Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Carla de Azevedo Paes Nunes

Otimização como recurso de aprendizagem aplicado ao Ensino Médio e Superior

Rio de Janeiro

2022

Carla de Azevedo Paes Nunes

Otimização como recurso de aprendizagem aplicado ao Ensino Médio e Superior

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof. Dra. Mariana Gesualdi Villapouca

Coorientador: Rogério Quintino de Oliveira

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

N972 Nunes, Carla de Azevedo Paes.

Otimização como recurso de aprendizagem aplicado ao Ensino Médio e Superior/ Carla de Azevedo Paes Nunes. – 2022.

95 f.: il.

Orientadora: Mariana Gesualdi Villapouca

Coorientador: Rogério Quintino de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Otimização matemática - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio) - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino (Superior) - Teses. I. Villapouca, Mariana Gesualdi. II. Oliveira, Rogério Quintino de. III.Título.

CDU 519.863

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Carla de Azevedo Paes Nunes

Otimização como recurso de aprendizagem aplicado ao Ensino Médio e Superior

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 11 de fevereiro de 2022.

Banca Examinadora**:**

____

Prof. Dra. Mariana Gesualdi Villapouca (Orientadora)

Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Prof. Dr.Eduardo Barbosa Pinheiro

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

____

Prof. Dr.Helvecio Rubens Crippa

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Carlos (in memoriam) e Marta, que sempre acreditaram no poder da educação, e ao Profº. Rogério Quintino (in memoriam), por suas contribuições e eternas lições.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, detentor de toda sabedoria e conhecimento, que me permitiu e deu condições para concluir o presente trabalho, mesmo em meio à tantas dificuldades enfrentadas.

À minha orientadora Prof. Dra. Mariana Gesualdi Villapouca, por não desistir de mim, pelas incansáveis contribuições e palavras de ânimo.

Ao meu marido, Vinicius, pelo companheirismo, compreensão e incentivo sempre presente em todos os momentos.

Aos meus pais, que desde o início acreditaram que o maior investimento que se pode fazer é na educação.

Ao querido Profº. Rogério Quintino (in memoriam), que contribuiu significativamente para que este trabalho fosse possível, com o qual espero homenageá-lo.

Aos professores membros da banca examinadora, por terem aceitado o convite e se dedicado à leitura do trabalho.

E, finalmente, aos queridos colegas da turma de 2018 do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT), diante dos quais encontrei amizades para toda a vida pois me receberam de braços abertos, serei eternamente grata por tudo.

RESUMO

NUNES, Carla de Azevedo Paes. *Otimização como recurso de aprendizagem aplicado ao Ensino Médio e Superior*. 2022. 94f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

Este trabalho foi desenvolvido com o propósito de apresentar e discutir problemas de otimização, aplicáveis tanto no Ensino Médio, quanto no ensino superior, para serem utilizados em sala de aula de forma motivacional, a fim de introduzir as ideias do cálculo nos últimos anos do Ensino Médio, ou mesmo aplicar os conhecimentos já adquiridos, dentro dos cursos de nível superior. Resolver problemas de otimização pode despertar a curiosidade, pois a busca pela solução ótima é algo presente em nossas vidas, por isso acreditamos que os alunos sejam capazes de produzir e apresentar outros problemas dentro dessas aulas. Propomos a resolução de problemas em sala de aula de forma que se promova a interação e participação. Discutimos a importância do ensino de Cálculo, propomos os problemas apresentados, seguidos das possibilidades que estes podem proporcionar. Introduzimos ainda problemas aplicados à outras áreas de conhecimento favorecem o aspecto motivacional e a interdisciplinaridade, visando um aprendizado significativo.

Palavras-chave: Otimização. Máximos e Mínimos. Cálculo no Ensino Médio.

ABSTRACT

NUNES, Carla de Azevedo Paes. *Optimization as a learning resource applied to Secondary and Higher Education*. 2022. 94f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

This paper was developed with the purpose of present and discuss optimization problems, applicable to high school students or university students, to be used in the classroom in a motivational way, in order to introduce the ideas of the calculus in the last years of the high school, or apply acquired knowledge in university courses. Solve optimization problems can arouse curiosity, because seach for the great is something present in our lives, for this we believe that students are able to produce and present other problems. We propose problem solving in the classroom in order to promote interaction and participation. We will discuss the importance of teaching Calculus, and we will propose the problems presented, and the possibilities that they can provide. We also introduced problems applied to other areas of knowledge, to favor again the motivational aspect and interdisciplinarity, aiming a significant learning.

Keywords: Optimization. Maximums and minimums. Calculus in the high school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As inquietações e indagações que motivaram o presente trabalho são antigas. Os questionamentos que tornaram esse trabalho possível desde o primeiro dia, podem estar presentes em grande parte dos estudantes que ingressam nos cursos de nível superior dentro das áreas exatas de conhecimento. Por vezes, o estudante que chega à Universidade pode encontrar-se animado com as conquistas do vestibular, porém receoso por conta de sua bagagem de conhecimento, daquilo que adquiriu ao longo da vida escolar. Será suficiente a base que carrego? Quais os requisitos para obter êxito e aprovação nas disciplinas? Estes são possíveis questionamentos que permeiam o imaginário do estudante ao se deparar com as primeiras disciplinas da graduação.

Ao obter sucesso nos exames de vestibular, o aluno espera atingir também êxito com certa falicidade dentro das disciplinas da graduação. Nesse sentido, estamos defasados com relação à esse sucesso esperado. Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) aponta, por exemplo, que:

> Na UFF, a variação do índice de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o curso de Matemática, este não é inferior a 65% [...] Tal situação de desconforto com relação ao ensino de Cálculo não é local e nem característica exclusiva da UFF; é geral e tem provocado por parte de outras instituições atitudes inusitadas.[...] Engana-se quem pensa que tal problema é cultural e que se justifica pela condição sócio-econômica da sociedade brasileira. A situação do ensino de cálculo nos países "desenvolvidos" não é muito diferente, visto que trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e recebido merecido destaque por parte da literatura especializada internacional [...]. (REZENDE, 2003, P.21)

Além disso, nossos índices com relação à Educação básica são bastante alarmantes:

> O maior estudo sobre educação do mundo, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), apontou que o Brasil tem baixa proficiência em leitura, matemática e ciências, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação. A edição 2018, divulgada mundialmente nesta terça-feira, 3 de dezembro, revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Em ciências, o número chega a 55% e, em leitura, 50%. Os índices estão estagnados desde 2009. (INEP, 2021).

Como descreve Godoy e Faria (2012), "tem ocorrido um alto índice de reprovações nas disciplinas de Cálculo nos cursos de graduação que têm essa disciplina na grade curricular, o que tem se tornado uma rotina e considerado como um fator natural para professores e alunos".

Estaria o sucesso acadêmico definido pelos conhecimentos prévios, ou pela ausência deles? É tentador culpar os atores do passado da vida estudantil de um aluno. São personagens desconhecidos por nós, facilmente culpáveis.

De certa forma este trabalho não se propõe a procurar culpados, de forma a banir hábitos e métodos que vem sendo aplicadas no ensino dessa disciplina, mas sim, construir pontes. Na busca de culpados não se buscam soluções, portanto não se tem aqui o objetivo de por a culpa nos currículos da educação básica, nem mesmo pelo rigor ou metodologia adotada pelos professores do ensino superior. O problema consiste na separação entre uma coisa e outra, indo até a pós-graduação. Se retomarmos a ligação entre todos os níveis educacionais por onde um estudante passeia ao longo da vida acadêmica, podemos refletir a respeito de passado, presente e futuro. Não usando o passado como desculpa, nem indicando o futuro como justificativa, mas buscando diálogo entre esses diferentes níveis para a reflexão da prática em si.

Barbosa (1994) diz: “certamente, a falta de elo, de um relacionamento maior entre os níveis de ensino, principalmente entre o nível secundário e o universitário, tem trazido grandes dificuldades na relação ensino-aprendizagem dos alunos que fazem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I”.

Movido por questionamentos acerca da prática de ensino é que o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT) se revela como instrumento de diálogo da educação básica e a academia, onde o professor da educação básica se encontra com o professor da pós-graduação numa possibilidade riquíssima de reflexões e trocas, gerando contribuição para o ensino aprendizagem nos mais diversos níveis. Nesses diálogos se confirma a suspeita de que o problema não reside em um segmento ou no outro, mas sim no processo de transição. Buscamos um aprimoramento da ligação, de forma que ambos os professores pareçam falar o mesmo idioma, ao invés dos mundos diferentes que separam salas de aula diferentes. Por vezes, falta até interdisciplinaridade dentro de nossa disciplina, de modo a explorá-la em seus mais diversos campos. Da forma como as disciplinas são apresentadas aos alunos, pode ser que pouca motivação possa surgir, e é preciso rever isso.

Além das pontes entre os diversos segmentos da educação, faltam também pontes para a vida, para o mercado de trabalho, para a contribuição histórica daquela disciplina. Considerando isso, vale a pena relembrar que em meados da década de 60 alguns conceitos de Cálculo se faziam presentes nos currículos de Ensino Médio, segundo Ávila:

> Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2° grau? Será que *é* um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária? [...] Muita gente talvez não saiba - afinal, já são passados trinta anos! -, mas no final dos anos 50 e começo dos anos 60, houve uma mudança

> significativa no ensino da Matemática no Brasil (em conseqüência do que então acontecia no exterior, diga-se de passagem). O nome do movimento era Matemática Moderna, pois, como propalavam seus defensores, era preciso modernizar esse ensino. A tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo. - O Cálculo? - Sim, o Cálculo! Pois fazia parte do programa da 3.ª série do chamado curso científíco o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro da educação na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da Reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5.ª à 8.ª *série* mais o 2.° grau era o curso *ginasial de 5 anos,* seguido por dois anos de *pré-universitário,* já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia (ÁVILA, 1991, RPM nº18).

Ávila ainda destaca o fato de que em outros países, esse ensino ainda continua:

> Em outros países o Cálculo é ensinado na escola secundária. E às vezes até em quantidade substancial, como acontece nos Estados Unidos. Lá o sistema de ensino, embora varie de Estado para Estado, e mesmo nos diferentes distritos educacionais de um mesmo Estado, é organizado de maneira a ter maior flexibilidade nos anos finais, que formam o chamado *senior high-school,* correspondendo aproximadamente ao que aqui chamamos de 2.° grau. Assim, um aluno no *senior high* pode preferir estudar mais Matemática, mais Ciências ou mais Humanidades. Na primeira hipótese, ele terá à sua disposição cursos substanciais de Álgebra (incluindo Trigonometria e Geometria Analítica), Geometria, e Cálculo. E, geralmente, o aluno que faz Cálculo no *senior high,* quando entra na universidade, apresenta um certificado de proficiência que o dispensa do curso de Cálculo do primeiro semestre e, às vezes, do ano todo, dependendo do quanto de Cálculo ele estudou no *senior high.* Resultado: ele entra na universidade e já vai cursando disciplinas mais avançadas de Cálculo, Análise, Física, etc (ÁVILA, 1991, RPM nº18).

Introduzir mesmo que intuitivamente alguns conceitos iniciais a respeito do Cálculo ainda no Ensino Médio, como foi destacado, pode até facilitar ao aluno a escolha de sua profissão, destacando suas habilidades à medida que o aluno percebe certa preferência e facilidade com esses conceitos.

Ao longo do trabalho, apresentaremos propostas e soluções acerca de problemas de otimização a serem discutidos em sala, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, que podem ser utilizados como ferramenta metodológica motivacional para introduzir ideias do Cálculo na Educação básica, como também aos alunos que apresentem interesse em estudos avançados dos conteúdos do Ensino Médio. Também seria interessante debatê-los com estudantes de cursos preparatórios de carreiras militares, que costumam ser apresentados a noções básicas de cálculo para realização dessas provas. É possível também que se use como ferramenta na apresentação do curso aos estudantes de primeiro período do ensino superior.

Para atingir este público alvo, o trabalho apresenta-se com o objetivo de fornecer aos professores da educação básica e do ensino superior propostas motivadoras para discussão em sala, de maneira que o conhecimento e estabelecimento de definições e regras se dê a partir da necessidade de resolução dos problemas a serem otimizados.

Espera-se que o professor encontre aqui problemas adaptáveis e que se mostrem motivacionais do ponto de vista da prática pedagógica, a fim de dinamizar suas aulas e encorajar seus alunos na criação e resolução de outros problemas.

O trabalho apresenta-se dividido em 3 capítulos. No primeiro capítulo há uma breve discussão sobre o problema dos altos índices de reprovação e a real necessidade do Cálculo nos currículos, bem como sua possível apresentação no Ensino Médio. Veremos também porque os problemas de otimização podem mostrar-se motivadores quando aplicados em sala de aula em forma de estratégia de ensino.

No capítulo 2 discutiremos os problemas selecionados aplicáveis ao Ensino Médio, de acordo com as competências estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que trabalham os conceitos esperados e ainda assim podem abrir margem para discussões de conceitos iniciais do Cálculo no ambiente de sala de aula. Ao final dos problemas retomaremos seus conceitos de forma a verificar aprendizagens adquiridas e possíveis generalizações de conteúdos.

Alguns problemas selecionados foram extraídos de provas e avaliações nacionais as quais os alunos de Ensino Médio costumam realizar para o ingresso no vestibular bem como problemas pertinentes aos estudantes que pretendem ingressar em carreiras militares, que costumam ter um contato inicial com o Cálculo em cursos preparatórios. Discutiremos também ao longo das propostas as contribuições que cada problema, se utilizado como ferrramenta, poderia proporcionar.

No capítulo 3 estão registrados os problemas selecionados aplicáveis ao Ensino Superior. Alguns destes problemas foram extraídos de materiais didáticos mais utilizados nas disciplinas de Cálculo 1, outros adaptados. É comum que em alguns cursos de Cálculo resolva-se muito mais questões de regras operatórias básicas de limites e derivadas, deixando-se de lado problemas que possam gerar algum tipo de discussão sobre o assunto. É nesse sentido que os problemas foram selecionados, visando possibilitar o início de um conteúdo a partir de um deles, por meio da busca de soluções, ou o fechamento de um conteúdo, bem como a busca de contribuições motivadoras para o aprendizado.

Espera-se que o leitor encontre nesse trabalho ferramentas e problemas aplicáveis para dinamizar a prática de ensino em suas aulas. As formas de conhecimento e aprendizagem são múltiplas, de forma que explorar ferramentas diversas pode ser extremamente significativo para o aprendizado de alunos que tenham dificuldade com a metodologia mais tradicional. Nesse sentido, propõe-se que os problemas de otimização sejam apresentados a fim de que os alunos sejam participantes ativos na busca por soluções.

O termo otimização em matemática está relacionado com a busca de soluções para uma determinada equação, sujeita a certas condições iniciais, que descreva melhor aproveitamento de recursos ou das quantidades envolvidas no problema. Nesse sentido, busca-se maximizar ou minimizar estas quantidades de modo que é possível encontrar uma gama variada de aplicações, visto que a ideia de otimizar é presente até mesmo no dia a dia, quando pensamos em custo de compras, deslocamentos realizados, tempo gasto, entre outros exemplos.

Os conceitos matemáticos dos quais tratamos aqui são tão antigos, e algumas vezes ensina-se da mesma forma, inicia-se o assunto da mesma maneira, seguindo uma sequência didática que acaba não sendo alterada. Ter como proposta iniciar a aula pela proposição de um problema é estar disponível aos diversos caminhos que ele pode tomar. Mais ainda, ao optar por problemas de otimização levando-se em conta o aspecto motivacional que estes podem proporcionar, cria-se um ambiente propício à investigação e descobertas.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Todo professor, não importa a qual segmento de ensino ele se dedique, em algum momento de sua docência, poderá se sentir desafiado perante uma turma desmotivada. Torna-se um desafio imenso dentro de um ambiente assim produzir conhecimento e despertar a curiosidade dos alunos. Somos diferentes em diversos aspectos e dentro de nossas salas de aula encontramos cada vez mais alunos que simplesmente não vêem sentido no ato de aprender, ao menos, do jeito que tudo vem sendo ensinado a eles. Os hábitos e estímulos da sociedade têm mudado constantemente, bem como as inquietações que possam motivar nosso alunos. Como afirma D'Ambrósio (1998, p. 31), "[...] Interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas. Por isso é que proponho um enfoque ligado a situações mais imediatas".

E é diante da falta de motivação e entusiasmo por parte dos alunos que se desenvolvem os maiores problemas de aprendizagem. Por parte do professor pode haver esforço extra para que esse ciclo de reprovação não se repita, mas como bem destaca D'Ambrósio:

> Os maiores entraves a uma melhoria da educação têm sido o alto índice de reprovação e a enorme evasão. Ambos estão relacionados. Medidas dirigidas ao professor, tais como fornecer-lhe novas metodologias e melhorar, qualitativa e quantitativamente, seu domínio do conteúdo específico, são sem dúvida importantes, mas têm praticamente nenhum resultado apreciável. Igualmente, focalizar esses esforços no aluno por meio de uma maior frequência a aulas e exames ou criando novos testes e mecanismos de avaliação tão pouco tem dado resuldados. (D'AMBRÓSIO, 2009. P.61)

Da mesma forma, não adiantará seguir a busca incontrolada por metodologias diferenciadas enquanto o processo continuar completamente centrado no professor, no que ele faz para mudar isso, e em como é importante seu papel como detentor e distribuidor de conhecimento. O dinamismo e a participação em sala de aula será diferente quando entendermos o professor como mais uma figura em sala, não a única.

> Igualmente, o professor não é o sol que ilumina tudo. Sobre muitas coisas ele sabe bem menos que seus alunos. É importante abrir espaço para que o conhecimento dos alunos se manifeste. Como uma vez disse Guimarães Rosa: "Mestre é aquele que às vezes para para aprender". Daí a grande importância de se conhecer o aluno, exigindo do professor uma característica de pesquisador. (D'AMBRÓSIO, 2009. P.85)

Nesse sentido, é necessária uma busca pela motivação dos alunos. A famosa frase "Mas para que eu vou usar isso?" é rotineiramente ouvida por professores da educação básica, e ainda permeia pelo imaginário do estudante em qualquer nível de ensino. Somos tentados a responder esse questionamento com argumentos válidos, porém que não satisfazem o sentimento imediatista do aluno que traz essa questão. "Será útil no vestibular, na sua profissão, para passar de série ao final do ano...". Enfim, são argumentos válidos. Mas o real questionamento que vem por trás dessa pergunta é: Por que eu preciso aprender isso hoje? Como poderei usá-lo a partir de agora? É realmente necessário? Essas questões são ainda mais profundas do que as primeiras, e o professor, enquanto alguém que um dia foi aluno, deve saber que no pensamento do aluno podem existir essas "crises". O aluno, enquanto ser participante da aula, deve ser levado à necessidade de se sentir útil, sendo parte do processo da construção do conhecimento, diferente do modelo tradicional de ensino que objetivava que este fosse mero espectador.

A ansiedade por motivação e praticidade nos conteúdos vem das características das novas gerações. Somos cada vez mais imediatistas, a geração *fast-food*. Grande parte da sociedade está em busca de resultados rápidos e eficientes, aparelhos eletrônicos com maior velocidade, queremos tudo rapidamente, apenas com um clique. Entretanto, o processo de aprendizagem não se dá dessa maneira. Ele requer um desconforto, que nos tire da acomodação e nos leve à busca por respostas, conforme afirma D'Ambrósio:

> Todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não-dicotômicos entre si. [...] O processo como um todo, extremamente dinâmico e jamais finalizado, está obviamente sujeito a condições muito específicas de estímulo e de subordinação ao contexto natural, cultural e social. [...] (D'AMBRÓSIO, 1998, p. 18)

Para sair da zona de conforto e produzir o ambiente ideal pra a aprendizagem é que precisamos do professor. Segundo Rubem Alves (2002, p.2), " Saber por saber: isso é inumano… [...] A tarefa do professor é a mesma da cozinheira: antes de dar faca e queijo ao aluno, provocar a fome… Se ele tiver fome, mesmo que não haja queijo, ele acabará por fazer uma maquineta de roubá-los". Com certeza essa frase nos faz repensar os paradigmas do modo tradicional de ensino.

A sociedade inteira passou por mudanças drásticas em curto período de tempo, se compararmos os modos e hábitos diários com os de antigamente. Agora, olhe para uma sala de aula. Existem salas em que dificilmente percebe-se alguma alteração em relação às salas de décadas atrás. Cadeiras continuam praticamente distribuídas da mesma maneira, professor à frente da sala. Mas mudamos, trocamos o quadro negro pela lousa branca. Algumas vezes, trocamos a escrita pela apresentação em slides. Mas será isso suficiente? Além do aspecto físico, as metodologias mudaram para atender essa nova geração? Mudamos para despertar "fome" de aprender, como na citação acima? Em busca do que é interessante ensinar, Kline propõe:

> O que devemos estar modelando e ensinando, pois, além da própria matemática, são os relacionamentos da matemática com outros interesses humanos – em outras palavras, um amplo currículo de matemática cultural que realize íntima comunhão com as principais correntes de pensamento e nossa herança cultural. Alguns desses relacionamentos podem servir como motivação; outros seriam aplicações; e outros ainda forneceriam interessante material de leitura e discussão que variariam e vivificariam o conteúdo de nossos cursos de matemática [...]. (KLINE, 1976, p. 177)

É com o intuito de pensar em outras ferramentas e possibilidades que esse trabalho se apresenta. Há metodologias que podem sim ser aplicadas tanto na educação básica quanto no ensino superior, pois é necessário repensar as práticas nos dois segmentos. O aluno que não vivenciou a aprendizagem significativa na educação básica, dificilmente encontrará facilidades durante o ensino superior. Por isso é necessário repensar o método em toda a segmentação.

Cabe destacar que as dificuldades no ensino de Cálculo, que é a disciplina da qual este trabalho se refere, não ocorrem só em instituições isoladas, baseando-se em fatos recentes. Há pesquisas mais antigas que já apontavam esse insucesso.

> Diante da problemática aqui apresentada emergem algumas questões importantes: seria realmente o curso de Cálculo imprescindível para alguns destes cursos de ensino superior? E qual é a razão de tantas reprovações? Onde reside a dificuldadade? No processo de aprendizagem? No aluno, isto é na “falta de base” do aluno? Ou estaria esta dificuldade no próprio professor, ou na metodologia de ensino, ou ainda na estrutura curricular do ensino de matemática, que não dá o suporte que essa disciplina mereceria? (REZENDE, 2003. P.4-5)

Diante de todos esses questionamentos, questionamos também a ordem cronológica em que a aula tradicional geralmente se apresenta. “O tema da aula é este, portanto abram seus cadernos, pois teremos novo conteúdo hoje”, diz o professor. Paulatinamente o conteúdo é todo exposto no quadro e em seguida vem a explicação; e no final desta; tenha paciência, resolve-se alguns exercícios. Veremos ali, no final, a utilidade do conteúdo novo, e talvez, com sorte, a participação do aluno. Esse roteiro, por si só, não desperta “fome” de aprendizagem. Os exercícios geralmente resolvidos no final podem apresentar pouca autonomia ao aluno, sendo pouco motivacional a sua mera observação. Nesse sentido, podem mostrar-se também meras reproduções de regras práticas, como receitas de bolo. É comum que se passe mais tempo fornecendo supostas ferramentas aos alunos do que eles irão dispor para usá-las.

Nesse sentido, uma alternativa ao formato da aula tradicional são os ambientes investigativos. Skovsmose contrapõem as salas de aula tradicionais ambientadas no que ele chama de paradigma do exercício com os ambientes que favorecem os cenários de investigação:

> As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente das baseadas em exercícios. A distinção entre elas pode ser combinada com uma

> distinção diferente, a que tem a ver com as "referências" que visam levar os estudantes a produzirem significados para conceitos e actividades matemáticas. (SKOVSMOSE, 2000, p.7).

