6 NATUREZA DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 3º GRAU

Para determinarmos as raízes de uma equação polinomial é importante que saibamos interpretá-las. Por isso, a seguir veremos dois teoremas que são importantes para se conhecer a natureza das raízes da equação de terceiro grau.

Teorema 3.1. Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio com coeficientes complexos de grau ≥ 1 admite pelo menos uma raiz complexa.

Note que, dada uma equação polinomial de grau 3, o Teorema Fundamental da álgebra garante somente que existe pelo menos um número complexo que é raiz dessa equação, não trazendo informações acerca de quantas são ou quais são essas raízes.

Teorema 3.2. Teorema das raízes complexas conjugadas

Se um número complexo $z = a + bi$ é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então o conjugado de z, dado por $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Como consequência desse teorema, temos que, se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais. Assim, podemos concluir que uma equação de 3º grau tem uma ou três e nunca somente duas raízes reais, pois o número de raízes complexas e não reais é par.

3.6.1 Discriminante da Fórmula de Cardano

A natureza (real ou não, distinta ou não) das raízes de uma cúbica pode ser determinada sem resolvê-las, pois, de acordo com Silva (2015, p.58), o valor do discriminante D da fórmula de Cardano está diretamente relacionado com o número de raízes reais da equação do terceiro grau.

Seja a fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \ . \tag{23}$$

Onde temos o discriminante,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{24}$$

Logo,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \ . \tag{25}$$

Vimos que o teorema das raízes racionais garante uma equação cúbica que pode ter uma ou três raízes reais. Então vamos analisar o sinal de D paras os dois casos.

1) três raízes reais:

Se $r,\ s,$ e t são as três raízes reais da equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq b \neq c \neq 0$.

Escrevendo a equação na forma fatorada, temos:

$$(x - r)(x - s)(x - t) = 0 \tag{26}$$

Desenvolvendo o produto temos:

$$x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + st + rt)x - rst = 0. \tag{27}$$

Comparando a equação (27) com $x^3 + px + q = 0$.

Temos que,

$r + s + t = 0 \;\Rightarrow\; t = -(r + s).$ (28)

Assim,

$(x - r)(x - s)(x - t) = (x - r)(x - s)\big(x + (r + s)\big) =$

$= x^3 + [rs - (r + s)^2]x - r(r + s) = 0$ (29)

Calculando o discriminante, temos:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left[-\frac{rs(r + s)}{2}\right]^2 + \left[-\frac{rs - (r + s)^2}{3}\right]^3$$

$$D = \frac{-4a^6 - 12a^5b + 3a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}$$

$$D = -\frac{(r-s)^2(2r+s)^2(r+2s)^2}{108} \tag{30}$$

Como r e s são dois números reais não nulos, a expressão (30) sempre será negativa.

Portanto, quando $D < 0$, a equação sempre terá raízes sendo todas distintas.

No entanto se $r = s$, temos:

$$D = -\frac{(r - r)^2(2r + r)^2(r + rs)^2}{108} \tag{31}$$

$D = 0$

Logo, quando $D = 0$, a equação sempre terá três raízes reais sendo duas iguais.

2) Uma raiz real.

Sabemos que, se a equação possui somente uma raiz real, as outras duas são complexas e conjugadas. Então hipoteticamente, pensamos em $c,\ a + bi,\ a - bi$, com $a, b,\ c \neq 0$ como as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$.

De $r + s + t = 0$ do caso anterior, temos: $c + (a + bi) + (a - bi) \;\Rightarrow\; c = -2a$.

Escrevendo a equação na forma fatorada, temos:

$\big(x - (a + bi)\big)\big(x - (a - bi)\big)(x - 2a) = 0$

$x^3 + x(b^2 - 3a^2) + 2a(a^2 + b^2) = 0$ (32)

Calculado o discriminante, temos:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left[\frac{2a(a^2+b^2)}{2}\right]^2 + \left[-\frac{b^2-3a^2}{3}\right]^3$$

$$D = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{108} \qquad (33)$$

Como todos os expoentes das potências compostas na expressão (33) são pares e $a, b,\ c \neq 0$ ela sempre é positiva.

Portanto, quando $D > 0$, a equação possui uma raiz real e duas complexas conjugadas.

Então, podemos determinar o tipo de raízes da equação de acordo com o sinal desse discriminante da seguinte forma:

Proposição 3.1

Seja $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ descriminante da equação cúbica $\mathrm{x}^3 + \mathrm{px} + \mathrm{q} = 0,$ então:

(I) $D = 0$ se, e somente se, as raízes são reais sendo duas iguais

(II) $D > 0$ se, e somente se, uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas,

(III) $D < 0$ se, e somente se, as três raízes são reais e distintas,

Uma observação importante a fazer, é que independentemente do valor do discriminante a equação de terceiro grau sempre terá pelo menos uma raiz real. Vejamos a classificação dos tipos de raízes de algumas equações feitas através do da análise do sinal do discriminante da Fórmula de Cardados, sendo abordados alguns aspectos interessantes inseridos na utilização dessa Fórmula.

Exemplo 3.3

Analise as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

Primeiramente, transforma-se a equação para a forma reduzida.

Sendo $b = 6, \quad c = 9 \quad e \quad d = 4$

$$p = c - \frac{b^2}{3} = c - \frac{9^2}{3} = -3\ .$$

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2 \cdot 6^3}{27} - \frac{6 \cdot 9}{3} + 4 = 2\ .$$

$$y^3 - 3y + 2 = 0.$$

Calculando o discriminante, temos:

Sendo $p = -3 \quad e \quad q = 2$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3 = 0$$

$D = 0$. Então, a equação possui três raízes reais, sendo duas ou três iguais.

De fato, as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ são $\{-1,\ -1,\ \ 4\}$.

Exemplo 3.4

Análise das raízes da equação $x^3 - 6x - 40 = 0$

Calculando o discriminante, temos:

Sendo $p = -6 \quad e \quad q = -40$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{40}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3 = 392\ .$$

$D = 392 > 0$. Então, a equação possui uma raiz real e duas complexas.

De fato, as raízes da equação são $\{4, -2 + 6i,\ -2 - 6i\}$

É interessante que quando aplicamos a Fórmula de Cardano para resolver essa equação, obtemos:

$$y = \sqrt[3]{-\left(\frac{-40}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{40}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-40}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{40}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}\ .$$

Como a equação possui somente uma raiz real, podemos concluir que a igualdade $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4$ é verdadeira.

Parece-nos bastante desafiador pensar operar com essas raízes para se obter o número 4.

Exemplo 3.5

Análise das raízes da equação $x^3-6x-4=0$

Calculando o discriminante, temos:

Sendo $p=-6 \quad e \quad q=-4$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(-\frac{4}{2}\right)^2+\left(-\frac{6}{3}\right)^3=-4$$

$D=-121<0$. Então, a equação possui três raízes reais e distintas.

