

Rogério da Silva Santos

**Exploração de distratores do ENEM como
instrumento de ensino e aprendizagem em
Matemática**

Vitória

2024

Rogério da Silva Santos

Exploração de distratores do ENEM como instrumento de ensino e aprendizagem em Matemática

Dissertação de mestrado apresentada por **Rogério da Silva Santos** ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

S677t Sobrenome do autor, Nome do autor, 1989-
Título da obra : Subtítulo da obra / Nome do autor Sobrenome do autor. - 2022.
Total de folhas f. : il.

Orientador: Nome do orientador Sobrenome do orientador.
Coorientador: Nome do coorientador Sobrenome do coorientador.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Posicionando na terra e no espaço. I. Sobrenome do orientador, Nome do orientador. II. Sobrenome do coorientador, Nome do coorientador. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 51

Rogério da Silva Santos

Exploração de distratores do ENEM como instrumento de ensino e aprendizagem em Matemática

Dissertação de mestrado apresentada por **Rogério da Silva Santos** ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, 17 de janeiro de 2025:

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Fábio Júlio Valentim
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira
Universidade Federal de Ouro Preto
Membro Externo

Vitória
2024

Dedico ao meu pai, Carlos Roberto Loureiro Santos e à minha mãe, Maria José da Silva Santos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder bênçãos que um dia foram inimagináveis. Agradeço aos meus pais e irmãos, que sempre me apoiaram e me acolheram, principalmente nos momentos mais difíceis. Agradeço aos meus colegas de mestrado, Daniel Caxias Carneiro, Márcio Peters e Eduardo Alejandro Flores Araya, que compartilharam comigo as mesmas emoções durante o cumprimento dos créditos e a conclusão do curso. Um agradecimento especial vai para o meu orientador, Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro, que me ofereceu total suporte e incentivo para o desenvolvimento deste trabalho. Prof. Dr. Fábio Júlio Valentim, pela excelente gestão do PROFMAT no Espírito Santo, que tem auxiliado tantos mestrandos no processo de iniciação, permanência e conclusão. E por fim, aos meus amigos e colegas de profissão pelas grandes parcerias firmadas, que tanto contribuíram para minha formação.

“A educação exige os maiores cuidados, porque influi sobre toda a vida.”

Lucius Annaeus Seneca

Resumo

Este trabalho investiga erros em Matemática cometidos por estudantes de escolas públicas do ES no ENEM. Por meio da plataforma ZBS Educação, é possível identificar habilidades nas quais o público alvo apresentou baixo grau de domínio. A dissertação propõe uma prática didática com foco em resoluções alternativas, e destaca o "erro" como parte do processo de ensino e aprendizagem. Auxilia, também, professores e gestores no planejamento de estratégias para superar dificuldades históricas, e assim, contribuir com aprovações em universidades.

Palavras-chave: Distratores, ENEM, TRI, Teoria de Resposta ao Item, Erro, Erros, Microdados.

Abstract

This work investigates the errors in Mathematics made by students from public schools in ES in the ENEM. Through the ZBS Educação platform, it is possible to identify skills in which the target audience has a low level of mastery. The dissertation proposes a teaching practice centered on alternative resolutions and highlights "error" as part of the teaching and learning process. It also helps teachers and guidelines in planning strategies to overcome historical difficulties and also contribute to university approvals.

Keywords: Distractors, Distrator, Distratores, ENEM, Item Response Theory, TRI, Errors, Microdata.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Relação Entre o Número de Acertos e a Nota Calculada pela Tri	23
Figura 2 – Pegadinha 1	28
Figura 3 – Pegadinha 2	29
Figura 4 – Pegadinha 3	30
Figura 5 – ENEM 2019 — Questão 148	31
Figura 6 – ENEM 2020 — Questão 151	33
Figura 7 – ENEM 2021 — Questão 142	35
Figura 8 – Corrente Suspensa	44
Figura 9 – Questões 1 e 2 Enem 1998	47
Figura 10 – Questão 10 Enem 1998	47
Figura 11 – Questão 15 Enem 1998	48
Figura 12 – Questões 18 e 19 Enem 1998	49
Figura 13 – Questões 20 e 21 Enem 1998	50
Figura 14 – Questões 136 Enem 2023	51
Figura 15 – Questão 138 Enem 2023	52
Figura 16 – Questões 139 Enem 2023	53
Figura 17 – Questões 141 Enem 2023	54
Figura 18 – Questões 143 Enem 2023	55
Figura 19 – Questões 147 Enem 2023	56
Figura 20 – Nota média Brasil Enem 2019	57
Figura 21 – Nota média das Escolas Públicas Estaduais Brasil Enem 2019	58
Figura 22 – Nota média das Escolas Públicas Estaduais ES Enem 2019	58
Figura 23 – ENEM 2019 — Questão com o Menor Índice de Acerto no ES.	59
Figura 24 – ENEM 2019 — Questão 173 amarela.	60
Figura 25 – ENEM 2019 — Questão 173 desempenho no Brasil.	60
Figura 26 – Desempenho 2019 — Escolas Públicas Estaduais do ES	65
Figura 27 – Grau de Domínio x Peso Histórico - Rede Estadual ES	66
Figura 28 – Estatística de resposta dos Capixabas — Q149 — Enem 2022	71
Figura 29 – Estatística de resposta dos brasileiros — Q149 — Enem 2022	71
Figura 30 – ENEM 2022 — Questão 149.	72
Figura 31 – Estatística de Resposta dos Capixabas — Q140 — Enem 2021	74
Figura 32 – Estatística de Resposta dos Brasileiros - Q140 - Enem 2021	74
Figura 33 – ENEM 2021 - Questão 140	75
Figura 34 – Estatística de resposta dos Capixabas — Q176 — ENEM 2020	77
Figura 35 – Estatística de resposta dos Brasileiros — Q176 — ENEM 2020	77
Figura 36 – ENEM 2020 — Questão 176	78

Figura 37 – Diagrama de Venn Solução Q176 - ENEM 2020	79
Figura 38 – Estatística de resposta dos Capixabas — Q157 — Enem 2019	80
Figura 39 – Estatística de resposta dos Brasileiros — Q157 — Enem 2019	81
Figura 40 – EEEFM Ponto do Alto — Q157 — ENEM 2019.	82
Figura 41 – EEEM Prof. Renato José da Costa Pacheco — Q157 — ENEM 2019	82
Figura 42 – EEEM Colégio Estadual do Espírito Santo — Q157 — ENEM 2019	83
Figura 43 – EEEM Irmã Dulce Lopes Ponte — Q157 — ENEM 2019	83
Figura 44 – EEEFM Major Alfredo Pedro Rabayolli — Q157 — ENEM 2019	84
Figura 45 – CEEFTI Ewerton Montenegro Guimarães (Tempo Integral) — Q157 — ENEM 2019	84
Figura 46 – EEEFM Jesus Cristo Rei — Q157 — ENEM 2019	85
Figura 47 – ENEM 2019 — Questão 157	86
Figura 48 – Estatística de resposta dos Brasileiros - Q160 - Enem 2019	88
Figura 49 – Estatística de resposta dos Capixabas - Q160 - Enem 2019	89
Figura 50 – Estatística de resposta em Vitória - Q160 - Enem 2019	90
Figura 51 – Estatística Colégio Estadual do ES - Q160 - Enem 2019	90
Figura 52 – ENEM 2019 - Questão 160	91
Figura 53 – Estatística de resposta dos Brasileiros - Q159 - Enem 2018	94
Figura 54 – Estatística de resposta dos Capixabas - Q159 - Enem 2018.	95
Figura 55 – Estatística de resposta em Cariacica - Q159 - Enem 2018	95
Figura 56 – ENEM 2018 - Questão 159	96
Figura 57 – Estatística de resposta dos Brasileiros - Q160 - Enem 2018	99
Figura 58 – Estatística de resposta dos Capixabas - Q160 - Enem 2018	100
Figura 59 – Estatística de resposta no Rio de Janeiro - Q160 - Enem 2018	100
Figura 60 – Estatística de resposta em Santa Catarina - Q160 - Enem 2018	101
Figura 61 – Estatística de resposta no Maranhão - Q160 - Enem 2018	101
Figura 62 – Estatística de resposta em Tocantins - Q160 - Enem 2018	102
Figura 63 – Estatística de resposta no Distrito Federal - Q160 - Enem 2018	102
Figura 64 – ENEM 2018 - Questão 160	103

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de resultados - palavra-chave erro	20
Tabela 2 – Habilidades com maior frequência histórica no campo Alto Peso Histórico x Baixo Grau de Domínio	68
Tabela 3 – Estatística de Acerto - Q157 - 2019 (em ordem decrescente de acertos)	85

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	DISSERTAÇÕES DO BANCO DE DADOS DO PROFMAT QUE CONTRIBUÍRAM PARA ESTE TRABALHO.	17
2.1	Análise da pesquisa	21
3	ITENS FORMULADOS NA TRI E QUESTÕES COM "PEGADINHAS".	22
3.1	Itens Formulados na TRI.	22
3.2	Itens Formulados como "Pegadinha".	25
3.3	Exemplos de itens com "Pegadinhas"	27
3.3.1	Pegadinha 1 — Divisão de Balas	28
3.3.2	Pegadinha 2 - O Paradoxo da Batata	29
3.3.3	Pegadinha 3 - O Problema Matemática que Parou a Internet	30
3.4	Exemplos de itens bem formulados na TRI	30
3.4.1	ENEM 2019 — Questão 148	31
3.4.2	ENEM 2020 — Questão 151	33
3.4.3	ENEM 2021 — Questão 142	35
4	A VALORIZAÇÃO E A EXPLORAÇÃO DO ERRO.	38
4.1	Exemplos de Cálculos Corretos e de erros comuns cometidos por estudantes:	39
4.1.1	Exemplo 1: Resolver a expressão numérica $2 + 3 \times 4$	40
4.1.1.1	A resolução correta da expressão numérica	40
4.1.1.2	Uma resolução incorreta da expressão numérica:	40
4.1.2	Exemplo 2: Resolver a soma de frações $1/2 + 1/3$	41
4.1.2.1	Um exemplo de operação correta com frações:	41
4.1.2.2	Um exemplo de operação incorreta com frações:	41
4.2	O Erro como Ferramenta Importante na Matemática.	42
5	ANÁLISE DOS DADOS DO ENEM.	45
5.1	Questões de Matemática ENEM 1998 - Prova Amarela	47
5.2	Questões de Matemática ENEM 2023 - 2º Dia - Cardeno 5 - Prova Amarela	51
5.3	Microdados do ENEM	56
5.4	Comparativo de taxas de acertos - ENEM 2019.	57

5.5	Questão com o menor índice de acerto no ES - ENEM 2019	59
5.6	Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias.	62
5.7	Mapa de Habilidades — Desempenho por Descritor(Habilidade) . . .	65
5.8	Análise Histórica de Habilidades e Competências dos ENEM 2009 - 2019	68
6	ANÁLISE DE QUESTÕES DO ENEM COM FOCO NOS ACERTOS E PRINCIPAIS ERROS.	69
6.1	Discussão de itens de habilidade H3 e competência C1.	70
6.1.1	Questão 149 — ENEM 2022	70
6.1.1.1	Discussão das Principais Alternativas da Q149 — ENEM 2022.	73
6.1.2	Questão 140 — ENEM 2021	74
6.1.2.1	Discussão das Principais Alternativas da Q140 — ENEM 2021.	75
6.1.3	Questão 176 — ENEM 2020	76
6.1.3.1	Discussão das Principais Alternativas da Q176 — ENEM 2020.	79
6.1.4	Questão 149 — ENEM 2019	80
6.1.4.1	Estatística de Acerto nas 5 Escolas Analisadas — Q157 - 2019	85
6.1.4.2	Discussão das Principais Alternativas da Q157 — ENEM 2019.	86
6.1.5	Questão 160 — ENEM 2019	88
6.1.5.1	Discussão das Principais Alternativas da Q160 — ENEM 2019.	92
6.1.6	Questão 159 — ENEM 2018	94
6.1.6.1	Discussão das Principais Alternativas da Q159 - ENEM 2018	97
6.1.7	Questão 160 — ENEM 2018	99
6.1.7.1	Discussão das Principais Alternativas da Q160 - ENEM 2018	104
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	REFERÊNCIAS	107

1 Introdução

Desde o início da minha carreira como professor de Matemática na Educação Básica, antes mesmo de cogitar a escrita de uma dissertação de mestrado, já me intrigava compreender por que os estudantes cometiam tantos erros em determinados assuntos. Preparava aulas cuidadosamente, acreditando que o uso de exemplos cotidianos e a resolução de vários exercícios em sala seriam suficientes para garantir uma aprendizagem sólida e preparar os alunos para as avaliações subsequentes.

No entanto, a surpresa sempre aparecia após a correção das provas: um número mínimo de notas acima de 60% (taxa mínima de pontuação suficiente ou satisfatória em avaliações da Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo - SEDU) e um grande volume de notas abaixo desse percentual, ou até mesmo avaliações deixadas em branco.

As provas discursivas revelavam ainda mais a gravidade do problema, expondo raciocínios equivocados e operações sem sentido matemático. Pior ainda, esses erros se repetiam constantemente ao longo dos anos e em diferentes séries, cometidos por alunos distintos.

Com o tempo, fui amadurecendo e incorporando esses erros ao meu planejamento de aulas, promovendo discussões e provocações que levavam à sua aparição durante as atividades. Nas trocas de ideias na sala dos professores, os colegas da minha área relatavam, perplexos, exemplos de erros absurdos cometidos pelos alunos, como:

"Como alguém não consegue resolver uma simples expressão numérica como $7 + 2 \times 40 = ?$ "

"Como um estudante chega ao terceiro ano do Ensino Médio sem saber resolver uma soma ou subtração de frações, do tipo $\frac{2}{5} + \frac{3}{20}$ ou $\frac{5}{3} - \frac{7}{18}$?"

"Uma aluna teve o raciocínio correto ao resolver uma questão, mas, ao chegar na expressão 2^3 , colocou o resultado como 6. Como isso é possível? Desisto da profissão!"

Com as trocas de experiências e observações, passei a adotar uma estratégia de ensino que não apenas visa ensinar a fazer o correto, mas também a evitar o erro. Nas discussões entre professores de Matemática, comecei a sugerir que não deveríamos nos surpreender com esses erros, mas deveríamos incluí-los nas aulas como objeto de análise e discussão. Argumentava que o professor deve sempre estar um passo à frente dos alunos, antecipando possíveis equívocos e tendo estratégias para esclarecer dúvidas e promover o conhecimento.

“[...] alguns estão preocupados unicamente em detectar os erros, sem discutí-los com os alunos; outros aproveitam os erros encontrados e retomam o conteúdo em questão, permitindo que os alunos identifiquem suas dificuldades e tentem superá-las; outros, ainda, exploram os erros com os alunos, questionando os limites de validade da resposta dada ou mesmo, tentando entender como os alunos raciocinam ao resolver a questão (CURY, 1995, p. 40).”

Este trabalho conecta a análise dos erros cometidos pelos alunos a um estudo sobre tópicos da matemática elementar, com base nas questões do ENEM e na Teoria de Resposta ao Item (TRI), que não apenas define como as notas são calculadas, mas também orienta a elaboração das questões. Conforme mencionado no resumo, as questões do exame seguem uma estrutura pautada no Guia de Elaboração de Itens do ENEM, que inclui, inicialmente, textos ou imagens motivadoras, um comando claro e objetivo, o gabarito, e os distratores, que são alternativas incorretas, mas que parecem corretas para candidatos que ainda não dominam a habilidade exigida pelo item.

Esses distratores estão intimamente relacionados ao que os professores de Matemática devem observar. Eles representam alternativas que refletem raciocínios equivocados que os alunos, sem o domínio necessário, tenderiam a adotar como resposta. Esses distratores não induzem ao erro; o erro já está presente no raciocínio ou no método de resolução utilizado por alunos que não possuem a habilidade necessária.

A leitura deste trabalho é um convite aos docentes da Educação Básica e estudantes para uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, propondo uma forma de transformar desafios em ensinar matemática, em oportunidades. Sugere o aproveitamento dos equívocos comuns dos estudantes como ferramentas pedagógicas para ensinar Matemática e investigar se esses problemas são particulares, regionais ou universais, considerando a rede educacional pública brasileira.

O foco principal deste estudo recai sobre os resultados e respostas dos estudantes do Espírito Santo, com alguns recortes direcionados ao contexto municipal ou nacional.

No capítulo 2 realizei levantamentos de dissertações que embasaram o trabalho, em relação ao formato da prova do ENEM e seus critérios de atribuição de notas. Nas buscas foram encontradas dissertações do PROFMAT que tratam do estudo dos erros dos estudantes.

Tendo em vista que a definição de distrator é basicamente uma alternativa incorreta plausível de ser respondida por estudantes que não dominam a habilidade, e que "pegadinhas" são armadilhas repudiadas pela comunidade matemática, no capítulo 3 faço a defesa da diferença entre Itens Formulados na TRI e Questões com "Pegadinhas". O que intriga alguns educadores é que o distrator pode, erroneamente, ser considerado uma espécie de pegadinha. Nosso objetivo nesta seção será mostrar que a "pegadinha" mais tem a ver com estrutura geral do item do que com as alternativas.

Tão importante quanto ter ciência do que é correto no campo da matemática, é compreender os possíveis erros. É essencial a identificação do erro no pensamento matemático. A partir dos equívocos que construímos o raciocínio matemático, bem como o pensamento computacional. Se tratando de avaliações de larga escala como o ENEM, saber o que está errado pode ser um ótimo recurso nas respostas de itens. No capítulo que trata da Valorização e a Exploração do Erro, exemplificaremos, com a história das Catenárias, a importância de saber o que está errado, antes mesmo de saber o correto.

O capítulo 5, Análise dos Dados do ENEM, apresento as mudanças estruturais do ENEM, os instrumentos utilizados na pesquisa, a Plataforma ZBS Educação, Microdados do Enem, Plataforma Educação em Foco SEDU. Por meio dessas ferramentas, foram realizados levantamentos das habilidades de maior peso histórico que os estudantes finalistas capixabas tiveram baixo grau de domínio. A tabela 2 é o resultado nas quais coleta de habilidades que historicamente integraram a zona vermelha ¹ da figura 27, e o objeto de estudo será a habilidade que teve maior frequência no grupo prioritário.

Por fim, o capítulo 6 explora os itens de habilidade H3 que foram aplicadas entre 2019 e 2022. As análises dos itens consistem em filtrar as estatísticas de respostas por habilidade (H3), Brasil, Espírito Santos, Municípios, Tipo de escola (pública) e Unidade Escolar. O comportamento das respostas, conforme os filtros, proporcionam a identificação de qual seria o problema de aprendizagem. Nesse capítulo também serão apresentadas resoluções alternativas para os gabaritos, e as possíveis resoluções ou interpretações equivocadas do item. Os equívocos que culminam nos distratores com os maiores índices de respostas são nossos produtos de trabalhos que devem ser incluídas nas aulas de resolução de problemas não só do ENEM, mas também, de outras avaliações externas ou internas da escola pública.

¹ Zona vermelha é a região do gráfico que apresenta as habilidades de alto peso histórico que tiveram baixo grau de domínio por parte dos candidatos.

2 Dissertações do Banco de Dados do PROFMAT que Contribuíram para este Trabalho.

Este capítulo visa informar o número de resultados de pesquisas realizadas no Banco de Dissertações do PROFMAT, quais dissertações existentes contribuíram para minha pesquisa e quais mais se assemelham com a proposta.

O banco de dissertações, disponível no site do PROFMAT (atualizado em 15 de julho de 2024), possui uma vasta quantidade de produções, permitindo a busca por “Nome do Aluno”, “Título da Dissertação” ou “Nome da Instituição”. Nesse campo de busca, é possível inserir palavras-chave e verificar quais dissertações defendidas até o momento podem contribuir ou ser comparadas com nossos estudos sobre o tema. Para minha dissertação, utilizei algumas palavras-chave e obtive resultados relacionados ao mesmo assunto, porém com perspectivas diferentes.

As palavras-chave que mais se associam ao objetivo desta dissertação, mas que não geraram resultados na pesquisa ao Banco de Dados do PROFMAT foi a palavra "ERRO".

As dissertações sobre a Teoria de Resposta ao Item, além de outras referências que citarei em capítulos posteriores, me subsidiaram para o entendimento do funcionamento da TRI em avaliações de larga escala. A principal dissertação que me forneceu tal compreensão foi a "Uma Aplicação da Teoria de Resposta ao Item em um Simulado de Matemática no Modelo ENEM" (TÔRRES, 2016). Nela o autor apresenta os modelos-base dos cálculos de notas, os parâmetros e como é a Elaboração dos Itens para o ENEM. A tabela a seguir apresenta os resultados de quando inseri a palavra "Erro", já que para "Distrator" ou "Distratores" não gerou resultado.

29/02/2024	RODRIGO VITORASSI	OS NÚMEROS RACIONAIS E SUAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NA RETA NUMÉRICA: OS ERROS DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL II	UTFPR
03/05/2022	LUCINEIA REGINA TOCHETTO	ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUADRÁTICAS	UTFPR
31/03/2021	WALEFF MESQUITA LEAL	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DE ERROS EM PROVAS DA OBMEP NO MARANHÃO	UFMA
10/08/2020	MARCOS VINICIUS SILVA DA COSTA	ANÁLISE DE ERROS EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA EXPERIÊNCIA EM UMA TURMA DE SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO DA REDE PÚBLICA	UFRRJ
22/04/2019	JOSE MARCOS NUNES DO AMARANTE	ANÁLISE DE ERROS: REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA NO MUNICÍPIO DE ÓBIDOS-PA A PARTIR DE QUESTÕES DA OBMEP	UFOPA
30/10/2018	ELIANA TELES PORTELA	APRENDENDO POR MEIO DA ANÁLISE DE ERROS: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NUMA FUNÇÃO AFIM	FUFS

01/03/2018	MOACYR SILVA DE CAS- TRO	ANÁLISE DE ERROS COMO INSTRUMENTO DE ENSINO- APRENDIZAGEM: PROVA BI- MESTRAL DA REDE MUNICI- PAL DE ENSINO DA CIDADE DO RIO DE JANEIRO	UFF
30/09/2017	RAUL FRAN- CISCO DA SILVA NASCI- MENTO	ANÁLISE DE ERROS NO PRO- CESSO DE RESOLUÇÕES DE PROPORCIONALIDADE	UFOPA
29/08/2017	LUIS CARLOS GOIS DE OLI- VEIRA	ANÁLISE DE ERROS COMETI- DOS PELOS DISCENTES DO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL E PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO NO ESTUDO DOS NÚMEROS RA- CIONAIS NA SUA FORMA FRACIONÁRIA	FUFS
31/05/2022	MARIA CA- MILA DA CUNHA DOS SANTOS	ANÁLISE DE ERROS NA RE- SOLUÇÃO DE QUESTÕES SO- BRE FUNÇÃO AFIM: UMA EX- PERIÊNCIA COM ALUNOS DA PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO	UEMA
21/12/2021	KÍSSYLLA CHRISTINA MEDEIROS	A ÁLGEBRA NOS ANOS FI- NAIS DO ENSINO FUNDAMEN- TAL: ERROS QUE ALUNOS MAIS COMETEM	UFES
31/10/2019	JOSÉ FLAVIO DE CASTRO SOARES	ERROS COMUNS DOS ESTU- DANTES EM ÁLGEBRA	UERJ

12/04/2019	JONES PAULINO DE SOUZA	ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULO: METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO APLICADA COM ALUNOS DA UFOPA	UFOPA
28/02/2018	MICHAEL MACHADO DE MORAES	ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE ARITMÉTICA: UMA ABORDAGEM NA 2ª FASE DA OBMEP NO OESTE DO PARÁ	UFOPA
21/07/2017	THYAGO ARAUJO FERREIRA	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DE ERROS EM PROVAS DA OBMEP NO MARANHÃO	UFMA
30/08/2016	MARNEY ARAÚJO DOS SANTOS	APRENDENDO POR MEIO DA ANÁLISE DE ERROS DOS Nossos ALUNOS: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA	UFT
19/03/2015	FABRICIO FIGUEREDO MONÇÃO	UMA LEITURA DOS ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	UESB
07/02/2014	RENATO RODRIGUES DOS SANTOS	ANÁLISE DE ERROS EM QUESTÕES DE GEOMETRIA DO ENEM: UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO	UEM

Tabela 1 – Tabela de resultados - palavra-chave erro

Fonte: <<https://profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/>>

2.1 Análise da pesquisa

Dentre os levantamentos realizados, 18 dissertações se aproximaram deste trabalho, contudo, existem diferenças nas abordagens. A tabela 1 apresenta os resultados gerados quando a palavra-chave foi inserida no campo "Título da Dissertação", no espaço de pesquisa do site. Todas trabalham com a metodologia de aplicar de forma autônoma uma avaliação para populações específicas (escola, turma, professores, município ou estado), ou na utilização de avaliações externa aplicadas e corrigidas, como a prova de 2ª fase da OBMEP. Dessas 18 dissertações, uma delas trata diretamente da "Análise de Erros em Questões de Geometria do ENEM"(DOS SANTOS, 2014), sendo a única que trouxe a temática dos erros cometidos por alunos no ENEM. A metodologia utilizada por Dos Santos (2014) foi selecionar questões de Geometria de exames anteriores, aplicar para 82 alunos de cinco escolas públicas do Município de Maringá, e analisar os variados tipos de erros cometidos por esse grupo.

Neste trabalho, o foco está no ensino e na aprendizagem por meio alternativas e das respostas dos alunos nas provas do ENEM, com ênfase na análise dos distratores. A metodologia consistiu na observação dos gráficos de respostas de uma população maior que os demais trabalhos, realizando recortes por escola, município, estado ou Nacional. Atuará na entrega resoluções alternativas e na apresentação de possíveis desenvolvimentos equivocados que podem ter levado um grupo significativo a marcar um determinado distrator.

Em contrapartida, os trabalhos da tabela ?? concentram-se nos modelos estatísticos, nos resultados de experimentos realizados pelos próprios autores. Portanto, esta dissertação de mestrado tem uma atenção na análise das respostas equivocadas dos estudantes, fazendo o uso de exames já aplicados. O objetivo principal é compreender a fragilidade, investigar, o que motivou um grupo expressivo era e propor inclusão dos erros mais comuns nas aulas de resolução de questões do ENEM para a consolidação da aprendizagem. Desta forma, evidencia a distinção desta dissertação das outras.

3 Itens Formulados na TRI e Questões com "Pegadinhas".

No contexto de avaliações educacionais, é crucial a elaboração de testes que possam medir de maneira eficaz e justa o conhecimento dos estudantes. Dois tipos distintos de questões surgem frequentemente neste cenário: aquelas formuladas segundo a Teoria de Resposta ao Item (TRI) e as chamadas “pegadinhas”.

O Exame Nacional do Ensino Médio, implementado pelo ministério da educação em 1998, passou por diversas alterações ao longo de seus 26 anos de existência, tanto em seu formato quanto em suas finalidades. Dentre as mudanças mais relevantes, destaca-se o uso da nota do ENEM como forma de ingresso em diversas universidades públicas e privadas. Outra modificação foi o aumento no número de questões, que passou de 63 para 180 questões objetivas de múltipla escolha. A mudança mais significativa foi a implementação da Teoria de Resposta ao Item (TRI) para a obtenção da nota, que começou a ser aplicada em 2009 e foi completamente implementada em 2012.

3.1 Itens Formulados na TRI.

A TRI é uma abordagem psicométrica que visa medir o nível de habilidade ou proficiência do indivíduo, por meio da análise de suas respostas aos itens de um teste. Os estudos tiveram início na década de 1950, pelo matemático dinamarquês Georg Rasch, e se consolidaram entre 1960 e 1970 com os trabalhos de Frederic Mather Lord e Allan Birnbaum. Os modelos atuais utilizam parâmetros que pertencem aos cálculos de notas, que são, o parâmetro de dificuldade (b), parâmetro de discriminação (a) e parâmetro de acerto ao acaso (c).