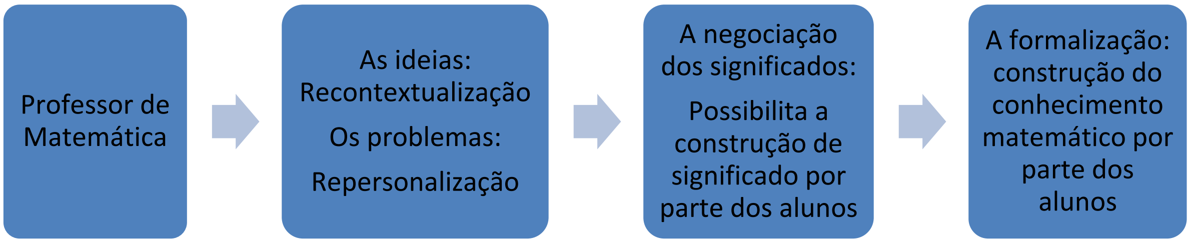
Num cenário investigativo, é mais comum que um problema central seja apresentado no começo da aula, e este pode gerar discussões sobre uma ou mais formas de resolução, um ou mais conteúdos necessários dentro destas resoluções. O conhecimento não fica limitado e os alunos têm a liberdade de pensar o problema de acordo com as ferramentas que já possuem e com as novas que eles possivelmente irão procurar em situações como essas. É claro, esse tipo de trabalho requer um esforço e comportamento diferente por parte do professor também, como bem destaca Skovsmose:

> Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para actuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma actividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. Isso significa, por exemplo, a aceitação de questões do tipo "o que acontece se...", que possam levar a investigação para um território desconhecido. (SKOVSMOSE, 2000, p.18)

Nesse sentido, os problemas motivadores de otimização apresentados aqui, que são o tema desta dissertação, serão resolvidos com o objetivo de proporcionar ao professor múltiplas possibilidades diante deles, abrindo espaço para questionamentos, novas discussões e descobertas por parte dos alunos. A exploração dos problemas poderá ser feita de maneira algébrica, geométrica, computacional, e espera-se que a utilização dos problemas aqui propostos como ferramentas de ensino demonstre ao leitor que uma única solução não esgota um problema, mas abre possibilidades para um conteúdo e uma aprendizagem significativa. A questão inicial em si pode levar a descobertas de métodos e conceitos que o professor nem pretendia trabalhar ainda na aula.

Dentro dos cenários de investigação, segundo Barufi, a posição ideal de um professor seria descrita de acordo com o seguinte esquema:

Figura 1: Papel do Professor



Fonte: BARUFI, 1999, p. 31

De que maneira essa proposta, para o professor de matemática, desconfigura suas práticas mais tradicionais? O esquema acima claramente demonstra um professor que opta pela mudança. É notório como alguns professores relutam em mudar seus métodos tradicionais de ensino.

A última etapa do esquema descreve um conhecimento construído por parte dos alunos, o que contradiz com a figura do professor detentor de todo conhecimento, que sabe tudo. Caso o professor demonstre que não sabe algo, os alunos desacreditam nele. O medo dos alunos questionarem o professor faz com que ele assuma uma postura de controle do conteúdo e dos exercícios, pois ali ele estará dentro da sua zona de conforto. No entanto, ao mostrar humildade no conhecimento, o professor faz com que os alunos entendam que eles também são capazes de aprender mesmo que no meio do caminho cometam erros, ainda assim se sentem motivados por estarem construindo algo.

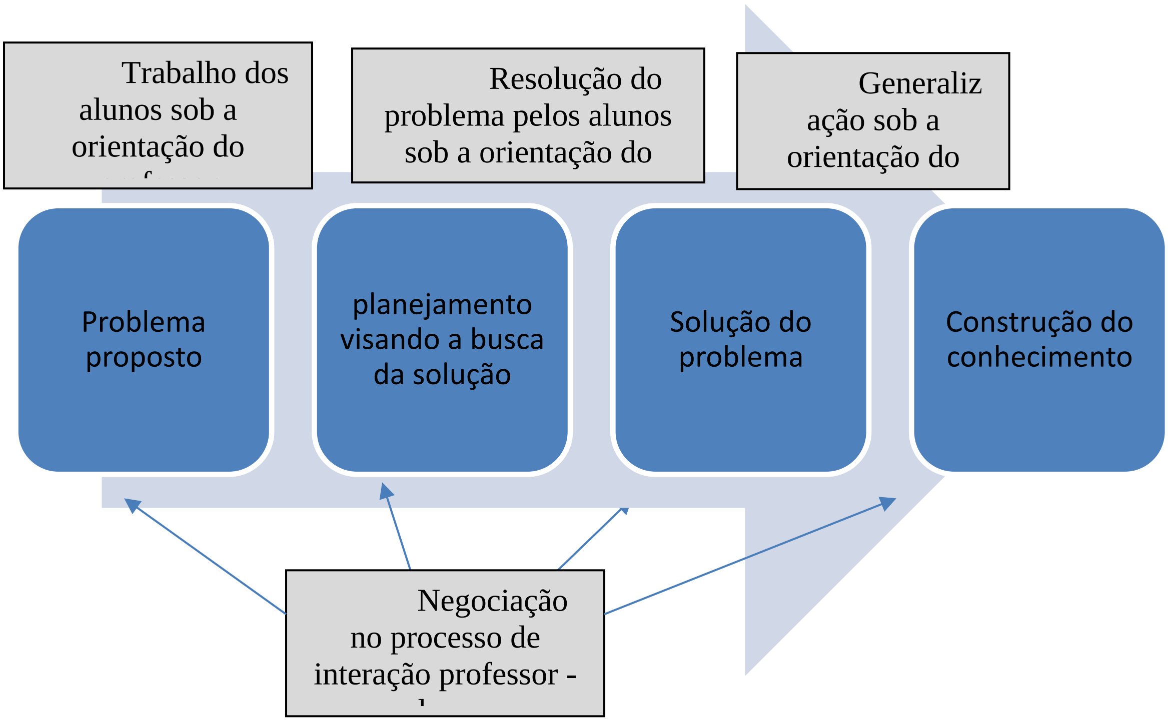
Ainda que na maioria das vezes o erro seja visto como algo negativo, este deveria ser visto como um aliado no processo de construção de um novo conhecimento, pois entender o processo por trás dos erros, e rever as considerações pode valer mais a pena do que simplesmente que chegar à resposta certa.

Em se tratando de resolução de problemas e estratégias de ensino, Polya descreve bem o papel do professor nesse momento:

> Se o aluno for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajuda demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais, nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho. Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, sem dar na vista. O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. (POLYA, 1978, p. 2)

Ainda segundo Barufi, a construção do conhecimento se dá no processo de resolução de problemas, seguindo o seguinte processo, que nos ajuda a entender a importância do trabalho investigativo do aluno:

Figura 2: Esquema de construção do conhecimento



Fonte: BARUFI, 1999, p. 47

Como pode ser visto, o ponto em comum no esquema é a questão do papel desempenhado pelo professor e pelos alunos durante todo o processo de ensino-aprendizagem. Sempre focado no professor orientador, a construção do conhecimento se dá por meio das mediações por parte deste e das contribuições dos alunos. Somente essa postura que foge a hierarquia tradicional e propõe uma colaboração mútua permite efetivamente o conhecimento construído de maneira investigativa.

1.1 **Aspectos Motivadores para o uso da Otimização no Ensino**

<u>Por que usar a otimização?</u>

Em Matemática usamos o termo otimização para descrever problemas cujo objetivo é encontrar valor máximo ou mínimo, de maneira a aperfeiçoar uma situação, ou torná-la *ótima*, por assim dizer. Dentre as diversas aplicações que existem, podemos citar como exemplo maximizar os recursos obtidos com a venda de um determinado produto ou minimizar seus custos e tempo de produção. Assim como essas situações cotidianas simples que foram descritas, fenômenos mais complexos ou mesmo conceitos teóricos podem ser descritos por funções, cujos valores máximos e mínimos podem ser estudados, de forma que é possível aplicar a otimização a problemas envolvendo áreas e volumes, ou fenômenos biológicos, por exemplo.

O uso da otimização como recurso de ensino se torna interessante principalmente por conta dos seguintes aspectos:

- Aspectos motivacionais – Ao apresentarmos uma situação que possa ser descrita matematicamente, surgem infinitas possibilidades de questionamentos a serem feitos a respeito dela. Entretanto, na grande maioria dos casos o problema é apresentado e logo em seguida é exposta a sua solução, o que atrapalha o processo de criatividade e criação de outros problemas por parte dos alunos. Os aspectos que geralmente são investigados nos problemas de otimização como lucro, economia de tempo, economia de gastos, maior produção, melhor aproveitamento fazem parte do dia a dia dos alunos, e torna-se motivador quando ele é convidado a encontrar a solução ótima que satisfaça essa busca.

- Interdisciplinariedade – devido à vasta quantidade e diversidade de problemas da vida cotidiana que se deparam com a necessidade de otimização, torna-se possível para o professor através deles caminhar e conversar com outras disciplinas, ou no caso do ensino superior, outros cursos. Em turmas mistas de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, o professor consegue incentivar que os alunos investiguem o uso do Cálculo na resolução dos mais diversos problemas, por conta dos múltiplos conhecimentos que cada aluno terá de alcançar por conta do seu curso. Já em turmas da educação básica, torna-se interessante para o aluno aplicações que permitam que ele estreite relações entre as disciplinas, facilitando assim a assimilação de conteúdos de ambas em um mesmo processo. Sobre isso, destaca Mundim:

> A otimização de processos é de extrema importância nas mais diversas áreas do conhecimento humano: seja na física, onde pode ser usada para determinar a configuração mais estável ou conveniente de uma molécula; na química, onde procuram-se as condições ideais para a realização de um experimento (quimiometria); na engenharia, onde se deseja relacionar elementos externos como o fluxo de produção, o gasto de energia; na economia, onde se procura o lucro máximo ou o custo mínimo; na geologia, para estudar-se a prospecção do solo, e, em muitas outras áreas como a estatística, psicologia e biologia. Consciente ou inconscientemente, e independente da classe social e cultural, uma parte considerável da nossa vida é usada na busca da melhor escolha e tomada de decisão, na minimização dos custos de um dado produto, no menor gasto de energia e a realização de atividades no menor tempo. (MUNDIM, 2008, p. 10)

- Necessidade na vida cotidiana – não basta só que o conceito seja aplicável a diversas disciplinas. O aluno necessita perceber que aquilo é produto de um conhecimento que será útil na vida profissional. A noção intuitiva de otimização mostram isso de forma clara, pois é objetivo da humanidade, muito antes de possuir o Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta, buscar economizar tempo, adquirir o maior lucro possível com seus negócios e maximizar seus benefícios em detrimento de seus prejuízos. Se conseguirmos que o aluno se coloque, por exemplo, no lugar de um empresário, ele compreenderá a necessidade de otimização que surge em todo o processo pelo qual esse empreendedor passa. Não só isso, será possível fazê-lo enxergar que há situações nas áreas mais diversas: da saúde, da agricultura, entre outras áreas em que esses conceitos também são aplicáveis.

Além das motivações práticas para uso desse tipo de metodologia, não podemos esquecer das motivações legais atribuídas pela legislação no que tange o ensino de matemática. Na educação básica, o documento norteador mais recente em vigência é a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017). Este documento informa que : “A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BNCC, 2017, p. 7). Dentre as competências definidas para a área de Matemática no Ensino Médio, destaca-se a de código EM13MAT503: “Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros [...].” (BNCC, 2017, p. 533). De acordo com a numeração do código, EM13 significa que a competência poderá ser desenvolvida em qualquer etapa do Ensino Médio, ficando a cargo do professor quando trabalhar tal conteúdo.

Já dentro dos cursos de nível superior, o parecer do Conselho Nacional de Educação CNE/CES nº 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, destaca-se o seguinte:

> Os conteúdos curriculares dos cursos de Matemática deverão ser estruturados de modo a contemplar, em sua composição, as seguintes orientações: a) partir das representações que os alunos possuem dos conceitos matemáticos e dos processos escolares para organizar o desenvolvimento das abordagens durante o curso b) construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno. Adicionalmente, as diretrizes curriculares devem servir também para otimização da estruturação modular dos cursos, com vistas a permitir um melhor aproveitamento dos conteúdos ministrados. (CNE Nº 1302/2001, p. 4)

De acordo com trecho, a construção dos conteúdos junto a esses alunos deve acontecer de maneira global e significativa. Dessa forma, a otimização pode auxiliar na aquisição de significado dos conteúdos aprendidos, visto que ela coloca em prática muitos destes conteúdos. Além disso, o documento orienta que sejam levados em consideração os processos escolares e as representações que os alunos já possuem, destacando a importância da existência de pontes entre o Ensino Médio e o curso Superior. Esses argumentos embasam a necessidade de novas perspectivas com relação ao modo como se ensina e as ferramentas a serem utilizadas para isso. Dentro do contexto proposto pela BNCC e pelas Diretrizes Curriculares, a otimização como ferramenta metodológica vem para consolidar conteúdos e fazer cumprir o que se espera dentro das habilidades destacadas.

1.2 **Proposta Metodológica**

Como já dito anteriormente, sempre foi necessário para a humanidade repensar seus processos e sua produção de maneira a obter maior lucro, em detrimento de menores gastos ou menor tempo, por exemplo. Porém, com o advento da Revolução Industrial e a grande efervescência das fábricas e produção em massa, foi se mostrando cada vez mais necessário repensar esses aspetos e obter ferramentas que possibilitassem cálculos precisos para isso. Por outro lado, um fator que possibilitou claramente o desenvolvimento dessa área foi, sem dúvidas, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por parte de Leibniz e Newton de maneira independente, enquanto estes trabalhavam na resolução de problemas, como destaca Roque:

> Se compararmos os cálculos de Newton e de Leibniz com o atual, veremos que eles trabalhavam essencialmente com variáveis definidas sobre curvas, ao passo que atualmente o cálculo se fundamenta na noção de função. O principal objeto de estudo no século XVII era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, muitas vezes de origem física, como o de encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva. Ou seja, problemas de natureza geométrica ou cinemática tratados com as ferramentas do cálculo. Tratava-se, portanto, de entrar em um novo domínio, o da relação entre quantidades, o que irá contribuir, mais tarde, para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades". (ROQUE, 2012, p. 194)

Atualmente, o que é necessário levar em consideração quando se propõe uma metodologia de ensino diferenciada do modo tradicional? Quais fatores externos podem interferir ou auxiliar no aprendizado? A inserção do aluno dentro da sociedade fará diferença em sua formação? Quanto a isso, de acordo com D'Ambrósio, temos:

> A educação em geral depende de variáveis que se aglomeram em direções muito amplas: a) o aluno que está no processo educativo, como um indivíduo procurando realizar suas aspirações e responder às suas inquietações; b) sua inserção na sociedade e as expectativas da sociedade com relação a ele; c) as estratégias dessa sociedade para realizar essas expectativas; d) os agentes e os instrumentos para executar essas estratégias; e) o conteúdo que é parte dessa estratégia." (D'AMBRÓSIO, 2005, p. 105)

Ainda, segundo o autor, reafirma-se a necessidade da provocação por meio de um problema que se torne parte motivadora da vida de um aluno, para assim produzir conhecimento. "Naturalmente, em todas as culturas e em todos os tempos, conhecimento, que é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas e situações distintas, está subordinado a um contexto natural, social e cultural" (D'AMBRÓSIO, 2005, p. 112).

O problema maior é trazer essa motivação para os conceitos que estamos tentando ensinar. Dentro dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, que possuem altos índices de reprovação, busca-se entender cada vez mais por que essa situação acontece. Muitas dessas reprovações decorrem da falta de embasamento por conta de dificuldades já no ensino básico. Porém, questiona-se também se não seria a abordagem e a metodologia tradicional as causas de algumas dessas reprovações. Sobre isso, Barbosa destaca:

> Tanto alunos como professores, plano de curso e disciplina de Cálculo, deixam evidente que o ensino de Cálculo Diferencial e Integral considera a metodologia um fator fundamental para a aprendizagem. Como se encontra no plano de curso, onde a metodologia, enquanto um dos fatores da aprendizagem, caracterizando-se como uma metodologia tradicional, nos depoimentos dos alunos, encontramos argumentos de que a disciplina se apresenta, tal como as avaliações, de modo pronto, acabado, contendo muita memorização e abstração. (BARBOSA, 2004, p. 80).

É preciso encontrar no problema estudado aspectos que motivem e inquietem o aluno pela busca do conhecimento, bem como procurar em sua realidade, na sociedade onde está inserido, aspectos que favoreçam esse processo e incentivem sua produção de conhecimento. Nos cursos de nível superior, torna-se difícil ao aluno observar esse aspecto motivador principalmente porque em determinados momentos a teoria exposta no quadro negro parece tão distante de sua futura prática profissional, ou mesmo ele sente-se distante, por não ser solicitado a oferecer qualquer contribuição a aula no momento.

Alguns alunos tem pouquíssima noção do trabalho que será realizado por ele no futuro, dentro de suas respectivas áreas escolhidas, e só compreenderão realmente o que ele fará já como profissional ao sair da Universidade. Esse contato logo nos primeiros períodos com a conceituação e prática em sua área acadêmica poderão se tornar motivação para todo o decorrer de seu curso.

Nos capítulos a seguir, apresentaremos alguns problemas motivadores como possibilidade de estudo, aplicáveis ao Ensino Médio e superior, de maneira a abordar a otimização e explorando conhecimentos e possibilidades através destes problemas.

Cabe destacar que esta proposta pedagógica não anula a necessidade de se trabalharem exercícios de fixação em quantidade adequada. O questionamento a ser feito é: qual a intenção, a motivação de escolha, e o momento ideal para um determinado exercício? Existem exercícios motivadores que possam ser apresentados antes da formalização dos conteúdos, de forma a despertar o interesse e dar sentido ao surgimento destes? Sobre isso, destaco como dito por Polya:

> [...] No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários exercícios rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemática não deixam nada disso a ninguém. (POLYA;1995, p.124)

A abordagem proposta por meio da seleção de problemas não anula a necessidade dos exercícios mais tradicionais. Pelo contrário, ela busca ressignifcar estes, de modo que o aluno esteja disposto a resolvê-los por conta da motivação inicial que encontrou em ser desafiado por meio de um problema. Ao ser desafiado ele buscará ferramentas, investigará soluções, cometerá erros e precisará reavaliar suas conclusões, possibilitando que dentro de nossas salas de aula, vivenciemos um ambiente de participação ativa no processo. Dentro de sala, com a tecnologia ao alcance de suas mãos, os alunos possuem cada vez mais distrações a sua disposição, de modo que se este não for convidado a colaborar ativamente do momento de aprendizagem teremos cada vez menos atenção e participação, e consequentemente, mais reprovações.

2 PROBLEMAS APLICÁVEIS AO ENSINO MÉDIO

A partir do que foi apresentado, entendemos que a utilização de problemas em sala de aula pode contribuir efetivamente no processo de aprendizagem de forma participativa e motivada. Em vista disso, apresentaremos agora problemas interessantes e suas respectivas soluções, que podem facilmente ser abordados em turmas de Ensino Médio aproveitando os conceitos que já se fazem presentes no currículo mínimo para a resolução de problemas de otimização. Ao fim das resoluções discutiremos sua aplicabilidade e os pontos a serem explorados a partir desta.

Antes de nos lançarmos à efetiva resolução de problemas é interessante destacar que sua aplicação em sala de aula, bem como as consequências disso também dependerão da resposta e reação dada pelos alunos. Cada turma é uma turma, porque cada aluno é um ser humano, o que torna a sala de aula quase que um organismo vivo. Por conta disso sabemos que "toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos [...] isto é, partir para a prática é como mergulhar no desconhecido" (D'AMBROSIO, 2009, p. 79).

Como foi dito na introdução, por volta dos anos 50 o cálculo ainda era conteúdo pertencente aos currículos da Educação Básica da época. Por que isso mudou? O que fez com que ele perdesse espaço? Por algum motivo seria esse conteúdo considerado de menor importância para a época? Não haveria hoje mais espaço nos currículos para ele? Como destaca Ávila:

> Mas - dirá alguém -, será mesmo possível incluir o ensino do Cálculo em nossos programas já tão alentados? Queremos mostrar que sim, que é uma questão de arrumar os programas adequadamente. Ademais, o Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas idéias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos. É perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função, como já tivemos oportunidade de fazer em palestras para professores de 2.° grau. [...] É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito *k* Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente, variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como veiocidade instantânea. (ÁVILA, 1991, RPM nº18)

Dessa forma, a ausência do cálculo nos cursos de Ensino Médio demonstra também que os alunos apresentam bastante dificuldade com conceitos físicos, como foi destacado. Veremos a seguir como alguns problemas são resolvidos no Ensino Médio e como o Cálculo ajudaria se fosse aplicado ainda que de maneira introdutória.

Antes da apresentação dos problemas propostos, faremos uma breve introdução aos conceitos necessários ao aluno de Ensino Médio para compreensão das soluções. Usaremos sua noção intuitiva, noção de intervalos e os conceitos básicos de gráficos acerca de domínio e imagem que ele adquire até esse momento em sua vida escolar, conforme consta nos currículos.

Em geral costuma-se apresentar a construção dos gráficos das funções de primeiro e segundo grau. Espera-se que seja de seu conhecimento que a função de primeiro grau não assume valores extremos, visto que a reta é infinita. Já no estudo da função de segundo grau, por conta da concavidade da parábola ele aprende que esta função pode possuir máximo ou mínimo, dependendo exatamente desta concavidade, como veremos mais detalhadamente num exemplo a frente.

É preciso ampliar a gama de exemplos de gráficos que os alunos tem em mente, de forma que ele compreenda que é possível traçar gráficos para funções de graus superiores, e mesmo funções não polinomiais. Muitos professores não apresentam funções de outros tipos, e seria interessante utilizar alguma ferramenta gráfica para mostrar a eles que os gráficos citados existem. A partir deles, e da noção de intervalo que os alunos já possuem, é possível extrair as seguintes conclusões.

As seguintes definições são necessárias para prosseguir a compreensão dos problemas. Para tais definições e teoremas usamos como referência o livro do STEWART (2006), e o livro do HOFFMANN (2015).

Seja f uma função real de uma variável real. Vejamos agora a definição algebrica de seus pontos de máximo e mínimo. Para compreender as definições, o aluno de Ensino Médio deverá estar familiarizado com as ideias de intervalo, compreensão de desigualdades e de domínio de uma função, conteúdos previstos para o último ano do Ensino Fundamental, de acordo com a BNCC.

Definição 1: Seja f uma função e $c \in Dmf$. Dizemos que f possui um ponto de máximo local no ponto c se existe um intervalo $I \subset Dmf$ com $c \in I$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Chamamos o valor $f(c)$ de valor máximo local de f.

Definição 2: Seja f uma função e $c \in Dmf$. Dizemos que f possui um ponto de mínimo local no ponto c se existe um intervalo $I \subset Dmf$ com $c \in I$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Chamamos o valor $f(c)$ de valor mínimo local de f.

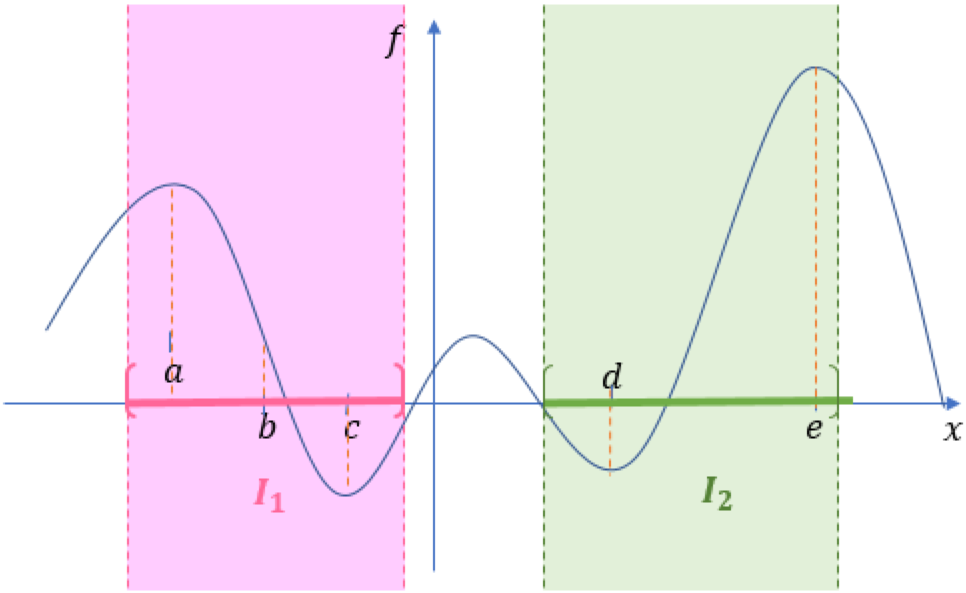
Definição 3: Seja f uma função e $c \in Dmf$. Dizemos que f possui um ponto de máximo global no ponto c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in Dmf$. Chamamos o valor $f(c)$ de valor máximo global de f.

