

Daniel Caxias Carneiro

**Grafos e Redes Sociais: Relato de uma  
Experiência Didático-Prática**

Vitória

2025

Daniel Caxias Carneiro

# **Grafos e Redes Sociais: Relato de uma Experiência Didático-Prática**

Dissertação de mestrado apresentada ao  
PROFMAT como parte dos requisitos exi-  
gidos para a obtenção do título de Mestre em  
Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



**PROFMAT**

Orientador: Prof. Dr. Fábio Julio Valentim

Vitória

2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

C289g Carneiro, Daniel Caxias, 1982-  
Grafos e redes sociais: relato de uma experiência didático prática / Daniel Caxias Carneiro. - 2025.  
59 f. : il.

Orientador: Fábio Julio da Siva Valentim.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Teoria dos grafos. 2. Redes sociais. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Valentim, Fábio Julio da Siva. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**

**Centro de Ciências Exatas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**

# **“Grafos e Redes Sociais: Relato de uma Experiência Didático-Prática”**

**Daniel Caxias Carneiro**

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 15/08/2025 por:

---

Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim  
Presidente – Examinador interno – UFES

---

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior  
Examinador Interno – UFES

---

Prof. Dr. Pedro Matos da Silva  
Examinador Externo – IFES





## Folha de Assinaturas Daniel Caxias Carneiro

Data e Hora de Criação: 14/08/2025 às 08:55:07

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Daniel Caxias Carneiro.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



### Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 5f6e04c3b00ce8193e67c7d5f3ff4a89bb13fb57586215c70352b787e79e4420

[SHA512]: 71555cf3c2ea6dcbce470e39a14bc57a11b87e81b1447e591e439a7ac7dbaeb4fe47fcd7af6d1d257ed0a0af62fe9ff0d31cc61f616a0e42ee764424b56e41a76

### Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



#### ASSINADO - Etereldes Gonçalves Júnior (etereldes.goncalves@ufes.br)

Data/Hora: 16/08/2025 - 09:03:02, IP: 177.221.121.39

[SHA256]: 2841801532ecf3d81d6e8f92da85184957e9396d73ce2835f3e5f98268380db6

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



#### ASSINADO - Fábio Júlio da Silva Valentim (fabio.valentim@ufes.br)

Data/Hora: 15/08/2025 - 16:12:52, IP: 200.137.65.109, Geolocalização: [-20.275000, -40.302932]

[SHA256]: 121d7634422775b8a0102ac587be62e6d492690d538d3daf6c15c646208b160f

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)



#### ASSINADO - Pedro Matos da Silva (pedroms@ifes.edu.br)

Data/Hora: 16/08/2025 - 00:54:50, IP: 187.36.166.189, Geolocalização: [-20.362035, -40.321024]

[SHA256]: f2ec0a07f809073861d580b94b419def6066cf39f0e98e22a4414dae3f063927

Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

### Histórico de eventos registrados neste envelope

16/08/2025 09:03:02 - Envelope finalizado por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 177.221.121.39

16/08/2025 09:03:02 - Assinatura realizada por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 177.221.121.39

16/08/2025 09:02:58 - Envelope visualizado por etereldes.goncalves@ufes.br, IP 177.221.121.39

16/08/2025 00:54:50 - Assinatura realizada por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.166.189

16/08/2025 00:54:17 - Envelope visualizado por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.166.189

15/08/2025 16:12:52 - Assinatura realizada por fabio.valentim@ufes.br, IP 200.137.65.109

15/08/2025 16:12:42 - Envelope visualizado por fabio.valentim@ufes.br, IP 200.137.65.109

15/08/2025 07:00:31 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br

15/08/2025 07:00:31 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br

14/08/2025 08:55:08 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 189.48.23.154

*Dedico este trabalho à minha filha Beatriz.*

*Tá aí, Bia.*

*O meu tá feito.*

*Agora espero o seu.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, à minha esposa, à minha filha, aos meus pais, ao meu irmão e aos amigos e colegas que torceram por mim.

Agradeço também aos novos amigos feitos nessa jornada — Eduardo Alejandro Flores Araya, Márcio Peters e Rogério da Silva Santos — pelos momentos compartilhados ao longo dessa trajetória.

Expresso minha sincera gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Júlio Valentim pelo incentivo constante e pelo apoio integral com que conduziu este trabalho.

Agradeço ainda aos alunos do terceiro ano da Escola Ormanda Gonçalves, que aceitaram participar desta pesquisa e tornaram possível a realização deste estudo.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte deste percurso, deixo aqui meu reconhecimento e minha gratidão.

*“Wir müssen wissen — wir werden wissen.”*  
*“Devemos saber — saberemos.”*  
*(David Hilbert, discurso em Königsberg, 1930)*

# Resumo

Esta dissertação apresenta uma abordagem exploratória da aplicação da Teoria dos Grafos na análise de redes sociais em ambiente escolar. A partir de dados coletados via questionário sociométrico em quatro turmas do Ensino Médio, foram construídos diferentes grafos representando relações de liderança, dedicação, colaboração em sala e preferências para trabalhos em grupo. Utilizando métricas de centralidade como PageRank e betweenness, o estudo investiga padrões de interação entre estudantes, validando os resultados com eleições formais de representante de turma. Adicionalmente, adapta-se o conceito do número de Erdős para o contexto escolar. Os resultados revelam percepções sobre a estrutura social das turmas e oferecem aos professores ferramentas quantitativas para otimizar dinâmicas colaborativas.

**Palavras-chave:** Teoria dos Grafos; Análise de Redes Sociais; Ensino de Matemática; PageRank; Número de Erdős; Graus de Separação.

# Abstract

This dissertation presents an exploratory approach to the application of Graph Theory to the analysis of social networks in a school environment. Based on data collected through a sociometric questionnaire administered to four high school classes, different graphs were constructed to represent relationships of leadership, dedication, collaboration in the classroom, and preferences for group work. Using centrality metrics such as PageRank and betweenness, the study investigates interaction patterns among students, relating these findings to the formal elections of class representatives. Additionally, the concept of the Erdős number is adapted to the school context. The results reveal relevant insights into the social structure of the classes and offer teachers quantitative tools to better understand and optimize collaborative dynamics.

**Keywords:** Graph Theory; Social Network Analysis; Mathematics Education; PageRank; Erdős Number; Degrees of Separation.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo direcionado utilizado como exemplo ao longo deste capítulo. . . .	18
Figura 2 – Distribuição dos graus de entrada de $G$ . . . . .	37
Figura 3 – Boxplot e outliers de $G$ . . . . .	37
Figura 4 – Nós de $G$ ordenados pelo grau de entrada. . . . .	38
Figura 5 – Visualização do Grafo $G$ com tamanho e a cor dos nós proporcionais aos seus graus de entrada . . . . .	41
Figura 6 – Visualização do grafo $G$ com o tamanho dos nós proporcional ao valor de PageRank. . . . .	42
Figura 7 – Visualização do grafo $G$ com o tamanho dos nós proporcional à centralidade de proximidade. . . . .	43
Figura 8 – Visualização do grafo $G$ com o tamanho dos nós proporcional à centralidade de intermediação. . . . .	44
Figura 9 – Visualização do grafo $G_{\text{colab}}$ . . . . .	55

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Grau de entrada e grau de saída dos vértices do grafo da Figura 1 . . . .	19
Tabela 2 – Nós Principais por grau - $G$ . . . . .	36
Tabela 3 – Recorte da Matriz de Adjacência de $G_{\text{mult}}^{(1)}$ — foco em outliers . . . . .	39
Tabela 4 – Estatísticas — $G$ . . . . .	40
Tabela 5 – Nós principais por PageRank de $G$ . . . . .	42
Tabela 6 – Nós principais por proximidade de $G$ . . . . .	43
Tabela 7 – Nós principais por intermediação de $G$ . . . . .	44
Tabela 8 – Comparativo das centralidades . . . . .	45
Tabela 9 – Estatísticas do grafo de indicações múltiplas da turma 3M2. . . . .	47
Tabela 10 – Maiores valores de centralidade nas indicações múltiplas da turma 3M2. . . . .	47
Tabela 11 – Estatísticas do grafo de indicações múltiplas da turma 3M3. . . . .	49
Tabela 12 – Maiores valores de centralidade nas indicações múltiplas da turma 3M3. . . . .	49
Tabela 13 – Estatísticas do grafo de indicações múltiplas da turma 3M4. . . . .	50
Tabela 14 – Maiores valores de centralidade nas indicações múltiplas da turma 3M4. . . . .	50
Tabela 15 – Estatísticas estruturais do grafo de ajuda $G_{\text{ajuda}}$ . . . . .	52
Tabela 16 – Estatísticas estruturais do grafo de colaboração não direcionado $G_{\text{colab}}$ . . . . .	53
Tabela 17 – Resumo de nós centrais no grafo de colaboração $G_{\text{colab}}$ . . . . .	53
Tabela 18 – Índice de Colaboração Escolar no grafo $G_{\text{colab}}$ (referência: 74BM) . . . . .	54

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Problema de Pesquisa</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>15</b>
1.2.1	Objetivo Geral	15
1.2.2	Objetivos Específicos	15
<b>1.3</b>	<b>Estrutura da Dissertação</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Definições Básicas</b>	<b>17</b>
2.1.1	Grafo, vértices e arestas	17
<b>2.2</b>	<b>Propriedades Básicas do Grafo</b>	<b>19</b>
2.2.1	Número de vértices e arestas	20
2.2.2	Densidade	20
2.2.3	Comentários sobre grafos dirigidos	20
<b>2.3</b>	<b>Caminhos e Distâncias</b>	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Métricas de Centralidade</b>	<b>22</b>
<b>2.5</b>	<b>Índice de Colaboração Escolar</b>	<b>27</b>
<b>2.6</b>	<b>Implementação com NetworkX</b>	<b>28</b>
2.6.1	Criação do Grafo	28
2.6.2	Definições Básicas	28
2.6.3	Propriedades Básicas	29
2.6.4	Caminhos e Distâncias	29
2.6.5	Métricas de Centralidade	29
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>31</b>
<b>3.1</b>	<b>Caracterização da Pesquisa</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>Participantes e Contexto</b>	<b>31</b>
<b>3.3</b>	<b>Instrumentos de Coleta de Dados</b>	<b>32</b>
<b>3.4</b>	<b>Construção dos Grafos</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICO-PRÁTICA</b>	<b>36</b>
<b>4.1</b>	<b>Indicações e Estrutura da Rede — 3M1</b>	<b>36</b>
4.1.1	Perfis de Centralidade — Turma 3M1	41
4.1.2	Comparativo entre as Medidas de Centralidade	45
4.1.3	Voto Único — Turma 3M1	45
4.1.4	Comparativo PageRank vs. Voto Único — Turma 3M1	46

<b>4.2</b>	<b>Resultados da Turma 3M2</b> . . . . .	<b>46</b>
4.2.1	Propriedades Gerais da Rede — Indicações Múltiplas . . . . .	46
4.2.2	Principais Valores de Centralidade . . . . .	47
4.2.3	Voto Único — Turma 3M2 . . . . .	47
4.2.4	Comparação Entre Indicações Múltiplas e Voto Único . . . . .	48
<b>4.3</b>	<b>Resultados da Turma 3M3</b> . . . . .	<b>48</b>
4.3.1	Propriedades Gerais da Rede — Indicações Múltiplas . . . . .	48
4.3.2	Principais Valores de Centralidade . . . . .	49
4.3.3	Voto Único — Turma 3M3 . . . . .	49
4.3.4	Comparação Entre Indicações Múltiplas e Voto Único . . . . .	50
<b>4.4</b>	<b>Resultados da Turma 3M4</b> . . . . .	<b>50</b>
4.4.1	Propriedades Gerais da Rede — Indicações Múltiplas . . . . .	50
4.4.2	Principais Valores de Centralidade . . . . .	50
4.4.3	Voto Único — Turma 3M4 . . . . .	51
4.4.4	Comparação Entre Indicações Múltiplas e Voto Único . . . . .	51
<b>4.5</b>	<b>Colaboração Acadêmica — Turma 3M2</b> . . . . .	<b>51</b>
4.5.1	Rede de Apoio em Dúvidas . . . . .	51
4.5.2	Rede de Colaboração em Projetos e Índice de Colaboração Escolar . . . . .	52
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>5.1</b>	<b>Síntese e Contribuições</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>5.2</b>	<b>Limitações, Implicações Práticas e Considerações Finais</b> . . . . .	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>58</b>

# 1 Introdução

A Matemática, muitas vezes percebida pelos estudantes como uma disciplina abstrata e distante de sua realidade, ganha um novo significado quando seus conceitos são aplicados a situações cotidianas e relevantes. No contexto da Educação Básica, a busca por metodologias que tornem o aprendizado mais engajador e significativo é um desafio constante. É nesse cenário que a Teoria dos Grafos e a Análise de Redes, campos da Matemática que estudam as relações e conexões entre elementos, têm grande utilidade na abordagem de problemas reais e complexos de forma visual e intuitiva. (BENJAMIN; CHARTRAND; ZHANG, 2017; NETTO; JURKIEWICZ, 2017; CHARTRAND, 2012)

A presente dissertação, intitulada *Grafos e Redes: relato de uma experiência didático-prática*, descreve uma prática pedagógica desenvolvida em sala de aula, que buscou aproximar os estudantes do Ensino Médio de ideias da Teoria dos Grafos e da Análise de Redes Sociais. Vale destacar que o objetivo desta experiência não foi ensinar a Teoria dos Grafos e Redes com todas as formalidades matemáticas; a intenção foi explorar a aplicabilidade desses conceitos de forma acessível e contextualizada. Longe de uma abordagem puramente teórica, esta experiência emergiu de uma necessidade prática e concreta do ambiente escolar: a eleição de representantes de turma. Ao invés de um processo convencional, propusemos uma simulação que utilizou os princípios das redes sociais para analisar as interações e a percepção de influência entre os próprios alunos.