O parâmetro de discriminação (a) é o poder de discriminação que cada questão possui para diferenciar participantes que dominam a habilidade avaliada dos que não dominam. Parâmetro de dificuldade (b) é o valor que cada item possui, e está ligado ao seu grau de dificuldade, e está na mesma escala de proficiência. Quanto mais difícil o item, maior o valor do parâmetro b . O parâmetro de acerto casual é a probabilidade de alguém que não domina a habilidade exigida no item acerta ao acaso. A nota é composta por meio destes parâmetros e pela observação do conjunto de resposta do indivíduo. Quanto mais coerente é, maior será sua nota. O respondente que acertou 15 itens, sendo estes os 15 mais fáceis, terá uma nota superior ao que acertou 15 itens aleatórios dentre os mais difíceis e os mais fáceis. Para o leitor que deseja aprofundar o conhecimento sobre a TRI e a TRI no ENEM, recomendo o livro Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações

(DE ANDRADE; TAVARES; DA CUNHA VALLE, 2000) e o Guia do Participante do ENEM 2021 (BRASIL, 2020).

Diferente da Teoria Clássica dos Testes, que atribui a pontuação com critérios diretamente proporcionais ao número de acertos, a TRI analisa o desempenho do respondente por item respondido. Ou seja, cada item possui o seu escore específico. Imaginemos que dois candidatos acertaram exatamente 15 das 45 questões de Matemática do ENEM. Como os 15 itens acertados por um deles, não são necessariamente os mesmo acertados pelo o outro, suas pontuações podem ter uma notória diferença. A figura abaixo apresenta a nota e número de acertos de 300 participantes do ENEM 2020.

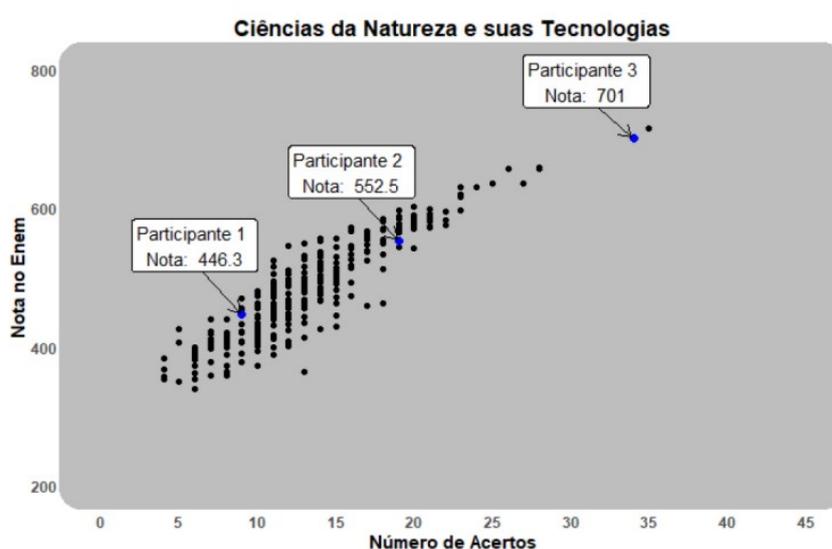


Figura 1 – Relação Entre o Número de Acertos e a Nota Calculada pela Tri

Fonte: Elaborado pela Daeb/Inep

Caso cada questão tivesse a mesma pontuação, o gráfico seria uma reta. Porém, com já foi dito anteriormente, existem notas variada para cada quantidade de acerto. Podemos verificar no gráfico apresentado na figura ?? que os participantes que acertaram 15 itens tiveram notas que variaram, aproximadamente, entre 420 a 580 pontos. Da mesma forma, podemos observar no gráfico ?? que uma pessoa que acertou 10 itens, teve nota bem próxima de um indivíduo que acertou 18, em torno de 450 pontos. É visível também que um desses 300 participantes teve 11 acertos e nota em torno de 540 pontos, e outro que acertou 19 teve nota em torno de 440.

Após a implementação da teoria de resposta ao item, a principal dúvida dentre os participantes do Enem era em relação à nota, já que a TRI previa determinar a nota não exclusivamente pela quantidade de acertos, e sim pela coerência pedagógica das respostas dos candidatos em cada área de conhecimento. Isso foi o que mais intrigou participantes nos anos iniciais da implementação, por notarem que pessoas com mais quantidades de

acertos às vezes obtinham notas inferiores às de quem acertou menos. E candidatos que responderam a mesma quantidade de questões em determinada área de conhecimento na prova não teriam necessariamente a mesma nota, tendo em vista que um dos participantes pode ter mais coerência nas respostas do que o outro. A coerência está na lógica de que o conhecimento é escalonado e que para que um estudante consiga responder uma questão de uma complexidade maior, sem “chute”, entende-se, pedagogicamente, que ele deveria ter acertado as questões de complexidades inferiores.

As questões do ENEM também obedecem a um formato específico em sua estrutura, tanto na elaboração do texto e do comando da questão quanto em relação às alternativas, classificadas como Gabarito, sendo a única resposta correta, e Distratores, que são respostas erradas, mas plausíveis. Esses distratores seriam possíveis raciocínios equivocados dos respondentes que a princípio parecem estar corretos para os candidatos que ainda não consolidaram a habilidade exigida item.

Como a nota depende da coerência do conjunto de respostas do candidato, este trabalho se concentrará na análise das questões de matemática consideradas de baixa complexidade pedagógica, que possuem influência significativa na nota final. Para garantir a coerência pedagógica, é essencial assegurar que os itens mais fáceis sejam dominados, o que eleva a proficiência dos estudantes e, conseqüentemente, aumenta suas chances de ingresso nas universidades. Ao ter um conjunto de respostas com itens fáceis respondidos incorretamente, a nota do candidato é afetada, supõe-se que ao errar questões fáceis e acertar alguns difíceis pode ser entendido que as difíceis foram acertadas no chute.

O foco principal desta dissertação não será a TRI (inclusive nas referências trago algumas indicações para o aprofundamento) será investigação do raciocínio que levou ao respondente a marcar tal distrator. As discussões abordadas neste trabalho também podem auxiliar professores de matemática no preparo de intervenções pedagógicas relacionadas aos erros comuns dos estudantes, já que os distratores apresentam essa característica.

Este trabalho conecta a análise dos erros cometidos pelos alunos a um estudo sobre tópicos da matemática elementar, com base nas questões do ENEM e na Teoria de Resposta ao Item (TRI), que não apenas define como as notas são calculadas, mas também orienta a elaboração das questões.

Conforme orientado no *Guia de Elaboração de Itens: parâmetros para a construção de itens para avaliações em larga escala* (BRASIL, 2011), as questões do exame seguem uma estrutura que inclui, inicialmente, textos ou imagens motivadoras, um comando claro e objetivo, o gabarito, e os distratores, que são alternativas incorretas, mas que parecem corretas para candidatos que ainda não dominam a habilidade exigida pelo item.

Esses distratores estão intimamente relacionados ao que os professores de Matemática devem observar. Eles representam alternativas que refletem raciocínios equivocados

que os alunos, sem o domínio necessário, tenderiam a adotar como resposta. Esses distratores não induzem ao erro; o erro já está presente no raciocínio ou no método de resolução utilizado por alunos que não possuem a habilidade necessária.

A TRI é um modelo estatístico usado na elaboração e análise de testes educacionais. Ela visa medir com precisão a habilidade ou conhecimento dos avaliados, baseando-se na interação entre a característica latente (habilidade do aluno) e os itens do teste. As principais características da TRI incluem:

Texto Motivador: O enunciado é claro e fornece todas as informações necessárias para a compreensão e resolução do problema.

Comando da Questão: A pergunta ou tarefa é apresentada de forma objetiva e direta, sem ambiguidades.

Gabarito: A resposta correta é definida de maneira precisa.

Distratores: As alternativas incorretas são formuladas baseando-se em erros comuns cometidos pelos estudantes, fornecendo assim uma análise mais rica do desempenho e dos pontos fracos dos avaliados.

A TRI permite uma análise detalhada das respostas dos alunos, identificando não apenas se o aluno acertou ou errou, mas também o grau de conhecimento de cada um. Os distratores são utilizados para identificar erros de compreensão específicos e não para confundir ou enganar o aluno.

3.2 Itens Formulados como "Pegadinha".

As questões com "pegadinhas" são aquelas elaboradas com a intenção de confundir os avaliados. São verdadeiras armadilhas que não tem finalidade pedagógica alguma. Essas questões frequentemente apresentam características como:

Falta de Clareza: O enunciado pode ser ambíguo ou obscuro, dificultando a compreensão do que está sendo solicitado. Por exemplo, "Qual a metade de dois mais dois?" ou "Qual a metade de dois, mais dois?". Por mais que as estruturas da frase estejam clara para alguns, falta clareza por não existir

Alternativas Enganosas: As opções de resposta são formuladas de maneira a parecerem corretas, mas são propositalmente confusas ou enganadoras. Por exemplo, quando é solicitada um raciocínio, porém o comando da questão é pede para informar o triplo do resultado dos cálculos".

Propósito Enigmático: A intenção por trás das "pegadinhas" não é medir o conhecimento de forma justa, mas sim, ver se o aluno consegue "desvendar" a armadilha colocada pelo examinador. Por exemplo:

"Num avião há 4 romanos e 1 inglês. Qual o nome da aeromoça? a) Maria b) Judite c) Letícia d) Ivone e) Luísa"

A resposta que circula na rede é d) IVONE, pois IV é 4 em Romanos e 1 é ONE em inglês.

As "pegadinhas" são amplamente criticadas no meio acadêmico por condenarem completamente o estudo desenvolvido pelos estudantes no período de preparação. A injustiça se evidencia quando o resultado de um determinado grupo é dado com baixo para vários alunos, mesmo o avaliador sabendo que alguns dos que atingiram nota insuficiente tem competência no assunto cobrado. Elas não contribuem para o aprendizado ou a avaliação precisa do conhecimento dos alunos. Em vez disso, criam um ambiente de incerteza e frustração aos respondentes, que têm como foco em evitar armadilhas em vez de demonstrar conhecimento.

Para D'Ambrósio (DA SILVA FILHO, 2012) é preciso despertar o aluno para sentir prazer em aprender, evitar "pegadinhas" nas avaliações e ensinar com seriedade. O desenvolvimento escolar acontece por meio da interação em sala, o conhecimento surge, à medida que se educa com ética, preparando o educando para o exercício da cidadania.

Conforme destacado por Cury (2008), a análise dos erros dos alunos e as decisões sobre como tratá-los estão diretamente relacionadas ao conhecimento profissional do professor, suas opiniões e concepções sobre o ensino da matemática. Nesse sentido, é fundamental que os instrumentos de avaliação sejam elaborados de forma clara e objetiva, evitando o uso de atividades avaliativas com "pegadinhas", que podem fragilizar o processo de diagnóstico dos erros. Atividades ambíguas ou com intenção de confundir os estudantes não promovem a segurança necessária para que eles se envolvam no processo avaliativo, além de dificultar que o professor identifique a natureza real do erro. Sem essa clareza, como ressaltado por Cury, o professor não terá elementos suficientes para compreender as dificuldades dos alunos, comprometendo sua capacidade de intervenções pedagógicas planejadas que promovam a aprendizagem.

Em relação aos erros cometidos pelos alunos, Ball, Thames e Phelps (2008) alertam para o fato de que reconhecer uma resposta errada é conhecimento comum do conteúdo, mas opinar sobre a natureza de um erro, prestar atenção nos seus padrões e pensar nos seus significados é conhecimento especializado do conteúdo; a familiaridade com os erros mais comuns e a decisão sobre quais são mais prováveis de serem cometidos é conhecimento do conteúdo e dos estudantes, enquanto que decidir quais exemplos usar para auxiliar os alunos a superar suas dificuldades ou quais as melhores representações para um determinado conceito é conhecimento do conteúdo e do ensino (CURY; BISOGNIN, 2017, p. 243).

É essencial que os estudos sejam vistas como oportunidades de aprendizado, desafiando os estudantes de maneira significativa e respeitosa, ao mesmo tempo em que oferecem ao professor dados precisos para orientar sua prática em sala de aula.

3.3 Exemplos de itens com "Pegadinhas"

As principais diferenças entre itens de teste formulados na TRI e as questões com "pegadinhas" podem ser resumidas nos seguintes pontos:

Intenção e Propósito: A TRI visa medir com precisão o conhecimento e a habilidade, enquanto as "pegadinhas" têm a intenção de confundir.

Clareza e Objetividade: As questões na TRI são claras e objetivas, enquanto as "pegadinhas" são frequentemente ambíguas e enganosas.

Distratores: Na TRI, os distratores são baseados em erros comuns e usados para fornecer informações adicionais sobre o conhecimento do aluno. Nas "pegadinhas", as alternativas são formuladas para confundir.

Nas últimas décadas, a TRI vem tornando-se a técnica predominante no campo de testes em vários países. Aqui no Brasil, a TRI foi usada pela primeira vez em 1995 na análise dos dados do Sistema Nacional de Ensino Básico - SAEB. A introdução da TRI permitiu que os desempenhos de alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e de 3ª série do Ensino Fundamental pudessem ser comparados e colocados em uma escala única de conhecimento. A partir dos resultados obtidos no SAEB, outras avaliações em larga escala, como por exemplo o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP, também foram planejadas e implementadas de modo a serem analisadas através da TRI (DE ANDRADE; TAVARES; DA CUNHA VALLE, 2000, p.5).

O uso da TRI na elaboração de avaliações é aproxima as avaliações de larga escala em uma prática pedagógica justa, clara e objetiva. A TRI não só permite uma avaliação mais precisa do conhecimento dos alunos, como também contribui para o desenvolvimento de habilidades e a correção de erros comuns. Por outro lado, as questões com "pegadinhas" são antipedagógicas, servindo apenas para confundir e desmotivar os alunos. Portanto, é essencial que educadores e avaliadores se afastem do uso de "pegadinhas" e adotem práticas baseadas em teorias educacionais robustas e eficazes, como a TRI.

3.3.1 Pegadinha 1 — Divisão de Balas

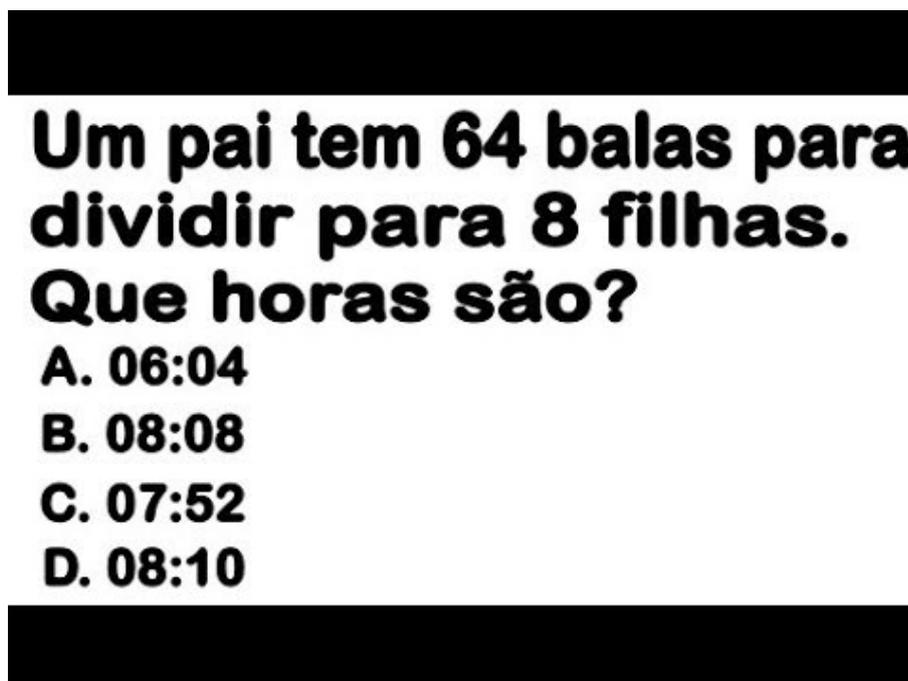


Figura 2 – Pegadinha 1

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=c41I60YBqgQ>>

A figura 2 mostra uma questão que além de não conter um texto motivador e um comando claro, é uma questão enigmática, na qual a resposta da divisão exata das balas para cada uma das o filhas seria 8 para cada. A resposta sugerida pelo autor do item seria a letra C, 07:52, o qual é usualmente falado como 8 para as 8. Na ideia de 8 min para as 8 horas, que nada tem a ver com uma habilidade matemática.

Segue alguns exemplos de "pegadinhas", e em seguida uma amostra de itens bem formulados para o ENEM.

3.3.2 Pegadinha 2 - O Paradoxo da Batata

O paradoxo da batata

Vamos supor que você tem 100kg de batatas. As batatas, em seu peso, são formadas por 99% de água. Elas desidratam e ficam com 98% de água na sua composição. Qual o peso das batatas agora?

a) 99kg

b) 90kg

c) 50kg

*Esse paradoxo é conhecido mundialmente, e deixa todo mundo chocado com a resposta.

Figura 3 – Pegadinha 2

O paradoxo da batata, Figura 3 não chega a ser um paradoxo, pois, se aplicarmos a matemática básica corretamente, conseguiremos chegar à resposta correta. Ela se enquadra como "pegadinha" no critério do texto motivador, que não traz clareza e nem suporte para a criação do raciocínio. Neste item, a resposta correta é a letra C, pois, antes da perda de água, a massa sólida representava 1% e era equivalente a 1kg. Após a perda de água, a massa sólida de 1kg passou a representar 2% do total. Com isso, a nova massa total é $50 \times 2\% = 100\%$, que é equivalente a $50 \times 1kg = 50kg$.

3.3.3 Pegadinha 3 - O Problema Matemática que Parou a Internet

O problema matemático que parou a internet

Juntos temos 1000 reais. Você tem 950 reais a mais do que eu. Quantos reais eu tenho?

- a) 25 reais
- b) 35 reais
- c) 45 reais
- d) 50 reais

Figura 4 – Pegadinha 3

Fonte: <<https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/voce-consegue-resolver-essas-pegadinhas-de-matematica>>

Esse problema (Figura 4) viralizou na internet neste ano (2024), quando digitais influenciaram pessoas nas ruas para fazer essa pergunta. Alcançaram milhares de visualizações no Tiktok e no Instagram. O engajamento viral não foi à toa. Embora seja uma questão de aritmética simples, ela teve como objetivo principal a atenção do respondente. Quem realizou a pergunta simplesmente estava interessado em quantos cairiam na "pegadinha". A habilidade em questão não era o foco principal, e isso caracteriza essa questão como uma "pegadinha".

A solução desse item vem por meio da seguinte equação:

$$1000 = x + (x + 950) \Leftrightarrow x = 25$$

sendo que x é o valor que “eu” tenho.

O objetivo de questões dos tipos acima é, unicamente, confundir o respondente. São armadilhas que não tem a ver com avaliar conhecimento, apenas a atenção do respondente.

3.4 Exemplos de itens bem formulados na TRI

Os itens abaixo foram extraídos de ENEM anteriores e ambas têm uma estrutura similar. A seguir o que orienta o Guia de Elaboração de Itens do ENEM, quanto ao texto-base, enunciado e alternativas. O texto-base de cada uma delas introduz a situação-problema dando informação para a construção do raciocínio. Os enunciados ou comandos de cada uma delas são claros e objetivos, e não dão margem para dupla interpretação. E as alternativas estão bem formuladas em termos de gabaritos e distratores.

3.4.1 ENEM 2019 — Questão 148

Questão 148

Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

- A** segunda-feira.
- B** terça-feira.
- C** quarta-feira.
- D** quinta-feira.
- E** sexta-feira.

Figura 5 – ENEM 2019 — Questão 148

Para resolver a questão, devemos somar os acertos de cada dia da semana e identificar em qual dia ocorreu a maior quantidade de acertos. O texto-base deixa bem claro sobre o que significam as linhas e colunas. A matriz fornecida apresenta os acertos dos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica (linhas 1 a 5) ao longo dos dias da semana (colunas 1 a 5, de segunda a sexta-feira, respectivamente).

A matriz é:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando os acertos para cada dia, temos:

Segunda-feira (coluna 1):

$$3 + 3 + 2 + 3 + 0 = 11$$

Terça-feira (coluna 2):

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

Quarta-feira (coluna 3):

$$0 + 4 + 2 + 4 + 0 = 10$$

Quinta-feira (coluna 4):

$$1 + 1 + 3 + 1 + 4 = 10$$

Sexta-feira (coluna 5):

$$2 + 2 + 2 + 0 + 4 = 10$$

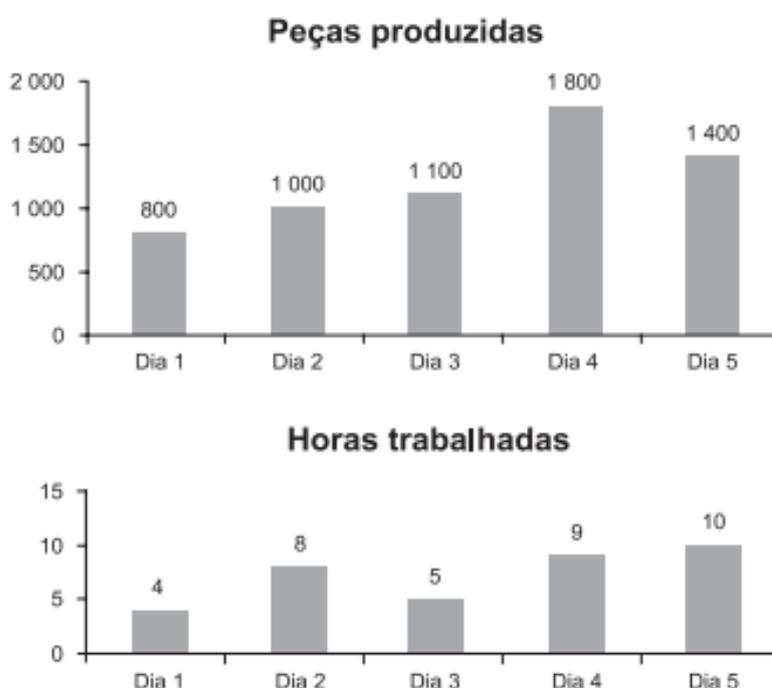
Portanto, a maior quantidade de acertos ocorreu na **segunda-feira**.

A alternativa correta é a **letra A**.

3.4.2 ENEM 2020 — Questão 151

Questão 151

Os gráficos representam a produção de peças em uma indústria e as horas trabalhadas dos funcionários no período de cinco dias. Em cada dia, o gerente de produção aplica uma metodologia diferente de trabalho. Seu objetivo é avaliar a metodologia mais eficiente para utilizá-la como modelo nos próximos períodos. Sabe-se que, neste caso, quanto maior for a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, maior será a eficiência da metodologia.



Em qual dia foi aplicada a metodologia mais eficiente?

- A** 1
- B** 2
- C** 3
- D** 4
- E** 5

Figura 6 – ENEM 2020 — Questão 151

Neste item, o texto-base não omite a informação do que deve ser feito. O texto motivador define bem os que caracteriza a eficiência da metodologia com a razão entre o

número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, ou seja, quanto maior a razão $\frac{\text{peças produzidas}}{\text{horas trabalhadas}}$, maior será a eficiência.

A questão apresenta dois gráficos: o primeiro mostra a quantidade de peças produzidas e o segundo as horas trabalhadas em cada dia.

Vamos calcular a eficiência para cada dia, utilizando os dados extraídos dos gráficos.

• **Dia 1:**

Peças produzidas = 800, Horas trabalhadas = 4

$$\text{Eficiência} = \frac{800}{4} = 200 \text{peças por hora}$$

• **Dia 2:**

Peças produzidas = 1000, Horas trabalhadas = 8

$$\text{Eficiência} = \frac{1000}{8} = 125 \text{peças por hora}$$

• **Dia 3:**

Peças produzidas = 1100, Horas trabalhadas = 5

$$\text{Eficiência} = \frac{1100}{5} = 220 \text{peças por hora}$$

• **Dia 4:**

Peças produzidas = 1800, Horas trabalhadas = 9

$$\text{Eficiência} = \frac{1800}{9} = 200 \text{peças por hora}$$

• **Dia 5:**

Peças produzidas = 1400, Horas trabalhadas = 10

$$\text{Eficiência} = \frac{1400}{10} = 140 \text{peças por hora}$$

Ao comparar os valores de eficiência, vemos que o **Dia 3** apresenta a maior eficiência, com valor igual a 220. Portanto, a metodologia mais eficiente.

alternativa C para o **Dia 3**.

3.4.3 ENEM 2021 — Questão 142

Questão 142 enem2021

Um lava-rápido oferece dois tipos de lavagem de veículos: lavagem simples, ao preço de R\$ 20,00, e lavagem completa, ao preço de R\$ 35,00. Para cobrir as despesas com produtos e funcionários, e não ter prejuízos, o lava-rápido deve ter uma receita diária de, pelo menos, R\$ 300,00.

Para não ter prejuízo, o menor número de lavagens diárias que o lava-rápido deve efetuar é

- A** 6.
- B** 8.
- C** 9.
- D** 15.
- E** 20.

Figura 7 – ENEM 2021 — Questão 142

Assim como nos itens anteriores, este um texto base, apesar de curto, traz informação suficiente e motivação para criação de estratégia de resolução. Neste item podemos realizar algumas eliminações. Sabendo as alternativas erradas são distratores.

A análise deve considerar diferentes combinações de lavagens simples (R\$ 20) e lavagens completas (R\$ 35) até chegar a uma receita de pelo menos R\$ 300. Saber quais alternativas são contraditórias já nos dá um cenário mais confortável para acertar esta questão.

Preços:

- Lavagem simples: R\$ 20,00
- Lavagem completa: R\$ 35,00

Receita:

Pelo menos R\$ 300,00 por dia.

Análise para eliminação de alternativas:

Por eliminação, podemos antecipar a análise da alternativa E, que é a mais absurda, pois ultrapassa os R\$ 300 tanto na hipótese mais vantajosa (completa) quanto na menos vantajosa (simples). O entendimento principal que o respondente deve ter é que quanto mais lavagens completas forem feitas, menor será a quantidade de lavagens.

Alternativa E: 20 lavagens

Se todas as 20 lavagens forem simples:

$$20 \times 20 = 400\text{reais}$$

Isso já cobre o valor mínimo, mas é mais do que o necessário. Ou seja, para atingir o objetivo mínimo, é necessária uma quantidade inferior a 20.

Se forem 20 lavagens completas, o valor é maior ainda:

$$20 \times 35 = 700\text{reais}$$

Portanto, a alternativa E é descartada.

Alternativa D: 15 lavagens

Se todas as lavagens forem simples:

$$15 \times 20 = 300\text{reais}$$

Isso já atinge o valor necessário. Contudo, já vimos que para termos o número mínimo de lavagens, temos que ter o número máximo de lavagens completas. Quinze lavagens são desnecessárias e não satisfazem o que se pede. Eliminamos também a alternativa D.

Alternativa A: 6 lavagens

Considerando o melhor cenário, em que todas as 6 lavagens são completas (R\$ 35):

$$6 \times 35 = 210\text{reais}$$

Isso é muito inferior aos R\$ 300 necessários. Portanto, 6 lavagens não são suficientes. Eliminamos a alternativa A.

Alternativa B: 8 lavagens

Se todas as 8 lavagens forem completas:

$$8 \times 35 = 280\text{reais}$$

Ainda não é suficiente para atingir R\$ 300,00. Nenhuma combinação de lavagens simples e completas serviria. Ao adicionarmos lavagens simples, a receita reduziria ainda mais. Por exemplo:

$$6 \times 35 + 2 \times 20 = 210 + 40 = 250\text{reais}$$

Essa combinação também não é suficiente. Logo, 8 lavagens não são suficientes. Eliminamos a alternativa B.

