UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
ICT-UNIFESP - Campus São José dos Campos

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Construções geométricas interessantes

Robert Miranda de Oliveira
Orientador(a): Prof.ª Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Março/2021

Título: *Construções Geométricas interessantes.*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Oliveira, Robert Miranda de
Construções Geométricas Interessantes / Robert Miranda de Oliveira Orientador(a) Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz. - São José dos Campos, 2021.
110 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Paulo - Instituto de Ciência e Tecnologia, 2021.

1. Geometria. 2. Construções geométricas. 3. Régua e compasso. 4. Polígonos regulares. I. Ferraz, Vanessa Gonçalves Paschoa, coorientador(a). II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama
Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

Robert Miranda de Oliveira

Construções Geométricas Interessantes

Presidente da Banca:
Profª. Drª. Vanessa Gonçalves Pachoa Ferraz

Banca examinadora:
Prof. Drª. Mirela Vanina de Melo
Prof. Drª. Graziele Cristiane Jorge
Profª. Drª. Kelly Cristina Jorge

Data da defesa: 01 de março de 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar por me abençoar, iluminar e não me deixar desanimar nos momentos de fraqueza, de cansaço ou de desânimo. Agradeço minha esposa (Cristina) e filhos (Albert e Mateus) pelo apoio e compreensão durante toda jornada do mestrado. Agradeço aos amigos Luis Takamitsu Uehara (o Japa) pelo incentivo e parceria, Quitéria Costa da Silva Uehara (in memória) que desde o ínicio incentivou, apoiou e acreditou e Caroline Stefani de Deus, amiga de estudos. Agradeço a todos meus professores do PROFMAT e em especial à minha orientadora Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz que teve paciência e sempre acreditou em mim. Agradeço também aos amigos da turma do PROFMAT (Júlio, Gisele, Marina, Arthur, José e Felipe) companheiros de jornada que deixaram às sextas-feiras mais leves e divertidas. Muito obrigado a todos que participaram direta ou indiretamente desse mestrado, e que trago em meu coração.

RESUMO

Neste texto foram selecionadas e exploradas construções geométricas interessantes que possam ser abordadas na sala de aula ou em projetos extra-classe com alunos do ensino fundamental e ensino médio. São explicados todos os passos para a construção destas figuras com uso de régua e compasso. A ideia é que inicialmente o professor da turma ajude os alunos e depois os alunos adquiram habilidade para seguir os passos de construção sozinhos. Algumas construções servem de motivação para a introdução e/ou manutenção de conceitos do plano pedagógico como: ângulos, paralelismo, perpendicularidade, proporcionalidade, semelhança de figuras, simetria. O passo a passo das construções também ficará em um banco de dados divulgado na internet a disposição de todos.

Palavras-chave: 1. Geometria. 2. Construções geométricas. 3. Régua e compasso. 4. Polígonos regulares.

ABSTRACT

In this text was interesting geometric constructions selected and explored, than can be approached in the classroom or in extra-class projects with elementary and high school students. Are explained all the steps for the construction of these figures with ruler and compass will be explained. The idea is that initially the class teacher helps the students and than the students acquire the ability to follow the construction steps on their own. Some constructions serve as a motivation for the introduction and/or maintenance of concepts from the pedagogical plan such as: angles, parallelism, perpendicularity, proportionality, similarity of figures, symmetry. The construction step-by-step will be in a database published on the internet available to all.

Keywords: 1. Geometry. 2. Geometric constructions. 3.Ruler and compass. 4. Regular polygons.

Sumário

1 Introdução **3**

2 A Geometria com régua e compasso **5**

3 Triângulos **9**

3.1 Congruência de triângulos 14
3.2 Semelhança de triângulos 15

4 Construções elementares **18**

4.1 Transporte de segmento 19
4.2 Transporte de Ângulo 21
4.3 Bissetriz 23
4.4 Ponto médio 25
4.5 Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto fora da reta. . . . 27
4.6 Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto desta reta 30
4.7 Mediatriz 32
4.8 Retas paralelas 35
4.9 A 4ª proporcional 37
4.10 Divisão de um segmento em partes iguais 39
4.11 Arco Capaz 42
4.12 O Segmento Áureo 45
4.12 O segmento áureo externo 46
4.13 Triângulo Áureo 48
4.13 Triângulo áureo 50

5 Construção de ângulos notáveis **52**

5.1 Construção dos ângulos de 60°, 120°, 30° e 15° 52
5.2 Construção dos ângulos de 90°, 45° e 135° 54

6 Polígonos regulares **56**

6.1 Triângulo equilátero 59
6.2 Quadrado - 1° modo 61
6.3 Quadrado - 2° modo 65
6.4 Pentágono regular 68
6.5 Hexágono regular 70
6.6 Octógono regular 73

7 Construções interessantes **77**

7.1 Bandeira do Brasil 77
7.2 Mandala com triângulo equilátero 85
7.3 Mandala com quadrado 88
7.4 Mandala com hexágono regular 92
7.5 Mandala com octógono regular 98
7.6 Estrela de 5 pontas 102

8 Atividades propostas de construções geométricas 104

9 Considerações Finais 109

1 Introdução

Como desenhar um triângulo equilátero perfeito? Como fazer uma estrela de cinco ou seis pontas perfeita? Como dividir um segmento dado em treze partes iguais sem medi-lo? Atualmente com o acesso fácil a um computador e impressora se desejarmos obter a figura de uma estrela de cinco pontas perfeita ou de alguma outra figura geométrica, podemos resolver facilmente esse problema buscando na internet e imprimindo a figura desejada. Apesar disso, fazer a construção de uma estrela usando apenas papel, lápis, régua e compasso continua sendo um desafio bastante motivador e que desenvolvem diversas habilidades cognitivas.

A motivação e a justificativa da escolha do tema surgem das experiências vivenciadas em sala de aula, tanto em escolas públicas quanto privadas, em que é notório que os alunos possuem deficiências nos conhecimentos relacionados à geometria.

É necessário frisar que o uso da construção geométrica como ferramenta de aprendizagem da geometria plana facilita à compreensão dos alunos na prática cotidiana no ambiente escolar, pois proporciona uma aprendizagem significativa, no qual os discentes tornam-se agentes da construção do seu conhecimento e não meros receptores de informações.

Apesar dos recursos tecnológicos estarem em destaque no campo educacional como instrumentos facilitadores da aprendizagem, e possibilitando obter visualizações de figuras geométricas dos mais diversos tipos; é importante atentar para as atividades de construção passo a passo em que o aluno participa ativamente de cada etapa e da obtenção do resultado final, e não apenas aprecia algo pronto, apenas vizualizando.

As construções geométricas podem parecer atividades simples, mas certamente no desenvolvimento delas os educandos podem desenvolver diversas habilidades como entendimento e seguimento de instrução, fazer bem feito para não ter que refazer, compreender a necessidade de sequenciamento de tarefas e poder perceber como a partir de elementos simples pode-se chegar a objetos bastante complexos.

Ressaltamos também que a matemática precisa ser apresentada de forma diversificada e atrativa, para que os alunos quebrem certos bloqueios e preconceitos envoltos a esta disciplina, e passem a adotá-la como matéria de acesso comum a todos, e enxerguem mais suas conexões e praticidade com o cotidiano, sabendo que a geometria sempre esteve presente e continua tendo grande importância na sociedade humana. Este trabalho tem a finalidade de fornecer materiais compilados e incentivar professores do ensino fundamental e médio a explorarem construções geométricas manuais (com o uso de compasso e régua) ou materiais informatizados (software). O passo a passo das construções está disponível em `https://sites.google.com/view/profrobertmdeoliveira/home` a disposição de todos, especialmente de professores e alunos.

No Capítulo 2 tem-se uma apresentação sobre alguns conceitos básicos e suas respectivas notações algébricas ou gráficas, tais como distância entre pontos, reta, semirreta, ângulos, arcos, retas paralelas e perpendiculares. Além disso apresentamos também os instrumentos que serão utilizados para as construções (régua e compasso).

O Capítulo 3 trata da definição de triângulos, seus elementos e notações, classificação quanto aos lados e ângulos, congruência e semelhança de triângulos.

Nos Capítulo 4 apresentamos as construções elementares, transporte de ângulos e segmentos, bissetriz, ponto médio, retas perpendiculares e paralelas, a quarta proporcional, divisão de segmentos em partes iguais, mediatriz e arco capaz, que serão a base para outras construções.

O Capítulo 5 trata-se das construções dos ângulos notáveis que são de grande importância para o estudo da trigonometria.

No Capítulo 6 apresentamos o conceito de polígonos regulares, quando esses polígonos são construtíveis, além das construções passo à passo de alguns dos polígonos regulares bem como suas justicativas.

No Capítulo 7 sugerimos algumas construções interessantes, como a Bandeira do Brasil, a estrela de 5 pontas e mandalas.

E, finalmente no capítulo 8 será apresentada uma proposta de algumas atividades com construções geométricas.

2 A Geometria com régua e compasso

O conceito de ponto, distância entre pontos, reta, semireta, ângulo e plano (que não abordados) são conceitos básicos que deve-se assumir. Temos conhecimento intuitivo desses conceitos, decorrente da experiência e da observação do espaço ao nosso redor. Todos os demais conceitos de geometria são definidos a partir desses.

O ponto e juntamente o conceito de distância entre dois pontos são os conceitos mais fundamentais.

Cada reta é um conjunto de pontos de tal forma que dados dois pontos existe uma única reta que contém estes pontos.

A semirreta está contida em uma reta, tem um ponto chamado de ponto inicial ou de origem da semirreta, e é caracterizada por um segundo ponto contido nela.

Segmento de reta, dados dois pontos distintos, é a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles.

O ângulo [BARBOSA 2006] pode ser definido como a reunião de duas semirretas de mesma origem. A origem comum é chamada de vértice do ângulo e o ângulo é denotado por $A\widehat{O}B$ (nesta notação a letra indicativa do vértice aparece entre as outras duas, as quais são pontos das semirretas que formam o ângulo).

Para introduzir as construções geométricas os alunos devem primeiramente suprimir todas as dúvidas relativas a pontos, retas, semirretas, ângulos e arcos.

Notações:

Adotaremos as seguintes notações.

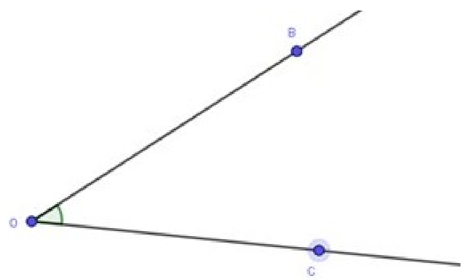
- **Ponto** – letras maiúsculas latinas: A, B, C,...
- **Reta**
  - letras minúsculas latinas: a, b, c,...
  - $\overleftrightarrow{AB}$ a reta que passa por A e B.
- **Segmento de reta** - Representaremos um segmento de reta pelo seu pontos de extremidades, sendo assim, um segmento com extremidades nos pontos A e B será denotado por AB e sua medida representada por $\overline{AB}$.
- **Retas paralelas** - Para denotarmos que uma reta a é paralela a uma reta b escreveremos $a \parallel b$.

- **Retas perpendiculares** - Para denotarmos que uma reta a é perpendicular a uma reta b escreveremos $a \perp b$.

- **Congruência** - Para denotarmos a congruência entre duas figuras usaremos a notação $\equiv$.

- **Semirreta** - $\overrightarrow{AB}$ a reta com início em A e passa por B.

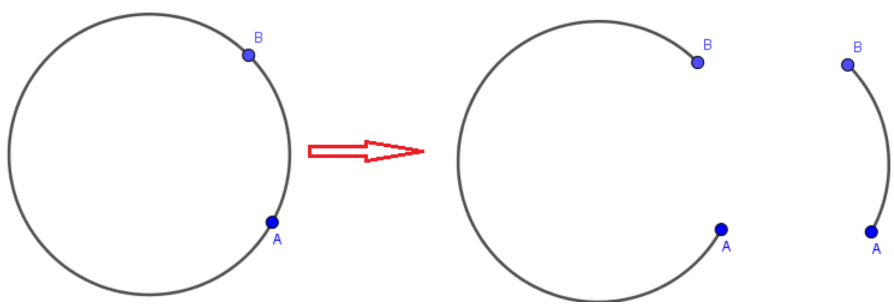
- **Ângulo**



ângulo $B\widehat{O}C$ ou ângulo $\widehat{O}$

- **Arcos de circunferência**

  Escolhidos dois pontos distintos A e B de uma circunferência, estas a dividem em duas partes, como mostra a figura a seguir:



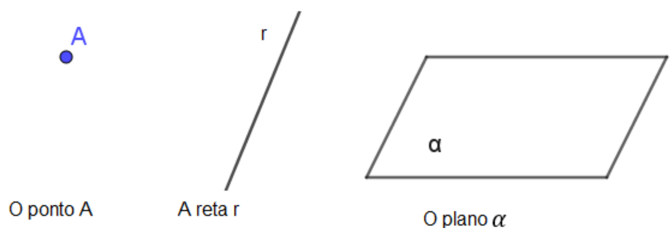
  Qualquer um desses dois pedaços da circunferência recebe o nome de arco de circunferência (às vezes dizemos simplesmente arcos).

  Para identificar os arcos, usamos os pontos A e B; mas isso não basta, porque se dissermos arco AB simplesmente, não saberemos qual das duas figuras anteriores considerar. Por isso, adotamos a seguinte convenção: ao dizer arco AB ou escrever $\widehat{AB}$, estaremos considerando o conjunto de todos os pontos da circunferência que encontramos quando caminhamos sobre a circunferência de A até B no sentido anti-horário. Segundo essa convenção, no desenho anterior o arco $\widehat{AB}$ é o menor e o arco $\widehat{BA}$ é o maior.

- **Ângulo central** - Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Se numa circunferência de centro O um ângulo central determina um arco $\widehat{AB}$, dizemos que $\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$, ou $\widehat{AB}$ é o arco subtendido por $A\hat{O}B$. A medida de um arco de circunferência em graus é igual à medida do ângulo central correspondente.

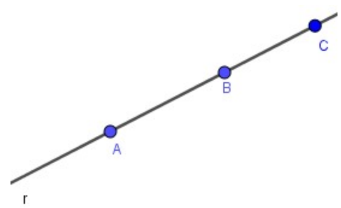
- **Ângulo inscrito** - Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e cujas semirretas são secantes a ela. Um ângulo inscrito é a metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

b) Notações gráficas

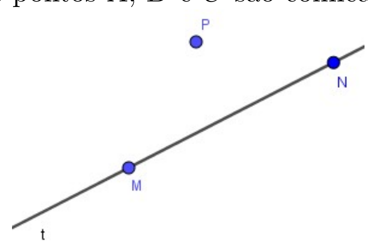


Colinearidade

Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta. Quando os pontos não pentecem a mesma reta são chamados de não colineares.



Os pontos A, B e C são colineares



Os pontos M, N e P não são colineares.

Instrumentos utilizados na Construção Geométrica

Segundo Wagner (2000), as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega.

A Régua

A régua é usada exclusivamente para ligar dois pontos e construir retas, semirretas ou segmentos de reta. Essa régua pode ser graduada ou não. Normalmente as réguas que os alunos utilizam são graduadas em milímetros e centímetros.

Fonte: https://www.kalunga.com.br/ acessado em 05/02/2021

O compasso

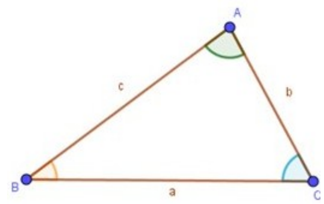
O compasso é um instrumento com muitas utilidades em desenho geométrico. Dado um ponto e uma distância $r > 0$ ele pode marcar todos os pontos que tem a distância r do ponto dado. É possível construir circunferências, arcos, ângulos, transportar ângulo e segmentos. Ele possui duas hastes: uma chamada ponta seca, onde encontramos uma ponta metálica e na outra encontra-se o grafite que deve estar sempre apontado. As duas hastes do compasso devem ter o mesmo tamanho.

Fonte: https://www.kalunga.com.br/ acessado em 05/02/2021

3 Triângulos

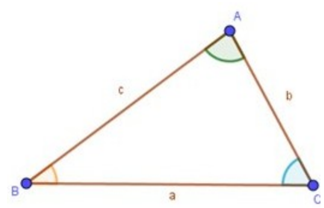
[DOLCE 2006]

Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo.



Notação: ABC ou $\triangle ABC$

Elementos do triângulo



Vértices: os pontos A, B e C são os vértices do $\triangle ABC$.

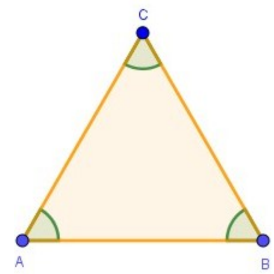
Lados: os segmentos AB (de medida c), AC (de medida b) e BC (de medida a) são os lados do triângulo.

Ângulos: os ângulos $B\widehat{A}C$ ou $\widehat{A}$, $A\widehat{B}C$ ou $\widehat{B}$, $A\widehat{C}B$ ou $\widehat{C}$ são os ângulos do $\triangle ABC$ (ou ângulos internos do $\triangle ABC$).

Diz-se que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são respectivamente, opostos.

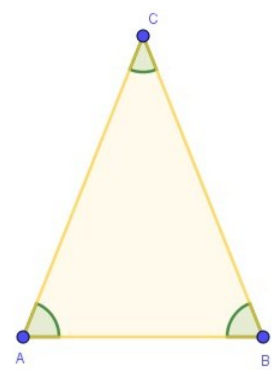
Classificação quanto aos lados

- **Equilátero** significa que têm os três lados congruentes.

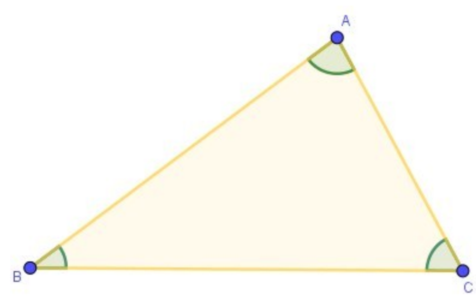


Observe que o triângulo acima possui os três lados congruentes, ou seja, AB = AC = BC.

- **Isósceles** significa têm ao menos dois lados congruentes.



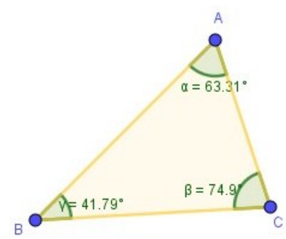
- **Escaleno** siginifica que dois quaisquer lados não são congruentes.



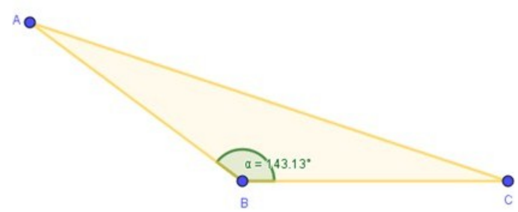
Classificação de triângulos quanto aos ângulos

- **Retângulo**: tem um ângulo de 90° (reto).

- **Acutângulo:** tem os três ângulos agudos, ou seja, todos os ângulos são menores que 90°.



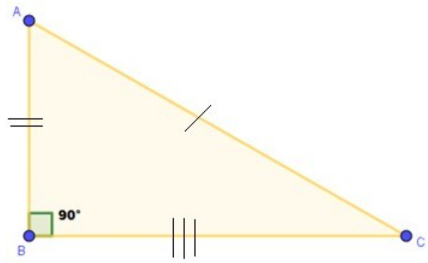
- **Obtusângulo:** tem um ângulo obtuso, ou seja, um de seus ângulos maior que 90°.



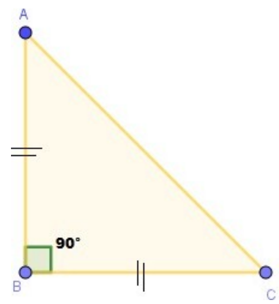
Classificação quanto aos lados e ângulos

Há sete tipos de triângulos e sua classificação depende da disposição dos ângulos podendo ser: isósceles, equilátero, escaleno, retângulo, obtuso, agudo ou equiângulo.

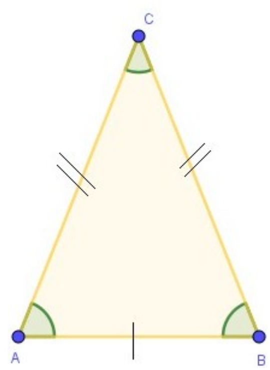
- Triângulo retângulo escaleno – possui um ângulo reto (90°) e dois quaisquer lados não são congruentes.



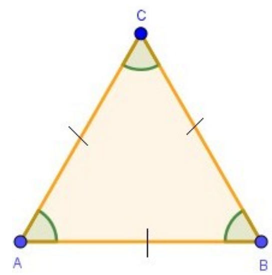
- Triângulo retângulo isósceles – possui um ângulo reto (90°) e tem dois lados congruentes.



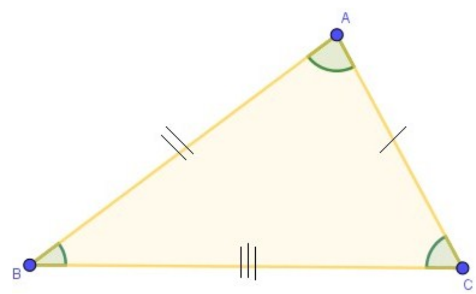
- Triângulo acutângulo isósceles – possui os três ângulos internos agudos e tem dois lados congruentes.



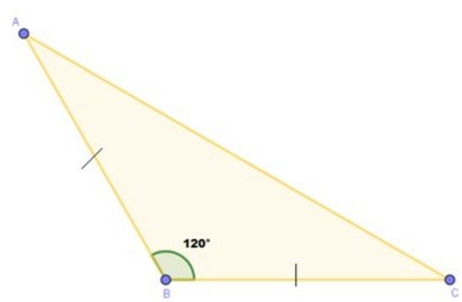
- Triângulo acutângulo equilátero - possui os três ângulos internos agudos e congruentes, e tem os 3 lados congruentes.



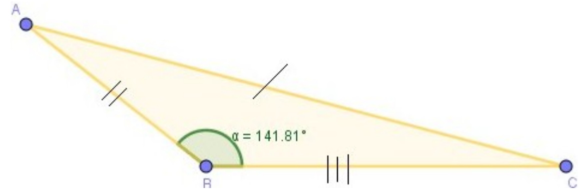
- Triângulo acutângulo escaleno – tem os três ângulos internos agudos e dois quaisquer lados não são congruentes.



- Triângulo obtusângulo isósceles – tem um ângulo obtuso e dois lados congruentes.

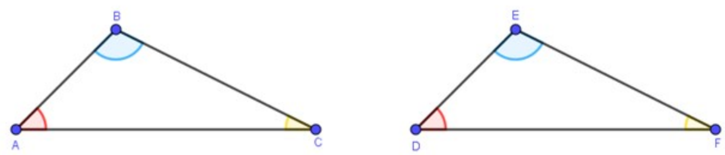


- Triângulo obtusângulo escaleno – tem um ângulo obtuso e dois quaisquer lados não são congruentes.



3.1 Congruência de triângulos

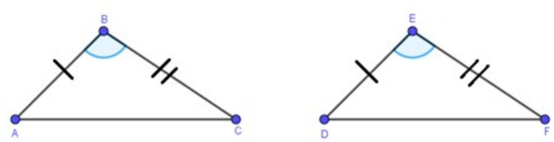
Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:
- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.



$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{AB} \equiv \overline{DE} & & \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} & e & \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} & & \hat{C} \equiv \hat{F} \end{pmatrix}$$

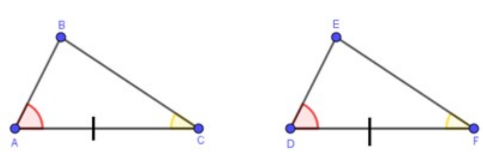
Casos de congruência

1° Caso – LAL (Lado – Ângulo – Lado)
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.



