Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

GeoGebra e Materiais Manipuláveis: Recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no ensino médio

Misael Soares Alencar

Teresina
2020

Misael Soares Alencar

GeoGebra e Materiais Manipuláveis: Recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.

Teresina

2020

A368g Alencar, Misael Soares.

GeoGebra e materiais manipuláveis: recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no ensino médio / Misael Soares Alencar. – 2020.

117 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

"Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito."

1. Geometria espacial. 2. Áreas. 3. Recursos mediadores. 4. GeoGebra. 5. Materiais manipuláveis. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha Catalográfica elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB 3ª Região/1188

Misael Soares Alencar, graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pelo Instituto Federal do Piauí - IFPI, com Pós-Graduação *Lato Sensu* em Docência do Ensino Superior e graduando no curso de Mestrado PROFMAT/UESPI. É professor efetivo da rede pública estadual no Estado do Maranhão; além de ser formado em Contabilidade e empresário no ramo da Construção Civil.

Combati o bom combate, acabei a carreira, guardei a fé.

2 Timóteo 4.7

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a duas pessoas que foram importantíssimas nessa conquista.
Primeira delas, minha mãe **Maria do Socorro**, que lutou para eu concluir minha Graduação em Matemática. Além de realizar infinitas orações nessa árdua jornada de viagens e provas do mestrado.
Segunda delas, minha irmã **Martha**, que por diversas me auxiliou e ajudou. Que Deus a abençoe e toda a sua família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, ao Criador, ao Eterno, ao Reis dos Reis e Senhor dos Senhores: **DEUS**. A Ele, toda Honra e toda Glória.

Aos meus pais (Soares e Socorro) e toda a minha família (Itiel, Martha, Israel, Eulene, Eunice, Ana Isli, Beatriz Isli e Ariela Isli). Aos diretores Pablo do CEMSM e Juçara do CELAM que flexibilizaram os horários nesse período.

Aos momentos/resultados que serão inesquecíveis: kms rodados, horas dentro ônibus, R$ investidos. Além disso, tem-se: carteira furtada; ônibus quebrado vários vezes; noites dormindo na rodoviária de Floriano; ônibus parado e todos sendo revistado pois havia passageiro armado; 9hrs em uma rodoviária esperando ônibus sem tem um centavo no bolso; acordado por passageiros quando sofria de hipoglicemia; se esquentando nos pneus do ônibus devido ao frio terrível; medo de morrer pegando veículos particulares (110 a 135 km/h).

Ao Neném de Floriano pelo transporte do veículo particular. Ao Sérgio Dantas, professor que ministra o software GeoGebra, que me convidou e me deu oportunidade para ser professor moderador. Aos que me cederam moradia (Tatila e Ismael). Aos homens de Deus que intercederam: Pastor Dorgi, Bispo Gleydson e o Apóstolo Ronan Campos.

À todos os amigos da turma e professores do PROFMAT/UESPI. Estes, por cada ensinamento tanto matemático quanto pessoal, especialmente, ao Professor Afonso, que possui uma tranquilidade inigualável ao ministrar aula. Eu tento, ao máximo, seguir esse método de ensino aos meus alunos.

Ao Meu orientador Arnaldo Brito, que me direcionou com seus conhecimentos e sempre esteve disponível para me orientar. Desde de quando entrei na Instituição, percebi o carinho e a preocupação com minha pessoa. Verdadeiramente, um amigo/pai/irmão. Que Deus o abençoe.

Ao que tornou isso tudo possível: **Jesus Cristo**

No mais, deixo a minha mensagem que levo sempre ao final de cada ciclo profissional: "***Jesus Cristo é o caminho para o meu sucesso***".

RESUMO

A dificuldade na aprendizagem da matemática está relacionada a não assimilação adequada do que é ensinado. A geometria espacial, principalmente, não se restringe às fórmulas, regras ou operações, mas pode ser melhor compreendida com recursos mediadores. Diante disso, o ensino de áreas de sólidos geométricos pode ser facilitado com o auxílio da tecnologia em sala de aula, que proporcionam representações gráficas claras e maior interatividade. Ademais, outro recurso que também auxilia no ensino desse conteúdo são os materiais manipuláveis que concretizam as figuras estudadas e melhoram a compreensão dos conceitos matemáticos. Nesse meandro, este trabalho tem como base as seguintes referências: Oliveira (2011), Eves (1992; 2011), Muniz Neto (2013), Leonardo (2016), Moraes (2014) e Pinheiro (2017). Este estudo investigou como esses recursos podem mediar à organização do ensino de áreas de sólidos geométricos no Ensino Médio. Para tanto, foi desenvolvido uma pesquisa de campo aplicada em turmas do 3º Ano do Ensino Médio da Rede Pública da cidade de Carolina-MA, numa amostra de 21 alunos na qual foram avaliados seus aprendizados após o ensino de áreas dos sólidos geométricos, com e sem os recursos mediadores. Assim, a análise de dados mostrou a importância da visualização tridimensional e a manipulação do objeto concreto e virtual dos sólidos geométricos para o processo de ensino e aprendizagem, em que o professor agiu como facilitador na construção do conhecimento, os recursos atuaram como mediadores e os alunos como agente ativo nesse processo. Em suma, esses recursos cumpriram seu objetivo de engajar os alunos na compreensão dos conteúdos matemáticos e tornaram as aulas mais atrativas, motivadoras e desafiadoras, desmitificando a conotação negativa que se atribuíam à Matemática.

Palavras - chave: Geometria espacial; Áreas; Recursos mediadores; GeoGebra; Materiais manipuláveis.