Mas quando aplicamos a Fórmula de Cardano para resolver a equação, obtém-se:

$$y=\sqrt[3]{-\left(-\frac{4}{2}\right)+\sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2+\left(-\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\left(-\frac{4}{2}\right)-\sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2+\left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$y=\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-4}}\quad .$$

Mas testando os divisores de -4, chega-se a -2 como uma das raízes da equação. Então, $y=\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-4}}=-2$.

Isso significa que embora es três soluções sejam reais, a Fórmula de Cardano expressa estas soluções em termo de números complexos.

Esse fato intrigante será abordado no próximo capítulo onde trataremos das soluções dos casos irredutíveis.

3.7. AS OUTRAS RAÍZES DA FÓRMULA DE CARDANO

Já sabemos como as raízes da equação de terceiro grau se comportam mediante o valor do discriminante da Fórmula de Cardano, agora vamos estudar algumas maneiras de determina-las por meio dessa fórmula.

Seja a equação $y^3 + py + q = 0$ (34)

Pela Fórmula de Cardano tem-se:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (35)$$

Onde,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = D \quad (36)$$

Dessa forma, podemos determinar a primeira raiz da equação da seguinte forma:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \quad (37)$$

Sabendo que independentemente do valor de D, y_1 sempre será real.

Quando $D \geq 0$, é possível calcular y_1 sem a necessidade de recorrer à teoria dos números complexos.

Para determinar as outras raízes, basta fazer a divisão do polinômio $y^3 + py + q$ por $y - y_1$,

$$\frac{y^3 + py + q}{y - y_1} = y^2 + y_1 y + (p + {y_1}^2). \quad (38)$$

O resto da divisão é ${y_1}^3 + py_1 + q$, mas como $y = y_1$,então ${y_1}^3 + py_1 + q = y^3 + py + q$ e y_1 é raiz de $y^3 + py + q$, o resto da divisão é zero.

$$y^2 + y_1 y + (p + {y_1}^2) = 0 \quad (39)$$

$\Delta = {y_1}^2 - 4(p + {y_1}^2)$,
$\Delta = -(3{y_1}^2 + 4p)$.

$$y_{2,3} = \frac{-y_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \ .$$

Quando $D > 0$, então $\Delta < 0$. Logo, as raízes y_1 e y_3 são complexas e conjugadas.

Para $D = 0$, temos $\Delta = 0$.

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \qquad p = -3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} \ ,$$

$$y_1 = -\sqrt[3]{4q} \ . \tag{40}$$

A outras raízes são:
$\Delta = -(3{y_1}^2 + 4p) = 0$,

$$y_{2,3} = \frac{-\left(-\sqrt[3]{4q}\right) \pm \sqrt{0}}{2},$$

$$y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \ . \tag{41}$$

Quando $D < 0$, teremos a soma de dois números complexos.

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{|D|}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{|D|}} \ . \tag{42}$$

Esses são os casos irredutíveis de equações cúbicas, e sua justificativa vem logo na proposição 3.2.

Proposição 3.2

Seja $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ o determinante da equação $y^3 + py + q = 0$, onde y_1 é um número real , tal que, $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$; e $y^2 + y_1 y + (p + {y_1}^2)$ o polinômio resultante da divisão de $y^3 + py + q$ por $y - y_1$, onde $y_{2,3} = \frac{-y_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, então:

(I) Se $D > 0$, temos $\Delta < 0$. Logo, as raízes y_1 e y_3 são complexas e conjugadas.

(II) Se $D = 0$, temos $\Delta = 0$. Logo, $y_1 = -\sqrt[3]{4q}$ e $y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

(III) Se $D < 0$, temos $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{|D|}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{|D|}}$, ou seja, a soma de dois números complexos.

4 SITUAÇÕES DE CASOS IRREDUTÍVEIS

Neste capítulo daremos uma atenção especial aos casos irredutíveis de equações cúbicas, pois fazem parte de um dos eixos principais desse trabalho, a solução de equações cúbicas que possuem três raízes reais e distintas e não podem ser expressas em radicais sem a introdução de números complexos.

4.1 CASOS IRREDUTÍVEIS

Como foi visto na subseção 3.6.1, uma equação de terceiro grau pode ter uma raiz real e duas complexas ou três raízes reais, sendo todas distintas, duas ou três iguais. No entanto, um fato interessante é que, em alguns casos de cúbicas, essa fórmula descreve um resultado como a soma de duas raízes cúbicas de números complexos. Segundo Lima (1987) este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau. É caso da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ que ao ser resolvida pela Fórmula de Cardano, chega-se a expressão:

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\,.$$

Esses casos ficaram muitos anos sem solução real, até que, em 1572, Rafael Bombelle consegui desenvolver uma relação através de cálculos que dessem sentido a igualdade $y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$, dando origem aos números complexos.

O artigo produzido por Ripoll & Silveira (2016) aborda o “ Tormento de Cardano”, que busca comprovar a existência das cubicas Anti-Cardano, as quais, segundo os autores, são equações cúbicas inteiras tendo somente raízes reais e não existe nenhum meio de expressar suas raízes por radicais reais.

Para dá uma afirmação ao “Tormento de Cardano”, os autores baseiam-se em um conjunto de teoremas e definições presentes na Álgebra Clássica e nas Teoria de Galois, dos quais podemos destacar:

Definição 4.1. Uma equação é solucionável por radicais se suas raízes puderem ser expressas por uma fórmula envolvendo apenas inteiros, n- raízes e as quatro operações aritméticas básicas.

Definição 4.2. Uma equação polinomial de coeficientes inteiros é dita redutível (sobre os números racionais) se, e só se, o correspondente polinômio puder ser fatorado como um produto de dois polinômios (não constantes) de coeficientes racionais; caso não exista uma tal fatoração, diremos que a equação é irredutível.

De acordo com Ripoll e Silveira (2016), é trivial dar exemplos de equações redutíveis. Contudo, decidir se uma equação dada é redutível, ou irredutível, pode ser difícil. Apesar disso, o caso das cúbicas é bem fácil, pois podemos nos valer do seguinte teorema.

Teorema 4.1. Uma equação cúbica de coefientes inteiros é redutível, se e somente se, possuir uma raiz racional.

Como consequência, qualquer possível fatoração de um polinômio de coeficientes inteiros de grau três deve apresentar um polinômio de grau um e coeficientes racionais. Da mesma forma, se r for uma raiz racional do polinômio $P(x)$ de coeficientes racionais, temos como resultado um polinômio de grau dois e coeficientes obrigatoriamente racionais na divisão de $P(x)$ por $x - r$.

Com isso, podemos afirmar a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ não é anti-Cardano, pois como possui $x = 4$ como raiz, ela pose ser escrita na forma fatora da $(x - 4)(x^2 + 4x + 1)$. Além de que, suas outras raízes podem ser expressas por $-2 + \sqrt{2}$ e $-2 + \sqrt{2}$, ou seja, por radicais reais.