$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \end{matrix}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \quad \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

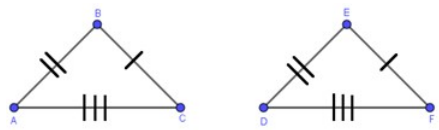
2° Caso – ALA (Ângulo – Lado – Ângulo)
Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.



$$\left.\begin{array}{c} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{array}\right\} \stackrel{ALA}{\Longrightarrow} \quad \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

3° Caso – LLL (Lado – Lado – Lado)

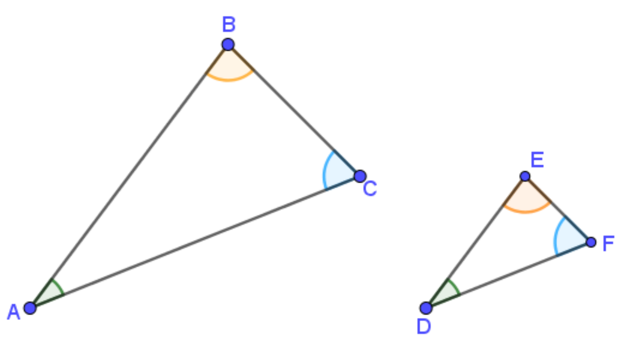
Se dois triângulos têm respectivamente congruentes os seus três lados, então esses triângulos são congruentes.



$$\left.\begin{array}{c} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \end{array}\right\} \stackrel{LLL}{\Longrightarrow} \quad \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

3.2 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruente e os lados homólogos proporcionais. Dois lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes. Utilizaremos o símbolo $\sim$ para indicar a semelhança entre triângulos.



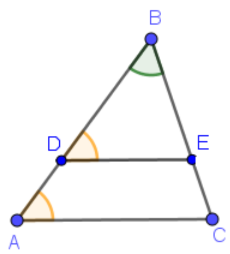
$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow (\widehat{A} \equiv \widehat{D},\ \widehat{B} \equiv \widehat{E}\ e\ \widehat{C} \equiv \widehat{F}) \quad e\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

Razão de semelhança

Sendo k a razão entre os lados homólogos, k é chamado de razão de semelhança dos triângulos.

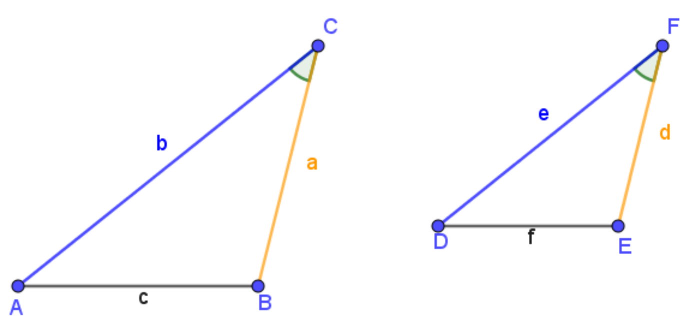
Casos ou critérios de semelhança

1° caso (AA)
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."



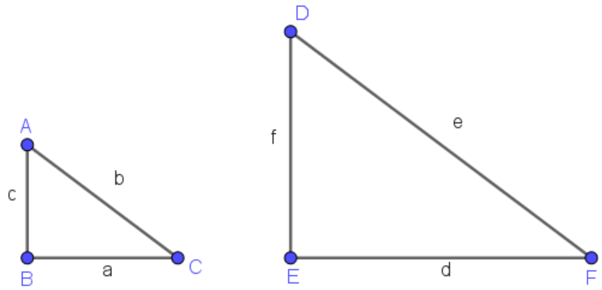
($\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ (ângulos correspondentes), $\widehat{B}$ é comum). Portanto pelo caso (AA) o $\triangle$ABC$\sim$ $\triangle$DBE.

2° caso ((LAL) "Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."



$\frac{b}{e} = \frac{a}{d} = k$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$. Portanto pelo caso (LAL) o $\triangle$ABC$\sim$ $\triangle$DEF.

3° caso ((LLL) "Se dois triângulos tem os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

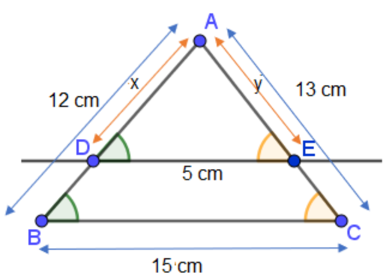


$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d} = k$. Portanto pelo caso (LLL) o △ABC∼ △DEF.

Exemplo

Exercício resolvido:

Um triângulo ABC tem os lados $AB = 12$ cm, $AC = 13$ cm e $BC = 15$ cm. A reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado BC do triângulo determina um triângulo ADE, em que $DE = 5$ cm. Vamos calcular $AD = x$ e $AE = y$.



Resolução:

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \widehat{D} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{E} \equiv \widehat{C}$) pois são ângulos correspondentes, então pelo caso (AA) o $\triangle(ABC) \sim \triangle(DEF)$.

Logo temos:
$\frac{x}{12} = \frac{y}{13} = \frac{5}{15} \Rightarrow x = 4$ e $y = \frac{13}{3}$ e portanto $AD = 4cm$ e $AE = \frac{13}{3}cm$.

4 Construções elementares

As construções geométricas existem desde a antiguidade e tiveram grande importância no desenvolvimento da matemática. Eduardo Wagner escreve em seu livro [WAGNER 2016] que "O desenvolvimento acelerado da Matemática no mundo antigo deveu-se a gregos geniais, pensadores, filósofos, cientistas que colocaram o raciocínio, a lógica e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. Tudo é número disse Pitágoras sintetizando o pensamento que tudo na natureza pode ser explicado pelos números, ou seja, pela Matemática. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento da Matemática."

Nesta seção apresentamos o passo-a-passo de algumas construções geométricas elementares como transporte de segmento, transporte de ângulo, bissetriz, ponto médio, retas perpendiculares, retas paralelas, a quarta proporcionoal, divisão de segmentos em partes iguais, mediatriz e arco capaz. A principal referência foi o livro "Construções geométricas"de Eduardo Wagner [WAGNER 2007]. As figuras foram feitas pelo próprio autor deste texto no aplicativo *Geogebra*.

Cada construção será apresentada em uma nova página para facilitar a impressão das construções individualmente.

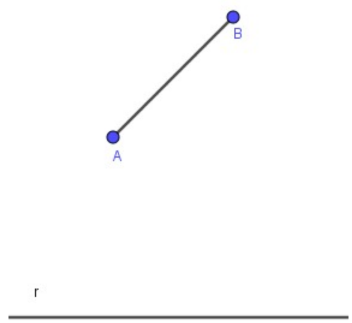
Algumas sugestões para o uso destas construções:

- O professor entrega ao aluno o roteiro de construções para que os alunos desenvolvam as construções, individualmente ou em grupo.
- Em duplas, um dos alunos lê os passos e o outro tem que realizar o que foi dito.
- Sugerir que os alunos façam a construção de uma mandala a partir da construção de um polígono regular.
- Sugerir situações problemas que possam ser resolvidas usando a construção geométrica.
- Construir com os alunos o tangram.

4.1 Transporte de segmento

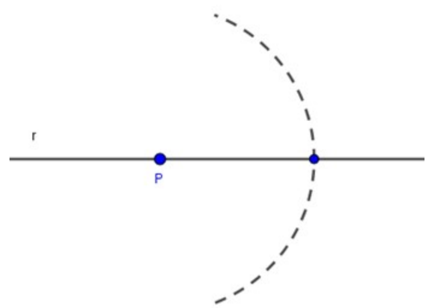
Transportar segmentos significa traçar um segmento de mesma medida sobre uma reta ou semirreta dada.

Dados o segmento AB e a reta r, transportar o segmento AB para reta r.

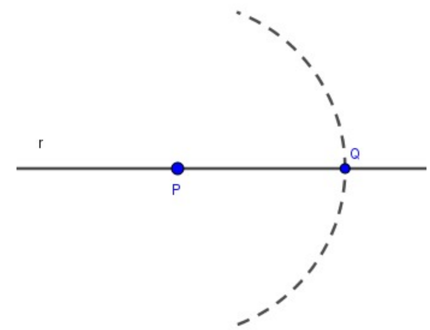


Passo 1. Marque um ponto P na reta r.

Passo 2. Centre compasso em P, abertura igual segmento AB e trace um arco de circunferência de modo que corte a reta r.



Passo 3. Marque o ponto Q, intersecção da reta r com o arco.



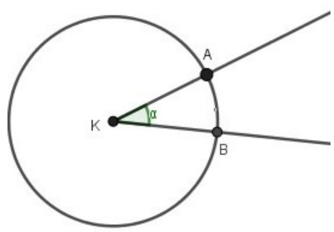
O segmento PQ é congruente ao segmento AB.

4.2 Transporte de Ângulo

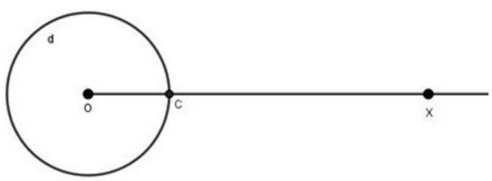
Transportar ângulos significa construir um ângulo, congruente ao ângulo dado, sobre uma semirreta que será um dos lados desse ângulo.

Dado um ângulo α e a semirreta $\overrightarrow{OX}$, construa um ângulo $X\widehat{O}Y$ que seja congruente a α.

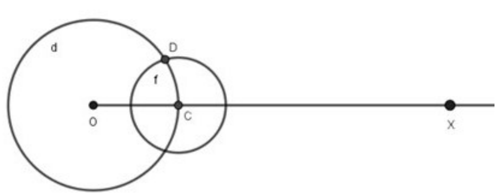
Passo 1. Seja K o vértice de α, com ponta seca do compasso no vértice K do ângulo α dado e raio com abertura qualquer faça uma circunferência formando os pontos A e B na interseção com os lados do ângulo.



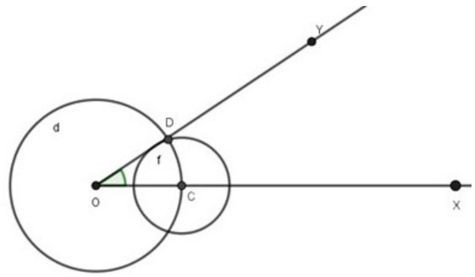
Passo 2. Sem modificar a abertura do compasso trace a circunferência d com centro em O, marque o ponto C intersecção dessa circunferência com semirreta OX.



Passo 3. Abra o compasso com a medida do segmento AB de centro C e trace a circunferência f e marque o ponto D uma das intersecções da circunferência d com a circunferência f.



Passo 4. Trace a semirreta $\overrightarrow{OY}$ passando pelo ponto D, o ângulo $D\widehat{O}C = \alpha$.

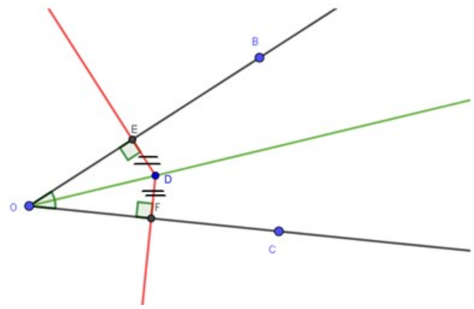


Justificativa:

Os triângulos AKB e DOC são congruentes (portanto mesmo ângulo) pelo caso de congruência LLL.

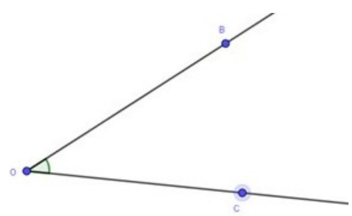
4.3 Bissetriz

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que contém todos os pontos equidistantes às semirretas que definem o ângulo. Isto é, D pertence à bissetriz de uma ângulo $B\widehat{O}C$ se a distância de D à reta $\overleftrightarrow{OB}$ é igual a distância de D à reta $\overleftrightarrow{OC}$. Pode-se demonstrar que a bissetriz $\overrightarrow{OD}$ é a reta que divide o ângulo $B\widehat{O}C$ em dois ângulos de mesma medida.

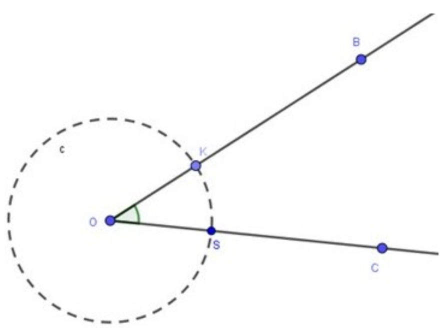


Construção passo a passo da bissetriz de um ângulo qualquer:

Passo 1. Seja $B\widehat{O}C$ o ângulo.

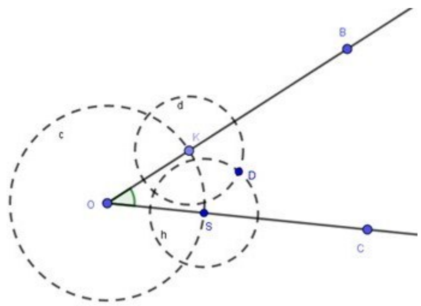


Passo 2. Trace uma circunferência c de raio qualquer e centro no vértice O, obtendo os pontos K e S que são respectivamente os pontos de interseçao das semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ com a circunferência c.

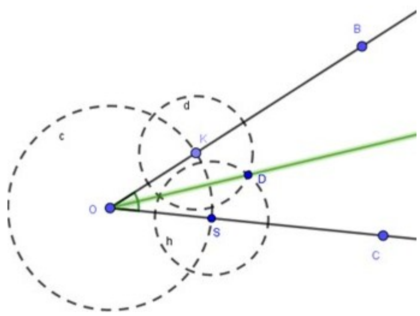


Passo 3. Em seguida trace as circunferências d e h de raios congruentes com centros em K e S respectivamente. As duas circunferências devem se intersectar formando o

ponto D.



Passo 4. Trace a semirreta $\overrightarrow{OD}$ que é a bissetriz do ângulo $B\widehat{O}C$.



Justificativa:

A semirreta $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz do ângulo $B\widehat{O}C$, pois pela construção feita, os triângulos SOD e KOD são congruentes (caso LLL) e portanto $S\widehat{O}D = D\widehat{O}K$.

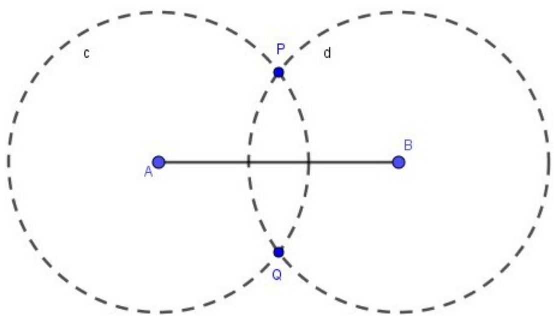
4.4 Ponto médio

Dado um segmento entre pontos A e B encontrar o ponto M sobre este segmento que tenha a mesma distância a A e a B.

Passo 1. Seja AB o segmento.

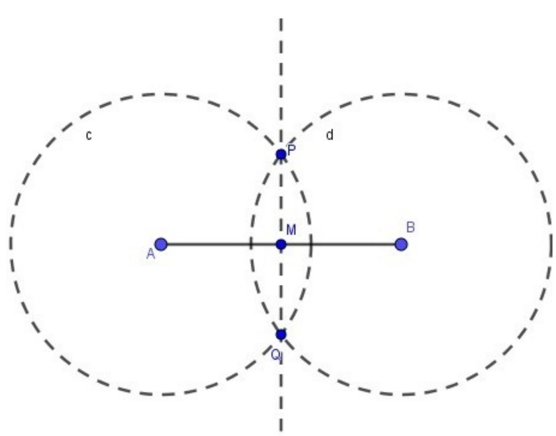
Passo 2. Trace duas circunferências c e d de mesmo raio (de forma que o raio tenha medida maior que a metade do segmento AB) e centros em A e B.

Passo 3. Chame de P e Q os pontos em que essas circunferências intersectam-se.



Passo 4. Trace a reta $\overleftrightarrow{PQ}$.

Passo 5. Marque M o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ com o segmento AB.



M é o ponto médio de AB.

Justificativa:

Os triângulos APQ e BPQ são congruentes (caso LLL) pois tem um lado em comum e os demais lados tem comprimento igual ao do raio das circunferências c e d que por construção tem mesmo raio. Logo $A\widehat{P}Q = B\widehat{P}Q$.

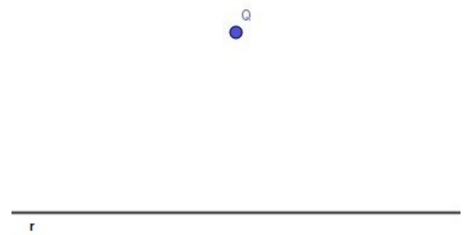
Portanto, os triângulos APM e BPM são congruentes (pelo caso LAL) pois $A\widehat{P}Q = B\widehat{P}Q$, $\overline{AP} = \overline{BP}$, e PM é lado comum.

Logo $\overline{AM} = \overline{BM}$ e, consequentemente M é o ponto médio de AB.

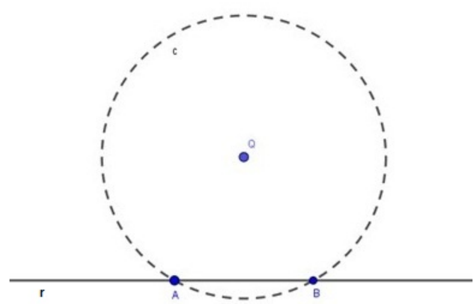
4.5 Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto fora da reta.

A reta perpendicular a uma reta dada é a reta cujos ângulos da interseçção com a reta dada são iguais.

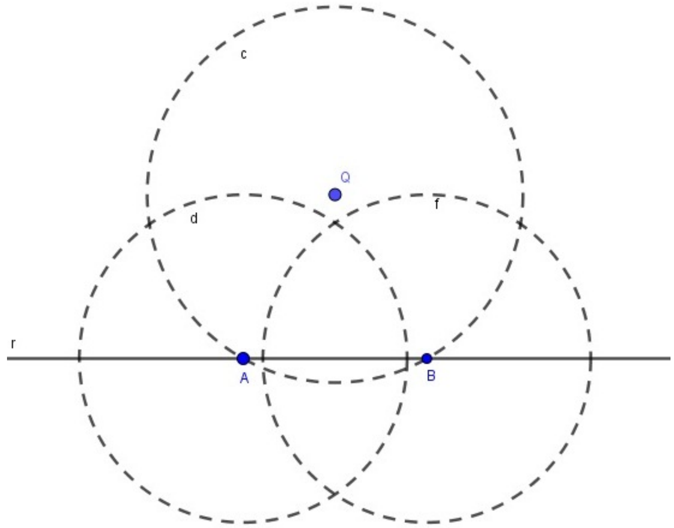
Dados uma reta r e um ponto Q fora dessa reta, encontrar a reta perpendicular à reta r que passa por Q.



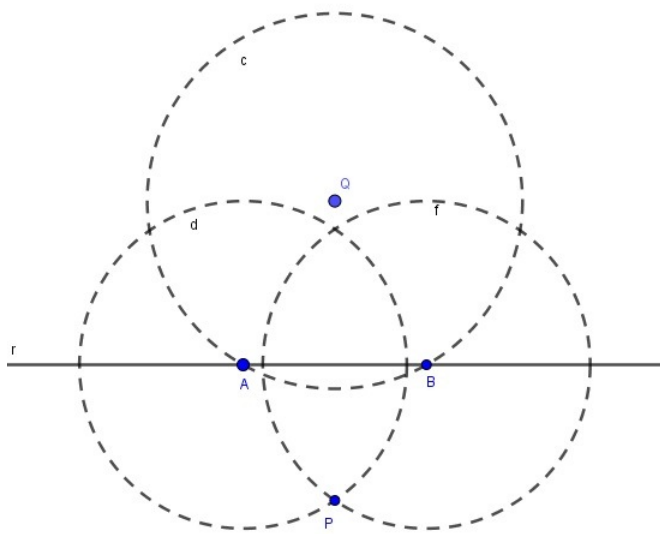
Passo 1. Centre o compasso em Q e trace uma circunferência c tal que intersecte a reta r em dois pontos distintos e denomine-os por A e B.



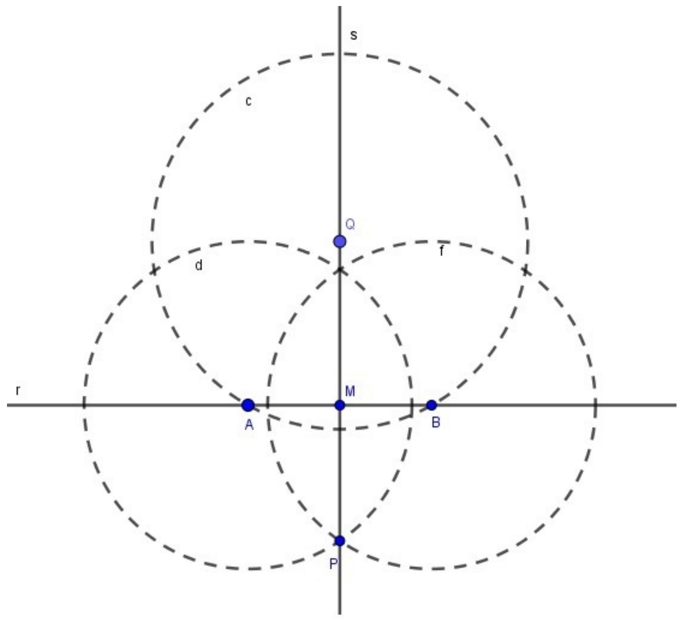
Passo 2. Vamos construir um ponto P que assim como o ponto Q tem mesma distância a A e a B. Para isso faça duas circunferências de mesmo raio: uma centrada em A e outra em B. (Na figura essas circunferências tem raio um pouco menor do que $\overline{AQ}$).



Passo 3. Marque o ponto P em uma das interesecções destas duas circunferências.



Passo 4. Trace a reta $s = \overleftrightarrow{PQ}$ e marque o ponto M, intersecção das retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e r.



A reta s é perpendicular a reta r.

Justificativa:

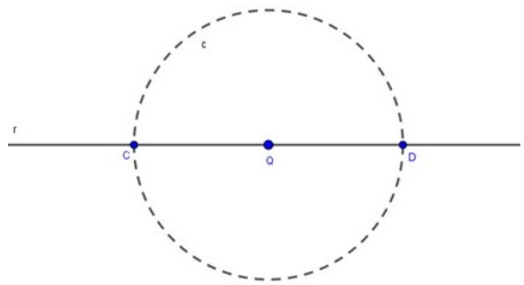
Os triângulos QAP e QBP são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$ tem medida do raio da circunferência c, $AP = BP$ são raios de circunferências que tem mesmo raio por construção e o lado QP é comum, logo $A\widehat{Q}P = B\widehat{Q}P$. Observe que $A\widehat{Q}P = A\widehat{Q}M$ pois são o mesmo ângulo, assim como $B\widehat{Q}P = B\widehat{Q}M$, portanto $A\widehat{Q}M = B\widehat{Q}M$. Os triângulos MQA e MQB são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$ tem medida do raio da circunferência c, $A\widehat{Q}M = B\widehat{Q}M$ e QM é comum. Portanto $A\widehat{M}Q = B\widehat{M}Q$ e são suplementares, portanto $A\widehat{M}Q = B\widehat{M}Q$, ou seja, $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular a reta r.