ABSTRACT

The difficulty in learning mathematics is related to not properly assimilation what is taught. Spatial geometry, mainly, is not restricted to formulas, rules or operations, but it can be better understood with mediating resources. Therefore, the teaching of geometric solids can be facilitated with the help of technology in the classroom, which provide clear graphic representations and greater interactivity. Besides, another resource that also helps in the teaching of this content is the manipulated materials that concretize the studied figures and improve the understanding of mathematical concepts. This subject is based on the following references: Oliveira (2011), Eves (1992; 2011), Muniz Neto (2013), Leonardo (2016), Moraes (2014) and Pinheiro (2017). This study, investigated how these resources can mediate the organization of teaching of geometric solids in high school. To this end, a field research was developed in classes of the 3rd grade of public high school in the city of Carolina-MA, in a sample of 21 students in which their learning was evaluated after teaching of geometric solids, with and without the mediating resources. Thus, the data analysis showed the importance of three-dimensional visualization and the manipulation of the concrete and virtual object of the geometric solids for the teaching and learning process, in which the teacher acted as a facilitator in the construction of knowledge, the resources as mediators and the students as an active agent in this process. In short, these resources got their objective of engaging students in understanding mathematical content and became the classes more attractive, motivating and challenging, demystifying the negative connotation that was attributed to Mathematic.

Keywords:Spatial geometry; Areas; Mediating resources; GeoGebra; Manipulated materials.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o ensino da Matemática é apresentado de forma tradicional, em que o professor é considerado o detentor do conhecimento que repassa ao aluno, e este, por sua vez, é um mero expectador e não um sujeito partícipe do processo de aprendizagem. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000, p.49), "é preciso mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, de que os alunos são os pacientes, de que os agentes são os professores e de que a escola estabelece simplesmente o cenário do processo de ensino".

A maneira abstrata de se apresentar os conteúdos, restringindo-se em memorização de fórmulas, regras e operações, sem uma concretização das representações gráficas e sem a interação dos conteúdos com sua aplicação nos problemas práticos da vida real, tornam as aulas monótonas e desmotivadoras, provocando o desinteresse dos alunos pelos conteúdos matemáticos, principalmente pela geometria.

Assim, muitos alunos atribuem à matemática o rótulo de disciplina chata, difícil, desestimulante e inútil. Gadotti (2002) corrobora quando afirma que o aluno perde o interesse diante de disciplinas que nada têm a ver com sua vida, com suas preocupações. Decora aquilo que precisa saber para prestar exames e concursos, e depois tudo cai no esquecimento.

Tal situação também é confirmada pelo exame PISA (*Programme for International Student Assessment* ou Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Este exame estuda o ranking de educação mundial, sendo realizado a cada 3 (três) anos, o qual analisa as habilidades de alunos de 15 anos em três aspectos principais: leitura, matemática e ciências.

A cada edição, uma destas três disciplinas principais é escolhida como ponto principal a ser examinado. Na edição de 2015, cujo foco foi a matemática, o Brasil ficou na 66ª posição de um total de 70 países participantes. Porém, no último exame que foi realizado em 2018, cujo destaque era a leitura, o letramento matemático, domínio secundário, teve um resultado preocupante: 68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática (nível 1 ou abaixo de 1) e não possuem nível básico (INEP, 2019, p. 110). Assim, o país caiu da posição 65ª para a 70ª de um total de 79 países participantes, o que mostra a urgência em melhorar a forma de ensinar matemática.

Desta feita, o professor de matemática, com o intuito de motivar seus alunos e estimular a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, tem o desafio de investir em recursos mediadores para a sala de aula a fim de que o aluno desperte a curiosidade, participe das atividades escolares, construa um pensamento lógico-matemático de forma significativa e perceba a importância da matemática do seu dia a dia. Assim, essa disciplina passa a ser aprendida de uma maneira dinâmica, desafiante, motivadora e divertida.

Segundo Polya (2006, p.5),

> Se o professor de matemática preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos com operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios de alcançar este objetivo.

Desse modo, a aprendizagem só será eficaz quando o estudante for um ser ativo na construção do seu conhecimento. Schliemann e Carraher (2001, p. 12) corrobora afirmando que "a atividade que conduz à aprendizagem é a atividade de um sujeito humano construindo seu conhecimento".

A geração contemporânea vive na era digital, em que as tecnologias digitais são os principais meios de interação social. Então, por que não utilizar as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) a favor do ensino da matemática?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PNCEM) destacaram o impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo resultante da "velocidade do surgimento e a renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas"(BRASIL, 2000, p. 41). Tal influência exige, no ensino de Matemática, "um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento"(BRASIL, 2000, p.41). Neste meandro, os softwares de matemática dinâmica, como o Igeom, Calques 3D, Skethip, Winplot e o GeoGebra, surgiram com a finalidade de motivar e facilitar o entendimento dos alunos, proporcionando a visualização das figuras geométricas e cálculos algébricos.

Outros recursos mediadores são os materiais manipuláveis que incentivam os alunos a descobrir como planificar, calcular área de suas faces planificadas e calcular o volume de figuras geométricas espaciais, além de facilitar os conceitos básicos de Geometria Plana, sem necessidade de decorar fórmulas ou regras. Eles tornam o conteúdo palpável, tornando a aula dinâmica e atrativa, prendendo a atenção dos alunos e estimulando a participação nas aulas.

Assim, a utilização do software GeoGebra e de materiais manipuláveis como recursos mediadores no ensino de geometria do ensino médio se justifica e é de suma importância para melhorar o processo ensino e aprendizagem desses alunos. Tais mecanismos pedagógicos ajudam a diminuir a aversão à matemática sentida pela maioria dos alunos, tornando as aulas mais atrativas, motivadoras e significantes, além de modificar a forma abstrata de ensinar matemática por uma grande parcela dos professores, como por exemplo, o ensino dos sólidos geométricos apenas desenhando-os ou imaginando-os.

Este trabalho, tem como objetivo analisar o GeoGebra e os materiais manipuláveis como recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no Ensino Médio. Neste contexto, o presente estudo visa responder a seguinte questão norteadora: **Como o aplicativo GeoGebra e o uso de Materiais Manipuláveis podem mediar a organização do ensino de áreas de sólidos geométricos no Ensino Médio?**

A fundamentação teórica para embasar e responder o questionamento desta pesquisa se pautou em algumas categorias. A metodologia fundamentou-se em Lakatos e Marconi (2001), Gil (2008) e Oliveira (2011). A história da geometria se baseou nos estudos de Pavanello (1989), Eves (1992; 2011) e Miranda (2017). A revisão teórica do estudo de área das figuras planas e dos sólidos geométricos pautou-se nos ensinamentos de Muniz Neto (2013), Leonardo (2016), Iezzi et. al. (2016) e Dante (2016). A abordagem sobre os materiais manipuláveis teve como referências os autores Kallef (2003), Caldeira (2009), Camacho (2012) e Moraes (2014). Por fim, o conteúdo sobre GeoGebra teve como fonte Arruda (2014) e Pinheiro (2017).