Definição 4: Seja f uma função e $c \in Dmf$. Dizemos que f possui um ponto de mínimo global no ponto c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in Dmf$. Chamamos o valor $f(c)$ de valor mínimo global de f.

Vejamos também como exemplificar geometricamente estas definições. Seria interessante que o professor em sala de aula fizesse no quadro uma variedade de gráficos que possibilitassem a compreensão das definições acima de maneira visual, explorando assim a noção de gráfico que os alunos já devem possuir.

Seja $f: [a, e] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real.

Figura 3: Gráfico de uma função e seus valores extremos



Fonte: o autor, 2021.

Geometricamente, é possível observar que: $f(a)$ é um valor de máximo local de f em I_1. $f(d)$ é um valor de mínimo local de f em I_2. Observando todo o domínio da função, temos que $f(e)$ é o valor de máximo global de f, enquanto $f(c)$ é o valor de mínimo global de f.

Em algumas resoluções será apresentado o gráfico da função a fim de justificar a solução encontrada, visto que o objetivo nesse primeiro momento é chegar à solução ótima sem técnicas de cálculo, por meio de outras ideias que possam surgir a partir dos próprios alunos, ou que sejam relacionadas a assuntos já conhecidos por estes.

Vejamos o primeiro problema desta seção.

2.1 **Problema da construção de uma casa**

O problema a seguir encontra-se proposto por Perelman (1989). Estudaremos sua modelagem e resolução. Aliás, cabe destacar ao leitor que o livro de Perelman intitulado “Álgebra Recreativa” pode ser uma ferramenta interessante na seleção de problemas para iniciar um assunto em sala de aula. Os problemas não necessitam em sua maioria de grandes conhecimentos prévios e propõem uma aventura pelos conhecimentos algébricos através da discussão de soluções. Como dito pelo autor, “...não se trata de um manual de álgebra, mas de um livro de estudo livre”(PERELMAN, 1989, p.10).

Conhecimentos prévios desejados: operações básicas entre polinômios, cálculo de média aritmética e geométrica, resolução de inequações básicas, cálculo de áreas de figuras planas.

Indica-se que este problema seja trabalhado em turmas de 1º ou 2º ano do Ensino Médio, onde os conhecimentos prévios citados já costumam ser apresentados, respeitando-se a flexibilidade de organização de conteúdos de cada escola, porém dentro do que é estabelecido na BNCC.

Esses conteúdos são pertinentes ao segmento de ensino em que nos propomos a trabalhar, visto que constam na BNCC (2017) em forma de competências esperadas:

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. [...] (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). (BNCC, 2017)

Vejamos o enunciado do problema:

> No lugar onde se encontra uma casa em ruínas, que apenas tem em pé uma parede com 12 metros de comprimento, pretende-se construir um edifício retangular aproveitando a parede existente. A área da nova casa deve ter 112m². As condições econômicas para a obra são: 1. A reparação de um metro de parede velha é equivalente a 25% do que custa levantar uma nova. 2. A demolição de um metro da parede velha e a construção de uma nova com tijolos da velha atinge 50% do que custaria construí-la com material novo. Em tais condições, qual será o modo mais vantajoso de aproveitar a parede velha? (PERELMAN, 1989, p. 226)

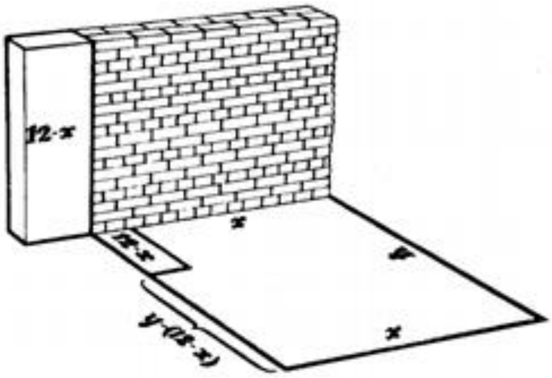
Questionamentos que podem surgir nesse momento inicial:

- Trata-se de um problema algébrico ou geométrico? Esse é um questionamento comum por parte dos alunos, por conta de como o ensino da álgebra e da geometria é muitas vezes segmentado, de forma que grande parte das escolas particulares atualmente divide as duas áreas da disciplina em Matemática 1 e Matemática 2. Isso, em certos momentos, acaba por criar uma distância entre as duas áreas. Nesse momento, pode-se pedir que os alunos tentem descrever o problema das duas formas, algébrica e geometricamente. Deve-se observar que, em geral, a visualização geométrica levará à algebrização do problema.

- Qual a variável a ser considerada no problema? Se a parede antiga tem inicialmente 12 metros de comprimento pode-se assumir que manteremos uma parte "x" de pé, enquanto, por conta disso, uma parte medindo "$12 - x$" deverá ser derrubada. Só a partir daí é possível começar a introduzir o custo descrito da situação.

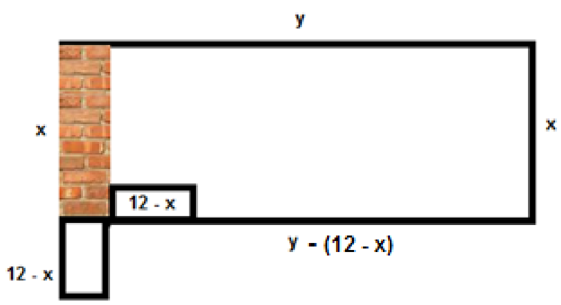
Inicialmente torna-se mais interessante apresentar o problema em sala sem fornecer a imagem pronta, e buscar junto aos alunos como seria a imagem da planta dessa construção, considerando-se que haverá uma parte a se aproveitar da parede, e o outra ser demolida. A Figura 4 é apresentada como descrição da situação na fonte original. Já a figura 5 seria uma planta superior, que deixa claro que a casa será construída de forma retangular, de dimensões x e y.

Figura 4: Esquema de construção da casa



Fonte: PERELMAN, 1989, p. 227.

Figura 5: Vista superior da construção



Fonte: o autor, 2020.

Após a construção da figura modelo por parte dos alunos, cabe a discussão do que seria essa maneira vantajosa, de que o autor se refere. Seria vantagem inicialmente derrubar toda a parede antiga e iniciar a construção do zero? Deve-se perceber que esse questionamento não pode ser respondido sem cálculos. É preciso que os alunos entendam que a noção de opção mais vantajosa é exatamente aquela que possui menor custo para a construção, afinal o problema dispõe de condições sobre os valores, sendo assim buscamos seu custo mínimo, tratando-se portanto de um problema de otimização.

Em ambas as imagens, deve-se notar que a parede de 12m terá uma parte mantida x, e uma parte demolida que deverá medir 12 - x. Nesse caso, tem-se que a parte a ser mantida deve ser $0 \leq x \leq 12$. A partir daí, será necessário realizar as seguintes etapas de obra, considerando "c" o custo de construção de um metro linear de muro:

- Reparar x metros, o que custaria 25% de c de acordo com as condições, gerando um gasto de $\frac{25}{100}cx$;
- Construir utilizando os tijolos demolidos $12 - x$ metros de muro, o que custaria 50% de c, de acordo com as condições, custando $\frac{50}{100}c(12 - x)$;
- Construir usando material novo as paredes de medida $x, y\ e\ y - (12 - x)$, o que resultaria na construção de $2y + 2x - 12$ metros de muro com preço c por metro, custando ao todo $c.(2y + 2x - 12)$.

Ou seja, o custo total da obra, simplificando as expressões nos daria:

$$C(x, y) = \frac{cx}{4} + c.\frac{12-x}{2} + c.(2y + 2x - 12) \qquad (1)$$

$$C(x, y) = \frac{c.[(x+24-2x)+8y+8x-48)]}{4} \qquad (2)$$

$$C(x, y) = c.\frac{[(7x+8y)-24]}{4} \qquad (3)$$

Sabendo que a área da casa deve medir $xy = 112$, podemos escrever $y = \frac{112}{x}$, já que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ de onde se tem que:

$$C(x) = c.\frac{[\left(7x+8\cdot\frac{112}{x}\right)-24]}{4} \qquad (4)$$

Nesse momento da aula, espera-se que os alunos tenham conseguido esboçar geometricamente a situação descrita pelo problema e obter a função custo (4), de forma que se iniciem as discussões em busca da solução que represente o custo mínimo. A partir das soluções dos alunos pode-se iniciar a solução. Caso nenhuma solução se apresente, é possível que o professor inicie as sugestões sugerindo o uso de conhecimentos relacionados ao que os alunos já aprenderam.

O professor pode então iniciar o ambiente de resolução por sugestões, a fim de alcançar a resolução pela desigualdade entre as médias, que apresentaremos a seguir. Para isso, seria interessante que ele desse início a esse momento através do seguinte questionamento: "Alguma vez vocês já repararam o que acontece ao calcularmos a média aritmética e geométrica de alguns números? Verifiquem o que acontece com os números 4 e 9. Verifiquem também o que acontece ao calcular as duas médias para os números 1, 3 e 9. Exibindo mais alguns exemplos numéricos, espera-se que algum aluno consiga observar a questão da desigualdade, abrindo espaço para esta ferramenta de resolução.

Apresentaremos a seguir o princípio da desigualdade das médias, de forma que se consiga concluir a resolução do problema. A desigualdade é uma interpretação generalizada que pode ser muito utilizada na resolução de problemas e tem fácil demonstração.

Seja n um número natural.

Denominamos Média Aritmética dos números reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o número real assim definido:

$$MA = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{5}$$

Denominamos Média Geométrica dos números reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o número real assim definido:

$$MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{6}$$

A desigualdade das médias afirma que a média aritmética de n elementos é maior ou igual a média geométrica desses valores, ou seja, $MA \geq MG$, logo:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{7}$$

Como utilizaremos no problema, segue a demonstração para o caso para n = 2. Será interessante demonstrar esse caso em sala de aula de acordo com o interesse apontado pelos alunos. A demonstração para o caso geral encontra-se no Apêndice A, para que o leitor possa consultar.

Queremos mostrar que, se x_1 e x_2 são números reais não negativos, então:

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1.x_2} \tag{8}$$

Como x_1e x_2 são números reais, têm-se que $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Expandindo-se o primeiro membro da desigualdade temos:

$$x_1^2 - 2x_1.x_2 + {x_2}^2 \geq 0 \tag{9}$$

Adicionando o termo $4x_1x_2$ a ambos os membros sem alterar a desigualdade temos:

$$x_1^2 - 2x_1.x_2 + 4x_1.x_2 + {x_2}^2 \geq 4x_1.x_2 \tag{10}$$

O que resulta em:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1.x_2 \tag{11}$$

Como x_1 e x_2 são não negativos, ambos os membros são não negativos, logo é possível extrair a raíz quadrada, e em seguida dividir por 2, que nos dá a desigualdade:

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 . x_2} \tag{12}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 . x_2} \tag{13}$$

Observe que a igualdade só se satisfaz quando têm-se $x_1 = x_2$. Para chegar a essa conclusão basta vermos que:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \sqrt{x_1 . x_2} \rightarrow \ x_1 + x_2 = 2 \cdot \sqrt{x_1 . x_2} \tag{14}$$

Como os termos da igualdade são não negativos, é válido que:

$$(x_1 + x_2)^2 = (2 \cdot \sqrt{x_1 . x_2}\ )^2 \tag{15}$$

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = 4x_1 \cdot x_2 \tag{16}$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = 0 \tag{17}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0 \tag{18}$$

Isto só é verdade se $x_1 = x_2$.

Nesse instante, o professor deverá apresentar o seguinte questionamento à turma: Como isso se aplica ao problema em questão? Espera-se que os alunos observem que a soma é a parte mais importante presente na função custo, desejando assim aplicar a desigualdade para investigar este termo.

Sabemos que a área da casa xy = 112. A expressão do custo que obtivemos anteriormente assumirá seu valor mínimo quando $7x + 8 \cdot \frac{112}{x}$ for mínimo, visto que o restante é constante. Observe que para os termos desta soma, temos seu produto $7x \cdot 8 \cdot \frac{112}{x}$ sendo constante igual a 56·112. Espera-se que os alunos tenham conseguido montar a expressão que envolve os custos da obra, chegando a expressão acima.

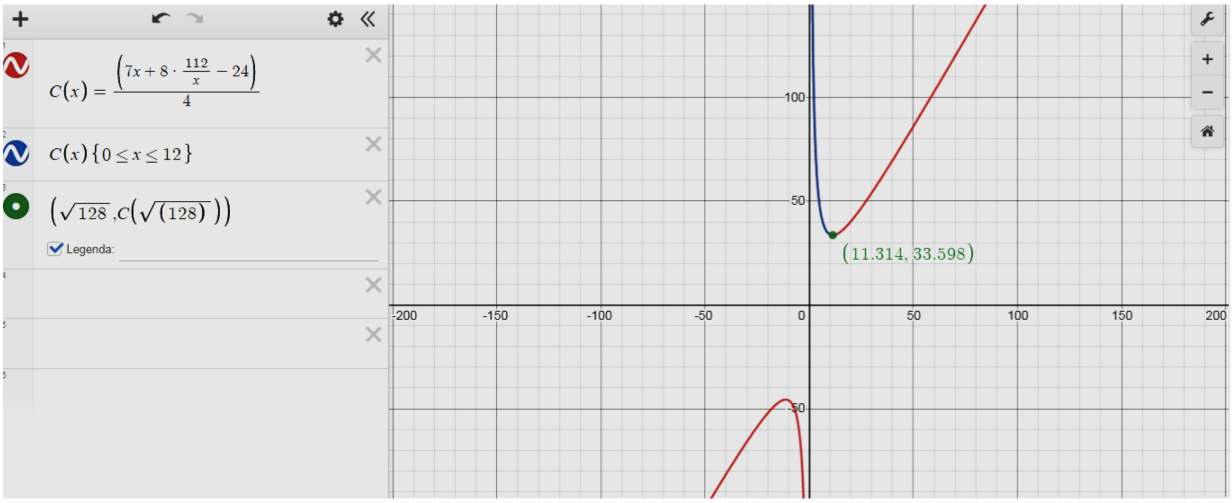
Aplicando-se a desigualdade ao problema, com $x_1 = 7x \geq 0$ e $x_2 = 8 \cdot \frac{112}{x} \ \geq 0$ temos nesse caso $7x + 8 \cdot \frac{112}{x} \geq 2\sqrt{7x \cdot 8 \cdot \frac{112}{x}}$. Para obter valor mínimo então nos interessa a igualdade, como visto na demosntracação da desigualdade, logo, $7x = 8 \cdot \frac{112}{x}$. Temos então que:

$$\frac{7}{8}x^2 = 112 \ \rightarrow x = \ \sqrt{128} \cong 11{,}3. \tag{19}$$

Desse resultado segue a solução que buscamos: aproximadamente 11,3 metros da parede devem ser mantidos, enquanto aproximadamente 0,7 metro deve ser demolido. Vemos que esse valor é razoável, visto que o domínio da função seria $x \in [0,12]$. Substituindo estes valores encontrados, temos que o custo mínimo da construção seria tal que $C \cong 33{,}5 \cdot c$, onde "c" é o custo de construção de um metro linear de muro.

A seguir apresentamos o gráfico da função que descreve o custo em função de x, dentro do domínio estabelecido, levaremos em consideração apenas $x \in [0,12]$. A construção desse gráfico no momento de aula seria interessante afim de ilustrar os resultados obtidos, de forma que o aluno consiga perceber visualmente que a solução mínima que obtivemos faz sentido, visto que não é viável apresentar aos alunos nesse momento demonstrações mais rigorosas. Fixando, por exemplo, $c = 1$, temos a situação descrita na Figura 6.

Figura 6: Gráfico da função custo



Fonte: o autor, 2021.

Caso julgue interessante, o professor pode aprofundar os conhecimentos acerca de funções trabalhando a construção de gráficos por meio de ferramentas computacionais com a turma, explorando essa e outras funções, bem como suas propriedades. De outra forma, o professor pode também apresentar a solução gráfica no início da aula e questionar aos alunos como obter essa solução ótima de maneira algébrica. Assim, a solução gráfica não seria utilizada como verificação, mas como ponto de partida.

Vale destacar que as expressões obtidas por si só admitiriam valores negativos, mas os alunos precisam estar atentos ao fato de que problemas geométricos não admitem medidas negativas e por conta disso não há porque buscar soluções desse tipo.

Cabe destacar que os alunos do Ensino Médio tem grande familiaridade com o estudo das médias dentro de cálculos estatísticos, sendo a desigualdade uma ferramenta importante e facilmente apresentável, pois a demonstração não é de difícil compreensão. Infelizmente os problemas geralmente envolvem apenas o cálculo direto dessas médias e pouca interpretação de seus resultados. Os alunos não são estimulados a interpretar estes resultados, como orienta a BNCC:

> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. (BNCC, 2017).

Através dela, muitos problemas interessantes podem ser resolvidos dentro da otimização. Demonstrar e utilizar a desigualdade em sala de aula seria um aprofundamento, de forma que os alunos consigam utilizar essas médias de maneira indireta, sendo capazes de transformá-las em ferramentas algébricas importantes. Também é interessante como o problema se adequa à seguinte habilidade referida na BNCC:

> (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BNCC, 2017).

Questionamentos interessantes que podem surgir ao fim deste problema:

- Como o problema poderia ser resolvido sem o auxílio da desigualdade entre as médias? Caso algum aluno isolasse uma das variáveis dentre da expressão e obtivesse o custo total em função de uma única variável, como apresentar à ele a solução ótima?
- Seria interessante observar com os alunos que a expressão obtida nesse caso não seria de 1º ou 2º grau, como estão rotineiramente acostumados a trabalhar. Alguns professores nem sequer comentam que a maioria dos problemas não se restringe à esses dois tipos de expressões. Vejamos como ficaria:

$$C(x) = c.\frac{(7x+8\cdot\frac{112}{x}-24)}{4} \qquad (20)$$

  - É possível, caso haja curiosidade por parte dos alunos, apresentar as regras iniciais de derivadas de polinômios e a noção de ponto crítico para que o problema seja resolvido dessa maneira. Como $C'(x) = 0$ se, e só se, $x = \sqrt{128}$, a solução ótima seria encontrada comparando-se esse valor com os valores da função nos extremos do intervalo, para assim concluir que seria o valor procurado.

Fazendo uma reavaliação acerca do problema abordado, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ unir álgebra e geometria, diferente da maneira com que os alunos estão acostumados;
- ✓ abordar uma interpretação com relação ao estudo das médias, diferente da maneira imediata e calculista como é abordada;
- ✓ apresentar a demonstração da desigualdade entre as médias, mantendo o formalismo e acrescentando conteúdo de modo que os alunos futuramente questionem as propriedades apresentadas, não aceitando tudo de imediato;
- ✓ abrir espaço para outras formas de resolução que recairiam no uso do Cálculo, caso o ambiente se tornasse propício para isso.
- ✓ Explorar a solução gráfica obtida através de ferramentas computacionais, para verificação e ilustração.

Vejamos na próxima seção mais um problema em que a desigualdade entre as médias se aplica.

2.2 **A Geometria Analítica e a Desigualdade das médias**

Nenhuma das mais de 40 habilidades listadas na BNCC (2017) refere-se à Geometria Analítica. É de se espantar que não mereça destaque, visto que dentro da Matemática tamanha é a sua importância. Em contrapartida não é de se espantar que em decorrência disso o assunto venha sendo cada vez menos cobrado em vestibulares, e ocupando cada vez menos páginas dos livros didáticos de Ensino Médio. Alguns materiais ainda lhe dão algum crédito no final do livro do 3º ano, deixando as últimas páginas, acabando por ficar ao critério do professor apresentá-la ou não, visto a crença de que ela “não cai no vestibular”. Ledo engano quem pensa que ela por si só é assim, descartável. Presente na grade curricular de vários cursos de exata, alguns inclusive atrelados ao curso de Cálculo, não é de se estranhar que este seja um dos fatores do insucesso na disciplina. Entretanto, a importância do estudo desta é tão grande, como destaca Pacheco:

> Para o estudo da Geometria Analítica se faz necessário, a priori, noções de álgebra cursada no ensino básico, e Geometria Plana como também de uma boa abstração na visualização dos conceitos básicos. Estes conceitos são gerenciadores da compreensão e das resoluções de situações variadas. Um dos objetivos da Geometria Analítica é relacionar a álgebra, forma abstrata, com a geométrica, forma concreta. Por isso, se faz

> necessária a perfeita compreensão dos conceitos agregados, sempre que possível, da forma geométrica dos mesmos. (PACHECO, 2009, P.11)

Como destaca Bezerra, o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio, quando se dá, é da seguinte forma:

> A experiência da pesquisadora, como professora no Ensino Médio, possibilitou a compreensão de que, quase sempre o ensino-aprendizagem da Geometria Analítica é um ensino centrado na transmissão de fórmulas, descontextualizado da realidade e da própria Matemática, em total descompasso com os avanços tecnológicos. (BEZERRA, 2006, p.18)

E qual a relação existente entre o estudo dessa geometria e o Cálculo? Haja vista que ela se mostra como o principal elo entre a geometria e a álgebra, não é possível ignorá-la como se tem feito.

> Na realidade, podemos dizer que o apogeu da Geometria Analítica foi conseguido por Newton e Leibnitz, através do Cálculo Diferencial e Integral. Esse cálculo não existiria sem a Geometria Analítica. Para alguns historiadores a Geometria Analítica representou a algebrização da Geometria dos gregos. (BEZERRA, 2006, p.26)

Caberia somente ao professor do ensino superior apresentar a geometria Analítica, de forma que o aluno da educação básica poderia completar sua formação desconhecendo-a por completo? É de se estranhar que ele apresentasse boa compreensão de gráficos de funções sem que lhe seja apresentado adequadamente as noções mais básicas de plano cartesiano. Quando lhe são apresentadas algumas cônicas, estas dificilmente são usadas na resolução de problemas, tendo seu maior foco na memorização dos parâmetros envolvendo cada uma e na reprodução de seu desenho.

Nesse sentido, a escolha do problema proposto a seguir se faz na intenção de destacar a importância do estudo desta Geometria para compreensão de conceitos fundamentais do Cálculo, bem como sua utilização para resolução de um problema ao invés da mera reprodução de fórmulas.

Enunciado do problema: “Determinar o ponto P situado sobre a hipérbole de equação xy = 1 que está mais próximo da origem”. (ROCHA, 2013, p. 32-33)

Conhecimentos prévios desejados: Estudo do plano cartesiano, cálculo de distância entre dois pontos, obtenção da equação de uma hipérbole.

Indica-se que este problema seja trabalhado em turmas de 2º ou 3º ano do Ensino Médio, visto que a Geometria Analítica costuma estar entre os últimos assuntos trabalhados, respeitando-se a flexibilidade de organização de conteúdos de cada escola.

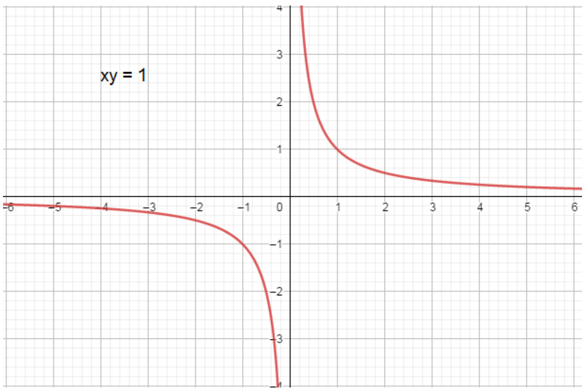
Questionamentos que podem surgir nesse momento inicial:

- Em que momento seria propício a apresentação desse problema? O problema poderia ser proposto em momento oportuno para revisão dos conteúdos apresentados, ou para motivar inicialmente, de forma que o professor pode usar como argumento a afirmação de que “ao fim desta aula seremos capazes de resolver a seguinte situação...” pois ela aponta para um sentido em prol da construção destes conhecimentos.