Neste trabalho, será explorado de que forma ideias como o algoritmo PageRank e o Número de Erdős podem ser contextualizadas e compreendidas pelos estudantes a partir de suas próprias dinâmicas sociais.

A experiência não se limitou à aplicação de questionários e à análise de dados; ela culminou no desenvolvimento de uma ferramenta interativa que permitiu aos alunos visualizar e explorar as redes sociais de suas turmas, transformando dados abstratos em percepções sobre liderança, colaboração e conexão.

Este estudo se justifica pela sua capacidade de promover um Ensino de Matemática aplicada, ao demonstrar como a Teoria dos Grafos e a Análise de Redes podem ser utilizadas para modelar e compreender fenômenos sociais, tornando a Matemática uma ferramenta significativa para os estudantes.

## 1.1 Problema de Pesquisa

Como a aplicação da Teoria dos Grafos e da Análise de Redes Sociais, por meio de uma experiência didático-prática em sala de aula, pode auxiliar estudantes do Ensino

Médio a compreenderem conceitos de redes e, ao mesmo tempo, fornecer aos educadores achados sobre as dinâmicas sociais de suas turmas?

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Documentar e analisar uma experiência didático-prática de aplicação da Teoria dos Grafos e da Análise de Redes Sociais em sala de aula, visando a compreensão de alguns conceitos de redes por estudantes do Ensino Médio e o desenvolvimento de um recurso educacional para educadores.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Descrever a metodologia de coleta de dados sociométricos em turmas do Ensino Médio, utilizando um cenário real de eleição de representantes;
- Detalhar a construção de grafos representativos das relações sociais e de influência entre os estudantes;
- Analisar as redes sociais geradas a partir de métricas como PageRank e a adaptação do Número de Erdős, interpretando os resultados no contexto das dinâmicas de sala de aula;
- Apresentar o desenvolvimento de uma ferramenta interativa que permita a visualização e exploração dessas redes pelos estudantes e educadores;

## 1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está organizada nos seguintes capítulos:

- **Capítulo 1: Introdução** — Apresenta o contexto da pesquisa, o problema, os objetivos e a justificativa, destacando a natureza didático-prática do trabalho e a abordagem não formal da teoria;
- **Capítulo 2: Fundamentação Teórica** — Aborda os conceitos essenciais da Teoria dos Grafos e da Análise de Redes Sociais, com foco em sua relevância para o ambiente educacional e sem aprofundamento excessivo no rigor matemático;
- **Capítulo 3: Metodologia** — Detalha os procedimentos da experiência didático-prática, incluindo a coleta de dados, a construção dos grafos e o desenvolvimento da ferramenta interativa;

- **Capítulo 4: Análise das Indicações para Representante de Turma** — Apresenta e discute os resultados da análise das redes sociais das turmas, com base nas métricas aplicadas e nas observações da experiência;
- **Capítulo 5: Conclusões** — Sintetizar os principais aprendizados da experiência, discute suas contribuições como recurso educacional e apresenta as limitações.

## 2 Fundamentação Teórica

A Teoria dos Grafos surgiu com Euler, em 1736, a partir do famoso problema das pontes de Königsberg, e tornou-se desde então uma ferramenta central para modelar relações entre objetos e descrever estruturas formadas por suas conexões.

Enquanto Boaventura Netto e Jurkiewicz ([NETTO; JURKIEWICZ, 2017](#)) se concentram na aplicação da teoria dos grafos para a resolução de problemas, obras de divulgação como *Linked* ([BARABÁSI, 2009](#)) e *Seis graus de separação* ([WATTS, 2009](#)) exploram o impacto mais amplo da ciência das redes no cotidiano, tornando suas ideias centrais acessíveis a um público maior.

No campo das redes sociais, textos como Lemieux e Ouimet ([LEMIEUX, 2004](#)) discutem propriedades estruturais e a interpretação sociológica das interações.

Este capítulo reúne as noções teóricas necessárias para compreender os resultados apresentados posteriormente. A exposição será direta e gradual, com uso de um único exemplo simples ao longo das seções para facilitar a visualização das definições. Não incluiremos demonstrações formais, mas apresentaremos os conceitos, métricas e estruturas essenciais para a leitura dos capítulos seguintes. Todos os cálculos numéricos apresentados nesta dissertação foram realizados com apoio da biblioteca *NetworkX*, em Python.

A seguir, iniciamos pelas definições básicas de grafos, passando por medidas estruturais, conceitos de caminho e distância, e finalizando com as métricas de centralidade e o índice de colaboração utilizado nesta dissertação.

### 2.1 Definições Básicas

Nesta seção reunimos as noções fundamentais da Teoria dos Grafos que serão utilizadas ao longo do trabalho. As definições são apresentadas de forma direta e acompanhadas de um único exemplo simples, que aparecerá repetidamente nas subseções seguintes.

#### 2.1.1 Grafo, vértices e arestas

Um grafo é um par ordenado  $G = (V, E)$ , no qual  $V$  é o conjunto de vértices (ou nós) e  $E$  é o conjunto de arestas. Cada aresta representa uma relação entre dois vértices.

As arestas podem ser:

- **não direcionadas**, quando representam uma relação mútua;

- **direcionadas**, quando indicam uma relação com sentido específico, representada como um par ordenado  $(u, v)$ .

No contexto desta dissertação, todos os grafos são **direcionados**, pois o fato de um estudante indicar outro não implica reciprocidade.

Neste capítulo utilizaremos um único grafo simples como referência para todas as definições apresentadas. Esse grafo é exibido na Figura 1.

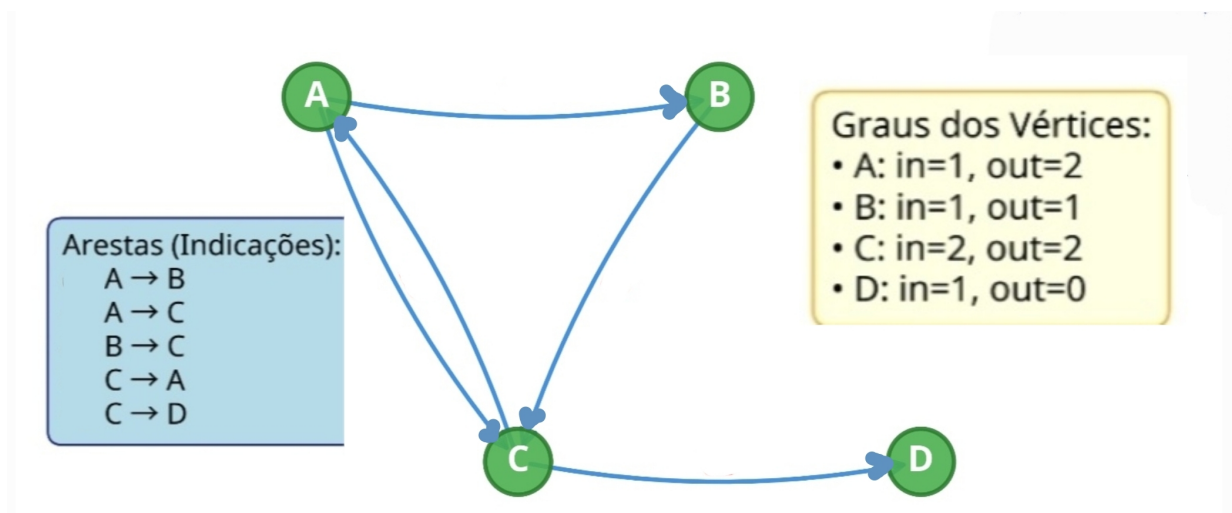


Figura 1 – Grafo direcionado utilizado como exemplo ao longo deste capítulo.

No grafo de exemplo temos:

$$V = \{A, B, C, D\}, \quad E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (C, A), (C, D)\}.$$

Cada vértice representa um estudante e cada aresta indica uma ação orientada (realizada no contexto desta pesquisa como uma indicação de um estudante a outro).

## Matriz de Adjacência

A matriz de adjacência  $A$  de um grafo com  $n$  vértices é uma matriz  $n \times n$  em que cada entrada  $a_{ij}$  é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta de } v_i \text{ para } v_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para o grafo da Figura 1, a matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Grau de Entrada e Grau de Saída

Em grafos direcionados, é útil distinguir dois tipos de grau para cada vértice:

- **Grau de entrada** de um vértice  $v$  (denotado por  $d_{\text{in}}(v)$ ): é o número de arestas que *chegam* a  $v$ .
- **Grau de saída** de um vértice  $v$  (denotado por  $d_{\text{out}}(v)$ ): é o número de arestas que *saem* de  $v$ .

Seja  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o conjunto de vértices e seja  $A = (a_{ij})$  a matriz de adjacência do grafo, então podemos escrever:

$$d_{\text{in}}(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad \text{e} \quad d_{\text{out}}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

No grafo da Figura 1, adotamos a seguinte ordem para os vértices:

$$v_1 = A, \quad v_2 = B, \quad v_3 = C, \quad v_4 = D.$$

Usando a matriz de adjacência já apresentada, obtemos a tabela abaixo:

Tabela 1 – Grau de entrada e grau de saída dos vértices do grafo da Figura 1

Vértice	Grau de entrada $d_{\text{in}}$	Grau de saída $d_{\text{out}}$
A	1	2
B	1	1
C	2	2
D	1	0

Nesse contexto, por exemplo,  $d_{\text{in}}(C) = 2$  porque há duas arestas chegando ao vértice  $C$  ( $A \rightarrow C$  e  $B \rightarrow C$ ), enquanto  $d_{\text{out}}(A) = 2$  porque, a partir de  $A$ , saem duas arestas ( $A \rightarrow B$  e  $A \rightarrow C$ ).

## 2.2 Propriedades Básicas do Grafo

Nesta seção apresentamos algumas quantidades básicas que descrevem a estrutura de um grafo. Todas serão aplicadas ao grafo da Figura 1, que permanecerá como exemplo de referência ao longo deste capítulo.

### 2.2.1 Número de vértices e arestas

Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado, onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas. Denotamos:

$$|V| = n, \quad |E| = m.$$

Para o grafo da Figura 1, temos:

$$n = 4 \quad \text{e} \quad m = 5.$$

### 2.2.2 Densidade

A densidade de um grafo indica a proporção entre o número de arestas existentes e o número máximo de arestas possíveis. Um laço é uma aresta do tipo  $(v, v)$ , que conecta um vértice a ele mesmo; esse tipo de aresta não aparece neste trabalho. Para gráficos direcionados sem laços, a expressão é:

$$\text{dens}(G) = \frac{m}{n(n-1)}.$$

Aplicando ao grafo da Figura 1:

$$\text{dens}(G) = \frac{5}{4 \cdot 3} \approx 0,417.$$

Esse valor indica que cerca de 41,7% das arestas possíveis estão presentes no grafo.

Em redes sociais, densidade é frequentemente interpretada como um indicador de coesão estrutural. Como apontam Lemieux e Ouimet ([LEMIEUX, 2004](#)), valores mais altos tendem a refletir maior integração entre os atores, enquanto densidades muito baixas são típicas de redes sociais reais.

### 2.2.3 Comentários sobre grafos dirigidos

Como cada aresta possui um sentido, os graus de entrada e de saída podem diferir significativamente. No exemplo da Figura 1, por exemplo, o vértice A aponta para dois colegas, mas recebe apenas uma indicação — uma assimetria típica de grafos direcionados. Esse tipo de estrutura é comum em redes sociais, relações de colaboração e sistemas de recomendação, e será central para as análises realizadas nesta dissertação.

## 2.3 Caminhos e Distâncias

O estudo de caminhos e distâncias em grafos ajuda a descrever como um vértice consegue alcançar outro seguindo as arestas disponíveis. Essas noções serão usadas depois, na interpretação dos resultados apresentados nos próximos capítulos.

### Caminhos e Comprimento

Um caminho é apenas uma sequência de vértices em que cada vértice está ligado ao próximo por uma aresta direcionada. O número de arestas percorridas é chamado de comprimento do caminho.