Alternativa C: 9 lavagens

Esta alternativa responde corretamente o item. A decisão por responder este item por eliminação surge da suposição de que o respondente não compreendeu que bastaria dividir R\$ 300 por R\$ 35 para saber o número máximo de lavagens completas, e depois adicionar a quantidade de lavagens simples que faria alcançar os R\$ 300.

$$300 \div 35 = 8 \text{ lavagens completas, com resto } 20$$

Os R\$ 20 restantes são equivalentes ao preço de 1 lavagem simples. Portanto, o número mínimo de lavagens é:

$$8 + 1 = 9$$

Gabarito: letra C.

Observação:

Uma curiosidade desta questão é que, apesar de ser relativamente fácil, o número de respondentes das escolas públicas estaduais do Brasil que marcaram o distrator D (15 lavagens) foi superior ao número dos que marcaram o gabarito C (9 lavagens). Os índices de respostas foram 37% para o Distrator D e 32% para o Gabarito C.

A questão está muito bem estruturada e não deixa dúvidas quanto ao que se pede. Isso leva a acreditar que esses 37% não compreenderam que o foco seria determinar o máximo de lavagens completas possíveis limitadas em R\$ 300.

4 A Valorização e a Exploração do Erro.

A Teoria de Valorizar os Erros dos Alunos, citada por Sérgio Lorenzato em seu livro “Para Aprender Matemática”, constitui uma abordagem pedagógica que visa auxiliar os alunos na aprendizagem e compreensão de conceitos matemáticos por meio do uso de exemplos e contra-exemplos. Esta metodologia destaca a importância de ressaltar os erros cometidos pelos estudantes e fornecer orientações adequadas para poderem corrigir essas falhas, promovendo, assim, a construção progressiva do conhecimento matemático e o desenvolvimento do raciocínio correto (LORENZATO, 2006).

Lorenzato argumenta que os erros dos alunos fornecem subsídios importantes para o desenvolvimento das aulas, funcionando como um recurso didático essencial para o ensino da matemática. A análise de erros e a resolução de problemas são metodologias de ensino eficazes que podem ser aplicadas em sala de aula. Além disso, ele enfatiza a importância de ouvir os alunos, dialogar com eles e propor situações que os ajudem a perceber a incoerência de suas respostas ou posições. Esse processo não só auxilia os estudantes na descoberta de novas alternativas, mas também na reformulação de seus conceitos, contribuindo significativamente para a construção de um entendimento mais profundo, além de proporcionar uma autonomia na aprendizagem matemática de forma cada vez mais investigativa.

Essa abordagem pedagógica, ao valorizar os erros e promover a correção consciente e ativa por parte dos alunos, revela-se uma estratégia eficaz para a formação de um pensamento crítico e reflexivo, essencial para o domínio da matemática e para a aplicação prática desse conhecimento em diferentes contextos.

“A análise do erro permite-nos valorizar o processo mental subjacente às respostas dadas e não apenas a resposta como um produto que se encerra em si mesmo. A análise dos processos utilizados pelo aluno nos leva a verificar que há algo de positivo nele mesmo quando erra.” (ROSSO, 2010).

É comum que professores de matemática, especialmente no início de suas carreiras, se deparem com resoluções ou raciocínios que podem parecer “absurdos” em relação a determinados tópicos da matemática elementar. No entanto, com o tempo, percebe-se que esses “erros” são mais comuns do que se poderia imaginar. Quando um tipo de erro é um caso isolado, o problema é tratado diretamente com o aluno que o cometeu. Entretanto, quando um mesmo tipo de raciocínio equivocado se repete frequentemente, podemos estar diante de um problema de entendimento mais amplo (generalizado), possivelmente relacionado a uma deficiência no ensino da habilidade em questão em uma determinada região (território).

"Ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de matemática, muitas vezes o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos, passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas represente uma resolução modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal (CURY, 2008, p. 13)."

Por exemplo, é frequente, durante momentos de planejamento na sala dos professores, encontrar educadores indignados com o fato de alunos das séries finais do ensino fundamental ou do ensino médio não saberem resolver uma "simples" expressão numérica ou realizar operações básicas com frações.

O que para nós professores pode ser muito simples, para o estudante pode ser algo extremamente complexo se uma da "engrenagem de um conhecimento específico" estiver faltando. E isso que geralmente acontece.

4.1 Exemplos de Cálculos Corretos e de erros comuns cometidos por estudantes:

Todo erro precisa ser corrigido de maneira eficaz e jamais condenar o aluno por errar. Uma intervenção desacertada pode ser determinante para o bloqueio da aprendizagem do estudante com relação à matemática. É preciso se tornar cultural no ensino de matemática que errar é tão benéfico quanto acertar. É o erro que gera oportunidades para a investigação matemática, e promove o desenvolvimento do raciocínio, além disso, o pensamento computacional.

"No passado, em nossa prática escolar, castigava-se fisicamente. No Sul do País, era comum um professor utilizar-se da régua escolar para bater num aluno que não respondesse com adequação às suas perguntas sobre uma lição qualquer. No Nordeste brasileiro, esta mesma prática era efetivada por meio da palmatória, instrumento de castigo com o qual o professor batia na palma da mão dos alunos. A quantidade de "palmadas" dependia do juízo deste professor sobre a possível "gravidade" do erro. O castigo físico, noutras vezes, dava-se pela prática de colocar o aluno "de joelhos" sobre grãos de milho ou de feijão, ou ainda de mandá-lo para a frente da classe, voltado para a parede e com os braços abertos. Pequenos martírios! (LUCKESI, 2011, p. 190)."

Diferente do que o nome pode sugerir, o pensamento computacional não se restringe às tarefas realizadas em computadores. O pensamento é mais amplo. É uma habilidade voltada para resolver problemas diversos com a estratégia computacional. O pensamento é composto por quatro: **decomposição** — fragmentar o problema em partes menores para facilitar a compreensão —, **reconhecimento de padrão** — identificar situações

semelhantes, e como foram resolvidas, os erros e contradições —, **abstração** — visa forçar nos detalhes que importam e descartar o que for desnecessário —, e o **pensamento algorítmico** — é conjunto sequenciado de passos que devem ser seguidos para resolver um problema. Deixo nas referências o artigo "Utilização de Desafios para o Desenvolvimento do Pensamento Computacional no Ensino Superior: um relato de experiência"(OLIVEIRA et al., 2019, p. 2005) como recomendação de leitura sobre pensamento computacional, na qual também são apresentadas essas quatro estratégias.

"O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente (BRACKMANN, 2020, p.29).."

4.1.1 Exemplo 1: Resolver a expressão numérica $2 + 3 \times 4$

4.1.1.1 A resolução correta da expressão numérica

$$2 + 3 \times 4 =$$

$$2 + 12 =$$

$$2 + 12 = 14.$$

Aqui realizou-se a operação de multiplicação para depois somar as parcelas.

4.1.1.2 Uma resolução incorreta da expressão numérica:

$$2 + 3 \times 4 = 20$$

Neste caso, somou-se primeiramente o 2 com 3, resultando em 5, e em seguida multiplicou-se 5 por 4, resultando incorretamente em 20. Isso está errado, pois a regra resolução de expressões numéricas diz que a multiplicação deve ser feita antes da soma.

E inevitável que o professor do ensino médio se depare com tal erro clássico. O estudante que comente esse tipo de erro mostra que não domina a habilidade com os números naturais e operações básicas. O professor deve estar sempre a um passo à frente, e inclusive, erros clássicos devem ser provocados para as intervenções serem feitas o quanto rápido possível. Problemas de expressões numéricas como este pode oportunizar o ensino por uma situação prática.

Situação prática: Suponha que uma pessoa vá comprar um produto de supermercado que custam R\$ 2,00 cada e três itens de outro produto que custa R\$ 4,00 cada. A conta correta para a obtenção no valor a pagar é:

$$2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = \text{R\$ } 14$$

Isso significa que a pessoa pagará R\$ 14,00 no total, considerando que três itens de R\$ 4,00 somam R\$ 12,00 e que o valor final será R\$ 12,00 mais os R\$ 2,00 dos outros dois itens.

Se somássemos primeiro o 2 com o 3, e depois multiplicássemos por 4, o cálculo incorreto seria:

$$(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$$

Isso resultaria em R\$ 20,00, um valor muito maior do que o correto. Portanto, o erro de somar antes de multiplicar poderia causar confusão ou até mesmo um pagamento incorreto, gerando um prejuízo para o comprador.

4.1.2 Exemplo 2: Resolver a soma de frações $1/2 + 1/3$

4.1.2.1 Um exemplo de operação correta com frações:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

4.1.2.2 Um exemplo de operação incorreta com frações:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

Situação-problema Uma situação-problema para esta operação poderia ser: "Um veículo andou $\frac{1}{2}$ do percurso de sua viagem de Vitória-Es a Porto Seguro-BA e parou para abastecer. E seguida, continuou a viagem por mais $\frac{1}{3}$ do total do caminho até parar para o almoço dos ocupantes.

A fração que representa o total percorrido de Vitória a Porto Seguro até a parada do almoço dos ocupantes é:

- A) $\frac{2}{5}$
- B) $\frac{2}{6}$
- C) $\frac{4}{5}$
- D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{4}{6}$

Solução: O erro comum, que poderíamos esperar um alto índice de resposta, seria a marcação da **letra A**. O distrator A $\frac{2}{5}$ resulta na soma equivocada dos numeradores e denominadores de forma direta, como foi apresentado anteriormente. Esta resposta seria um absurdo, pois a fração resultante, $\frac{2}{5}$, representa um trecho inferior ao realizado na primeira etapa (de Vitória até o abastecimento), que foi a metade do percurso Vitória x Porto Seguro.

A resposta correta para o item já vimos que é a **letra D**, $\frac{5}{6}$. O domínio que o respondente precisa ter é quanto a frações proporcionais. Saber que é possível substituir as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ por outras duas proporcionais a elas. A solução segue quando reescrevemos as duas frações com o mesmo denominador, 6, que é o MMC, e finaliza realizando a soma conforme 4.1.2.

A deficiência nesses dois assuntos (Exemplo 1 e Exemplo 2) é repetidamente identificada, por exemplo, em uma avaliação diagnóstica aplicada para a 1ª série do ensino médio. Essas dificuldades indicam que os alunos não consolidaram adequadamente conhecimentos básicos, comprometendo o aprendizado de conteúdos mais avançados.

4.2 O Erro como Ferramenta Importante na Matemática.

É fundamental que os professores jamais ignorem os erros dos estudantes em matemática. Cada erro cometido por um aluno representa uma oportunidade única de aprendizagem e desenvolvimento. Ignorar esses erros pode levar à consolidação de conceitos equivocados, dificultando o progresso acadêmico do aluno e comprometendo sua capacidade de resolver problemas matemáticos mais complexos no futuro.

“Na nova concepção de erro, este é interpretado como parte natural, inevitável e indispensável ao processo de aprendizagem. Ele pode ser considerado um alerta, um aviso ao professor, assim como a febre o faz na doença. Funcionando como um marco ou baliza, o erro é um indicador de (re)direcionamento pedagógico porque ele oferece oportunidade de crescimento, ao aluno, bem como de evolução, ao professor.” (LORENZATO, 2006)

Corrigir os erros de maneira eficaz envolve não apontar o equívoco de forma condenatória. Os erros devem ser apontados com o propósito explorar o raciocínio que levou à tal resposta. Esse processo de investigação e correção ajuda os alunos a internalizar os conceitos corretos e a desenvolver uma compreensão mais profunda da matéria. Além disso, ao tratar os erros com seriedade e respeito, os professores criam um ambiente de aprendizado seguro, em que os alunos se sentem encorajados a arriscar, errar e aprender com seus erros. A abordagem deve ser sempre executada com o cuidado de não expor

inevitavelmente o estudante, para que ele não desista da matemática precocemente como tradicionalmente os estudantes brasileiros fazem.

A correção contínua e cuidadosa dos erros ajuda os alunos a desenvolverem habilidades de autonomia sobre seu próprio aprendizado. Isso não só melhora o desempenho na disciplina de matemática, mas também prepara os alunos para enfrentarem desafios futuros de maneira crítica e independente. É essencial que os professores mantenham uma atitude proativa na identificação e correção dos erros, valorizando cada um deles como uma parte importante do processo de ensino-aprendizagem, pois saber identificar algum raciocínio errado também é um saber.

"Diz-se que Thomas Edison fez mais de mil experimentos para chegar ao bem-sucedido na descoberta da lâmpada incandescente. Conta seu anedotário biográfico que, após muitos experimentos malsucedidos, um seu colaborador quis desistir do empreendimento e Edison teria comentado: 'Por que desistir agora, se já sabemos muitos modos de como não fazer uma lâmpada? Estamos mais próximos de saber como fazer uma lâmpada'. Os insucessos foram, assim, servindo de trampolim para o sucesso de sua busca (LUCKESI, 2011, p. 197)."

Em situações práticas, por exemplo, no ENEM, um respondente pode não saber resolver corretamente uma questão, porém saber identificar as alternativas contestáveis, tendo em vista o conhecimento do desenvolvimento equivocado, pode reduzir sua probabilidade de errar.

No ensino de Matemática, os erros dos estudantes são tão importantes quanto os acertos. É essencial a identificação do erro no pensamento matemático até mesmo antes de conhecer, em alguns casos, a resposta correta. Geralmente quando um estudante acerta uma questão de uma lista de exercício, logo dá sequência para a próxima. A partir dos equívocos que construímos o raciocínio matemático, bem como o pensamento computacional. Ensinar apenas a resposta correta pode resultar em um aprendizado limitado; ao contrário, ensinar a identificar e eliminar as respostas erradas proporciona uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos.

"Queiramos ou não, o erro é o componente mais arraigado do processo educativo - mais do que qualquer outro elemento. Pais, professores e alunos aceitam uma quantificação negativa quando esta vem acompanhada pela correção dos erros, sem mesmo questionar a adequação dos conhecimentos exigidos aos sujeitos e, se apesar dos erros, há melhora significativa da aprendizagem (PINTO, 2000, p. 36)."

A importância de reconhecer os equívocos na matemática não se restringe a problemas elementares de sala de aula ou a exames de larga escala. Até mesmo na matemática mais avançada ou abstrata, a presença de falhas não representa um fracasso. Representa uma possibilidade para a construção do pensamento matemático que pode ser refutado por meio do conhecimento consolidado da área.

Um exemplo da importância do reconhecimento do erro, mesmo sem o conhecimento do desenvolvimento correto do pensamento matemático ou de suas conclusões, pode ser observado no caso da definição das curvas catenárias. No episódio histórico protagonizado por Galileu Galilei (1564–1642), na primeira metade do século XVII, e posteriormente pelos irmãos Johann (1667–1748) e Jakob (1655–1705) Bernoulli, por Christiaan Huygens (1629–1695) e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), havia uma conclusão feita por Galileu, na qual ele afirmava que a curva formada por um fio suspenso por suas extremidades sob a ação da gravidade era uma parábola. Essa afirmação foi aceita como verdade até meados do mesmo século, quando Huygens a contestou, provando que a curva não se tratava de uma parábola. Contudo, Huygens não sabia qual era a curva em questão, tampouco a equação que a descrevia.

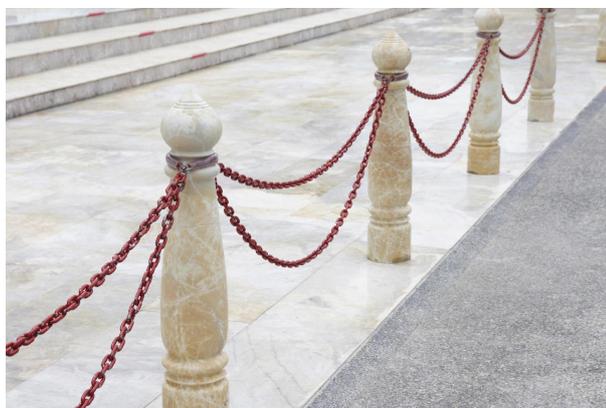


Figura 8 – Corrente Suspensa

Fonte: <<https://pt.vecteezy.com/>>

A descoberta do erro de Galileu foi um “saber” de grande importância para a matemática da época, conseqüentemente para os tempos atuais, ao motivar outros matemáticos e físicos a se empenharem na busca por uma solução para esse problema. Huygens chegou à conclusão de que não era uma parábola utilizando-se de métodos geométricos. Em 1691, Johann Bernoulli e Leibniz chegaram a mesma conclusão utilizando métodos analíticos definindo uma equação para essa curva. Do latim *catena*, surge então *catenária*, batizada por Leibniz, cuja curiosidade inicial estudada por Galileu se iniciou na observação da curva feita por uma corrente suspensa. A equação da Catenária foi dada por:

$$y = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{a}{2} \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$$

5 Análise dos Dados do ENEM.

Inicialmente, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi idealizado pelo Ministério da Educação (MEC) durante o governo de Fernando Henrique Cardoso (1995-2002), como um instrumento de avaliação dos conhecimentos dos estudantes do ensino médio e de diagnóstico da qualidade do ensino médio no país. Acreditava-se que, por meio desse diagnóstico, seria possível elaborar políticas públicas de forma mais objetiva, atendendo às necessidades identificadas com base nos parâmetros obtidos a partir da avaliação. Em 1998, ano da primeira aplicação do ENEM, o exame consistia em 63 questões, e o modelo de prova era significativamente diferente dos exames atuais. Atualmente, a prova conta com 180 questões, distribuídas em dois dias de aplicação, mais precisamente, em domingos consecutivos. Além disso, a estrutura das questões sofreu modificações consideráveis ao longo dos anos. A seguir, serão apresentadas algumas questões do primeiro ENEM aplicado (1998) e outras do exame de 2023.

Abaixo estão apresentados alguns itens de avaliações dos anos de 1998 e 2023. Observe a seguir que, nas questões do exame de 2023, os itens aparecem mais robustos, do ponto de vista estético de questões avaliativas, com enunciados maiores, geralmente acompanhados de gráficos, tabelas, informações retiradas de revistas ou jornais. O ENEM atual enfatiza a contextualização e a interdisciplinaridade. No modelo antigo do ENEM, as questões eram formuladas de maneira mais curta, e as resoluções exigiam principalmente memorização e aplicação de fórmulas, diferentemente do modelo atual, que valoriza e explora o raciocínio lógico do candidato. Especificamente em Matemática, as questões do ENEM exigem que o candidato tenha capacidade lógica para aplicar os conceitos matemáticos em diversos campos, como economia, meio ambiente, esporte e tecnologia.

Os dados apresentados neste capítulo, bem como no capítulo seguinte, foram extraídos dos Microdados do Enem (<<https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos>>), bem como da Plataforma Educação Em Foco (<<http://www.educacaoemfoco.sedu.es.gov.br>>) e da ZBS Educação (<<https://www.zbs.com.br>>). Os Microdados do Enem são dados abertos que apresentam uma série de informações sobre os inscritos no exame, como respostas, gabaritos e parâmetros. A Plataforma Educação Em Foco e a ZBS Educação são sites que extraem informações dos Microdados do Enem e apresentam de forma dinâmica os resultados obtidos a cada ano de aplicação, por meio de gráficos e tabelas que identificam habilidades com maior influência nas notas, índices de acertos e erros, entre outras informações. A Educação em Foco é de acesso restrito aos trabalhadores da Secretaria de Educação do Espírito Santo, já a ZBS é de acesso livre.

A Plataforma Educação Em Foco é restrita aos parâmetros e índices referentes às

escolas e estudantes vinculados à Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, enquanto a ZBS oferece uma abrangência maior em relação aos filtros disponíveis. A plataforma ZBS permite a navegação por diversas realidades, como por unidade de ensino, município ou tipo de escola. Também é possível realizar filtros por itens e habilidades, variando conforme os anos de aplicação. Os dados são apresentados em Power BI (Business Intelligence) da Microsoft, o que possibilita um manuseio ágil e a visualização clara de gráficos, tabelas e índices. Uma observação importante dos levantamentos dos dados das da do Enem pela ZBS é que Foram extraídos apenas informações de estudantes concluintes de cada ano.

A seguir, serão apresentadas algumas questões do primeiro ENEM aplicado (1998) e outras do exame mais recente (2023). As capturas de tela dos comparativos dessas provas foram feitos dos arquivos de provas anteriores disponíveis em <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>

5.1 Questões de Matemática ENEM 1998 - Prova Amarela

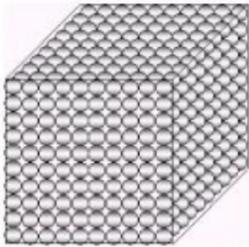
De 1998 a 2008 o ENEM contava com 63 questões de múltipla escolha, e as questões de todas as disciplinas eram distribuídas de forma aleatória e não obedecia aos critérios de elaborações de itens atuais, conforme a seção 3.1.

QUESTÕES OBJETIVAS

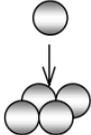
Observe nas questões 1 e 2 o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com 10 cm de aresta.

01 Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado:

(A) 100 bolinhas.
 (B) 300 bolinhas.
 (C) 1000 bolinhas.
 (D) 2000 bolinhas.
 (E) 10000 bolinhas.



02 Uma segunda pessoa procurou encontrar outra maneira de arrumar as bolas na caixa achando que seria uma boa idéia organizá-las em camadas alternadas, onde cada bolinha de uma camada se apoiaria em 4 bolinhas da camada inferior, como mostra a figura. Deste modo, ela conseguiu fazer 12 camadas. Portanto, ela conseguiu colocar na caixa:



(A) 729 bolinhas.
 (B) 984 bolinhas.
 (C) 1000 bolinhas.
 (D) 1086 bolinhas.
 (E) 1200 bolinhas.

3 amarela

ENEM/98

Figura 9 – Questões 1 e 2 Enem 1998

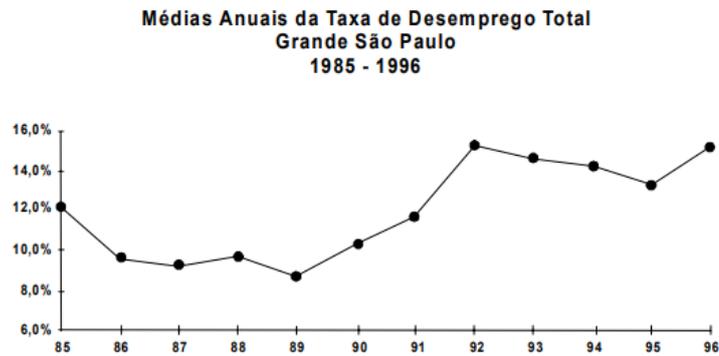
Veja que nas questões apresentadas na figura 9, nos itens 1 e 2 falta um texto que contextualize, motivando a resolução.

- 10** A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:
- (A) 30 cm
 (B) 45 cm
 (C) 50 cm
 (D) 80 cm
 (E) 90 cm

Figura 10 – Questão 10 Enem 1998

Na questão de número 10 (10) falta estruturar colocando uma figura para auxiliar a interpretação do respondente.

Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego.



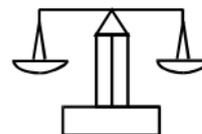
Fonte: SEP, Convênio SEADE-DIEESE.

- 15 Pela análise do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado,
- (A) a maior taxa de desemprego foi de 14%.
 - (B) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.
 - (C) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.
 - (D) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.
 - (E) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

Figura 11 – Questão 15 Enem 1998

A questão 15 traz como texto motivador o gráfico da Figura 11 com informações bem claras e suficientes para resolver o problema, porém falta um texto de contextualização.

Um armazém recebe sacos de açúcar de 24kg para que sejam empacotados em embalagens menores. O único objeto disponível para pesagem é uma balança de 2 pratos, sem os pesos metálicos.



18 Realizando uma única pesagem, é possível montar pacotes de:

- (A) 3kg
- (B) 4kg
- (C) 6kg
- (D) 8kg
- (E) 12kg

8

amarela

ENEM/98

19 Realizando exatamente duas pesagens, os pacotes que podem ser feitos são os de:

- (A) 3kg e 6kg
- (B) 3kg, 6kg e 12kg
- (C) 6kg, 12kg e 18kg
- (D) 4kg e 8kg
- (E) 4kg, 6kg e 8kg

Figura 12 – Questões 18 e 19 Enem 1998

As questões 18 e de 19 (12) deveria conter um texto orientando um exemplo de como as pesagens seriam feitas. Quando fala "Realizando uma única pesagem", torna o comando da questão bastante confuso, pois alguns respondentes podem entender que deve-se colocar exatamente a mesma quantidade em cada um dos pratos em uma única movimentação, separando em duas porções e pesando-as. Porém, o gabarito é a letra (E) 12kg, que sugere na resolução que sejam feitos acréscimos sucessivos do saco para as duas bandejas até se obter o equilíbrio.

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R\$ 200,00.

20 A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

- (A) 0
- (B) $1/3$
- (C) $1/4$
- (D) $1/2$
- (E) $1/6$

21 A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R\$400,00 é igual a:

- (A) 0
 - (B) $1/3$
 - (C) $1/2$
 - (D) $2/3$
 - (E) $1/6$
-

Figura 13 – Questões 20 e 21 Enem 1998

As questões 20 e 21 (13) trazem o texto motivador com informações bem claras e suficientes para resolver o problema, tornando o item bem próximo ao que é exigido nas Orientações atuais. Nem todas as questões antigas possuem o formato diferente do exigido atualmente. Durante o período de 1998 a 2008 várias melhorias foram feitas até a mudança ocorrida em 2009.

5.2 Questões de Matemática ENEM 2023 - 2º Dia - Cardeno 5 - Prova Amarela

A partir de 2009 o INEP, alinhado ao Ministério da Educação, adotaram o novo formato de prova e correção. Os itens abaixo foram extraídos do exame de 2023. Todas essas passaram por um critério de elaboração, aprovação e testagem. O processo de criação da questão até chegar na prova passa por um ciclo colaborativo e sigiloso.

Primeiro o INEP abre um processo seletivo de Elaboradores de Itens. Os elaboradores passam por uma formação e recebe o material orientador de elaboração. Os itens elaborados passam por avaliadores de consistência, que aprovam o item, sugerem mudanças ou reprovam por não atenderem aos critérios. Após aprovados, os itens são pré-testados de forma sigilosa para validá-los e em seguida serem encaminhados para o Banco Nacional de Itens do INEP. A seguir, estão apresentadas nas figuras 14, 15, 16, 17, 18 e 19 itens aplicados no ENEM 2023, elaborados em conformidade com 3.1.



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS Questões de 136 a 180

QUESTÃO 136

Alguns estudos comprovam que os carboidratos fornecem energia ao corpo, preservam as proteínas estruturais dos músculos durante a prática de atividade física e ainda dão força para o cérebro coordenar os movimentos, o que de fato tem impacto positivo no desenvolvimento do praticante. O ideal é consumir 1 grama de carboidrato para cada minuto de caminhada.

CIRINO, C. Boa pergunta: consumir carboidratos antes dos exercícios melhora o desempenho do atleta? *Revista Saúde! É Vital*, n. 330, nov. 2010 (adaptado).

Um casal realizará diariamente 30 minutos de caminhada, ingerindo, antes dessa atividade, a quantidade ideal de carboidratos recomendada. Para ter o consumo ideal apenas por meio do consumo de pão de fôrma integral, o casal planeja garantir o suprimento de pães para um período de 30 dias ininterruptos. Sabe-se que cada pacote desse pão vem com 18 fatias, e que cada uma delas tem 15 gramas de carboidratos.

A quantidade mínima de pacotes de pão de fôrma necessários para prover o suprimento a esse casal é

- A** 1.
- B** 4.
- C** 6.
- D** 7.
- E** 8.