- Quais as possibilidades a serem exploradas através do problema? Da maneira como se é ensinada a Geometria Analítica no Ensino médio atualmente, raramente se “misturam” as fórmulas e conceitos como vemos aqui. O estudo da distância entre dois pontos, por exemplo, que é em geral ensinada nas primeiras aulas, não é retomada ao se estudar as fórmulas seguintes. Deve-se portanto a partir de problemas como este extinguir da mente dos alunos a ideia de que a aprendizagem de um novo conteúdo inutiliza o anterior.

Os alunos devem ser estimulados a criar uma representação gráfica para o problema, fazendo-se uso de recursos tecnológicos ou não, como o professor preferir no momento. A partir da figura a seguir inicia-se a busca por soluções.

Figura 7: Gráfico da hipérbole xy = 1

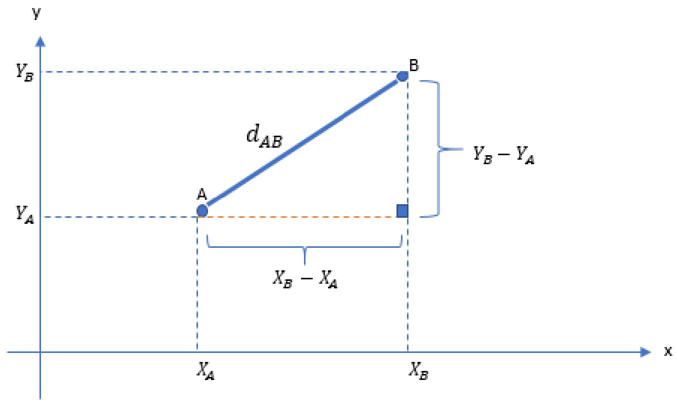


Fonte: O autor, 2020.

Observe que se o ponto P pertence a hipérbole, então ele é da forma $(p, \frac{1}{p})$, com $p \neq 0$.

No Figura 8 temos a representação da distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano.

Figura 8: Distância entre dois pontos



Fonte: o autor, 2021.

Temos, do Teorema de Pitágoras, que a distância em questão é dada por:

$$d = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \tag{21}$$

No caso do problema, buscamos minimizar a distância até a origem, logo:

$$d = \sqrt{(p - 0)^2 + (\frac{1}{p} - 0)^2} \tag{22}$$

Logo, a distância desse ponto até a origem $d(p) = d$ deve satisfazer: $d^2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$, $d \geq 0$.

Cabe destacar aqui a maneira como se apresenta geralmente a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos. É comum que o aluno associe como uma fórmula nova a ser memorizada, fornecida de imediato pelo professor e que tem seu uso restrito dos exercícios que deixem explícita a palavra “distância”.

Vale a pena observar que o problema poderia facilmente ser proposto antes de enunciar a fórmula, visto que ela nada mais é que uma aplicação do teorema de Pitágoras, o qual é visto pelos alunos desde o final do ensino Fundamental. Dessa maneira não haveria uma descontinuidade tão grande entre o que já se ensinou e os chamados conteúdos novos.

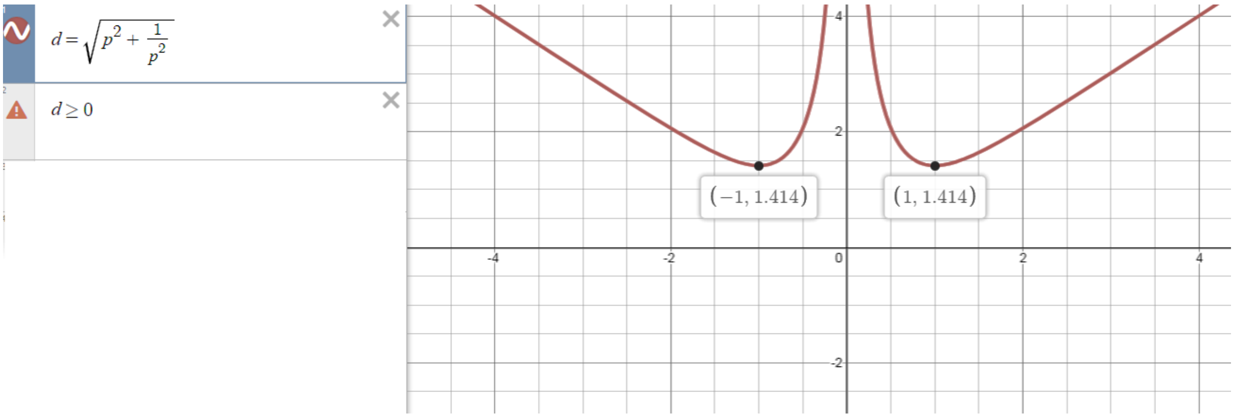
Assim como no problema anterior, espera-se que a solução do problema seja encaminhada por meio das sugestões dos alunos. Caso essas não ocorram, ou caso o professor julgue conveniente discutir a solução apresentada a seguir, espera-se que ele inicie a apresentação da desigualdade da forma como sugerimos anteriormente, fazendo experimentações com valores, a fim de que os alunos consigam visualizar a desigualdade para em seguida aplicá-la.

Usaremos então a desigualdade das médias vista anteriormente para resolver o problema. Desejar que um ponto esteja mais próximo é querer que sua distância seja mínima. Espera-se que os alunos percebam isso e assimilem que o problema se trata de um caso de otimização.

Da desigualdade das médias apresentada, tomando-se $x_1 = p^2 > 0$ e $x_2 = \frac{1}{p^2} > 0$, segue que $\frac{p^2+\frac{1}{p^2}}{2} \geq \sqrt{p^2.\frac{1}{p^2}}$, cujo valor mínimo só ocorre quando temos a igualdade $p^2 = \frac{1}{p^2}$ como provamos anteriormente, obtendo assim os ponto p = 1 ou p = -1. Portanto, os pontos mais próximos da origem são (1,1) e (-1,-1). Como o numerador do primeiro membro é exatamente d^2, conclui-se que $d^2 \geq 2$. Assim, o valor mínimo assumido para d^2 é 2, logo, para a distância o valor mínimo seria $d = \sqrt{2}$.

A seguir utilizaremos a Figura 9 como interpretação gráfica, para confirmação dos resultados junto aos alunos.

Figura 9: Gráfico da função $d(p)$



Fonte: o autor, 2021.

Questionamentos interessantes que podem surgir ao fim deste problema:

- Que experiências diferentes com relação à aula de Geometria Analítica o problema pode proporcionar? Por meio do problema proposto, é possível ao aluno de Ensino Médio pensar a Geometria Analítica além da memorização. Em muitas aulas, seus únicos exercícios são demonstrar que memorizou as características dos lugares geométricos, ou desenhá-los. A proposta aqui é que tanto as características gráficas quanto algébricas possam ser exploradas pelos alunos.
- Esboçando-se essa solução no gráfico inicial da hipérbole, ela faz sentido? É um questionamento muito importante visto que ao algebrizar um problema, por vezes o aluno esquece completamente o contexto geométrico e apresenta ao final da resolução soluções que nunca fariam sentido em um mundo real, como distâncias negativas, tempo negativo, ou valores astronômicos que não fariam sentido

algum. Sempre é bom retomar ao fim da resolução com este questionamento, ao menos para saber se a solução encontrada parece ser razoável.

- O problema poderia ser resolvido de outra forma? Assim como na proposta anterior, escrevendo-se a distância em função do ponto p é possível explicitar a relação entre eles de forma que, havendo curiosidade por parte dos alunos, as primeiras regras de derivação se aplicariam e o problema seria resolvido facilmente.

Fazendo uma reavaliação acerca do problema abordado, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ Verificar e utilizar mais de um conceito da Geometria Analítica, ao invés de estudá-la de forma compartimental como acontece geralmente;
- ✓ Destacar a importância desta Geometria para a fundamentação dos conceitos de Cálculo adquiridos futuramente;
- ✓ Obter soluções ótimas e interpretá-las de forma visual, percebendo graficamente que elas fazem sentido com relação ao problema.
- ✓ Resolver um problema de Geometria Analítica sem a utilização de fórmulas prontas e memorizadas, de maneira que o aluno não fez uso de processos de memorização e aplicação.

2.3 **Otimização através da Programação Linear**

Antes de enunciarmos o problema discutido nessa seção, é interessante refletir junto aos alunos o que seria a Programação Linear, e por qual motivo existe sua aplicabilidade no Ensino Médio. Se faz presente na BNCC (2017) a habilidade “(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais”. Desta forma, os problemas que são resolvidos através da programação Linear se enquadram nesse objetivo a ser trabalhado, pois segundo Lyra:

> Ao lidar com problemas de Programação Linear, busca-se maximizar ou minimizar uma função, chamada de Objetivo, conjuntamente com várias restrições impostas ao problema, que são caracterizadas por um sistema de inequações lineares. Essas

> restrições incluem características do problema quanto à limitação de recursos, como por exemplo: mão de obra, quantidade de matéria prima, limitações financeiras, etc. A partir da modelagem de problemas de Programação Linear e posteriormente a utilização de técnicas matemáticas para a obtenção de soluções, busca-se a melhor delas, a qual é chamada de solução ótima. Vale ressaltar que o problema é classificado como sendo de Programação Linear por envolver apenas expressões (equações e/ou inequações) lineares com relação às variáveis presentes. (LYRA, 2014, p.25)

Além disso, as vantagens da utilização desse tipo de problema vão além do fato de resolver problemas com mais de uma equação/restrição, mas geralmente contam também com a interdisciplinaridade e contextualização até mesmo dentro de diversas áreas da Matemática, como vemos a seguir:

> De forma geral, a programação linear é uma ferramenta que busca resolver problemas do cotidiano e abordar conteúdos presentes no currículo do Ensino Médio. Nesse contexto, é evidente que os problemas a serem resolvidos sejam mais simples por possuírem uma quantidade menor de variáveis. Problemas que envolvem a Programação Linear abordam conceitos do Ensino Médio, como Geometria Analítica, Matrizes, Determinantes, Funções e Sistemas Lineares. Esta gama de conteúdos diferentes conduz o educando a estabelecer conexões entre diferentes áreas e, consequentemente, a pensar de forma interdisciplinar. (LYRA, 2014, p.16)

Enunciado do problema:

> Suponha que se tenha numa pequena marcenaria a produção de dois artigos A e B. A manufatura de cada unidade do produto A requer 3 homens/hora de mão de obra e 1 kw/h de energia e do produto B, 2 homens/hora de mão de obra e 3 kw/h de energia. A marcenaria dispõe de matéria prima para produzir 600 unidades do produto A e 800 unidades do produto B, um total de 2450 homens/hora de mão de obra e 2100 kw/h de energia. Na comercialização dos produtos A e B o lucro por unidade é de R$30,00 do produto A e de R$45,00 do produto B. Chamaremos o número de unidades produzidas do produto A de x e do produto B de y. Qual deve ser os valores de x e de y para que a marcenaria tenha o maior lucro possível? (BARRETO, 2017, p. 51)

Para obter maior lucro possível, observe que é necessário que a marcenaria produza e venda tais artigos A e B.

Conhecimentos prévios desejados: Construção de gráficos de retas, resolução de inequações de 1º grau e conhecimentos de linguagem algébrica para tradução do problema.

Indica-se que este problema seja trabalhado em turmas de 1º ou 2º ano do Ensino Médio, onde os conhecimentos prévios citados já costumam ser apresentados, respeitando-se a flexibilidade de organização de conteúdos de cada escola.

Questionamentos que podem surgir nesse momento inicial:

- Porque o problema apresentado não pode ser resolvido através de uma única equação? Um problema clássico no estudo de funções de primeiro grau que trabalharmos com os alunos são exercícios que tratam de uma corrida de táxi com valor de partida fixo e outro dependendo da quantidade de quilômetros rodados. Neste problema, independente de sua solução envolver uma equação ou inequação, em geral só há uma variável e sua resolução é quase que imediada. Como não são expostos problemas muito diferentes deste, mudando-se apenas o contexto mencionado (há versões que citam empresas telefônicas, serviços de internet, etc.) o aluno acostuma-se a um mundo ideal onde tudo se resolve apenas através de uma equação, o que não condiz com a realidade da maioria dos problemas do dia a dia;

- Além disso, muitos alunos podem apresentar o seguinte questionamento: o que seriam restrições dadas ao problema? Por vezes, pela falta de habilidade com a linguagem algébrica o aluno não reconhece que $x > 0$, por exemplo, é uma restrição imposta aos problemas de determinação de medidas, idades, distâncias, etc, pois pouco contato tem com essa escrita.

Todo problema de Programação Linear se inicia com a tomada de decisão das varíaveis em questão. Segundo Lyra (2014, p.31), “o professor deve enfatizar para os alunos que o primeiro passo a ser seguido, ou seja, o reconhecimento do problema, consiste inicialmente em determinar as variáveis de decisão, pois a partir delas é que se determinam as equações que regem o modelo”.

Nesse sentido, representando por x e y respectivamente as quantidades compradas de produto A e produto B. Em programação Linear chamamos função objetivo aquela que pretendemos maximizar ou minimizar. Observe que no caso do problema a função que descreve o lucro obtido pela marcenaria é dada por $f(x, y) = 30x + 45y$, a qual pretendemos maximizar.

Antes de iniciarmos a discussão do problema, algumas definições se fazem necessárias. Tais definições encontram-se no em LYRA (2014).

Definição 5: Denominamos como **região viável** do problema a região poligonal limitada pelas restrições iniciais.

Definição 6: Denominamos **Vértice da região viável** os pontos que caracterizam como vértice da região poligonal viável.

Definição 7: Denominamos como **Solução viável** do problema qualquer solução que se encontre dentro da região viável, satisfazendo todas as restrições iniciais.

Definição 8: Denominamos **solução ótima** aquela, dentre todas as soluções viáveis, que apresenta maior/menor valor dependendo da função que se queira minimizar/maximizar.

Teorema 1: Se todas as equações ou inequações do problema forem lineares, a solução ótima, se existir, só poderá ocorrer em um dos vértices da região viável, ou seja, sempre estão na fronteira da região viável.

A conclusão deste teorema é um fato interessante a se observar junto aos alunos, visto que como a região viável do problema é definida por várias retas, temos que cada uma delas não possui máximo ou mínimo, visto que uma função linear não tem pontos críticos, de modo que este valor só pode ser obtido analisando-se as interseções, que formam justamente os vértices da região. Isso torna possível observar que não há a necessidade de se investigar pontos de máximo e mínimo na parte interna dessa região, por isso estuda-se apenas o que acontece na fronteira.

Para estabelecer as inequações que se traduzem por inequações no problema é possível que os alunos encontrem bastante dificuldade. Em geral, ao tentarem traduzir situações-problema por meio de sistemas de equações os alunos tem dificuldade de visualizar que cada equação traduz uma frase do problema, se refere à um tipo de informação. Nesse momento, o professor pode orientar aos alunos que pensem detalhadamente e registrem de maneira separada as informações que são acerca da energia, e sobre a mão de obra. Seria interessante propor aos alunos que um grupo consiga escrever algo sobre um recurso, e outro grupo, sobre o recurso diferente, chegando assim às duas primeiras restrições, já que as duas últimas são mais imediatas.

Registrando as quantidades descritas no enunciado do problema, temos:

Mão de obra envolvida: 2450 homens/hora para toda a produção, distribuindo-se entre a produção dos dois artigos, obtendo assim a primeira restrição: $3x + 2y \leq 2450$

Energia a ser utilizada: 2100 kw/h para toda a produção, distribuindo-se entre a produção dos dois artigos, obtendo assim a segunda restrição: $x + 3y \leq 2100$

Matéria prima: Suficiente para no máximo 600 unidades do produto A e 800 unidades do produto B, obtendo assim as duas últimas restrições: $x \leq 600$ e $y \leq 800$.

Como parte da energia e parte da mão de obra serão utilizadas na produção de cada tipo de artigo, podemos escrever em função de x e y as seguintes restrições para o problema:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 2450 \\ x + 3y \leq 2100 \\ x \leq 600 \\ y \leq 800 \end{cases} \tag{23}$$

Reescrevendo-se todas as informações que traduzem o problema de Programação Linear temos:

Maximizar o lucro que é descrito por:

$$f(x,y) = 30x + 45y \tag{24}$$

Sujeito à:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 2450 \\ x + 3y \leq 2100 \\ x \leq 600 \\ y \leq 800 \end{cases} \tag{25}$$

Observe também que x e y são as quantidades de unidades produzidas pela marcenaria, temos então que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

A apresentação do método a seguir se dará aproveitando-se de conhecimentos prévios dos alunos. Nos anos finais do ensino fundamental costuma-se ensinar a resolução de sistemas de equação de primeiro grau com duas incógnitas de maneira geométrica, por meio da interseção das duas retas que o descrevem. Além disso, os alunos do Ensino Médio em geral devem saber traçar gráfico de retas ao final do 1º ano, ou seja, conseguem esboçar a região ótima deste problema, como consta na BNCC:

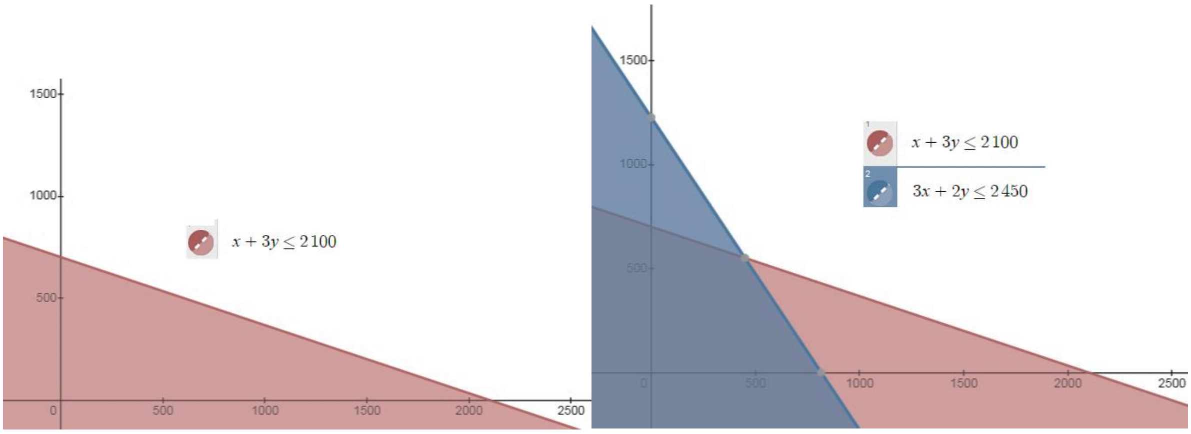
> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BNCC, 2017).

O passo seguinte na resolução é constatar junto aos alunos qual seria a chamada região viável do problema, traçando as retas que ficam determinadas quando tomamos as inequações e trabalhamos como equação, como vê-se a seguir:

> No intuito de resolver um problema de Programação Linear usando apenas conteúdos vistos no Ensino Médio, deve-se primeiramente encontrar os vértices da região delimitada pelas restrições do modelo dado. Estes vértices são equivalentes a cada um dos sistemas de equações lineares, em que algumas variáveis assumem o valor zero e as demais variáveis têm seus valores determinados pela resolução do sistema resultante. A partir de todos os vértices encontrados, verifica-se qual deles otimiza a função objetivo do modelo. (LYRA, 2014, p.42)

Realizaremos o processo descrito acima para encontrar a solução que representa o lucro máximo. Para isso, precisamos esboçar a região viável do problema. Inicialmente, é interessante solicitar aos alunos que desenhem as seguintes retas $3x + 2y = 2450$ e $x + 3y = 2100$, e percebendo que, como a desigualdade pede $x + 3y \leq 2100$ a parte do gráfico que nos interessa é justamente abaixo desta reta. Através desse raciocínio é possível obter a Figura 10 a seguir. Note que o ponto (450,550) de interseção entre as retas, , pode ser obtido igualando-se as equações destas.

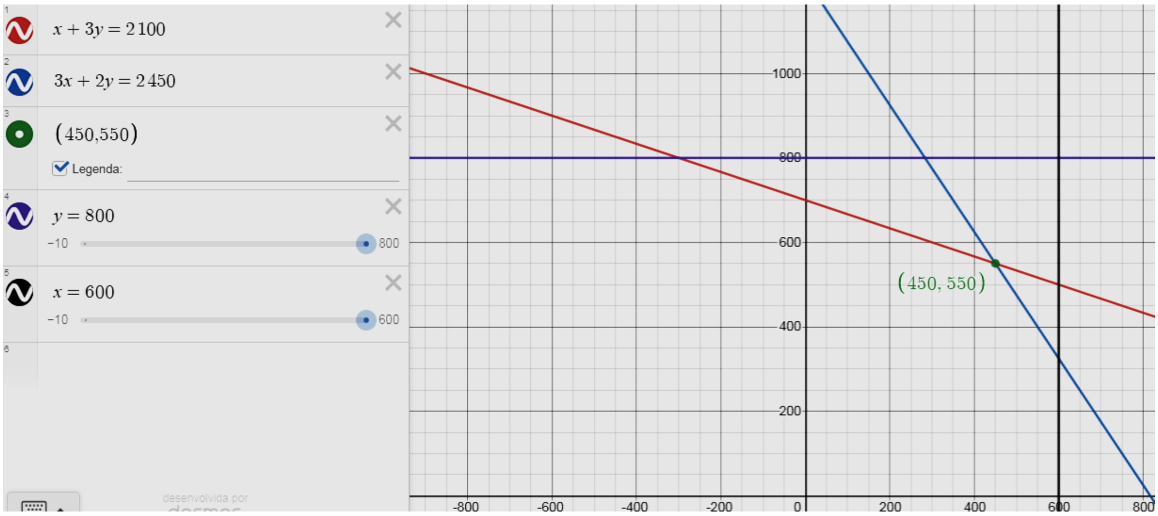
Figura 10: Retas e condições iniciais



Fonte: o autor, 2021.

Observe que ao serem traçadas também a reta vertical x = 600 e a reta horizontal y = 800, em conjunto com as demais retas que os alunos já conseguiram traçar, obtemos a seguinte situação, descrita na Figura 11:

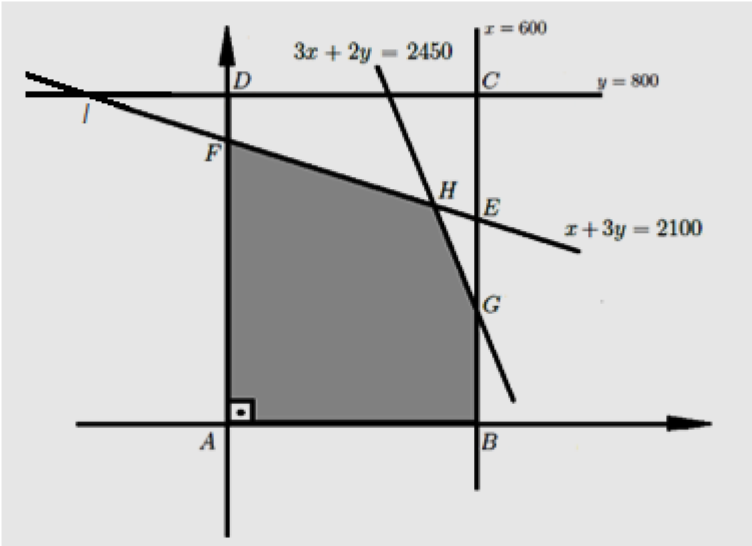
Figura 11: Condições iniciais, reta vertical e horizontal



Fonte: o autor, 2021.

Nesse momento, é necessário observar junto aos alunos que as restrições não são equações, mas sim inequações, o que faz com que a região aproveitável do gráfico seja limitada. Sendo assim, obtém-se o seguinte esboço para a região viável do problema, que apresentaremos na Figura 12.