De forma mais geral, em um grafo direcionado  $G = (V, E)$ , um caminho é uma sequência

$$(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

tal que, para cada par consecutivo, existe uma aresta direcionada  $(v_i, v_{i+1}) \in E$ . O número  $k - 1$  é chamado de **comprimento do caminho**.

No grafo da Figura 1, por exemplo:

$$A \rightarrow C \rightarrow D$$

é um caminho de comprimento 2.

### Caminho Mínimo e Distância Geodésica

A **distância geodésica** entre dois vértices  $u$  e  $v$ , denotada por  $d(u, v)$ , é simplesmente o menor comprimento entre todos os caminhos direcionados que ligam  $u$  a  $v$ . Se não existe qualquer caminho, definimos  $d(u, v) = \infty$ .

No grafo da Figura 1:

$$d(A, D) = 2, \quad d(B, A) = 2, \quad d(C, B) = 2.$$

### Diâmetro

O **diâmetro** do grafo é a maior distância geodésica entre vértices que podem se alcançar:

$$\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V} d(u, v).$$

No grafo da Figura 1:

$$\text{diam}(G) = 2.$$

## Caminho Médio

O caminho médio mostra quantos passos, em média, separam dois vértices que conseguem se alcançar dentro do grafo. A ideia é simples: para cada par de vértices ligados por algum percurso, contamos a distância entre eles. No final, fazemos a média dessas distâncias. Essa medida indica quão próximos os vértices estão uns dos outros, considerando apenas os pares alcançáveis.

O **caminho médio** sintetiza a distância média entre pares de vértices com distância finita:

$$L(G) = \frac{1}{|\{(u, v) : u \neq v, d(u, v) < \infty\}|} \sum_{u \neq v} d(u, v).$$

Aqui está o que isso significa:

- O conjunto  $\{(u, v) : u \neq v, d(u, v) < \infty\}$  representa todos os pares de vértices  $(u, v)$  diferentes entre si que têm um caminho finito entre eles (ou seja, é possível chegar de  $u$  a  $v$ ).
- $|\{(u, v) : u \neq v, d(u, v) < \infty\}|$  é o número total desses pares.
- $d(u, v)$  é a distância entre o vértice  $u$  e o vértice  $v$ , ou seja, o comprimento (número de passos) do caminho mais curto entre eles.
- A somatória  $\sum_{u \neq v} d(u, v)$  soma as distâncias para todos os pares considerados.
- Dividindo essa soma pelo número total de pares com caminho finito, obtemos a distância média (ou caminho médio)  $L(G)$ .

Para o grafo da Figura 1:

$$L(G) = \frac{10}{6} \approx 1.44.$$

## 2.4 Métricas de Centralidade

As métricas de centralidade ajudam a identificar quais vértices exercem mais influência dentro de uma rede. Como lembra Newman ([NEWMAN, 2010](#)), cada medida destaca um aspecto específico da estrutura e, por isso, não devem ser tratadas como equivalentes. Algumas enfatizam conexões diretas, outras a posição em caminhos ou a proximidade em relação ao restante do grafo. Cada métrica responde a uma pergunta própria sobre o formato da rede.

Nesta seção, apresento as quatro métricas usadas no Capítulo 4, tomando como base o grafo mostrado na Figura 1.

## Centralidade de Grau

A centralidade de grau mede a importância de um vértice pela quantidade de ligações diretas que ele mantém na rede. É uma medida imediata: vértices com muitos vizinhos tendem a ter maior potencial de interação local. Newman (NEWMAN, 2010) destaca que essa posição favorece a circulação rápida de informação, já que o vértice atua como ponto de contato direto com vários outros.

Em gráficos direcionados, trabalhamos com duas quantidades: o grau de entrada, denotado por  $d_{\text{in}}(v)$ , que conta quantas arestas chegam ao vértice, e o grau de saída,  $d_{\text{out}}(v)$ , que registra quantas partem dele. O grau total é dado por:

$$d(v) = d_{\text{in}}(v) + d_{\text{out}}(v).$$

Para facilitar a comparação entre vértices, utiliza-se a forma normalizada da centralidade de grau:

$$C_D(v) = \frac{d(v)}{n - 1},$$

onde  $n$  é o número de vértices do grafo.

No grafo da Figura 1, obtemos os seguintes valores:

$$d_{\text{in}}(A) = 1, \quad d_{\text{out}}(A) = 2, \quad d(A) = 3;$$

$$d_{\text{in}}(B) = 1, \quad d_{\text{out}}(B) = 1, \quad d(B) = 2;$$

$$d_{\text{in}}(C) = 2, \quad d_{\text{out}}(C) = 2, \quad d(C) = 4;$$

$$d_{\text{in}}(D) = 1, \quad d_{\text{out}}(D) = 0, \quad d(D) = 1.$$

Com  $n = 4$ , a centralidade normalizada fica:

$$C_D(C) = 1.33, \quad C_D(A) = 1.00, \quad C_D(B) = 0.67, \quad C_D(D) = 0.33.$$

Esses valores mostram que o vértice  $C$  é o mais conectado da rede, funcionando como um “ponto de contato” direto para vários outros. Os vértices  $A$  e  $B$  ocupam posições intermediárias, enquanto  $D$  aparece como o vértice menos envolvido nas interações diretas.

## Centralidade de Proximidade

A centralidade de proximidade (Closeness) mede o quão perto um vértice está dos demais na rede. A ideia é somar as distâncias mínimas de um vértice  $v$  até todos os outros e, em seguida, inverter esse valor: quanto menor for essa soma, maior será a proximidade de  $v$ . Newman (NEWMAN, 2010) destaca que vértices bem posicionados tendem a estar a poucos passos dos demais, o que favorece a circulação rápida de informação.

Usaremos aqui a forma normalizada dessa métrica:

$$C_P(v) = \frac{n - 1}{\sum_{u \neq v} d(v, u)},$$

em que  $n$  é o número de vértices do grafo e  $d(v, u)$  representa a distância mínima de  $v$  até  $u$ , considerando apenas pares para os quais essa distância é finita.

- $\sum_{u \neq v} d(v, u)$  é a soma das distâncias mínimas de  $v$  até **todos** os outros  $n - 1$  vértices.
- Quanto **menor** essa soma, mais próximo  $v$  está da rede inteira.
- Dividimos por  $n - 1$  para normalizar (o máximo possível seria 1, se  $v$  estivesse a 1 passo de todos).
- Quanto **maior**  $C_P(v)$ , mais central é  $v$ .

No grafo da Figura 1, com vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , obtemos:

$$d(A, B) = 1, \quad d(A, C) = 1, \quad d(A, D) = 2 \Rightarrow \sum_{u \neq A} d(A, u) = 4,$$

$$d(B, C) = 1, \quad d(B, A) = 2, \quad d(B, D) = 2 \Rightarrow \sum_{u \neq B} d(B, u) = 5,$$

$$d(C, A) = 1, \quad d(C, D) = 1, \quad d(C, B) = 2 \Rightarrow \sum_{u \neq C} d(C, u) = 4.$$

Como  $n = 4$ , as centralidades normalizadas são:

$$C_P(A) = \frac{3}{4} = 0,75, \quad C_P(B) = \frac{3}{5} \approx 0,60, \quad C_P(C) = \frac{3}{4} = 0,75.$$

O vértice  $D$  não alcança os demais, de modo que sua centralidade de proximidade é tomada como zero. Assim,  $A$  e  $C$  aparecem como os vértices mais bem posicionados em termos de proximidade, seguidos por  $B$ , enquanto  $D$  ocupa uma posição claramente desfavorável na estrutura de alcance do grafo.

## Centralidade de Intermediação

A centralidade de intermediação indica o quanto um vértice atua como ponto de passagem em caminhos mínimos entre outros pares da rede. A ideia é simples: um vértice recebe pontuação sempre que aparece como intermediário em um percurso mais curto entre dois outros vértices. Newman (NEWMAN, 2010) observa que vértices com alta intermediação desempenham papel estrutural relevante, pois influenciam o fluxo de informação ao conectarem partes distintas da rede.

No grafo da Figura 1, calculamos os caminhos mínimos dirigidos entre todos os pares  $(s, t)$ . O vértice  $C$  aparece como intermediário nos caminhos

$$A \rightarrow D, \quad B \rightarrow A, \quad B \rightarrow D,$$

acumulando três aparições. O vértice  $A$  surge como intermediário no caminho  $C \rightarrow B$ , enquanto  $B$  e  $D$  não aparecem em nenhum caminho mínimo que não seja iniciado ou terminado neles mesmos. Assim, obtemos:

$$C_B(A) = 1, \quad C_B(B) = 0, \quad C_B(C) = 3, \quad C_B(D) = 0.$$

Com normalização por  $(n-1)(n-2) = 6$ , temos:

$$C_B(A) \approx 0,17, \quad C_B(B) = 0, \quad C_B(C) = 0,50, \quad C_B(D) = 0.$$

Formalmente, a centralidade de intermediação de um vértice  $v$  é dada por:

A fórmula é:

$$C_B(v) = \sum_{\substack{s \neq v \neq t \\ s \neq t}} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}},$$

Aqui está o que cada parte significa:

- $s$  e  $t$  são **dois vértices diferentes** de  $v$  (e um do outro).
- $\sigma_{st}$  é o **total de caminhos mais curtos** entre  $s$  e  $t$ .
- $\sigma_{st}(v)$  é quantos desses caminhos **passam por**  $v$ .
- $\frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$  é a **fração** dos caminhos mais curtos de  $s$  a  $t$  que usam  $v$ .
- Somamos essa fração **para todos os pares**  $(s, t)$  possíveis (excluindo  $v$ ).

O vértice  $C$  se destaca como principal ponto de intermediação do grafo, conectando regiões que, sem ele, teriam acesso mais limitado umas às outras. Já  $A$  exerce um papel intermediário mais modesto, e  $B$  e  $D$  praticamente não contribuem para a mediação de fluxos na rede.

## PageRank

O PageRank foi criado por Larry Page e Sergey Brin como parte do primeiro sistema de busca do Google. A ideia era simples: páginas que recebem links de páginas importantes devem aparecer mais alto nos resultados. Essa lógica foi traduzida matematicamente e se tornou um dos principais diferenciais do buscador.

O PageRank mede a importância de um vértice de acordo com quem aponta para ele. Receber uma ligação de um vértice pouco relevante tem pouco efeito; já receber uma ligação de um vértice que também recebe muita atenção aumenta bastante o valor. Em outras palavras, a importância é transmitida pela rede: vértices importantes reforçam outros vértices importantes.

Em termos simples, o PageRank funciona como uma redistribuição de importância pela rede. Cada vértice reparte sua pontuação entre os vértices para os quais aponta, e esses valores são recalculados repetidamente. O processo é recursivo: a importância recebida em uma etapa influencia a próxima. Após algumas iterações, os valores se estabilizam, e os vértices que acumulam mais pontuação — especialmente quando essa pontuação vem de vértices também relevantes — tornam-se os mais bem posicionados na rede.

O algoritmo utiliza um fator de amortecimento  $d$ , normalmente igual a 0,85. Esse fator representa a probabilidade de continuar seguindo as ligações do grafo. O valor restante,  $1 - d$ , corresponde à chance de “pular” para qualquer vértice da rede. Esse mecanismo evita que o processo fique preso em ciclos ou em vértices sem saída e garante a convergência da medida.

A forma utilizada aqui é:

$$PR(v) = \frac{1-d}{n} + d \sum_{u \rightarrow v} \frac{PR(u)}{d_{\text{out}}(u)},$$

onde:

- $\frac{1-d}{n}$  é o “salto aleatório”: com probabilidade  $1 - d$  (tipicamente 0.15), o usuário pula para uma página aleatória qualquer dos  $n$  vértices.
- $d$  é o “fator de amortecimento” (tipicamente 0.85): probabilidade de continuar seguindo links.
- $\sum_{u \rightarrow v}$  soma sobre **todos** os vértices  $u$  que têm aresta apontando para  $v$  (predecessores de  $v$ ).
- $\frac{PR(u)}{d_{\text{out}}(u)}$  é a “importância redistribuída”: o PageRank de  $u$  é dividido igualmente entre seus  $d_{\text{out}}(u)$  vizinhos de saída.

Essa fórmula é recursiva: o valor de  $PR(v)$  depende dos valores dos outros vértices, e por isso o cálculo é repetido diversas vezes até que todos os valores se estabilizem (convergência).

Aplicando a fórmula ao grafo da Figura 1, o processo iterativo converge para:

$$PR(C) \approx 0.40, \quad PR(A) \approx 0.20, \quad PR(B) \approx 0.20, \quad PR(D) \approx 0.20.$$

O vértice  $C$  obtém o maior PageRank por receber ligações de vértices ativos e repassar parte dessa pontuação ao restante da rede, reforçando seu papel central na estrutura.

## 2.5 Índice de Colaboração Escolar

O conceito surgiu de forma informal nos anos 1970 e foi bastante popularizado após a morte de Erdős, em 1996. Ele se tornou uma métrica curiosa de prestígio acadêmico e de conectividade em redes de coautoria.