Por outro lado, a equação $x^3 + x + 1 = 0$ é irredutível sobre os números racionais. De fato, pelo teste da raiz racional temos que as possíveis raízes racionais da equação são ± 1, mas como $f(-1) = -1$ e $f(1) = 3$, segue que a equação não tem raízes racionais. Então, ela não pose ser escrita como um produto de dois polinômios de coeficiente racionais. Logo, ela é anti-Cardano. Portanto, pode-se concluir-se que toda equação cúbica inteira que tiver só raízes distintas e todas elas irracionais são anti-Cardano. Assim, a partir daqui, no decorrer desse trabalho, chamaremos as equações cúbicas que não possuem raízes racionais de cúbicas de anti-Cardano para que não sejam confundidas com o todos os tipos de casos irredutíveis.

4.2 SOLUÇÃO PARA O CASO IRREDUTÍVEL

Como já foi visto, o caso irredutível de equações cúbicas possui três raízes reais e distintas. Nesses casos, nos deparamos com um desafio, extrair raízes cúbicas de números complexos.

Por meio de um levantamento feitos em alguns artigos e dissertação que abordam a Fórmula de Cardano foi observado que a grande maioria desses trabalhos apontam sempre o uso dos números complexos para a solução dos Casos Irredutíveis. Assim, parece não ter outro caminho, menos tortuoso, do que utilizar-se a teoria sobre números complexos no ensino médio para determinar tais raízes. Um dos métodos mais utilizados nesses trabalhos é a fórmula de De Moivre que serve para calcular as raízes enésimas de um número complexo escrito na forma polar ou trigonométrica e é expressa da seguinte forma:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right] \tag{43}$$

4.2.1 Exemplos de resolução de caso irredutível com o uso de números complexos.

Veja o exemplo da solução da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ com o uso dessa fórmula.

Aplicando a Fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}\,,$$
$$x = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}\ .$$

Os números que aparecem dentro das raízes cúbicas são chamados números complexos conjugados.

Da Teoria dos Números Complexos, tem-se que um número complexo na forma $z = a + bi$ pode ser pode ser escrito na forma trigonométrica:

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta) \tag{44}$$

como a raiz cúbica de um número complexo tem três resultados possíveis, tem-se:

Três valores para $\sqrt[3]{-2+2i}$, que chamaremos de u_0, u_1 e u_2.

Três valores para $\sqrt[3]{-2-2i}$, que chamaremos de v_0, v_1 e v_2

Então, à primeira vista, teríamos nove soluções:

$$\begin{cases} u_0 + v_0 & u_1 + v_0 & u_2 + v_0 \\ u_0 + v_1 & u_1 + v_1 & u_2 + v_1 \\ u_0 + v_2 & u_1 + v_2 & u_2 + v_2 \end{cases}$$

Usando a Segunda Lei de Moivre para calcular essas nove raízes, encontra-se:

$$u_0 = 1 + i \qquad u_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}i + \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad , \qquad v_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$u_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i \qquad v_2 = 1 - i$$

Logo, os valores de $\mathrm{x} = u + v = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$ são:

$$u_0 + v_0 = (1+i) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}+3}{2}i \tag{45}$$

$$u_0 + v_1 = (1+i) + \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}i\right) = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}+3}{2}i \tag{46}$$

$$u_0 + v_2 = (1+i) + (1-i) = 2 \tag{47}$$

$$u_1 + v_0 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}i + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i \tag{48}$$

$$u_1 + v_1 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}i\right) = -1-\sqrt{3} \qquad (49)$$

$$u_1 + v_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i\ ) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-3+\sqrt{3}}{2}i \qquad (50)$$

$$u_2 + v_0 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) = -1+\sqrt{3} \qquad (51)$$

$$u_2 + v_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i \qquad (52)$$

$$u_2 + v_2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i\ ) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-3-\sqrt{3}}{2}i \qquad (53)$$

Dos nove valores encontrados, três deles são raízes legítimas e seis são raízes estranhas, mas, graças ao discriminante da Fórmula de Cardano, não é necessário testar cada um deles para eliminar as raízes estranhas.

Pois, como $D = -4 < 0$, temos três raízes reais e distintas.

Dos valores encontrados, somente duas (49) e (51) , $-1-\sqrt{3}$ e $-1+\sqrt{3}$ são reais.

Podemos observar que nesse trabalho não foi apresentado um estudo sobre a teoria dos números complexos, então o exemplo 4.2.1, acima, foi exposto apenas com o objetivo de mostrar o quanto é trabalhosa a solução dos casos irredutíveis com o uso dos números complexos.

É importante observar, que a expressão $x = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$, não pode ser resolvida com ajuda de uma calculadora que tenha apenas as operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz enésima.

Contudo, a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ pode ser resolvida por métodos mais convencionais, visto que, possui uma raiz racional. O mesmo não acontece com as cúbicas “anti-Cardano” que são do caso irredutível, mas não podem ser fatorados em poliômios sobre os números racionais, e por isso não podem ser resolvidas pelos métodos aplicados no ensino médio.

Assim chegamos a um ponto crucial desse trabalho que é determinar meios algébricos para obtenção das raízes de alguns tipos de equações cúbicas, o que será feito nos próximos capítulos.

Portanto, para esses casos, vamos propor a solução pelo método trigonométrico elaborado pelo matemático François Viete. Através desse método podemos revolvê-los de forma mais simples e sem usar números complexos.

4.2.2 Solução do caso irredutível sem uso de números complexos

De acordo com Ripoll e Silveira (2016), a teoria de Galois permite provar que quando as três raízes são reais e nenhuma é racional (Anti-Cardano) não se pode expressar as raízes em termos de radicais reais, mesmo não existindo uma fórmula de radicais que evite os complexos. Existe um método pelo qual as raízes dessas equações podem ser calculadas através de expressões puramente reais, obtidas usando funções trigonométricas, especificamente em termos de cossenos e arco-cossenos. Esse método que foi desenvolvido pelo matemático François Viete trabalha com números bastante aproximados e sem enfrentar os números complexos.