O trabalho está estruturado em nove capítulos. No capítulo 1 foi realizada uma breve introdução do conteúdo que foi abordado, ressaltando a importância da utilização de recursos mediadores para melhorar a aprendizagem dos alunos nos conteúdos de matemática, principalmente na geometria. O capítulo 2 abordou sobre a metodologia adotada para realizar a pesquisa e analisar seus dados. No capítulo 3 foi exposto um breve levantamento histórico da Geometria, desde a Antiguidade até os dias atuais, e suas transformações. No capítulo 4 se explanou os conteúdos de áreas das figuras planas. No capítulo 5 expôs as áreas dos sólidos geométricos, os quais foram abordados em sala.

O capítulo 6 apresentou os Materiais Manipuláveis, sua origem, seu conceito, suas vantagens e seu uso nas oficinas. No Capítulo 7 estudou-se programa GeoGebra, sua definição, sua origem, seus principais comandos e sua utilização em sala de aula. No Capítulo 8 foi realizada a análise dos dados obtidos com as oficinas, através de quadros comparativos dos questionários utilizados, e apresentação dos seus resultados. Por último, Capítulo 9, as considerações finais demonstram a influência da utilização dos recursos mediadores na aprendizagem dos alunos nos conteúdos de geometria.

2 METODOLOGIA

O homem, desde muito tempo, iniciou a busca do conhecimento para entender e responder os problemas do dia a dia. Inicialmente as respostas foram dadas de forma mística e religiosa e foram transmitidas através do senso comum. Mas quando o homem passou a questionar suas respostas e buscar explicações mais racionais e realistas de forma metodológica, surgiu o conhecimento científico.

Segundo Gil (2008, p. 8), o método científico é um "conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para atingir o conhecimento". Ele é entendido como o caminho pelo qual se atinge um objetivo. Destarte, a metodologia científica envolve os instrumentos, procedimentos e regras utilizados por determinado método para a realização da pesquisa e, consequentemente, a elaboração do trabalho científico.

A metodologia científica refere-se ao "estudo sistemático e lógico dos métodos empregado nas ciências, seus fundamentos, sua validade e sua relação com as teorias científicas"(OLIVEIRA, 2011, p.7). Portanto, pode-se dizer que o conhecimento é o objetivo (alvo), o método é o caminho a ser precorrido e a metodologia é o modo de caminhar. Esta, por sua vez, pode ser classificada de diferentes pontos de vistas, conforme tabela abaixo.

Tabela 1: Classificação da metodologia científica

Natureza da Pesquisa	**Objetivos da Pesquisa**	**Procedimentos ou técnicas de coleta de dados**		**Técnica de análise de dados**
- Qualitativa	- Descritiva	- Entrevista	- Pesquisa Documental	- Análise de conteúdo
- Quantitativa	- Exploratória	- Questionário	- Pesquisa Bibliográfica	- Estatística
- Quali-quantitativa	- Explicativa	- Observação	- Pesquisa Triangulação	- Triangulação na análise
		- Estudo de caso	- Pesquisa-ação	
		- Amostragem	- Pesquisa Experimental	
		- Estudo censitário	- Pesquisa Participante	
		- Levantamento		
		- Estudo de campo		

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

No tocante a sua natureza ou abordagem do problema a pesquisa pode ser qualitativa, quantitativa ou quali-quantitativa. Ela será quantitativa quando o objetivo é mensurar algo, sendo que seus resultados podem ser quantificados, por meio do tratamento estatístico, e expostos em forma de gráficos e tabelas. Neste tipo de pesquisa, o pesquisador é apenas um observador.

Já a pesquisa será qualitativa quando valoriza o contato direto com a situação estudada, dando ênfase nas características comuns, mas aberta a perceber a individualidade e os significados múltiplos, ou seja, ela analisa e descreve o fenômeno em sua forma complexa.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.2), uma abordagem deste tipo é composta por particularidades:

> (1) a fonte directa dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

A pesquisa também poderá ser quali-quantitativa, quando articula as dimensões quantitativa e qualitativa. Neste sentido, o presente trabalho basear-se-á na pesquisa quali-quantitativa, pois o pesquisador, tendo uma base teórica geral, terá liberdade teórico-metodológica para desenvolver seu trabalho, podendo analisar seus dados indutivamente, como também utilizará o tratamento estatístico em alguns aspectos da pesquisa.

Do ponto de vista dos objetivos da pesquisa, esta pode ser exploratória, descritiva ou explicativa. A pesquisa descritiva é baseada na descrição das características de uma população, fenômeno ou experiência, proporcionando novas visões sobre uma realidade já conhecida. Elas são apropriadas a levantamentos. Por sua vez, a pesquisa explicativa identifica fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência de fenômenos, as quais empregam o procedimento experimental de pesquisa e são mais complexas.

De acordo com Gil (2008, p. 27), a pesquisa exploratória "têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores". Tal pesquisa é caracterizada pela flexibilidade no planejamento da pesquisa, possibilitando a análise de vários aspectos relacionados a determinado fato, e pela amostra pequena e não representativa. Esse tipo de pesquisa é mais usado nas pesquisas bibliográficas e os estudos de caso.

Portanto, o presente trabalho realizou a pesquisa exploratória visando explicitar o problema, envolvendo levantamento bibliográfico e documental, sendo que a análise dos resultados foi obtida com os questionários dos alunos que tiveram contato com os recursos mediadores.

Em relação aos procedimentos técnicos de coletas de dados, a pesquisa pode ser realizada de várias formas, como descreve a Tabela 1. Assim, este trabalho utilizou questionário, pesquisa bibliográfica, pesquisa documental e estudo de campo.