4.6 Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto desta reta

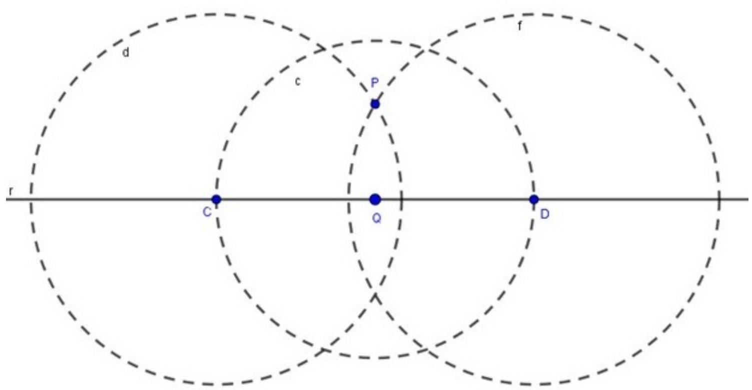
A reta perpendicular a uma reta dada é a reta cujos ângulos da interseççāo com a reta dada são iguais.

Dado uma reta r e um ponto Q pertencente a essa reta, trace uma reta perpendicular a r que passe por Q.

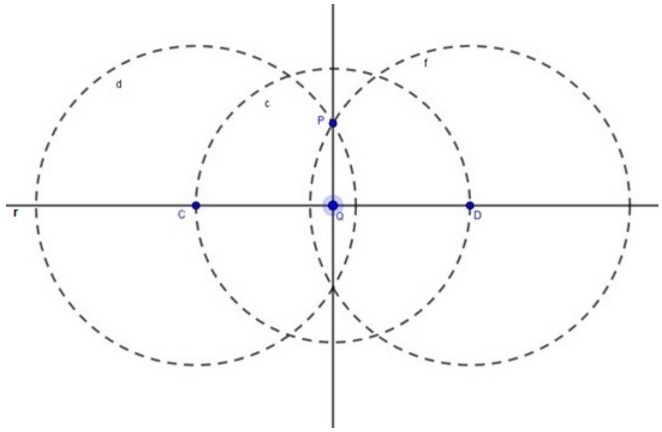
Passo 1. Com abertura qualquer trace a circunferência c com centro em Q.



Passo 2. Trace as circunferências d e f de raios congruentes, com centros respectivamente em C e D tais que as circunferências d e f se interseccem. Marque um dos pontos da interseção dessas circunferências como P.



Passo 3. Trace a reta $\overleftrightarrow{PQ}$. A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a reta r.

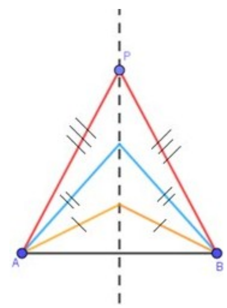


Justificativa:

Temos que os triângulos QCP e QDP são congruentes, pelo caso LLL, logo $P\widehat{Q}C = P\widehat{Q}D$.

4.7 Mediatriz

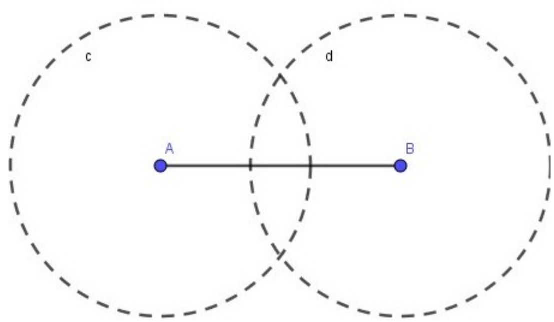
Dado um segmento AB, o conjunto de pontos P do plano tais que $\overline{PA} = \overline{PB}$ é a mediatriz do segmento AB. Ou seja, ela é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B. A mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento AB.



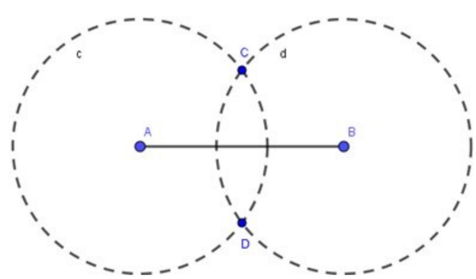
Construção passo a passo da mediatriz dado um segmento.

Passo 1. Seja AB o segmento.

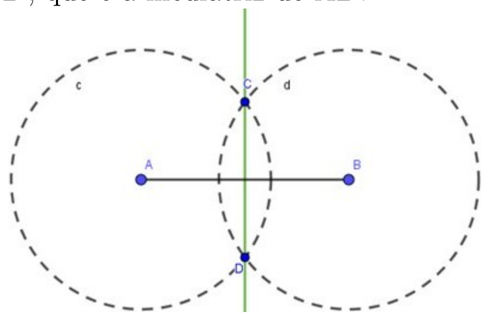
Passo 2. Trace as circunferências c e d com raios congruentes de modo que elas sejam secantes, com centro em A e B respectivamente.



Passo 3. Marque os pontos C e D, intersecções das circunferências c e d.



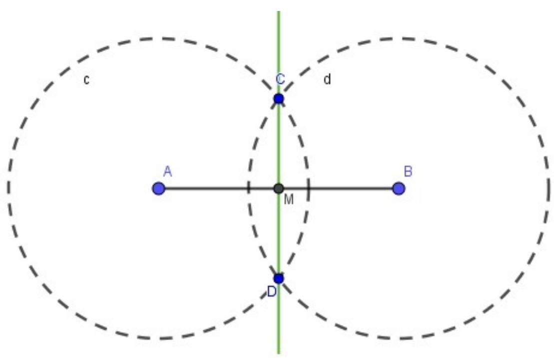
Passo 4. Trace a reta $\overleftrightarrow{CD}$, que é a mediatriz de AB.



Justificativa:

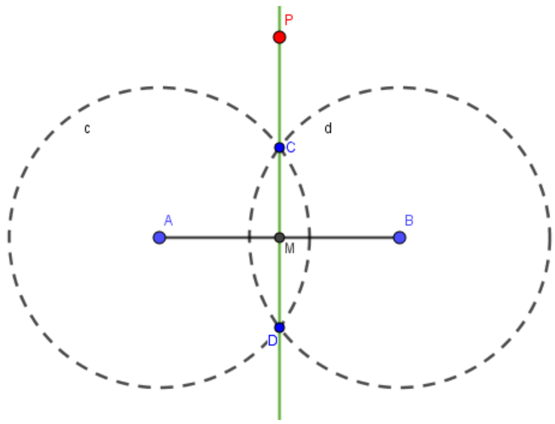
Os triângulos ACD e BCD são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AC} = \overline{BC}$ raios das circunferências c e d respectivamente que por construção são congruentes. $\overline{AD} = \overline{BD}$ raios das circunferências c e d respectivamente que por construção são congruentes e o lado CD é comum. Daí, $A\widehat{C}D = B\widehat{C}D$.

Seja M o ponto intersecção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com o segmento AB.



Observe que $A\widehat{C}D = A\widehat{C}M$, pois são os mesmos ângulos e $B\widehat{C}D = B\widehat{C}M$ pois também são os mesmos ângulos, portanto $A\widehat{C}M = B\widehat{C}M$. Os triângulos ACM e BCM são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{AC} = \overline{BC}$ raios das circunferências c e d respectivamente que por construção são congruentes, os ângulos $A\widehat{C}M = B\widehat{C}M$ e $\overline{CM}$ é comum. Consequentemente $A\widehat{M}C = B\widehat{M}C$ e $\overline{AM} = \overline{BM}$. Como $A\widehat{M}C = B\widehat{M}C$ e são suplementares, temos que $A\widehat{M}C = B\widehat{M}C = 90\ °$, e como $\overline{AM} = \overline{BM}$, M é o ponto médio de AB.

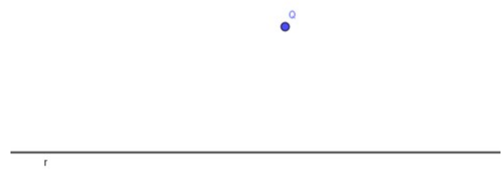
Seja P um ponto qualquer sobre a reta CD.



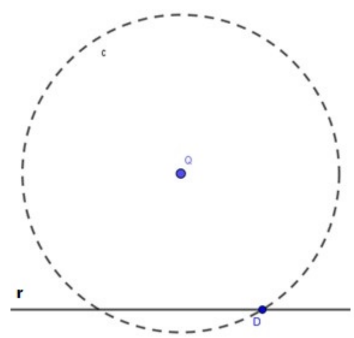
Os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso LAL,pois PM é comum, $A\widehat{M}C = A\widehat{M}P$ e $B\widehat{M}C = B\widehat{M}P$, portanto $A\widehat{M}P = B\widehat{M}P$, e $\overline{AM} = \overline{BM}$, $PA = PB$, ou seja, P é equistante de A e B. Assim $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular ao segmento AB e como $\overline{AM} = \overline{BM}$, M é o ponto médio de AB. Portanto $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento AB.

4.8 Retas paralelas

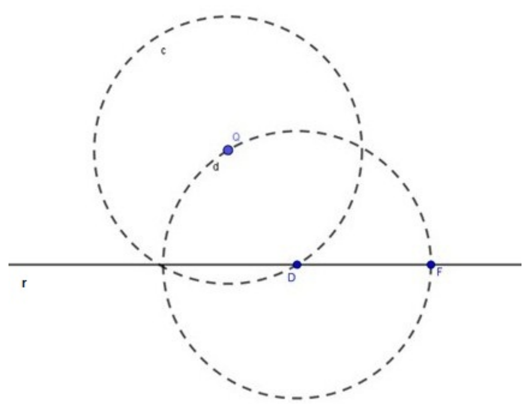
Dado uma reta r e um ponto Q fora dessa reta, trace uma reta paralela a r que passe por Q, isto é, uma reta que não intersecta r e passe por Q.



Passo 1. Trace uma circunferência c com centro em Q com um raio suficientemente grande para que intersecte a reta r em dois pontos, marque o ponto D de uma das interseções da circunferência c com a reta r.

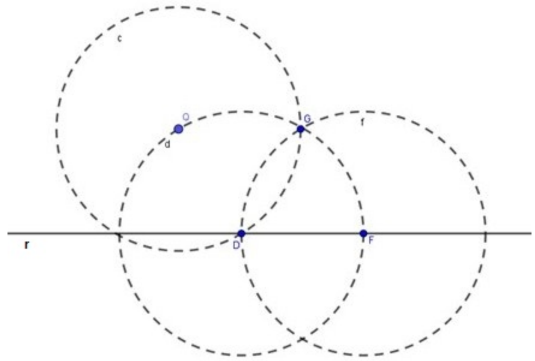


Passo 2. Centre compasso em D e com abertura do compasso igual raio da circunferência c, trace a circunferência d. Marque o ponto F como uma das interseções da circunferência d com a reta r.

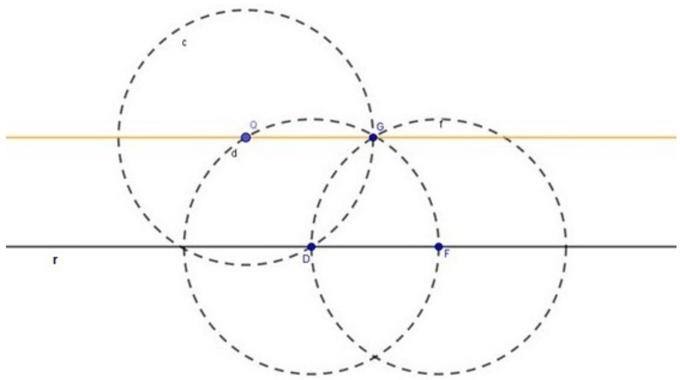


Passo 3. Centre o compasso em F e com abertura do compasso igual ao raio da circunferência c, trace a circunferência f. Marque o ponto G uma das interseções da

circunferência c com a circunferência f.



Passo 4. Trace uma reta passando por Q e G.



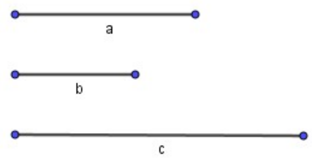
A reta $\overleftrightarrow{QG}$ é a reta paralela a reta r que passa por Q.

Justificativa:
Note que $\overleftrightarrow{DG}$ é mediatriz de QF, por construção. Logo, $\overline{GQ} = \overline{GF}$. Como $\overline{QD} = \overline{DF}$ $= \overline{FG}$ pois são raios de circunferências de mesmo raio, então como também $\overline{GF} = \overline{GQ}$ temos que $QDFG$ é um losango (quadrilátero com todos os lados de mesma medida) e portanto, seus lados QD e FG são paralelos.

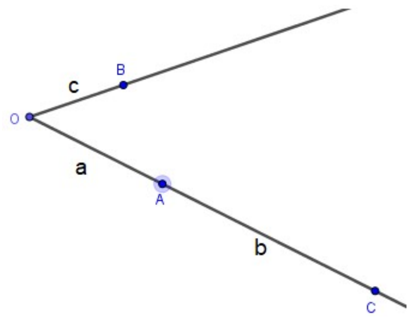
4.9 A 4ª proporcional

Dados três segmentos de medidas a, b e c dizemos que um segmento de medida d é a quarta proporcional desses segmentos, se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

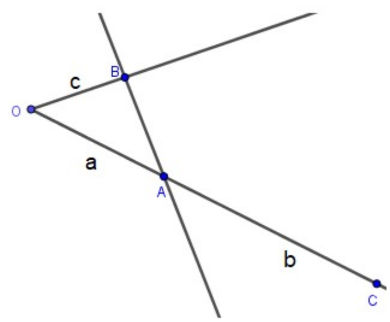
Dados os segmentos de medidas a, b e c, vamos construir a 4ª proporcional.



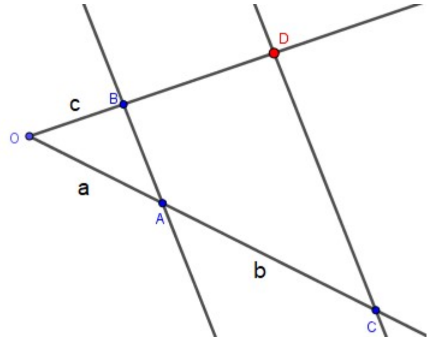
Passo 1. Sobre um ângulo qualquer de vértice O, transporte sobre uma das semirretas os segmentos $OA = a$ e $AC = b$ e sobre a outra semirreta o outro segmento $OB = c$.

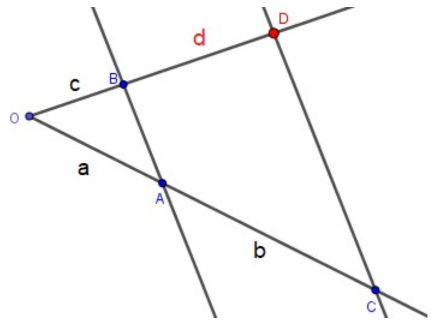


Passo 2. Trace uma reta passando pelos pontos A e B.



Passo 3. Traçar a paralela à AB passando pelo ponto C, determinando na intersecção com a semirreta OB o ponto D.





$BD = d$ é a 4ª proporcional.

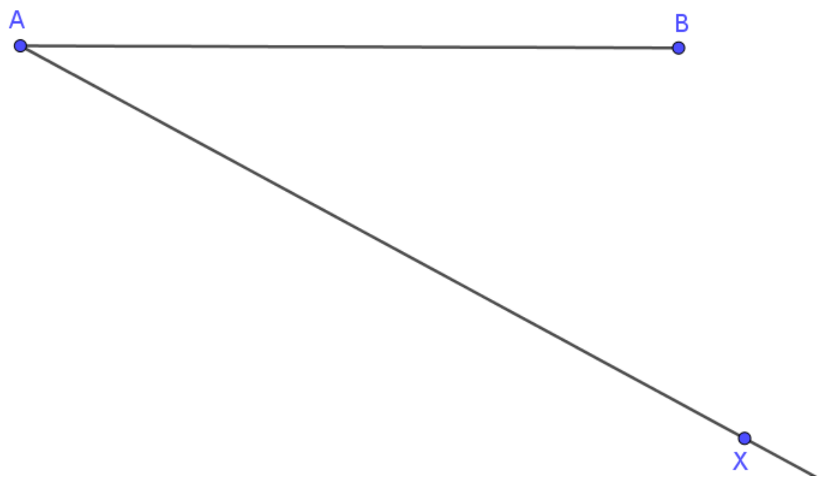
Justificativa:

Os triângulos BOA e DOC são semelhantes pelo caso (ângulo - ângulo) pois o ângulo $\widehat{O}$ é comum e como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, os ângulos $A\widehat{B}O$ e $C\widehat{D}O$ são congruentes pois são correspondentes, logo temos:
$\frac{BO}{DO} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{c}{d+c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow c.(a+b) = a.(d+c) \Rightarrow cb = ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

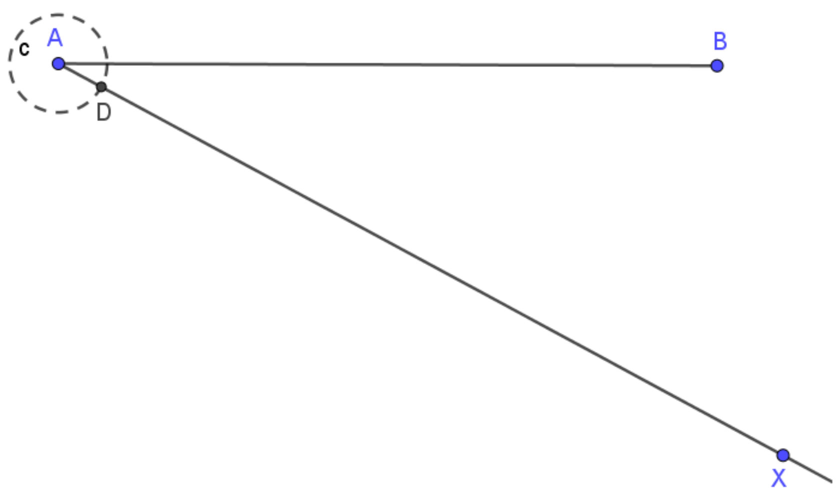
4.10 Divisão de um segmento em partes iguais

Dado o segmento AB divida em 13 partes iguais.

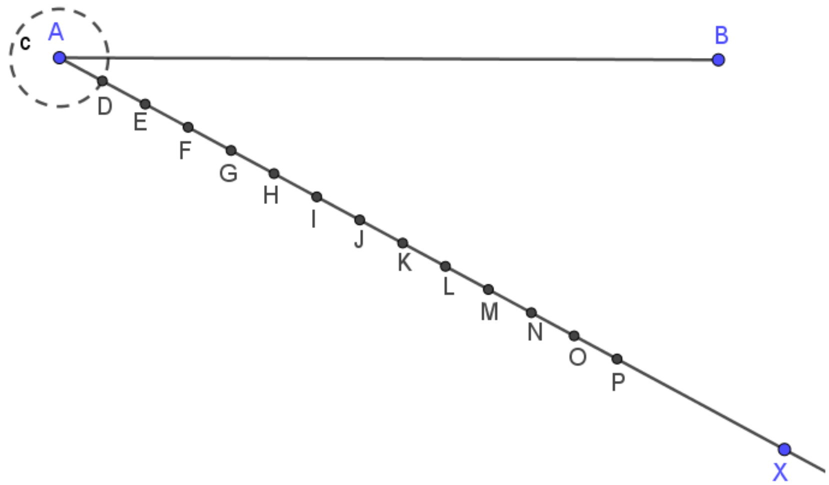
Passo 1. Trace a semirreta $\overrightarrow{AX}$ concorrente ao segmento AB que se intersectem no ponto A.



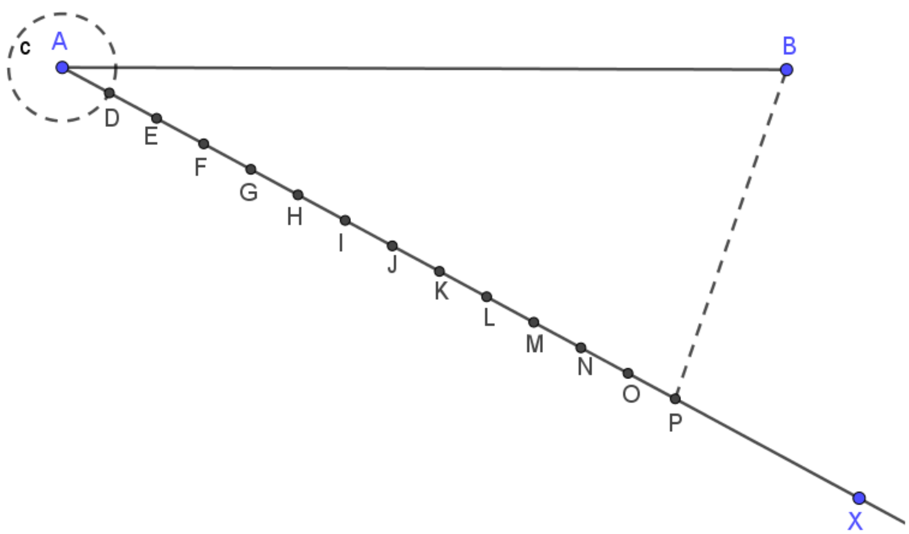
Passo 2. Com a ponta seca do compasso em A e fixando uma abertura qualquer, trace a circunferência c. Marque o ponto D intersecção da circunferência c com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.



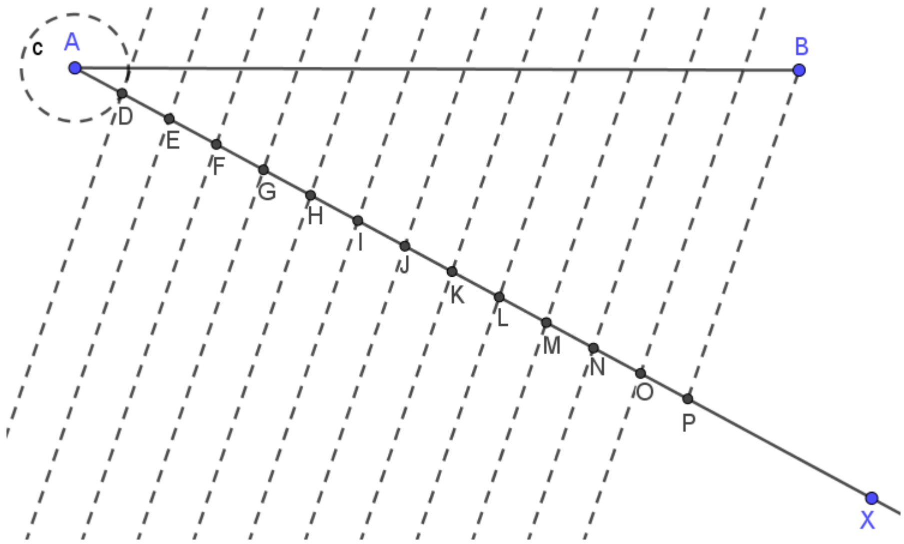
Passo 3. Com abertura do compasso igual segmento AD marque subsequentemente 12 vezes o, fixado, gerando os pontos, E, F, G, H, I, J,K, L, M, N, O e P.



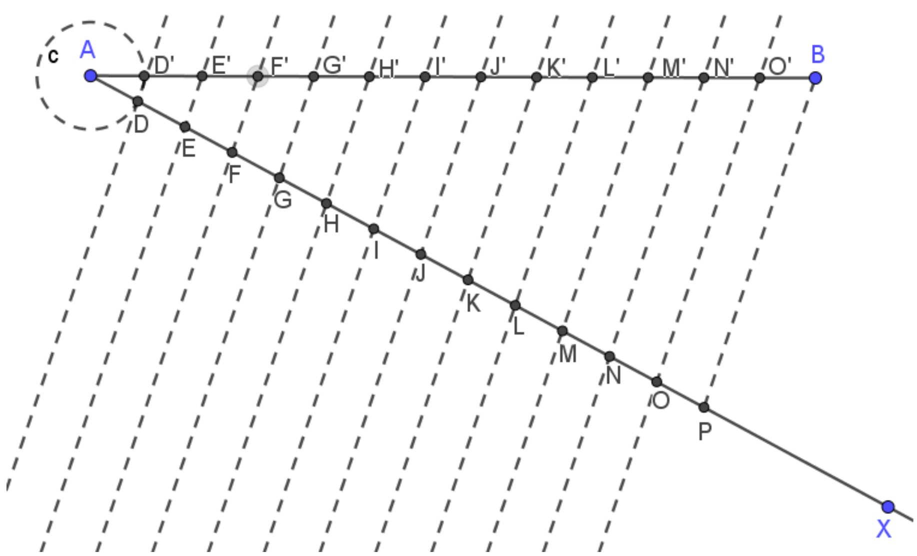
Passo 4. Trace o segmento PB.