Formalmente, o número de Erdős de um autor é definido como:

- O próprio Paul Erdős tem número de Erdős 0.
- Um coautor direto de Erdős tem o número de Erdős 1.
- Um coautor de um coautor de Erdős, que ainda não colaborou diretamente com Erdős, tem número de Erdős 2, e assim por diante.

Nesta dissertação, adaptamos essa ideia para o contexto escolar com o objetivo de quantificar quão próximos os estudantes estão entre si em termos de trabalhos desenvolvidos ao longo do ano.

As colaborações registradas pelos alunos foram inicialmente representadas por um grafo dirigido. No entanto, esse formato introduz uma assimetria que não corresponde ao fenômeno real: quando dois estudantes trabalham juntos, a relação é necessariamente mútua, mesmo que apenas um deles tenha informado a parceria no questionário. Por essa razão, o grafo foi convertido para sua versão não direcionada, de modo a representar adequadamente a reciprocidade da colaboração.

### Construção do Índice

O cálculo do Índice de Colaboração Escolar segue quatro passos diretos:

1. **Construção do grafo:** obtém-se o grafo não direcionado contendo todas as colaborações informadas.
2. **Escolha do aluno de referência:** seleciona-se o vértice estruturalmente mais central da rede, considerando métricas como grau (número de colaboradores diretos) e intermediação (papel como ponte entre diferentes grupos).
3. **Cálculo das distâncias:** determina-se a distância geodésica de cada estudante até esse vértice.

#### 4. Atribuição dos valores: essa distância define o seu **Índice de Colaboração Escolar**.

Assim, estudantes com índice 1 colaboraram diretamente com o aluno de referência; índices 2 ou 3 representam camadas mais periféricas da rede. Essa métrica sintetiza, em um único número, a posição colaborativa de cada estudante, permitindo visualizar padrões de integração, proximidade e possíveis afastamentos dentro da turma.

## Considerações Finais

Essas quatro métricas serão retomadas no Capítulo 4. Cada uma delas destaca um tipo diferente de participação: quantidade de indicações (grau), alcance (proximidade), papel de ligação (intermediação) e reconhecimento ponderado (PageRank). A análise conjunta dessas medidas permite descrever perfis variados de influência nas turmas estudadas.

## 2.6 Implementação com NetworkX

Esta seção apresenta a implementação do exemplo base apresentado neste capítulo utilizando a biblioteca NetworkX em Python.

### 2.6.1 Criação do Grafo

```
import networkx as nx

G = nx.DiGraph()
G.add_nodes_from(['A', 'B', 'C', 'D'])
G.add_edges_from([('A', 'B'), ('A', 'C'), ('B', 'C'), ('C', 'A'), ('C', 'D')])
```

### 2.6.2 Definições Básicas

#### Matriz de Adjacência:

```
nx.adjacency_matrix(G).todense()
```

#### Grau de Entrada e Saída:

```
dict(G.in_degree()) # {'A': 1, 'B': 1, 'C': 2, 'D': 1}
dict(G.out_degree()) # {'A': 2, 'B': 1, 'C': 2, 'D': 0}
```

### 2.6.3 Propriedades Básicas

#### Número de Vértices e Arestas:

```
G.number_of_nodes() # 4
G.number_of_edges() # 5
```

#### Densidade:

```
nx.density(G) # 0.417
```

### 2.6.4 Caminhos e Distâncias

#### Distância Geodésica:

```
nx.shortest_path_length(G, source='A', target='D') # 2
nx.shortest_path_length(G, source='B', target='A') # 2
nx.shortest_path_length(G, source='C', target='B') # 2
```

#### Caminho Mínimo:

```
nx.shortest_path(G, source='A', target='D') # ['A', 'C', 'D']
```

#### Diâmetro (pares alcançáveis):

```
distances = [nx.shortest_path_length(G, s, t)
              for s in G.nodes() for t in G.nodes()
              if s != t and nx.has_path(G, s, t)]
max(distances) # 2
```

#### Caminho Médio (pares alcançáveis):

```
distances = [nx.shortest_path_length(G, s, t)
              for s in G.nodes() for t in G.nodes()
              if s != t and nx.has_path(G, s, t)]
sum(distances) / len(distances) # 1.44
```

### 2.6.5 Métricas de Centralidade

#### Centralidade de Grau:

```
nx.degree_centrality(G)
# {'A': 1.0, 'B': 0.67, 'C': 1.33, 'D': 0.33}
```

**Centralidade de Proximidade:**

```
nx.closeness centrality(G)
# {'A': 0.44, 'B': 0.44, 'C': 0.67, 'D': 0.60}
```

**Centralidade de Intermediação:**

```
nx.betweenness centrality(G, normalized=True)
# {'A': 0.17, 'B': 0.0, 'C': 0.50, 'D': 0.0}
```

**PageRank:**

```
nx.pagerank(G, alpha=0.85)
# {'A': 0.23, 'B': 0.19, 'C': 0.35, 'D': 0.23}
```

## 3 Metodologia

Este capítulo descreve os procedimentos adotados para a condução da experiência didático-prática realizada com as turmas do 3º ano do Ensino Médio. São apresentados o tipo de pesquisa, o contexto dos participantes, os instrumentos utilizados para a coleta dos dados sociométricos, a forma de construção dos grafos e as métricas aplicadas para análise das redes sociais geradas.

### 3.1 Caracterização da Pesquisa

Esta investigação caracteriza-se como um estudo de caso de natureza exploratória, no qual técnicas da Teoria dos Grafos e da Análise de Redes Sociais são aplicadas a dados sociométricos coletados nas turmas. As métricas computacionais utilizadas, como o PageRank, foram calculadas por meio de ferramentas de análise de grafos, cabendo ao pesquisador interpretar os resultados no contexto pedagógico. Dessa forma, o foco do estudo não está na investigação formal dos conceitos matemáticos, mas no uso dessas métricas para compreender dinâmicas sociais escolares.

A pesquisa é quali-quantitativa, pois envolve tanto a coleta de percepções dos alunos, por meio de questionários, quanto o tratamento computacional dos dados e a aplicação de métricas formais sobre os grafos gerados.

Com base em dados reais coletados em sala de aula, busca-se representar e interpretar padrões de interação entre alunos, demonstrando o potencial didático da visualização de redes.

### 3.2 Participantes e Contexto

A pesquisa foi conduzida com estudantes do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual **Ormanda Gonçalves**, localizada em Vila Velha/ES. A coleta foi realizada no ano de 2025. O estudo envolveu quatro turmas denominadas 3M1, 3M2, 3M3 e 3M4, com os seguintes números de estudantes matriculados e presentes no momento da coleta:

- 3M1: 31 alunos
- 3M2: 40 alunos
- 3M3: 34 alunos
- 3M4: 36 alunos

A aplicação dos questionários foi realizada em dois momentos distintos, utilizando instrumentos diferentes. O **questionário sobre indicação de representantes de turma (Etapa 1)** foi aplicado a todas as turmas participantes, totalizando **105 respostas válidas**, distribuídas da seguinte forma:

- 3M1: 31 respondentes
- 3M2: 31 respondentes
- 3M3: 21 respondentes
- 3M4: 21 respondentes

Apenas um estudante optou por não aceitar o Termo de Consentimento, tendo sua resposta descartada da análise.

O **questionário sobre colaboração acadêmica (Etapa 2)** foi aplicado exclusivamente à turma 3M2, contando com **27 participantes**. A escolha dessa turma ocorreu devido à disponibilidade de horário.

Os estudantes participantes tinham, em geral, entre 16 e 18 anos de idade, e participaram voluntariamente da pesquisa, mediante aceite digital.

### 3.3 Instrumentos de Coleta de Dados

A coleta de dados foi realizada por meio de dois formulários digitais aplicados via Google Forms. Os instrumentos foram elaborados pelo próprio pesquisador com base em práticas sociométricas, e a aplicação considerou a viabilidade técnica e pedagógica das turmas envolvidas. O mesmo conjunto de ferramentas já havia sido utilizado anteriormente (Google Forms, *pandas*, *networkx*) em projetos exploratórios com turmas do Ensino Fundamental e Médio, o que favoreceu a condução organizada da presente pesquisa.

#### Questionário de Representatividade (Etapa 1)

O primeiro instrumento teve como foco a eleição de representantes de turma, sendo aplicado nas turmas 3M1, 3M2, 3M3 e 3M4. O questionário continha dois blocos principais:

1. **Indicação múltipla:** os estudantes puderam indicar livremente quantos colegas considerassem adequados para o cargo de representante de turma. Essa estrutura possibilitou a construção de um grafo direcionado, que posteriormente serviu de base para aplicação de métricas de centralidade, como o *PageRank*.

2. **Indicação única:** os estudantes realizaram uma escolha individual, indicando apenas um colega, em um formato semelhante ao de uma eleição por voto direto.

Em ambas as modalidades, **todos os alunos das turmas foram considerados elegíveis**, independentemente de terem manifestado interesse prévio em concorrer na eleição.

Os questionários foram aplicados **antes da abertura oficial do processo de eleição de representantes de turma**, garantindo que as escolhas fossem feitas de forma espontânea, sem influência de campanhas, inscrições ou compromissos pré-estabelecidos com a votação oficial.

## Questionário de Colaboração Acadêmica (Etapa 2)

O instrumento foi composto por duas perguntas de **seleção múltipla**, nas quais os alunos indicaram:

1. Colegas a quem recorreriam em caso de dúvidas acadêmicas.
2. Colegas com os quais já colaboraram em trabalhos em grupo.

A primeira questão teve como objetivo identificar vínculos baseados no reconhecimento de competência, apontando quais estudantes são reconhecidos como dedicados e fontes confiáveis de apoio acadêmico. Já a segunda buscou mapear relações de **colaboração efetiva**, evidenciando experiências prévias de trabalho conjunto entre os alunos.

As respostas possibilitaram a construção de dois grafos direcionados distintos, representando diferentes dimensões das interações acadêmicas: percepção de apoio e experiência colaborativa.

## Dados Complementares

Além das respostas dos questionários, foram coletados os **resultados oficiais da eleição de representantes de turma**, o que permitiu comparar os resultados obtidos com as escolhas oficiais.

## 3.4 Construção dos Grafos

A partir das respostas obtidas nos questionários aplicados nas turmas participantes, foram construídos grafos representando diferentes dimensões das relações sociais e acadêmicas entre os estudantes. Todos os grafos foram implementados com a biblioteca

`NetworkX` em `Python` e armazenados em estruturas de listas de adjacência para posterior análise.

Salvo indicação contrária, cada grafo corresponde a uma das turmas analisadas (3M1, 3M2, 3M3 ou 3M4) e é direcionado, representando relações do tipo “aluno indica colega”. Os grafos de colaboração, apresentados adiante, constituem a única exceção, sendo modelados como não direcionados.

## Grafo de Indicações Múltiplas para Representante de Turma

Baseado na pergunta sobre quais colegas seriam aptos à liderança e capacitados para representar a turma, este grafo permite múltiplas indicações por aluno. Uma aresta  $A \rightarrow B$  indica que  $A$  indicou  $B$  como potencial representante. Esse conjunto de grafos serviu de base para o cálculo das centralidades e para a aplicação do algoritmo *PageRank* como uma forma alternativa de estimar quem seria escolhido como representante.

## Indicação Única para Eleição de Representante de Turma

Na etapa de indicação única, cada aluno escolheu apenas um colega para o cargo de representante. Essa estrutura corresponde a uma relação simples do tipo “aluno  $\rightarrow$  indicado”, que, por não gerar uma rede de interações, não justificou a construção de um grafo. Assim, as respostas foram organizadas em uma tabela e tratadas como uma contagem de votos, de forma análoga a uma eleição convencional. Esses dados serviram como referência para comparar os resultados da votação direta com o *PageRank* e com as centralidades obtidas a partir das indicações múltiplas.

## Grafo de Reconhecimento de Dedicção

Aplicado apenas à turma 3M2, este grafo direcionado registra, para cada aluno  $A$ , quais colegas  $B$  ele considera mais dedicados e confiáveis para compreender conteúdos escolares, servindo como base para a análise de reconhecimento acadêmico.

## Grafo de Colaboração em Projetos e o Índice de Colaboração Escolar

Também restrito à turma 3M2, este grafo não direcionado conecta pares de alunos que colaboraram efetivamente em projetos ou atividades ao longo do ano. Ele serviu para simular, no contexto escolar, o conceito do *número de Erdős*.

## Procedimentos de Análise

Com os grafos construídos, foram aplicadas diferentes métricas de análise de redes com o objetivo de identificar padrões de influência, reconhecimento e colaboração entre

os estudantes. As análises foram conduzidas com a biblioteca **NetworkX** em Python, que oferece recursos para o cálculo de diversas centralidades e propriedades estruturais de grafos.

As métricas utilizadas — como centralidade de grau, centralidade de intermediação, PageRank, componentes conexos, caminho mínimo médio e o índice de colaboração escolar — foram definidas e explicadas no Capítulo anterior. A interpretação dos resultados considerou também características observadas no cotidiano das turmas, reforçando o caráter quali-quantitativo da pesquisa.