Figura 12: Esboço da Região Viável do Problema Linear



Fonte: Barreto, 2017, p. 52

Atribuindo-se por exemplo valores para $x\ e\ y$ na equação $3x + 2y = 2450$, deve-se perceber que os pontos (x,y) que resultem em valores menores que 2450 pertencem ao interior da região viável, e assim procedemos com as demais equações. Os vértices ficam estabelecidos nas interseções entre as retas. É interessante esperar que os alunos apresentem também isso como sugestão para encontrar as coordenadas de alguns dos pontos. Pode-se também dividir a turma em grupos de maneira que cada grupo determine um dos pontos. Após essa análise, os seguintes pontos devem ser obtidos:

A: Origem do sistema, interseção entre as retas x = 0 e y = 0

B: interseção entre as retas x = 600 e y = 0

C: interseção entre as retas x = 600 e y = 800 (não pertence à região viável)

D: interseção entre as retas x = 0 e y = 80 (não pertence à região viável)

E: interseção entre as retas x + 3y = 2100 e x = 600 (não pertence à região viável)

F: interseção entre as retas x + 3y = 2100 e x = 0

G: interseção entre as retas 3x + 2y = 2450 e x = 600

H: interseção entre as retas x + 3y = 2100 e 3x + 2y = 2450

I: interseção entre as retas x + 3y = 2100 e y = 800 (não pertence à região viável)

Aplicaremos o Teorema 1 visto inicialmente de Programação Linear. Nesse caso, não é ideal propor situações onde a região viável for vazia, ou ilimitada, pois não seria motivador propor dentro do Ensino Médio problemas complexos a esse nível, visto que não possuem solução ótima. O ideal é que o problema proposto tenha sido elaborado com o objetivo de fornecer condições válidas as quais o aluno possa experimentar cada uma das soluções e chegar sozinho à solução ótima. Aplicando o Teorema 1, vemos que é necessário estudar o que acontece em cada um dos vértices da região viável obtida. É possível obter a solução ótima testando cada um dos pontos, substituindo as coordenadas de cada um deles na função objetivo do problema, que é a função f. Nesse momento, é interessante que os alunos realizem os testes e obtenham os valores esperados a seguir:

Tabela 1: Estudo dos vértices da Região Viável

Ponto	Valor obtido na função objetivo
A (0,0)	$f(0,0) = 0$
B (600,0)	$f(600,0) = 18000$
G (600,325)	$f(600,325) = 32625$
H (450,550)	$f(450,550) = 38.250$
F (0,700)	$f(0,700) = 31.500$

Fonte: o autor, 2021.

Com base nessa análise é possível concluir que o ponto H satisfaz as condições estabelecidas nas restrições iniciais do problema, sendo assim um ponto pertencente à região viável, e por conta dos resultados obtidos ao substituir na função objetivo, traduz o valor máximo da função.

Portanto, para ter lucro máximo a marcenaria terá que produzir e vender 450 unidades de A e 550 unidades de B.

Fazendo uma reavaliação acerca do problema abordado, verificamos que por meio dele foi possível:

Discutir as resoluções gráficas de questões algébricas, apresentar os conceitos iniciais de programação linear e solução ótima, e explorar problemas semelhantes de otimização.

Apresentar um problema de otimização que não necessariamente aponte para o Cálculo em si, mas explore formas de raciocínio diferente do que os alunos estão acostumados, fugindo da mera resolução de equações;

Buscar soluções ótimas de forma que a exploração e experimentação dos diversos valores se mostra motivacional, pois os alunos se sentem participantes de um processo investigativo de forma ativa.

Nas seções seguintes deste capítulo foram escolhidos dois problemas encontrados em provas de vestibular, que envolvem também a busca e uso de valores máximos e mínimos. A escolha destes problemas justifica-se para que seja mostrado como geralmente esses assuntos são ensinados em sala de aula, e cobrados nas provas que esses alunos realizam ao final do Ensino

Médio. Busca-se também através dessa escolha esclarecer que os problemas propostos em vestibulares, muitas vezes menosprezados, mesmo que sejam relativamente simples abrem espaço para discussões interessantes em sala de aula, e não devem ser ignorados, visto que é parte fundamental da vida dos alunos passar por essas avaliações. É papel fundamental do professor entender isso e oferecer meios para que os alunos passem por esse processo sem maiores dificuldades, como destaca Rodrigues:

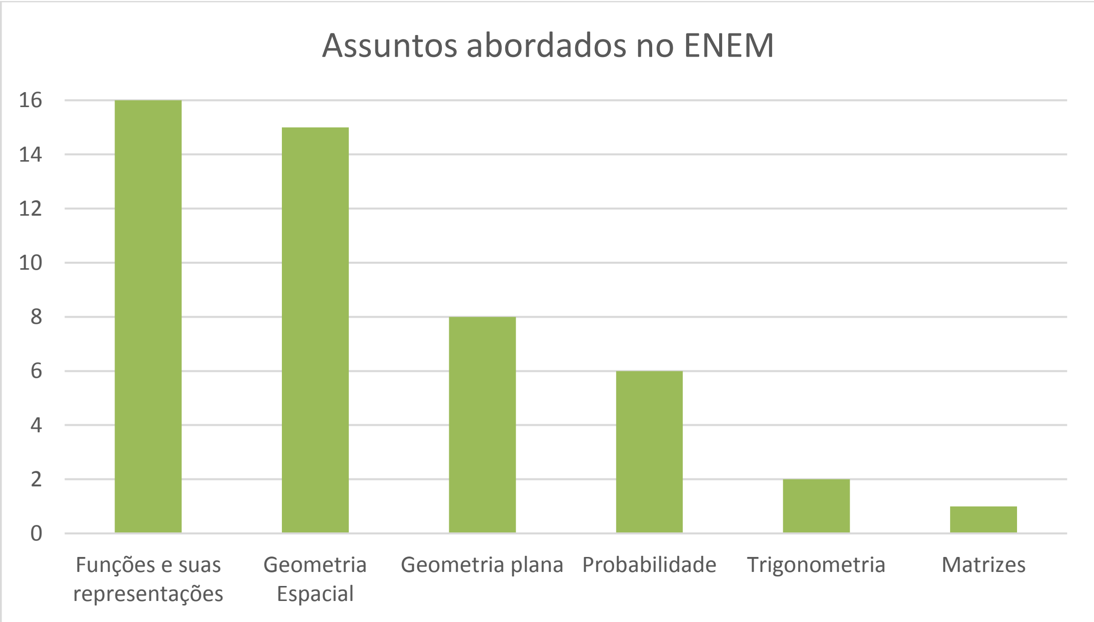
> [...] entendemos ser também nossa responsabilidade, como formadores de professores de matemática, discutir, refletir e orientar os futuros professores, bem como os professores em serviço sobre os aportes metodológicos do Novo ENEM para a área da matemática. Assim, entender os seus aspectos conceituais, seus objetivos, o formato das questões de Matemática que pertencem ao exame, contribuirá para um repensar das práticas pedagógicas dos professores de Matemática atuantes no Ensino Médio. (RODRIGUES, 2013, p.2)

2.4 **Otimização de Funções Quadráticas no Enem**

Quando analizamos o uso da otimização, do ponto de vista do Ensino Médio, é necessário dar um destaque maior ao trabalho com relação às funções quadráticas, visto que é o único momento onde a BNCC (2017) incentiva a busca por máximos e mínimos como visto em “(M13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais”. Desta forma, daremos um foco maior ao estudo desse tipo de função e ao problema proposto desse tipo.

Antes de enunciarmos o problema da seção cabe destacar que, assim como o problema a ser proposto, os assuntos mais cobrados no Enem não costumam ser tão aprofundados ou requisitar uma grande quantidade de informações por parte dos alunos. A maioria exige mais interpreção dos dados, problemas de proporcionalidade, porcentagem, e interpretação de dados estatísticos. Ainda assim, mesmo não cobrando tão profundamente, a realidade acerca das notas é espantosa, principalmente porque a discrepância tende a ser maior ainda se analisarmos separadamante as notas dos alunos oriundos de escolas particulares e públicas. Segue a seguir um panorama dos assuntos mais cobrados, do ponto de vista de Rodrigues:

Figura 13: Panorama sobre os tipos de assuntos abordados no Enem (2009-2012)



Fonte: RODRIGUES, 2013, p. 12

Verifica-se que ao assunto de funções é dada maior ênfase, de modo que um aluno que ignora o assunto certamente encontrará dificuldades tanto na realização dessa prova, bem como sabemos, num futuro curso de Cálculo. Considerando que não é apresentada grande variedade de funções no Ensino Médio, estas questões envolvem em sua maioria funções de 1º e 2º grau, sendo cobradas também com menor frequência funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas.

Vista então a importância desse tipo de função dentro do Ensino Médio, vamos ao problema proposto.

O problema abaixo encontra-se na prova amarela do ENEM 2015, referente à questão 136.

Figura 14: Classificação de Temperaturas

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A muito baixa.
B baixa.
C média.
D alta.
E muito alta.

Fonte: ENEM, 2015.

O objetivo da questão é determinar a classificação da temperatura no interior da estufa, no momento em que o estudante obtém o maior número possível de bactérias. As alternativas, distribuídas de A a E constam as 5 classificações presentes na tabela dada.

Conhecimentos prévios desejados: resolução de equações de 2º grau, manipulação de polinômios, conhecimentos básicos acerca do gráfico de uma função de 2ºgrau.

Indica-se que este problema seja trabalhado em turmas de 1º ou 2º ano do Ensino Médio, onde os conhecimentos prévios citados já costumam ser apresentados, respeitando-se a flexibilidade de organização de conteúdos de cada escola.

Questionamentos que podem surgir nesse momento inicial:

- Porque buscar máximos e mínimos em funções quadráticas? Como essa busca pode ser feita de forma diferente da aplicação e memorização de fórmulas?
- Quando se fala em função quadrática alguns alunos logo associam o vértice da parábola com a construção de gráficos e observação destes, é possível encontrar o ponto máximo ou mínimo de uma função quadrática sem realizar essa construção?

Observe que a função que expressa a temperatura da estufa ao longo das horas do dia é uma função quadrática. Os alunos de Ensino Médio devem estar familiarizados com a escrita da função f(x) = ax² + bx + c. Obter as coordenadas para as quais esse tipo de função possui valor máximo ou mínimo pode ser facilmente obtida por processos algébricos ao completar quadrados. Entretanto, mesmo sendo simples a manipulação algébrica, muitos professores pulam a etapa desta demonstração, apenas exibindo a fórmula final. Deixaremos aqui registrada essa demonstração para que o professor possa exibir, caso julgue necessário e haja curiosidade por parte dos alunos, de forma que se obtenham as coordenadas dos pontos de máximo / mínimo de uma parábola através da interpretação de sua escrita na forma canônica.

De fato, sejam $a, b\ e\ c$ números reais com $a \neq 0\ e\ f(x) = ax^2 + bx + c$, vamos verificar que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ é o valor máximo de f se $a < 0$, e mínimo, se $a > 0$.

Colocando a em evidência temos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \qquad (26)$$

Observe no interior do parênteses que os dois primeiros termos se assemelham ao desenvolvimento do produto $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Como este desenvolvimento resulta em $x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$, temos que, completando quadrado é necessário adicionar ao final da expressão o fator $-\frac{b^2}{4a^2}$ de forma a não alterar seu valor numérico, isto é:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \qquad (27)$$

E assim:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4bc - b^2}{4a^2}\right] \qquad (28)$$

Definindo o discriminante da função como sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, têm-se que:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (29)$$

Observe que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, assim, adicionando o mesmo termo a ambos os membros da desigualdade temos: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Agora, se $a > 0$ temos aqui, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Como $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 + \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$, teremos que:

$f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) \forall\, x \in \mathbb{R}$, com isso, $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ será um ponto de mínimo global de f.

Se $a < 0$, então, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e como $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 + \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$, teremos que:

$f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right) \forall\, x \in \mathbb{R}$, com isso, $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ será um ponto de máximo global de f.

Chegando nessa etapa do cálculo com os alunos pode-se explorar porque é dito logo inicialmente na apresentação dos conceitos que o parâmetro a define a concavidade da parábola, bem como o fato do problema apresentar máximo ou mínimo. Em geral isso costuma ser estipulado como forma de regra e memorizado, mas na etapa em que nos encontramos já se torna fácil concluir este fato.

O par ordenado $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ é chamado vértice da parábola, fazendo assim parte do gráfico dessa função. Em geral os professores costumam orientar que os estudantes memorizem essas coordenadas e apliquem em problemas que envolvam máximos e mínimos de funções quadráticas. Ao invés dessa abordagem, vamos tentar utilizar novamente o método de completar os quadrados e reescrever a função dada de outra maneira. Não que se condene a memorização de maneira geral, visto que algumas fórmulas realmente facilitam a resolução de exercícios de maneira mais rápida, mas não podemos ignorar o fato de que o que foi apenas memorizado, e não compreendido, pode de um momento para outro desaparecer da memória dos estudantes em um momento de avaliação, por exemplo.

Voltando ao problema inicial, para $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, temos $a = -1 < 0$, ou seja, a função quadrática T possui um valor de máximo global.

Reescrevendo a função temos:

$$T(h) = -(h^2 - 22h + 85) \quad (30)$$

$$T(h) = -[(h - 11)^2 - 121 + 85] \quad (31)$$

$$T(h) = -[(h - 11)^2 - 36] \quad (32)$$

$$T(h) = -(h - 11)^2 + 36 \quad (33)$$

Investiguemos qual o maior valor assumido por essa função. Visto que $(h - 11)^2 \geq 0$, por consequência $-(h - 11)^2 \leq 0$. Como o termo seguinte da adição é constante, temos que seu valor máximo é assumido quando $-(h - 11)^2 = 0$ logo, quando $h = 11$, onde a temperatura será de T = 36°. O valor de h nos dá justamente a temperatura procurada, que pela classificação dada enquadra-se como alta apenas, chegando-se a uma das alternativas apresentadas na questão.

Como pode-se perceber, a maneira como estes conteúdos constumam ser ensinados são muito mais focados na memorização de fórmulas do que na resolução de problemas. Nos próprios cursos pré vestibulares os alunos aprendem a associar cada tipo de enunciado a uma fórmula correspondente, e o processo de resolução de questões vai se tornando assim mecânico para o aluno. A forma que sugerimos para resolução não aumenta o nível de dificuldade, e poderia facilmente ser aplicada ainda que os alunos não tivessem visto anteriormente a demonstração da forma canônica dada.

Questionamentos interessantes que podem surgir ao fim deste problema:

Como este problema se relaciona com outros, que possam ser resolvidos futuramente? Observar junto aos alunos que as funções quadráticas são frequentemente usadas para descrever altura, temperatura, produção, tempo, e que em várias dessas situações se aplica o conceito de otimização;

O problema poderia ser resolvido de outra forma? Além da utilização da forma canônica como fizemos, dos problemas listados até o momento este seria o mais ideal para introduzir os conceitos iniciais do Cálculo em sua resolução, visto que a função quadrática é bem simples de derivar. Seria uma boa oportunidade para o professor iniciar o assunto, de acordo com a criatividade dos alunos da turma.

Fazendo uma reavaliação acerca do problema abordado, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ Verificar a existência de máximos e mínimos da função quadrática sem a utilização de formas imediatas, diferente da maneira como os alunos estão habituados;
- ✓ Apresentar a demonstração da forma canônica da função quadrática, de maneira que os alunos tenham algum contato extra com manipulações algébricas e demonstrações;
- ✓ Utilizar novamente a otimização de maneira motivacional, de forma que o aluno ao resolver o problema não fez mera aplicação de fórmulas e regras;
- ✓ Sugerir a utilização de alguns conceitos básicos de cálculo na resolução do presente problema.

2.5 **Máximos e mínimos aplicados às funções Trigonométricas**

A escolha do problema desta seção se justifica na habilidade a seguir da BNCC:

> (EM13MAT306)Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (BNCC, 2017)

Cabe destacar nesse momento a grande variedade de aplicações que podem ser apresentadas aos alunos acerca dessas funções, inclusive através da otimização, como bem destaca Silva:

> [...] Funções trigonométricas que podem ser modelos matemáticos de vários fenômenos que se repetem como as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, a pressão sanguínea do coração e o nível de água em uma bacia marítima devido à sua periodicidade. Também são periódicos fenômenos como a tensão e a corrente elétrica domésticas, o campo eletromagnético gerado para aquecer comida no microondas, bem como o comportamento ondulatório de notas musicais, fluxo de caixa em negócios sazonais e funcionamento de máquinas rotativas. Ainda pode-se citar como fenômenos periódicos as fases da lua, as estações do ano, o clima, o movimento dos planetas entre outros. (SILVA, 2013, P.37)

Infelizmente, em algumas das salas de aula não é sob esta perspectiva que o ensino da trigonometria é feito. Gasta-se muito tempo apresentando os conceitos fundamentais do círculo trigonométrico, a forma como as razões acontecem em cada um dos quadrantes, cálculos imediatos de seno, cosseno, tangente, secante, e pouco tempo em sua aplicabilidade.

Quando se chega então ao estudo das funções trigonométricas costuma acontecer o processo de exibir aos alunos os gráficos clássicos da senóide e cossenóide através da marcação de pontos e ligando-os. Após isso, o aluno é incentivado à memorizar que em funções do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, onde a, b, c e d são números reais e cada um desses parâmetros ao ser introduzido na função modificam o período e a imagem. O que pode acontecer nesses casos é que pouco se explica o porquê dessas modificações na função. Além disso, alguns alunos acabam confundindo os conceitos de função com as ideias acerca do circulo trigonométrico, ou relações no triângulo retângulo. Vejamos o enunciado do próximo problema.

Figura 15: Funções Trigonométricas

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

A) janeiro.
B) abril.
C) junho.
D) julho.
E) outubro.

Fonte: INEP, ENEM 2015, questão 176.

Conhecimentos prévios desejados: espera-se que o aluno já esteja familiarizado com as propriedades das funções trigonométricas, bem como a resolução de equações trigonométricas básicas.

Observação: O problema apresentado é discreto, visto que a variável x assume valores referentes aos meses do ano, 1, 2, etc. Porém para ilustração gráfica e resolução consideraremos a função com comportamento real.

Indica-se que este problema seja trabalhado em turmas de 1º ou 2º ano do Ensino Médio, onde os conhecimentos prévios citados já costumam ser apresentados, respeitando-se a flexibilidade de organização de conteúdos de cada escola.

Questionamentos que podem surgir nesse momento inicial:

Por que é necessário o estudo da trigonometria? Como citado anteriormente, vale a pena nesse momento que o professor destaque a grande aplicabilidade que existe nos fenômenos periódicos, e como estes descrevem uma variedade enorme de situações no cotidiano;

- De qual forma esse problema se relaciona com o que foi estudado até agora? Geralmente o estudo de trigonometria se dá de maneira muito mecânica, com aplicação direta das tabelas de razões e regras de sinais memorizadas. Com a proposição de exercícios de otimização nesse caso é possível mostrar que tudo que foi aprendido pode ser utilizado como ferramenta na resolução de problemas. É interessante mostrar aos alunos essa perspectiva de que os conceitos teóricos que a ele foram apresentados antes tem um motivo e fundamentação.

Partindo dos conhecimentos prévios dos alunos, a discussão pode se iniciar com o seguinte questionamento: Se a função proposta fosse apenas $P(x) = \cos(x)$ quais conhecimentos já teríamos a respeito dela? A partir daí, em geral no Ensino Médio os alunos costumam memorizar os papéis que os valores 8 e 5 desempenhariam na imagem da função $P(x) = 8 + 5 \cdot cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$. Ao invés de recorrer a esse resultado memorizado, é interessante ir concluindo passo a passo que pensar na função $P(x) = 5\cos(x)$ representaria um alongamento na imagem da função, e espera-se que os próprios alunos concluam isso atribuindo valores para x e analizando as respostas. Introduzindo-se o número 8, é fácil ver que $P(x) = 8 + 5\cos(x)$ representaria um deslocamento da imagem da função em 8 unidades para cima. Mesmo não sendo o objetivo do problema, seria interessante discutir como os demais parâmetros influenciariam no período da função, visto que o fato de serem periódicas é que faz com que as funções trigonométricas sejam tão adequadas a descrever situações como essa.

Deve-se ter cuidado com relação ao enunciado, por conta da escrita um pouco confusa. Observe que a produção máxima ocorre quando os preços estão mais baixos, logo, deseja-se minimizar a função. A maioria dos alunos, ao observar a palavra “máxima” escrita ao fim do texto associaria sua resolução à encontrar o valor máximo da função. Entretanto, é necessária aqui uma interpretação do texto citado, onde verifica-se que a função descreve o preço de um certo produto, e diz-se que preços baixos implicam na produção máxima. Logo, o que nos interessa na verdade é minimizar a função $P(x) = 8 + 5 \cdot cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$.

Pela análise dos parâmetros feita anteriormente, e por conta de $cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$ e $cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = 1$ serem, respectivamente, o menor e maior valor assumidos por esse termo, os alunos devem conseguir constarar que a imagem da função apresentada fica contida no intervalo $[3, 13]$. A pergunta seguinte a ser feita é: quando esses valores extremos acontecem? Através desse processo investigativo os alunos deverão concluir que a solução máxima procurada acontece somente quando $cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$, pois isso acontece quando

$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2k\pi, \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$ (esta seria a solução geral da equação trigonométrica). Resolvendo essa equação, temos:

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z} \tag{34}$$

$$\pi x - \pi = 6\pi + 12k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z} \tag{35}$$

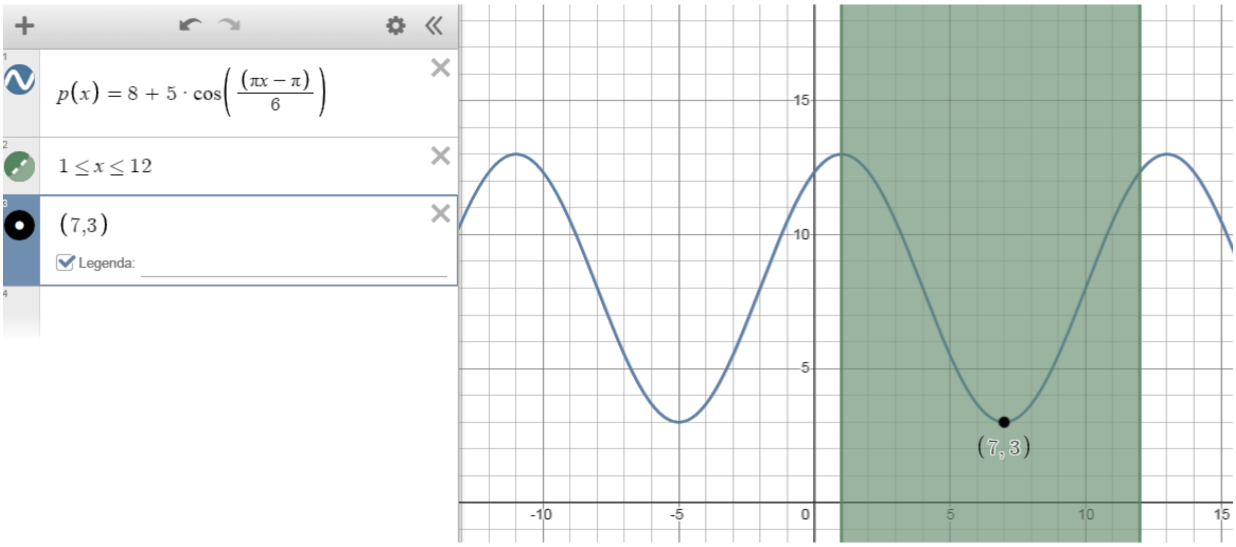
$$\pi x = 7\pi + 12k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z} \tag{36}$$

$$x = 7 + 12k, \forall\, k \in \mathbb{Z} \tag{37}$$

Observe que o problema em questão não admite infinitas soluções, visto que $x \in [1,12]$ já que os valores definidos para x correspondem aos meses do ano, pelas condições dadas. Pela observação dos valores conclui-se que a igualdade só é satisfeita dentro desse intervalo para o caso $x = 7$, que representaria o mês de julho, presente na alternativa D.

Apresentaremos a seguir o gráfico da função que descreve o preço do quilograma do produto. É comum que os alunos do 1º ano do Ensino Médio estudem algumas propriedades dos gráficos de funções oscilatórias, de modo que a visualização deste gráfico serviria para ilustrar a solução ótima que encontramos. De outra forma, poderia também o professor propor que os alunos resolvessem o problema do ponto de vista geométrico, traçando esboços do gráfico até chegar a conclusão.