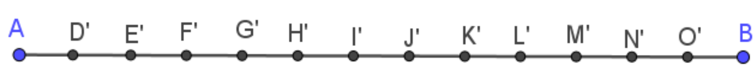


Passo 5. Trace as paralelas a PB que passem pelos pontos D E, F, G, H, I,J, K, L, M, N e O.



Passo 6. Marque os pontos D' E', F', G', H', I',J', K', L', M', N' e O', nas intersecções das paralelas com o segmento AB.

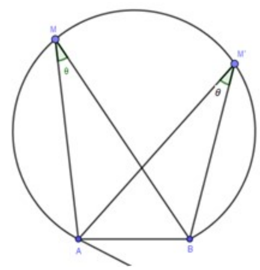




Segmento AB dividido em 13 partes iguais.

4.11 Arco Capaz

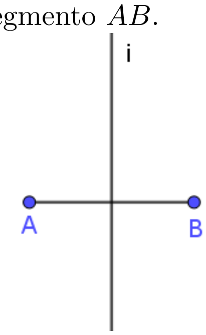
Consideremos dois pontos, A e B sobre um círculo. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $A\widehat{M}B = \theta$ é constante. Este arco chama-se arco capaz do ângulo θ sobre o segmento AB.



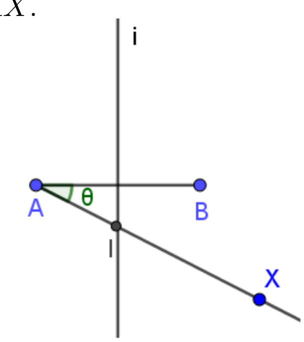
Construção do Arco Capaz dado o ângulo e um segmento.

Passo 1. Dado o segmento AB e o ângulo $E\widehat{C}D = \theta$ vamos construir o arco capaz sobre o segmento AB.

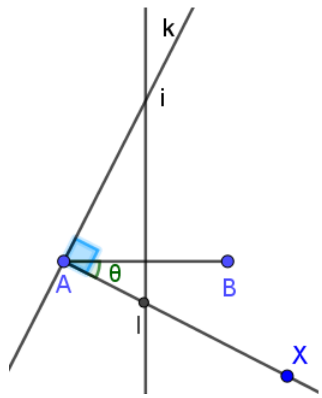
Passo 2. Trace a mediatriz i do segmento AB.



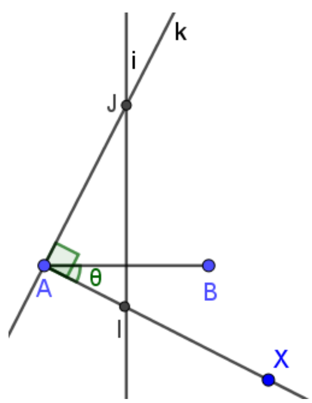
Passo 3. Trace a semirreta $\overrightarrow{AX}$ tal que $B\widehat{A}X = \theta$, marque o ponto I intersecção da mediatriz i com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.



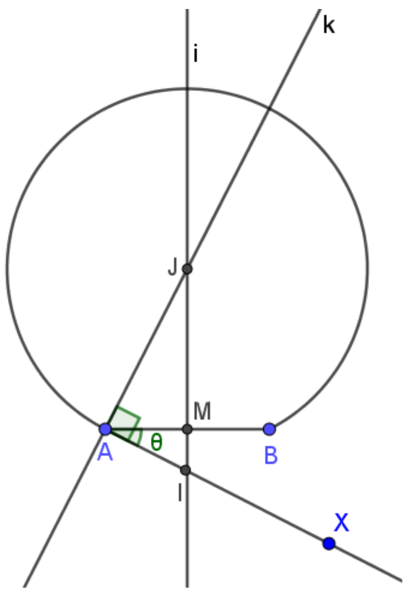
Passo 4. Trace a reta k perpendicular a $\overleftrightarrow{AI}$ passando pelo ponto A.



Passo 5. Marque o ponto J, intersecção da reta k com a mediatriz i.



Passo 6. Marque o ponto M, na interseção da mediatriz i com o segmento AB. O ponto J é o centro do arco capaz. O arco de centro J e raio JA situado em semiplano oposto a I (semiplanos relativos a AB) é o arco capaz do ângulo θ sobre AB.



Justificativa:

Como JM é mediatriz, então $J\widehat{M}A = 90$ °. Além disso, $M\widehat{A}I = \theta$ então $M\widehat{A}J = 90$ ° - θ. Logo $A\widehat{J}M = \theta$ e portanto $A\widehat{J}B = 2\ \theta$, que o ângulo central.

Sabendo que a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central correspondente teremos para qualquer ponto P do arco construído, $A\widehat{P}B = \theta$.

4.12 O Segmento Áureo

Tomemos um segmento AB. O segmento BK com um ponto K em AB é chamado segmento áureo de AB se divide-o em duas partes tal que a razão entre a menor parte e a maior parte é igual a razão entre a maior parte e o segmento total. Ou seja,

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}}$$

Fazendo $\overline{AB} = a$, obtemos:

$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Podemos imaginar ainda um segmento AB e um ponto K' exterior a AB com a mesma propriedade enunciada anteriormente, ou seja:

$$\frac{\overline{BK'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AK'}}$$

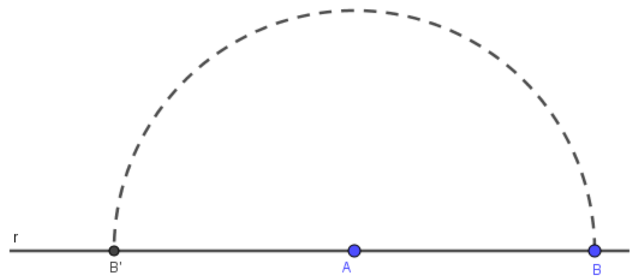
O segmento AK' com essa propriedade é chamado de segmento áureo externo de AB. Fazendo $\overline{AB} = a$ obtemos:

$$\overline{AK'} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$$

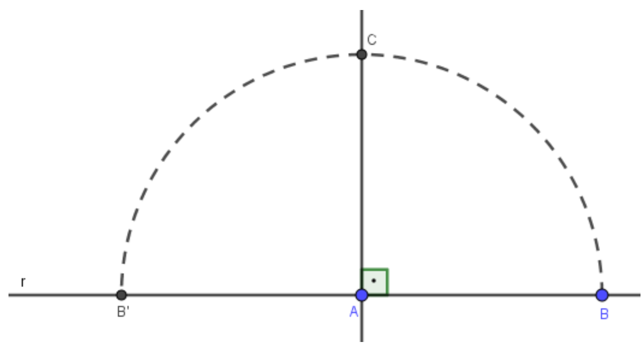
4.12 O segmento áureo externo

Passo 1. Trace uma reta r e marque em r um segmento arbitrário AB, que consideraremos de comprimento 1.

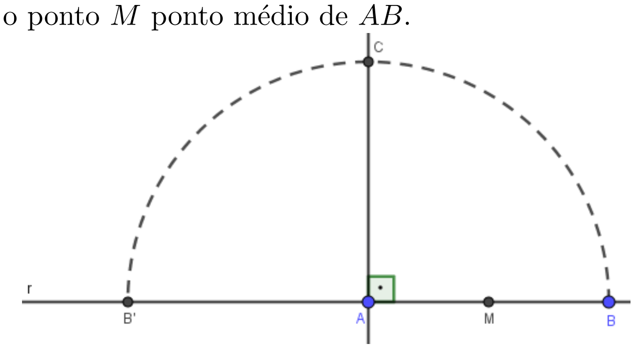
Passo 2. Centre compasso em A e abertura igual a 1, trace um arco que inicia em B e vai até encontrar o ponto B' interceptando a reta r.



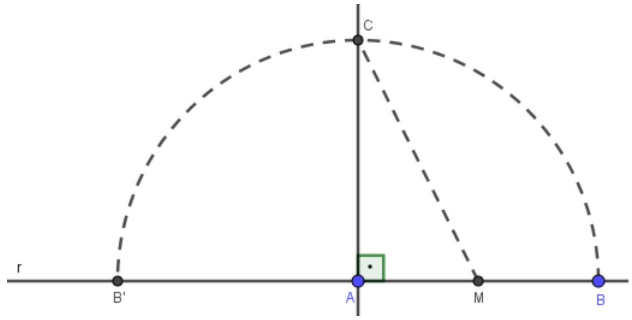
Passo 3. Trace a perpendicular que passa por A e marque o ponto C como mostra a figura abaixo.



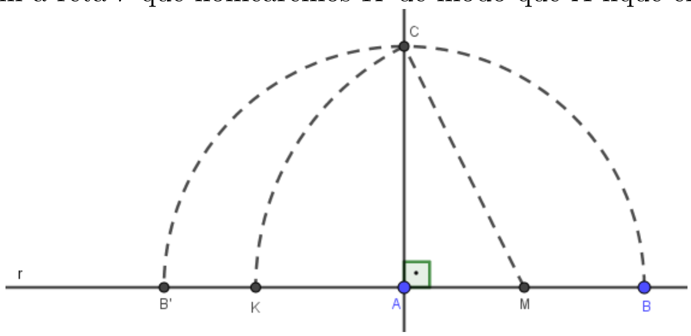
Passo 4. Marque o ponto M ponto médio de AB.



Passo 5. Trace o segmento MC.



Passo 6. Centre compasso no ponto M e com abertura MC, trace o arco até encontrar a interescção com a reta r que nomearemos K de modo que A fique entre K e M.



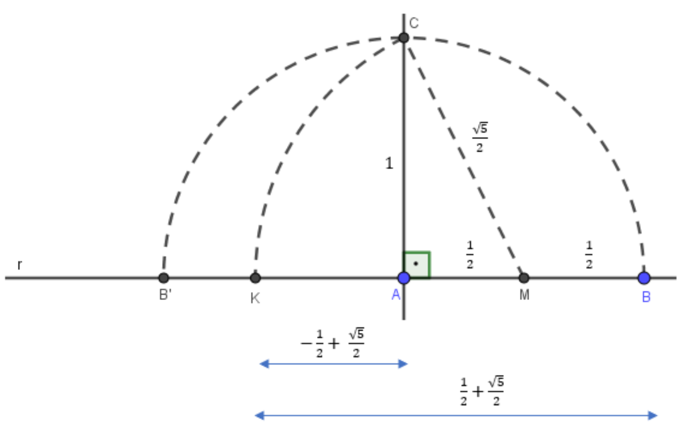
Justificativa

Tomamos $\overline{AB} = 1$. M é o ponto médio de AB, portanto $\overline{AM} = \frac{1}{2}$. Como $AC \perp AB$, por construção, então o triângulo MAC é retângulo e aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$\overline{MC}^2 = 1^2 + \frac{1}{2}^2$

$\overline{MC}^2 = 1 + \frac{1}{4}$

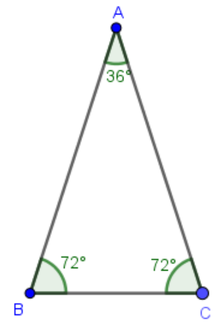
$\overline{MC} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$



Segmento Áureo

4.13 Triângulo Áureo

Chama-se triângulo áureo um triângulo isósceles em que cada ângulo da base mede o dobro do vértice. Isto implica que seus ângulos são 36°, 72° e 72°.



Triângulo Áureo

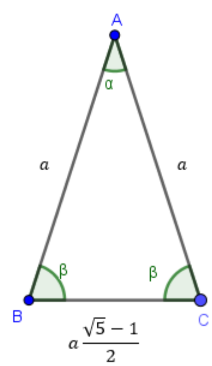
A demonstração a seguir foi baseada na Proposição 1 da dissertação [FRANCISCO 2013].

Teorema: Um triângulo tem lados de medida a, a e $(\sqrt{5}-1)a/2$ se, e somente se é um triângulo áureo.

Demonstração:
Note que

$$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}. \tag{1}$$

Suponha que ABC é um triângulo com os lados de medida $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b = (\sqrt{5}-1)a/2$ e seja α seu ângulo em A e β seu ângulo em B e C.



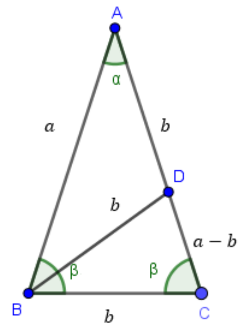
Seja D o ponto em AC tal que $\overline{AD} = b$. Assim temos $\overline{DC} = a - b$.

Os triângulos ABC e BCD são semelhantes pelo caso LAL pois

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

e os ângulos $A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}D$ entre os lados correspondentes é β.

Logo, $C\widehat{B}D = B\widehat{A}C = \alpha$ e $B\widehat{D}C = A\widehat{C}B = \beta$. Como o triângulo BCD é isósceles então $\overline{BD} = \overline{BC} = b$.



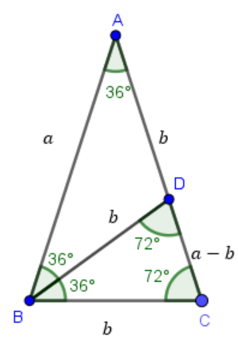
Note que o triângulo BDA é isósceles e portanto $A\widehat{B}D = \alpha$. Então, $A\widehat{B}C = 2\alpha$, ou seja, $\beta = 2\alpha$. Assim, concluímos que o triângulo ABC é áureo. Note que sendo $\alpha + 2\beta = 180°$ então $\alpha = 180°/5 = 36°$ e $\beta = 72°$.

Suponha agora um triângulo ABC com ângulos de medida $36°$ em A e $72°$ em B e C e lados $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$. Mostraremos que $a/b = b/(a-b)$.

Seja agora D o ponto de instersecção da bissetriz de $A\widehat{B}C$ e AC.

Como $A\widehat{B}D = 36°$ o triângulo ABD é isósceles e portanto $\overline{BD} = b$.

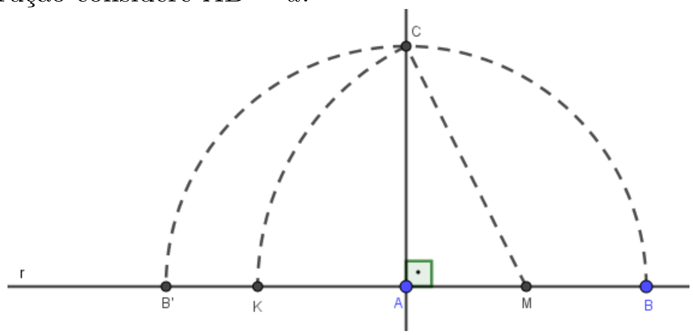
Como $C\widehat{B}D = 36°$ então $B\widehat{D}C = 180° - 36° - 72° = 72°$.



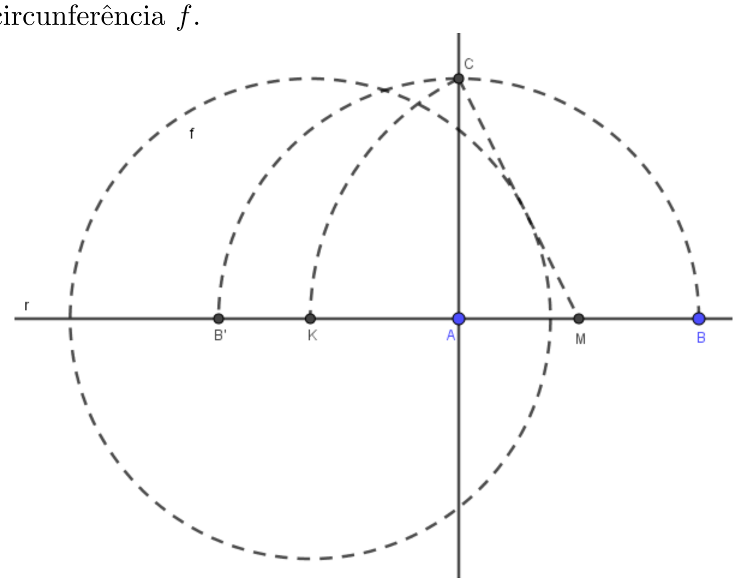
Assim os triângulos ABC e BCD são semelhantes, pois seus ângulos são congruentes. Logo, $\overline{AB}/\overline{BC} = \overline{BC}/\overline{CD}$. Ou seja, $a/b = b/(a-b)$. O que nos mostra que $b = (\sqrt{5}-1)a/2$.

4.13 Triângulo áureo

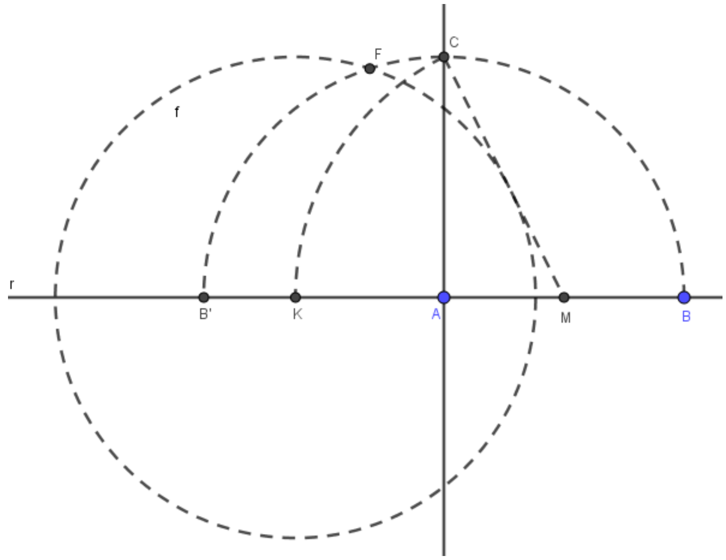
Passo 1. Iniciamos fazendo a construção do Segmento áureo externo da Seção 4.12. Para essa construção considere $\overline{AB} = a$.



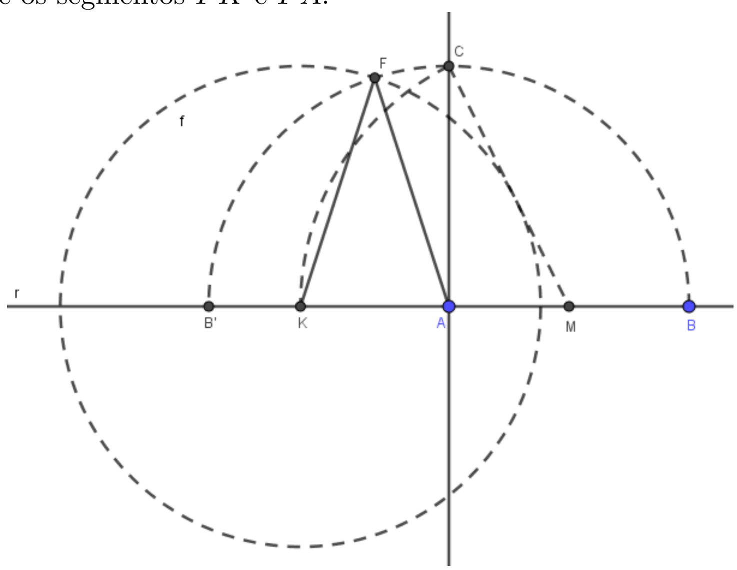
Passo 2. Com o compasso com abertura igual comprimento a, centre o compasso em K, e trace a circunferência f.

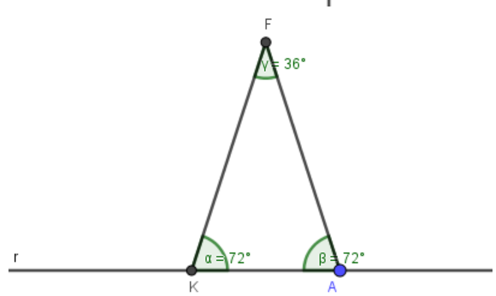


Passo 3. Marque o ponto F, tal que $F = f \cap \widehat{BCB'}$.



Passo 4. Trace os segmentos FK e FA.





Triângulo isósceles em que cada ângulo da base mede o dobro do vértice

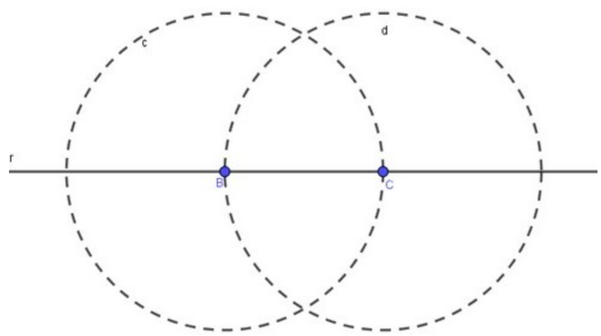
5 Construção de ângulos notáveis

5.1 Construção dos ângulos de 60°, 120°, 30° e 15°

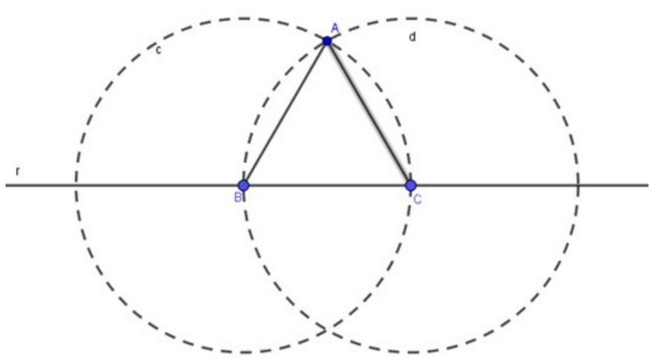
Passo 1. Trace uma reta r.

Passo 2. Marque dois pontos distintos em r e denote-os como B e C.

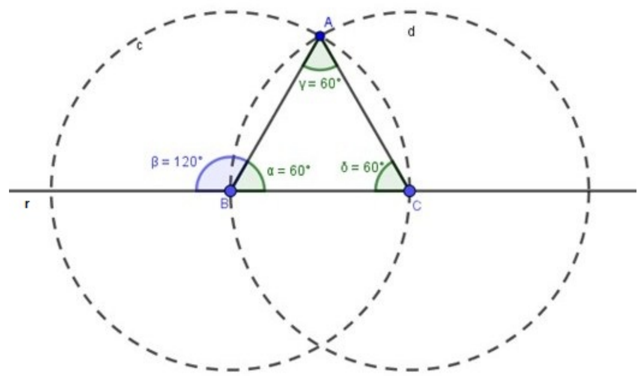
Passo 3. Trace as circunferências c e d com raio $\overline{BC}$ com centros em B e C respectivamente.



Passo 4. Marque o ponto A uma das interseções das circunferências c e d. Ligue os pontos AB, AC, assim formando o triângulo ABC equilátero.

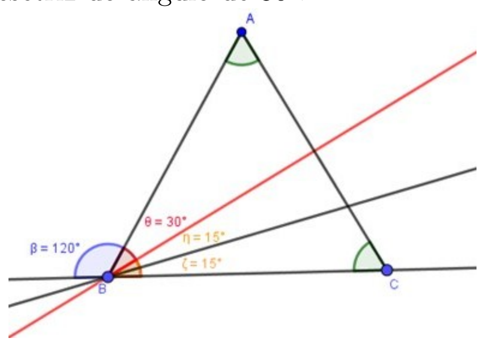


Justificativa: Como o triângulo é equilátero os ângulos internos são congruentes e cada um mede 60°. Observe que ao fazer essa construção, automaticamente desenhamos o ângulo de 120° que é o suplementar de 60°.