## 4 Resultados da Experiência Didático-Prática

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos a partir dos dados coletados nos questionários aplicados aos estudantes participantes. As respostas foram organizadas e representadas por meio de grafos, o que permitiu visualizar como os alunos indicaram seus colegas para o cargo de representante de turma.

A partir dessas representações, são descritos os padrões que emergiram nas turmas, destacando estudantes mais lembrados pelos colegas e algumas características estruturais das redes formadas. Os diferentes grafos construídos — como o de indicações múltiplas e o de voto único — são apresentados ao longo deste capítulo.

### 4.1 Indicações e Estrutura da Rede — 3M1

A Tabela 2 apresenta os cinco alunos com maior grau de entrada (*indegree*) e os cinco com maior grau de saída (*outdegree*). Esses valores iniciais ajudam a identificar quem recebeu mais indicações e também quem participou de mais indicações na turma.

Maiores Indegrees			Maiores Outdegrees		
Pos	Nó	Indegree	Pos	Nó	Outdegree
1º	34AM	18	1º	33AM	40
2º	12AF	12	2º	11AM	38
3º	16AM	11	3º	24AM	5
4º	01AF	8	4º	18AM	4
5º	04AF	7	5º	39AM	4

Tabela 2 – Nós Principais por grau -  $G$

Para entender como esses valores se distribuem na turma, observamos a distribuição dos graus de entrada, apresentada no gráfico da Figura 2. Ele mostra quantas indicações cada aluno recebeu.

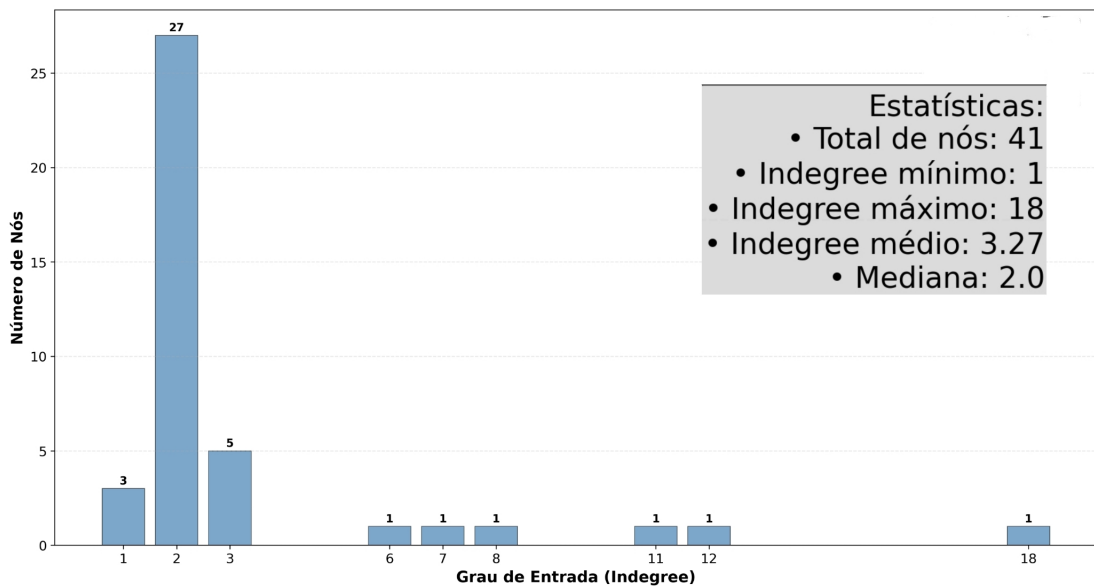


Figura 2 – Distribuição dos graus de entrada de  $G$

A Figura 3 e a Figura 4 complementam essa visão ao mostrar um boxplot dos valores. Nele aparecem alguns *outliers*, ou seja, casos que fogem bastante do padrão da turma. Esses valores ajudam a destacar alunos que receberam um número muito maior de indicações em relação aos demais.

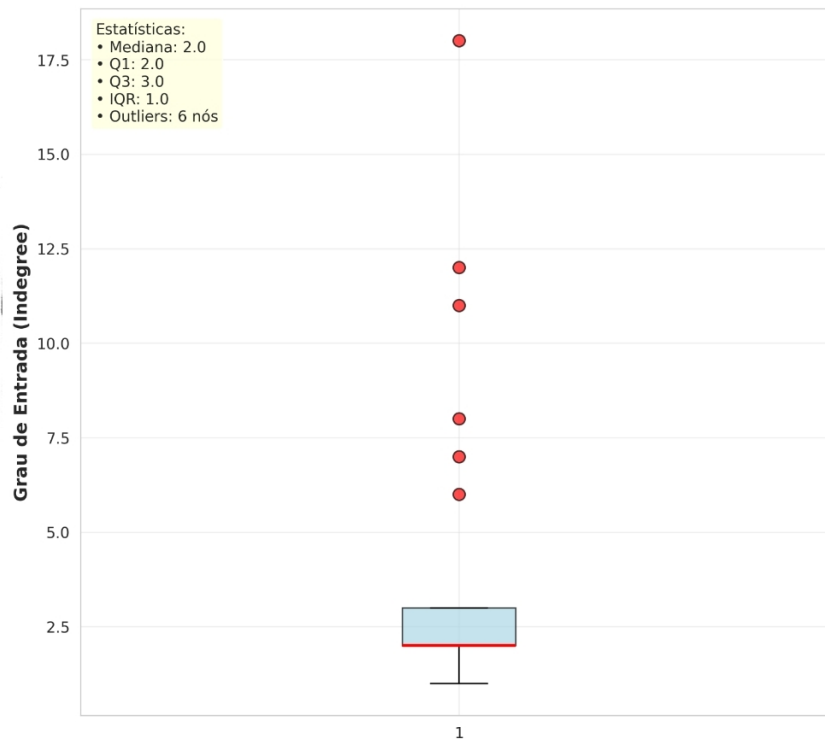


Figura 3 – Boxplot e outliers de  $G$

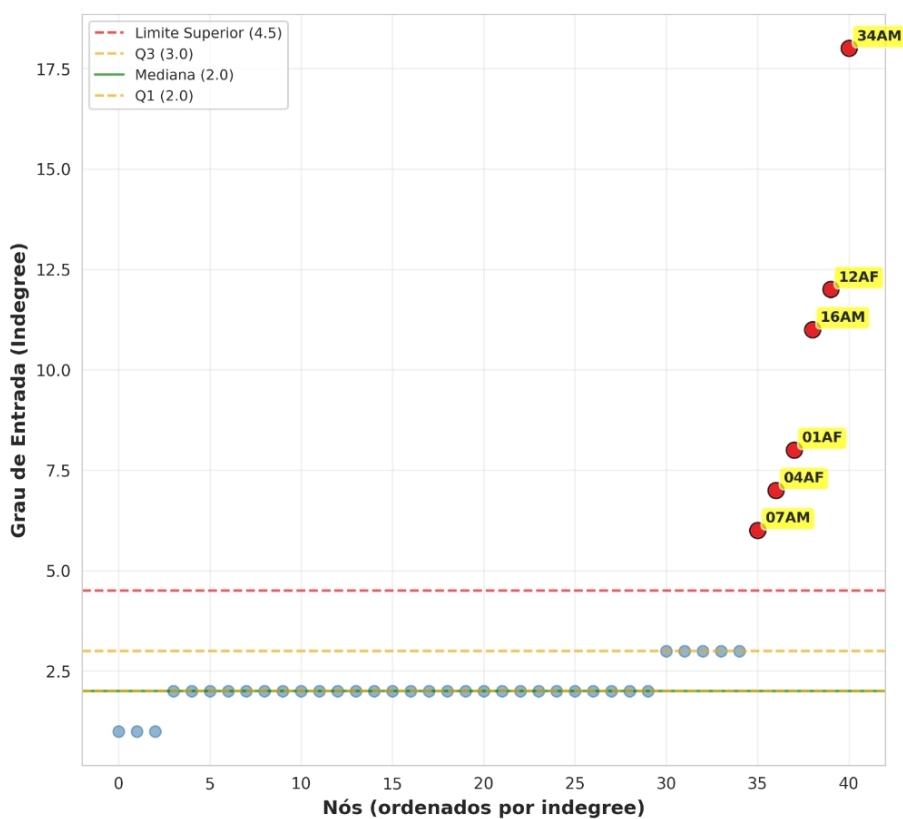


Figura 4 – Nós de  $G$  ordenados pelo grau de entrada.

A Tabela 3 mostra um recorte da matriz de adjacência, destacando apenas os alunos identificados como outliers de *indegree*. As linhas representam todos os estudantes da turma e as colunas mostram os colegas mais citados. Esse recorte ajuda a visualizar quem indicou cada um dos alunos que se destacaram na distribuição.

Cada coluna corresponde a um dos alunos mais mencionados, e cada linha indica se um determinado estudante direcionou ou não sua indicação para aquele colega. Em termos práticos, o número de indicações recebidas por um aluno é igual à soma dos valores de sua coluna na matriz completa.

Origem \ Outliers (Indegree)	01AF	04AF	07AM	12AF	16AM	34AM
01AF	0	0	0	0	0	0
02AF	0	0	0	1	1	1
03AF	0	0	1	1	0	0
04AF	0	0	0	0	0	1
05AF	0	0	0	1	0	0
06AF	0	0	0	1	0	1
07AM	0	0	0	0	0	0
08AM	0	0	0	0	0	0
09AF	0	0	1	0	0	0
10AF	0	0	0	1	1	1
11AM	1	1	1	1	1	1
12AF	0	0	1	0	0	0
13AM	0	0	0	0	1	1
14AM	0	0	0	0	0	0
15AF	1	0	0	0	0	1
16AM	0	0	0	0	0	1
17AF	0	0	0	0	0	0
18AM	1	0	0	1	1	1
19AM	0	0	0	0	0	1
20AM	0	0	0	0	1	0
21AM	0	1	0	0	0	1
22AM	0	0	0	0	0	0
23AM	0	0	0	0	1	1
24AM	1	0	1	0	1	1
25AF	1	0	0	0	1	1
26AF	0	0	0	0	0	0
27AM	0	0	0	0	0	0
28AM	0	1	0	1	0	0
29AM	0	0	0	0	0	0
30AM	0	0	0	0	0	0
31AF	0	0	0	1	0	0
32AM	0	0	0	0	0	0
33AM	1	1	1	1	1	1
34AM	0	1	0	0	0	0
35AF	0	0	0	0	0	0
36AF	0	0	0	0	0	0
37AM	0	1	0	0	1	1
38AF	1	0	0	0	0	1
39AM	1	1	0	1	0	1
40AM	0	0	0	0	0	0
41AF	0	0	0	1	0	0

Tabela 3 – Recorte da Matriz de Adjacência de  $G_{\text{mult}}^{(1)}$  — foco em outliers

A Tabela 4 resume algumas propriedades da rede. O total de arcos (134) corresponde

ao número de indicações feitas na turma. A densidade, igual a 8,17%, indica que uma pequena fração das conexões possíveis foi realizada, o que é comum em redes sociais desse tipo. O grau médio de saída, aproximadamente 3,27, mostra que os estudantes indicaram, em média, mais de três colegas cada.

<b>Propriedade</b>	<b>Valor</b>
Dimensão da Matriz de Adjacência	$41 \times 41$
Total de Nós	41
Total de Arestas	134
Densidade (%)	8.17
Grau de Saída Médio	3.27
Grau de Entrada Médio	3.27
Grau de Saída Máximo	40
Grau de Entrada Máximo	18

Tabela 4 – Estatísticas —  $G$ 

Por fim, a Figura 5 apresenta o grafo da turma. O tamanho e a cor dos nós são proporcionais ao grau de entrada, o que facilita a visualização dos alunos que apareceram em destaque nas etapas anteriores.