Segundo Cervo e Bervian (2002, p. 48), o questionário "[...] refere-se a um meio de obter respostas às questões por uma fórmula que o próprio informante preenche". Esta técnica de coleta de dados pode conter perguntas abertas e/ou fechadas. As abertas possibilitam respostas mais ricas e variadas e as fechadas maior facilidade na tabulação e análise dos dados.

A pesquisa bibliográfica é uma etapa fundamental em todo trabalho científico e fornece o embasamento do trabalho, a qual consiste no levantamento, seleção, fichamento e arquivamento de informações relacionadas à pesquisa. Para Lakatos e Marconi (2001, p. 183), a pesquisa bibliográfica

> abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema estudado, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, materiais cartográficos, etc. [...] e sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto.

A revisão literária deste trabalho baseou-se em dissertações, teses e artigos relacionados aos conteúdos de Geometria sob a ótica do uso de recursos manipuláveis e tecnológicos. Além disso, utilizou-se da pesquisa documental, que são documentos com dados brutos que não receberam tratamento analítico, os quais podem ser encontrados em portarias, atas, memorandos, mapas, relatórios técnicos, editais de financiamento, atos jurídicos, listagens, etc. Do mesmo modo, nessa pesquisa foram utilizadas informações de sites de internet que abordavam a história da matemática.

Esta pesquisa, além de ser bibliográfica e documental, também é uma pesquisa de campo. Ela corresponde na observação, coleta, análise e interpretação de fatos e fenômenos que ocorrem dentro de seus nichos, cenários e ambientes naturais de vivência, o que pode extrair dados e informações diretamente da realidade do objeto de estudo.

O campo empírico de estudo desta pesquisa consistiu nas turmas de 3º Ano do Ensino Médio da rede pública estadual na cidade de Carolina/MA do Centro Educa Mais Sertão Maranhense, na qual o pesquisador é lotado.

As aulas e atividades com Materiais Manipuláveis ocorreram nas salas de aula enquanto que as atividades práticas com o recurso mediador GeoGebra foram realizadas no laboratório de informática da Instituição. Esse possui 35 (trinta e cinco) computadores, mas apenas 25 (vinte e cinco) estavam disponíveis para uso. O pesquisador, no entanto, instalou o software GeoGebra em apenas 14 (quatorze) computadores, os quais foram usados pelos alunos dos dois grupos desta pesquisa.

No momento da divulgação do projeto e a escolha dos alunos foi esclarecido que estariam compondo a amostra da pesquisa de campo da dissertação do mestrado do autor deste trabalho que cursava na Universidade Estadual do Piauí - UESPI, o PROFMAT (Mestrado Profissional em matemática em Rede Nacional). Aqueles que aceitaram participar do projeto assinaram um Termo de Consentimento e, os que eram menores de idade, foram autorizados pelos responsáveis, o qual está no apêndice.

Os sujeitos da pesquisa são compostos de uma amostra de 21 (vinte e um) alunos do 3º Ano do Ensino Médio, os quais foram divididos em 3 (três) grupos de 7 (sete) alunos (A, B e C), sendo um da turma matutina e os outros dois do turno vespertino. No tocante ao conteúdo ministrado na pesquisa, este estudo tem o intuito de estudar os conteúdos de geometria plana e espacial com o uso de recursos mediadores, a fim de analisar o desempenho destes alunos após a ministração dos conteúdos, inicialmente de forma tradicional e depois com o uso dos recursos mediadores.

O método de pesquisa utilizado foi o modelo qualitativo exploratório, com revisão bibliográfica e levantamento de dados. As informações foram coletadas através da resolução de questões, participação dos alunos na construção dos materiais manipuláveis, utilização do GeoGebra nas atividades, aplicação de testes avaliativos e uso de questionários.

Os instrumentos de produção de dados se basearam em 14 (quatorze) aulas de 2 (duas) horas cada uma, sendo estas divididas em 3 ciclos (sem recursos mediadores, com materiais manipuláveis e com GeoGebra). Os encontros aconteceram no final do quarto bimestre do ano letivo de 2019, nos meses de novembro e dezembro.

Inicialmente, foi revisado o conteúdo de áreas das figuras planas e, em seguida, ministrado o conteúdo de áreas dos sólidos geométricos de forma tradicional, sem o uso dos recursos mediadores, a todos os alunos participantes da pesquisa. O primeiro ciclo foi composto por cinco aulas, sendo que, após seu término, todos realizaram uma prova diagnóstica, o qual está no apêndice desta pesquisa.

O segundo ciclo, composto de quatro aulas, participaram apenas dois grupos de sete alunos (A e C), em que foram utilizados os Materiais Manipuláveis como recursos mediadores para mostrar a planificação dos sólidos geométricos e entender os cálculos de suas áreas. Ao concluir o conteúdo, foi aplicado um teste de verificação com resolução de problemas sobre áreas desses sólidos, sendo que apenas o grupo A participou para verificar o aprendizado desses alunos e comparar seu rendimento com a prova anterior. Este teste está no apêndice deste trabalho.

No terceiro e último ciclo, com cinco aulas, foi apresentado o software GeoGebra, suas funções e características, além dos seus comandos para construção, planificação e cálculo das áreas dos sólidos geométricos anteriormente apresentados, através de exercício exemplo. Esse ciclo foi realizado com uma amostra de quatorze alunos, sendo dois grupos de sete alunos (B e C).

Ao final deste ciclo, análoga ao ciclo dos materiais manipuláveis, foi realizada uma prova diagnóstica, dessa vez os dois grupos participaram. Portanto, o grupo C foi o único dos três que participou de todas as oficinas. Esse teste serviu para entender a influência do Geogebra no aprendizado do conteúdo de Geometria e o grupo C foi usado como parâmetro comparativo sobre a aplicação de recursos mediadores na aprendizagem dos alunos desse conteúdo.

No fim dos trabalhos, foi aplicado um questionário para verificar a influência dos recursos mediadores no aprendizado dos alunos. Portanto, o propósito da pesquisa ser realizada em três grupos foi para avaliar a utilização do GeoGebra e Materiais Manipuláveis como instrumento facilitador no processo ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.