Construção do ângulo de 30° e 15°

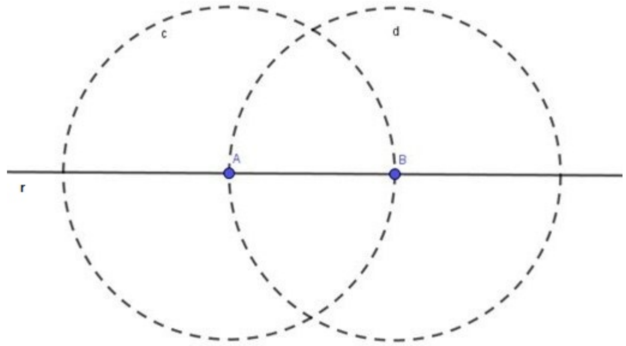
Para construir o ângulo de 30° basta traçar a bissetriz do ângulo de 60° e para obter o ângulo de 15° trace a bissetriz do ângulo de 30°.



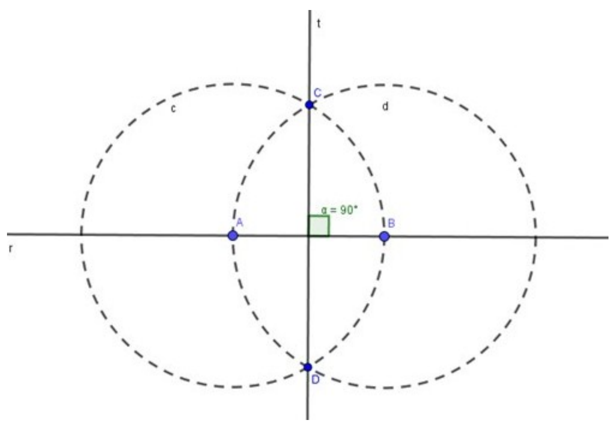
5.2 Construção dos ângulos de 90°, 45° e 135°

Passo 1. Trace uma reta r, e marque em r dois pontos distintos quaisquer denotando-os como A e B.

Passo 2. Trace as circunferências c e d com centros respectivamente em A e B e raios iguais AB.

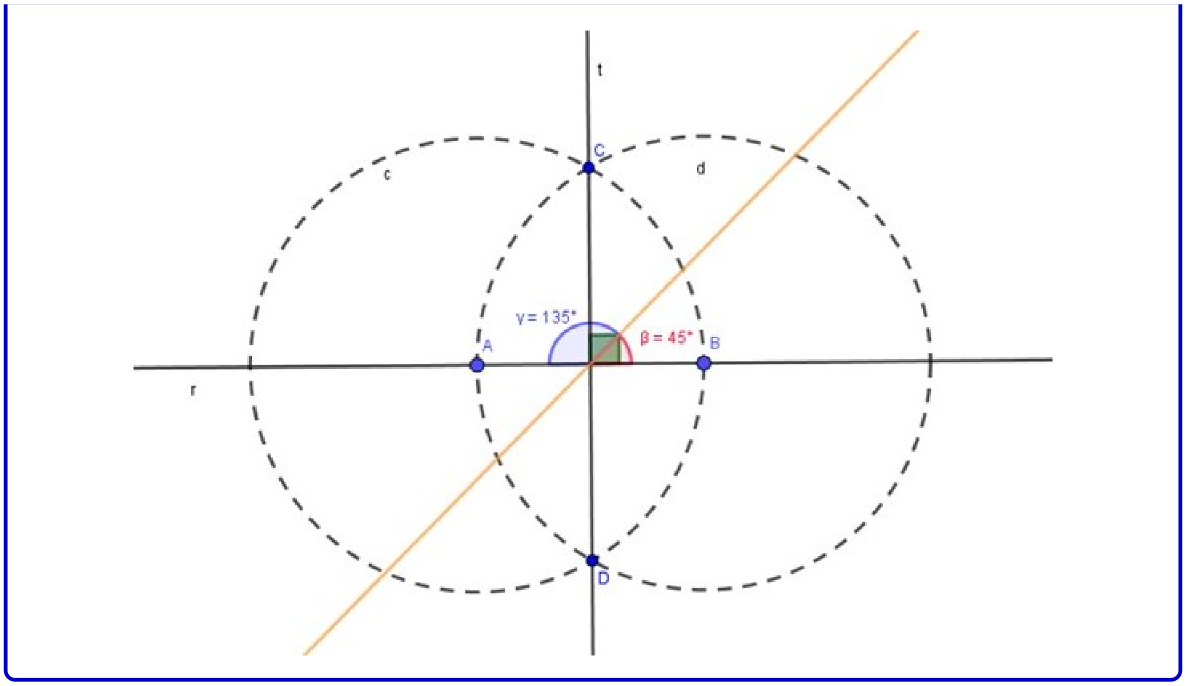


Passo 3. Marque os pontos C e D interseções das circunferências c e d. Trace a reta $t = \overleftrightarrow{CD}$.



Observe que construímos a mediatriz de AB, logo podemos garantir que $r \perp t$, ou seja, que o ângulo formado pelas retas r e t é de 90°.

Para construirmos o ângulo de 45° basta traçarmos a bissetriz do ângulo de 90°. O ângulo de 135° é o suplementar do ângulo de 45°, portanto ao construirmos o ângulo de 45°, o seu suplementar será o ângulo de 135°.


t
C
c
d
γ = 135°
β = 45°
A
B
r
D

6 Polígonos regulares

Um polígono regular convexo é a união de segmentos, seus lados, de mesma medida e todos os seus ângulos internos formados são congruentes.

As construções dos polígonos regulares inscritos em circunferências baseiam-se no seguinte teorema.

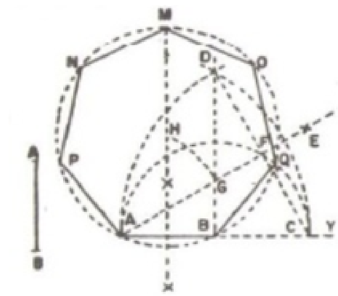
Teorema: [SILVA 2013] Dividindo-se uma circunferência em n arcos congruentes com $(n \geq 3)$ então todos os segmentos determinados pelos extremos de um mesmo arco, reunidas, formam um polígono regular de n lados inscritos na circunferência.

Demonstração: Sejam $A_1, A_2, ..., A_{\text{n-1}}, A_n$ os n pontos extremos dos arcos que dividem a circunferência c de centro O em n arcos, e forma o polígono inscrito $A_1A_2...A_{\text{n-1}}A_n$. Isto implica que $A_1\hat{O}A_2 \equiv A_2\hat{O}A_3 \equiv \cdots \equiv A_{n-1}\hat{O}A_n \equiv A_n\hat{O}A_1$. Por serem raios da circunferência temos $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots = \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_nA_1}$. Assim, pelo critério LAL, os triângulos então $A_1OA_2,\ A_2OA_3,\ \ldots, A_{n-1}OA_n$ e A_nOA_1 são congruentes. E portanto, as medidas dos lados correspondentes $A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ são iguais.

Polígonos construtíveis

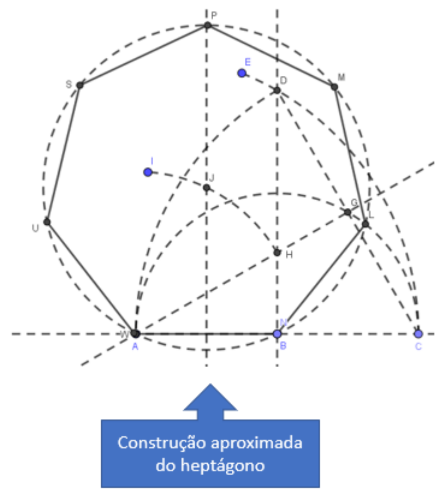
As referências utilizadas para as construções dos polígonos regulares apresentadas nesta seção foram os livros do Eduardo Wagner [WAGNER 2016], do Theorodo Braga [BRAGA 1997] e a dissertação do Aislan S. Lopes [LOPES 2014].

O livro do Theodoro Braga não apresenta justificativa sobre as construções sugeridas e não cita quais polígonos são construtíveis. Por exemplo no livro é sugerido a seguinte construção para o heptágono regular: "Sobre uma reta indefinida AY tome-se um segmento AB igual ao lado dado e na extremidade B, como centro, e raio BA trace-se o semicírculo AC até encontrar a reta AY. Do ponto B levante-se a perpendicular BD; dos pontos A e C como centros e raio AC tracem os arcos que se cortam em D; em seguida, ligue-se C a D e pelo ponto médio desta reta CD levante-se uma perpendicular AE que corta a reta BD no ponto G; baixe-se de M, a perpendicular ao meio de AB, uma reta que encontrará em H o arco GH, de centro em A e raio AG; H é o centro de uma circunferência, cujo raio é HM. Sobre esta leve-se a medida AB e ter-se-á o heptágono."

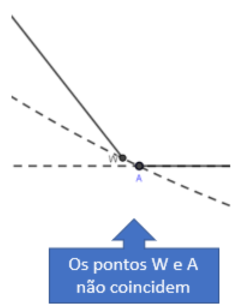


Construção sugerida no livro do Theodoro Braga

Mas a construção sugerida com régua e compasso não é exata. Realizando a construção no *software* Geogebra, a priori parece estar correto, como mostra a figura abaixo:



Mas ampliando a figura no ponto A, nota-se que o ponto W não coincide com o ponto A, ou seja, essa é uma construção aproximada do heptágono regular.



No livro do Wagner [WAGNER 2007] há um âpendice que trata sobre os polígonos regulares construtíveis e é dito: "O problema de construir o polígono regular de n lados (daqui por diante designado por P_n), ou, o que vem a dar no mesmo, dividir o círculo em n arcos de mesmo comprimento, reduz-se ao de construir o seu ângulo centrarl $\frac{360}{n}$ ou, como sabemos, seu cosseno". Ainda no livro do Wagner é citado que Gauss foi o primeiro a relacionar o problema da construção de P_n com as chamadas "raízes n-ésimas da unidade", isto é, as soluções complexas da equação $x^n = 1$. Usando a teoria de Gauss, pode-se ir mais longe ainda e provar que, para n um natural em geral, P_n será construtível se e somente se n se decompuser em fatores primos na forma: $2^k p_1 ... p_m$, onde os $p - i$ são primos de Fermat.

Assim, são construtíveis os polígonos regulares com números de lados iguais a: 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 16; 17; 20; 24; 30; 32; 35;....

Enquanto não são construtíveis os que tem números de lados iguais a:
7; 9; 11; 13; 14; 18; 19; 21; 23; 25; 26; 27; 28; 29; 31;....

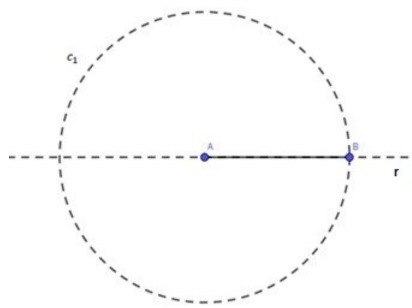
6.1 Triângulo equilátero

Passo 1. Desenhe com régua um segmento de medida L.

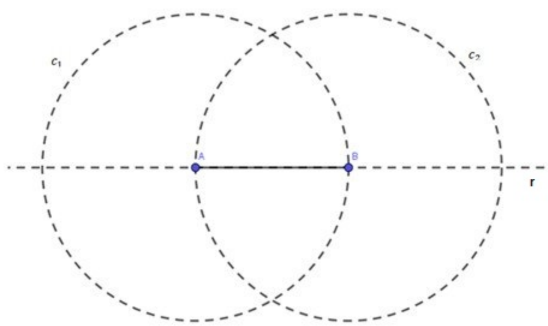
Passo 2. Trace uma reta r.

Passo 3. Em r marque um ponto qualquer e denote como A.

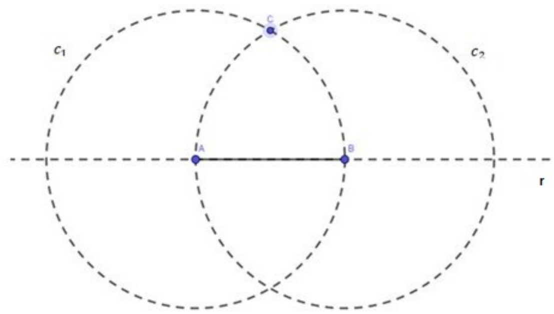
Passo 4. Centre o compasso em A com abertura igual segmento L, trace a circunferência c_1 e marque o ponto B uma das interseções de c_1 com r.



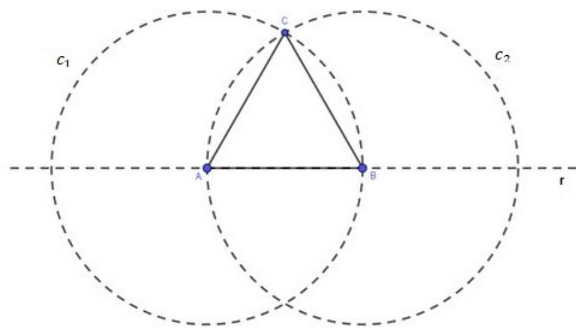
Passo 5. Centre compasso em B com abertura de medida L trace a circunferência c_2.



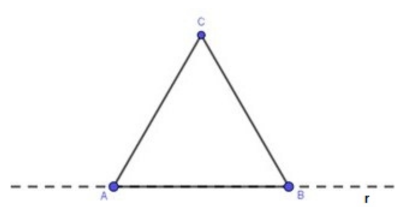
Passo 6. Seja $C = c_1 \cap \text{c}_2$.



Passo 7. Trace agora os segmentos AC e BC.



Passo 8. O triângulo ABC é equilátero de lado L.



Justificativa:

$\overline{AB}$ = L por construção. O segmento AC é raio de c_1 que tem medida L e o segmento BC é o raio de c_2 que tem medida L, portanto $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ = L, logo o triângulo ABC é equilátero.

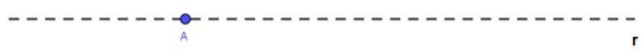
6.2 Quadrado - 1° modo

O quadrado é um quadrilátero que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Passo 1. Desenhe com régua um segmento de medida L.

Passo 2. Trace uma reta r.

Passo 3. Em r marque um ponto qualquer e denote como A.



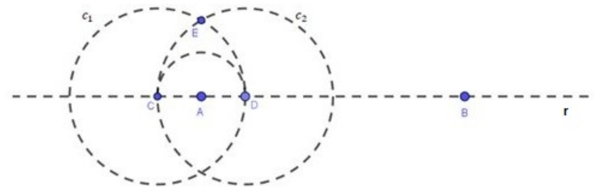
Passo 4. Transporte o segmento de medida L para reta r, para isso, abra o compasso abertura igual a L, centre compasso em A e marque na reta r o ponto B.

Passo 5. Agora vamos traçar uma perpendicular a r passando por A e outra perpendicular a r passando por B.

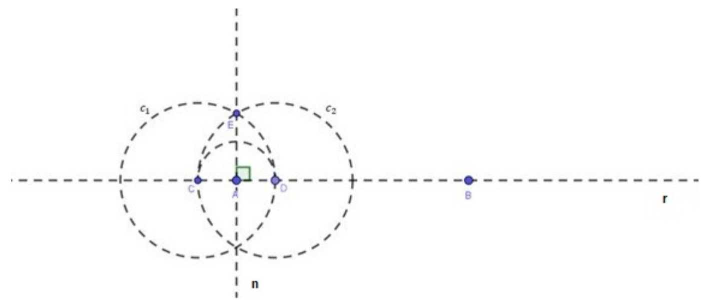
Siga os passos abaixo para traçar as perpendiculares.

- Com uma abertura qualquer, centre compasso em A e trace um semicírculo, em seguida marque os pontos C e D interseções do semicírculo com r.

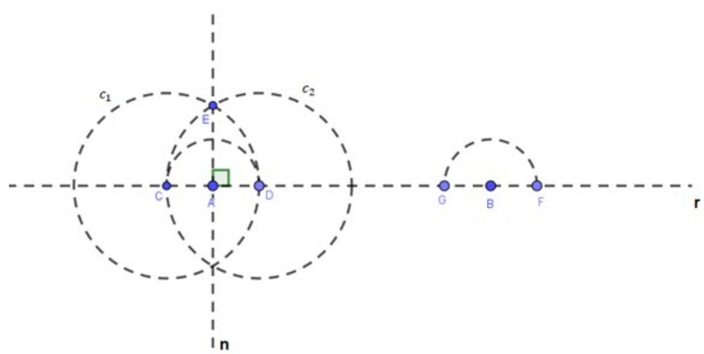
- Centre compasso em C com abertura CD e trace a circunferência c_1. Com a mesma abertura CD, centre compasso em D e trace a circunferência c_2. Em seguida marque o ponto $E = c_1 \cap c_2$.



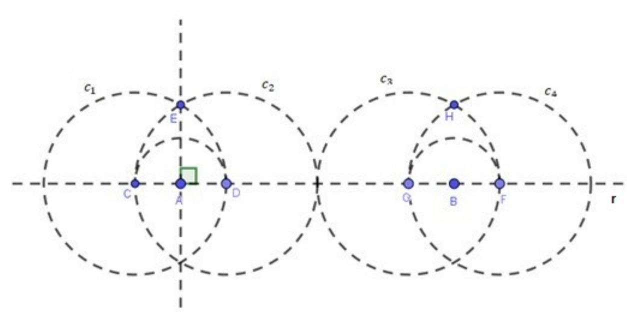
- Trace a reta n perpendicular a r passando por A.



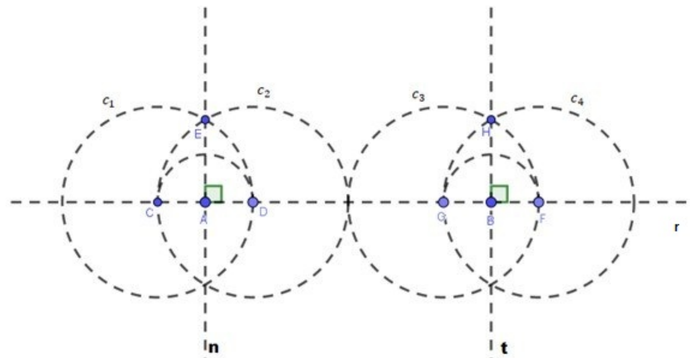
- Com uma abertura qualquer, centre compasso em B e trace um semicírculo, em seguida marque os pontos G e F interseções do semicírculo com r.



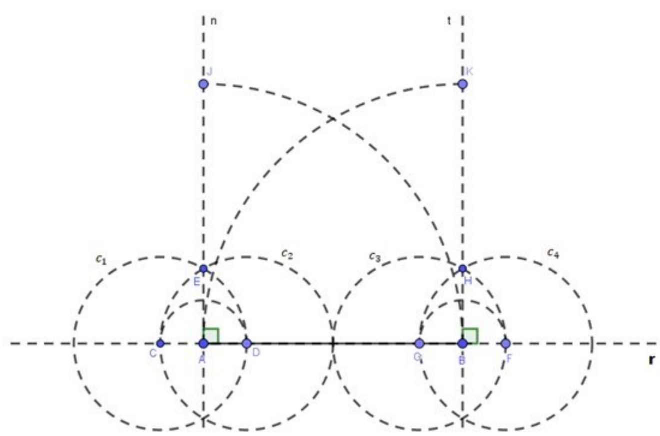
- Centre compasso em G com abertura GF e trace a circunferência c_3. Com a mesma abertura GF centre compasso em F e trace a circunferência c_4. Em seguida marque o ponto $H = c_3 \cap c_4$.



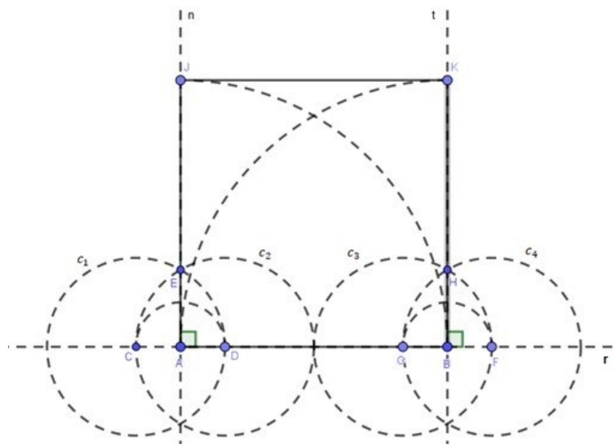
- Trace a reta t perpendicular a r passando por B.



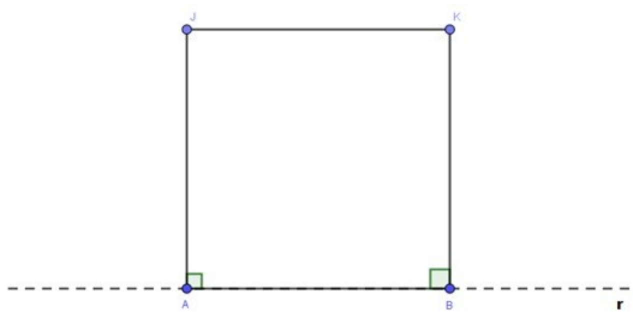
Passo 6. Centre compasso em A abertura AB e trace um arco no sentido anti-horário partindo de B até que encontre a reta n, denote o ponto J sendo a intersecção desse arco com a reta n. Em seguida centre compasso em B abertura BA e trace um arco no sentido horário partindo de A até que encontre a reta t, denote o ponto K sendo a intersecção desse arco com a reta t.



Passo 7. Trace os segmentos JK, AJ e BK.



Passo 8. O quadrilátero ABJK é o quadrado de lado com medida L.



Justificativa:

O triângulo JAB é retângulo isósceles, pois os lados AB e AJ medem L. Logo, os ângulos $A\widehat{J}B$ e $J\widehat{B}A$ são iguais a 45°.

Consequentemente $K\widehat{B}J = 90° - J\widehat{B}A = 45°$.

Os triângulos AJB e KBJ são congruentes pois $\overline{AJ} = \overline{KB}$, JB é lado comum e o ângulo entre esses lados é de 45° (caso LAL). Desta congruência segue que $\overline{KJ} = \overline{AB}$, $J\widehat{K}B = B\widehat{A}J = 90°$ e $B\widehat{J}K = J\widehat{B}A = 45°$.

Portanto, os lados de $ABKJ$ tem mesma medida e os ângulos internos são iguais (90°) o que carcaterizam $ABKJ$ como quadrado.

6.3 Quadrado - 2° modo

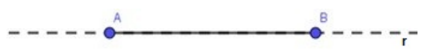
O quadrado é polígono regular que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Passo 1. Desenhe com régua um segmento de medida L.

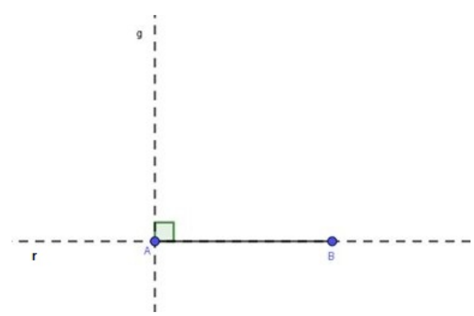
Passo 2. Trace uma reta r.

Passo 3. Em r marque um ponto qualquer denote como A.

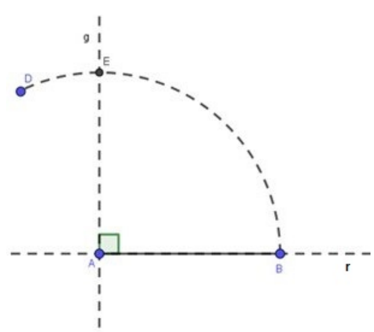
Passo 4. Transporte o segmento de medida L para reta r, para isso, abra o compasso abertura igual a medida L, centre compasso em A e marque na reta r o ponto B.