Figura 16: Gráfico da função preço/kg



Fonte: o autor, 2021.

Questionamentos interessantes que podem surgir ao fim deste problema:

- De que outra maneira o problema poderia ser resolvido? Mesmo não sendo o objetivo deste trabalho, uma possibilidade para explorar nesse caso seria a utilização de ferramentas computacionais e softwares de geometria para explorar junto aos alunos os conceitos de translação e mudanças nos parâmetros das funções.
- O que pode-se generalizar a partir do problema apresentado? Mesmo não sendo objetivo do problema, pode-se explorar o conceito de período que é essencial entender quando uma situação pode ser descrita através de funções trigonométricas.
- Um questionamento que pode surgir por parte dos alunos seria: por que o período da função, nesse caso, não foi investigado, e não afetaria a solução encontrada para o problema? Nesse momento, é interessante observar graficamente que o período da função é de 12 unidades, o que é razoável, visto que a função é descrita para x assumindo os valores relativos aos meses do ano. Nesse sentido, como a função é periódica, a solução encontrada descreve corretamente o que ocorreria ao longo dos anos seguintes, ou seja, sempre ao sétimo mês ocorre a solução ótima esperada.

Fazendo uma reavaliação acerca do problema abordado, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ Apresentar de maneira prática a aplicabilidade das funções trigonométricas na descrição de fenômenos;
- ✓ Chamar a atenção dos alunos ao fato de que a interpretação de texto é fundamental na resolução de problemas. Muitos professores trabalham com palavras chaves, de maneira que ignorando o restante do texto estas palavras se tornam comandos para o que queremos calcular, o que poderia causar um equívoco se aplicado ao problema dado;
- ✓ Estudar o comportamento de uma função trigonométrica na perspectiva da otimização;
- ✓ Destacar junto aos alunos a importância da trigonometria nos dias atuais, ainda que pouco cobrada, se faz muito presente nas situações que podem ser observadas.

2.6 **Problemas para os alunos das turmas preparatórias**

Durante os últimos anos do Ensino Médio é comum que alguns alunos recorram às turmas específicas preparatórias, oferecidos por suas respectivas escolas ou em cursos, que tem como objetivo o treinamento com ênfase em resolução de questões para a aprovação em provas de carreira militar como IME (Instituto Militar de Engenharia), ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), entre outras. Dentro destes cursos algumas técnicas de resoluções de questões são ensinadas, de modo que alguns professores apresentam as regras operatórias de derivadas com esse objetivo.

A seguir, apresentaremos um exercício simples que pode ser utilizado para introduzir o uso das desigualdades dentro de cursos preparatórios. Por se tratar apenas de um exemplo introdutório é que não foram discutidos os questionamentos iniciais e finais, nem a reavaliação, nesse caso. Na seção seguinte será apresentado um problema a ser aplicado que apresente estas discussões.

2.6.1 Um Exemplo clássico

Propomos ao leitor o seguinte problema: Qual o valor mínimo para a função a seguir?

$$f(x,y) = \frac{16}{x} + \frac{32}{y} + xy, \text{ com } x > 0, y > 0 \tag{38}$$

Para a resolução dele, faremos uso da desigualdade entre as médias, já utilizada anteriormente. Temos:

Como visto anteriormente, $MA \geq MG$, logo, tomando $x_1 = \frac{16}{x} > 0$, $x_2 = \frac{32}{y} > 0, x_3 = xy > 0$ temos:

$$\frac{\frac{16}{x}+\frac{32}{y}+xy}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{16}{x} \cdot \frac{32}{y} \cdot xy} \tag{39}$$

$$\frac{16}{x} + \frac{32}{y} + xy \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{x} \cdot \frac{32}{y} \cdot xy} \tag{40}$$

$$\frac{16}{x} + \frac{32}{y} + xy \geq 3 \cdot \sqrt[3]{512} \tag{41}$$

$$\frac{16}{x} + \frac{32}{y} + xy \geq 24 \tag{42}$$

Assim, o valor mínimo é assumido quando ocorre a igualdade entre as médias, logo, nesse caso, o menor valor é 24.

Mesmo que nesses cursos as regras práticas de derivada sejam apresentadas, dificilmente se usaria para resolver um problema simples como esse, visto que se trata de uma função com duas variáveis. Para aplicar o conceito de derivada aqui o professor precisaria apresentar aos alunos as ideias de derivadas parciais e vetor gradiente, pois os pontos críticos nesse caso, se houver, encontram-se nos valores onde este vetor se anula, ou onde a derivada não existe. Nesses casos, costuma-se resolver exemplos desse tipo em sala de aula usando a desigualdade. Um grande problema é que isso pode levar a memorização como regra prática, e os alunos costumam assimilar truques de resolução como esse sem que compreendam sua demonstração, que já foi feita num exemplo anterior.

Vejamos a seguir um problema que poderia ser proposto em uma destas turmas. Em seguida, discutiremos formas de solução que podem ser apresentadas.

Indica-se que este problema seja trabalhado em turmas preparatórias de 3º ano do Ensino Médio, onde os conhecimentos prévios já tenham sido trabalhados e deseja-se aprofundamento, e aquisição de novos conhecimentos.

2.6.2 O problema do invólucro

O problema a seguir foi extraído da prova discursiva do Instituto Militar de Engenharia (IME), do ano de 2019:

> Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0 , é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a $\frac{1}{3}$ do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação: $D_n = \frac{1}{3}D_{n-1,}\, para\, n \geq 2$. Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado (IME, 2019).

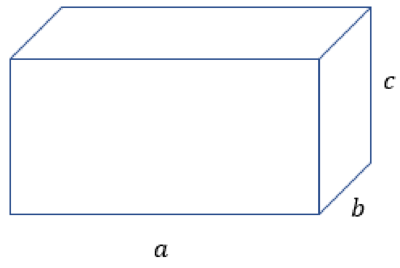
Conhecimentos prévios desejados: Reconhecimento de uma progressão geométrica, compreensão do que seria uma definição por recorrência, uso da desigualdade entre as médias.

Questionamentos que podem surgir nesse momento inicial:

- Quais as contribuições para a aula que o problema proposto pode trazer? O problema exige uma compreensão maior antes que se aplique a desigualdade. A chamada definição por recorrência não costuma ser muito explorada nas turmas de Ensino Médio, mas pode ser trabalhada ao explorar a definição e chegar a conclusão junto aos alunos de que se trata de uma progressão geométrica de razão menor que 1.

Analisemos as informações dadas no problema. Sejam a, b, c as dimensões do invólucro que armazenarão o volume descartado, de acordo com a Figura (17).

Figura 17: Invólucro em forma de paralelepípedo



Fonte: o autor, 2021.

De acordo com o problema, O primeiro resíduo seria $D_1 = \frac{Q_0}{3}$ de onde teríamos $D_2 = \frac{1}{3}D_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_0}{3} = \frac{Q_0}{9}$. Observa que, pela definição, cada resíduo é um terço do anterior formando assim uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Geralmente a essa altura os alunos já estão familiarizados com o processo de determinar a soma de n-ésimos termos de uma P.G. Sendo esta infinita, que nesse problema é igual a:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{Q_0}{2} \tag{42}$$

Para guardar todo o lixo radioativo, e como a capacidade de armazenamento dos resíduos é igual ao volume do paralelepípedo devemos ter:

$$V_{invólucro} = abc = \frac{Q_0}{2} \tag{43}$$

A fim de minimizar o custo de fabricação, temos que $A = 2(ab + bc + ac)$ é a função que descreve a área superficial deste invólucro, e ela que queremos minimizar. Observe que, como $a, b\ e\ c$ são números reais não negativos, por se tratarem de medidas, logo, $A \geq 0$.

Para minimizar esta soma, aplicando-se a desigualdade entre as médias vista anteriormente, tomando-se $x_1 = ab > 0,\ x_2 = bc > 0\ e\ x_3 = ac > 0,$ que:

$$\frac{ab + bc + ac}{3} \geq \sqrt[3]{ab.bc.ac} \tag{44}$$

Logo,

$$\frac{ab + bc + ac}{3} \geq V^{\frac{2}{3}} \tag{45}$$

$$\frac{A}{6} \geq V^{\frac{2}{3}} \tag{46}$$

$$A \geq 6V^{\frac{2}{3}} \tag{47}$$

Sendo assim, a área assumirá o menor valor quando ocorrer a igualdade entre as médias. Isso só ocorre quando $ab = bc = ac \rightarrow\ a = b = c$. Logo, o formato deverá ser um cubo, e:

$$V = \frac{Q_0}{2}, a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}} \tag{48}$$

Questionamentos interessantes que podem surgir ao fim deste problema:

- Quais foram os conhecimentos aplicados na resolução deste problema? Que outras sequências definidas por recorrência os alunos já ouviram falar?
- De que outra forma o problema poderia ser resolvido? Observe que a função obtida no problema não é de uma variável, portanto, sua resolução por meio de derivação não seria tão simples e seria necessário algum aprofundamento, não somente as regras iniciais de derivação.

Fazendo uma reavaliação acerca do problema abordado, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ Relacionar os métodos de resolução que estudamos até aqui com conceitos interessantes como relações de recorrência e progressões geométricas.
- ✓ Resolver o problema apresentado utilizando a desigualdade das médias.

Encerrados os problemas propostos nesse capítulo, temos que os primeiros foram propostos como possibilidades alternativas à maneira como geralmente o assunto é apresentado durante o Ensino Médio, buscando alternativas ao processo de memorização e repetição, e ao roteiro de aula tradicional que inicia-se com definições, teoria e por fim alguma prática. Sua intenção é a motivação do estudo dos conhecimentos, de maneira que estes, quando apresentados previamente, possam servir de fundamentação para o estudo que estamos realizando junto aos alunos.

Os dois últimos foram escolhidos para ilustrar a maneira atual como os assuntos são cobrados, destacando-se que através destes, é possível explorar mais conhecimentos e possibilidades durante a aula. Encerramos este capítulo propondo uma reflexão acerca de como temos ensinado, como temos utilizado estes problemas, e como isso se refletirá logo em seguida, quando esses alunos se encaminham ao ensino superior. No capítulo seguinte serão propostos e resolvidos problemas para os cursos de nível superior, podendo ser usados até mesmo no Ensino Médio, com alunos mais avançados, com auxílio do cálculo e de outras ferramentas.

3 **PROBLEMAS APLICÁVEIS AO ENSINO SUPERIOR**

Estudamos na seção anterior alguns problemas que poderiam facilmente ser resolvidos pela aplicação de regras de Cálculo, porém na perspectiva do estudante de Ensino Médio. Após a apresentação daqueles problemas em sala, e análise das soluções propostas é possível ao professor perceber se houve um despertamento de interesse com relação aos assuntos e se há possibilidade de aprofundamento naquela turma. Não podemos afirmar que isso sempre ocorrerá, pois cada turma é um universo único, constituida de seres humanos com características particulares. O que propomos aqui é que sejam apresentados aos alunos problemas diferentes dos habituais, que em geral costumam ser descontextualizados, sem discussão e sem possibilidade de abrir um leque para novos conhecimentos.

Iniciamos agora o Capítulo 3, que visa discutir e apresentar problemas práticos a serem resolvidos dentro das turmas de Cálculo, com o objetivo de motivar e contextualizar os conhecimentos adquiridos no decorrer do curso. Se olharmos para o Cálculo dentro do seu processo de criação veremos que ele foi assim construído, através das necessidades que se apresentavam:

> Havia uma necessidade de experimentar e determinar como as coisas aconteciam. Enquanto que na Renascença ocorreu uma volta os conceitos clássicos, no século XVII era estabelecida uma matemática sobre fundamentos inteiramente novos. O Cálculo apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar 40 problemas insolúveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em Matemática da época [...]". (FULINI, 2016, p.39-40)

O desenvolvimento do Cálculo diferencial e Integral mostrou-se uma inovação de grande utilidade e aplicabilidade, não só na época de seu desenvolvimento. Nos dias atuais é possível realizar o seu estudo e apresentar a disciplina de maneira a despertar o interesse dos alunos destacando essas propriedades, como bem destaca o trecho a seguir:

> O procedimento de Leibniz supõe um princípio subjacente que demonstra a extrema potência de seu cálculo e sua incompreendida modernidade. Em linguagem atual, este princípio estabelece o seguinte: é sempre necessário determinar a variável em relação à qual se quer derivar. Uma quantidade varia em função da outra, ou seja, já temos aqui uma noção implícita de variável dependente e variável independente, que antecede a noção de função. (Roque, PROFMAT, pág.221)

De acordo com o que relata Bassanezi (2002) dentro de seu trabalho em uma turma, a maneira como se desenvolvem os conceitos principais da disciplina partindo da necessidade destes dentro da resolução de situações problemas trouxe resultados satisfatórios:

> Assim é que trabalhamos com função (linear, potência, exponencial), função inversa (logaritmo), função discreta (forma de recorrência), continuidade, limites (assíntotas), derivadas (crescimento, pontos críticos, concavidade), raízes de funções (Teorema do Valor Médio – bissecção), gráfico de funções, etc. Em cada etapa deste processo procurávamos selecionar problemas diversos com resoluções análogas. O conceito de Integral definida foi introduzido posteriormente, quando estudamos a plantação de batatas em terrenos irregulares (cálculo de áreas). (BASSANEZI, 2002, p.191)

Sabemos que metodologias alternativas como essa demandam tempo e que o conteúdo programático dessas disciplinas costuma ser demasiadamente extenso se comparado ao tempo necessário para apresentar cada conteúdo de forma diferenciada. Entretanto, o que destacamos aqui é que a ênfase na resolução de problemas pode representar maior significatividade na absorção dos conteúdos, pois fazem das descobertas ferramentas, e possibilita aos alunos a sensação de participação da construção do conhecimento, em detrimento ao sentimento de mero espectador.

Há obviamente beleza em várias demonstrações e definições que realmente despertam prazer apenas em observar, e isso deve se fazer presente nos cursos, porém o momento de trazer o aluno para a prática se faz necessário, visto que uma das mais referidas queixas com relação a disciplina por parte dos alunos é o distanciamento de seu próprio cotidiano. Como destaca Barbosa (2004) “O cálculo pelo cálculo, sem aplicação e contextualização, fica centrado em uma pedagogia rotineira, tradicional, em que muitos docentes estão acostumados”.

Com esse objetivo são apresentados os problemas a seguir, bem como as definições necessárias a sua resolução. Espera-se que os alunos já estejam familiarizados com os conceitos: função, domínio e construção de gráficos, conceito de derivada e regras iniciais de derivação, noção de pontos críticos e como determiná-los, de modo que a apresentação desses problemas em sala de aula faça de modo motivacional, com o intuito de guiar-nos até os conhecimentos que serão adquiridos, bem como até a fixação completa destes.

Após a apresentação do conceito de derivada, que geralmente é feito de maneira visual mostrando-se a reta tangente a curva, muitos alunos tem dificuldades em enxergar aplicabilidade e relação com o cotidiano nessa definição. Nos problemas a seguir teremos como objetivo utilizar o cálculo da derivada para determinar máximos e mínimos relativos a funções que descrevam situações problemas.

Nesse sentido, esta seção objetiva então catalogar possíveis problemas descritos por funções deriváveis que permitiram o seu uso como exemplos para discussão em sala de aula.

Faz-se necessário uma breve revisão a respeito dos conceitos de máximos e mínimos referentes a funções contínuas. As definições presentes foram feitas no capítulo anterior para que fossem apresentadas aos alunos do Ensino Médio. Registramos aqui como algumas são geralmente feitas de maneira mais formal, nos cursos de nível superior.

Para tais definições e teoremas usamos como referência os livros do STEWART (2006), do HOFFMANN (2015), e do VILCHES (2020).

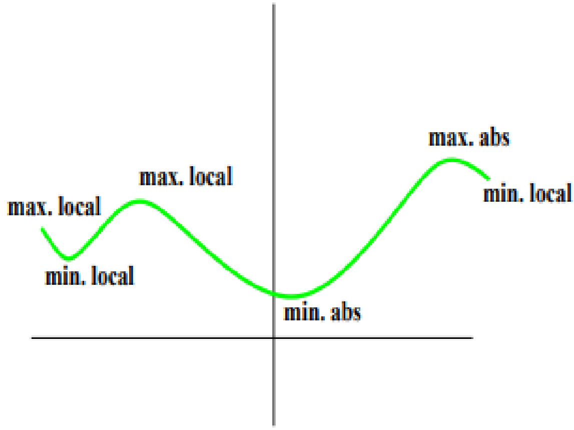
Seja f uma função real de uma variável real.

Definição 9: Uma função f possui um máximo relativo (ou máximo local) em um ponto c se existe algum intervalo aberto I contendo c tal que f esteja definida em I e $f(c) \geq f(x)$ para todo x ∈ I. Assim, o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de máximo relativo do gráfico de f. Dizemos também que uma função f possui um mínimo relativo (ou mínimo local) em um ponto c se existe algum intervalo aberto I contendo c tal que f esteja definida em I e $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Assim, o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de mínimo relativo do gráfico de f. Em ambos os casos, dizemos que a função possui um extremo relativo em c, e o valor máximo local ou mínimo local da função é $f(c)$.

Definição 10: Dizemos que f possui um máximo global ou absoluto em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x no domínio de f. Dizemos também que f possui um mínimo global ou absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x no domínio de f. Em ambos os casos, dizemos que $(c, f(c))$ é um ponto de extremo absoluto do gráfico da função, e o valor máximo ou mínimo global da função é $f(c)$.

As definições anteriores podem ser exemplificadas na Figura 18:

Figura 18: Gráfico de uma função a partir de seus extremos



Fonte: IME – UERJ, Cálculo: Volume 1.

Definição 11: Sejam I um intervalo não trivial (diferente de um ponto) de ℝ e f uma função definida em I. Um ponto c ∈ I é chamado ponto crítico de f se f não é derivável em c, ou, se $f'(c) = 0$.

Observação: O seguinte resultado é válido: se x = c é um extremo relativo de f, então c é um ponto crítico de f.

O teorema a seguir será de grande utilidade na resolução de problemas.

Teorema 2: (Weierstrass) Se f: [a,b] → ℝ é uma função contínua, então f possui um máximo e um mínimo absoluto em [a,b].

Note que um ponto de extremo absoluto de f em $[a, b]$ é um ponto de extremo relativo de f em (a,b) ou um dos extremos do intervalo. Nesse caso, basta então que investiguemos os pontos críticos da função em estudo, e calculemos também f(a) e f(b). Comparando-se os valores assumidos por f nos pontos críticos e nos extremos do intervalo temos que o maior deles será o máximo absoluto e o menor deles, o mínimo absoluto de f em [a,b].

Como consequência do teorema acima, apresentamos o seguinte método prático para a determinação dos Valores extremos de uma função real:

Proposição 1: Método para a determinação dos Valores extremos

Passo 1: Encontrar os valores de f nos pontos críticos da função definida em (a,b).

Passo 2: Encontrar os valores de f nos extremos a e b do domínio.

Ao encontrar esses valores, diremos que o valor máximo de f é o maior entre os resultados dos passos 1 e 2. Diremos também que o valor mínimo de f é o menor entre os resultados dos passos 1 e 2.

Outras possibilidades para encontrar máximos e mínimos locais são o teste da 1ª e 2ª derivada, como segue abaixo:

Proposição 2: Teste da Primeira Derivada

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função f contínua e derivável num intervalo que contém c.

Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em torno de c, então f tem um máximo local em c.

Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em torno de c, então f tem um mínimo local em c.

Se o sinal de f' não mudar em torno de c, então f não tem máximo nem mínimo locais em c.

O teste da primeira derivada, como foi apresentado, nos permite classificar localmente um ponto crítico de f.

Proposição 3: Teste da Segunda Derivada

Suponha que f'' seja contínua em um intervalo que contém c.

Se $f'(c) = 0$, e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

Se $f'(c) = 0$, e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Teorema 3: Se uma função f é contínua num intervalo I, e possui apenas c como único ponto crítico neste intervalo, então:

Se $f''(c) > 0$, $f(c)$ é o valor de mínimo absoluto de f no intervalo I.

Se $f''(c) < 0$, $f(c)$ é o valor de máximo absoluto de f no intervalo I.

Observação: Cabe destacar que, caso o professor deseje resolver alguns problemas do capítulo 2 utilizando o cálculo como ferramenta, os resultados apresentados nessa seção não seriam o suficiente, visto que alguns problemas do capítulo anterior possuem mais de uma variável e envolveriam em sua resolução conceitos como o do vetor gradiente, que não foi apresentado aqui. Para proceder então dessa maneira, o professor deveria selecionar os problemas que pretende aplicar nas turmas de ensino superior de forma que outros conhecimentos prévios de cálculo além dos mencionados aqui já tenham sido apresentados, isto é, só é possível aplicar as técnicas dessa seção nos exemplos onde a função a ser otimizada seja de uma variável.

Vamos, a partir de agora e até o fim desta seção aplicar as definições e os teoremas apresentados na resolução de alguns problemas.

3.1 **Problemas com hastes metálicas**

A seguir apresenta-se a primeira proposta de atividade para o ensino superior. Espera-se que até o momento dessa proposta de aula os alunos estejam familiarizados com as regras práticas iniciais de derivação, e os conhecimentos das definições que apresentamos anteriormente. Este material apresenta as soluções dos problemas apenas a fim de conferência por parte do professor, e por sugestão acerca das discussões que as soluções podem desmembrar. De maneira alguma pretende-se que essas soluções sejam meramente expostas pelo professor enquanto os alunos passivamente acompanham, mas entende-se que, como proposta a ser executada, os próprios alunos buscarão as soluções e variações do problema a ponto de tornar a aula mais dinâmica, interativa e motivadora.

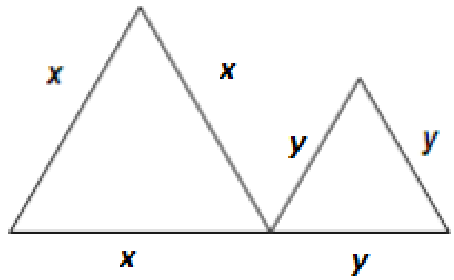
Apresentaremos agora uma seção de problemas de otimização que podem ser adaptáveis em sala de aula, mudando-se as formas geométricas utilizadas, ou as condições do material estabelecido.

3.1.1 Uma aplicação na Geometria Plana

O problema a seguir foi adaptado de Lima (2012), também foi proposto na lista de Exercícios do professor Ulysses Sodré, da Universidade Estadual de Londrina e se encontra proposto na página online de seu curso.

Uma haste metálica fina de medida m foi dobrada de forma a montar dois triângulos equiláteros um ao lado do outro, apoiados sobre uma mesma horizontal. Qual é o menor valor possível para a soma das áreas desses triângulos?

Figura 19: Região definida pelos triângulos



Fonte: o autor, 2021.

Como a haste de medida m deve construir os dois triângulos, temos que m = 3x + 3y. Já a área total das figuras é dada pela expressão A = $\frac{(x^2+y^2)\sqrt{3}}{4}$, que desejamos minimizar.

Tomando-se a primeira relação e substituindo na segunda obtemos:

$$A = \frac{(x^2+\left(\frac{m-3x}{3}\right)^2)\sqrt{3}}{4} \tag{49}$$

Sabemos que para o problema em questão, devemos ter x > 0 e y = $\frac{m-3x}{3}$ > 0 a fim de que seja possível construir dois triângulos. Logo, $m > 3x$, de onde x < $\frac{m}{3}$. Assim temos que o domínio da função a ser minimizada é o intervalo (0, $\frac{m}{3}$).

Porém, nesta resolução consideraremos a função $A = \frac{(x^2+\left(\frac{m-3x}{3}\right)^2)\sqrt{3}}{4}$ com domínio [0, $\frac{m}{3}$], a fim de que se aplique o Teorema 2. Veremos que esta alteração não trás prejuízo ao valor de mínimo que buscamos, pois os valores da função nestes extremos do intervalo não são o valor de mínimo procurado. Sendo assim, em ambos os intervalos (0, $\frac{m}{3}$) e [0, $\frac{m}{3}$] o mínimo procurado será o mesmo.