Segundo Schuvaab (2013), a fórmula de Viete foi desenvolvida da seguinte forma:

Partindo da equação $x^3 + px + q = 0$, vamos definir $x = t\, cos\, \theta,$ com $t > 0$.

$$(t \cos\theta\,)^3 + p(t\cos\theta\,) + q = 0 \tag{54}$$

$$t^3 cos^3\theta + pt\cos\theta + q = 0 \tag{55}$$

Multiplicando a equação (55) por $\frac{4}{t^3}$,temos:

$$4\cos^3\theta + \frac{4p}{t^2}\cos\theta + \frac{4q}{t^3} = 0\,. \tag{56}$$

Fazendo a comparação com a identidade trigonométrica

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \cos 3\theta = 0\,. \tag{57}$$

Temos,

$$x = t.cos\theta \tag{58}$$

Se e somente se,

$$\frac{4p}{t^2} = -3 \;\Rightarrow\; t^2 = -\frac{4p}{3} \;\Rightarrow\; t = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ . \tag{59}$$

$$-\cos 3\theta = \frac{4q}{t^3} \;\Rightarrow\; \cos 3\theta = \frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)$$

Logo,

$$x = t\cos\theta = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right] \tag{60}$$

Para as três raízes, teremos:

$$x_n = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + \frac{2\pi n}{3}\right] \quad com\ n = 0, 1, 2. \tag{61}$$

Ou seja,

$$x_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right] \tag{62}$$

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 120°\right] \tag{63}$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 220°\right] \tag{64}$$

Esse método funciona com as seguintes condições:

Para $t = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $p < 0$, pois se $p > 0$, a solução retorna para os números complexos.

Além disso, como $-1 \leq \cos 3\theta \leq 1$, temos que, $D \leq 0$

Com isso, $D \leq 0$.

Isso inclui os casos irredutíveis, onde $D < 0$.

4.2.3 Dois exemplos de resolução de equações cúbicas pelo método trigonométrico

1- Resolva a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$

Observe que pela fórmula de Cardano, temos

$$x = \sqrt[3]{-\left(\frac{-1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} \, ,$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}} \; .$$

Fugindo dos números complexos, usaremos trigonometria para a solução da equação.

$$x_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right] \, ,$$

$$x_0 = 2\sqrt{-\frac{(-3)}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3(-1)}{2(-3)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-3}}\right)\right] ,$$

$$x_0 = 2\sqrt{1}\,\cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}\right)\right] ,$$

$$x_0 = 2\,\cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right] ,$$

$$x_0 = 2\,\cos\left[\frac{1}{3}\cdot 60\right] ,$$

$$x_0 = 2\,\cos 20 \cong 1{,}879385 \quad .$$

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{(-3)}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3(-1)}{2(-3)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-3}}\right) + 120\right]$$

$$x_1 = 2\,\cos[20 + 120] \, ,$$

$$x_1 = 2\,\cos(140) \, ,$$

$$x_1 = 2\cos 140 \cong -1{,}532080 \, .$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{(-3)}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3(-1)}{2(-3)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-3}}\right)+240\right],$$

$$x_2 = 2\,\cos[20+240],$$

$$x_2 = 2\,\cos(260) \;= 2\cos 240 \;\cong\; -0{,}347296355\,.$$

2- Resolva a equação $x^3 + 3x - 9x - 5 = 0$.

Primeiro transformamos a equação para a forma $y^3 + py + q = 0$.

Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{b}{3}$.

Onde,

$$p = c - \frac{b^2}{3} = -9 - \frac{3^2}{3} = -12$$

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2\cdot 3^3}{27} - \frac{3(-9)}{3} - 5 = 6\,.$$

Logo, a equação reduzida é: $y^3 - 12y + 6 = 0$.

Usando a Fórmula de Cardano, temos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{(p)^3}{27}}} \;+\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,,$$

$$p = -8 \quad e \quad q = 6\,,$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^3}}\,,$$

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{431}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{431}{27}}}\;.$$

Para evitar os números complexos, vamos usar o método trigonométrico para a solução da equação.

$$y_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right]\quad ,$$

$$y_0 = 2\sqrt{-\left(-\frac{12}{3}\right)}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3\cdot 6}{2(-12)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-12}}\right)\right]\quad ,$$

$$y_0 = 4\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos(-0{,}1875)\right]\ ,$$

$$y_0 = 4\ \cos\left[\frac{1}{3}(112{,}024312)\right]\ ,$$

$$y_0 = 4\ \cos 37{,}341437 = 3{,}18014\ .$$

$$y_1 = 2\sqrt{-\left(-\frac{12}{3}\right)}\ \cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3\cdot 6}{2(-12)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-12}}\right)+120\right],$$

$$y_1 = 4\ \cos(37{,}341437+120)\ ,$$

$$y_1 = 4\ \cos(-157{,}341437)\ ,$$

$$y_1 = -3{,}691267.$$

$$y_2 = 4\ \cos(37{,}341437+240)\ ,$$

$$y_2 = 4\ \cos(277{,}341437)\ ,$$

$$y_2 = 0{,}511127.$$

Como $x = y - \frac{b}{3} \Rightarrow x = y - \frac{3}{3} \Rightarrow x = y - 1$

$$x_0 = y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = 3{,}18014\ - 1 = 2{,}18014\ .$$

$$x_1 = y_1 - 1 \Rightarrow x_1 = -3{,}691267\ - 1 = -4{,}691267\ .$$

$$x_2 = y_2 - 1 \Rightarrow x_2 = 0{,}511127\ - 1 = -0{,}488873\ .$$

Com isso conseguimos resolver as equações propostas sem utilizar os números complexos, simplesmente aplicando o método trigonométrico.

5 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS NO 3º ANO DE ENSINO MÉDIO

Para este capítulo faremos uma sequência didática com o intuito de auxiliar o professor na ampliação de oportunizar o aluno na busca de outras soluções além daquelas que constam na maioria dos livros didáticos.

Elaboramos uma sequência didática onde mostraremos que é possível inserir a Fórmula de Cardano no ensino das equações cúbicas, com a finalidade de possibilitar um estudo mais abrangente dessas equações, ampliando sua solução para as equações que possuam as três raízes irracionais. A sequência será dividida em três etapas e cada etapa terão um plano de aula.

i) Os alunos estudarão as resoluções das equações cúbicas pelos métodos encontrados nos livros didáticos do 3º ano do ensino médio, de modo a serem estimulados a perceber a insuficiência desses métodos, que não podem ser generalizados para todos os casos de equações cúbicas.

ii) O professor fará, inicialmente, uma abordagem histórica sobre o estudo da fórmula de Cardano e os alunos estudarão essa fórmula, com foco nas análises das raízes da equação de terceiro grau e na resolução dos casos que possuem somente soluções reais, aprendendo a resolvê-las sem o uso de números complexos.

iii) Os alunos resolverão uma atividade que propõe a solução das equações cúbicas restrita somente ao conjunto dos números reais, onde terão a oportunidade de aplicar estrategicamente os conceitos mais adequados para resolver determinada equação.

Em razão da complexidade dos cálculos e determinação de cossenos de ângulos não notáveis os alunos poderão fazer uso de calculadoras científicas, pois conforme Dante (2005, p.12):

> O uso da calculadora em sala de aula, além de ser indicado pelos PCN[1] como uma iniciativa das novas tecnologias, ela é uma questão de razão social, pois a escola não pode se distanciar da vida do aluno sendo que, na sociedade,

[1] PCN : Parâmetros Curriculares Nacionais

existe o uso impregnado da calculadora; outra razão é a pedagógica, pois, usando a calculadora para efetuar os cálculos, o aluno terá mais tempo livre para raciocinar, criar e resolver problemas.