Por fim, tais dados foram analisados e foi realizada uma abordagem conclusiva sobre a aprendizagem dos alunos.

Destarte, conclui-se que o presente estudo foi uma pesquisa quali-quantitativa, exploratória, bibliográfica, documental e pesquisa de campo.

3 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA ESPACIAL

A matemática é imprescindível às atividades humanas, no entanto, seu ensino é hoje um dos principais problemas da escola. Essa disciplina é vista como uma matéria difícil na qual os alunos não identificam a utilização de seus conteúdos para sua vida diária, principalmente, a geometria. Vale ressaltar, porém, que a Geometria está intimamente ligada ao cotidiano das pessoas.

A origem da Geometria é uma incógnita, mas os estudiosos acreditam que teve seu início na antiguidade e surgiu de maneira intuitiva e natural, através das necessidades do homem e da observação das formas da natureza. Acredita-se que tais conhecimentos foram construídos empiricamente no "Neolítico[1] quando a humanidade deixou sua vida nômade, passando a se fixar à terra e cultivá-la". (PAVANELLO, 1989, p. 22)

As ações do dia a dia, como caçar, plantar, criar ferramentas e utensílios, pintar, tecer vestimentas e construir abrigos para homens, animais e alimentos, foram usadas para originar o conhecimento dos números e das configurações de espaço, grandezas, formas e tamanhos possibilitando, assim, o surgimento da Geometria. Segundo Eves (1992), a primeira forma de geometria foi chamada de **Geometria subconsciente**, pois fora desenvolvida a partir da capacidade humana de observação, reflexão e concepção.

> As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes. (...) Muitas observações do seu cotidiano devem ter levado o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies e sólidos. (EVES, 1992, p. 1,2)

A Revolução Agrícola (período de 3.000 a 525 a.C.) ocorrida nas regiões do Oriente Médio, China e Egito, chamadas de "berços da civilização", proporcionou o surgimento de uma nova civilização humana. Esta com sistemas complexos de governo, como as cidades-Estado e pequenos impérios, os quais substituíram as tribos, como principal forma de organização política.

> Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiram das névoas da Idade da Pedra nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo, Tigre e Eufrates. Esses povos criaram escritas; trabalharam metais; construíram cidades; desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinham tempo bastante de lazer para se deter e considerar os mistérios da natureza. Depois de milhões de anos, afinal a humanidade tomava a trilha das realizações científicas. (EVES, 2011, p. 56)

[1] Nova Idade da Pedra - c. 7000-3000 a.C.(EVES, 2011, p. 23) passando de caçadores nômades para agricultores.

Segundo Eves (1992), quando estudiosos, a partir das observações, extraíram certas propriedades gerais, denominadas de leis ou regras geométricas, e as relacionaram, a Geometria subconsciente transformou-se em **Geometria científica, empírica ou experimental**.

> Nenhum dado permite estimar quantos séculos se passaram até que o homem fosse capaz de elevar a geometria ao status de ciência. Mas escritores que se ocuparam desta questão unanimemente concordam em que o vale do rio Nilo, no Egito antigo, foi o local onde a geometria subconsciente transformou-se em científica. (EVES, 1992, p. 3)

A Geometria Científica surgiu da necessidade de fazer construções de monumentos e de cidades, das observações dos movimentos dos astros, de medir e delimitar terras após inundações frequentes, como no vale do rio Nilo (África), Tigre e Eufrates (Ásia Ocidental), Indo e Ganges (sul da Ásia Central) e Howang Ho e Yangtze (Ásia Oriental), o que levou a noção de cálculos de áreas, superfícies e volumes.

> Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis. (EVES, 2011, p. 57)

Desse modo, a ênfase inicial da matemática ocorreu na geometria, aritmética e na mensuração, através da prática dos povos da Mesopotâmia e das civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia. Porém, vale salientar que os materiais de escrita desse povos se tornaram importantes, pois sobre os quais as descobertas se preservaram.

Os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível, como casca de árvores de bambu e, consequentemente, pouco se conhece sobre a matemática, com certo grau de certeza, desses povos. No entanto, os antigos babilônicos usavam tábulas de argila cozida e os egípcios usavam pedra e papiros, materiais de existência duradoura, o que proporcionou apreciável quantidade de informações definidas sobre a matemática destes povos.

É notório ressaltar que o *Papiro Rhind* ou *Ahmes* (1650 a.C) é considerado o mais precioso documento relativo aos conhecimentos matemáticos dos egípcios, com 85 problemas de Aritmética e Geometria. Dessa maneira, a maioria das informações provém dos povos egípcios e babilônicos.

Com as mudanças econômicas e políticas, ocorreu o declínio do Egito e da Babilônia e outros povos emergiram em primeiro plano, especialmente os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos. Nessa época, o alfabeto foi criado e as moedas foram introduzidas, mas a Grécia proporcionou uma mudança fundamental no espírito da ciência e da Matemática, produziu um pensamento racional[2] e realista[3].

No âmbito da Geometria, a civilização grega transformou a Geometria Empírica em **Geometria Dedutiva**[4] **, Sistemática ou Demonstrativa**, cujos fatos geométricos deveriam ser estabelecidos não por procedimentos empíricos (intuição ou experimentação), mas por raciocínios dedutivos (demonstração lógica). Tal período ficou conhecido como Grécia Helênica (entre 800-336 a. C), cujas realizações foram extraordinárias.

Segundo o *Sumário Eudemiano* de Proclus, o precursor da Geometria Dedutiva foi Tales[5] (624-548 a.C) da cidade de Mileto, na costa ocidental da Ásia Menor, no período da primeira metade do século VI a.C. Ele formou a Escola Jônica (Ioniana ou Hilozoísta) e seu mérito foi ter formulado vários Teoremas e propriedades por meio de algum tipo de raciocínio lógico, estudo abstrato e dedutivo, sendo seu principal método o de comparar sombras. (PAVANELLO, 1989).