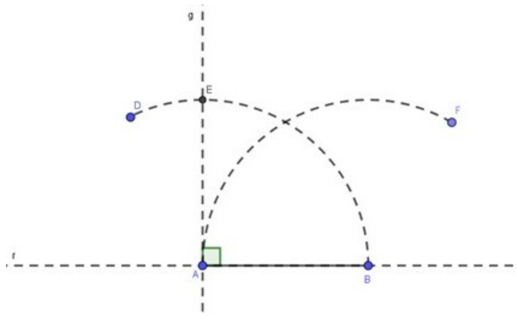
Passo 5. Trace a reta g, $g \perp r$ passando por A.



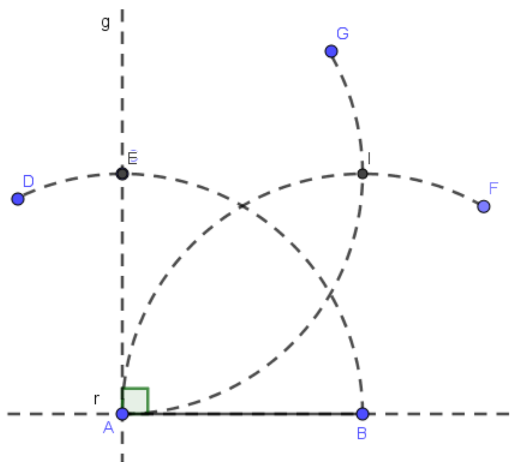
Passo 6. Centre o compasso em A, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{BD}$, marque o ponto E, $E = \widehat{BD} \cap g$.



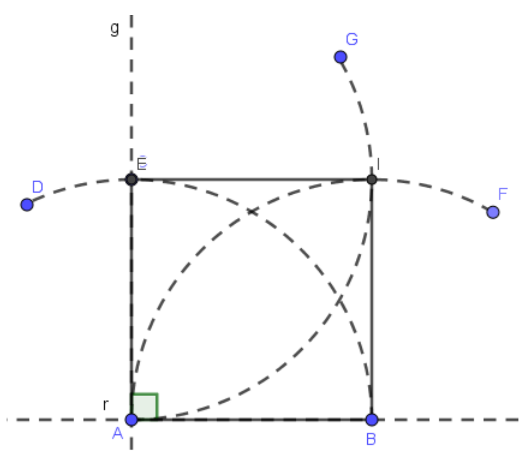
Passo 7. Centre o compasso em B, abertura de medida L e trace o arco $\widehat{AF}$.



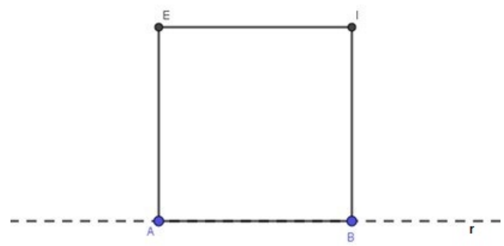
Passo 8. Centre compasso em E, abertura de medida L trace o arco $\widehat{AG}$, marque o ponto I,$I = \widehat{AF} \cap \widehat{AG}$.



Passo 9. Trace os segmentos $\overline{BI}$, $\overline{IE}$ e $\overline{EA}$.



Passo 10. O quadrilátero ABIE é o quadrado.



Justificativa:

O triângulo EAB é retângulo isósceles logo os ângulos $A\widehat{E}B$ e $E\widehat{B}A$ são de 45°.

O triângulo EIB é congruente ao triângulo EAB pois tem um lado comum e os outros lados tem mesma medida (caso LLL). Portanto, o ângulo $E\widehat{I}B = E\widehat{A}B = 90°$.

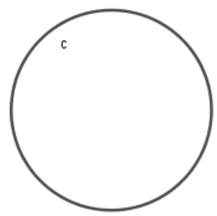
Assim, temos que os 4 ângulos internos medem 90° e por construção os 4 lados tem mesma medida, o que implica que $ABIE$ é um quadrado.

6.4 Pentágono regular

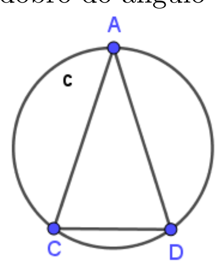
Pentágono é o nome dado para a figura geométrica que possui cinco lados e cinco ângulos. O pentágono é dito regular quando possui os cinco ângulos congruentes e os cinco lados congruentes.

Passo 1. Construa o triângulo EGH na qual cada ângulo da base é o dobro do vértice.

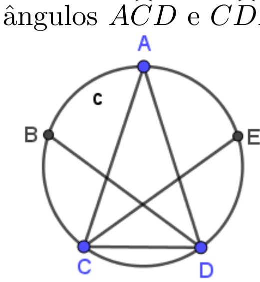
Passo 2. Trace uma circunferência c com uma medida de raio qualquer.



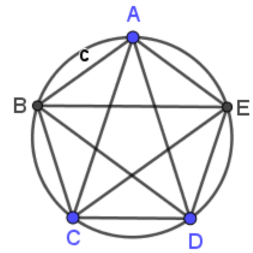
Passo 3. Inscreva, o triângulo ACD com o ângulo $C\widehat{A}D$ igual ao ângulo $G\widehat{E}H$ e os ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ iguais respectivamente, aos ângulos $E\widehat{G}H$ e $E\widehat{H}G$. Assim, cada um dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ é o dobro do ângulo $C\widehat{A}D$.

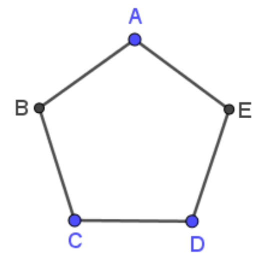


Passo 4. Trace as bissetrizes dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$, e marque os pontos E e B, interseções respectivamente dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ com a circunferência c.



Passo 5. Trace os segmentos de retas AB, BC, DE, EA e BE.





Pentágono regular

Justificativa:

Como cada um dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ é o dobro do ângulo $C\widehat{A}D$, e foram divididos ao meio pelos segmentos CE e DB, os cincos ângulos $D\widehat{A}C$, $A\widehat{C}E$, $E\widehat{C}D$, $C\widehat{D}B$ e $B\widehat{D}A$ são iguais entre si. Ângulos iguais subtendem arcos iguais, assim os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ e $\widehat{EA}$ são iguais entre si. Logo pelo teorema do início deste capítulo os lados de $ABCDE$ tem mesma medida.

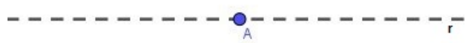
6.5 Hexágono regular

Hexágono é o nome dado para a figura geométrica que possui 6 lados e 6 ângulos. O hexágono é dito regular quando possui os seis ângulos congruentes e os seis lados congruentes.

Passo 1. Desenhe com régua um segmento de medida L.

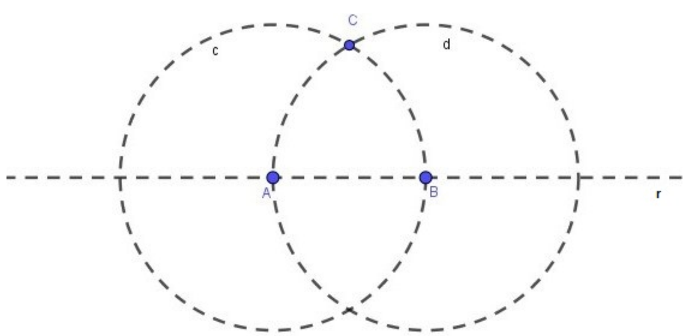
Passo 2. Trace uma reta r.

Passo 3. Em r marque um ponto qualquer e denote como A.

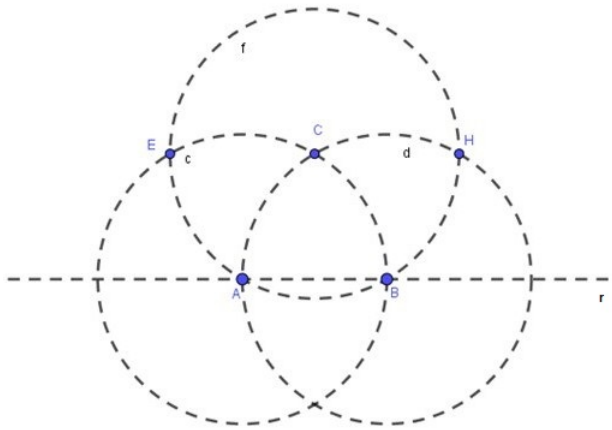


Passo 4. Transporte o segmento de medida L para reta r, com extremos em A e B.

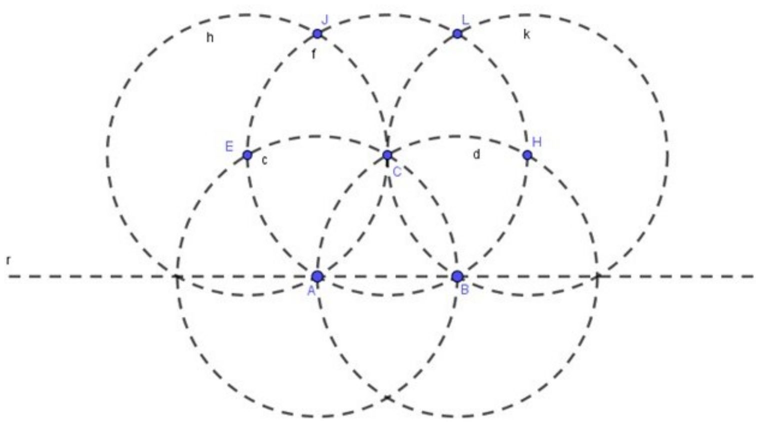
Passo 5. Com centros em A e B e raios iguais a medida L, trace as circunferências c e d, marque o ponto $C = c \cap d$.



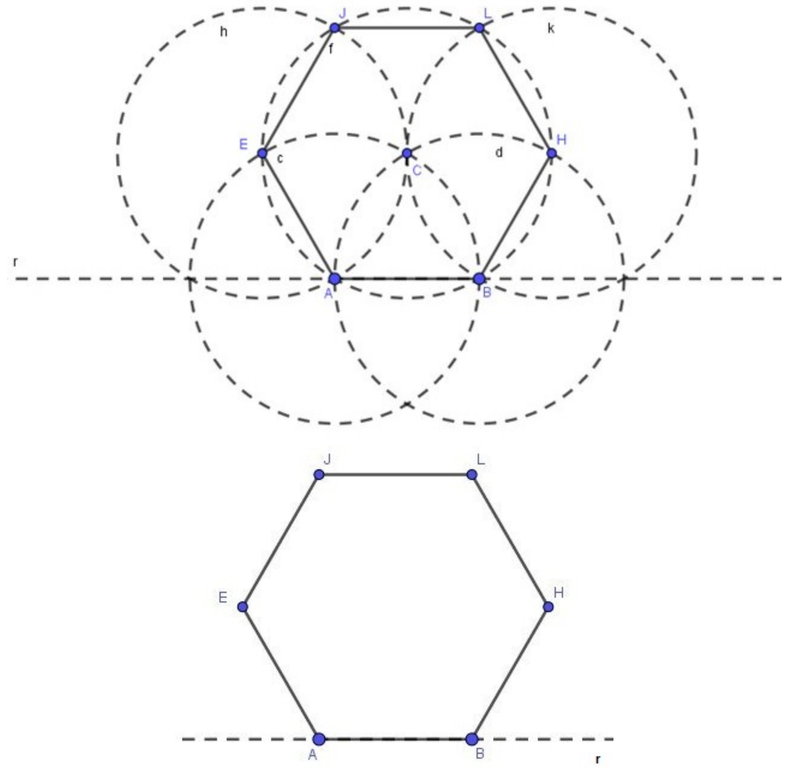
Passo 6. Centre compasso no ponto C com abertura de medida L, e trace a circunferência f, em seguida marque os pontos E e H, $E = c \cap f$ e $H = d \cap f$.



Passo 7. Com centros em E e H e raios iguais medida L, trace as circunferências h e k, e marquem os pontos J e L , $J = h \cap f$ e $L = k \cap f$.



Passo 8. Ligando os pontos ABHLJEA obtermos o hexágono regular ABHLJE.



Hexágono regular

Justificativa:

Por construção AB, AC, BC, AE, CE, EJ, CJ, BH, CH, HL, CL tem todos mesma medida r. Assim, os triângulos ABC, ACE, BCH, ECJ e HCL são equiláteros. Cada triângulo equilátero tem seus ângulos iguais a $60°$.

Os pontos A, B, H, L, J, E estão na circunferência f de centro C. Consequentemente a união dos arcos $\widehat{JE}$, $\widehat{EA}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BH}$ e $\widehat{HL}$ desta circunferência, cada um com $60°$, forma o arco $\widehat{JL}$ que terá portanto $300°$. Daí, o arco $\widehat{LJ}$ correspondente ao ângulo central $L\widehat{C}J$ terá medida $360° - 300° = 60°$.

Assim, os pontos A, B, H, L, J, E que estão na circunferência f de centro C a dividem em arcos de medidas iguais a $60°$. Pelo teorema visto no início deste capítulo temos que $ABHLJE$ tem lados de mesma medida.

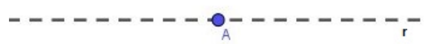
6.6 Octógono regular

Octógono é o nome dado para a figura geométrica que possui 8 lados e 8 ângulos. O octógono é dito regular quando possui os oito ângulos congruentes e os oito lados congruentes.

Passo 1. Desenhe com régua um segmento de medida L.

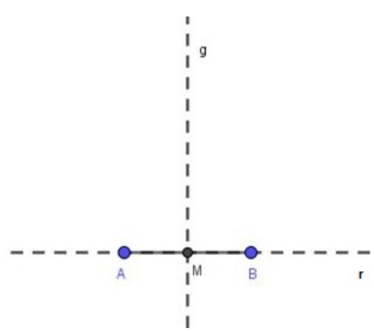
Passo 2. Trace uma reta r.

Passo 3. Em r marque um ponto qualquer e denote como A.

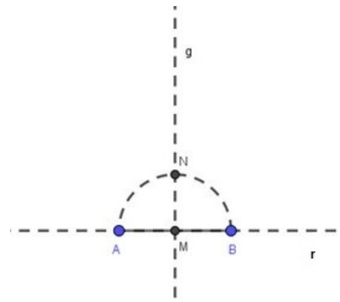


Passo 4. Transporte o segmento de medida L com extremos em A e B.

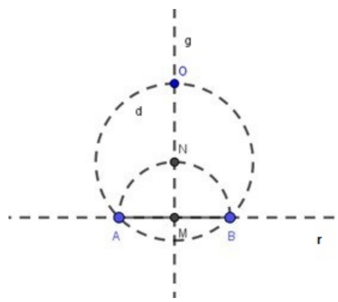
Passo 5. Marque o ponto médio M de AB e em seguida trace a reta g perpendicular ao segmento AB passando por M.



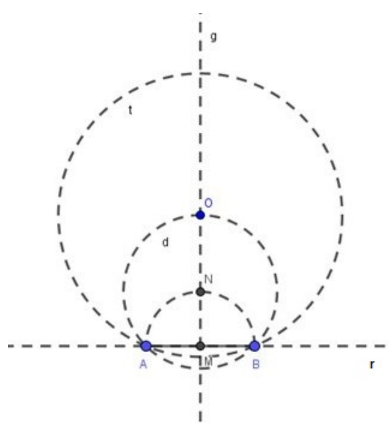
Passo 6. Centre compasso em M, raio MB e trace o arco $B\widehat{N}A$.



Passo 7. Centre compasso em N e raio NA e trace a circunferência d, em seguida marque o ponto O, uma das interseções da circunferência d com a reta g.



Passo 8. Centre compasso em O e com raio AO trace a circunferência t.

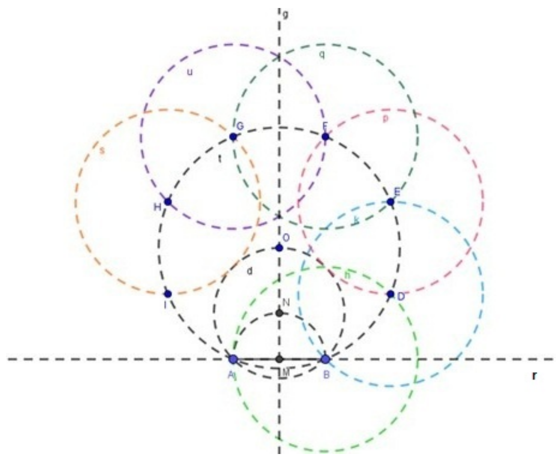


Passo 9. A circunferência t é circunscrita ao octógono regular inscrito, logo basta levar o segmento AB sobre a circunferência. Para isso siga os procedimentos abaixo.

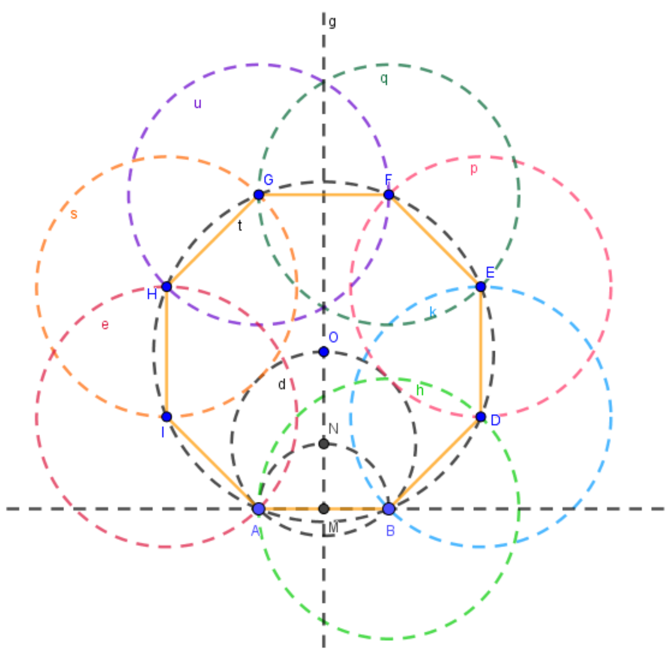
- Centre compasso em B raio AB trace a circunferência h e marque o ponto $D = t \cap h$.
- Centre compasso em D raio AB trace a circunferência k e marque o ponto $E = t \cap k$.
- Centre compasso em E raio AB trace a circunferência p e marque o ponto $F = t$

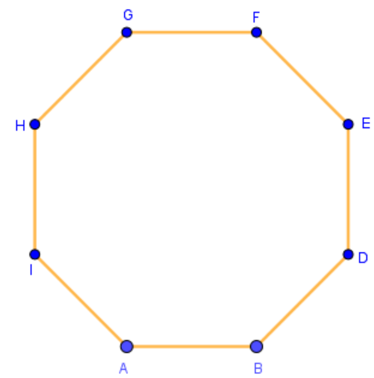
$\cap\ p$.

- Centre compasso em F raio AB trace a circunferência q e marque o ponto $G = t \cap q$.
- Centre compasso em G raio AB trace a circunferência u e marque o ponto $G = t \cap u$.
- Centre compasso em H raio AB trace a circunferência s e marque o ponto $I = t \cap s$.



- Ligue os pontos ABDEFGHIA, obtendo assim o octógono regular ABDEFGHI.





Octógono regular

Justificativa:

Os segmentos OA, OB, OD, OE, OF, OG, OH e OI são congruentes, pois são raios da circunferência t de centro O.
Além disso, os segmentos AB, BD, DE, EF, FG, GH e HI são congruentes por construção.
Assim, os triângulos AOB, BOD, DOE, EOF, FOG, GOH e HOI são congruentes pelo caso LLL.
Os triângulos AMN e BMN são retângulos isósceles, logo $M\widehat{A}N = M\widehat{N}A = M\widehat{B}N = M\widehat{N}B = 45°$. Então, $A\widehat{M}B = 90°$. Como $A\hat{M}B$ é ângulo central e $A\widehat{O}B$ é ângulo inscrito da cirncunferência d então $A\widehat{O}B = 45°$.
Pela congruência dos triângulos AOB, BOD, DOE, EOF, FOG, GOH e HOI temos que cada arco correspondentes em t mede $45°$ de forma que o arco $\widehat{AI}$ mede $315°$. Sobra, portanto, $45°$ para o arco complementar $\widehat{IA}$.
Assim, os pontos A, B, D, E, F, G, H, I que estão na circunferência t de centro O a dividem em arcos de medidas iguais a $45°$. Pelo teorema visto no início deste capítulo temos que $ABDEFGHI$ tem lados de mesma medida e portando os segmentos formam um octógono regular.

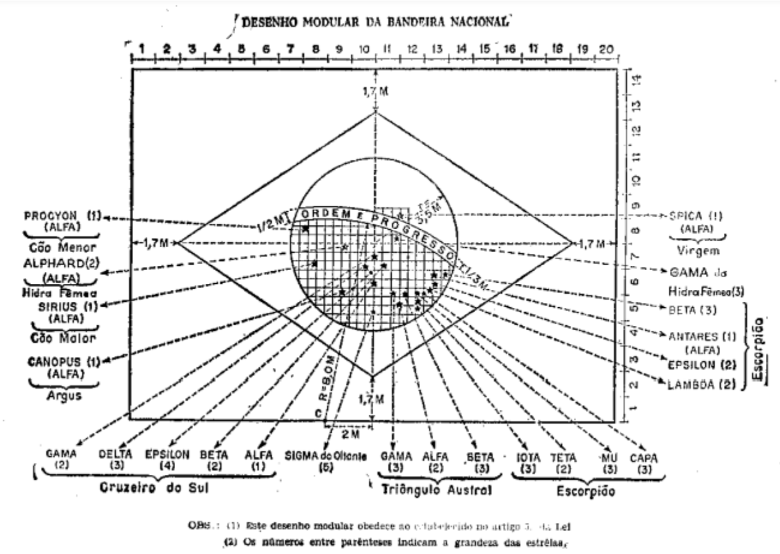
7 Construções interessantes

7.1 Bandeira do Brasil

Nesta construção será usada régua graduada. As medidas oficiais foram retiradas do site: `http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L5700.htm#art3`

Lei N° 5.700 de 1 de setembro de 1971.
Art. 5 A feitura da Bandeira Nacional obedecerá às seguintes regras (Anexo nº 2):
I - Para cálculo das dimensões, tomar-se-á por base a largura desejada, dividindo-se esta em 14 (quatorze) partes iguais. Cada uma das partes será considerada uma medida ou módulo.
II - O comprimento será de vinte módulos ($20M$).
III - A distância dos vértices do losango amarelo ao quadro externo será de um módulo e sete décimos ($1,7M$).
IV - O círculo azul no meio do losango amarelo terá o raio de três módulos e meio ($3,5M$).
V - O centro dos arcos da faixa branca estará dois módulos (2M) à esquerda do ponto do encontro do prolongamento do diâmetro vertical do círculo com a base do quadro externo (ponto C indicado no Anexo nº 2).
VI - O raio do arco inferior da faixa branca será de oito módulos (8M); o raio do arco superior da faixa branca será de oito módulos e meio ($8,5M$).
VII - A largura da faixa branca será de meio módulo ($0,5M$).
VIII - As letras da legenda Ordem e Progresso serão escritas em côr verde. Serão colocadas no meio da faixa branca, ficando, para cima e para baixo, um espaço igual em branco. A letra P ficará sôbre o diâmetro vertical do círculo. A distribuição das demais letras far-se-á conforme a indicação do Anexo nº 2. As letras da palavra Ordem e da palavra Progresso terão um têrço de módulo ($0,33M$) de altura. A largura dessas letras será de três décimos de módulo ($0,30M$). A altura da letra da conjunção E será de três décimos de módulo ($0,30M$). A largura dessa letra será de um quarto de módulo ($0,25M$).
IX - As estrêlas serão de 5 (cinco) dimensões: de primeira, segunda, terceira, quarta e quinta grandezas. Devem ser traçadas dentro de círculos cujos diâmetros são: de três décimos de módulo ($0,30M$) para as de primeira grandeza; de um quarto de módulo ($0,25M$) para as de segunda grandeza; de um quinto de módulo ($0,20M$) para as de terceira grandeza; de um sétimo de módulo ($0,14M$) para as de quarta grandeza; e de um décimo de módulo ($0,10M$) para a de quinta grandeza.
X - As duas faces devem ser exatamente iguais, com a faixa branca inclinada da esquerda

para a direita (do observador que olha a faixa de frente), sendo vedado fazer uma face como avêsso da outra.