5.1 DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DAS AULAS 1ª ETAPA

Para a 1ª etapa apresentamos o plano de aula na tabela 5.1.

Tabela 5.1

PLANO DE AULA - 1
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor : Luiz Leal - Eixo Temático : Equações Polinomiais
OBJETO DO CONHECIMENTO: Estudo das Equações Polinomiais Carga Horária: 13 aulas (650 minutos)
HABILIDADES DA BNCC[2]: - Reconhecer, nomear e comparar as equações polinomiais, resolver equações do 3º grau pelo método encontrado nos livros didáticos.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Desenvolver habilidade para a resolução de equação do 3º aplicando a fórmula de Cardano.
METODOLOGIA: Aula expositiva dialogada
Recursos Necessários: Quadro, pincel, livros didáticos
AVALIAÇÃO Através de atividades impressas e participação do aluno
BIBLIOGRAFIA: - Iezze, Gelson ...(et.al.] . Ciência e Aplicações – Vol 3 São Paulo. Editora Saraiva, 2016.

Fonte : autor (2021)

[2] BNCC : Base Nacional Comum Curricular

Nesta 1ª etapa os alunos estudarão equações polinomiais abordados nos livros didáticos, dando destaque a introdução das equações polinomiais e aplicação do processo prático de Briort-Ruffine, com aplicação na resolução de equações cúbicas, como veremos a seguir através de exercícios resolvidos no livro *Matemática – Ciência e Aplicações* - Vol.3, ano 2016, escrito pelos autores Gelson Iezze, Osvaldo Dolce, David Degrnsszanln, Roberte Périgo e Nilze de Almeida, o qual segue um roteiro parecido com todos os outros analisados.

Algumas informações importantes:

i) Todos os exercícios referentes a cada tópico deverão ser resolvidos em grupo de pelo menos quatro alunos, para que eles possam ter a oportunidade de interação e discussão sobre os conceitos abordados.

ii) No final de cada tópico, os exercícios deverão ser entregues aos alunos, onde será estipulado um tempo suficiente para que os alunos possam resolvê-los.

iii) No fim do tempo estipulado, o professor deve expor as respostas esperadas e comentar os resultados de cada questão, de modo que os objetivos referentes ao ensino e aprendizagem sejam alcançados.

iv) Os conceitos importantes para a fundamentação dessa sequência didática estão inseridos nessa dissertação.

Exercício 5.1

a) Determine a solução da equação $5x^3 - 45x^2 + 130x - 120 = 0$, sabendo que 2 é uma de suas raízes.

b) Sabendo que 5 é raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$. Determine as outras duas raízes.

Proposta de soluções

Dentro da proposta didática espera-se que nessa questão o aluno utilize o dispositivo de Briot-Ruffini para fazer a divisão do respectivo polinômio pela raiz dada, reduzindo assim a equação do 3º grau para uma do 2º grau e depois resolvê-la pelo processo habitual.

a) Utilizar o dispositivo de Briot–Ruffini, dividir $5x^3 - 45x^2 + 130x - 120$ por $x - 2.$

2	5	-45	130	-120
	5	-35	60	0

As demais raízes seguem da solução da equação $5x^2 - 35x + 60 = 0$.

Ou seja: $x = 3 \;\; e \;\; x = 4$

$S = \{2, \;\, 3, \;\, 4\}$

b) Utilizar o dispositivo de Briot–Ruffini para dividir $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ por $x - 5.$

5	1	-6	3	10
	1	-4	-5	0

As demais raízes seguem da solução da equação $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Ou seja: $x = -1 \;\; e \;\; x = 5.$

$S = \{-2, -1, \;\, 5\}$

Para o próximo exercício será verificado a habilidade do aluno em lidar com a relação de Girard para as equações cúbicas.

Exercício 5.2

a) Resolva a equação $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a – 1.

b) Determine as raízes da equação $x^3 - 12x^2 + 44 - 48 = 0$, sabendo que elas estão em progressão aritmética de razão r.

Proposta de soluções

a) Pelas Relação de Girard, tem-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$-1 + x_3 = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{1}{2}$$

Usar do dispositivo de Briot-Ruffini para dividir $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ por $x - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$	2	1	-13	6
	2	2	-12	0

As demais raízes seguem da solução da equação $2x^2 + 2x - 12 = 0$.

Ou seja: $x = -2 \;\; e \quad x = 3$

$S = \left\{-3,\; \frac{1}{2},\; 2\right\}$

b) Da Relação de Girard, tem-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-12)}{1} = 12$$

Como as raízes formam uma PA de razão r, segue que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \;\Rightarrow\; x_2 - r + x_2 + x_2 + r = 12 \;\Rightarrow\; x_2 = 4$$

Dividindo $x^3 - 12x^2 + 44 - 48$ por $x - 2$, obtem-se $x^2 - 12x + 24$.

As outras raízes vêm da solução da equação $x^2 - 12x + 24 = 0$.

5.1.1 Teorema das Raízes Racionais

Para o exercício seguinte temos a exposição e explicação do Teorema das Raízes da Racionais. Exemplificando para pesquisa da existência e determinação de pelo menos uma raiz racional da equação do segundo grau.

Exercício 5.3

a) Determine, se existem, as raízes racionais da equação $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$.

b) Resolva a equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$

c) Determine quais são as possíveis raízes racionais da equação $x^3 - 12x - 8 = 0$

d) A equação da questão **c** pode ser resolvida com o uso do dispositivo de Briot-Ruffine? Por quê?

e) A equação da questão **c** pode ser resolvida com o uso das Relações de Girard? Por quê?

Proposta de soluções

a) Pelo teorema das raízes racionais, os possíveis valores para as raízes na forma $\frac{p}{q}$ são tais que:

p seja divisor de -3 e q seja divisor de 2

$\frac{p}{q} = \left\{-3, \ -\frac{3}{2}, \ -1, \ -\frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ 3\right\}$

Testando cada um deles, encontra-se -1 e $-\frac{1}{2}$ como raízes racionais da equação.

b) Se a equação tiver raízes racionais, elas devem estar no conjunto*:*

$$\frac{p}{q} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9 \}$$

Testando cada um desses valores, encontra-se -3 como a única raiz racional da equação.

Dividindo $x^3 + 3x^2 - 3x - 9$ por $x + 3$, obtem-se $x^2 - 3$.

As outras raízes vêm da solução da equação $x^2 - 3 = 0$.

$$x = \sqrt{3} \quad e \quad x = -\sqrt{3}$$

c) As possíveis raízes racionais são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4 \pm 8\}$

Testando cada um, tem-se;

$f(-1) = 3,$ $f(1) = -19,$ $f(-2) = -8$ $f(2) = -24$

$f(-4) = -24$ $f(4) = 8$ $f(-8) = \ 424$ $f(8) = -408$

Portanto, a equação não possui raízes racionais.

d) Resposta esperada:

Não, porque não conhecemos nenhuma de suas raízes.

e) Reposta esperada:

Não, porque não existe nenhuma informação prévia sobre suas raízes.