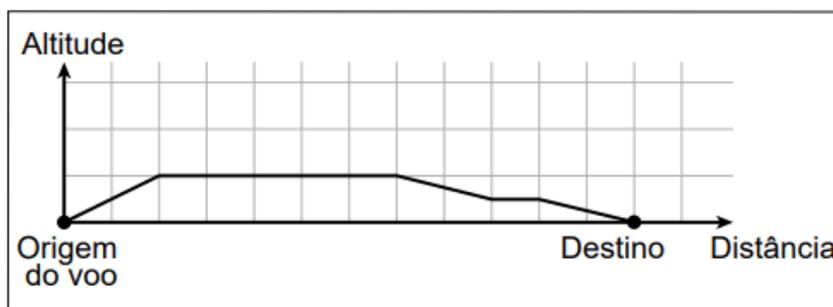
Figura 14 – Questões 136 Enem 2023

A questão 136 atende bem a estrutura de texto motivador e comando claro da questão. Durante a leitura, é possível provocar aos leitores raciocínios para situações diversas.

QUESTÃO 138

Um controlador de voo dispõe de um instrumento que descreve a altitude de uma aeronave em voo, em função da distância em solo. Essa distância em solo é a medida na horizontal entre o ponto de origem do voo até o ponto que representa a projeção ortogonal da posição da aeronave, em voo, no solo. Essas duas grandezas são dadas numa mesma unidade de medida.

A tela do instrumento representa proporcionalmente as dimensões reais das distâncias associadas ao voo. A figura apresenta a tela do instrumento depois de concluída a viagem de um avião, sendo a medida do lado de cada quadradinho da malha igual a 1 cm.



Essa tela apresenta os dados de um voo cuja maior altitude alcançada foi de 5 km.

A escala em que essa tela representa as medidas reais é

- A** 1 : 5.
- B** 1 : 11.
- C** 1 : 55.
- D** 1 : 5 000.
- E** 1 : 500 000.

Figura 15 – Questão 138 Enem 2023

A questão 138 atende a estrutura padrão de elaboração de itens. Geralmente, gráficos complementam o texto motivador.

QUESTÃO 139

Uma pessoa pratica quatro atividades físicas — caminhar, correr, andar de bicicleta e jogar futebol — como parte de seu programa de emagrecimento. Essas atividades são praticadas semanalmente de acordo com o quadro, que apresenta o número de horas diárias por atividade.

Dias da semana	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Segunda-feira	1,0	0,5	0,0	2,0
Terça-feira	0,5	1,0	0,5	1,0
Quarta-feira	0,0	1,5	1,0	0,5
Quinta-feira	0,0	2,0	0,0	0,0
Sexta-feira	0,0	0,5	0,0	2,5

Ela deseja comemorar seu aniversário e escolhe o dia da semana em que o gasto calórico com as atividades físicas praticadas for o maior. Para tanto, considera que os valores dos gastos calóricos das atividades por hora (cal/h) são os seguintes:

Atividade física	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Gasto calórico (cal/h)	248	764	356	492

O dia da semana em que será comemorado o aniversário é

- A** segunda-feira.
- B** terça-feira.
- C** quarta-feira.
- D** quinta-feira.
- E** sexta-feira.

Figura 16 – Questões 139 Enem 2023

Tabelas em questões do ENEM são comuns, e trazer informações ricas e claras para o desenvolvimento do raciocínio.

QUESTÃO 141

O calendário maia apresenta duas contagens simultâneas de anos, o chamado ano Tzolkim, composto por 260 dias e que determinava o calendário religioso, e o ano Haab, composto por 365 dias e que determinava o calendário agrícola. Um historiador encontrou evidências de que gerações de uma mesma família governaram certa comunidade maia pelo período de 20 ciclos, sendo cada ciclo formado por 52 anos Haab.

Disponível em: www.suapesquisa.com. Acesso em: 20 ago. 2014.

De acordo com as informações fornecidas, durante quantos anos Tzolkim aquela comunidade maia foi governada por tal família?

- A** 741
- B** 1 040
- C** 1 460
- D** 2 100
- E** 5 200

Figura 17 – Questões 141 Enem 2023

Apesar do texto da questão 141 ser curto, esse item possui elementos suficientes para o desenvolvimento do raciocínio, e o comando da questão está claro e objetivo.

QUESTÃO 143

Entre maratonistas, um parâmetro utilizado é o de economia de corrida (EC). O valor desse parâmetro é calculado pela razão entre o consumo de oxigênio, em mililitro (mL) por minuto (min), e a massa, em quilograma (kg), do atleta correndo a uma velocidade constante.

Disponível em: www.treinamentoonline.com.br. Acesso em: 23 out. 2019 (adaptado).

Um maratonista, visando melhorar sua performance, auxiliado por um médico, mensura o seu consumo de oxigênio por minuto a velocidade constante. Com base nesse consumo e na massa do atleta, o médico calcula o EC do atleta.

A unidade de medida da grandeza descrita pelo parâmetro EC é

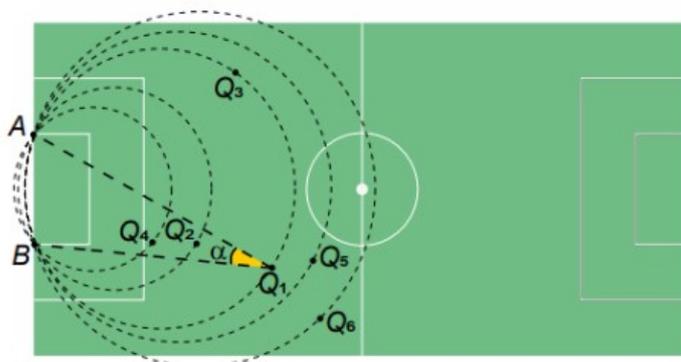
- A** $\frac{\text{min}}{\text{mL} \cdot \text{kg}}$
- B** $\frac{\text{mL}}{\text{min} \cdot \text{kg}}$
- C** $\frac{\text{min} \cdot \text{mL}}{\text{kg}}$
- D** $\frac{\text{min} \cdot \text{kg}}{\text{mL}}$
- E** $\frac{\text{mL} \cdot \text{kg}}{\text{min}}$

Figura 18 – Questões 143 Enem 2023

A questão 143 tem a mesma estrutura exigida, porém com texto mais curto.

QUESTÃO 147

Num certo momento de um jogo digital, a tela apresenta a imagem representada na figura. O ponto Q_1 representa a posição de um jogador que está com a bola, os pontos Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 e Q_6 também indicam posições de jogadores da mesma equipe, e os pontos A e B indicam os dois pés da trave mais próxima deles. No momento da partida retratado, o jogador Q_1 tem a posse da bola, que será passada para um dos outros jogadores das posições $Q_n, n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, cujo ângulo $A\widehat{Q}_nB$ tenha a mesma medida do ângulo $\alpha = A\widehat{Q}_1B$.



Qual é o jogador que receberá a bola?

- A** Q_2
- B** Q_3
- C** Q_4
- D** Q_5
- E** Q_6

Figura 19 – Questões 147 Enem 2023

Textos e ilustrações auxiliam aos respondentes no entendimento da questão. Nesta questão o texto motivador está claro e o comando da questão não gera dúvidas no que se pede.

5.3 Microdados do ENEM

A figura abaixo 20 foi extraída da ZBS Educação e apresenta um relatório com informações geradas a partir da aplicação do Enem 2019. O ano de 2019 foi escolhido de maneira aleatória, sem a aplicação de filtro. A ZBS fornece os dados das edições de 2016 a 2022, e os compilados referem-se a estudantes concluintes do ensino médio de escolas públicas e privadas.

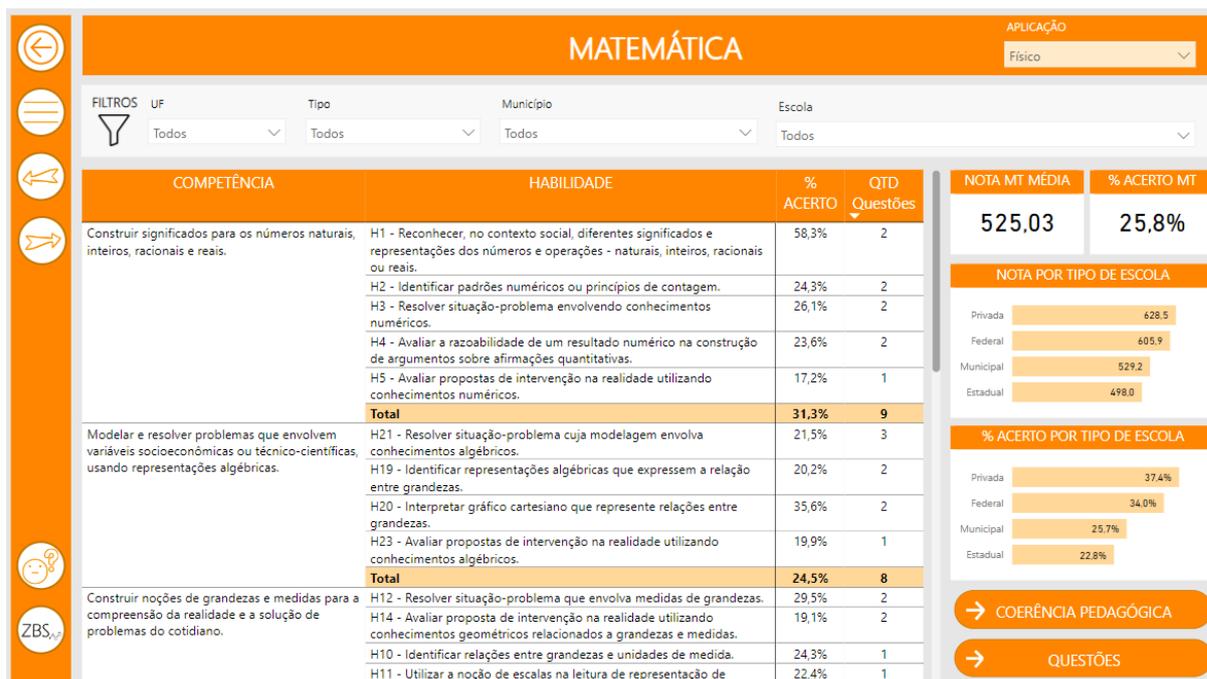


Figura 20 – Nota média Brasil Enem 2019

O BI ^{1 2} do ENEM de 2019, conseguimos identificar por meio da figura 20 o percentual de acertos em cada habilidade, podendo filtrar por estado, tipo de escola (se é privada, federal, municipal ou estadual) e também por município. Além disso, é possível filtrar por escola específica. Com esses dados, conseguimos realizar diversas comparações e verificar se cada habilidade se aproxima ao índice de acerto nacional quando comparado com outros recortes, identificando, assim, uma habilidade que apresenta problemas regionais ou locais. Por exemplo, a habilidade H1, que teve 58,3% de acerto em relação ao total de participantes no Brasil, contando com todos os tipos de escola, pode ser analisada para verificar se esse percentual se mantém ou se aproxima desse valor em escolas estaduais.

5.4 Comparativo de taxas de acertos - ENEM 2019.

A nota média das escolas públicas estaduais brasileiras é obtida pela somatória das notas de todos os estudantes finalistas dividido por esse total de participante, e pode servir como parâmetro de observação de estados ou municípios, e pode ser determinante para as secretarias de educação criarem estratégias de intervenções referente aos pontos fragilizados que podem influenciar em notas inferiores. No caso médias de notas estaduais superiores à média nacional, pode ser criado plano de metas baseadas nos resultados anteriores do próprio município. Abaixo seguem dois recortes, um nacional e outro estadual.

¹ NOTA MT MÉDIA - É a nota média em Matemática

² % ACERTO MT - É o percentual médio de acertos em Matemática

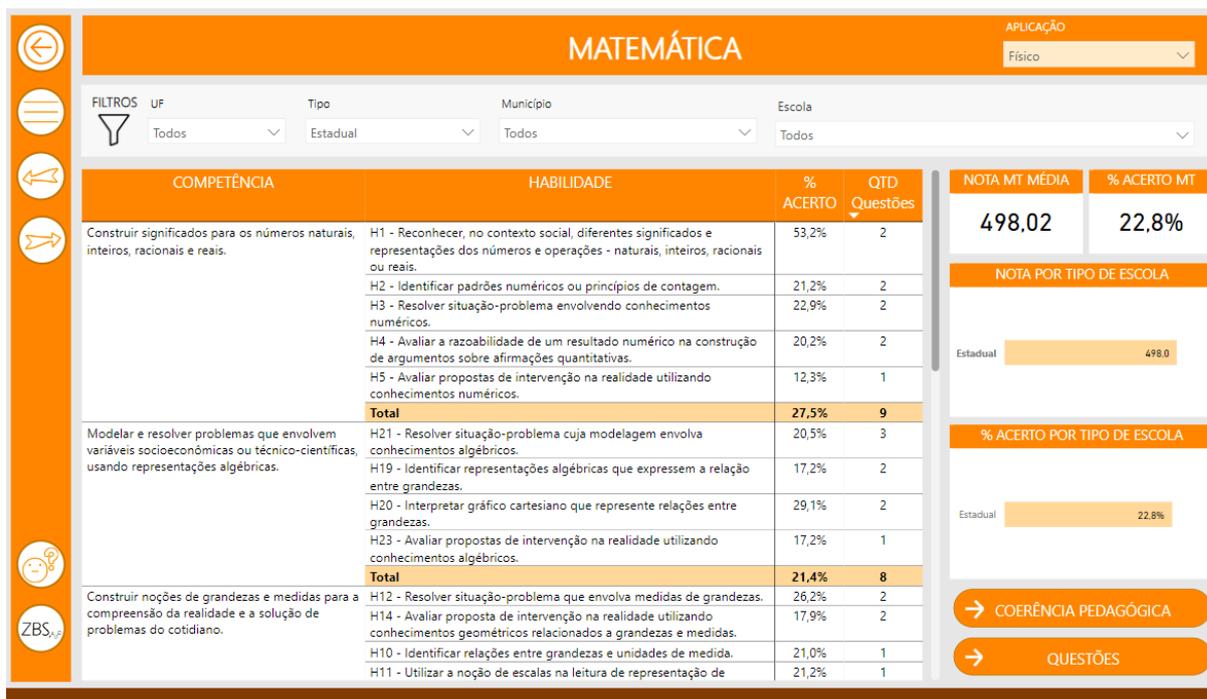


Figura 21 – Nota média das Escolas Públicas Estaduais Brasil Enem 2019

Nessa análise, comparamos as escolas públicas estaduais do Brasil 21 com as escolas públicas estaduais do Espírito Santo 22. A média nacional em Matemática no ENEM de 2019 foi de 498,02 pontos, com um percentual de acerto de 22,8%.

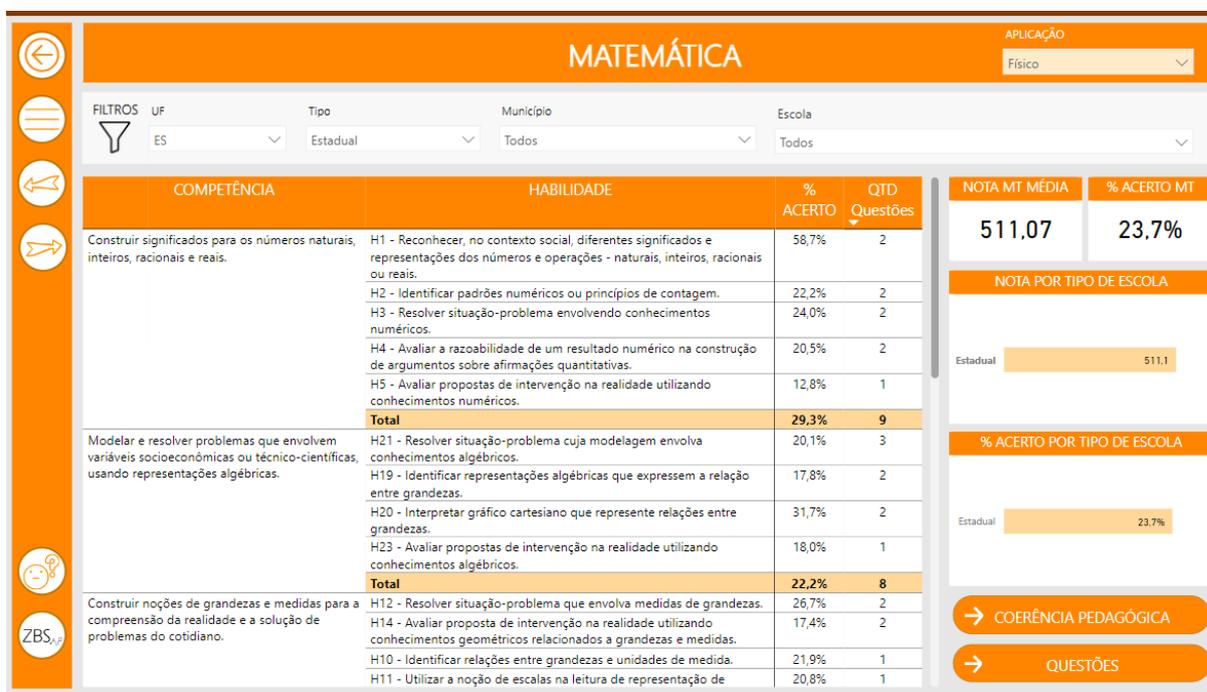


Figura 22 – Nota média das Escolas Públicas Estaduais ES Enem 2019

A nota média das escolas públicas estaduais do Espírito Santo foi de 511,07, superior à média nacional, e o percentual de acerto foi de 23,7% no ENEM desse mesmo Ano.

5.5 Questão com o menor índice de acerto no ES - ENEM 2019

No ENEM desse ano foi observado que a questão que teve menor frequência de acertos foi a 173 (ver a seguir). A questão exige a habilidade de identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas (H19), que faz parte da competência (C5) que é modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, utilizando representações algébricas. Nesta seção realizaremos a análise que será a base metodológica do Capítulo 6 que realizará a entrega de possíveis raciocínios equivocados dos participantes, que levaram a um erro específico.

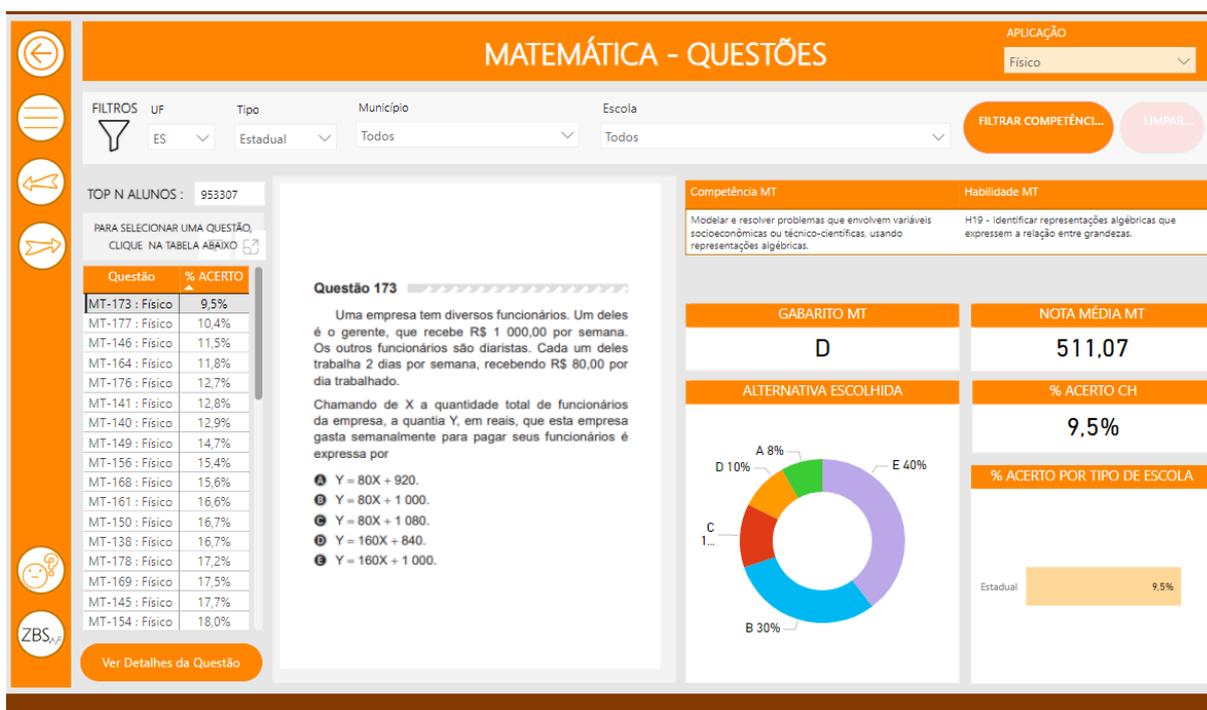


Figura 23 – ENEM 2019 — Questão com o Menor Índice de Acerto no ES.

Na coluna à esquerda da figura 23, as questões estão apresentadas em uma ordem que podemos alterar para a sequência numérica, da primeira à última questão de Matemática, ou organizar da forma como está apresentada na figura, ou seja, do menor para o maior percentual de acertos. Também seria possível fazer o inverso, ordenando do maior para o menor índice de acertos. No entanto, o que mais nos interessa nesta seção é analisar as questões de baixa complexidade e com menores índices de acertos e examinar os principais erros e fragilidades dos respondentes. Algum pesquisador ou gestor de escola poderia realizar seus trabalhos direcionando a atenção para aqueles itens com menores índices de acertos, porém não seria tão vantajoso, pois os itens que aparecem as mais baixas frequências de respostas corretas pode ser os de maiores complexidades pedagógicas, que pode não influenciar tanto na coerência do conjunto de respostas de um participante. A seguir realizaremos a análise de como se comportaram os respondentes capixabas à questão

173, e no Capítulo 6 as entregas serão sobre itens com maior influência na coerência de respostas, conseqüentemente na nota do participante.

Vamos à análise:

Questão 173

Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

A $Y = 80X + 920$.
B $Y = 80X + 1\ 000$.
C $Y = 80X + 1\ 080$.
D $Y = 160X + 840$.
E $Y = 160X + 1\ 000$.

Figura 24 – ENEM 2019 — Questão 173 amarela.

A questão 173 de 2019 tem como gabarito a alternativa D, porém, como pode ser observado nos gráficos das Figuras 23 e 25, as alternativas B e E tiveram maior frequência de respostas nas escolas públicas estaduais do Espírito Santo, totalizando 70% respostas nesses distratores e 9,5% de frequência relativa à resposta correta. No cenário nacional, a situação não é muito diferente, já que a mesma questão registrou apenas 10,5% de acertos.

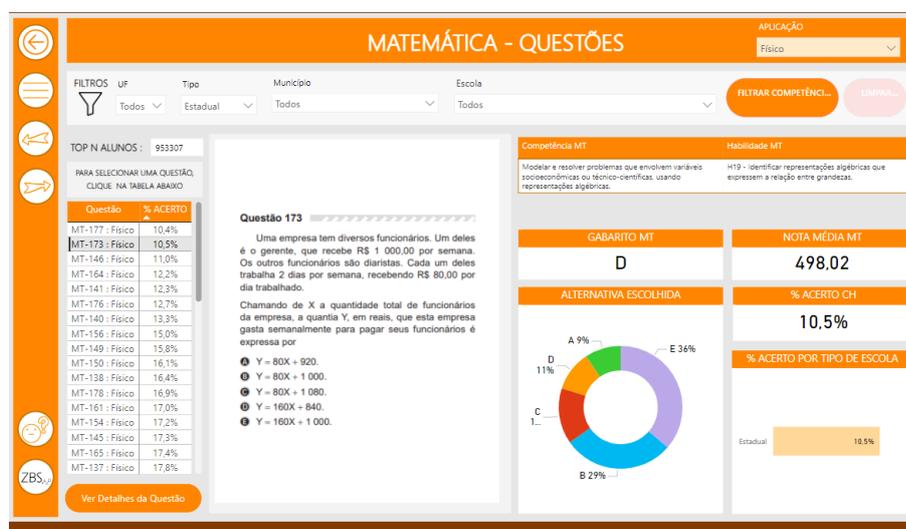


Figura 25 – ENEM 2019 — Questão 173 desempenho no Brasil.

A seguir, apresentamos uma resolução que responde corretamente à questão (letra D) e uma sugestão de como o raciocínio equivocado pode ter sido desenvolvido pelos respondentes que erraram o item. As alternativas com maior frequência de respostas incorretas foram as letras E e B, nesta ordem.

Questão 173. Solução — Gabarito D)

Gerente: 1000 reais por semana.

Diarista: 160 reais por 2 dias trabalhados (por semana).

$$Y = (X - 1) \cdot 160 + 1000$$

$$Y = 160X - 160 + 1000$$

$$Y = 160X + 840$$

Obs: O gerente também é funcionário, porém não recebe 160 reais por semana. $(X - 1)$ funcionários recebem 160 reais por semana.

Resp.: D

9,5% de Acerto no ES.

Distrator E)

$$Y = 160X + 1000$$

E) é uma resposta incorreta, pois X é a quantidade de funcionários da empresa, que inclui o gerente. O correto é considerar a quantidade dos funcionários diaristas como $(x-1)$.

40% de Respostas

Distrator B)

$$Y = 80X + 1000$$

B) é incorreta, por desconsiderar os R\$ 80,00 recebidos em cada um dos dois dias de trabalho dos diaristas.

30% de Respostas

Essas serão as análises que faremos, com foco principalmente no contexto do estado do Espírito Santo.

5.6 Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias.

O conteúdo programático das provas do ENEM é definido a partir das Matrizes de referência em quatro áreas do conhecimento: Linguagens, códigos e suas tecnologias; Matemática e suas tecnologias; Ciências da Natureza e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias. A matriz referência Matemática e suas tecnologias é dividida em 7 competências específicas e subdividida em habilidades. Embora algumas questões possam exigir mais de uma habilidade para serem resolvidas, cada item do ENEM avalia o candidato em apenas uma habilidade específica, sendo a predominante no item. Segue abaixo a relação de competências e habilidades do ENEM.

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 — Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade

para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

A matriz referência acima está associada aos objetos de conhecimento abaixo:

Conhecimentos Numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais); desigualdades; divisibilidade; fatoração; razões e proporções; porcentagem e juros; relações de dependência entre grandezas; sequências e progressões; princípios de contagem.

Conhecimentos Geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

Conhecimentos de Estatística e Probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (média, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

Conhecimentos Algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

Conhecimentos Algébricos/Geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade; sistemas de equações.

5.7 Mapa de Habilidades — Desempenho por Descritor(Habilidade)

A figura 26 apresenta o mapa de habilidades que servem como ponto de partida para a recomposição de aprendizagens de habilidades prioritárias. As habilidades prioritárias não são simplesmente as que obtiveram menores índices de respostas na edição, elas são determinadas pela influência que tem na nota total do candidato. São os itens e habilidades que, na prova do ano analisado, impactaram positiva ou negativamente na nota do participante conforme ele tenha errado, ou acertado a questão.



Figura 26 – Desempenho 2019 — Escolas Públicas Estaduais do ES

Podemos analisar os gráficos disponíveis na plataforma Educação em Foco, filtrando ano a ano, para identificar os descritores que devem ser priorizados nas aulas de matemática. Conforme ilustrado na Figura 26, existem 10 descritores prioritários, sendo o descritor H27 o mais crítico. Destaca-se o aumento insignificante de apenas 1% no grau de domínio nos cinco anos anteriores ao exame de 2019. Em outras palavras, os avanços no processo de ensino e aprendizagem relacionados à habilidade H27 — que trata de calcular medidas de tendência central ou dispersão de um conjunto de dados expressos em tabelas de frequência de dados agrupados (não em classes) ou gráficos — não foram eficazes no Espírito Santo durante esse período, evidenciando essa habilidade como prioritária para o ano seguinte, 2020.

Ainda assim, os dados apresentados na Figura 26 são insuficientes para fundamentar

plenamente boas escolhas de abordagens pedagógicas prioritárias. A classificação de H27 como descritor prioritário indica apenas que, naquele ano, ele obteve uma baixa taxa de acerto e foi influente na composição da nota total, mas isso não garante que a habilidade foi igualmente exigida nas edições anteriores do exame.