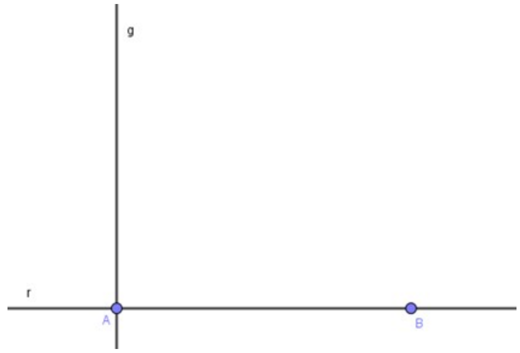
Anexo2

Passo 1. Trace uma reta r.

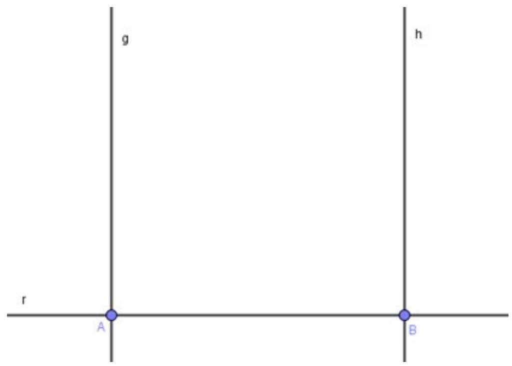
Passo 2. Marque um ponto qualquer sobre r e denomine-o como A.

Passo 3. Abra o compasso com medida de 20 cm, centre o compasso em A e marque o ponto B na reta r.

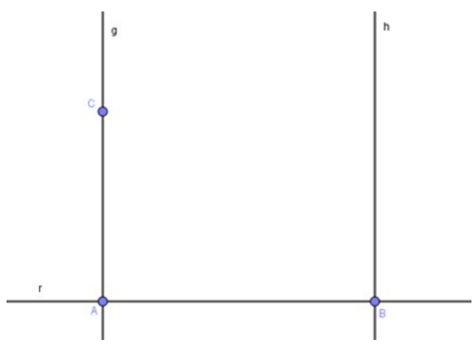
Passo 4. Trace a reta g perpendicular a r passando por A.



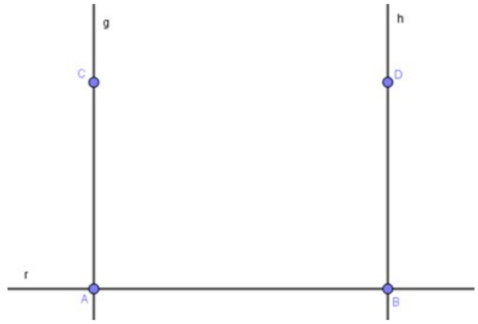
Passo 5. Trace a reta h perpendicular a r passando por B.



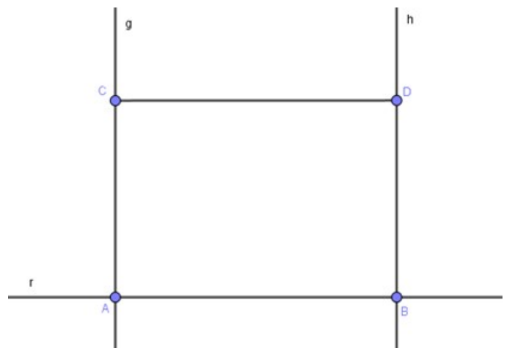
Passo 6. Abra o compasso com medida de 14 cm, centre o compasso em A e marque o ponto C na reta g.



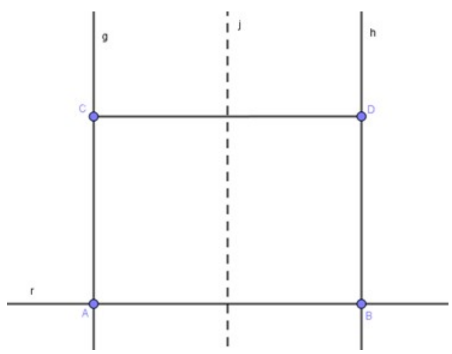
Passo 7. Abra o compasso com medida de 14 cm, centre o compasso em B e marque o ponto D na reta h.



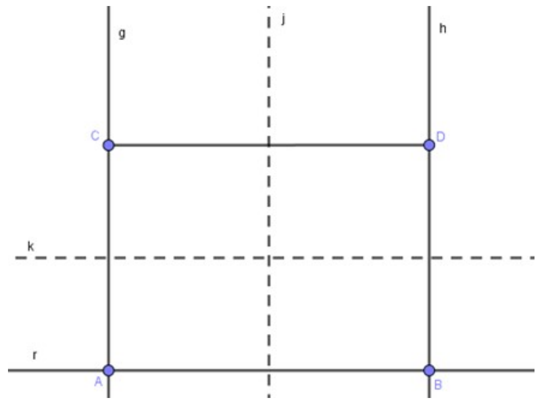
Passo 8. Ligue os pontos C e D.



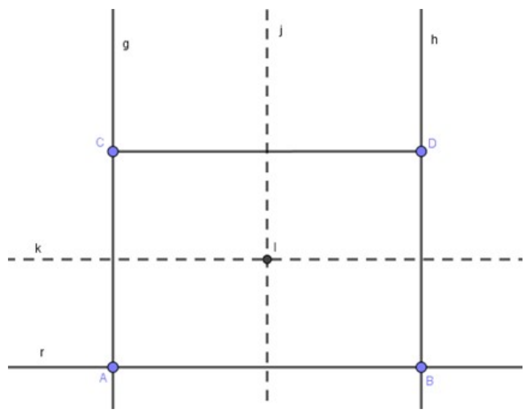
Passo 9. Trace a mediatriz de AB, denomine-a por j.



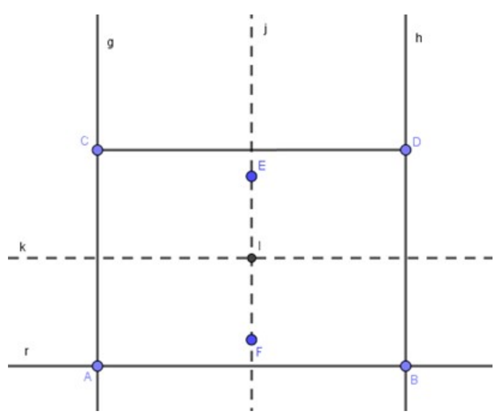
Passo 10. Trace a mediatriz de AC denomine-a por k.



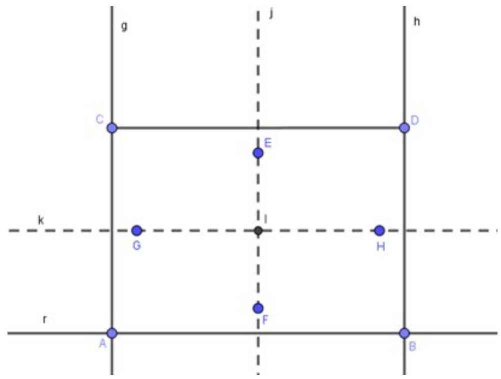
Passo 11. Marque o ponto $I = AB \cap AC$.



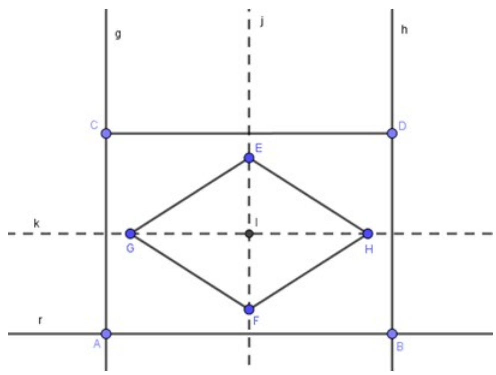
Passo 12. Com abertura de $5,3$cm centre compasso em I e marque os pontos E e F na reta j.



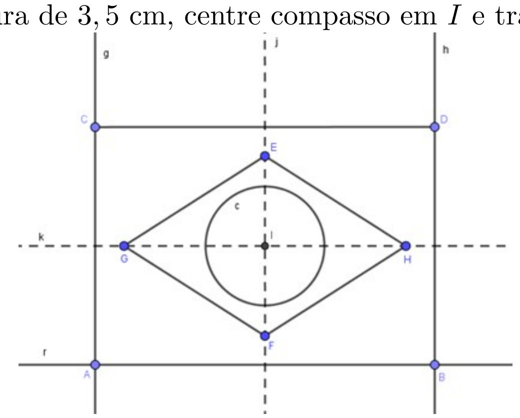
Passo 13. Com abertura de $8,3$ cm centre compasso em I e marque os pontos G e H na reta k.



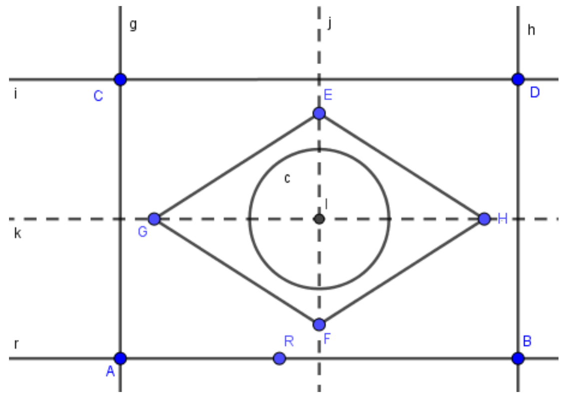
Passo 14. Ligue os pontos EGFHE.



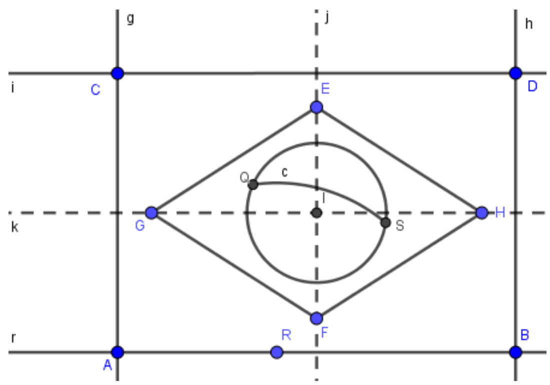
Passo 15. Com abertura de $3,5$ cm, centre compasso em I e trace a circunferência c.



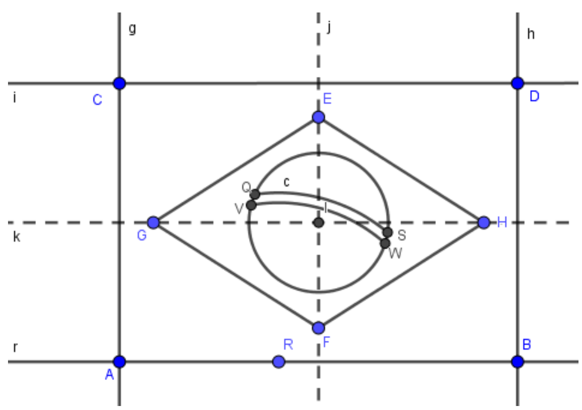
Passo 16. Com abertura de 8 cm, centre compasso em A e marque o ponto R na reta r.



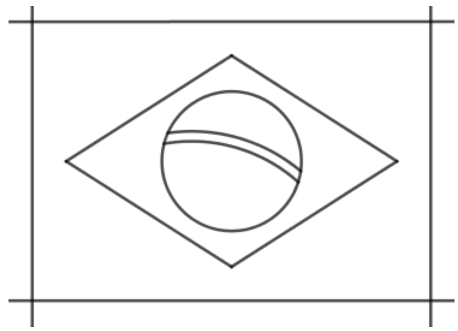
Passo 17. Com abertura de 8 cm, centre compasso em R trace o arco $\widehat{SQ}$.



Passo 18. Com abertura de 8, 5 cm, centre compasso em R e trace o arco $\widehat{WV}$.



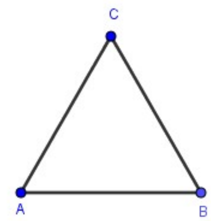
Passo 19. Bandeira do Brasil construída em uma escala 10 vezes menor que o tamanho oficial.



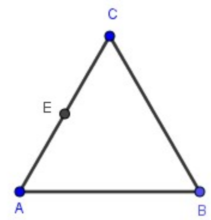
7.2 Mandala com triângulo equilátero

Construção passo à passo Mandala a partir do triângulo equilátero.

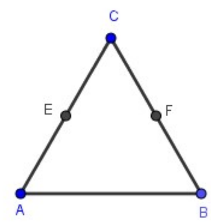
Passo 1. Desenhe um triângulo equilátero ABC.



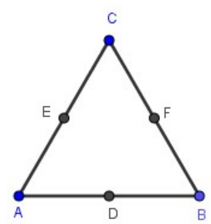
Passo 2. Marque o ponto E, ponto médio de AC.



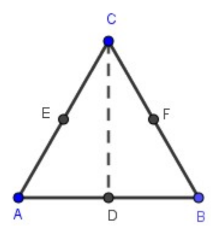
Passo 3. Marque o ponto F ponto médio de BC.



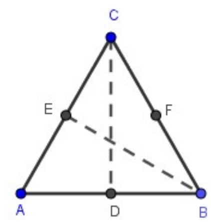
Passo 4. Marque o ponto D ponto médio de AB.



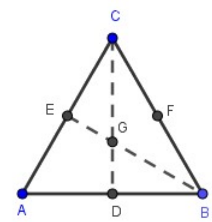
Passo 5. Trace o segmento CD.



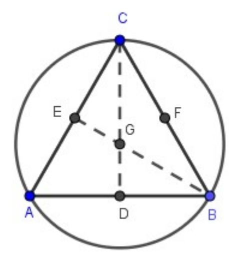
Passo 6. Trace o segmento BE.



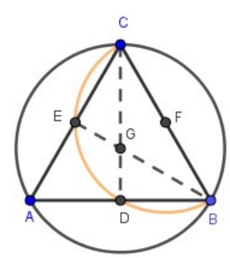
Passo 7. Marque o ponto $G = BE \cap CD$.



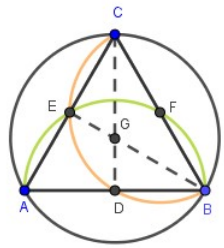
Passo 8. Centre compasso em G, abertura GA, e trace a circunferência circunscrita ao triângulo.



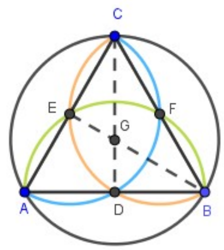
Passo 9. Centre compasso em F, abertura FB e trace a semicircunferência de diâmetro BC.



Passo 10. Centre compasso em D, abertura DB e trace a semicircunferência de diâmetro BA.



Passo 11. Centre compasso em E, abertura EC e trace a semicircunferência de diâmetro AC.

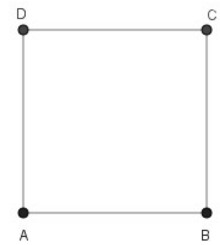


Mandala Construída

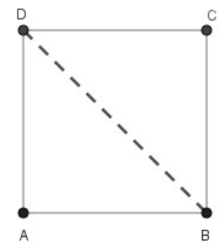
7.3 Mandala com quadrado

Construção de Mandala a partir de um quadrado

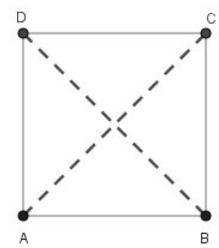
Passo 1. Desenhe um quadrado ABCD.



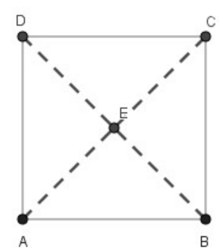
Passo 2. Trace a diagonal BD.



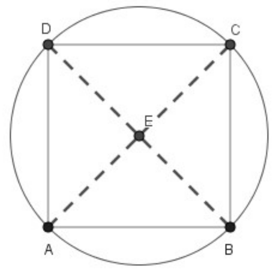
Passo 3. Trace a diagonal AC.



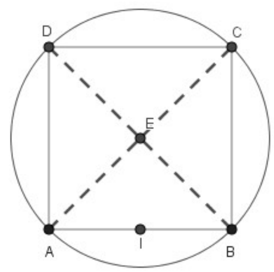
Passo 4. Marque o ponto $E = AC \cap BD$.



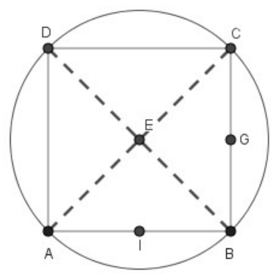
Passo 5. Centre compasso em E, abertura ED e trace a circunferência circunscrita ao quadrado.



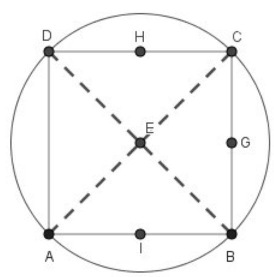
Passo 6. Marque o ponto I, ponto médio de AB.



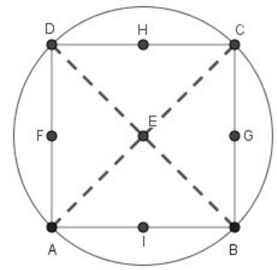
Passo 7. Marque o ponto G, ponto médio de BC.



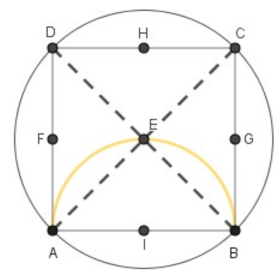
Passo 8. Marque o ponto H, ponto médio de CD.



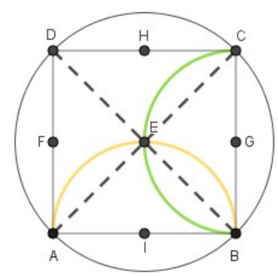
Passo 9. Marque o ponto F, ponto médio de DA.



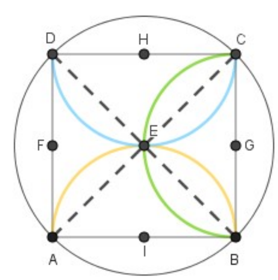
Passo 10. Centre compasso em I, abertura BI e trace a semicircunferência de diâmetro AB.



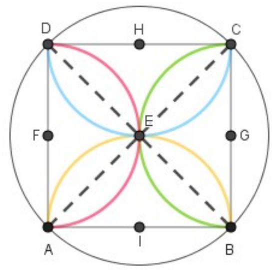
Passo 11. Centre compasso em G, abertura GB e trace a semicircunferência de diâmetro BC.

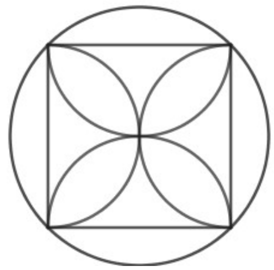


Passo 12. Centre compasso em H, abertura HC e trace a semicircunferência de diâmetro AC.



Passo 13. Centre compasso em F, abertura FD e trace a semicircunferência de diâmetro AD.



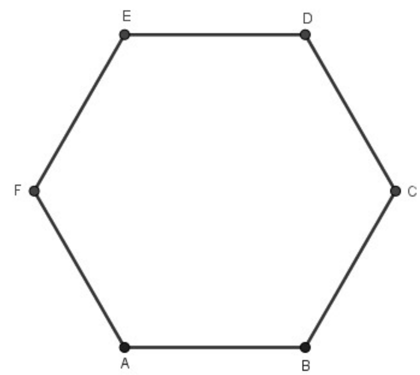


Mandala Construída

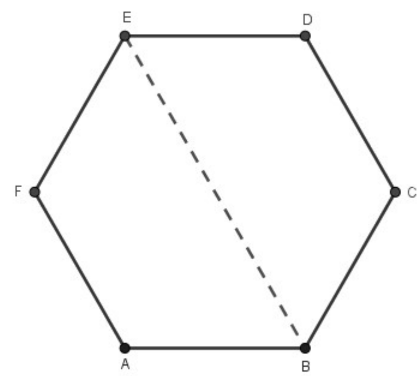
7.4 Mandala com hexágono regular

Construção de Mandala a partir de um hexágono

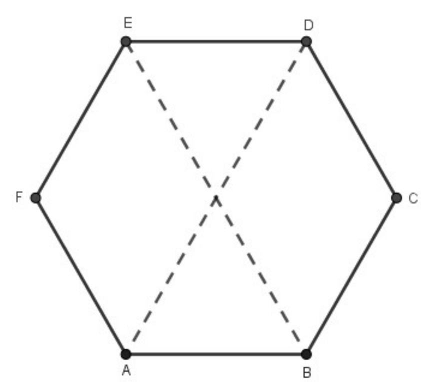
Passo 1. Desenhe um hexágono regular ABCDEF com uma medida L qualquer.



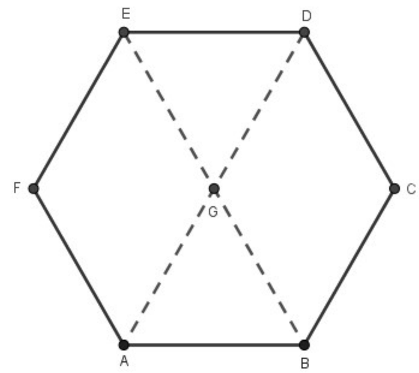
Passo 2. Trace o segmento EB.



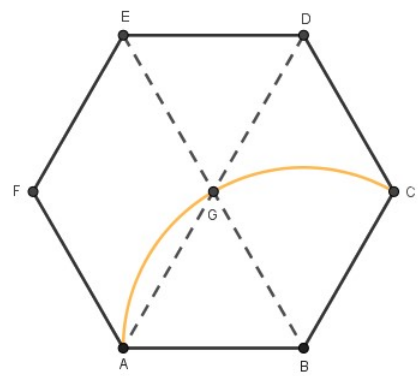
Passo 3. Trace o segmento DA.



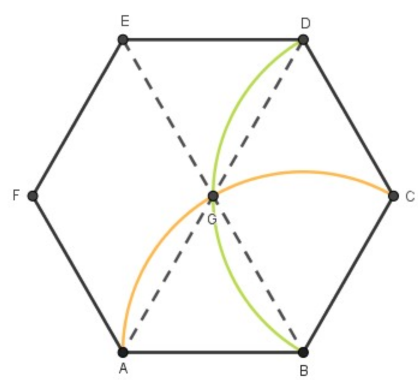
Passo 4. Marque o ponto $G = DA \cap EB$.



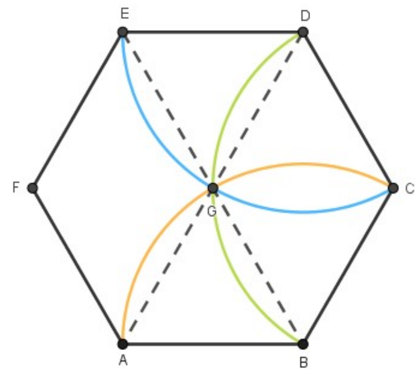
Passo 5. Centre compasso em B, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{AC}$.



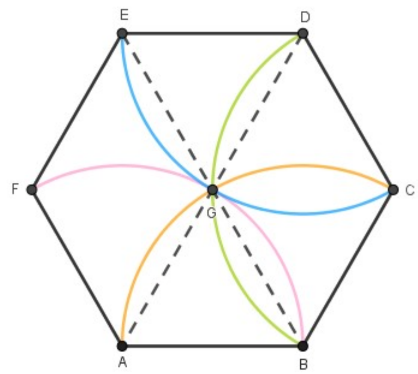
Passo 6. Centre compasso em C, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{BD}$.