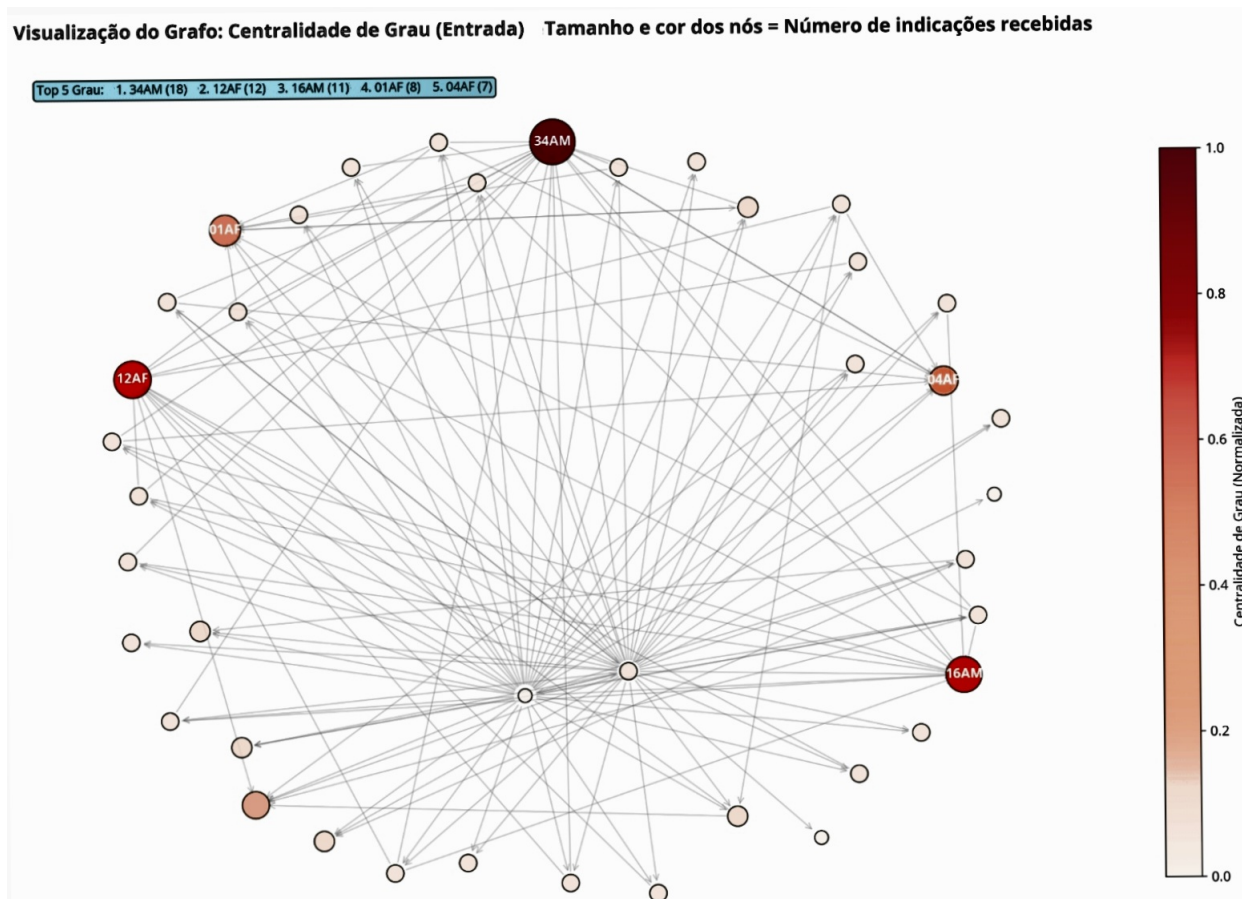


Figura 5 – Visualização do Grafo  $G$  com tamanho e a cor dos nós proporcionais aos seus graus de entrada

#### 4.1.1 Perfis de Centralidade — Turma 3M1

Além da distribuição dos graus de entrada, também foram calculadas outras medidas de centralidade para identificar quais estudantes ocupam posições de destaque na rede de indicações da turma 3M1. As tabelas e figuras a seguir apresentam esses resultados, permitindo observar como alguns alunos aparecem com frequência em diferentes métricas.

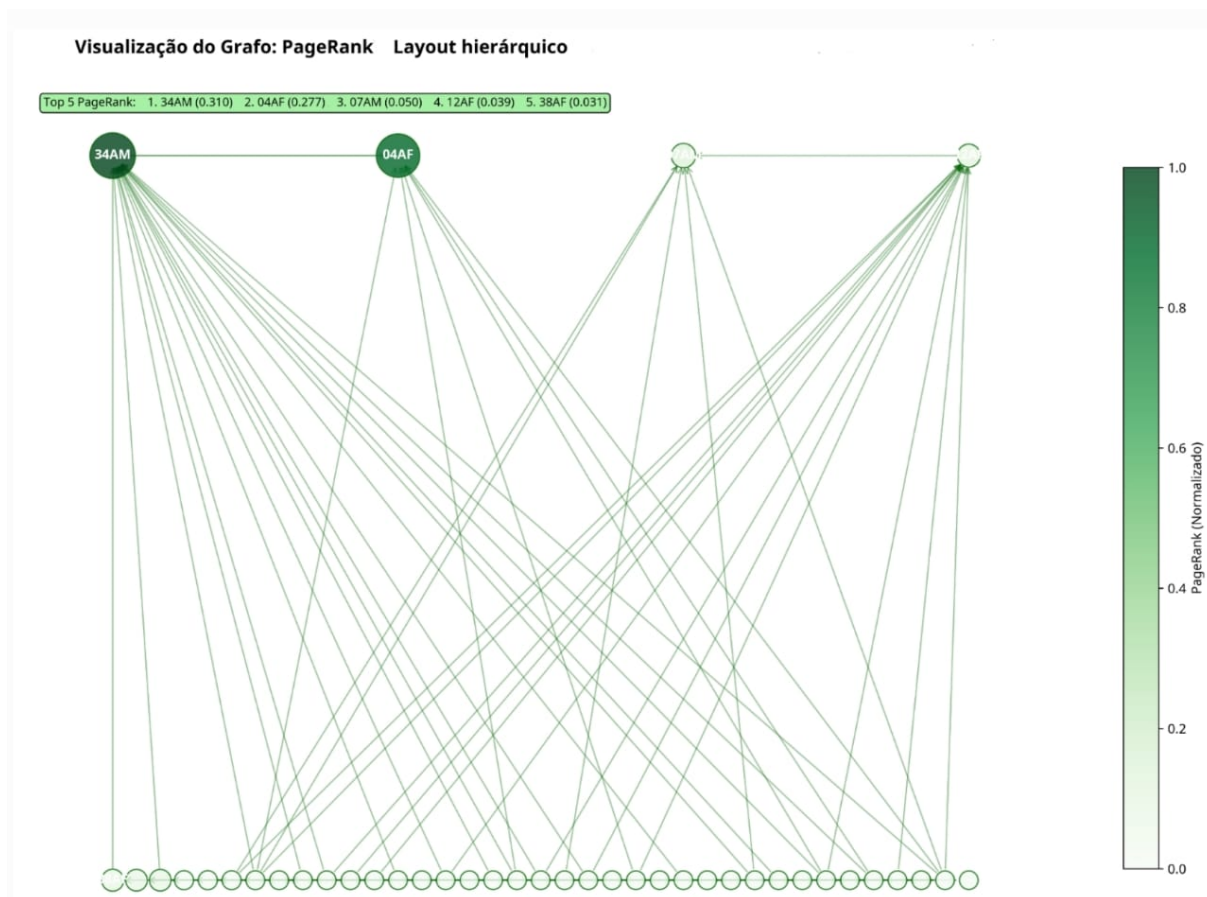


Figura 6 – Visualização do grafo  $G$  com o tamanho dos nós proporcional ao valor de PageRank.

A Figura 6 mostra o grafo da turma com o tamanho dos nós proporcional ao valor de PageRank. Nessa visualização, alguns estudantes se destacam com valores bem superiores aos demais.

Maiores PageRanks		
Pos	Nó	PageRank
1º	34AM	0.3097
2º	04AF	0.2770
3º	07AM	0.0500
4º	12AF	0.0387
5º	38AF	0.0309

Tabela 5 – Nós principais por PageRank de  $G$

A Tabela 5 apresenta os cinco maiores valores de PageRank. Os estudantes 34AM e 04AF aparecem com destaque, seguidos por 07AM, 12AF e 38AF.

**Visualização do Grafo: Centralidade de Proximidade** Posição central + tamanho/cor = Facilidade de acesso na rede

Top 5 Proximidade: 1. 33AM (1.000) 2. 11AM (0.952) 3. 21AM (0.519) 4. 24AM (0.136) 5. 18AM (0.122)

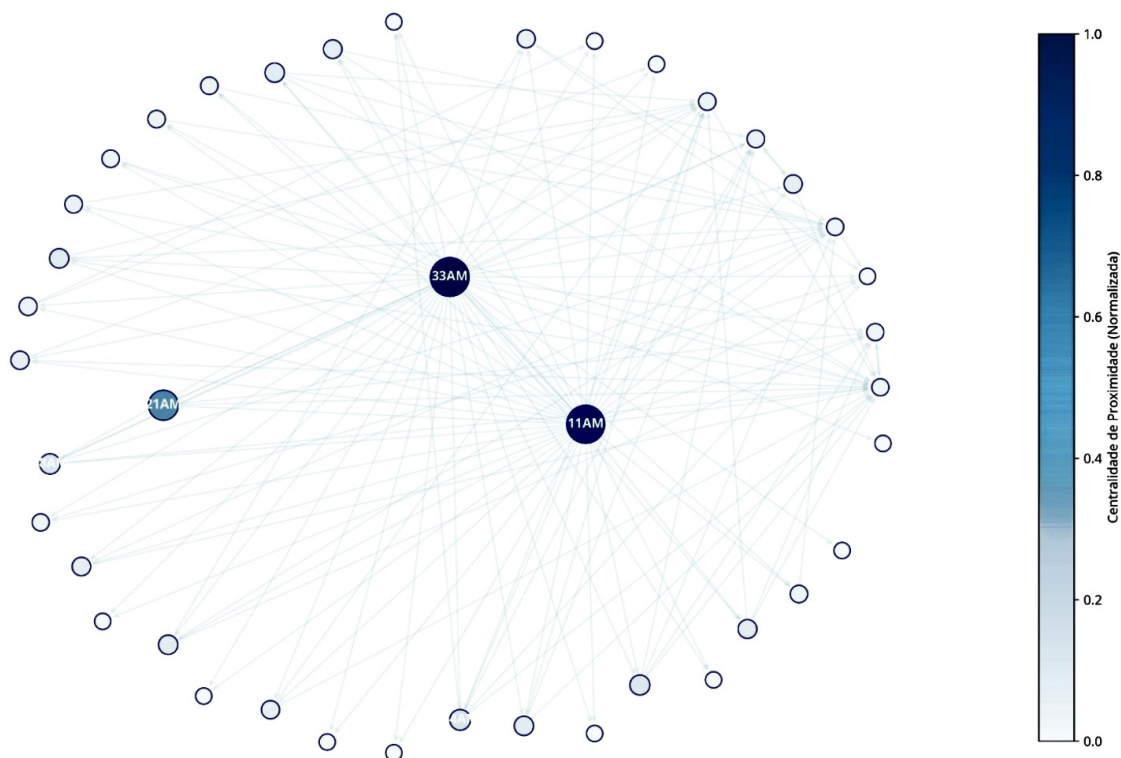


Figura 7 – Visualização do grafo  $G$  com o tamanho dos nós proporcional à centralidade de proximidade.

A Figura 7 mostra os valores de proximidade. Alguns alunos ocupam posições mais centrais, estando a poucas etapas de grande parte da turma.

Maiores Proximidades (Entrada)		
Pos	Nó	Proximidade
1º	33AM	1.0000
2º	11AM	0.9524
3º	21AM	0.5195
4º	24AM	0.1361
5º	18AM	0.1225

Tabela 6 – Nós principais por proximidade de  $G$

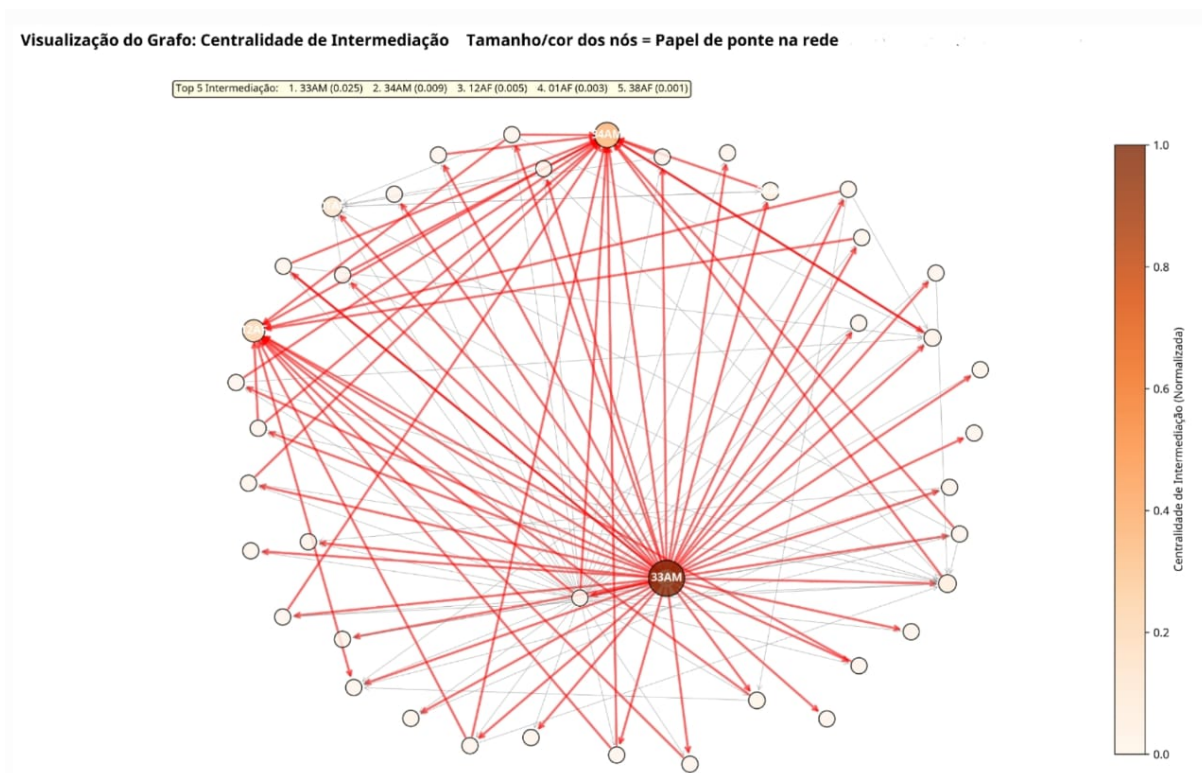


Figura 8 – Visualização do grafo  $G$  com o tamanho dos nós proporcional à centralidade de intermediação.