Considerações que devem ser feitas pelo professor:

- A equação $x^3 - 12x - 8 = 0$ não possui solução para o conjunto dos números racionas.

- A equação $x^3 - 12x - 8 = 0$ possui solução para o conjunto dos números reais. Essas soluções são irracionais.

5.2 DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DAS AULAS - 2ª ETAPA

Para a 2ª etapa apresentamos o plano de aula na tabela 5.2.

Tabela 5.2

PLANO DE AULA - 2
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor : Luiz Leal Eixo Temático: A história da fórmula de Cardano e seu desenvolvimento.
OBJETO DO CONHECIMENTO: Estudo das Equações Polinomiais do 3º grau Carga Horária: 6 aulas (300 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: - Entender o processo histórico em que se estabeleceu a fórmula de Cardano. - Resolver equações do 3º grau aplicando a fórmula de Cardano.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Desenvolver habilidade para a resolução de equação do 3º aplicando a fórmula de Cardano.
METODOLOGIA: Aula expositiva dialogada
RECURSOS NECESSÁRIOS: Pincel, lousa, lápis, borracha, caneta, caderno, retroprojetor, computador ou notebook e livro didáticos.
AVALIAÇÃO Através de atividades impressas e participação do aluno.
BIBLIOGRAFIA: BOYER, Carl Benjamin, 1906 – História da matemática; tradução: Helena Castro. São Paulo: blucher, 2012. - Iezze, Gelson ...(et.al.] . Ciência e Aplicações – Vol 3 São Paulo. Editora Saraiva, 2016.

Fonte: autor (2021)

5.2.1 A história da Fórmula de Cardano

O professor fará uma breve narrativa sobre o episódio histórico presente no segundo capítulo dessa dissertação que envolveu Scipione del Ferro, Antônio Maria Fiore, Niccoló Tartaglia, Girolano Cardano e Ludovico Ferraria no contexto da descoberta da Fórmula de Cardano, de modo que possa despertar o interesse e curiosidade dos alunos. Uma vez motivados, eles estarão mais inclinados a estudarem os elementos conceituais que estão inseridos na fórmula de Cardano. Para D'Ambrósio (1996) a história da matemática no ensino deve ser encarada sobretudo pelo seu valor de motivação para a Matemática. Deve-se dar curiosidades, coisas interessantes e que poderão motivar alguns alunos.

5.2.2 Fórmula de Cardano

Por ser uma expressão bem extensa, o aluno pode sentir um impacto primeiro no contato com a Fórmula de Cardano, principalmente no que diz respeito a sua memorização. Neste sentido, propõe-se a seguinte sequência para a apresentação de seu desenvolvimento.

Observe essa fórmula.

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)+\sqrt{\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+\sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)-\sqrt{\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{bc}{6a^2}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3}-\frac{b}{3a}} \quad (65)$$

Parece ser um tanto extensa pela sua complexidade! Essa é a fórmula de Cardano. Uma fórmula resolutiva da equação de terceiro grau.

Parece bem difícil de memorizar. Mas, no entanto, ela pode ser reduzida para uma expressão bem mais simples, como veremos a seguir:

Vejamos:

Seja a equação de terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Se dividimos toda a equação por a, teremos:

$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$, ou seja , $a = 1$.

$$ax^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0 \qquad (66)$$

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27\cdot 1^3} + \frac{bc}{6\cdot 1^2} - \frac{d}{2\cdot 1}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27\cdot 1^3} + \frac{bc}{6\cdot 1^2} - \frac{d}{2\cdot 1}\right)^2 + \left(\frac{c}{3\cdot 1} - \frac{b^2}{9\cdot 1^2}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27\cdot 1^3} + \frac{bc}{6\cdot 1^2} - \frac{d}{2\cdot 1}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27\cdot 1^3} + \frac{bc}{6\cdot 1^2} - \frac{d}{2\cdot 1}\right)^2 + \left(\frac{c}{3\cdot 1} - \frac{b^2}{9\cdot 1^2}\right)^3}}$$
$$-\frac{b}{3\cdot 1}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} \qquad (67)$$

E se considerarmos $b = 0$, vamos eliminar todas as quantidades de b da equação (66) e teremos:

$$ax^3 + \frac{0\cdot x^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0 \qquad (68)$$

$$x = \sqrt[3]{\left(-\cancel{\frac{0^3}{27}} + \cancel{\frac{0\cdot c}{6}} - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\cancel{\frac{0^3}{27}} + \cancel{\frac{0\cdot c}{6}} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \cancel{\frac{0^2}{9}}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\left(-\cancel{\frac{0^3}{27}} + \cancel{\frac{0\cdot c}{6}} - \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\cancel{\frac{0^3}{27}} + \cancel{\frac{0\cdot c}{6}} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \cancel{\frac{0^2}{9}}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}} \quad . \tag{69}$$

Sendo $d = q$ e $c = p$, teremos a expressão em duas parcelas que se diferem apenas pelos sinais de + e -.

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{70}$$

Considerando $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, e substituindo na equação (70), temos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \tag{71}$$

Obs.: A expressão dentro dos radicais cúbicos diferem apenas pelos sinais de + e de - , o que torna a expressão mais simples e de fácil memorização.

- Demonstração da mudança de variável $x = -\frac{b}{3a}$, na transformação da equação geral $ax^3 + bx^2 + cx$ para a forma reduzida $y^3 + py + q = 0$.
- Dando destaque para as igualdades $p = c - \frac{b^2}{3}$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$, através de exemplos da redução de algumas equações cúbicas.

Exercício 5.4

Use a Fórmula de Cardano para determinar uma das raízes das seguintes equações:

a) $x^3 - 3x - 1 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$

c) Existe outro método para determinar a raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$? Se sim, justifique sua reposta utilizando esse método para encontrá-la.

Proposta de soluções

a)

$$x = \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 1}}$$

$$x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 1$$

b) Primeiro, deve-se transformar a equação para forma reduzida.

Considerando $x = y + m, \quad onde \;\; m = -\frac{b}{3}, \quad ou\ seja, \;\; x = y - \frac{b}{3}$

Tem-se:

$$p = c - \frac{b^2}{3} = -6\,,$$

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = -9\,,$$

$$y^3 - 6x - 9 = 0\,.$$

Aplica-se a Fórmula de Cardano.

$$y = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \quad + \quad \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$y = \sqrt[3]{8} \quad + \quad \sqrt[3]{1} \quad = 3 \quad .$$

Como $x = y - \frac{b}{3}$

$$x = 3 - \left(-\frac{6}{3}\right) = 5$$

c)

Resposta esperada

Sim, o teorema das raízes racionais.