Por outro lado, a Tabela 2, que organiza em ordem decrescente as habilidades que frequentemente apareceram na região vermelha entre 2009 e 2019, pode auxiliar os professores na tomada de decisões sobre quais habilidades são recorrentes nas edições do ENEM e têm maior impacto na elevação da nota dos participantes. Geralmente, os itens que trazem essas habilidades que puxam a nota do candidato para baixo, em caso de erro, são de baixa complexidade pedagógica. Com isso, por exemplo, pela TRI, um candidato que acertou questões “difíceis” e errou questões “fáceis” não estabeleceu uma coerência nas respostas. Mesmo que outro candidato tenha acertado o mesmo número de questões que o citado anteriormente, se este estabelecer uma coerência nas repostas, terá uma nota superior. Manter coerência nas respostas é acertar escalonadamente questões das mais fáceis às mais difíceis.

Com base nessas habilidades prioritárias, historicamente pertencentes à região vermelha do gráfico da Figura 27, os docentes podem utilizar esses dados para investigar as causas do baixo desempenho em itens que demandam tais habilidades, adotando intervenções pedagógicas mais eficazes para melhoria do aprendizado dos alunos.

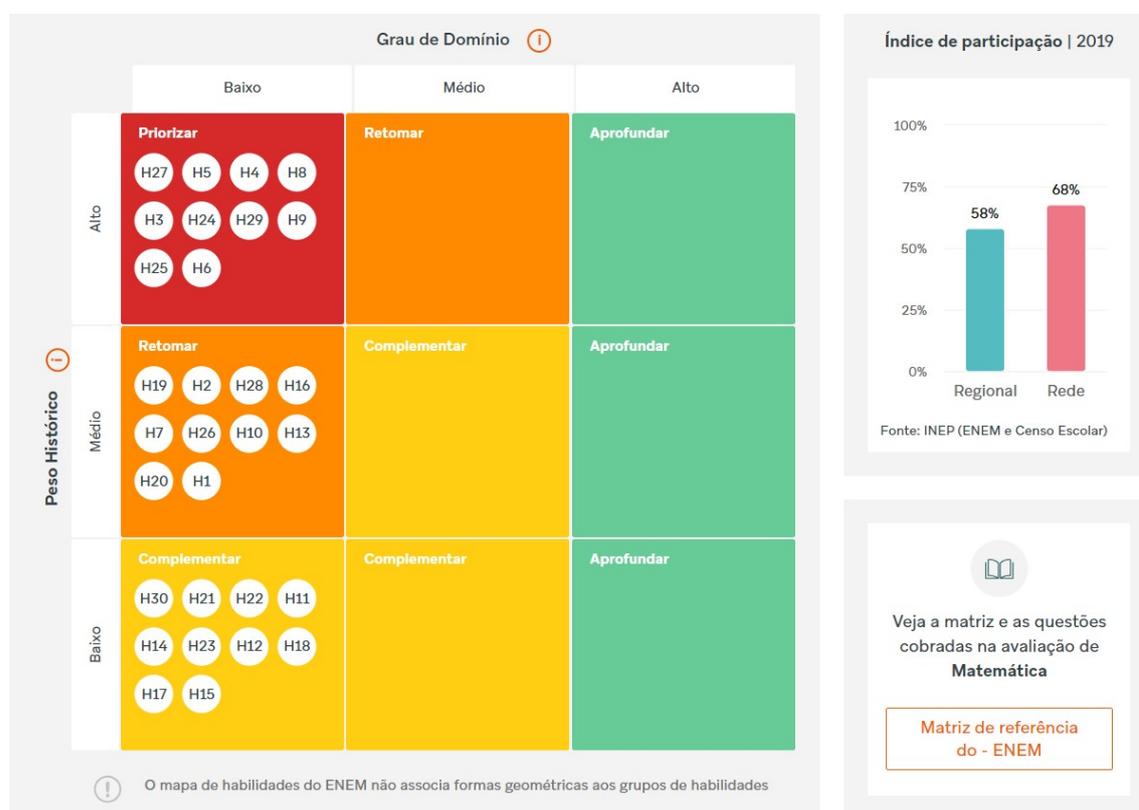


Figura 27 – Grau de Domínio x Peso Histórico - Rede Estadual ES

A figura 27 apresenta o Mapa de Habilidades avaliadas na edição de 2019 distribuídas por Grau de Domínio e Peso Histórico.

O Grau de Domínio refere-se à probabilidade de um(a) aluno(a), entre o conjunto selecionado, acertar uma questão aleatória associada a determinada habilidade. Por sua vez, o Peso Histórico representa o impacto na nota do aluno ao acertar ou errar questões relacionadas a essa habilidade, com base no desempenho registrado em provas anteriores.

Nosso foco de atenção está na região vermelha, pois ela destaca as habilidades com os maiores pesos históricos nas quais os estudantes finalistas do ano de 2019 apresentaram o menor grau de domínio. A proposta pedagógica ao analisar essas habilidades consiste em oferecer aos professores de matemática do ensino básico a oportunidade de discutir as questões, não apenas com base na resolução correta, mas também considerando os possíveis erros cometidos.

Os estudantes são geralmente treinados para saber “o que fazer”, mas têm poucas oportunidades de explorar “o que não fazer”. Frequentemente, eles só entram em contato com os erros e suas explicações após uma prova, quando recebem o gabarito das questões que erraram. Esta dissertação também contribuirá para a aprendizagem dos estudantes ao promover o contato com o erro, que será intencionalmente provocado pelo docente durante as aulas.

O produto resultante deste trabalho será a análise das questões que tiveram maior relevância histórica na composição das notas dos candidatos finalistas do ensino médio público do Espírito Santo no período de 2009 a 2019. Até o momento, as informações sobre as habilidades na região vermelha foram extraídas da Plataforma Educação em Foco da SEDU, e abrangem apenas os exames realizados entre 2009 e 2019. Na próxima seção, apresentaremos a coleta das habilidades que se enquadraram nessa “zona vermelha” durante esse intervalo de anos. A tabela 2 da seção seguinte traz as habilidades que apareceram na zona vermelha com maior frequência, observando as edições de 2009 a 2019. Por meio da ZBS faremos algumas análises de questões de anos mais recentes.

5.8 Análise Histórica de Habilidades e Competências dos ENEM 2009 - 2019

Esta tabela resulta de uma coleta realizada ano a ano na plataforma Educação em Foco SEDU-ES (dados disponíveis para o período de 2009 a 2019). O objetivo dessa coleta é identificar as habilidades historicamente mais fragilizadas, caracterizadas por Alto Peso Histórico e Baixo Grau de Domínio, entre os estudantes finalistas de cada ano nesse intervalo. Essa tabulação também proporciona reflexões sobre os problemas de domínio que têm se perpetuado entre os estudantes da rede pública do Estado do Espírito Santo, evidenciando fragilidades recorrentes que não foram superadas.

Vale observar que essas habilidades foram identificadas com base no desempenho de um grupo de alunos. Uma análise mais aprofundada das questões revela que elas não são consideradas tão difíceis, como no exemplo já dado na figura 24, da seção 5.5. Essas questões podem ser classificadas como relativamente fáceis, o que representa um grande risco para os estudantes. Errar questões fáceis e acertar algumas difíceis pode influenciar negativamente, puxando a nota do candidato para baixo.

Tabela 2 – Habilidades com maior frequência histórica no campo Alto Peso Histórico x Baixo Grau de Domínio

H	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
H3	X	X	-	X	X	X	X	-	X	X	X
H8	X	X	-	-	-	-	X	X	X	X	X
H16	X	X	X	X	X	X	-	-	-	X	X
H25	-	X	X	X	X	X	-	-	-	X	X
H26	-	X	-	X	X	X	X	X	X	-	-
H1	-	-	-	X	X	X	X	-	X	-	-
H7	-	-	X	X	X	X	X	-	-	-	-
H9	-	X	-	-	-	-	X	-	X	X	X
H12	X	X	X	X	X	-	-	-	-	-	-
H4	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X
H6	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X
H15	-	-	X	X	X	-	X	-	-	-	-
H24	X	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X
H29	-	-	-	-	-	-	-	X	X	X	X

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

Na tabela 2 estão apresentadas as coletas realizadas ano-a-ano, de 2009 a 2019. Foi observado que a habilidade H3 teve maior frequência na área vermelha do gráfico 27, representando assim a habilidade mais frágil à priorizar que possui alto peso histórico e baixo grau de domínio dentre os estudantes capixabas.

6 Análise de Questões do ENEM com foco nos acertos e principais erros.

Nesta etapa, não partimos do pressuposto de que todos os candidatos tenham raciocinado conforme as resoluções que sugerimos, seja para chegar aos distratores ou às alternativas corretas. Também não descartamos a ocorrência de chutes aleatórios ou estratégicos. No entanto, ao analisar o gráfico de respostas dos candidatos, se observarmos que algum distrator se equipara ou até supera o percentual de acertos, isso pode indicar que um grupo de estudantes apresenta a mesma lacuna em relação à habilidade exigida na questão. Caberá ao professor decidir se abordará todos os distratores na intervenção 5.5 em sala de aula ou se concentrará no erro principal dos alunos. Compreendemos que os estudantes que responderam itens em tal ano não serão os mesmos que participarão das intervenções, porém com os levantamentos realizados tanto pela Educação em Foco, bem como pela ZBS, nos indicam uma tendência de habilidades que aparecem com frequência na área de Peso Histórico X Grau de Domínio na maioria das edições.

Este capítulo é o produto principal da dissertação, que entregará ao leitor possibilidades de análise de itens já aplicados nas últimas edições do ENEM. O objetivo é trazer a possibilidade de não apenas apresentar aos estudantes a resolução correta, mas também dar acesso ao erro. É investigar o principal motivo. É dar conhecimento aos estudantes do que é uma resolução correta, e que alternativas incorreta também pode auxiliar na resposta ao item.

A seguir, analisaremos algumas questões relacionadas à Competência e Habilidade que historicamente têm sido mais fragilizada no ENEM, com base nos resultados regionais, especificamente no estado do Espírito Santo.

Apresentar os gráficos para os estudantes é mais uma informação importante que eles podem adquirir, por trazer um parâmetro geral do item ou do perfil dos avaliados. Essa informação é tão relevante para o estudante quanto é para o professor. Portanto, precisa fazer parte da aula de resolução de questões de Exames anteriores e explicação do porquê os distratores estão entre as alternativas, e quais raciocínios não podem ser desenvolvidos pelos alunos, e para quais erros um percentual alto da população tende a responder e o que motivou que se chegasse a tal resposta incorreta.

Para trazer mais objetividade ao trabalho, tomaremos a principal habilidade presente na Tabela 2, H3, e desenvolveremos em cima de questões das edições do ENEM compreendidas entre 2018 e 2022 compiladas na ZBS Educação. Traremos aos menos uma questão de cada edição.

É fundamental destacar que cada distrator está relacionado a um possível erro de cálculo ou interpretação. Entretanto, pode haver distratores cuja intenção original do elaborador não seja imediatamente identificável. Mesmo assim, nos esforçamos para oferecer uma explicação plausível que justifique a escolha do estudante por um determinado distrator, colaborando para a compreensão dos equívocos.

6.1 Discussão de itens de habilidade H3 e competência C1.

A habilidade para a realização da entrega deste produto foi escolhida por ter maior impacto nas notas de candidatos em exames do período de 2009 - 2019, segundo a Plataforma Educação em Foco. Realizaremos aqui uma comparação com as estatísticas de respostas dos estudantes finalistas das escolas públicas estaduais, tomando o Brasil como o primeiro parâmetro.

A metodologia que utilizaremos em cada situação será a que foi realizada na seção 5.5. Observaremos as estatísticas das respostas dos finalistas do ensino médio público estadual ES, comparando com as respostas do mesmo público no recorte nacional. Em alguns itens aprofundaremos as comparações das estatísticas de respostas, apresentando resultados de outros estados brasileiros, entregando ainda resoluções alternativas para o gabarito e discussões sobre os distratores, observando as possíveis fragilidades que levaram aos principais erros. Os principais erros tratados aqui serão aqueles nos quais os percentuais de respostas se aproximam ou superam ao percentual de marcações ao gabarito.

O itens selecionados para as discussões estão associados à Competência de Área 1, que visa construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. Especificamente, a questão explora a Habilidade H3, que consiste em resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

6.1.1 Questão 149 — ENEM 2022

No Espírito Santo, o gabarito teve aproximadamente 31% de respostas, e o distrator B teve 27%.

Nas escolas estaduais de todo o Brasil o gabarito recebeu 29% das respostas e o distrator B 27%.

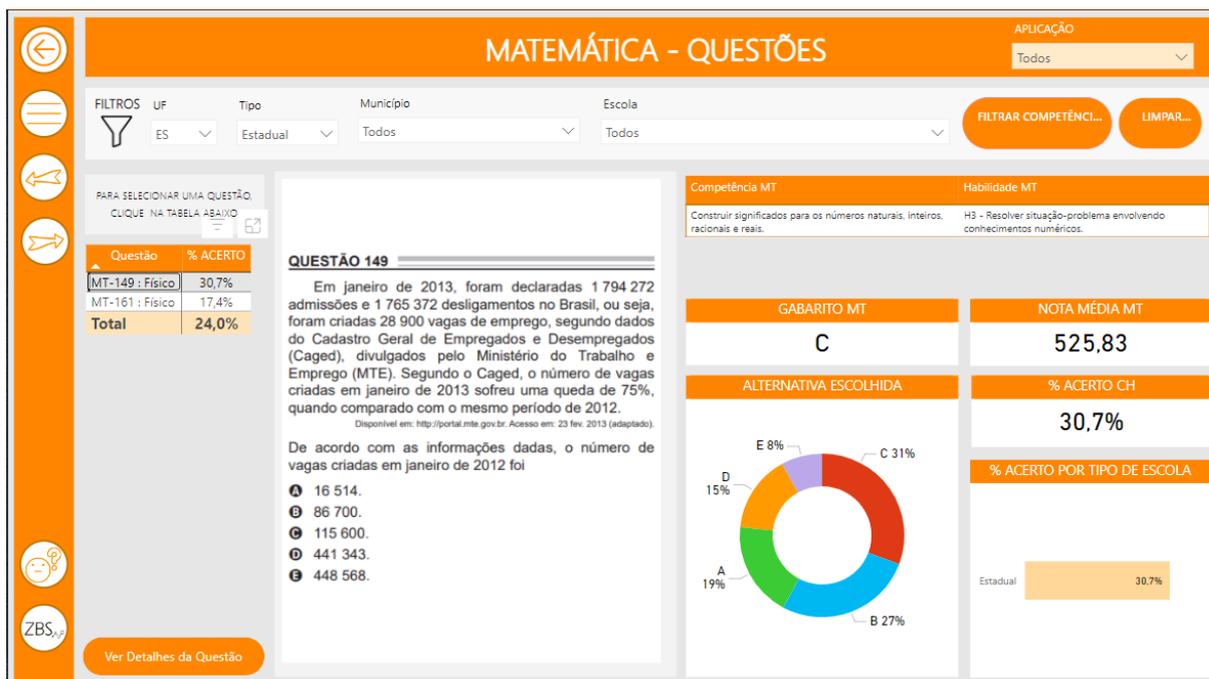


Figura 28 – Estatística de resposta dos Capixabas — Q149 — Enem 2022

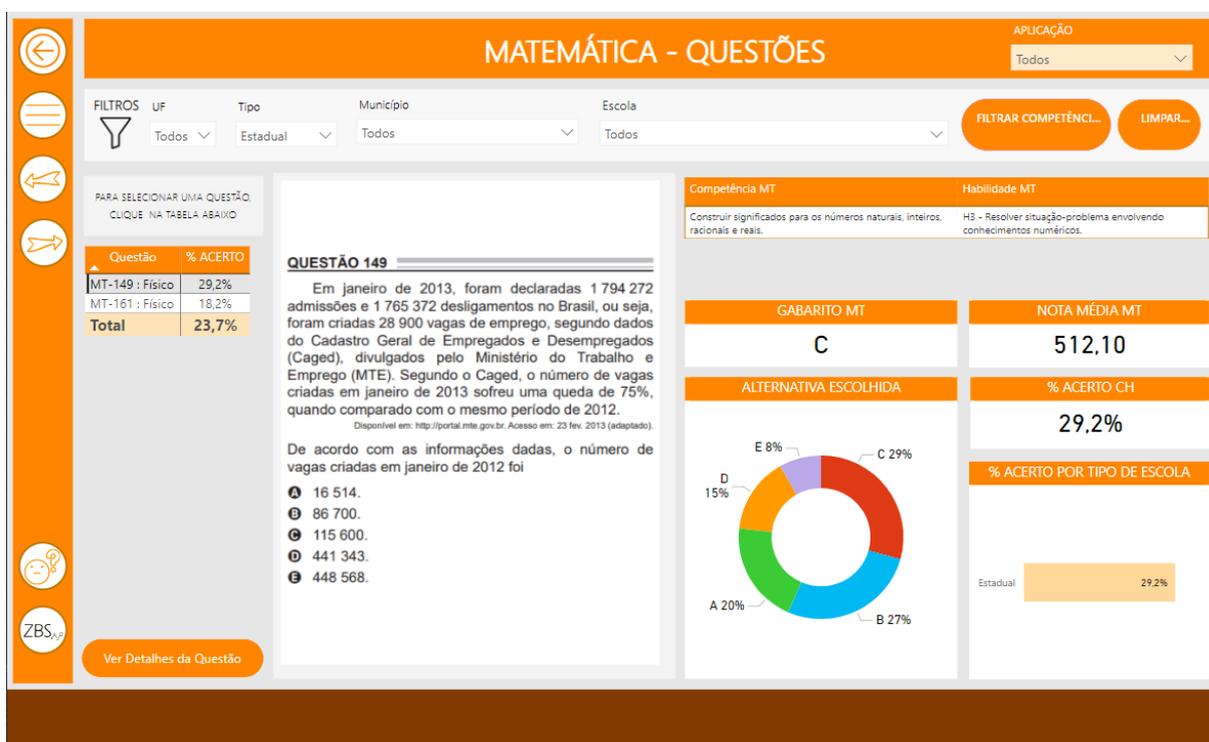


Figura 29 – Estatística de resposta dos brasileiros — Q149 — Enem 2022

QUESTÃO 149

Em janeiro de 2013, foram declaradas 1 794 272 admissões e 1 765 372 desligamentos no Brasil, ou seja, foram criadas 28 900 vagas de emprego, segundo dados do Cadastro Geral de Empregados e Desempregados (Caged), divulgados pelo Ministério do Trabalho e Emprego (MTE). Segundo o Caged, o número de vagas criadas em janeiro de 2013 sofreu uma queda de 75%, quando comparado com o mesmo período de 2012.

Disponível em: <http://portal.mte.gov.br>. Acesso em: 23 fev. 2013 (adaptado).

De acordo com as informações dadas, o número de vagas criadas em janeiro de 2012 foi

- A** 16 514.
- B** 86 700.
- C** 115 600.
- D** 441 343.
- E** 448 568.

Figura 30 – ENEM 2022 — Questão 149.

6.1.1.1 Discussão das Principais Alternativas da Q149 — ENEM 2022.

Solução — Gabarito: letra C

Janeiro de 2013 \Rightarrow 28.900 Vagas criadas.

Se Jan/2013 sofreu uma queda de 75% em relação a Jan/2012, significa que em 2012 foram criadas X vagas de emprego e 28.900 representa 25% de X .

Daí,

$$\frac{25}{100} \cdot X = 28900$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{28900 \cdot 100}{25} \Leftrightarrow X = 115600$$

Resposta: C

30,7% de acerto no ES e 29,7% no Brasil.

Distrator B

27% dos estudantes concluintes capixabas responderam a alternativa B. Um possível raciocínio equivocado pode ser que esses consideraram 25% com 28.900, e multiplicaram por 3, ou seja $3 \cdot 25\% = 75\%$ e

$$3 \cdot 28.900 = 86.700.$$

Distratores que poderiam compor as alternativas:

1º) 21.675 Vagas. Esta resposta seria o resultado do cálculo de 75% em cima de 28.900.

2º) 50.575 Vagas. Este também seria um ótimo distrator, pois é o resultado do acréscimo de 75% em cima de 28.900.

6.1.2 Questão 140 — ENEM 2021

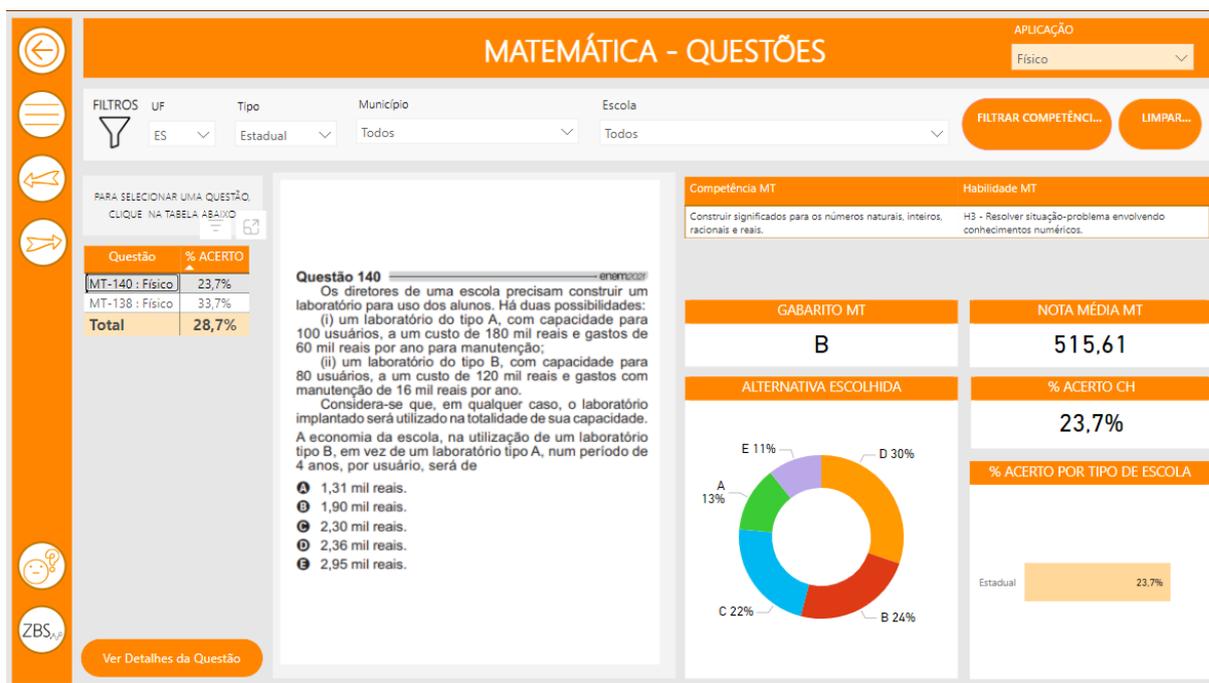


Figura 31 – Estatística de Resposta dos Capixabas — Q140 — Enem 2021

Este item foi respondido corretamente por 30% dos finalistas capixabas em 2021, e teve alto índices de respostas nas alternativas B e C.

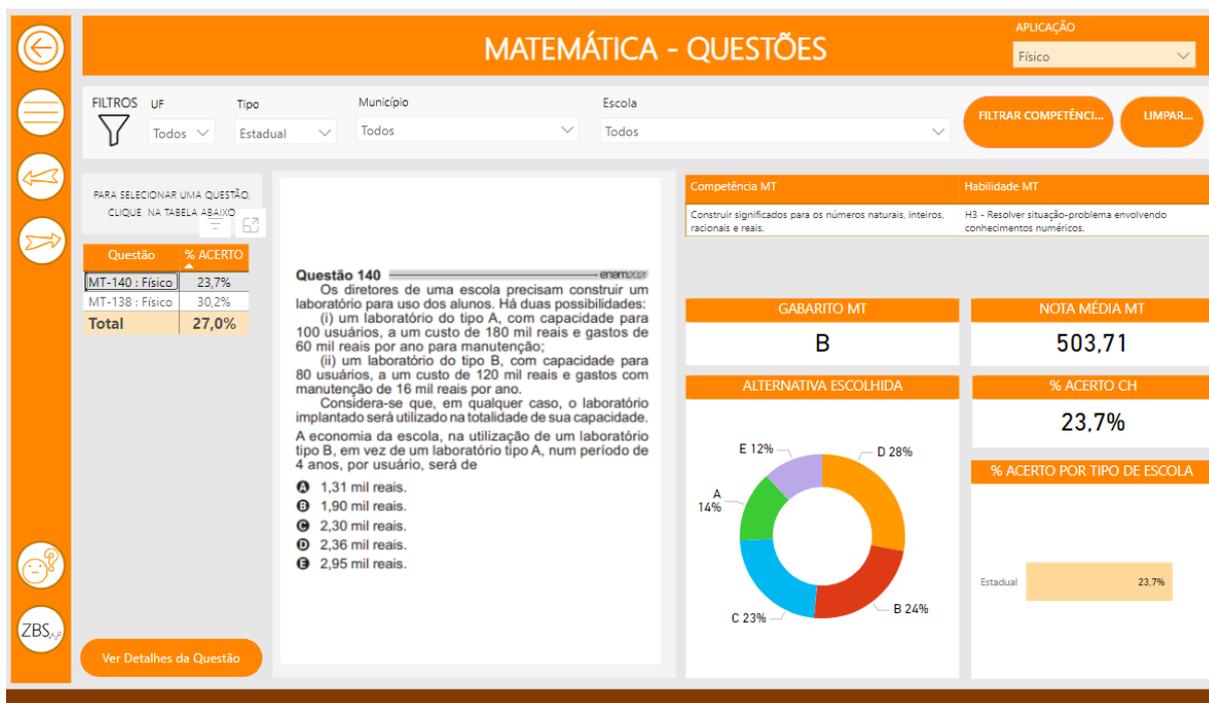


Figura 32 – Estatística de Resposta dos Brasileiros - Q140 - Enem 2021

No parâmetro Escolas Públicas Estaduais Brasileiras, os percentuais se aproximam das respostas dos capixabas.

Questão 140 enem2021

Os diretores de uma escola precisam construir um laboratório para uso dos alunos. Há duas possibilidades:

- (i) um laboratório do tipo A, com capacidade para 100 usuários, a um custo de 180 mil reais e gastos de 60 mil reais por ano para manutenção;
- (ii) um laboratório do tipo B, com capacidade para 80 usuários, a um custo de 120 mil reais e gastos com manutenção de 16 mil reais por ano.

Considera-se que, em qualquer caso, o laboratório implantado será utilizado na totalidade de sua capacidade. A economia da escola, na utilização de um laboratório tipo B, em vez de um laboratório tipo A, num período de 4 anos, por usuário, será de

- A** 1,31 mil reais.
- B** 1,90 mil reais.
- C** 2,30 mil reais.
- D** 2,36 mil reais.
- E** 2,95 mil reais.

Figura 33 – ENEM 2021 - Questão 140

6.1.2.1 Discussão das Principais Alternativas da Q140 — ENEM 2021.

Solução — Gabarito: letra B

- (i) $C_1(t) = 180000 + 60000t$
- (ii) $C_2(t) = 120000 + 16000t$

Temos o custo para 4 anos:

$$C_1(4) = 180000 + 60000 \cdot 4 = 420000 \text{ reais}$$

$$C_2(4) = 120000 + 16000 \cdot 4 = 184000 \text{ reais}$$

Custo por aluno:

- (i) $\frac{420000}{100} = 4200$ reais/usuário
- (ii) $\frac{184000}{80} = 2300$ reais/usuário

A economia, por usuário, em 4 anos:

$$4200 - 2300 = 1900 \text{ reais/usuário}$$

Resposta: B

23,7% de acerto no ES e 23,7% no Brasil.

Distrator D

O custo total do laboratório A é R\$ 420 mil em 4 anos, e o laboratório B, R\$ 184 mil.