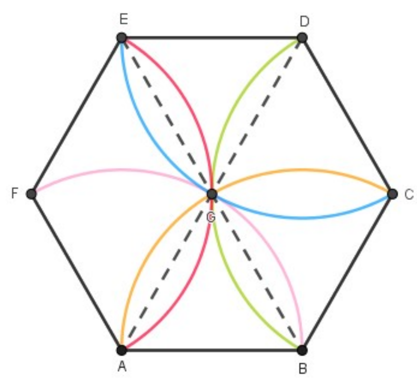
Passo 7. Centre compasso em D, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{CE}$.



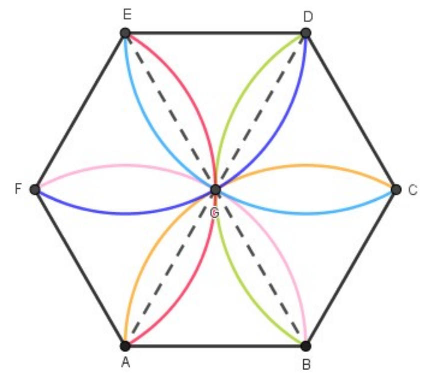
Passo 8. Centre compasso em A, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{BF}$.



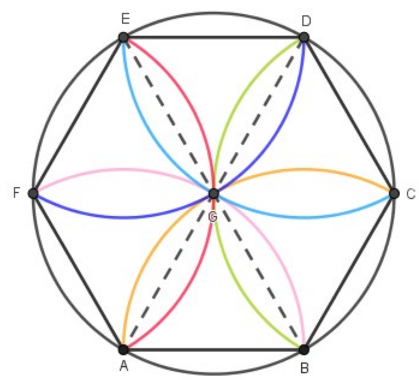
Passo 9. Centre compasso em F, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{AE}$.



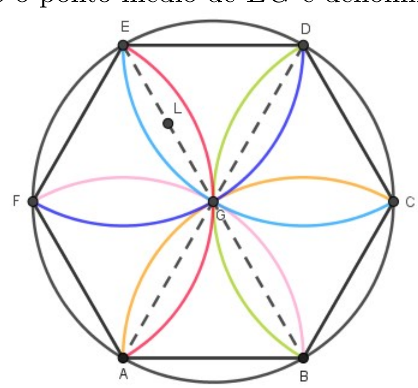
Passo 10. Centre compasso em E, abertura com medida L e trace o arco $\widehat{FD}$.



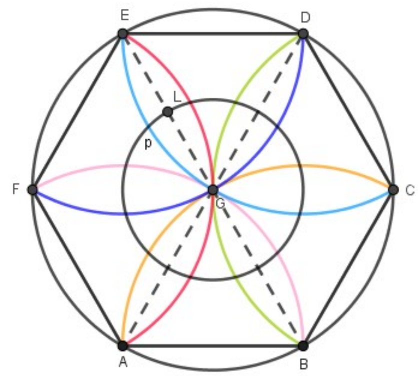
Passo 11. Centre compasso em G, com abertura de medida L e trace a circunferência circunscrita ao hexágono regular.



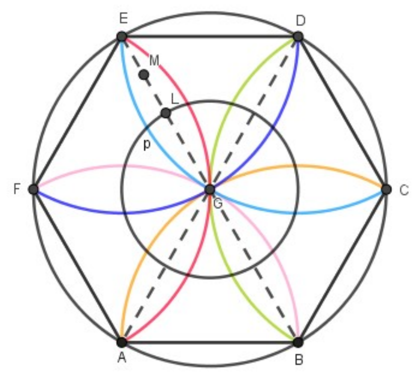
Passo 12. Marque o ponto o ponto médio de EG e denomine-o como ponto L.



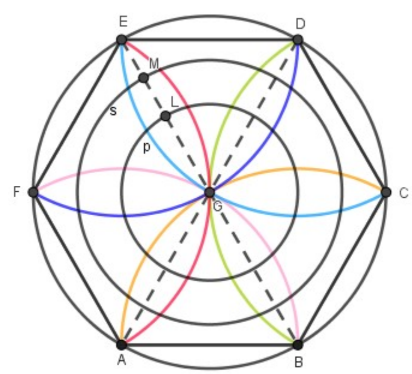
Passo 13. Centre compasso em G, abertura GL e trace a circunferência p.



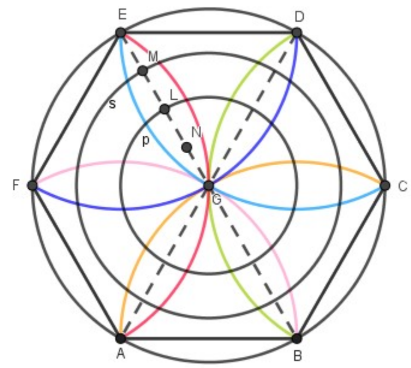
Passo 14. Marque o ponto o ponto médio de EL e denomine-o como ponto M.



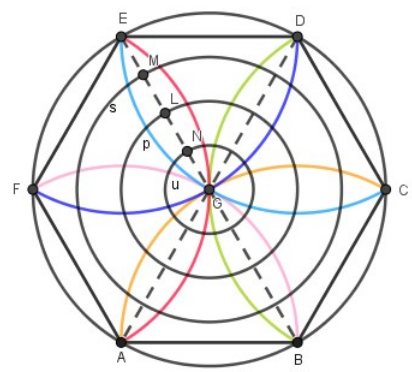
Passo 15. Centre compasso em G, abertura GM e trace a circunferência s.

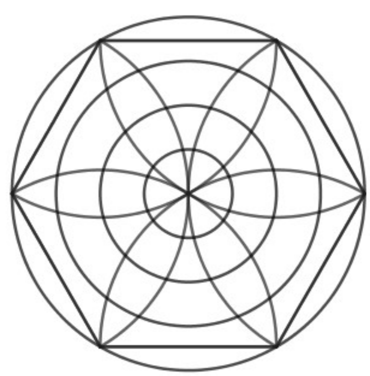


Passo 16. Marque o ponto o ponto médio de GL e denomine-o como ponto N.



Passo 17. Centre compasso em G, abertura GN e trace a circunferência u.



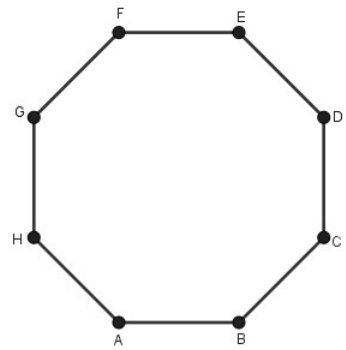


Mandala construída

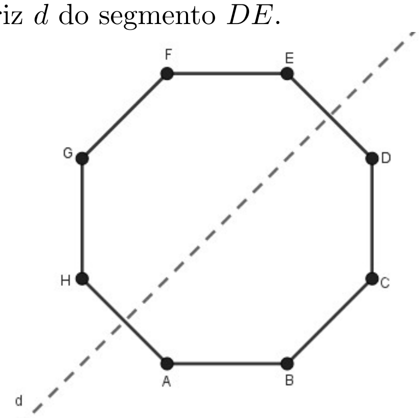
7.5 Mandala com octógono regular

Construção de Mandala a partir de um octógono regular

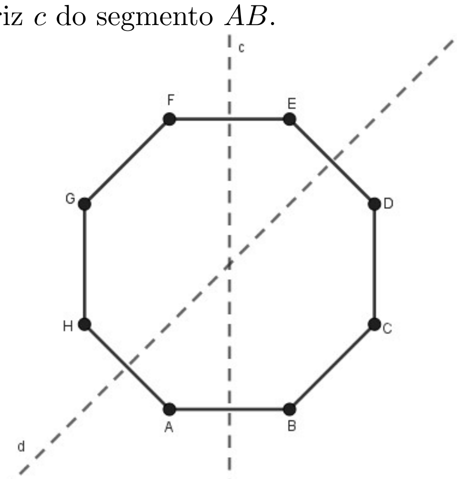
Passo 1. Desenhe um octógono regular ABCDEFGH com uma medida L qualquer.



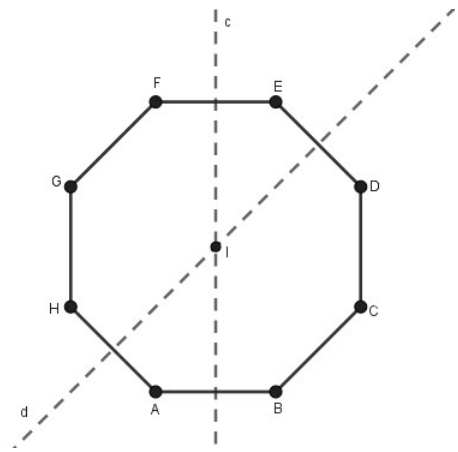
Passo 2. Trace a mediatriz d do segmento DE.



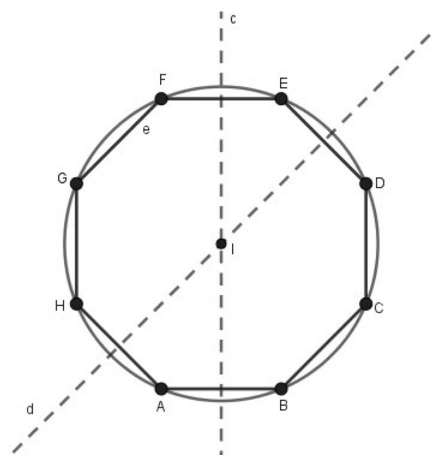
Passo 3. Trace a mediatriz c do segmento AB.



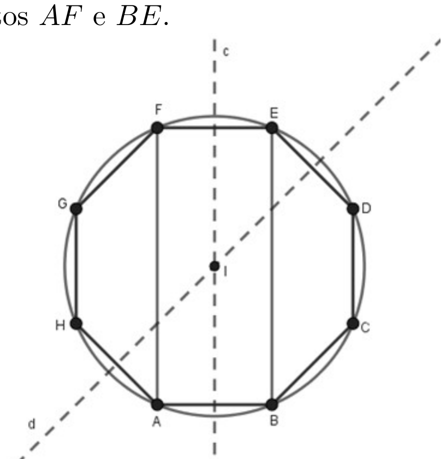
Passo 4. Marque o ponto $I = c \cap d$.



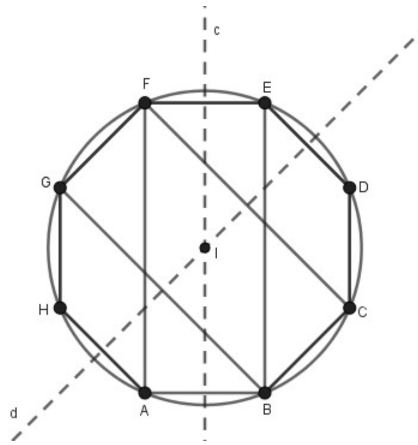
Passo 5. Centre compasso em I e abertura AI e trace a circunferência circunscrita ao octógono regular.



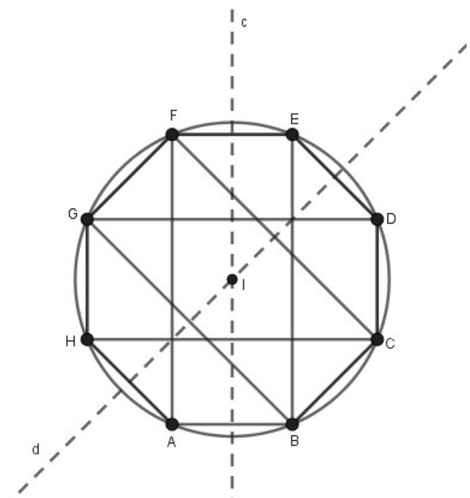
Passo 6. Trace os segmentos AF e BE.



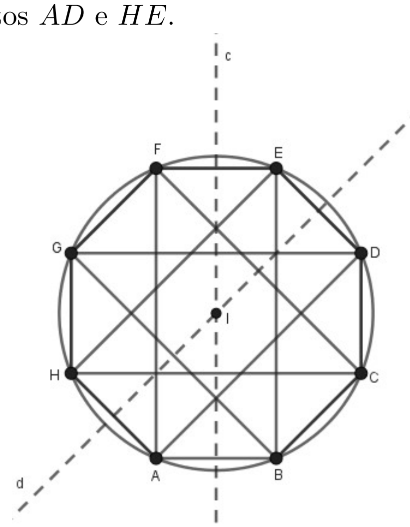
Passo 7. Trace os segmentos BG e CF.

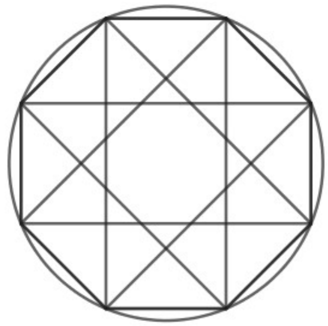


[Passo 8.] Trace os segmentos CH e DG



[Passo 9.] Trace os segmentos AD e HE.





Mandala construída.

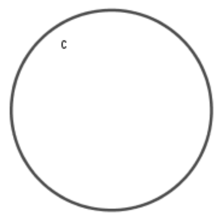
7.6 Estrela de 5 pontas

O Pentagrama é uma estrela de 5 pontas formada pelas diagonais do pentágono regular.

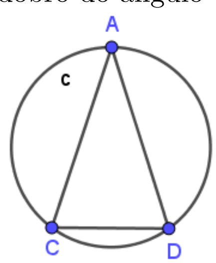
Construção passo à passo

Passo 1. Construa o triângulo EGH na qual cada ângulo da base é o dobro do vértice.

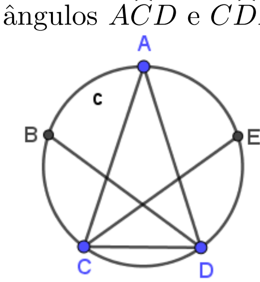
Passo 2. Trace uma circunferência c com uma medida de raio qualquer.



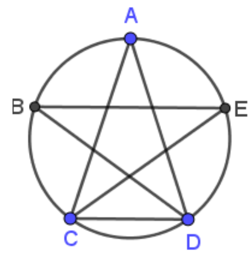
Passo 3. Inscreva, o triângulo ACD com o ângulo $C\widehat{A}D$ igual ao ângulo $G\widehat{E}H$ e os ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ iguais respectivamente, aos ângulos $E\widehat{G}H$ e $E\widehat{H}G$. Assim, cada um dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ é o dobro do ângulo $C\widehat{A}D$.



Passo 4. Trace as bissetrizes dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$, e marque os pontos E e B, interseções respectivamente dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ com a circunferência c.



Passo 5. Trace o segmento de reta $\overline{BE}$



Estrela de 5 pontas construída

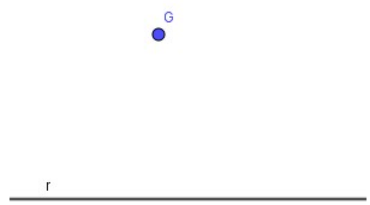
Justificativa

Como cada um dos ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}A$ é o dobro do ângulo $C\widehat{A}D$, e foram divididos ao meio pelos segmentos CE e DB, os cincos ângulos $D\widehat{A}C$, $A\widehat{C}E$, $E\widehat{C}D$, $C\widehat{D}B$ e $B\widehat{D}A$ são iguais entre si. Ângulos iguais subtendem arcos iguais, assim os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ e $\widehat{EA}$ são iguais entre si. Logo pelo teorema do início deste capítulo os lados de $ABCDE$ tem mesma medida. Logo como $ABCDE$ é um pentágono regular, traçando suas diagonais temos a estrela de 5 pontas.

8 Atividades propostas de construções geométricas

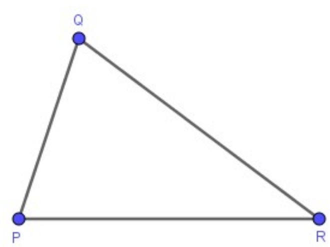
Propomos algumas atividades para que possam contribuir para ampliar e aprofundar o estudo das construções geométricas. As atividades podem ser organizadas e realizadas em grupos ou duplas. A ideia é que os alunos sintam-se motivados e que possam trocar experiências, conhecimentos, e sua aprendizagem seja significativa.

1. Dada a reta r, e o ponto G fora dela, trace a perpendicular a r passando por G.



2. Dado o segmento MN, divida-o em 7 partes iguais.

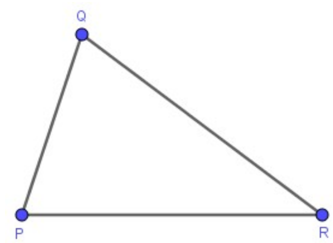
3. Dado o triângulo PQR, inscrever uma circunferência à esse triângulo.



Para realizar essa construção siga as orientações abaixo:

- Trace as bissetrizes dos ângulos internos desses triângulos.
- Marque o ponto O, intersecção das bissetrizes.
- Centre compasso em O, abertura de O até um dos lados do triângulo e trace a circunferência inscrita.

4. Dado o triângulo PQR, circunscrever uma circunferência à esse triângulo.



Para realizar essa construção siga as orientações abaixo:

- Trace as mediatrizes de PQ, PR e QR

- Marque o ponto O, intersecção das mediatrizes.

- Centre compasso em O, abertura OP e trace a circunferência circunscrita.

5. Com o auxílio da régua e do compasso, construa uma estrela de sete pontas.
Siga o passo a passo a seguir:

- Trace a circunferência com o raio que desejar.

- Trace o diâmetro AB.

- Centro em A e raio igual ao da circunferência, trace o arco $C\widehat{O}D$.

- Com o auxílio da régua, trace o segmento CD, determinando o ponto E, intersecção do segmento AB com o segmento CD.

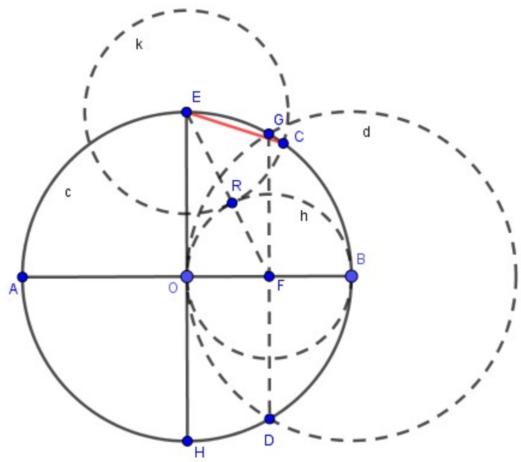
- O segmento CE corresponde à sétima parte da circunferência.

- Centro em A, raio CE determine sucessivamente os pontos que dividem a circunferência em sete partes iguais.

- Ligue os pontos, obtendo a estrela de sete pontas.

Atividade 6 - Construção decágono regular

Sugestão de atividade: O professor informa os passos ordenadamente, apenas verbalmente (escrito ou oral) sem a presença de figuras, para que o aluno construa a figura geométrica, por exemplo o decágono regular.



Passos da construção do decágono regular.

- Abra o compasso com abertura qualquer e desenhe uma circunferência (denote como c), marque o ponto O, centro da circunferência.
- Trace o diâmetro AB.
- Trace o segmento EH perpendicular a AB passando por O.
- Com abertura AO e centro em B trace a circunferência d, e marque os pontos G e D, intersecções da circunferência c e d.
- Trace o segmento GD.
- Marque o ponto F intersecção do segmento GD com segmento AB.
- Trace o segmento EF.
- Com abertura igual ao segmento OF, centre compasso em F trace a circun-

ferência h.

- Marque o ponto R, intersecção da circunferência h com segmento EF.

- Com abertura igual ao segmento ER, centre compasso em E trace a circunferência k.

- Marque o ponto C, intersecção das circunferências c e k.

- O segmento EC é o lado do decágono regular.

- Agora bastar levar o segmento EC sobre a circunferência obtendo assim o decágono regular.

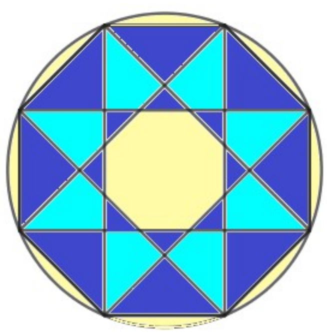
Atividades com Mandalas

Existem várias possibilidades de trabalhar com as mandalas em sala de aula.

- Trabalho interdisciplinar com outras matérias, como artes e história. Pedir aos alunos para montar grupos e trabalhar a parte histórica e a parte artística das mandalas. Na parte de matemática pedir os alunos para construírem alguns padrões, respeitando cada faixa etária.
- Outra sugestão é trabalhar em matemática, alguns tópicos da geometria como os conceitos de ângulos, simetrias de translação, rotação e reflexão, construção dos ângulos notáveis entre outros.

Sugestão de atividade: Atividade pode ser desenvolvida, individualmente ou em grupo. Solicitar que os alunos construam sua própria mandala, usando apenas régua e compasso (podem utilizar as construções sugeridas em (7.1, 7.2, 7.3, 7.4 ou 7.5) e coloquem a criatividade em prática para colorir a mandala construída. Após o término da atividade o (a) professor (a) pode explorar o estudo da circunferência e de seus elementos, o estudo dos polígonos, os tipos de simetrias, o estudo dos ângulos.

Exemplo: Observe a Mandala abaixo e responda as peguntas:



I) Quais são os polígonos presentes na Mandala?
II) Quais os tipos de ângulos que compõe as figuras?
III) Quais tipos de simetria pode ser observada na mandala?

9 Considerações Finais

A presente dissertação forneceu material para auxiliar o professor de Matemática na abordagem de construções geométricas envolvendo régua e compasso (manualmente) ou com o uso de outras ferramentas tecnológicas como *software*. Foram abordadas construções elementares, polígonos regulares e algumas outras construções interessantes.

O uso das construções geométricas no ensino da geometria pode e deve ser utilizada de modo que os aprendentes venha formular conceitos mais rígidos e duradouros com relação à matéria e outros conteúdos da matemática, além de motivar os alunos em construir e verificar conceitos, propriedades e teoremas que normalmente são vistos somente de forma teórica. A prática leva a um sólido aprendizado que dificilmente será esquecido, assim como facilitará o entendimento de outros conceitos matemáticos, de forma plena e satisfatória.

Através da tentativa de construção de figuras geométricas, muitos conhecimentos podem ser desenvolvidos.

No livro [MARMO 1995] é feita uma comparação entre o desenho e a geometria como um casamento perfeito, enquanto a geometria estuda as figuras relacionando-se com números (abstratos) que são suas medidas, o desenho estuda as figuras (abstratas) relacionando-as com suas representações (que são concretas). O desenho concretiza os conhecimento teóricos da Geometria.

Após a elaboração desse trabalho percebi o quão importante é relacionar a teoria com a prática. Sendo assim, as construções geométricas devem fazer parte do cotidano em sala de aula sendo mais uma ferramenta para que o processo de ensino e aprendizagem seja eficaz.

Espera-se que esse trabalho seja usado como mais uma ferramenta de ensino, no intuito de ajudar na ampliação do repertório dos estudantes de Matemática, professores em seu ofício ou ainda para qualquer pessoa interessada em explorar as construções geométricas, como meio de entendimento do seu cotidiano ou suas aplicações na sociedade que os cerca. Seja na forma manual ou no uso das tecnologias atuais.

Referências

[BARBOSA 2006] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro , 2006.

[BRAGA 1997] BRAGA, Theodoro. **Desenho Linear Geométrico.** São Paulo: Icone , 1997.

[DOLCE 2006] DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos da matemática elementar 9**. São Paulo: ATUAL, 2005.

[FRANCISCO 2013] FRANCISCO, Samuel Vilela de Lima. **Entre o Fascínio e a Realidade da Razão Áurea**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. UNESP Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto. 2017.

[LOPES 2014] LOPES, Aislan Sirino. **Critério para a construbilidade de polígonos regulares por régua e compasso e números construtíveis.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. Universidade Federal do Ceará. Juazeiro do Norte. 2014.

[MARMO 1995] MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1995.
NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[SILVA 2013] da SILVA, Alex Cristophe Cruz. **A Construção do Pentágono Regular segundo Euclides**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. CCEN Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2013.

[WAGNER 2007] WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[WAGNER 2016] WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA. 2016.