Depois veio Pitágoras (572-457 a.C) da cidade de Samos[6] , discípulo de Tales, que foi responsável pelo método postulacional[7] , pelo estudo da Álgebra Geométrica, ou seja, Geometria (forma) com a Aritmética (número)[8]na construção da teoria dos números, a descoberta da incomensurabilidade e trabalhou na Geometria Espacial com o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e a esfera. Ele criou a escola Pitagórica[9] de Crotona, uma irmandade religiosa, filosófica e cientifica, onde associava tudo existente na natureza com números (religião, música, etc.), porém seu erro foi não acreditar na existência dos números irracionais e que, ao serem descobertos, levaram a decadência da sua doutrina.

Nesse período, **Platão** (427-347 a.C) influenciou no desenvolvimento da Matemática, não por alguma descoberta importante, mas por sua "convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial na formação do filósofo e do governante"(EVES, 2011, p. 132). Para ele, a explicação de como tudo existia estava nos cinco sólidos perfeitos: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o octaedro (ar), o icosaedro (água) e o dodecaedro (Universo).

Um dos críticos de Pitágoras foi o filósofo Zenão (450 a.C.) de Eleia que propôs paradoxos que atacavam os fundamentos da concepção matemática de Pitágoras. Já

[2]Racionalidade: "capacidade de defender uma opinião por meio de argumentos, de investigar o porquê das coisas, não se contentando apenas em saber como elas acontecem."(PAVANELLO, 1989, p. 30)

[3]Realismo: "capacidade de distinguir afirmações factuais e observáveis das emocionais e tradicionais"(PAVANELLO, 1989, p. 30).

[4]Conduz ao desenvolvimento de processos de demonstração.

[5]Um dos sete sábios da Antiguidade.

[6]Ilha do mar Ageu, próxima ao litoral da Ásia Menor (PAVANELLO, 1989, p. 31)

[7]As afirmações são provadas por meio de raciocínios dedutivos rigorosos a partir de postulados- proposições iniciais explicitamente formulados (PAVANELLO, 1989, p. 32).

[8]É atribuído a Pitágoras a descoberta do Teorema sobre os triângulos retângulos (EVES, 2011, p. 103).

[9]Irmandade unida por mistérios, ritos cabalísticos e cerimônias, sendo empenhada no estudo de filosofia, matemática e ciências naturais (EVES, 2011, p. 97).

o método de exaustão de Eudoxo[10] (c.408-355 a.C.),o qual admite que uma área a ser medida pode ser subdividida indefinidamente em áreas de figuras conhecidas e calculada por aproximações sucessivas, pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão.

A partir daí ocorreu uma "mudança de rumo na matemática grega, abandonou-se o estudo de números e voltou-se a atenção para as linhas e áreas"(PAVANELLO, 1989, p. 33). Outro que também influenciou esta transformação foi Hipócrates (c. 470- 410 a.C.) de Quios, o qual foi

> responsável por um tratado no qual aparecem cadeias de proposições, além de ter-se aplicado a solução da quadratura do círculo e a duplicação do cubo, os quais juntamente com o terceiro, o da trisecção do ângulo, levaram outros geômetras à construção de curvas mais complexas, originando-se daí um novo ramo da geometria (PAVANELLO, 1989, p. 40).

Em 332 a.C, Alexandre, o Grande, fundou a capital do seu império em Alexandria, no Egito, mas em 323 a.C morreu e seu império foi dividido entre seus generais. Tal divisão resultou em três impérios (Egito, Selêucida e Macedônia), com governos independentes, mas unidos pelos laços da civilização helênica decorrente das conquistas de Alexandre. Ptolomeu I Stoner (367-283 a.C.), um dos generais de Alexandre, governou o Egito, transformando Alexandria numa cidade comercial cosmopolita, encorajando pesquisas, além de criar uma Universidade e sua famosa biblioteca. Esse período ficou conhecido como Grécia Helenística (336-31 a.C).

Neste ambiente do maior centro intelectual do mundo antigo, surgem os denominados Geômetras Alexandrinos[11] . O primeiro foi Euclides (c. 300 a.C), professor e fundador da Escola Alexandrina de Matemática. Por volta do ano 300 a.C, ele publicou sua brilhante obra "Os Elementos", a qual obscureceu todos os trabalhos matemáticos gregos anteriores.

O pai da Geometria, como Euclides ficou conhecido, desenvolveu os axiomas ou postulados materiais da geometria. Ele expôs a geometria como um corpo de conhecimento organizado em 13 livros sob a forma de um sistema dedutivo único de 465 proposições, compreendendo a geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega, como também noções relativas a processos somatórios e limites, além de boa parte da geometria superior (PAVANELLO, 1989).

Segundo Eves (1992), esse sistema lógico dedutivo se inicia com a explanação de termos técnicos sem definições (noções primitivas), os quais são produtos da mente humana, tais como ponto, reta, plano e espaço. Destas noções primitivas, são enunciadas

[10]Usou medidas de ângulos para a determinação das dimensões da Terra e da distância relativa entre o Sol e a Terra. (DANTE, 2008, p. 26)

[11]Estudiosos da Geometria.

afirmações iniciais previamente estabelecidas (axiomas ou postulados[12]), as quais são admitidas como verdadeiras. Através do raciocínio dedutivo, cada afirmação resultaria em outras afirmações, e assim sucessivamente (Teoremas), desenvolvendo um discurso lógico.

Assim, "os gregos desenvolveram a noção de discurso lógico como uma sequência de afirmações obtidas por raciocínio dedutivo a partir de um conjunto aceito de afirmações iniciais. Tal modelo é conhecido como Geometria Axiomátixa Material"(EVES, 1992, p.9).

Outro geômetra grego da Antiguidade que teve destaque na Geometria foi **Arquimedes** (287-212 a.C) de Siracusa que se destacou pelo método dos perímetros de calcular, o método do cálculo da integral, a construção da Espiral de Arquimedes, as fórmulas corretas para calcular as áreas da superfície esférica e da calota esférica e descobriu os volumes da esfera e do segmento esférico de uma base (PAVANELLO, 1989).