Um suposto equívoco que pode ter levado 30% dos respondentes capixabas a responder essa alternativa foi a realização do cálculo da diferença dos dois valores e a divisão do resultado por 100.

$$420000 - 184000 = 236000$$
$$\frac{236000}{100} = 2,36 \text{ mil}$$

O pensamento está errado, pois desconsidera que os custos dos laboratórios A e B são, respectivamente, referentes aos públicos de 100 e 80 usuários.

30,27% no ES marcaram esta alternativa. No recorte nacional, 27,88%.

Distrator C

O distrator C teve índices de escolhas de 22% e 23% no ES e no Brasil. Como o trabalho de investigação é um processo de inverso ao de criação de itens, em alguns casos não será possível determinar de forma imediata algum raciocínio plausível. Alguns casos nos sugerem a pensar que uma parcela dos respondentes simplesmente "chutou" de forma aleatória, que é este caso.

6.1.3 Questão 176 — ENEM 2020

O percentual de respostas corretas (gabarito C) dos capixabas foi superado pelo distrator E. 29% marcaram como respostas a alternativa E, e ao gabarito 26%.

Os percentuais nacionais do item que apresentam 30% ao distrator E e 26% ao gabarito, resultados regulares às respostas dos capixabas, mostram que existe um problema nacional em relação ao domínio da habilidade H3. Provavelmente houve erro de interpretação por grande parte dos respondentes, que não compreenderam a diferença entre **ter a presença do antígeno A** e **ser do Tipo sanguíneo A**.

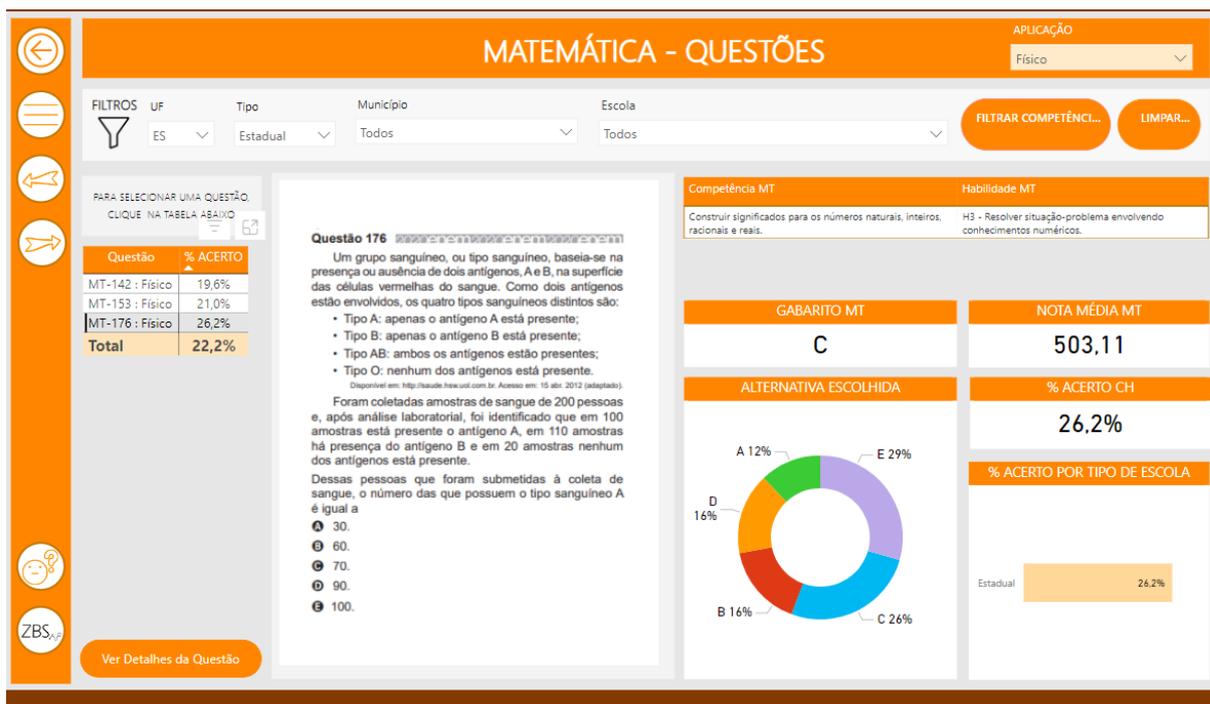


Figura 34 – Estatística de resposta dos Capixabas — Q176 — ENEM 2020



Figura 35 – Estatística de resposta dos Brasileiros — Q176 — ENEM 2020

Questão 176 

Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são:

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Disponível em: <http://saude.hsw.uol.com.br>. Acesso em: 15 abr. 2012 (adaptado).

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a

- A** 30.
- B** 60.
- C** 70.
- D** 90.
- E** 100.

Figura 36 – ENEM 2020 — Questão 176

6.1.3.1 Discussão das Principais Alternativas da Q176 — ENEM 2020.

Solução — Gabarito: Letra C

Pelo diagrama de Venn, temos que:

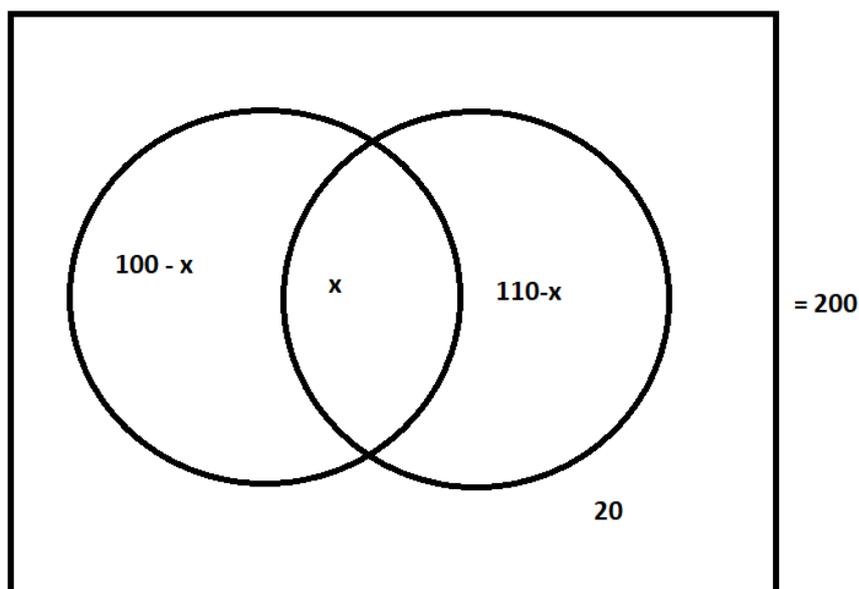


Figura 37 – Diagrama de Venn Solução Q176 - ENEM 2020

Fonte: Produção Própria do autor - 2024

$$100 - x + x + 110 - x + 20 = 200$$

Resolvendo a equação:

$$-x + 230 = 200 \Leftrightarrow x = 30$$

Pelo diagrama de Venn, podemos verificar que o número de pessoas que foram identificadas com ambos os antígenos é 30.

Dai, $100 - 30 = 70$ pessoas possuem apenas o antígeno A. Logo, essas 70 pessoas possuem o tipo sanguíneo A.

A letra **C** responde este item.

26,2% de acerto no ES e 25,6% no Brasil.

Distrator E

Os que marcaram esta alternativa, possivelmente, não compreenderam a diferença de ter a presença do antígeno A em amostras e ser do Tipo sanguíneo A.

O enunciado informou que em 100 amostras foi identificada a presença do antígeno A, e provavelmente os que marcaram a alternativa E acreditaram que 100 pessoas eram do tipo sanguíneo A.

29% no ES marcaram esta alternativa. No recorte nacional, 30%.

6.1.4 Questão 149 — ENEM 2019

As análises dos gráficos se estenderão aos resultados de algumas escolas do Espírito Santo que tiveram bom desempenho na questão, e a outras que apresentaram baixo grau de domínio. A exigência do item é a realização de cálculos sucessivos de porcentagens.

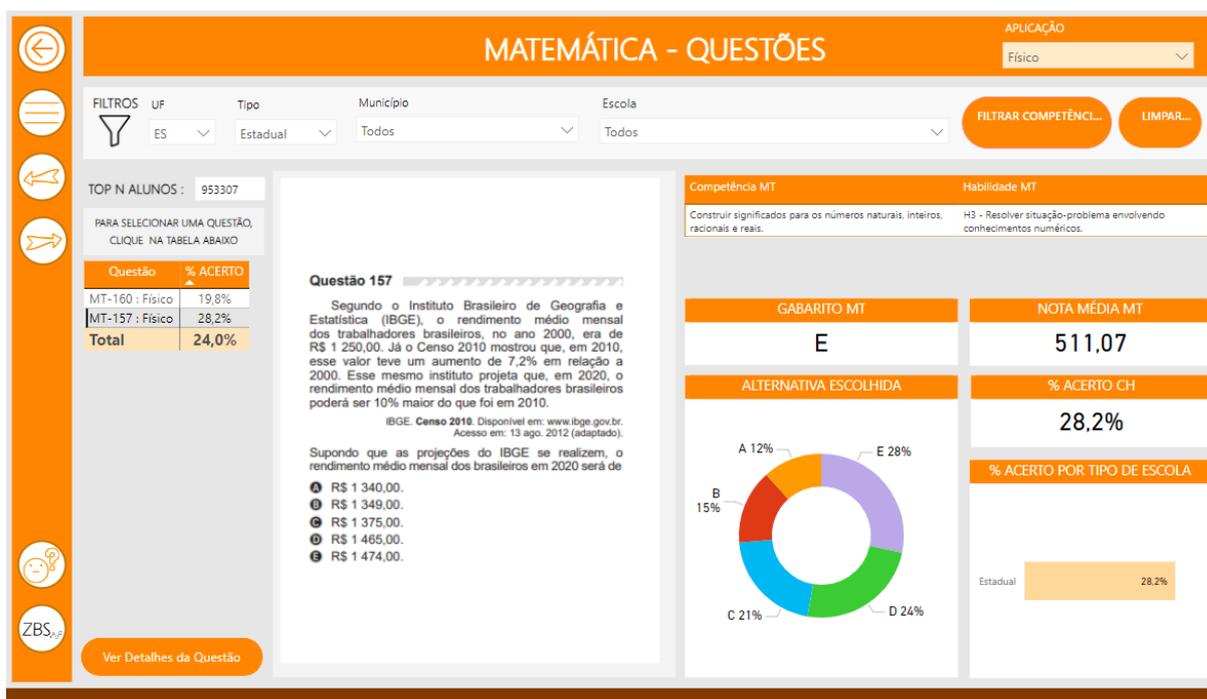


Figura 38 – Estatística de resposta dos Capixabas — Q157 — Enem 2019

Os parâmetros nacionais e capixaba são próximos, sendo em médias 27% de acerto e os principais distratores, C e D, somam, aproximadamente, 47% de frequência nas respostas.

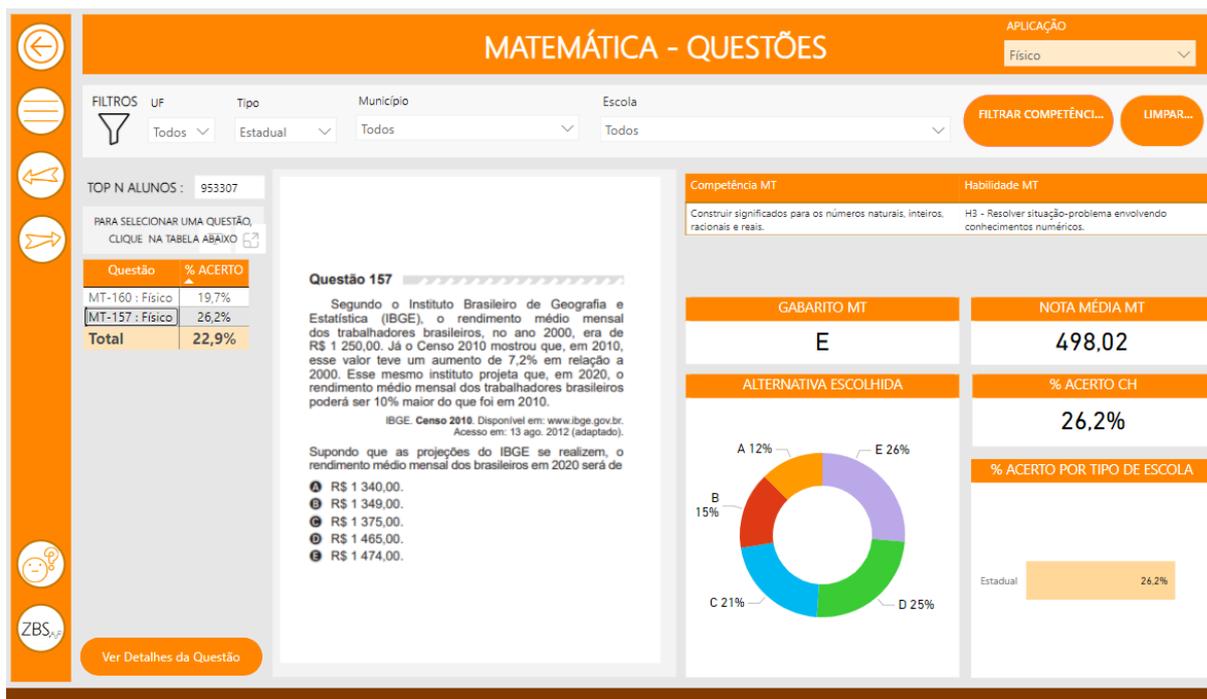


Figura 39 – Estatística de resposta dos Brasileiros — Q157 — Enem 2019

Mostraremos aqui as estatísticas de respostas de estudantes de algumas escolas específicas. Apresentaremos os gráficos de unidades de ensino do Espírito Santo que tiveram percentuais de acerto ao item acima da média estadual, em torno da média, e abaixo da média. Enfatizarei escolas da região metropolitana, por serem escolas das quais já tive contrato de trabalho ou que já visitei, e que apresentam fragilidade nesta habilidade. Abaixo estão apresentadas as escolas e seus respectivos municípios de localização.

Domingos Martins-ES

EEEFM PONTO DO ALTO.

Vitória-ES

EEEM PROF RENATO JOSÉ DA COSTA PACHECO.

EEEM COLÉGIO ESTADUAL DO ESPÍRITO SANTO.

EEEFM MAJOR ALFREDO PEDRO RABAYOLLI.

Viana-ES

EEEM IRMÃ DULCE LOPES PONTE.

CEEFMTI EWERTON MONTENEGRO GUIMARÃES (tempo integral).

Cariacica-ES

EEEFM JESUS CRISTO REI.

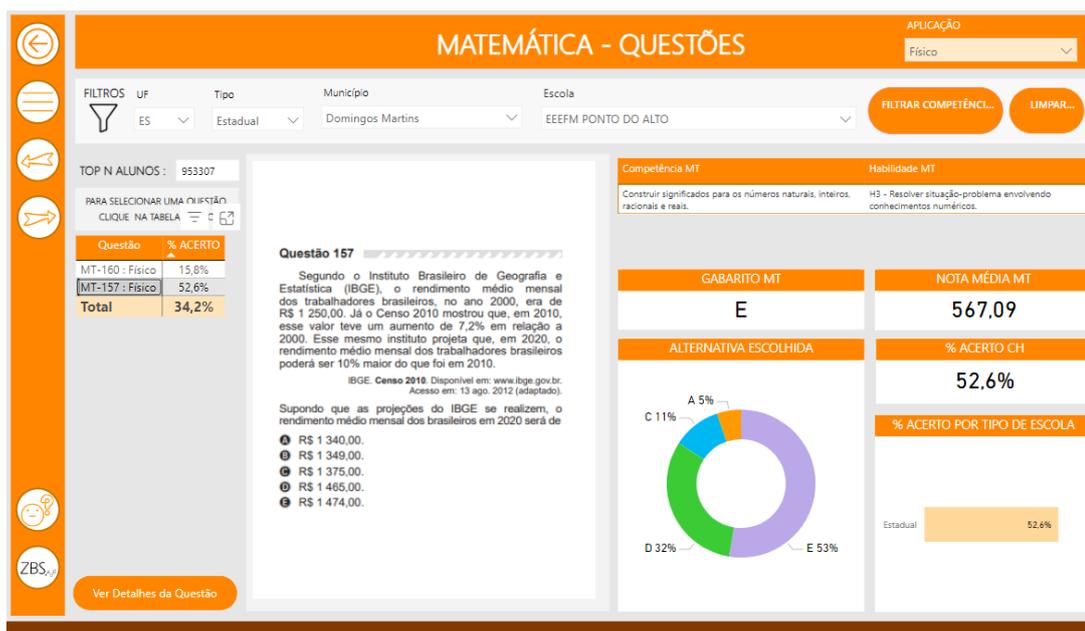


Figura 40 – EEEFM Ponto do Alto — Q157 — ENEM 2019.

A figura 40 mostra que a EEEFM Ponto do Alto teve um ótimo desempenho na questão 157, tendo 53% de respostas corretas ao item. O principal distrator é a alternativa D, com 32% de respostas.

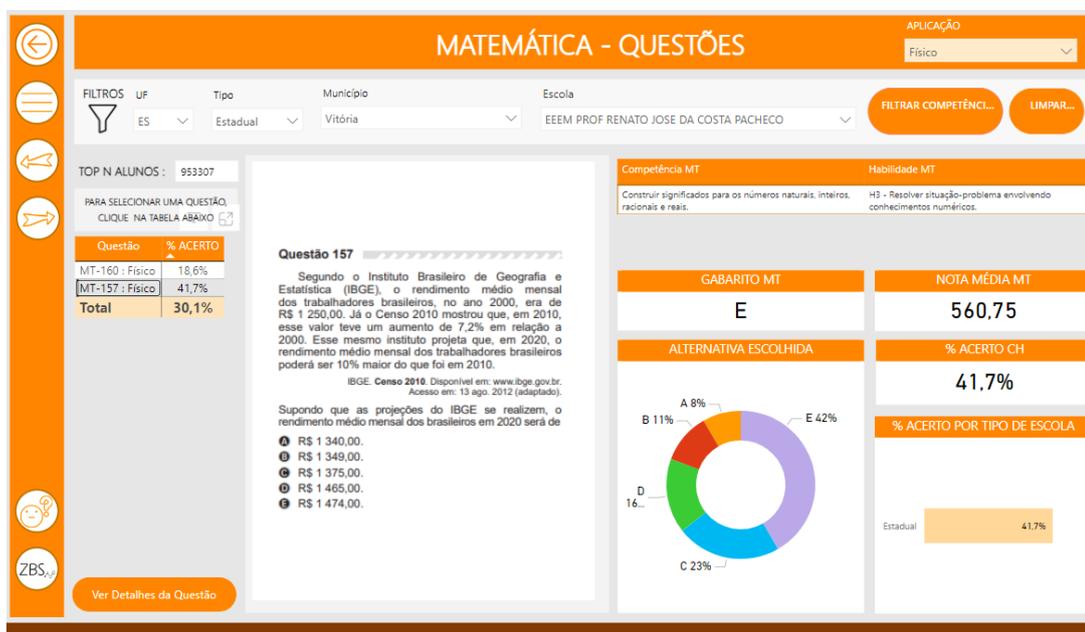


Figura 41 – EEEM Prof. Renato José da Costa Pacheco — Q157 — ENEM 2019

A EEEM Prof. Renato José da Costa Pacheco (Figura 41) também teve índice de respostas corretas acima do parâmetro nacional e espírito-santense. 42% dos estudantes responderam corretamente ao item e o principal distrator é a letra C, com 23%. A alternativa D teve 16% de respostas.

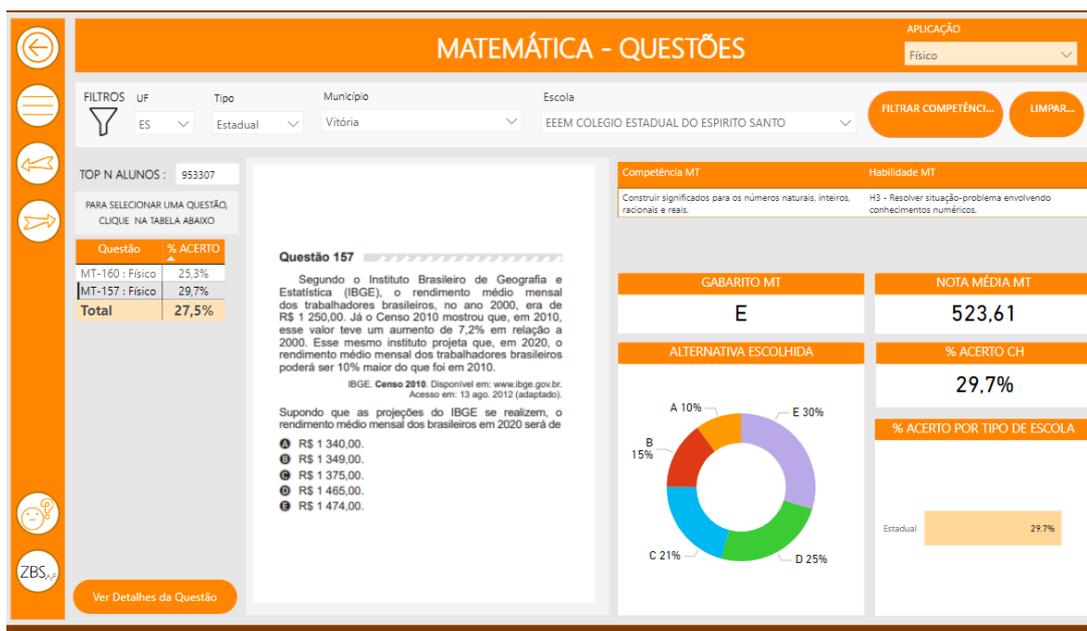


Figura 42 – EEEM Colégio Estadual do Espírito Santo — Q157 — ENEM 2019

A EEEM Colégio Estadual do Espírito Santo teve 30% de frequência de respostas corretas ao item, e os principais distratores são D e C.

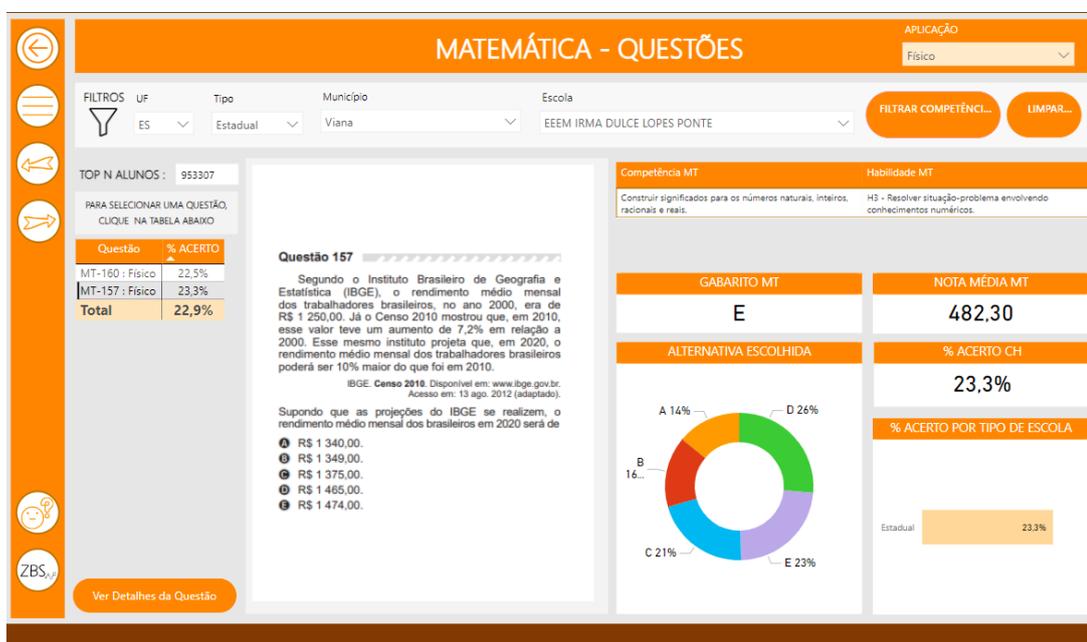


Figura 43 – EEEM Irmã Dulce Lopes Ponte — Q157 — ENEM 2019

A EEEM Irmã Dulce Lopes Ponte teve o índice de marcação ao gabarito E (23%), inferior ao índice de respostas ao distrator D. Os dados sobre os distratores D e C mostram uma fragilidade da escola.

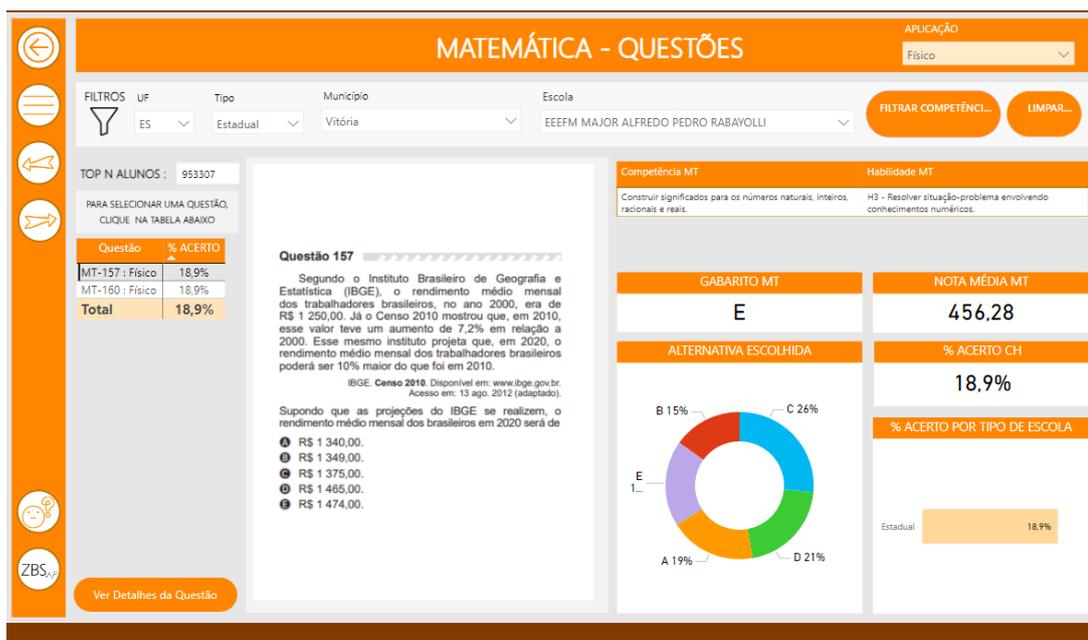


Figura 44 – EEEFM Major Alfredo Pedro Rabayolli — Q157 — ENEM 2019

No gráfico 44 da EEEFM Major Alfredo Pedro Rabayolli teve as alternativa erradas C, D e A, nesta ordem, com índices superiores aos do gabarito E.