A Figura 8 apresenta os valores de intermediação, destacando alunos que funcionam como ponte entre grupos.

Maiores Intermediações		
Pos	Nó	Intermediação
1º	33AM	0.0250
2º	34AM	0.0090
3º	12AF	0.0054
4º	01AF	0.0032
5º	38AF	0.0013

Tabela 7 – Nós principais por intermediação de  $G$

Embora cada métrica destaque estudantes diferentes, alguns nomes aparecem repetidas vezes entre as primeiras posições. Esse comportamento indica que certos alunos ocupam posições estruturais relevantes na rede, seja por receberem muitas indicações ou por estarem conectados a diferentes grupos da turma.

### 4.1.2 Comparativo entre as Medidas de Centralidade

Além de observar cada medida separadamente, também foi realizado um comparativo entre as quatro métricas calculadas — grau de entrada, PageRank, proximidade e intermediação — para identificar quais estudantes aparecem com destaque em mais de uma delas.

Grau (Entrada)		PageRank		Intermediação		Proximidade	
Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)
1º	34AM (18)	1º	34AM (0.3097)	1º	33AM (0.0250)	1º	33AM (1.0000)
2º	12AF (12)	2º	04AF (0.2770)	2º	34AM (0.0090)	2º	11AM (0.9524)
3º	16AM (11)	3º	07AM (0.0500)	3º	12AF (0.0054)	3º	21AM (0.5195)
4º	01AF (8)	4º	12AF (0.0387)	4º	01AF (0.0032)	4º	24AM (0.1361)
5º	04AF (7)	5º	38AF (0.0309)	5º	38AF (0.0013)	5º	18AM (0.1225)

Tabela 8 – Comparativo das centralidades

A Tabela 8 mostra que alguns estudantes aparecem com destaque em mais de uma métrica. Os casos mais evidentes são os nós **34AM** e **12AF**, que surgem entre as primeiras posições em diferentes listas. Outros, como **33AM**, **01AF**, **04AF** e **38AF**, também aparecem em mais de uma categoria, embora com menor frequência.

Esse cruzamento indica que alguns alunos ocupam posições relevantes sob diferentes perspectivas da rede — seja por receberem muitas indicações, por estarem próximos de grande parte da turma ou por servirem de ligação entre grupos distintos.

### 4.1.3 Voto Único — Turma 3M1

No formulário de voto único, cada estudante escolheu apenas um colega para o cargo de representante de turma. Diferentemente das indicações múltiplas, esse conjunto de respostas não foi representado por um grafo, pois a estrutura resultante se reduz praticamente a uma lista simples de votos. Assim, optou-se por apresentar os resultados de forma direta.

Os estudantes mais votados foram:

- 34AM: 9 votos
- 12AF: 7 votos
- 07AM: 3 votos
- 17AF: 2 votos
- 01AF: 2 votos

- 33AF: 2 votos
- 39AF: 1 voto
- 16AM: 1 voto

A distribuição dos votos indica um padrão semelhante ao observado na rede de indicações múltiplas: dois estudantes concentram a maior parte das escolhas, enquanto os demais aparecem com valores mais baixos.

#### 4.1.4 Comparativo PageRank vs. Voto Único — Turma 3M1

A comparação entre o PageRank (obtido a partir das indicações múltiplas) e o voto único permite observar até que ponto as preferências dos estudantes se mantêm consistentes em formatos diferentes de escolha.

Nos dois casos, **34AM** e **12AF** aparecem nas primeiras posições, o que sugere que esses estudantes são reconhecidos pela turma independentemente do tipo de pergunta. Por outro lado, alguns nomes que tiveram destaque na rede de múltiplas indicações — como **04AF** e **16AM** — não aparecem entre os mais votados no voto único.

Essa diferença não representa um conflito entre os resultados, mas sim a distinção entre dois tipos de julgamento: indicar vários colegas considerados aptos ou escolher apenas um deles quando há uma única vaga disponível. No geral, as duas listas mostram um padrão próximo, com pequenas variações que refletem nuances da dinâmica interna da turma.

## 4.2 Resultados da Turma 3M2

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para a turma 3M2, seguindo a mesma organização utilizada no estudo da turma 3M1. As informações foram extraídas do grafo de indicações múltiplas e dos registros de voto único.

### 4.2.1 Propriedades Gerais da Rede — Indicações Múltiplas

A Tabela 9 resume as principais características do grafo  $G_{\text{mult}}^{(2)}$ .

Propriedade	Valor
Total de Nós	33
Total de Arestas	121
Densidade (%)	11.46
Grau de Saída Médio	3.67
Grau de Entrada Médio	3.67
Grau de Saída Máximo	9
Grau de Entrada Máximo	25

Tabela 9 – Estatísticas do grafo de indicações múltiplas da turma 3M2.

Assim como na turma 3M1, observa-se que as indicações não se distribuem de maneira uniforme: alguns estudantes recebem significativamente mais votos do que os demais, enquanto a maior parte aparece com valores reduzidos.

#### 4.2.2 Principais Valores de Centralidade

A Tabela 10 reúne os cinco maiores valores obtidos nas quatro métricas calculadas a partir de  $G_{\text{mult}}^{(2)}$ .

Pos	Grau (Entrada)		PageRank		Intermediação		Proximidade	
	Nó	Valor	Nó	Valor	Nó	Valor	Nó	Valor
1º	74BM	25	74BM	0.1439	70BM	0.1943	71BF	1.0000
2º	57BF	10	79BF	0.1294	74BM	0.1920	74BM	0.8333
3º	56BM	9	77BF	0.0874	77BF	0.1831	79BF	0.5660
4º	79BF	8	56BM	0.0609	79BF	0.1043	57BF	0.5455
5º	70BM	8	57BF	0.0558	61BM	0.0830	77BF	0.4918

Tabela 10 – Maiores valores de centralidade nas indicações múltiplas da turma 3M2.

Alguns padrões ficam evidentes. O nó **74BM** aparece entre os primeiros colocados em três das quatro métricas, e o mesmo ocorre com **79BF**, **77BF** e **57BF**. A presença repetida desses nós indica que eles foram citados por um número expressivo de colegas e, ao mesmo tempo, ocupam posições centrais nas conexões formadas pela turma.

#### 4.2.3 Voto Único — Turma 3M2

No formulário de voto único, cada estudante escolheu apenas um colega para o cargo de representante. Os resultados são apresentados a seguir:

- 74BM: 17 votos
- 57BF: 2 votos
- 63BF: 1 voto

- 62BM: 1 voto
- 53BM: 1 voto
- 56BM: 1 voto
- 77BF: 1 voto
- 75BM: 1 voto
- 66BM: 1 voto
- 79BF: 1 voto

Assim como na turma 3M1, as escolhas se concentraram majoritariamente em dois estudantes, enquanto o restante aparece com valores baixos.

#### 4.2.4 Comparação Entre Indicações Múltiplas e Voto Único

Ao comparar os dois cenários, observa-se que **74BM** aparece em posição de destaque em todas as listas, indicando que foi um dos nomes mais lembrados independentemente do tipo de pergunta.

Já o caso de **79BF** mostra uma diferença interessante: apesar de ocupar posições altas em algumas métricas de centralidade, aparece com apenas um voto no cenário de escolha única. Essa diferença sugere que ser muito citado em um contexto de múltiplas indicações não significa necessariamente ser o principal escolhido quando há apenas uma vaga disponível.

### 4.3 Resultados da Turma 3M3

Nesta seção são apresentados os resultados referentes à turma 3M3. Assim como nas demais turmas, os dados foram organizados a partir do grafo de indicações múltiplas e do registro de voto único.

#### 4.3.1 Propriedades Gerais da Rede — Indicações Múltiplas

A Tabela 11 resume as principais características estruturais do grafo  $G_{\text{mult}}^{(3)}$ .

Propriedade	Valor
Total de Nós	28
Total de Arestas	42
Densidade (%)	5.56
Grau de Saída Médio	1.50
Grau de Entrada Médio	1.50
Grau de Saída Máximo	7
Grau de Entrada Máximo	12

Tabela 11 – Estatísticas do grafo de indicações múltiplas da turma 3M3.

Os valores da Tabela 11 mostram que a rede da 3M3 é menos densa que a das turmas anteriores, com uma quantidade menor de indicações ao longo do grafo.

### 4.3.2 Principais Valores de Centralidade

A Tabela 12 reúne os maiores valores obtidos nas quatro métricas de centralidade calculadas para a turma 3M3.

Grau (Entrada)		PageRank		Intermediação		Proximidade	
Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)
1º	90CF (12)	1º	109CM (0.2247)	1º	103CF (0.0185)	1º	95CM (1.0000)
2º	109CM (10)	2º	90CF (0.1498)	2º	88CF (0.0100)	2º	89CF (1.0000)
3º	100CF (3)	3º	117CF (0.0408)	3º	87CM (0.0093)	3º	113CM (1.0000)
4º	117CF (2)	4º	100CF (0.0362)	4º	90CF (0.0057)	4º	103CF (1.0000)
5º	95CM (1)	5º	95CM (0.0348)	5º	96CM (0.0057)	5º	102CF (1.0000)

Tabela 12 – Maiores valores de centralidade nas indicações múltiplas da turma 3M3.

Observa-se que os nós **90CF** e **95CM** aparecem em três das quatro métricas, enquanto **109CM**, **100CF**, **117CF** e **103CF** aparecem em duas. Os demais nós listados surgem apenas uma vez.

### 4.3.3 Voto Único — Turma 3M3

O voto único apresenta a seguinte distribuição:

- 109CM: 8 votos
- 90CF: 7 votos
- 100CF: 1 voto
- 103CF: 1 voto
- 119CM: 1 voto

Assim como nas outras turmas, as escolhas se concentraram em poucos estudantes, enquanto o restante recebeu apenas uma indicação cada.

#### 4.3.4 Comparação Entre Indicações Múltiplas e Voto Único

Na turma 3M3, o nó **109CM** obteve o maior PageRank e também o maior número de votos no cenário de escolha única. O nó **90CF**, embora tenha se destacado nas indicações múltiplas, aparece em segundo lugar no voto único. Já o nó **95CM**, que surge em várias métricas de centralidade, não recebeu votos na escolha direta.

### 4.4 Resultados da Turma 3M4

A seguir são apresentados os resultados referentes à turma 3M4, mantendo a mesma organização utilizada nas turmas anteriores.

#### 4.4.1 Propriedades Gerais da Rede — Indicações Múltiplas

A Tabela 13 apresenta as características estruturais do grafo  $G_{\text{mult}}^{(4)}$ .

Propriedade	Valor
Total de Nós	26
Total de Arestas	48
Densidade (%)	7.38
Grau de Saída Médio	1.85
Grau de Entrada Médio	1.85
Grau de Saída Máximo	7
Grau de Entrada Máximo	13

Tabela 13 – Estatísticas do grafo de indicações múltiplas da turma 3M4.

#### 4.4.2 Principais Valores de Centralidade

A Tabela 14 reúne os maiores valores das métricas de centralidade calculadas para a turma 3M4.

Grau (Entrada)		PageRank		Intermediação		Proximidade	
Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)	Pos	Nó (Valor)
1º	129DM (13)	1º	129DM (0.1597)	1º	137DM (0.0944)	1º	160DF (1.0000)
2º	122DF (7)	2º	137DM (0.0891)	2º	123DF (0.0750)	2º	133DM (1.0000)
3º	144DF (7)	3º	123DF (0.0866)	3º	122DF (0.0419)	3º	126DF (1.0000)
4º	123DF (5)	4º	122DF (0.0842)	4º	125DM (0.0328)	4º	131DF (1.0000)
5º	137DM (4)	5º	144DF (0.0827)	5º	159DF (0.0025)	5º	129DM (0.7727)

Tabela 14 – Maiores valores de centralidade nas indicações múltiplas da turma 3M4.

Os nós **129DM**, **137DM**, **123DF** e **122DF** aparecem em três das quatro métricas. O nó **144DF** surge em duas delas. Os demais aparecem apenas uma vez.