Aplicando o teorema, tem-se que os possíveis candidatos as raízes racionais são: $\{-1,\ 1, -5\ e\ \ 5\ .\}$

Testado os valores, tem-se:

$f(-1) = -18,\qquad f(1) = -4,\qquad f(-5) = -310,\qquad f(5) = 0$

De fato, 5 é raiz da equação.

Análise das raízes da equação.

Apresentação da tabela para fazer uma análise da equação de terceiro grau.

Sendo D o discriminante da Fórmula de Cardano.

Onde $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

$D > 0$	A equação possui uma raiz real e duas complexas
$D = 0$	A equação possui três raízes reais, sendo duas ou três iguais
$D < 0$	A equação possui três raízes reais e distintas

Exercício 5.5.

Classifique as raízes das equações:

a) $x^3 + 3x + 6 = 0$

b) $x^3 + 12x - 16 = 0$

c) $x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = 0$

Proposta de soluções

a) $x^3 + 3x + 6 = 0$

Calcula-se o discriminante (D) da Fórmula de Cardano.

Sendo $p = 3\quad e\ q = 6$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 10$$

$D > 0,$ a equação possui uma raiz real e duas complexas.

b) $x^3 - 3x - 2 = 0$

Usa-se o discriminante (D) da Fórmula de Cardano.

Sendo $p = -3 \quad e \quad q = -2$

Calcula-se o discriminante (D) da Fórmula de Cardano.

Sendo $p = 3 \quad e\, q = 6$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{3}\right)^3 = 0\,.$$

$D = 0,$ a equação possui três raízes, sendo duas ou três iguais.

c) Primeiramente, transformando a equação para a forma reduzida, tem-se: $y^3 - 9y - 6 = 0$.

Calcula-se o discriminante (D) da Fórmula de Cardano.

Sendo $p = -9 \quad e\, q = -6$,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{6}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{3}\right)^3 = -18\,.$$

$D < 0,$ a equação possui três raízes reais e distintas.

5.2.3 Resolução de equações de terceiro grau pelo método trigonométrico.

Discussão sobre os casos irredutíveis de equações cúbicas. Apresentação do método trigonométrico de Viete, com explicação argumentada na relevância de se revolver expressões com raízes quadradas de números negativos sem usar números complexos.

$$y_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right]$$

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 120°\right]$$

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 220°\right]$$

Exercício 5.6.

Resolva a equação a $x^3 - 12x - 8 = 0$ pelo método trigonométrico.

Proposta de solução

Temos,

$$p = -12 \quad e \quad q = -8$$

$$y_n = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2\pi n}{3}\right] \quad com\, n = 0, 1, 2.$$

É conveniente calcular separadamente as expressões;

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad e \qquad \frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)$$

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} = 2\cdot\sqrt{-\left(-\frac{12}{3}\right)} = 4$$

$$\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) = \frac{1}{3}arccos\left(\frac{3(-8)}{2(-12)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-12}}\right) = \frac{1}{3}arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot 60 = 20$$

$$y_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right] \quad = 4\cdot\cos 20 \;\cong 3{,}75877$$

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 120°\right] \quad = 4\cos(20+120) \cong -3{,}064177772$$

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left[\frac{1}{3}arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 240°\right] \quad = 4\cos(20+240) \cong -0{,}694592$$

$$S = \{3{,}75877, -3{,}064177, -0{,}694592, \quad\}$$

5.3 DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DAS AULAS - 3ª ETAPA

Para a 3ª etapa apresentamos o plano de aula na tabela 5.3

Tabela 5.3

PLANO DE AULA - 3
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor : Luiz Leal Eixo Temático: Equação polinomial do 3º grau.
OBJETO DO CONHECIMENTO: Estudo das Equações Polinomiais do 3º grau Carga Horária: 3 aulas (300 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: - Resolver equações do 3º grau aplicando a fórmula de Cardano.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Desenvolver habilidade para a resolução de equação do 3º aplicando a fórmula de Cardano.
METODOLOGIA: Aula expositiva dialogada
RECURSOS NECESSÁRIOS: Pincel, lousa, lápis, borracha, caneta, caderno, retroprojetor, computador ou notebook e livro didáticos
AVALIAÇÃO Através de atividades impressas e participação do aluno
BIBLIOGRAFIA: - Gelson Iezzi ...(et. al.) - Matemática: ciência e aplicação, volume 3. São Paulo. Editora Saraiva,2016. - BALESTRI, Rodrigo. Matemática: Interação e tecnologia, volume3. São Paulo. Editora Leya, 2016.

Fonte: autor (2021)

Para esta etapa propõe-se uma atividade diagnótica onde o aluno terá a oportunidade de verificar se há soluções no conjunto dos números reais.

5.3.1 Atividade diagnóstica

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações: (Utilize a Fórmula de Cardano pra verificar se as soluções pertencem ao conjunto $\mathbb{R}$)

a) $x^2 - 12x - 16 = 0$

b) $2x^3 + 6x + 8 = 0$

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

d) $x^3 - 9x - 9 = 0$

Proposta de soluções

a) $x^2 - 12x - 16 = 0$

Primeiramente, calcula-se o discriminante D da Fórmula de Cardano para verificar se a equação possui todas as raízes pertencem a $\mathbb{R}$.

Sendo $p = -12 \quad e \quad q = -16$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{16}{2}\right)^2 + \left(-\frac{12}{3}\right)^3 = 0$$

$D = 0,$ então, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. (sendo duas iguais)

Como $\left(\frac{q}{2}\right)^2$ é um cubo perfeito, ou seja, $\left(-\frac{16}{2}\right)^2 = 8$. É conveniente achar a primeira raiz pela fórmula:

$$y = \sqrt[3]{-\left(-\frac{16}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{16}{2}\right)^2 + \left(-\frac{12}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(-\frac{16}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{16}{2}\right)^2 + \left(-\frac{12}{3}\right)^3}}\ ,$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{64 - 64}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{64 - 64}}\,,$$

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{0}} = 4.$$

Para achar as outras raízes, divide-se $x^2 - 12x - 16$ por $x - 4$.

-4	1	0	-12	-16
	1	-4	4	0

As outras raízes saem da solução da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x = -2$.
$S = \{-2, -2, \quad 4\}$

- O aluno pode optar em determinar as raízes usando o Teorema da Raízes Racionais. Para isso, basta testar os divisores de -16 $\{\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8, \quad \pm 16\}$.

b) $2x^3 + 6x + 8 = 0$

Dividindo a equação por 2, tem-se:

$x^3 + 3x + 4 = 0$

Primeiramente, calcula-se o discriminante D da Fórmula de Cardano para verificar se a equação possui todas as raízes pertencem a $\mathbb{R}$.