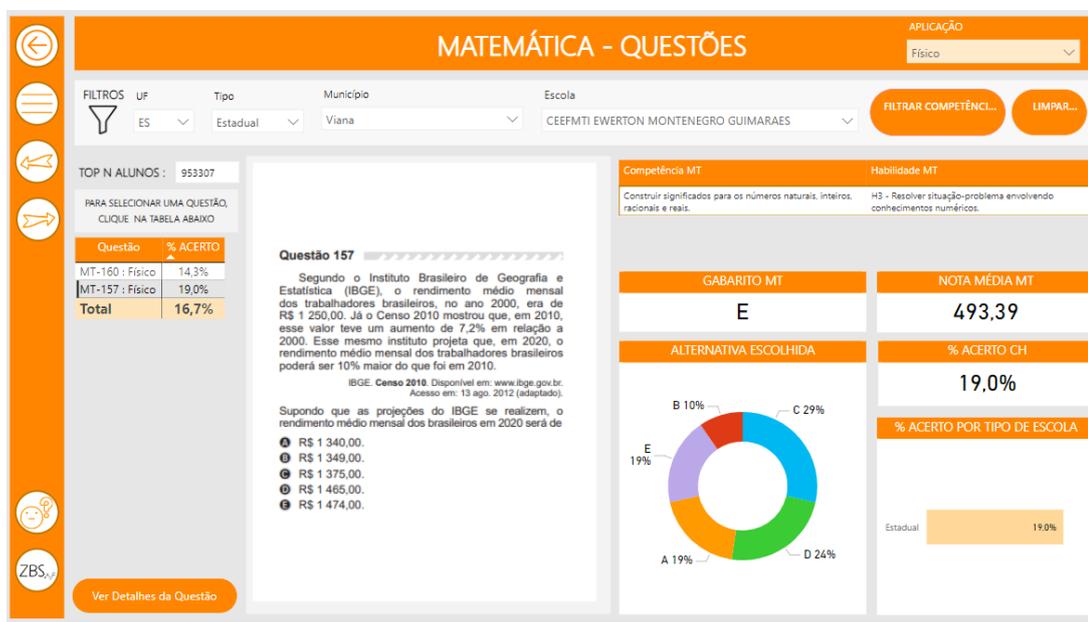


Figura 45 – CEEFTI Ewerton Montenegro Guimarães (Tempo Integral) — Q157 — ENEM 2019

A escola de tempo integral CEEFTI Ewerton Montenegro Guimarães mostra-se frágil em matemática em relação à habilidade com porcentagens.

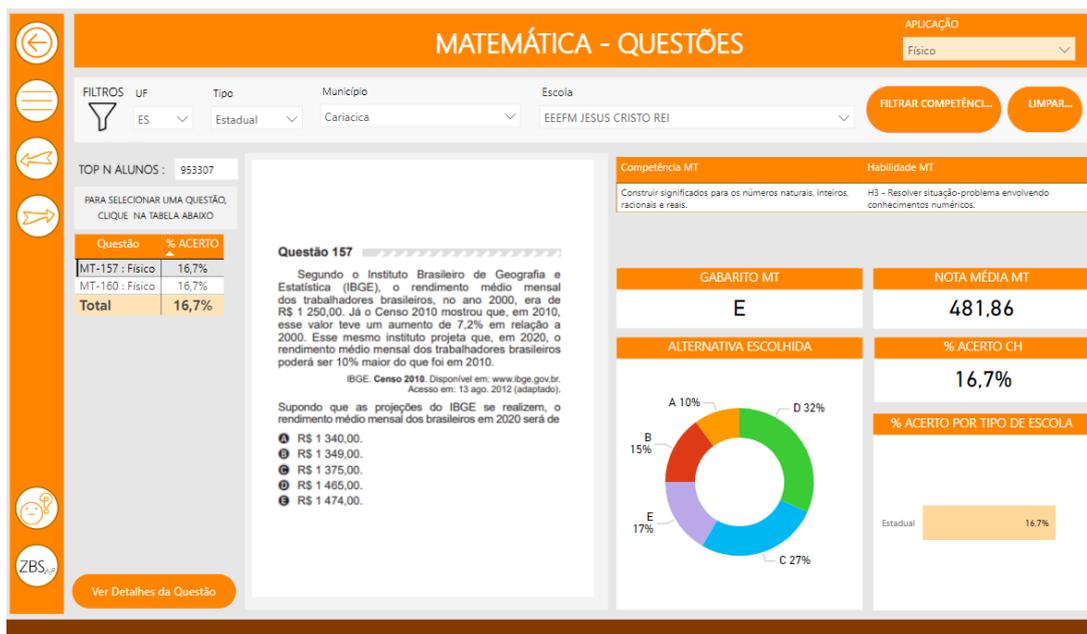


Figura 46 – EEEFM Jesus Cristo Rei — Q157 — ENEM 2019

A EEEFM Jesus Cristo Rei, como todas as outras que tiveram as respostas aos distratores superiores às respostas ao gabarito, necessitam de uma intervenção de recomposição da aprendizagem sobre porcentagens.

6.1.4.1 Estatística de Acerto nas 5 Escolas Analisadas — Q157 - 2019

LOCALIDADE/ESCOLA	ACERTO (%)	DISTRATORES (%)
EEEFM PONTO DO ALTO	52,6% E	32% D e 11% C
EEEM PROF RENATO J. DA C. P.	41,7% E	23% C e 16% D
EEEM COLÉGIO ESTADUAL DO E. S.	29,7% E	25% D e 21% C
REDE ESTADUAL ES	28,2% E	24% D e 21% C
REDE ESTADUAL BRASIL	26,2% E	25% D e 21% C
EEEM IRMÃ DULCE L. P.	23,3% E	26% D e 21% C
CEEFMTI EWERTON M. G	19% E	29% C, 24% D e 19% A
EEEFM MAJOR A. P. RABAYOLLI	18,9% E	26% C e 21% D e 18% A
EEEFM JESUS CRISTO REI	16,7% E	32% D, 27% C, 15% B

Tabela 3 – Estatística de Acerto - Q157 - 2019 (em ordem decrescente de acertos)

A questão 157 do ENEM de 2019 (Figura 47) está relacionada à Competência de Área 1, que busca construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. Ela avalia a Habilidade H3, que envolve a resolução de situações-problema utilizando conhecimentos numéricos. Os objetos de conhecimento abordados são "Porcentagem e Juros", sendo que o estudante deve aplicar aumentos percentuais sucessivos para resolver a questão. A sentença descritora da questão exige que o candidato determine o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020, considerando os aumentos percentuais de 7,2% sobre

Questão 157

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R\$ 1 250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. **Censo 2010**. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

- A** R\$ 1 340,00.
- B** R\$ 1 349,00.
- C** R\$ 1 375,00.
- D** R\$ 1 465,00.
- E** R\$ 1 474,00.

Figura 47 – ENEM 2019 — Questão 157

o valor de 2010 e 10% adicionais para o ano de 2020, de forma a calcular corretamente o valor final projetado.

6.1.4.2 Discussão das Principais Alternativas da Q157 — ENEM 2019.

Solução — Gabarito: Letra E

• A alternativa está **CORRETA**, pois, segundo dados do enunciado, em 2000 a média era de R\$ 1250,00. Em 2010, houve um aumento de 7,2%, logo, a média será de $1250 \times 1,072 = \text{R\$ } 1340,00$. Já em relação ao valor da média em 2010, houve um aumento de 10% em 2020. Assim, a média em 2020 será de $1340 \times 1,1 = \text{R\$ } 1474,00$.

Resposta: E 28,2% de acerto no ES e 26,2% no Brasil.

Distrator D

• A alternativa “D” está **errada**, pois somaram-se os aumentos percentuais (7,2% + 10% = 17,2%), logo, o cálculo realizado foi de $1250 \times 1,172 = \text{R\$ } 1465,00$.

24% de estudantes finalistas do ES e 25% no Brasil marcaram esta alternativa.

Distrator C

- A alternativa “C” está **errada**, pois os cálculos estão incompletos. Somente foi feito o cálculo de $1250 \times 1,1 = \text{R\$ } 1375,00$.

21% de estudantes finalistas do ES e 21% no Brasil marcaram esta alternativa.

Distrator B

- A alternativa “B” está **errada**, pois este valor não pode ser obtido através dos cálculos de porcentagens sucessivas. O erro poderia ter sido somar 10% a 7,2, obtendo 7,92% e somar esta taxa ao salário inicial.

15% de estudantes finalistas do ES e 15% no Brasil marcaram esta alternativa.

Distrator A

- A alternativa “A” está **errada**, pois os cálculos estão incompletos. Somente foi feito o cálculo de $1250 \times 1,072 = \text{R\$ } 1340,00$.

12% de estudantes finalistas do ES e 15% no Brasil marcaram esta alternativa.

6.1.5 Questão 160 — ENEM 2019

A questão 160 do ENEM de 2019 está associada à Competência de Área 1, sendo que visa construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. A habilidade exigida no item é a H3, que consiste em resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos. O item exige conhecimento sobre o Princípio Fundamental da Contagem, em que o respondente deve identificar e aplicar corretamente esse princípio para determinar a quantidade de maneiras diferentes que podem ser formadas 4 duplas. A questão exige do respondente a capacidade de calcular a quantidade de combinações possíveis, utilizando os conceitos de contagem e combinatória.



Figura 48 – Estatística de resposta dos Brasileiros - Q160 - Enem 2019

O item 160 do ENEM 2019, teve apenas 20% de frequência de respostas corretas (gabarito C) dentre os estudantes finalistas das escolas públicas do Brasil. Os distratores A, B e D tiveram, respectivamente, os percentuais 28%, 24% e 22%.

No recorte "estado do Espírito Santo", o percentual de acerto também foi de 20%, e o distrator A teve um índice de 28%, um pouco maior do que foi observado no parâmetro nacional.

Os estudantes de Vitória-ES tiveram 22% de acerto, e ainda assim, não superou aos índices dos itens A, B e D. A ordem dos distratores mais críticos, do mais para o menos crítico, foi D (26%), A (24%) e B (23%).

No Colégio Estadual do Espírito Santo, escola de ensino médio em que lecionei nas turmas de terceira série do turno matutino, no ano de 2019, a taxa de acerto (gabarito

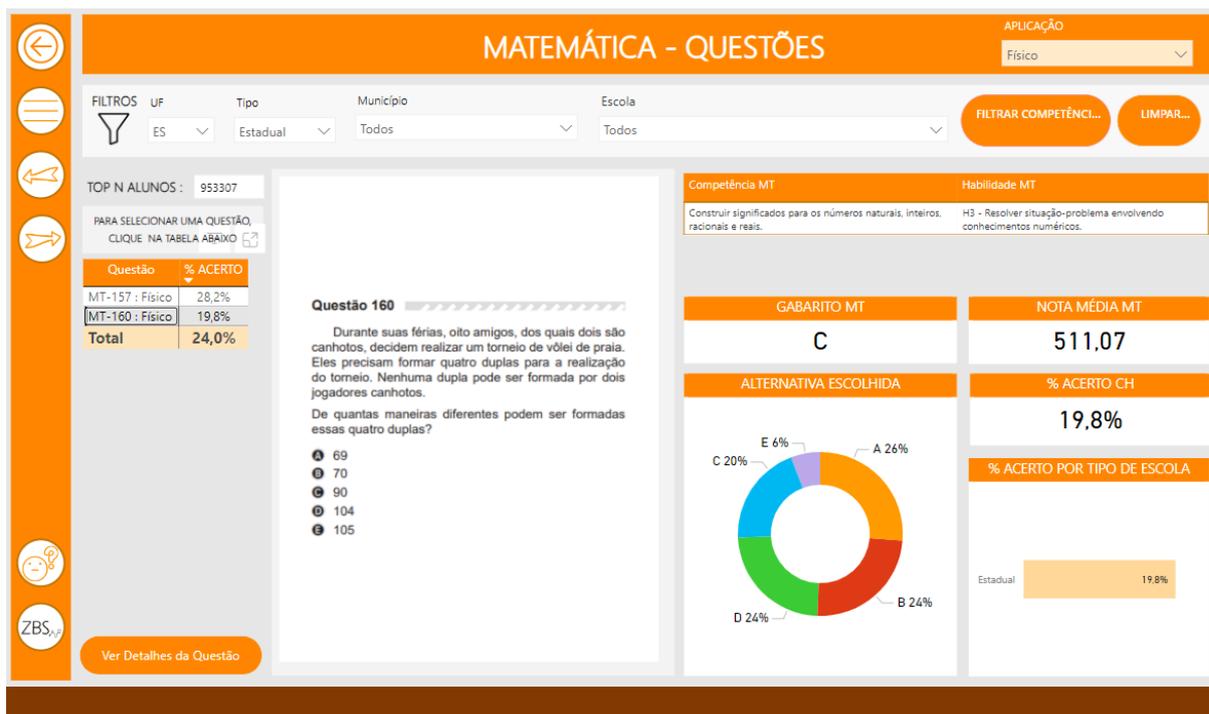


Figura 49 – Estatística de resposta dos Capixabas - Q160 - Enem 2019

C) superou dois dos três distratores que, no parâmetro nacional e estadual, tiveram mais marcações por parte dos respondentes.

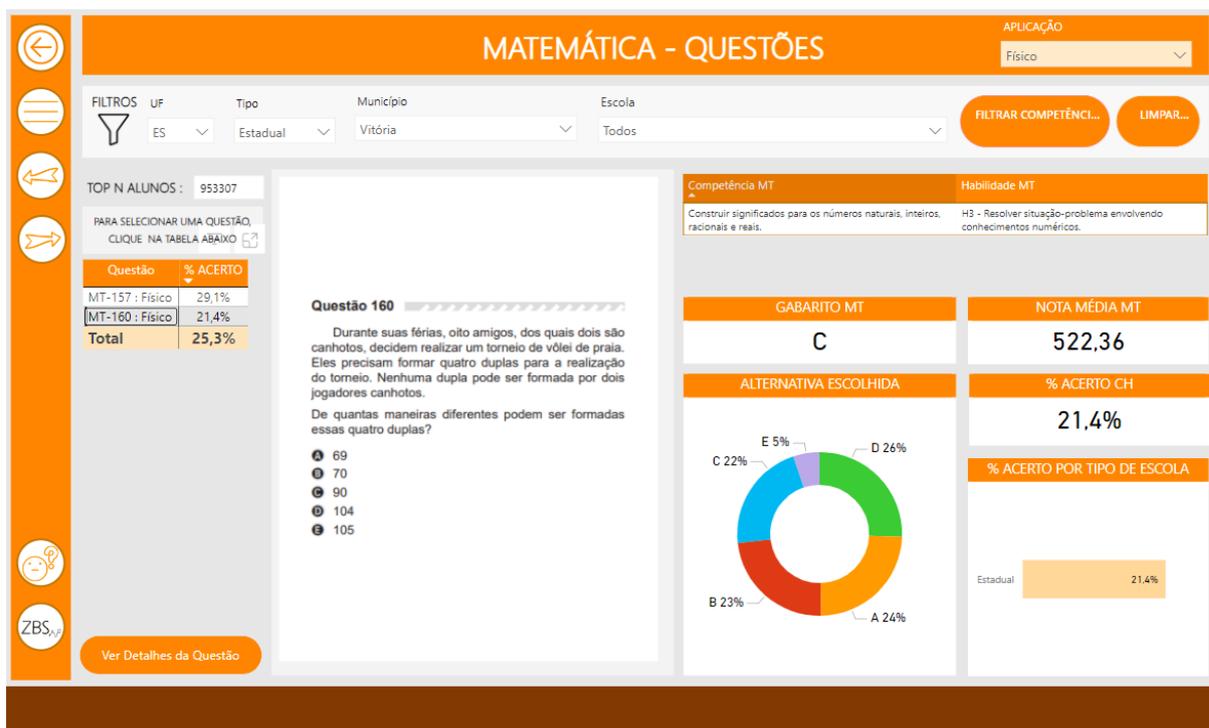


Figura 50 – Estatística de resposta em Vitória - Q160 - Enem 2019

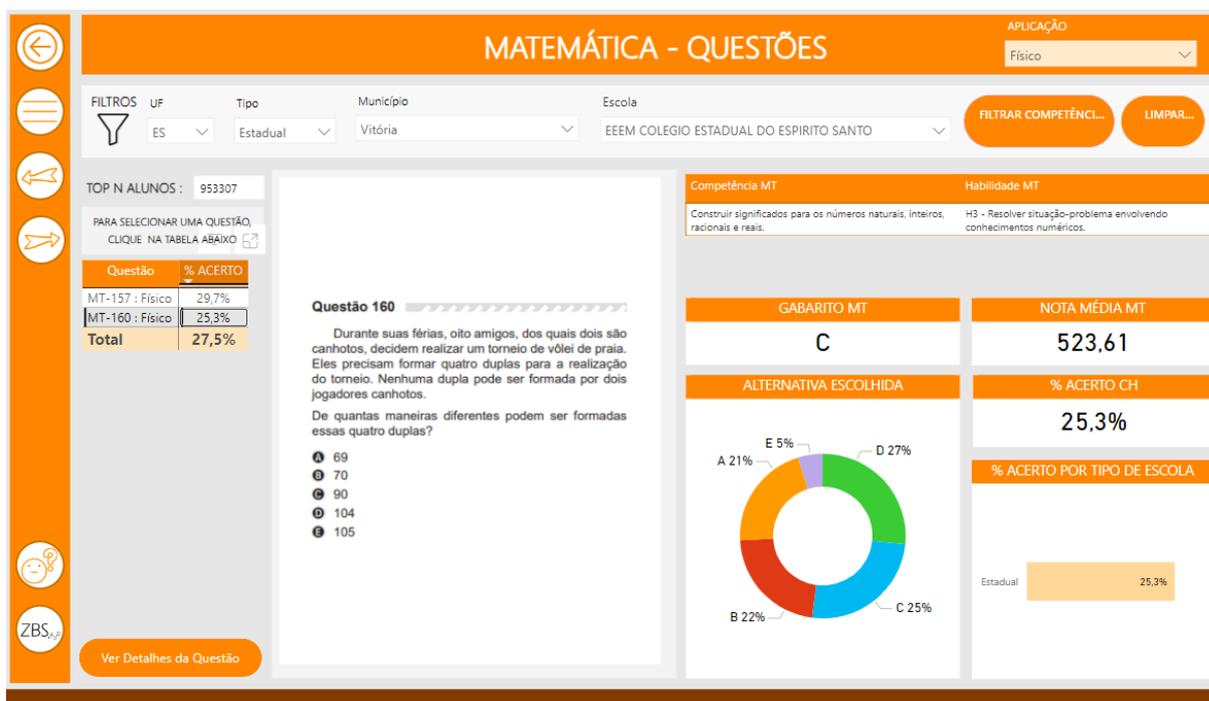


Figura 51 – Estatística Colégio Estadual do ES - Q160 - Enem 2019

Questão 160

Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

- A** 69
- B** 70
- C** 90
- D** 104
- E** 105

Figura 52 – ENEM 2019 - Questão 160

6.1.5.1 Discussão das Principais Alternativas da Q160 — ENEM 2019.

Solução — Gabarito: Letra C

A alternativa C está certa, pois há 90 maneiras diferentes de formar as 4 duplas. Assim, considere a diferença entre dois possíveis casos: – Total possível de 4 duplas:

$$\frac{C_2^8 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{4!} = \frac{28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{24} = 105.$$

– Total possível com a dupla de canhotos (essa dupla é fixa):

$$\frac{C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{3!} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 1}{6} = 15.$$

Logo, a diferença entre os casos:

$$105 - 15 = 90 \text{ formas diferentes.}$$

Resposta: C

Distrator A

A alternativa A está errada, pois considera:

$$C_2^8 - C_2^2 = 70 - 1 = 69.$$

O erro está em subtrair as combinações de forma incorreta.

Distrator B

A alternativa B está errada, pois considera:

$$C_4^8 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.$$

Foram escolhidos 4 dentre 8 elementos, que não corresponde ao enunciado.

Distrator D

A alternativa D está errada, pois considera:

$$\frac{C_2^8 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{4!} = 105 \quad \text{e} \quad C_2^2 = 1, \quad \text{logo,} \quad 105 - 1 = 104.$$

Desconsidera que ao se formar uma dupla com os canhotos, é necessário que se formem 3 duplas com os demais.

Distrator E

A alternativa E está errada, pois considera apenas o total possível de 4 duplas sem fazer a subtração correta, ou seja:

$$\frac{C_2^8 \cdot C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{4!} = 105.$$

O erro está em não considerar a dupla fixa de canhotos.

6.1.6 Questão 159 — ENEM 2018

A questão está inserida na Competência de Área 1, que visa construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. A habilidade avaliada é a H3, que envolve a resolução de situação-problema utilizando conhecimentos numéricos. O objeto de conhecimento abordado é Sequências e Progressões, especificamente o uso de progressão aritmética. A sentença descritora exige que o candidato seja capaz de determinar o total gasto por uma prefeitura na colocação de postes em uma rua, de forma que a disposição dos postes obedeça a uma progressão aritmética, aplicando os conceitos de soma de termos dessa progressão para resolver o problema.

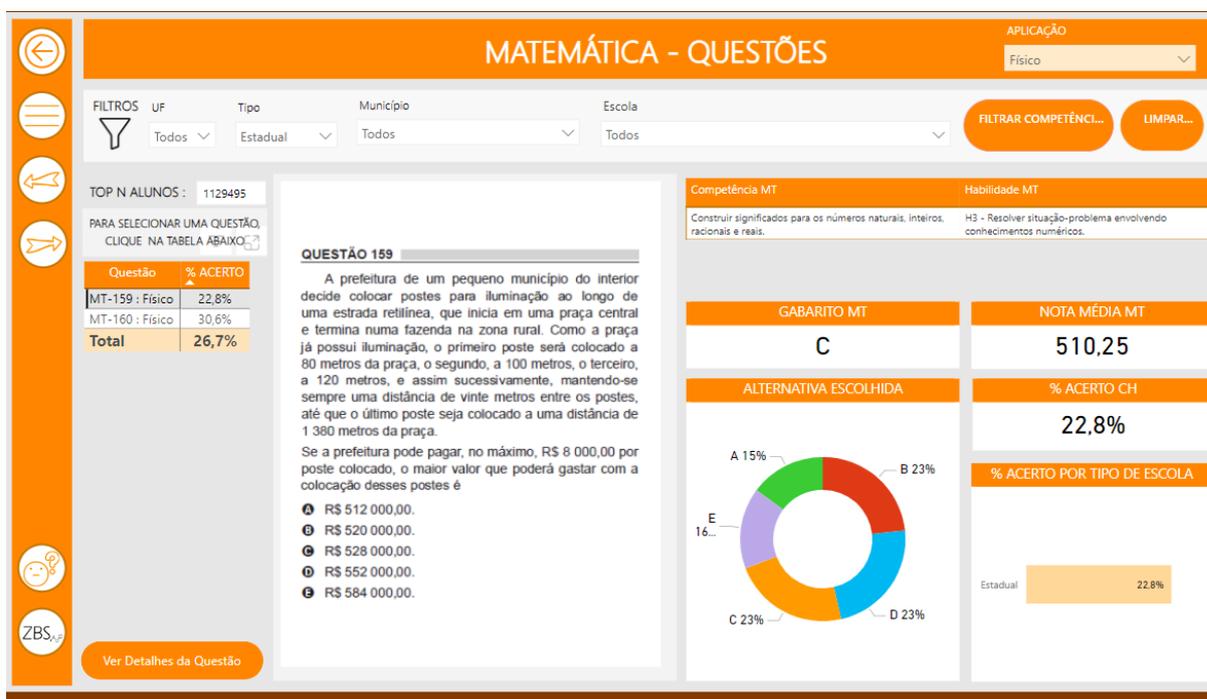


Figura 53 – Estatística de resposta dos Brasileiros - Q159 - Enem 2018

O comportamento de respostas ao item 56 dos estudantes finalistas do município de Cariacica-ES 55 é semelhante ao que foi observado no cenário nacional (figura 53) e no cenário estadual (figura 54) por estudantes do mesmo perfil.

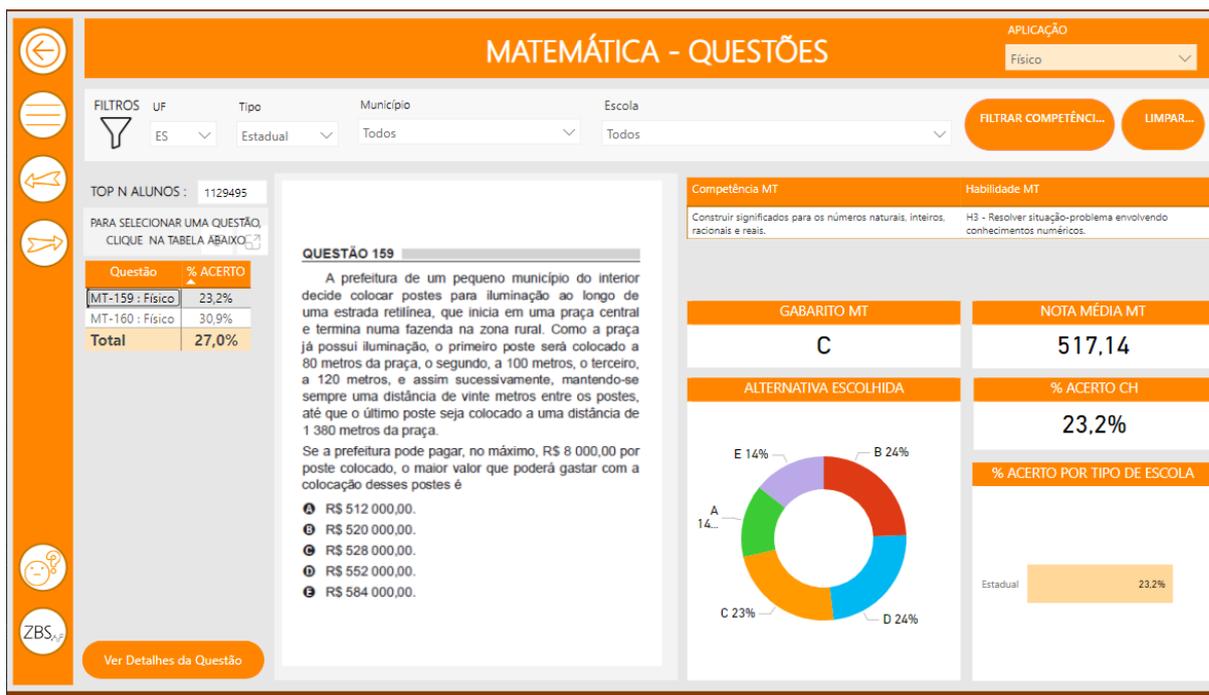


Figura 54 – Estatística de resposta dos Capixabas - Q159 - Enem 2018.

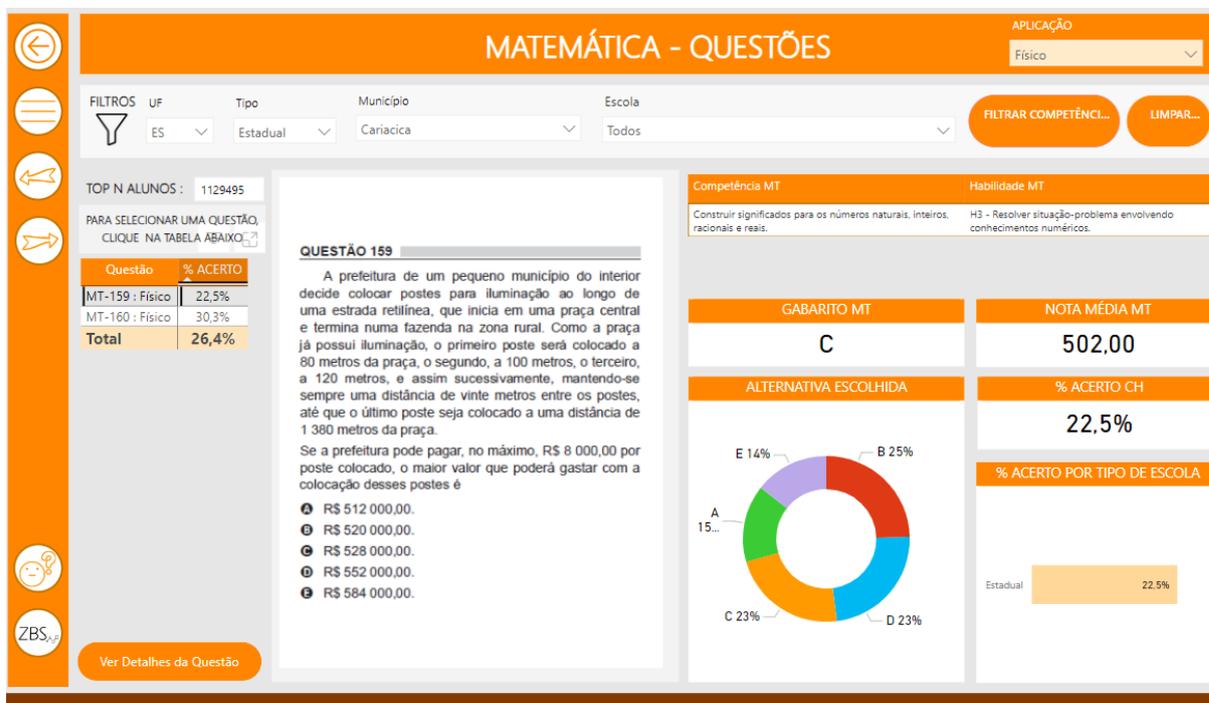


Figura 55 – Estatística de resposta em Cariacica - Q159 - Enem 2018

QUESTÃO 159

A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1 380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

- A** R\$ 512 000,00.
- B** R\$ 520 000,00.
- C** R\$ 528 000,00.
- D** R\$ 552 000,00.
- E** R\$ 584 000,00.