#### 4.4.3 Voto Único — Turma 3M4

A distribuição dos votos únicos foi a seguinte:

- 129DM: 13 votos
- 122DF: 3 votos
- 123DF: 1 voto
- 144DF: 1 voto
- 158DF: 1 voto

#### 4.4.4 Comparação Entre Indicações Múltiplas e Voto Único

Na turma 3M4, o nó **129DM** aparece em posição de destaque nas indicações múltiplas e também recebeu a maior parte dos votos na escolha direta. Os nós **122DF** e **123DF**, que surgem em mais de uma métrica de centralidade, também aparecem no voto único. Já o nó **137DM**, apesar de ter valores altos nas centralidades, não recebeu votos diretos.

### 4.5 Colaboração Acadêmica — Turma 3M2

Além das indicações para representante de turma, também foram investigadas as relações de apoio e colaboração acadêmica na turma 3M2. Para isso, foram construídos dois grafos: um de ajuda em dúvidas e outro de colaboração em trabalhos de grupo.

#### 4.5.1 Rede de Apoio em Dúvidas

O grafo  $G_{\text{ajuda}}$  representa as indicações feitas pelos alunos em resposta à pergunta: “Se você tivesse uma dúvida ou dificuldade em alguma matéria, quais colegas você procuraria para pedir ajuda?”. Trata-se de um grafo direcionado, em que uma aresta  $A \rightarrow B$  indica que o aluno  $A$  mencionou o colega  $B$  como alguém a quem recorreria em caso de dúvidas.

A Tabela 15 sintetiza as principais propriedades estruturais desse grafo.

Tabela 15 – Estatísticas estruturais do grafo de ajuda  $G_{ajuda}$ 

Propriedade	Valor
Total de Nós	30
Total de Arestas	74
Densidade (%)	8.51
Grau de Saída Médio	2,47
Grau de Entrada Médio	2,47
Grau de Saída Máximo	9
Grau de Entrada Máximo	11

A partir da centralidade de grau de entrada, foi possível identificar os alunos mais mencionados como fonte de apoio:

- 56BM: 11 indicações;
- 75BM: 10 indicações;
- 74BM: 7 indicações;
- 70BM: 6 indicações.

Esses resultados indicam quais estudantes são mais lembrados pelos colegas quando o assunto é pedido de ajuda em conteúdos escolares. Vale ressaltar que esse tipo de indicação não mede, por si só, a dedicação acadêmica de cada aluno. A escolha pode estar ligada à forma como o colega explica, à confiança estabelecida no convívio ou a experiências anteriores de ajuda, entre outros fatores.

#### 4.5.2 Rede de Colaboração em Projetos e Índice de Colaboração Escolar

O grafo foi construído a partir das respostas à pergunta: “Com quais colegas você já colaborou em trabalhos de grupo ao longo do ano?”. Originalmente, as respostas foram registradas em um grafo direcionado, mas, para o estudo das distâncias de colaboração, o grafo foi convertido em uma versão não direcionada, denotada por  $G_{colab}$ , na qual uma aresta indica que houve, em algum momento, trabalho conjunto entre dois alunos.

A Tabela 16 apresenta as principais estatísticas dessa rede não direcionada.

Tabela 16 – Estatísticas estruturais do grafo de colaboração não direcionado  $G_{\text{colab}}$ 

<b>Propriedade</b>	<b>Valor</b>
Total de Nós	37
Total de Arestas	122
Densidade (%)	18,32
Grau Médio	6,59
Grau Máximo	21
Componentes Conectados	1
Tamanho do Maior Componente	37
Diâmetro da Rede	5
Caminho Médio	2,23

Para definir um aluno de referência na rede de colaborações, foi observado o comportamento de alguns nós com maiores valores de grau e de intermediação. A Tabela 17 mostra um resumo desses candidatos.

Tabela 17 – Resumo de nós centrais no grafo de colaboração  $G_{\text{colab}}$ 

<b>Nó</b>	<b>Grau</b>	<b>Betweenness</b>	<b>Dist. média</b>	<b>Dist. máx.</b>
74BM	21	0,289	1,53	3
70BM	16	0,133	1,72	3
47BM	13	0,145	1,69	3
79BF	10	0,139	1,81	3
75BM	11	0,054	1,89	3

Com base nesses indicadores, o nó 74BM foi escolhido como aluno de referência para o cálculo do Índice de Colaboração Escolar, inspirado na ideia do número de Erdős. A partir desse nó, foram calculadas as distâncias mínimas até os demais alunos da rede.

A Tabela 18 apresenta um recorte dos valores obtidos, agrupados por índice de colaboração.

Tabela 18 – Índice de Colaboração Escolar no grafo  $G_{\text{colab}}$  (referência: 74BM)

Nome/Nó	Índice de Colaboração	Nós com mesmo índice	% acumulado na rede
74BM	0	1	2,7%
42BM	1	19	54,1%
46BM	1	19	54,1%
47BM	1	19	54,1%
48BF	1	19	54,1%
51BM	1	19	54,1%
55BM	1	19	54,1%
61BM	1	19	54,1%
62BM	1	19	54,1%
64BM	1	19	54,1%
65BM	1	19	54,1%
66BM	1	19	54,1%
68BF	1	19	54,1%
69BF	1	19	54,1%
70BM	1	19	54,1%
71BF	1	19	54,1%
72BF	1	19	54,1%
77BF	1	19	54,1%
79BF	1	19	54,1%
81BF	1	19	54,1%
44BF	2	15	94,6%
45BF	2	15	94,6%
50BM	2	15	94,6%
52BM	2	15	94,6%
53BM	2	15	94,6%
56BM	2	15	94,6%
57BF	2	15	94,6%
59BM	2	15	94,6%
60BM	2	15	94,6%
67BM	2	15	94,6%
73BF	2	15	94,6%
75BM	2	15	94,6%
76BM	2	15	94,6%
78BF	2	15	94,6%
80BM	2	15	94,6%
49BF	3	2	100,0%
63BF	3	2	100,0%

Os resultados mostram que mais da metade dos alunos está a apenas um passo de 74BM na rede de colaboração (índice 1), e praticamente todos os demais estão a distância 2. Apenas dois estudantes aparecem com índice 3. Isso indica uma rede de trabalhos em grupo relativamente integrada, em que a maior parte da turma está próxima, em termos de colaboração, de um mesmo conjunto de colegas.

Rede de Colaboração Escolar - Visualização Egocêntrica  
 Centro: 74BM (Índice de Colaboração = 0)

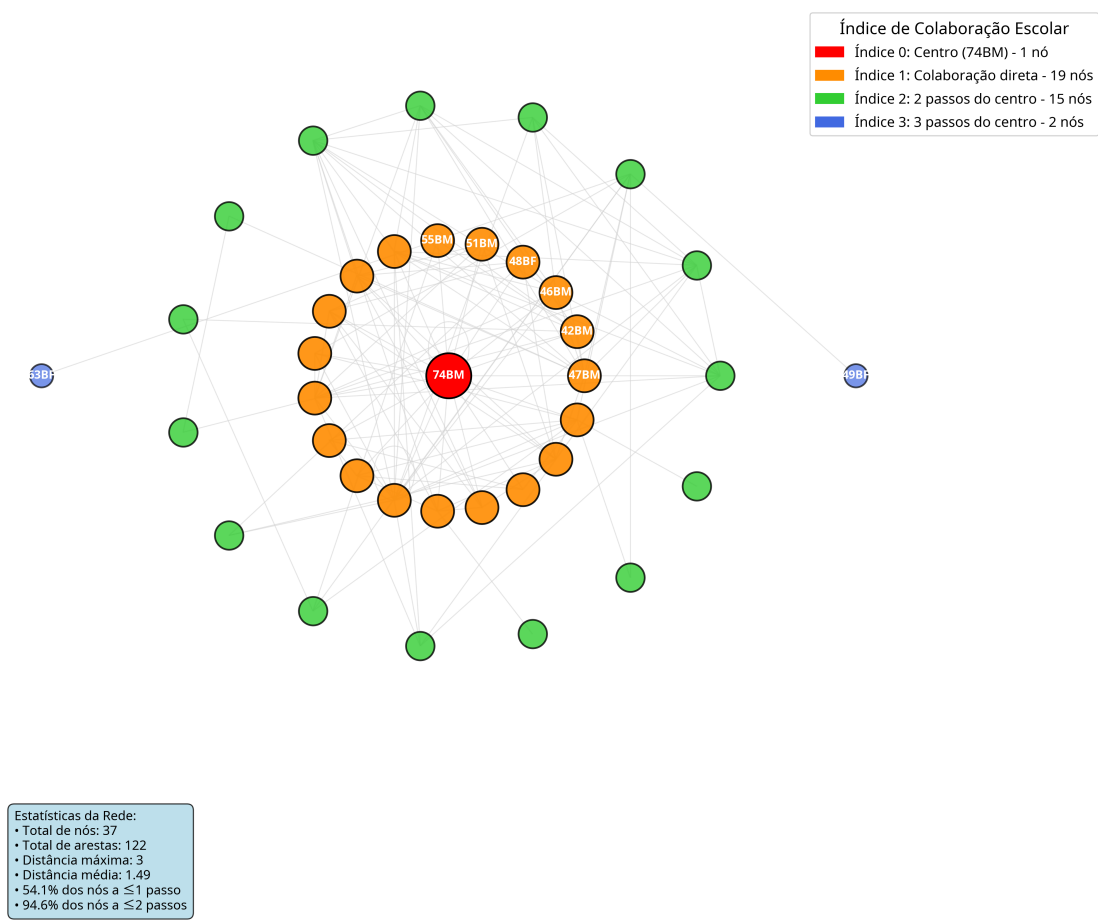


Figura 9 – Visualização do grafo  $G_{colab}$

## 5 Conclusões

### 5.1 Síntese e Contribuições

A prática desenvolvida demonstrou que a Teoria dos Grafos pode funcionar como um recurso pedagógico viável para introduzir conceitos matemáticos a partir de situações sociais próximas aos estudantes. No caso desta pesquisa, o processo de eleição de representante de turma se mostrou um contexto motivador e acessível, permitindo que os alunos percebessem que ideias como “importância” e “influência” podem ser quantificadas de diferentes maneiras.

O Índice de Colaboração Acadêmica, inspirado no número de Erdős, revelou-se um exemplo simples e eficaz para discutir distâncias em grafos e temas ligados à conectividade. Além disso, as redes formadas espontaneamente pela turma apresentaram características típicas de redes de pequeno mundo, com caminhos curtos entre os alunos e certo nível de agrupamento.

A leitura estrutural dessas redes também se mostrou útil do ponto de vista pedagógico, oferecendo um diagnóstico complementar da dinâmica social da turma. Chamou atenção o fato de que alguns estudantes com alta centralidade — seja por PageRank, grau, intermediação ou proximidade — não se interessaram ou não se perceberam como possíveis representantes. Isso sugere que a percepção intuitiva de liderança pode ser bem diferente das medidas quantitativas de influência, reforçando a utilidade desse tipo de análise para identificar possíveis lideranças menos evidentes, padrões de colaboração e até casos de isolamento.

### 5.2 Limitações, Implicações Práticas e Considerações Finais

Como ocorre em estudos exploratórios, esta pesquisa apresenta algumas limitações. A coleta de dados ocorreu em um único momento, oferecendo apenas uma fotografia estática das relações da turma, sem captar mudanças ao longo do ano letivo. Além disso, o estudo foi realizado em uma única escola e com estudantes do 3º ano, o que naturalmente limita a generalização dos resultados. A análise da colaboração acadêmica, por razões de tempo, pôde ser aplicada apenas a uma turma.

Apesar disso, os resultados apontam aplicações práticas importantes. Professores e gestores podem se beneficiar de análises semelhantes para compreender melhor a dinâmica relacional de suas turmas, organizar grupos de trabalho de forma mais eficiente e identificar estudantes que necessitam de apoio para integração social. A metodologia

pode transformar percepções intuitivas em diagnósticos fundamentados, contribuindo para práticas pedagógicas mais conscientes.

Espera-se que este trabalho incentive novas experiências que aproximem matemática, tecnologia e educação, criando oportunidades para práticas pedagógicas mais integradas, inclusivas e alinhadas às necessidades reais dos estudantes.

## Referências

- BARABÁSI, A.-L. *Linked: a nova ciência dos networks*. São Paulo: Hemus Editora, 2009. ISBN 8528906124. Citado na página 17.
- BENJAMIN, A.; CHARTRAND, G.; ZHANG, P. *The fascinating world of graph theory*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. Citado na página 14.
- CHARTRAND, G. *Introductory graph theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página 14.
- LEMIEUX, V. O. *Mathieu. Análise estrutural das redes sociais*. [S.l.]: Lisboa: Instituto Piaget/Epistemologia e Sociedade, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: introdução e prática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- NEWMAN, M. E. J. *Networks: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2010. ISBN 978-0-19-920665-0. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.
- WATTS, D. J. *Seis graus de separação: a evolução da ciência de redes em uma era conectada*. São Paulo: Leopardo, 2009. Citado na página 17.