Substituindo os extremos do intervalo [0, $\frac{m}{3}$] na função, temos que: $A(0) = A\left(\frac{m}{3}\right) = \frac{m^2\sqrt{3}}{36}$.

Observe também que, calculando o valor da função para algum ponto no intervalo (0, $\frac{m}{3}$), por exemplo, para $x = \frac{m}{5}$ temos que: $A\left(\frac{m}{5}\right) = \frac{m^2\sqrt{3}}{100} > 0$. Como $0 < A\left(\frac{m}{5}\right) = \frac{m^2\sqrt{3}}{100} < \frac{m^2\sqrt{3}}{36} = A(0) = A(\frac{m}{3})$, temos que nos extremos do intervalo [0, $\frac{m}{3}$], não poderia ocorrer o mínimo da função.

Consideremos então x ≥ 0 e y = $\frac{m-3x}{3}$ ≥ 0. Logo, m ≥ 3x, de onde x ≤ $\frac{m}{3}$. Assim temos que Dom(A) = [0, $\frac{m}{3}$], pelo Teorema 2, A possui um mínimo absoluto nesse intervalo.

Procuremos então os pontos críticos da função A. Desenvolvendo a expressão temos:

$$A = \frac{(x^2 + \left(\frac{m-3x}{3}\right)^2)\sqrt{3}}{4} \tag{50}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{36}[9x^2 + m^2 - 6xm + 9x^2] \tag{51}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{36}[18x^2 + m^2 - 6xm] \tag{52}$$

Calculando-se a derivada da função a ser minimizada obtemos A'(x) = $\frac{\sqrt{3}}{36}(36x - 6m)$. Temos que A'(x) = 0 somente quando x = $\frac{m}{6}$.

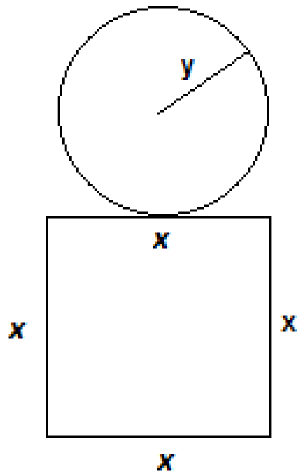
Como a função é contínua no intervalo [0, $\frac{m}{3}$], pelo Teorema 2, basta verificar os valores assumidos por ela em seus extremos e no ponto crítico, para que cheguemos à conclusão. Substituindo os valores citados, é fácil verificar que $A(0) = A\left(\frac{m}{3}\right) = \frac{m^2\sqrt{3}}{36}$. Temos também que $A\left(\frac{m}{6}\right) = \frac{m^2\sqrt{3}}{72}$, que é o menor valor dentre os obtidos, logo, de acordo com o método, é a solução mínima que procurávamos.

3.1.2 <u>Haste metálica envolvendo quadrado e círculo</u>

Vejamos agora outro problema de haste fixa que se comporta de maneira parecida, mostrando que a ideia central pode ser diversificada alterando-se as figuras planas trabalhadas. Este problema foi adaptado de um proposto na lista de Exercícios do professor SODRÉ (2020), da Universidade Estadual de Londrina.

Uma haste metálica fina de comprimento m foi dobrada de modo a montar um quadrado tangenciando um círculo. Quais devem ser as medidas desses objetos para que a soma das áreas dessas figuras seja mínima?

Figura 20: Região definida pelas duas formas



Fonte: o autor, 2021.

Seja x a medida do lado do quadrado, e y a medida do raio do círculo que o tangencia. Para determinar o domínio considerado do problema, verificamos que para construir as duas figuras, necessariamente devemos ter x e y valores positivos. Dada uma haste de medida m para os construir, teremos que $m = 4x + 2\pi y$, de onde temos que:

$$y = \frac{m-4x}{2\pi}, \text{ logo, para } y > 0, \frac{m-4x}{2\pi} > 0 \rightarrow m - 4x > 0 \rightarrow x < \frac{m}{4}. \quad (53)$$

Assim, o domínio da função é o intervalo $(0, \frac{m}{4})$.

Temos que:

$$A(x,y) = x^2 + \pi y^2 \quad (54)$$

Logo, usando o valor de y em (53) tem-se:

$$A(x) = x^2 + \pi \cdot (\frac{m-4x}{2\pi})^2 \quad (55)$$

Desenvolvendo o termo ao quadrado em (55), temos que a função a ser minimizada é dada por:

$$A(x) = \frac{4\pi x^2 + m^2 - 8mx + 16x^2}{4\pi} \quad (56)$$

Porém, nesta resolução consideraremos a função $A(x) = x^2 + \pi \cdot (\frac{m-4x}{2\pi})^2$ com domínio $[0, \frac{m}{4}]$, a fim de que se aplique o Teorema 2. Observe que esta alteração não trás prejuízo ao valor de mínimo que buscamos, pois veremos a seguir que os valores da função nestes extremos do intervalo não são o valor de mínimo procurado. Por conta disso, em ambos os intervalos, o valor de mínimo procurado será o mesmo.

Substituindo os extremos do intervalo na função, temos que: $A(0) = \frac{m^2}{4\pi}$; $A\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{m^2}{16}$.

Observe também que, calculando o valor da função para algum ponto no intervalo $(0, \frac{m}{4})$, por exemplo, para $x = \frac{m}{8}$ temos que: $A\left(\frac{m}{8}\right) = \frac{m^2}{64} + \frac{m^2}{16\pi} > 0$.

A fim de se comparar os valores $A(0), A\left(\frac{m}{4}\right)$ e $A(\frac{m}{8})$, reduzindo estas frações a uma mesmo denominador, temos que: $A(0) = \frac{16m^2}{64\pi}, A\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{4\pi m^2}{64\pi}$, e $A\left(\frac{m}{8}\right) = \frac{m^2(\pi+4)}{64\pi}$. Sendo assim, como $\pi + 4 < 4\pi < 16$, temos que: $0 < A\left(\frac{m}{8}\right) < A(\frac{m}{4}) < A(0)$, de forma que nos extremos do intervalo $[0, \frac{m}{4}]$, não poderia ocorrer o mínimo da função.

Adotando então o intervalo $[0, \frac{m}{4}]$ como domínio, e derivando a função A(x) obtemos:

$$A'(x) = \frac{8\pi x - 8m + 32x}{4\pi}$$

(57)

Busquemos agora os valores que satisfazem $A'(x) = 0$ para encontrar os pontos críticos da função dada:

$$8\pi x - 8m + 32x = 0 \tag{58}$$

$$x(8\pi + 32) = 8m \tag{59}$$

$$x = \frac{8m}{8\pi+32} \Longrightarrow x = \frac{m}{\pi+4} \tag{60}$$

Considerando que a função é contínua em $\left[0, \frac{m}{4}\right]$, usaremos a Proposição 1 para determinar os valores extremos. Calculando $A(x)$ para os extremos do intervalo e para o ponto crítico temos:

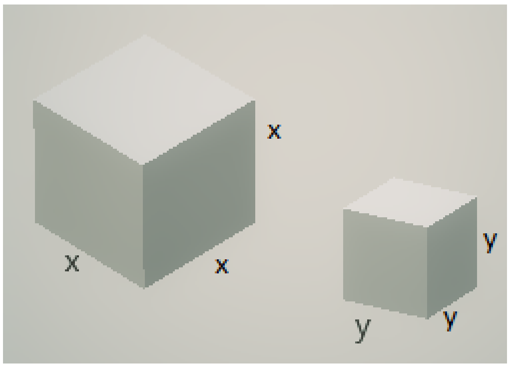
$$A(0) = \frac{m^2}{4\pi}; A\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{m^2}{16} \text{ e } A\left(\frac{m}{\pi+4}\right) = \frac{m^2}{4(\pi+4)} \tag{61}$$

Logo, pelo método da determinação dos extremos, temos que $x = \frac{m}{\pi+4}$ é o ponto que buscávamos. Como $y = \frac{m-4x}{2\pi}$, para o valor de x que encontramos temos que $y = \frac{m}{2(\pi+4)}$.

3.1.3 Haste metálica e cubos

Vejamos agora uma variação dos problemas apresentados que mostra que a partir da ideia central de uma haste fixa os alunos podem criar diversas funções de área e volume a serem otimizadas modificando-se as figuras escolhidas inicialmente.

Figura 21: Explorando mais formas



Fonte: o autor, 2021.

Suponhamos que, a título de construção, dessa vez pretenda-se utilizar uma haste metálica de medida m para construir todas as arestas de 2 cubos, de maneira que $m = 12x + 12y$. Quais seriam as dimensões ideais dos cubos de forma que a soma dos volumes seja mínima?

Nesse caso temos:

$$\mathrm{V}(x, y) = x^3 + y^3 \tag{62}$$

Como $y = \frac{m-12x}{12}$, temos que:

$$V(x) = x^3 + \left(\frac{m-12x}{12}\right)^3 \tag{63}$$

Temos também que, para que a construção seja possível devemos ter $x > 0\ e\ y > 0$, logo:

$$m - 12x > 0 \ \rightarrow x < \frac{m}{12} \tag{64}$$

Assim o domínio da função é o intervalo $(0, \frac{m}{12})$.

Porém, nesta resolução consideraremos a função $V(x) = x^3 + \left(\frac{m-12x}{12}\right)^3$ com domínio $[0, \frac{m}{12}]$, a fim de que se aplique o Teorema 2. Observe que esta alteração não trás prejuízo ao valor de mínimo que buscamos, pois veremos a seguir que os valores da função nestes extremos do intervalo não são o valor de mínimo procurado. Por conta disso, em ambos os intervalos, o valor de mínimo procurado será o mesmo.

Substituindo os extremos do intervalo $[0, \frac{m}{12}]$ na função, temos que: $V(0) = \frac{m^3}{12^3} = \frac{m^3}{1728} = V\left(\frac{m}{12}\right)$.

Observe também que, calculando o valor da função para algum ponto no intervalo $(0, \frac{m}{12})$, por exemplo, para $x = \frac{m}{36}$ temos que: $V\left(\frac{m}{36}\right) = \frac{9m^3}{36^3} = \frac{m^3}{5184} > 0$.

Como $0 < V\left(\frac{m}{36}\right) = \frac{m^3}{5184} < \frac{m^3}{1728} = V(0) = V(\frac{m}{12})$, temos que nos extremos do intervalo $[0, \frac{m}{12}]$, não poderia ocorrer o mínimo da função.

Derivando a função $V(x)$ temos: $V'(x) = \frac{-m^2+24mx}{48}$

De onde se tem que $V'(c) = 0$ se, e somente se $c = \frac{m}{24}$.

Como V é contínua em $\left[0, \frac{m}{12}\right]$, podemos usar a Proposição 1 para encontrar valores extremos. Analisando os valores da função para os extremos do intervalo e para o ponto crítico temos:

$$V(0) = \frac{m^3}{1728}, V\left(\frac{m}{12}\right) = \frac{m^3}{1728}, V\left(\frac{m}{24}\right) = \frac{2m^3}{24^3} = \frac{m^3}{13824} \qquad (65)$$

Dentre esses valores tem-se que o menor apresentado é $V\left(\frac{m}{24}\right)$, logo, a menor soma de volumes ocorre quando $x = \frac{m}{24}$. Substituindo, temos também que $y = \frac{m}{24}$.

De acordo com os problemas propostos nessa seção, este material visa incentivar uma sugestão de aula dinâmica onde o professor propõe como atividade que os alunos criem outras figuras e resolvam entre si, desafiando os colegas, incentivando a aprendizagem coletiva.

Fazendo uma reavaliação acerca dos problemas abordados nessa proposta, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ Relacionar conceitos de geometria plana e espacial aos conceitos de otimização por meio da derivação;
- ✓ Permitir e incentivar a criação de outros problemas a partir de uma ideia central por parte dos alunos, incentivando a troca de conhecimentos entre eles, a colaboração e o aprendizado em grupo;
- ✓ Utilização das técnicas de cálculo como ferramenta na resolução de problemas.

Na seção seguinte veremos problemas envolvendo a Geometria Espacial. Cabe destacar que a proposta dessa seção também foi usada neste sentido, utilizando-se a medida dada para construir as arestas de um, dois ou três cubos, e analisar as consequências disso na área total e no volume total obtidos. Espera-se que essa sugestão parta também dos próprios alunos, quando motivados a explorar a ideia central do problema livremente.

3.2 – Sólidos inscritos e circunscritos

Na presente seção apresentaremos uma aplicação de otimização para a geometria espacial. O leitor que faça uso desse material deve entender que a escolha desta seção se justifica pela necessidade de trabalhar a interdisciplinaridade dentro dos diversos ramos da Matemática. É comum que em algumas escolas nos cursos de Ensino Médio se trabalhe de maneira separada a Álgebra e a Geometria, por isso é necessário que ao ingressar no ensino superior as disciplinas do currículo não reforcem essa separação, para que não aumentem essa distância entre as duas áreas.

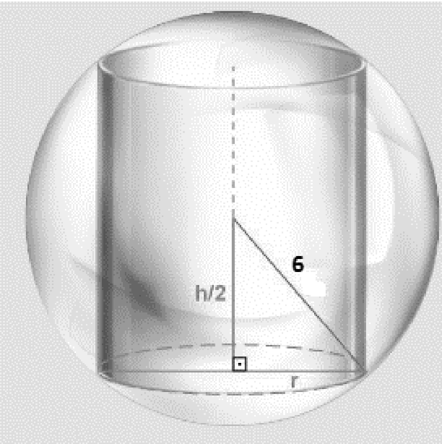
Assim como na seção anterior, prioriza-se que a solução não seja exposta de maneira inicial, mas construída por parte dos alunos após sua discussão. Da mesma forma, espera-se também que o professor perceba as possibilidades de variação que o problema apresenta, levando-se em consideração que diversas figuras espaciais podem ser escolhidas. O problema a seguir encontra-se proposto por Pombo (2009).

3.2.1 Uma aplicação na Geometria Espacial

“Determine as dimensões do cilindro de maior volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio igual a 6 centímetros” (POMBO JR., 2009, p.86).

O volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, onde r = raio da base e h = altura. Considerando o cilindro inscrito em uma esfera, temos a seguinte situação:

Figura 22: Sólidos inscritos



Fonte: o autor, 2021.

De onde têm-se: $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = 36$, logo, $r^2 = 36 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$, para $r > 0\ e\ h > 0$ é necessário que $0 < h < 12$, definindo assim o intervalo de domínio dessa função. Substituindo na expressão, temos o seguinte volume a ser maximizado:

$$V(h) = \pi.\left(36 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right).h = \pi.\left(36h - \frac{h^3}{4}\right), \text{ onde } Dom\ V = (0, 12). \quad (66)$$

Porém, nesta resolução consideraremos a função $V(h) = \pi.\left(36h - \frac{h^3}{4}\right)$ com domínio [0, 12], a fim de que se aplique o Teorema 2. Observe que esta alteração não trás prejuízo ao valor de máximo que buscamos, pois veremos a seguir que os valores da função nestes extremos do intervalo não são o valor de máximo procurado. Por conta disso, em ambos os intervalos, o valor de máximo procurado será o mesmo.

Substituindo os extremos do intervalo domínio [0, 12] na função, temos que: $V(0) = 0 = V(12)$.

Observe também que, calculando o valor da função para algum ponto no intervalo (0, $12)$, por exemplo, para $x = 6$ temos que: $V(6) = 162\pi > 0$.

Como $V(6) = 162\pi > V(0) = V(12) = 0$, temos que nos extremos do intervalo [0,12], não poderia ocorrer o máximo da função.

Derivando essa expressão para encontrarmos os pontos críticos obtemos:

$$V'(h) = \pi.\left(36 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ ou } h = -4\sqrt{3} \quad (67)$$

Sendo assim, $h = 4\sqrt{3}$ é o único ponto crítico da função em $[0,12]$.

Como V é contínua em [0,12], basta analisar o valor da função Vno ponto crítico e seus extremos de [0,12], de acordo com a Proposição 1. Substituindo temos:

$$V(0) = 0, V(12) = 0, V\left(4\sqrt{3}\right) = 96\pi\sqrt{3}\ cm \quad (68)$$

Logo, no ponto crítico que encontramos ocorre um máximo global da função.

Para esse valor da altura temos pelo triângulo retângulo que r = $2\sqrt{6}\ cm$.

Portanto, os valores procurados são r = $2\sqrt{6}\ cm$ e $h = 4\sqrt{3} cm$ são as dimensões do cilindro procurado.

Fazendo uma reavaliação acerca dos problemas abordados nessa proposta, verificamos que por meio dele foi possível:

- ✓ Relacionar conceitos de geometria espacial e do cálculo aos conceitos de otimização, trabalhando de forma a aproximar as áreas de conhecimento;

- ✓ Perceber que ao propor variações do problema os próprios alunos poderiam criar novos enunciados, escolher as figuras a serem trabalhadas e debater entre si as conclusões obtidas, visando uma aula diferenciada por meio da participação ativa dos alunos.

3.3 **Aplicações em suas respectivas áreas**

A seção que se inicia será a última desse trabalho. Por conta disto, tem-se como objetivo neste momento mostrar que, ao trabalhar com problemas motivadores o professor em dado momento poderá se deparar com os interesses particulares de cada turma trabalhada, e por ocasião, explorá-los.

Obviamente, em turmas mistas de Cálculo por exemplo, há alunos dos mais diversos cursos e não faz sentido pensar que o professor deva buscar aplicações relevantes em cada uma de suas áreas, de modo que cada um estude apenas por meio dos interesses de seu curso, tão pouco seria interessante propor que o professor buscasse dados reais em cada área para obter modelagens realistas a fim de trabalhar os conceitos de cada área junto aos alunos.

O objetivo então seria propor e debater em sala de aula alguns problemas aplicados, de forma a motivar os alunos para que estes busquem também aplicações em suas próprias áreas de interesse, e tragam, para futuros debates em aulas subsequentes. Desta forma, o aluno pode sentir-se motivado em encontrar uma associação dos problemas com seu futuro profissional, enquanto percebe-se também participante e peça fundamental nas aulas, quando motivado a trazer novos problemas. Dessa forma, destaco as estratégias possíveis para utilização dos problemas dessa seção:

1º passo: Pesquisar em sala quais as áreas de interesse da turma e traçar um panorama das aplicações que seriam de interesse comum, e das mais específicas;

2º passo: Propor que os alunos tentem resolver alguns dos problemas aplicados apresentados a seguir, encontrando a solução ótima e justificando corretamente;

3º passo: Propor discussão entre os alunos acerca do aspecto motivacional da resolução de problemas dentro de áreas aplicadas, de modo que diversos grupos de aluno de áreas diferentes possam interagir e adquirir também conhecimentos interdisciplinares durante esse processo;

4º passo: Propor aos alunos pesquisas dentro de suas áreas de interesse, de modo que estes contribuam com as próximas aulas através da exposição e discussão de novos problemas.

Detalhados os objetivos da seção, vejamos a seguir alguns problemas que possuem ligação com outras disciplinas e áreas de conhecimento:

3.3.1 Aplicação na Biologia: Taxa aeróbica

"A taxa aeróbica de uma pessoa com x anos de idade é dada por: $A(x) = \frac{110\,(ln(x)-2)}{x}$, sendo x ≥ 11. Em que idade a pessoa tem capacidade aeróbica máxima?" (VILCHES, 2012, p.284)

Temos que o domínio da função está definido para $x\ \in [11, +\infty)$. Este domínio será utilizado apenas para estudo da solução do problema, mas entende-se que como se trata de um problema onde x é uma idade, sabemos que ele não assumirá valores tão grandes quanto o domínio supõe.

Derivando a função a ser maximizada temos:

$$A'(x) = \frac{110(-\,ln(x)+3)}{x^2} \tag{69}$$

É possível ver que a função só possui um ponto crítico, visto que ela se anula apenas quando $-\ln(x) + 3 = 0$,

Logo, $\ln(x) = 3; x = e^3 \cong 20{,}08$ anos é o único ponto crítico.

Calculando também a segunda derivada da função, temos $A''(x) = -\frac{110(-2\ln(x)+7)}{x^3}$.

Veja que $A''(e^3) = -\frac{110(-2\ln(e^3)+7)}{(e^3)^3} = \frac{-110}{e^9} < 0.$

Como $A(x)\ e\ A''(x)$ são funções continuas, $A''(e^3) < 0$, e o ponto crítico é único, pelo Teorema 3, temos que o máximo procurado ocorre quando $x =\ e^3$.

Temos que $A(e^3) = \frac{110}{e^3} \cong 5{,}48$ é o valor máximo da função A em $[11, +\infty)$.

Logo, com aproximadamente 20 anos uma pessoa atinge sua capacidade aeróbica máxima.

3.3.2 Aplicação na Engenharia Ambiental: Vasão de água

"A vazão de água de uma represa é modelada por: $f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1}$; Se 0 ≤ t ≤ 12 e onde t é o tempo em meses. Determine quando a vazão é máxima". (VILCHES, 2012, p.284)

Reescrevendo a função como $f(t) = 10.[(t-6)^2+1]^{-1}$ e derivando para buscar pontos críticos temos:

$$f'(t) = -\frac{20(t-6)}{(t^2-12t+37)^2} \tag{70}$$

Temos que $f'(t)$ se anula apenas quando t = 6, portanto, este é um ponto crítico. Analisando o valor da função nos pontos, temos:

$$f(0) = \frac{10}{(0-6)^2+1} = \frac{10}{37} \tag{71}$$

$$f(12) = \frac{10}{(12-6)^2+1} = \frac{10}{37} \tag{72}$$

$$f(6) = \frac{10}{(6-6)^2+1} = \frac{10}{1} = 10 > \frac{10}{37} \tag{73}$$

Observe que nesse caso facilmente se calcula f(0) = f(12) que são os extremos do intervalo. Pela Proposição 1, comparando-se esse valor com f(6), temos que t = 6 é o ponto de máximo absoluto em [0,12] que procuramos, pois f é contínua em [0,12] .

Portanto, a vasão será máxima em 6 meses.

3.3.3 Aplicação na Biologia: Sensibilidade a medicamentos

Vejamos a seguir mais um problema a ser prosposto e sua resolução, bem como suas contribuições:

> A reação do organismo à administração de um medicamento é frequentemente modelada por uma função da forma: $R(D) = D^2(\frac{C}{2} - \frac{D}{3})$, em que D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de $R(D)$ com D é chamada de sensibilidade. a) Determine o valor de D para o qual a sensibilidade é máxima. Qual é a máxima sensibilidade? (Expresse a resposta em termos de C). b) Qual é a reação (em termos de C) quando a dose que produz a máxima sensibilidade é usada? (HOFFMANN, 2015, p.209).

Pelas condições dadas do problema, temos que a sensibilidade é expressa por:

$$S(D) = R'(D) = DC - D^2 \tag{74}$$

Analisemos o domínio da função contínua S: C é constante e $D > 0$. Como C é a dose máxima a ser administrada, temos que $(C - D) \geq 0$, $D \leq C$, de onde tem-se que o domínio é $D \in (0, D]$.

Logo, pode-se escrever que $S(D) = DC - D^2 = D(C - D) \geq 0$

Buscando os pontos críticos de $S(D)$, temos que $S'(D) = C - 2D = 0$ somente quando $D = \frac{C}{2}$.

Observe que S e $S"$ são funções contínuas em $(0, D]$, e têm-se que que $S"(\frac{C}{2}) = -2 < 0$, logo, como este é o único ponto crítico da função, pelo Teorema 3 temos que $\frac{C}{2}$ é o ponto onde ocorre o máximo que procuramos. Sendo assim, a máxima sensibilidade é dada por $S\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{4}$.

É possível ver que, quando a dose que produz a máxima é administrada, temos que $R\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^3}{12}$, enquanto $R(C) = \frac{c^3}{6}$, logo, percebe-se que ao administrar a dose que produz máxima sensibilidade, temos que a reação ao organismo se reduz à metade da reação produzida pela dose máxima.

Observação: Com base na resolução deste problema e em sua área de aplicação, deixamos ao leitor mais um problema proposto a ser aplicado em sala de aula, caso a área dada desperte interesse e curiosidade aos alunos. Nesse caso, após a discussão da solução do problema anterior, espera-se que os alunos consigam também resolver sozinhos o problema proposto a seguir.