Figura 56 – ENEM 2018 - Questão 159

6.1.6.1 Discussão das Principais Alternativas da Q159 - ENEM 2018

Solução — Gabarito: Letra C

A alternativa C está certa, pois o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça. A partir deste, todos os outros serão colocados a uma distância de 20 metros do anterior, de maneira que as distâncias dos postes ao primeiro formam uma progressão aritmética (PA) com primeiro termo igual a 80 e razão igual a 20. Pela fórmula do termo geral da PA:

$$1380 = 80 + (n - 1) \times 20$$

Resolvendo para n , temos:

$$\begin{aligned} 1380 = 80 + 20(n - 1) &\Rightarrow 1380 - 80 = 20(n - 1) \Rightarrow 1300 = 20(n - 1) \\ n - 1 = \frac{1300}{20} = 65 &\Rightarrow n = 66 \end{aligned}$$

Logo, há 66 postes. O custo total será:

$$66 \times 8\,000 = 528\,000 \text{ reais.}$$

Resposta: C

Distrator A

A alternativa A está errada, pois é obtida ao utilizar como fórmula para o termo geral da PA a expressão incorreta:

$$a_n = a_1 + (n + 1)r,$$

o que leva a um erro de cálculo.

Outra possibilidade é de não ter contado o primeiro e o último poste.

Distrator B

A alternativa B está errada, pois é obtida ao utilizar como fórmula para o termo geral da PA a expressão:

$$a_n = a_1 + nr,$$

desconsiderando que o n -ésimo termo depende de $n - 1$, o que leva ao cálculo incorreto.

Nos sugere também a possibilidade de alguns respondentes não terem contado o primeiro poste.

Distrator D

A alternativa D está errada, pois foi obtida ao dividir 1380 por 20, o que resulta em $1380/20 = 69$, desconsiderando que a sequência de postes começa a 80 metros da praça. Em seguida, foi multiplicado o resultado pelo valor de cada poste, o que levou a uma resposta incorreta.

Distrator E

A alternativa E está errada, pois considera que a divisão foi feita ao somar $1380 + 80$ metros e posteriormente dividir por 20, desconsiderando a fórmula correta da PA. Em seguida, multiplicou o resultado pelo valor de cada poste, gerando um cálculo incorreto.

6.1.7 Questão 160 — ENEM 2018

A questão avalia a Competência de Área 1, que busca construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. A habilidade envolvida é a H3, que trata de resolver situações-problema utilizando conhecimentos numéricos. A sentença descritora da questão requer que o candidato seja capaz de identificar, com base nos andares percorridos por um elevador, o número total de andares de um prédio.



Figura 57 – Estatística de resposta dos Brasileiros - Q160 - Enem 2018

Nesta seção a observação foi do parâmetro nacional com os estados do Espírito Santo, Rio de Janeiro, Santa Catarina, Maranhão, Tocantins e Distrito Federal. E a variação da taxa de acerto foi de 25% a 36%.

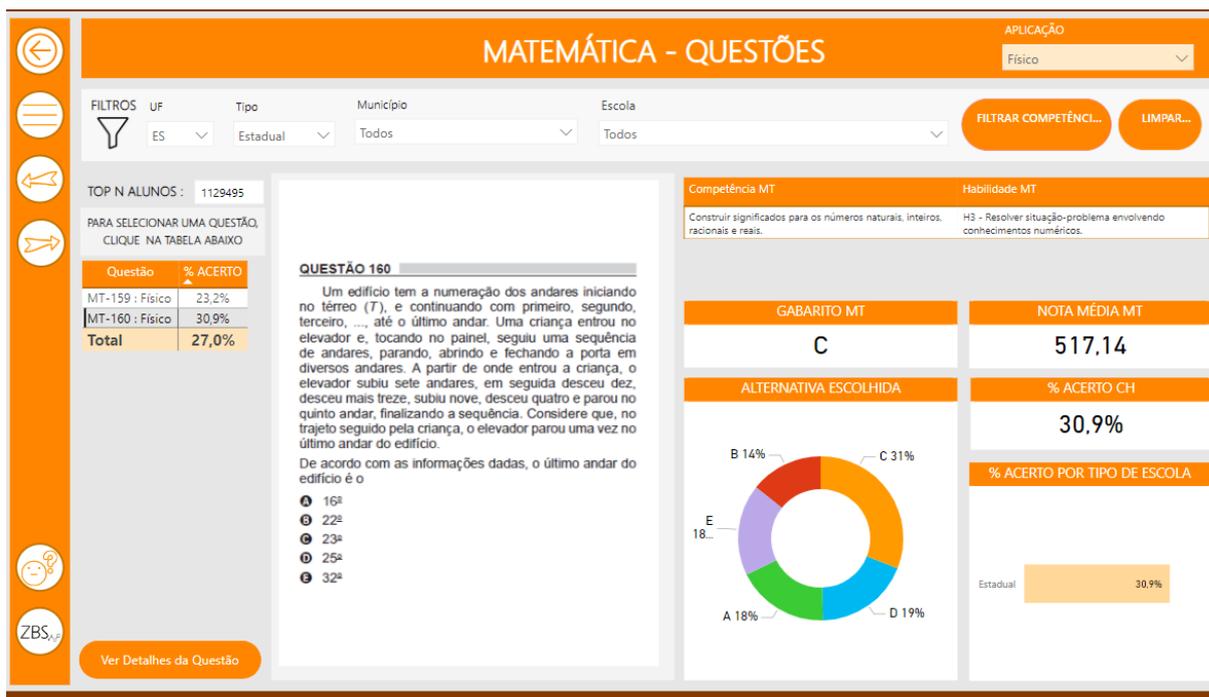


Figura 58 – Estatística de resposta dos Capixabas - Q160 - Enem 2018

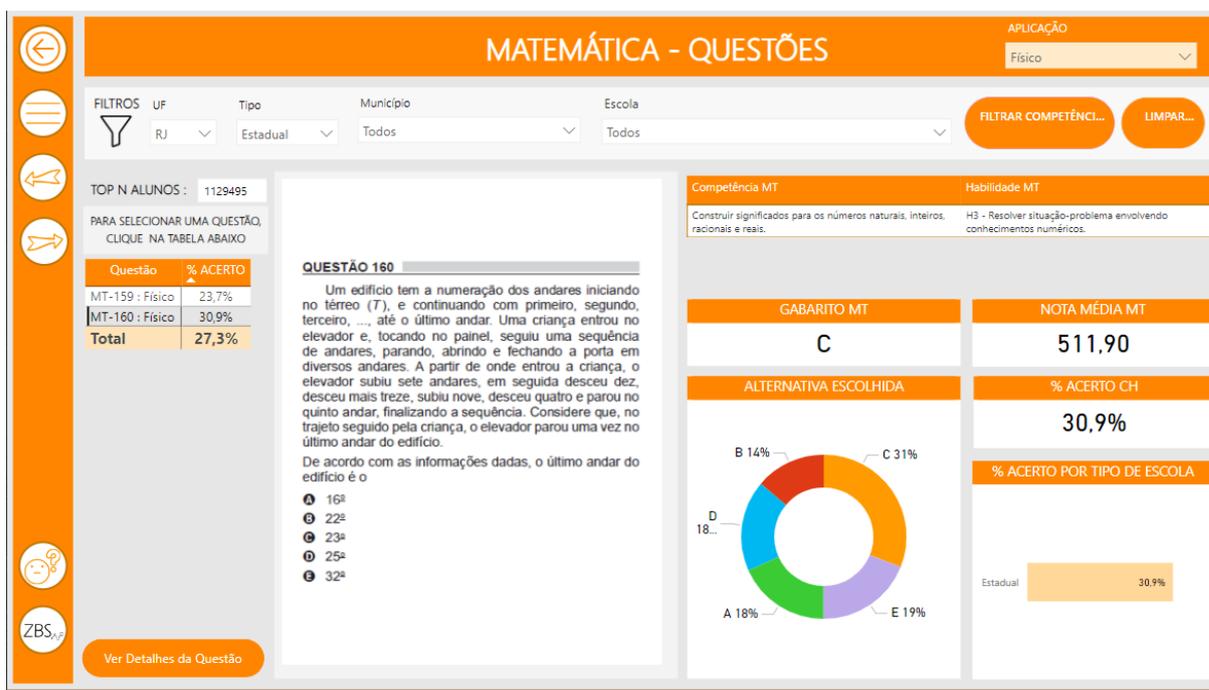


Figura 59 – Estatística de resposta no Rio de Janeiro - Q160 - Enem 2018

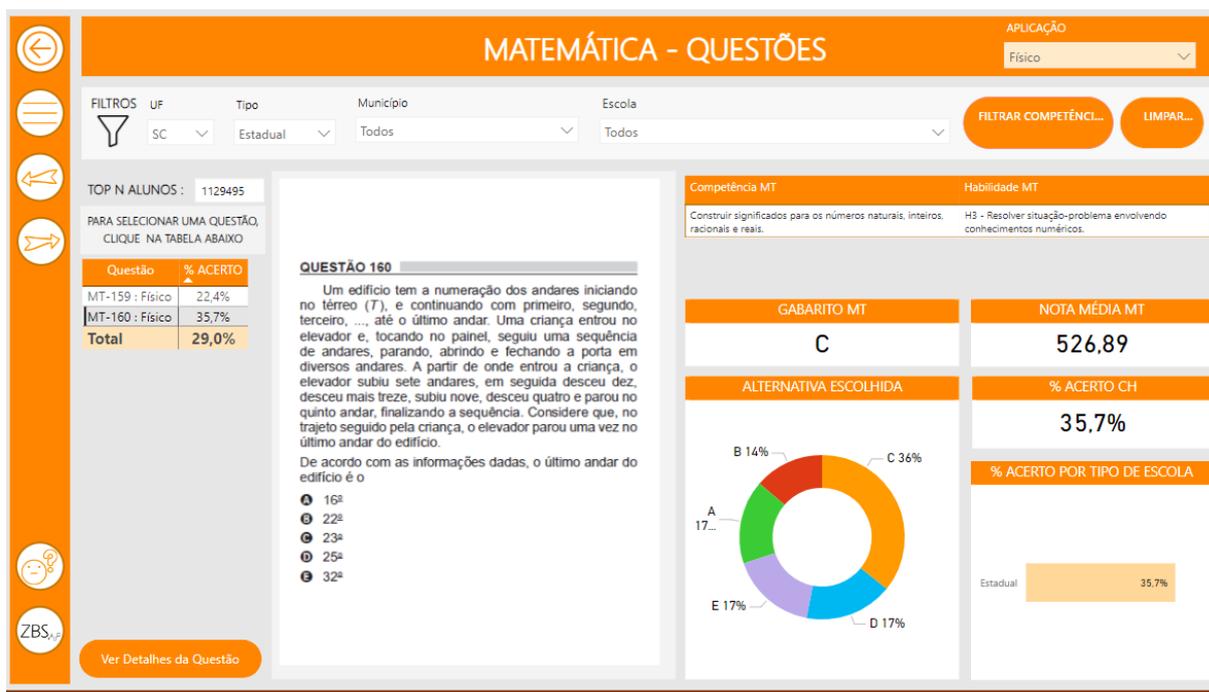


Figura 60 – Estatística de resposta em Santa Catarina - Q160 - Enem 2018

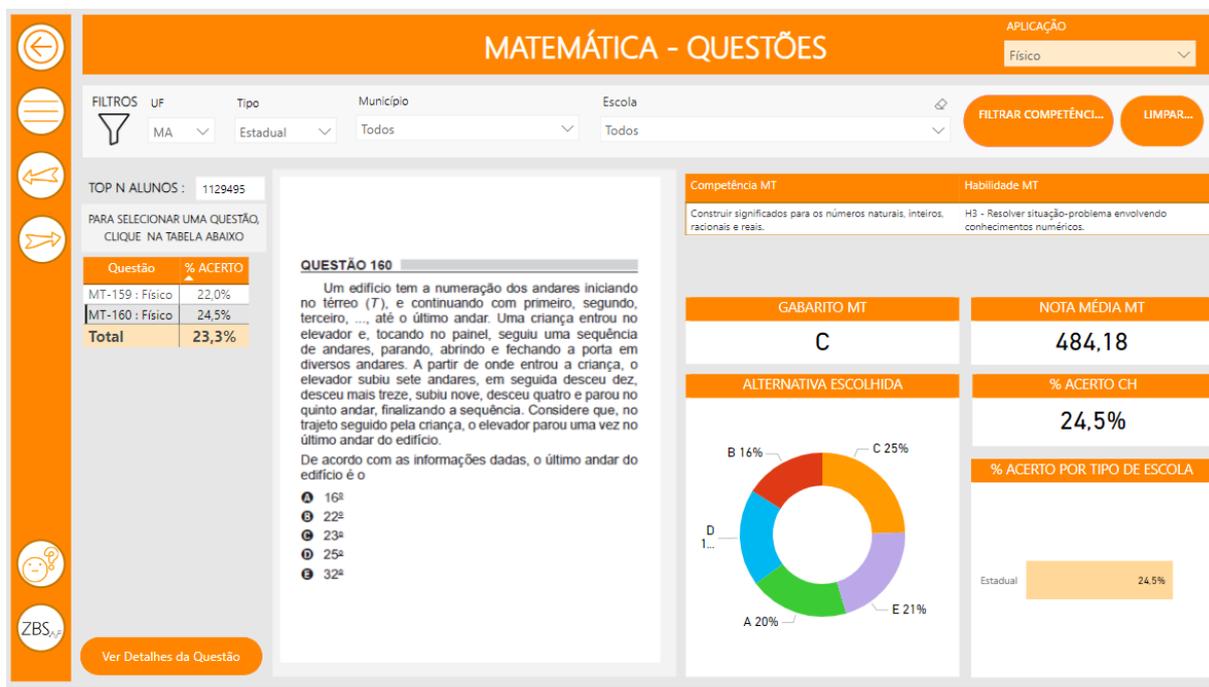


Figura 61 – Estatística de resposta no Maranhão - Q160 - Enem 2018

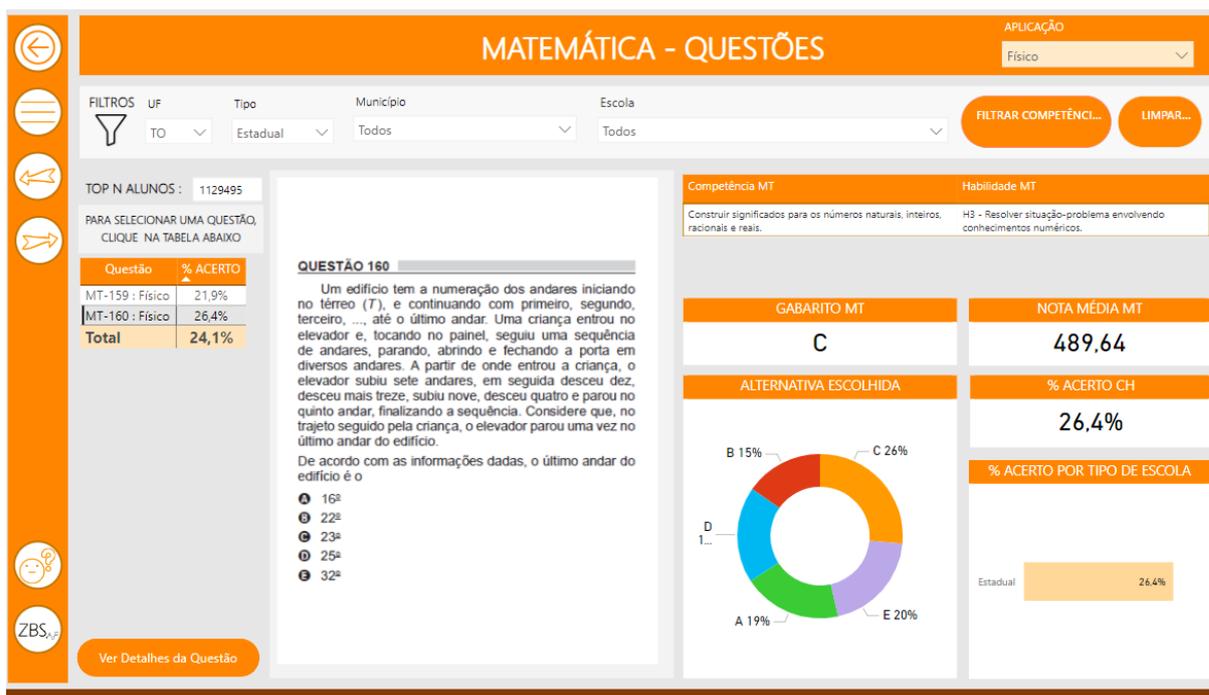


Figura 62 – Estatística de resposta em Tocantins - Q160 - Enem 2018

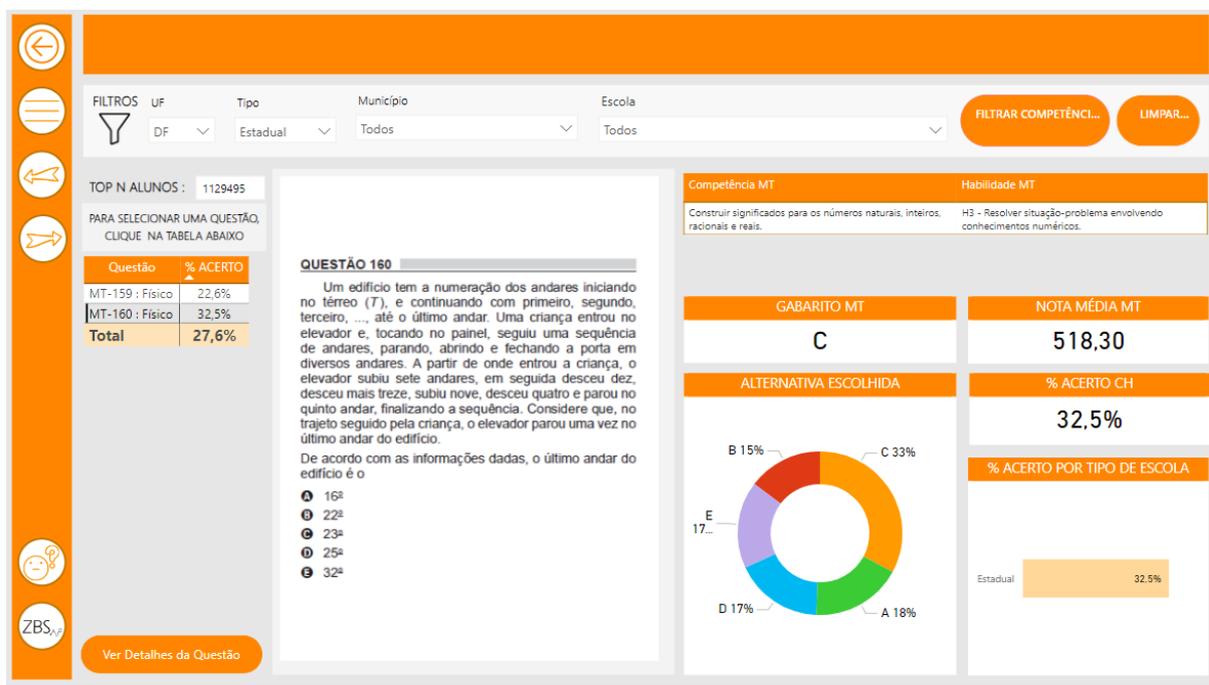


Figura 63 – Estatística de resposta no Distrito Federal - Q160 - Enem 2018

QUESTÃO 160

Um edifício tem a numeração dos andares iniciando no térreo (T), e continuando com primeiro, segundo, terceiro, ..., até o último andar. Uma criança entrou no elevador e, tocando no painel, seguiu uma sequência de andares, parando, abrindo e fechando a porta em diversos andares. A partir de onde entrou a criança, o elevador subiu sete andares, em seguida desceu dez, desceu mais treze, subiu nove, desceu quatro e parou no quinto andar, finalizando a sequência. Considere que, no trajeto seguido pela criança, o elevador parou uma vez no último andar do edifício.

De acordo com as informações dadas, o último andar do edifício é o

- A** 16^º
- B** 22^º
- C** 23^º
- D** 25^º
- E** 32^º

Figura 64 – ENEM 2018 - Questão 160

6.1.7.1 Discussão das Principais Alternativas da Q160 - ENEM 2018

Solução — Gabarito: Letra C

A alternativa C está certa, pois, considerando x o andar em que a criança entrou no elevador, e utilizando movimentos de subida como positivos e movimentos de descida como negativos, temos a seguinte equação:

$$x + 7 - 10 - 13 + 9 - 4 = 5.$$

Resolvendo essa equação:

$$x + (-11) = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 + 11 = 16.$$

Portanto, o andar inicial da criança é o 16º andar. O andar mais alto é obtido somando 7 andares ao andar inicial:

$$16 + 7 = 23.$$

Note que o andar mais alto não pode ser obtido após a subida de 9 andares, pois em dois passos anteriores o elevador havia descido um total de 23 andares.

Resposta: C

Distrator A

A alternativa A está errada, pois este é o número do andar em que a criança entrou no elevador, ou seja, o 16º andar, e não o andar mais alto que o elevador alcançou.

Distrator B

A alternativa B está errada, pois é obtida considerando erroneamente que o térreo é um andar e, em seguida, realizando a subtração $23 - 1 = 22$. O erro está em incluir o térreo como um andar no cálculo.

Distrator D

A alternativa D está errada, pois, embora o candidato obtenha corretamente o andar em que a criança entrou no elevador (16º andar), ele soma 9 andares ao andar inicial ao invés de 7. O candidato desconsidera as duas descidas anteriores à subida de 9 andares. O cálculo realizado foi $16 + 9 = 25$, que está incorreto.

Distrator E

A alternativa E está errada, pois, embora o candidato tenha identificado corretamente o andar em que a criança entrou no elevador (16º andar), ele desconsidera os sinais de descida e soma apenas os valores das subidas:

$$16 + 7 + 9 = 32.$$

O erro aqui está em ignorar as descidas que ocorreram no caminho.

7 Considerações Finais

O erro é um elemento de extrema importância na aprendizagem da matemática e deve ser valorizado. A partir dos equívocos, é possível extrair diversos elementos. Podemos identificar se o problema reside no indivíduo, na área de aplicação ou até mesmo se o método de ensino utilizado não abrange integralmente as competências ou habilidades pré-requisitos para a resolução de determinado item. É fundamental intervir em todos os equívocos dos estudantes, pois, se negligenciados, podem gerar um efeito cumulativo, como diz o ditado popular: “virar uma bola de neve”.

Minha relação com o erro e minha curiosidade em compreender o que leva um estudante a formar um julgamento equivocados se alinham com o conceito de distrator, que é uma resposta incorreta, porém plausível. Diariamente, lido com o erro dos estudantes e na maioria das vezes estimo quantos irão errar. Isso enriquece a aula e abre a oportunidade de realizar uma correção que talvez esses grupo de estudante nunca tiveram.

Este trabalho oferece aos docentes a possibilidade de incluir em suas aulas a discussão sobre os itens avaliativos, ou ao menos analisar os gráficos de respostas de candidatos de edições anteriores e as tendências de respostas. Ressalto a importância da plataforma ZBS Educação na conclusão deste trabalho. A ZBS trouxe informações fundamentais para o desenvolvimento da minha pesquisa. Acredito que por meio dessa plataforma mais docentes e gestores poderão ter acesso a dados relevantes para uma boa abordagem nas aulas preparatórias para ENEM.

Referências

1. BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, Geoffrey. Conhecimento de conteúdo para ensino: O que o torna especial. *Revista de formação de professores*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
2. BRACKMANN, Christian Puhmann. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. 2017.
3. BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Entenda a sua nota no Enem: guia do participante. Brasília, 2021. Para mais informações acesse: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/enem/entenda-a-sua-nota-no-enem-guia-do-participante-2021>>. Acesso em: 2023.
4. BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Guia de elaboração de itens: parâmetros para a construção de itens para avaliações em larga escala. Brasília, 2011. Para mais informações acesse: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/guia-de-elaboracao-de-itens>>.
5. BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Microdados do Enem. Para mais informações acesse: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/microdados/microdados-enem>>.
6. BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Provas e gabaritos do ENEM. Para mais informações acesse: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.
7. CASTRO, Luciano Guimarães Monteiro de. Análise dos microdados do ENEM a partir da teoria da resposta ao item. 2017.
8. CURY, Helena Noronha. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. *Zetetike*, v. 3, n. 1, p. 39-50, 1995.
9. CURY, Helena Noronha; DA SILVA, Priscila Nitibailoff. Análise de erros em resolução de problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 1, n. 1, 2008.
10. CURY, HN; BISOGNIN, E. O conhecimento matemático para o ensino: um estudo com professores em formação inicial e continuada. *Revista Thema*, Rio Grande do Sul, v. 3, pág. 241-249, 2017.

11. DA SILVA FILHO, Manoel Pereira. Etnomatemática: resenha sobre a obra Educação matemática: da teoria à prática de Ubiratam D'Ambrósio. Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco, v. 2, n. 2, 2012.
12. DE ANDRADE, Dalton Francisco; TAVARES, Heliton Ribeiro; DA CUNHA VALLE, Raquel. Teoria da Resposta ao Item: conceitos e aplicações. ABE, São Paulo, 2000. Acesso em: 2024.
13. DE LIMA, Lucas Antonio Mendes; DE MIRANDA, Sandra Regina Figueiredo. Problema da catenária: história, solução e aplicações. 2021.
14. DOS SANTOS, Renato Rodrigues. Análise de erros em questões de Geometria do ENEM: um estudo com alunos do Ensino Médio. 2014.
15. LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006.
16. LUCKESI, Cipriano Carlos. Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. In: LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições*. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2011. p. 189-200.
17. OLIVEIRA, Carolina Moreira et al. Utilização de desafios para o desenvolvimento do pensamento computacional no ensino superior: um relato de experiência. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - SBIE) , 2019. p. 2005.
18. PINTO, Neuza Bertoni. O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar. 1. ed. Campinas: Papyrus, 2000.
19. PROFMAT. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Banco de Dissertações. Para mais informações acesse: <<https://profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/>>.
20. ROSSO, Ademir José; BERTI, Nívia Martins. O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. Bolema-Boletim de Educação Matemática, v. 23, n. 37, p. 1005-1035, 2010.
21. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESPÍRITO SANTO. Plataforma Educação em Foco SEDU. Para mais informações acesse: <<https://educacaoemfoco.sedu.es.gov.br>>. Acesso em: 2023.
22. SILVA, A. G. O.; SALVI, R.; PASSOS, M. M. Concepções do erro matemático em 36 anos de publicações em revistas de educação matemática no Brasil. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 843-870, 2016.

23. SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2. São Paulo: McGrawHill, 1987.
24. TAILLE, Yves de la. O erro na perspectiva piagetiana. In: AQUINO, Julio Groppa (Org.). Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997.
25. TÔRRES, Frederico Carvalho. Uma aplicação da teoria de resposta ao item em um simulado de Matemática no modelo ENEM. 2016.
26. ZBS Educação. ZBS, 2024. Análise Enem 2019 a 2022. Para mais informações acesse: <<https://www.zbs.com.br/enem-anteriores>>.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO



PROFMAT