Sendo $p = 3 \quad e \quad q = 4$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 5\,.$$

$D > 0,$ então, $x_1 \in \mathbb{R}, \quad e \quad x_2, x_3 \notin \mathbb{R}$.

Como o exercício pede que a solução em $\mathbb{R}$, o aluno deve responder:

A equação não possui todas as soluções reais.

c) $x^3 - 7x - 6 = 0$

Primeiramente, calcula-se o discriminante D da Fórmula de Cardano para verificar se a equação possui todas as raízes pertencem a $\mathbb{R}$.

Sendo $p = -7 \quad e \quad q = -6$,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{6}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^3 = -\frac{262}{27}$$

$D < 0, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. (sendo as três raízes distintas)

- O aluno pode optar pela resolução usando o método trigonométrico. Porém, seria mais trabalhoso. Pois, nesse caso, é mais simples usar o Teorema das Raízes racionais.

Testando-se os divisores de -6 $\{\pm 1, \ \ \pm 2, \ \ \pm 3, \ \ \pm 6\}$, encontra-se as raízes $\{-2, \ -1, \ 3\}$.

d) $x^3 - 9x - 9 = 0$

Primeiramente, calcula-se o discriminante D da Fórmula de Cardano para verificar se a equação possui todas as raízes pertencem a $\mathbb{R}$.

$.P = \ -9 \qquad e \qquad q = -9$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{3}\right)^3 = -\frac{27}{4}$$

$D < 0, \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. (sendo as três raízes distintas)

- A equação e irredutível, logo não possui raízes racionais.

- O aluno pode ter essa comprovação pesquisando os possíveis valores pelo teorema das raízes racionais.

Logo, pode ser usado método trigonométrico para calcular as raízes da equação.

Temos a fórmula trigonométrica dada por:

$$y_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right] \quad com\ k = 0, 1, 2.$$

Com p = -9 e q = 9 , Calculando separadamente, vem:

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} = 2 \cdot \sqrt{-\left(-\frac{9}{3}\right)} = 2\sqrt{3}\,,$$

$$\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{-3}{p}}\right) = \frac{1}{3} arccos\left(\frac{3(-9)}{2(-9)} \cdot \sqrt{\frac{-3}{-9}}\right) = \frac{1}{3} arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10\,.$$

$$y_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right] \quad = 2\sqrt{3} \cdot \cos 10 \ \cong 3{,}411473$$

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 120°\right] \quad = 2\sqrt{3} \cdot \cos(10 + 120) \ \cong -2{,}226681$$

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} arccos\left(\frac{3q}{2p} \cdot \sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 240°\right] \quad = 2\sqrt{3} \cos(10 + 240) \cong -1{,}184792$$

Com isso, o aluno encontra as três raízes aproximadas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história da resolução de equações de terceiro grau levou quatro milênios para ser escrita por meio de inúmeras mãos de matemáticos, através da costrução ao longo do tempo de um arcabouço conceitual e ferramental que oportunizaram as transformações dos conhecimentos do passado, a exemplo, do conhecimento algébrico. Nos tempos atuais as equações de terceiro grau são estudadas dentre as equações polinomiais, onde livros didáticos adotados no Ensino Médio não dão muita relevância ao tema e dedicam, no máximo, uma pequena menção ao assunto. Percebe-se que há apenas uma tentativa de se trabalhar o básico necessário, com isso tem-se uma grande perda de valores agregados as inúmeras situações relevantes do ensino e aprendizagem da matemática.

Para que o ensino de matemática possa ser de qualidade e prazerosa as propostas tendem a ser cada vez mais completas, onde busca-se apreender com os acúmulos de experiências. Foi com essa finalidade que buscamos contribuir para o estudo das equações cúbicas apresentando uma proposta didática direcionado para alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Segundo D´ambrósio (1996), todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração. Portanto, estudar a história da equação de terceiro grau e a busca por um método geral de resolução oferece a oportunidade de desenvolver um trabalho algébrico rico e completo. Com isso buscamos neste trabalho demonstrar que o ensino de equações polinomiais de terceiro grau não pode se restringir apenas aos métodos que são abordados pelos livros didáticos da Rede Pública de Ensino, pois eles não abrangem grande parte dessas equações, servindo somente para aquelas que possuem pelos menos uma raiz racional dando a falsa impressão de que somente essas possuem soluções.

Acreditamos que uma proposta de ensino que dedique mais atenção ao estudo das equações de terceiro grau, ampliando suas soluções de forma que possa abranger um universo maior de soluções através da Fórmula de Cardano, pode ser interessante no sentido de dar oportunidades aos alunos de entenderem os conceitos matemáticos considerados complexos e que na história da matemática o seu desenvolvimento nunca foi pronta e acabada, sempre houve uma continuidade de saberes com a perpectiva de um melhor aproveitamento da construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARNEIRO, J.P. Equações Algébricas de Grau Maior que Dois: Assunto para o Ensino Médio? Revista do Professor de Matemática. No. 40. 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações, vol. 3: ensino médio, 1ª edição. São Paulo: Àtica, 2012.

GARBI, Gilberto G. O Romance das Equações Algébricas**.** 4ªed. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2010.p.9-134.

EVES, Howard Whitley. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004, p. 207.

HEFEZ e M. L. T. Villela. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;IEZZI, Gelson, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Matemática ciência e aplicações – 6ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2013

IEZZI, Gelson, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Matemática ciência e aplicações – 6ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2016

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar vol.6: Complexos, polinômios, equações. 8ªed. São Paulo. Editora Saraiva, 2013.

IEZZI, Gelson et al. Matemática: ciência e aplicações, vol. 3: ensino médio, 6º edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, Erlon Lages. A Equação do Terceiro Grau. In Revista Matemática Universitária. Nº 5.SBM, junho de1987. p. 9-23.

MILIES, C.P. A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau. Revista do Professor de Matemática. No. 25. Sociedade Brasileira de Matemática. 1994.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1997. 10v.

NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar. V.6 Polinômios. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática;

RIPOLL, Jaime, Cydara Ripoll, F. Porteo de Silveira. O Tormento de Cardano. Instituto de Matemática da UFRGS – 2016

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (1ª a 4ª série): Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF,1997.

PORTAL PROFESSOR LEONARDO. Disponível em: <https://www.leonardoportal.com/p/acervo-de-matematica.htm > acesso 20 de fev., 2021.

ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeir a. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática;

SANTOS, Sergio Ricardo dos. As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus: Sua História e Suas Soluções. 2013. 78p. Trabalho de Conclusão de Curso. Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT. -Universidade Federal de Sergipe, Sergipe. 2013

SCHUVVAB. J. L. Resolução de Equação Algébrica até Quarto Grau, uma abordagem histórica. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá , 2013.

SILVA, Fabiano Luiz D. As Diferentes estratégias de resolução das equações algébricas até o terceiro grau. 2015. 70p.Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte.2015.