Problema proposto 1:

> De acordo com a lei de Poiseuille, a velocidade do sangue a r centímetros de distância do eixo central de uma artéria de raio R é $v(r) = c(R^2 - r^2)$, em que c é uma constante positiva. A que distância do eixo central da artéria a velocidade do sangue é máxima? (HOFFMANN, 2015, p.209)

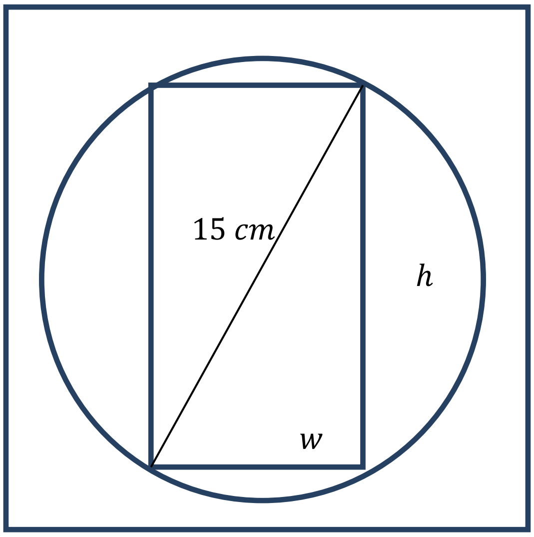
A solução para o problema proposto encontra-se no Apêndice B, caso o leitor deseje consultar. Vejamos mais uma área de aplicação a seguir.

3.3.4 Aplicação na Engenharia Civil: Construção de vigas

O problema a seguir encontra-se apenas proposto na referência de Hoffmann (2015). Segue seu enunciado, e a Figura 24 que o descreve.

"A resistência mecânica de uma viga retangular é proporcional ao produto da largura w pelo quadrado da profundidade h. Determine as dimensões da viga mais resistente que pode ser fabricada usando uma tora de madeira de 15 centímetros de diâmetro". (HOFFMANN, 2015, p.223)

Figura 23: Esboço da viga



Fonte: Hoffmann, 2015, p.223.

Seja k a constante de proporcionalidade, com $k > 0$. Temos também, $h > 0, w > 0$ que:

$$R(w, h) = kwh^2, \text{ onde } w^2 + h^2 = 225 \tag{75}$$

Logo, temos que a resistência mecânica é:

$$R(w) = kw(225 - w^2) \tag{76}$$

De modo que o domínio é dado por, $225 - w^2 > 0,\ -15 < w \leq 15$. Como $w > 0$, tem-se o intervalo $(0{,}15)$.

Analisando os pontos críticos dessa função, temos:

$$R'(w) = 225k - 3kw^2 \tag{77}$$

Observe que, $R'(w) = 0 \Leftrightarrow w = 5\sqrt{3}$ ou $w = -5\sqrt{3}$. Como $w > 0$, temos que o único ponto crítico da função em (0,15) é $w = 5\sqrt{3}$.

Observe também que $R\ e\ R''$ são contínuas, e $R''\left(5\sqrt{3}\right) = -30\sqrt{3}k < 0$, logo, pelo Teorema 3 visto anteriormente, o ponto crítico encontrado é o ponto de máximo que procuramos.

Assim, as dimensões procuradas são $w = 5\sqrt{3}\ cm$, e por consequência, $h = 5\sqrt{6}\ cm$.

Observação: Com base na resolução deste problema e em sua área de aplicação, novamente deixamos ao leitor mais um problema complementar a este, a ser aplicado em sala de aula. Nesse caso, após a discussão da solução do problema anterior, espera-se que os alunos consigam também resolver sozinhos o problema proposto a seguir. Para a resolução deste, se aplica a mesma figura dada no problema anterior.

Problema proposto 2:

“A rigidez de uma viga retangular é proporcional ao produto da largura w pelo cubo da profundidade h. Determine as dimensões da viga mais rígida que pode ser fabricada usando uma tora de madeira de 15 centímetros de diâmetro”. (HOFFMANN, 2015, p.223)

A solução para o problema proposto também encontra-se no Apêndice B, caso o leitor deseje consultar.

Deixamos ao final da resolução desta seção os questionamentos que podem surgir. Após a resolução por parte da turma dos problemas dessa seção, espera-se que o professor possibilite alguns debates e questionamentos como os que seguem:

- ✓ Em quais áreas de seu interesse esse tipo de função poderia ser aplicado? Existe algum fenômeno específico de sua área de conhecimento que possa ter um comportamento assim descrito?
- ✓ Quais problemas em sua futura profissão de atuação são resolvidos pela busca por soluções ótimas?

Trazer esse tipo de questionamento seria interessante principalmente em turmas mistas de Cálculo, onde cada aluno pudesse trazer funções de sua área de estudo para o aprofundamento e aprendizagem de maneira coletiva da turma. Com base na curiosidade e sugestão por parte dos próprios alunos os próximos assuntos a serem trabalhados podem ir surgindo, trazendo ao aluno a possibilidade de reconhecer-se como peça fundamental e participante no processo.

Nesse sentido, pensando na contribuição desse trabalho para o ensino superior poderiam ser destacados os seguintes pontos:

- Seleção de atividades adaptáveis a partir das ideias e interações dos alunos, de forma que os exemplos explorados no capítulo foram selecionados para que o professor já tivesse essa ferramenta em mãos;
- Roteiro de dinâmica de aula caso o professor queira aplicar em sala, de forma que trabalhe com ênfase na aprendizagem coletiva, colaborativa e na autonomia do aluno.
- Possibilidades futuras de aplicação, tendo em vista que o professor universitário poderia propor como pesquisa aos alunos e também ele mesmo pesquisar outros problemas além dos apresentados no material, proporcionando assim uma constante atualização e dinamismo nos problemas resolvidos em suas aulas.

CONCLUSÃO

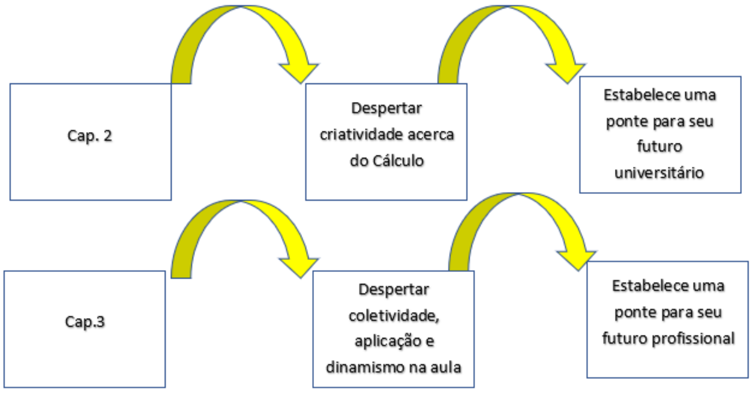
Este material visa incentivar metodologias de aulas dinâmicas, afim de oferecer possibilidades múltiplas ao leitor que queira aplicar alguma destas propostas em suas aulas. Acreditamos que, quando o professor deixa de apresentar-se como aquele que resolve e propõe todos os problemas, grandes descobertas podem ser feitas. A partir das atividades sugeridas, espera-se que os alunos sintam-se motivados e criem outras, resolvam entre si, desafiando os colegas, incentivando a aprendizagem coletiva, a aprendizagem de maneira múltipla, a autonomia e liberdade de participação nas aulas.

Destacamos que o Cálculo se faz presente em uma variedade de currículos dos cursos de graduação, bem como a otimização é importante e presente nas mais diversas áreas de conhecimento. Ainda dentro dos objetivos traçados para o Capítulo 1, destacamos a necessidade de que alguns conteúdos sejam realmente trabalhados, de acordo com os documentos norteadores que destacamos, como a BNCC por exemplo.

Apresentamos algumas propostas de atividades para resolução de problemas que possibilitassem iniciar as ideias do Cálculo, apresentar os primeiros conceitos, estimular a curiosidade quanto ao assunto, apresentar técnicas de resolução possíveis de serem aplicadas como a programação Linear, a resolução gráfica e a desigualdade entre as médias. Nesse sentido, buscou-se oferecer ao professor leitor que deseje aplicar em sua sala de aula de Ensino Médio ferramentas que permitam aprofundar conhecimentos e oferecer aos alunos problemas que introduzam o conceito de otimização. Foi interessante notar como alguns problemas que costumam ser resolvidos através do cálculo puderam ser resolvidos sem o uso deste, porém destacando que é possível estimular a curiosidade dos alunos para o assunto.

Apresentamos também propostas de atividades aos alunos do ensino superior, para a aplicação das técnicas de Cálculo aprendidas previamente para a resolução, compreensão, e elaboração de novos problemas por parte dos alunos, trazendo como possibilidade uma aula mais dinâmica e coletiva, incentivando a participação e independência do aluno, trazendo sugestões de problemas acerta dos interesses do futuro profissional dos alunos, como se vê no esquema a seguir.

Figura 24: Considerações finais – estabelecendo pontes



Fonte: o autor, 2021.

Não seria possível exibir em um único trabalho aplicações relevantes e motivadoras a cada área, mas, através dos problemas apresentados incentivar ao professor da disciplina que possa trabalhar problemas diversos com seus alunos, tanto na educação básica quanto no ensino superior, de modo que a resolução e discussão destes problemas tornem seus alunos dotados de autonomia e liberdade para participar das aulas. A própria busca por problemas de otimização em suas áreas de interesse pode ser motivacional para os próprios alunos, se feitas por eles, assim, dessa maneira, é que essa metodologia se apresenta como uma ponte para os seus conhecimentos futuros.

Concluímos que, através do presente trabalho, foi possível enfatizar a importância do Cálculo e utilizá-lo como ferramenta, pensando sempre na discussão e resolução de problemas de otimização, partindo da perspectiva de que a busca pela solução ótima pode ser compreendida tanto pelo aluno de Ensino Médio, quanto do Ensino Superior. Acreditamos que as estratégias que surgem ao longo da busca por soluções pode ser motivacional, não só para o problema presente, mas para o aprendizado dos conteúdos vistos durante o curso, de maneira geral. Ao longo desse trabalho, encorajou-se que o uso do material se faça de maneira diferente da tradicional apresentação e resolução automática do exercício, mas por meio de discussões, de sugestões dos alunos, adaptações dos problemas, criação de novos problemas, de modo que o ponto central seja a participação do aluno, sua importância dentro das resoluções, e sua interação trabalhando de maneira coletiva.

REFERÊNCIAS

ALVES, R. *A arte de Produzir Fome*. Folha Online, out, 2002.

ÁVILA, G. *O ensino de Cálculo no 2º grau*. Revista do Professor de Matemática, nº 18, São Paulo, 1991. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm. Acesso em: 30 mar.2021

BARBOSA, G. O. *Raciocínio lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral*: o caso da Universidade Federal do Ceará. 1994. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1994.

BARBOSA, M. Â. *O insucesso no Ensino e Aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. 102 f. Dissertação (Mestrado em Educação), PUC – PR, Curitiba, 2004.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.

BARRETO, S. J. P. da S. *Problemas de Otimização*: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio. 83f. Dissertação. Mestrado em Ensino de Matemática - UFRP Recife – 2017

BARSOV, A.; OKHLOPKOVA, A. *Programação Linear*. Moscou, URSS: MIR, 1984.

BARUFI, M. C. B. *A construção-negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. 195 f. Tese (Doutorado em Educação). USP – SP, São Paulo, 1999.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Documento homologado pela Portaria n° 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, Seção 1, Pág. 146.

BEZERRA, Nilra Jane Filgueira *O GPS como instrumento didático auxiliar no processo de significação conceitual no ensino da Geometria Analítica*. / Nilra Jane Filgueira Bezerra. - Canoas, 2006.101 f., il. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2006.
Disponível em: http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/56/52
Acesso em: 03 jun.2021

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática da Teoria a Prática*. 17ª ed. 2009. Educacional Brasileira S.A, São Paulo: Papirus. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=NkGnY25OShcC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false> Acesso em: 12 fev.2021

D'AMBRÓSIO, U. *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino*. Universidade Estadual de Campinas Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr, 2005

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Ensino Médio vol. 3. Editora Ática, 2006.

FULINI, M. A. *História do Cálculo Diferencial e Integral*. 56f. Monografia (Licenciatura em Matemática), UFSJ, 2016.

GODOY, L. F. S. de; FARIA, W. C. F. *O cálculo diferencial e integral e suas aplicações no ensino de engenharia*: uma análise de currículo. In: Congresso de Iniciação Científica do INATEL (INCITEL), 2012, Santa Rita do Sapucaí. Anais... Santa Rita do Sapucaí (MG): Instituto Nacional de Telecomunicações (INATEL), 2012.

HOFFMANN, Laurence D., 1943 – Cálculo – Um curso e suas aplicações/ Laurence D. Hoffmann et al.; tradução Ronaldo Sérgio de Biasi, 2015.

IEZZI, G. e outros. *Matemática: ciência e aplicações – Volume 3*. Editora Saraiva, 2013.

INEP. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206>.Acesso em: 10 fev.2021

KLINE, M. *O fracasso da Matemática Moderna*, Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho, São Paulo, Ibrasa, 1976.

KOROVKIN, P. P. *Desigualdades*. Tradução para o Inglês, Editorial Mir, Moskow,1976.

LIMA, Wellington Vieira de. *O Estudo De Máximos E Mínimos Da Função Quadrática* - Especialização em Educação Matemática, 2012, AJES

LYRA, Marcelo Simplício de. *Uma proposta do ensino de programação linear no ensino médio* 70 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.

MUNDIM, K. C.; DELAVY, V. C. *Otimização global de processos usando o método generalized simulated annealing*. Revista Processos Químicos / SENAI, v. 2, n. 4, 2008.

PACHECO, Robson Santana. *Geometria analítica*. – Natal (RN): editora do IFRN, 2009.

PERELMAN, Y.I. *Álgebra recreativa. (1975)* Tradução de Hudson C. Lacerda em 1989. Editora Mir

POLYA, G. *A arte de resolver Problemas*. Trad. De Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 1995.

POMBO JR, Dinamérico Pereira *Cálculo I. v.2* / Dinamérico Pereira Pombo Jr. 2. ed. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009.

REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo*: Dificuldades de Natureza Epistemológica. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) USP 2003

ROCHA, A. M. Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – UFG - Goiânia – 2013

RODRIGUES, M. U. *Análise Das Questões De Matemática Do Novo Enem (2009 Á 2012): Reflexões Para Professores De Matemática*. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178-034X. 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1029_804_ID.pdf> Acesso em: 01 jul. 2021

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. F. Tópicos De História Da Matemática. SBM, 1ª ed., 2012.

SILVA, Wellington da. *O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio*/ 91 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas

SKOVSMOSE, *O. Cenários para investigação*. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

SODRÉ, Ulysses. Curso de Cálculo – Exercícios – UEL – 2020. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/calculo/mm07.html Acesso: 10 fev.2021

STEWART, J. Cálculo. volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

VILCHES, M. A.; CORRÊA, M. L. Cálculo: Volume 1. Departamento de Análise, IME, UERJ, ??. Disponível em < https://www.ime.uerj.br/livros-apostilas-e-tutoriais-2/?cp_livro=3>. Acesso em: 06 set. 2020.

APÊNDICE A – Demonstração Da Desigualdade Entre As Médias

A demonstração apresentada neste Apêndice encontra-se feita de maneira semelhante pelo prof. Fabio Henrique Teixeira de Souza para o Programa de Iniciação Científica da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), e encontra-se disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=70>. Em geral os alunos que participam desse programa demonstram bastante curiosidade em aprender e utilizar novos conteúdos. Sendo assim, ao utilizar o presente material, havendo curiosidade por parte dos alunos, é possível que o professor apresente tal demonstração mesmo em turmas de Ensino Médio de nível mais avançado.

Também encontram-se essa e outras desigualdades demonstradas de maneira mais detalhada em KOROVKIN (1976), caso o leitor deseje conhecer outras desigualdades interessantes.

Seja n um número natural. Como visto anteriormente, denominamos Média Aritmética dos números reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o número real assim definido:

$$MA = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{78}$$

Denominamos Média Geométrica dos números reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o número real assim definido:

$$MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{79}$$

Queremos demonstrar por meio da indução a desigualdade das médias, a qual afirma que a média aritmética de n elementos é maior ou igual a média geométrica desses valores, ou seja, $MA \geq MG$, isto é:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \tag{80}$$

Para tal, faremos uso do Lema a seguir.

Lema: Seja m um número natural. Suponha que $MA\, e\, MG$ sejam as médias em questão de números reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ordenada, tal que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Se $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ então, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$

Demonstração: Veja que o caso $n = 1$ é trivial. Usemos então como base da hipótese de indução o caso $n = 2$.

Já provamos anteriormente que $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 . x_2}$, nesse caso,

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{1} \tag{81}$$

De onde: $x_1 + x_2 \geq 2$, como queríamos.

Hipótese de indução: $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k$ são números reais não negativos e $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k = 1$ então $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$.

Tese: $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k \cdot x_{k+1}$ são números reais não negativos e $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{k+1} = 1$

Observe que, se todos os termos de $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ fossem maiores do que 1 teríamos o produto maior que 1. Da mesma forma, se todos os termos fossem menores que 1 teríamos o produto menor que 1. Logo, nesse sequência existe pelo menos um termo maior que 1, e um termo menor que 1. Temos então que: $x_k \geq 1$ e $x_{k+1} \leq 1$.

Escrevendo-se o produto: $(x_k - 1)(1 - x_{k+1})$ temos que cada parênteses será não negativo, e por consequência seu produto também será não negativo.

Desenvolvendo o produto temos: $x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} - 1 \geq 0$, logo, $x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \geq 1$. Esse resultado será usado posteriormente.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{k+1} = 1 \tag{82}$$

Como $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot (x_k \cdot x_{k+1}) = 1$ (83)

Por hipótese de indução temos:

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + (x_k . x_{k+1}) \geq k$

(84)

Então:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} \geq k - (x_k . x_{k+1}) \tag{85}$$

Acrescentando em ambos os membros , $x_k + x_{k+1}$ temos:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k . x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} \tag{86}$$

Veja que o primeiro membro já é o que precisamos para o passo da indução.

Porém, vimos anteriormente que $x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} \geq 1$. Acresentando k em ambos os membros temos:

$$x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} + k \geq k + 1 \tag{87}$$

Logo,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - (x_k . x_{k+1}) + x_k + x_{k+1} \geq k + 1 \tag{88}$$

O que prova a validade do lema. ■

Retomemos a demonstração da desigualdade entre as médias.

Como $MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, temos que: $MG^n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$.

Também é válido que:

$$\frac{x_1}{MG} \cdot \frac{x_2}{MG} \cdot ... \cdot \frac{x_n}{MG} = 1 \qquad (89)$$

Da forma escrita, temos n números reais positivos, tais que seu produto é igual a 1. Logo, pelo lema visto anteriormente, é válido que:

$$\frac{x_1}{MG} + \frac{x_2}{MG} + \cdots + \frac{x_n}{MG} \geq n \qquad (90)$$

Porém:

$$\frac{x_1}{MG} + \frac{x_2}{MG} + \cdots + \frac{x_n}{MG} \geq n \Longrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq MG \qquad (91)$$

Portanto, $MA \geq MG$, como queríamos provar. ■

APÊNDICE B – Solução Dos Problemas Apenas Propostos Na Seção 3.3

Segue o problema proposto de nº 1, e em seguida sua resolução:

> "De acordo com a lei de Poiseuille, a velocidade do sangue a r centímetros de distância do eixo central de uma artéria de raio R é $v(r) = c(R^2 - r^2)$, em que c é uma constante positiva. A que distância do eixo central da artéria a velocidade do sangue é máxima?" (HOFFMANN, 2015, p.209)

Do enunciado, temos que:

$$v(r) = c(R^2 - r^2), c > 0 \quad (94)$$

Procurando o domínio dessa função, temos que $(R^2 - r^2) \geq 0,\ r^2 \leq R^2,$ de onde se tem $-R \leq r \leq R$, mas, como $r \geq 0$, temos que o domínio da função contínua v é dado por $r \in [0, R]$.

Investigando os pontos críticos da função, temos que $v'(r) = -2cr = 0 \Leftrightarrow r = 0$, que é o único ponto crítico.

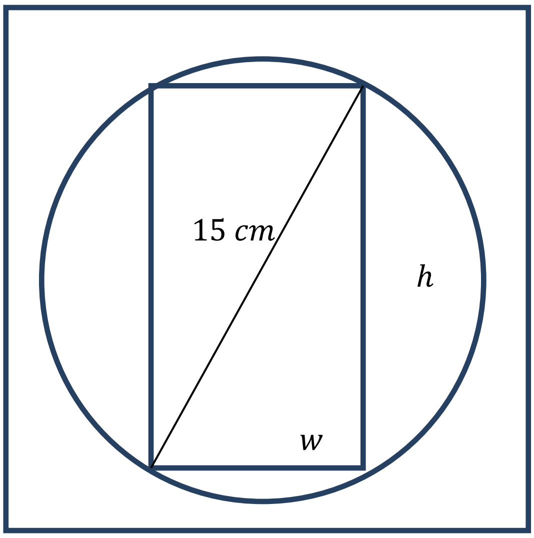
Como v e $v"$ são contínuas, e também que $v"(0) = -2c < 0$, logo, pelo Teorema 3, visto anteriormente, a função assume valor máximo em $r = 0$.

Logo, quando a distância do eixo central é zero, temos que a velocidade do sangue é máxima.

Segue o Problema proposto 2 e sua resolução:

"A rigidez de uma viga retangular é proporcional ao produto da largura w pelo cubo da profundidade h. Determine as dimensões da viga mais rígida que pode ser fabricada usando uma tora de madeira de 15 centímetros de diâmetro". (HOFFMANN, 2015, p.223)

Utilizaremos a mesma figura (24) apresentada no problema anterior da seção:



Seja k a constante de proporcionalidade, com $k > 0$. Temos também, $h > 0, w > 0$ que:

$$R(w, h) = kwh^3, \text{ onde } w^2 + h^2 = 225. \quad (95)$$

Logo, temos que a Rigidez da viga retangular é:

$$R(w) = kw(225 - w^2)^{\frac{3}{2}} \quad (96)$$

De modo que o domínio é dado por, $225 - w^2 \geq 0,\ -15 < w < 15$. Como $w > 0$, tem-se o intervalo $(0{,}15)$.

Porém, nesta resolução consideraremos a função $R(w) = kw(225 - w^2)^{\frac{3}{2}}$ com domínio [0, 15], a fim de que se aplique o Teorema 2. Observe que esta alteração não trás prejuízo ao valor de máximo que buscamos, pois veremos a seguir que os valores da função nestes extremos do intervalo não são o valor de máximo procurado. Por conta disso, em ambos os intervalos, o valor de máximo procurado será o mesmo.

Substituindo os extremos do intervalo $[0, 15]$ na função, temos que: $R(0) = 0 =$R(15).

Observe também que, calculando o valor da função para algum ponto no intervalo (0, $15)$, por exemplo, para $x = 5$ temos que: $R(5) = 10000k\sqrt{2} > 0$.

Como $R(5) = 10000k\sqrt{2} > 0 = R(0) = R(15)$, temos que nos extremos do intervalo [0,15], não poderia ocorrer o máximo da função.

Analisando os pontos críticos dessa função, temos:

$$R'(w) = (225 - w^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot (225 - w^2)^{\frac{1}{2}} \quad (97)$$

De onde:

$$R'(w) = 0 \iff w = 15, w = -15, w = \frac{15}{2} \text{ ou } w = \frac{-15}{2} \quad (98)$$

Excluindo-se os valores negativos, visto que não pertencem ao domínio da função, temos que os pontos críticos são: $w = 15$ e $w = \frac{15}{2}$.

Analisando os valores da função nos extremos de seu domínio e nos pontos críticos, temos:

$$R(O) = 0 = \text{R}(15), R\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{151875k\sqrt{3}}{16} \quad (99)$$

Logo, comparando-se os valores, temos que $w = \frac{15}{2}$ é onde ocorre o máximo que procuramos, pois R é contínua em $[0{,}15]$. Nesse caso, as dimensões procuradas são: $w = \frac{15}{2}cm$ e $h = \frac{15\sqrt{3}}{2}cm$.