Outro importante geômetra foi Apolônio (262-190 a.C) de Pérgamo que se destacou com as *secções cônicas*, através de um estudo exaustivo dessas curvas e a criação dos termos "elipse", "parábola" e "hipérbole". Com a morte de Apolônio, a época de ouro da geometria chega ao fim, pois os geômetras menores que se seguiram apenas complementaram ou desenvolveram teorias cujas bases já existiam nos trabalhos anteriores. Eves (1992, p 11) destacou "Héron de Alexandria (c.75 d.C.), Menelau (c.100 d.C.), Claudio Ptolomeu (c. 85 - 165 d.C.) e Papus (c.320 d.C.)"..

> A ciência e a cultura grega floresceram e alcançaram seu pináculo em Alexandria nos 150 anos iniciais da Era Helenística, entre 300 e 150 a.C. Depois disso teve início um longo e lento declínio, acentuado em 46 a.C. com o incêndio de grande parte da Universidade, em Alexandria, incluindo a biblioteca, e encerrado em 529 d.C. com o fechamento das portas da Academia de Atenas pelo imperador Justiniano. (EVES, 2011, p.163)

Roma começou o seu domínio no final dos tempos antigos. Em 146 a.C, a Grécia, após a conquista de sua última cidade, Conrinto, tornou-se província, mas o Egito, inclusive Alexandria, permaneceu sob o império dos Ptolomeus até 31 a.C. Nesse período, os romanos não davam atenção ao saber e não tinha inclinação para a matemática abstrata, o que resultou na diminuição da busca científica. Para eles, somente os aspectos práticos da matemática os interessava, ou seja, os ligados ao comércio e a engenharia civil.

Alguns fatores influenciaram nesse declínio da matemática, tais como a diminuição do apoio governamental, o uso crescente da mão de obra escrava, um interesse paralelo pela filosofia e a religião, principalmente o Cristianismo, e a oposição da parte de certos líderes religiosos (EVES, 2011). Assim, a civilização grega difundiu-se pela vida romana, ocorrendo um declínio gradual do pensamento criativo e dando lugar a compilações e comentários.

[12]Exemplo de postulados: "P1 Dois pontos distintos em um plano determinam uma reta; P2 Três pontos não colineares determinam um único plano; P3 O espaço tem infinitos planos". (LEONARDO, 2016, p. 84)

O Império Romano se estendeu por cerca de 500 anos (27 a.C-476 d.C), contudo, o seu declínio foi consequência de dois grandes problemas: sua extensa territorialidade, o que era difícil de governar, e seu sistema político, com imperadores que ascenderam ao poder através de golpes de Estado e não governavam por muito tempo devido às guerras e rebeliões. Para amenizar tais problemas, os romanos optaram por uma divisão territorial.

> Em 305 d.C. o imperador Diocleciano (245-313 d.C.) separou o Império em duas metades: a ocidental, com um imperador em Roma, e a oriental, com um imperador em Bizâncio, mais tarde rebatizada com o nome de Constantinopla, em homenagem ao imperador (oriental) Constantino I (272-337 d.C.). O imperador oriental era considerado hierarquicamente superior ao ocidental e, sob o ponto de vista teórico, desfrutava de autoridade política maior, uma situação que veio a contribuir para o declínio do poder no ocidente. Quando, no século V d.C., os "bárbaros" invadiram o Império Ocidental, seus imperadores não tinham meios de enfrentá-los. (EVES, 2011, p. 283)

A partir do século V d.C., após o colapso do Império Romano ante os invasores "bárbaros" germanos e eslavos, começou o processo de transformação da Europa de civilização antiga em civilização medieval. Inicia-se, portanto, o período da Idade Média europeia (476-1.492 d.C) com o sistema de feudalismo e eclesiástico.

> Os grandes impérios do mundo antigo acabaram dando lugar a baronatos feudais. Escravos e pequenos proprietários rurais foram substituídos por servos. Intelectuais e inventores deixaram de se interessar pela ciência pura e a matemática e voltaram suas energias mais e mais para a engenharia e a religião (EVES, 2011, p. 283).

A Alta Idade Média (V-XI) foi um período em que a civilização na Europa Ocidental atingiu níveis de ensino, em todas as ciências, praticamente nulos. Quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e do legado do mundo antigo foram perdidos. O resquício do saber grego e latino que foi preservado ficou restrito aos monges dos monastérios católicos e a poucos leigos cultos.

Durante meio milênio, no âmbito da Matemática, destacou-se o papel do "estadista romano Boecio (c. 475-524), os clérigos eruditos ingleses Beda (673-735), e Alcuino (735-804) e o famoso sacerdote e erudito francês Gerbert (950-1003), que veio a se tornar o papa Silvestre II". (EVES, 2011, p.289)

Neste período, a civilização ocidental se dividiu em duas áreas culturais distintas: o mundo árabe-iraniano e a Europa. Esta, por sua vez, dividiu-se em ocidente germânico-latino e num oriente greco-eslávico. Segundo Eves (2011), no tocante ao Império Árabe (VI-XIII), este foi de importância fundamental para a conservação de grande parte da cultura mundial.

O Império Árabe teve início em 622 d.C, após a fuga de Maomé de Meca para Medina, quando as tribos guerreiras dispersas e desunidas da Península da Arábia se uniram em prol da expansão do Islamismo e se consolidaram numa grande nação. Depois da morte de Maomé, os árabes expandiram-se pelos países vizinhos, preenchendo a lacuna deixada pela queda do Império Romano, dominando um território que ia da Índia à Espanha, passando pela Pérsia, Mesopotâmia e norte da África.

> Em 755, em virtude de disputas internas, verificou-se uma divisão leste/oeste no império, resultando daí um califado com capital em Bagdá (sunitas) e outro com capital em Córdoba (xiitas). Até por volta do ano 1000 o Império Oriental detinha a supremacia espiritual. Por essa época, todavia, o território oriental começou a ser ocupado pelos cruéis turcos seldjúcidas. Entre 1100 e 1300 as Cruzadas empreenderam a tarefa de desalojar os muçulmanos da Terra Santa. Em 1258 os mongóis tomaram Bagdá, o califa do oriente foi derrubado do poder e o Império Árabe começou a declinar. Em 1492 a Espanha derrotou o último dos governantes mouros e os árabes perderam sua cabeça de ponte na Europa. (EVES, 2011, p. 260)

As maiores contribuições árabes à civilização foi a conservação de grande parte do patrimônio cultural e intelectual do mundo, pois estes se apoderam do saber grego e hindu. Nessa época, enquanto o resto do mundo era uma terra cientificamente estéril, os árabes, porém, custodiavam e se esforçavam continuamente para traduzir os clássicos gregos, principalmente em matemática, astronomia e medicina.

> Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos e muitos deles tornaram-se patronos da cultura e convidaram intelectuais eminentes para se instalarem junto às suas cortes. Inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos foram laboriosamente traduzidos para o árabe e assim preservados até que posteriormente intelectuais europeus tivessem condições de retraduzi-los para o latim ou outras línguas. Se não fosse o trabalho dos intelectuais árabes, grande parte da ciência grega e hindu teria se perdido irremediavelmente ao longo da Alta Idade Média. (EVES, 2011, p. 260)

Ainda na Idade Média, a partir dos séculos XI e XII, o comércio na Europa Ocidental, principalmente nos centros comerciais italianos de Gênova, Pisa, Veneza, Milão e Florença, refloresceram e se estabeleceram com o mundo árabe. Esse contato com a cultura árabe proporcionou o retorno da ciência e da matemática. A Europa teve acesso aos progressos feitos pelos árabes e pelos hindus, no âmbito da Álgebra, e ao legado helênico das obras dos matemáticos de Alexandria, no âmbito da Geometria, os quais foram preservados pelas traduções feitas pelos árabes (PAVANELLO, 1989).

A partir daí, seguiu-se um período de transmissão, o que proporcionou a criação das primeiras universidades europeias: Bolonha (1088), Oxford (1096), Salamanca (1134), Paris (1150), Cambridge (1209), Montpellier (1220) e Pádova (1222), entre outras (MIRANDA, 2017, p. 29). Durante o século XII, ocorreu um intenso trabalho de tradução, transcrevendo-se do árabe para o latim, o qual este período, para a história da matemática, tornou-se um século de tradutores.

> Isso ocorreu de três maneiras principais: pelas traduções latinas feitas por intelectuais cristãos que se deslocavam até os centros de saber muçulmanos, pelas relações entre o reino normando da Sicilia e o Oriente e através do intercambio comercial entre a Europa Ocidental com o Levante e o mundo árabe (EVES, 2011, p. 291).

Segundo Eves (2011), dentre os principais tradutores, destacaram-se o monge inglês Adelardo de Bath (1120), Platão de Tivoli (1120), o matemático judeu Abraham Bar Hiyya e Gerardo de Cremona (1114-1187), João de Sevilha e Robert de Chester. Esse trabalho foi grandemente encorajado pelos dois reis e patronos da ciência Frederico II (1194-1250), do império romano-germânico, e seu filho Manfredo (1231-1266), rei da Silícia.

Já no século XIII, após anos estáticos nos estudos de Geometria Espacial, apareceu o matemático talentoso da Idade Média, Leonardo Fibonacci ("Leonardo, filho de Bonaccio", c. 1175-1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou Leonardo Bigollo. Ele escreveu *Practica geometriae*, material sobre geometria e trigonometria, descobriu a sequência de Fibonacci (progressões aritmética e geométrica) e introduziu os algarismos arábicos na Europa.

No século XIV, em decorrência da Peste Negra, que exterminou mais de 1/3 da população da Europa, e do desenrolar da maior parte da Guerra dos Cem Anos, que também ocasionou transformações políticas e econômicas na Europa, a Matemática foi improdutiva (EVES, 2011).

No século XV, a civilização europeia medieval começa a dar lugar à civilização moderna. Este período foi marcado por mudanças e descobertas: "invenção da imprensa, as grandes navegações e a tradução de vários tratados gregos para o latim, o que favoreceu e impulsionou toda uma nova arrancada na construção de conhecimentos"(MIRANDA, 2017, p.29). Tal período ficou conhecido como Renascimento, a retomada do interesse pela arte e saber antigos.

> Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla ante os turcos em 1453, verifica-se um afluxo de refugiados para a Itália. Foi assim que muitos tesouros da civilização grega entraram no Ocidente e clássicos que até então só podiam ser conhecidos através de traduções árabes, nem sempre fiéis, agora se tornavam acessíveis em fontes originais (EVES, 2011, p. 296).

O comércio dos mercadores europeus com o mundo árabe, nos séculos XIV e XV, estimulou o consumo de bens asiáticos, como especiarias e tecidos finos. Como a demanda tornou-se maior do que a oferta dos árabes e as rotas terrestres com o Oriente foram fechadas, os mercadores da Europa puseram-se a procurar outros fornecedores na Ásia, como Índia e China. Assim, teve início a Era das Explorações, a qual foi dividida em três fases: a primeira se caracterizou pelo comércio, a segunda foi marcada pela conquista, exploração e anexação e a terceira foi a colonização, a efetiva migração de europeus para outros continentes.

As viagens comerciais marítimas foram possíveis por causa do conhecimento sobre o modelo geral da geografia do mundo criado por Eratóstenes e dos avanços tecnológicos, como o aperfeiçoamento de equipamentos de navegação e melhoramento nos projetos dos navios. Na procura de uma rota marítima para a Índia em torno da África, mercadores europeus descobriram novas terras, as quais começaram a explorá-las. Essa expansão se deu graças, em grande parte, a fraqueza das vítimas, por serem povos tribais, agricultores ou pequenas civilizações.

> A Era das Explorações teve um tremendo impacto sobre a Europa. Ela despertou uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse por ideias novas e por novos lugares, por um florescimento das artes e por uma percepção da necessidade de tecnologias novas, especialmente na navegação (EVES, 2011, p. 339).

No século XV, a atividade matemática girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria, em decorrência da influência do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura. Dentre os estudiosos matemáticos destacaram-se Nicholas Cusa[13] (1401-1464), Georg von Peurbach[14] (1423-1463), Johann Müller ou Regiomontanus[15](1436-1476), o francês Nicolas Chuquet[16] e o frade franciscano Luca Pacioli[17] (c. 1445-1509). Nesse período do Renascimento, muitos artistas enveredavam pela ciência e a arte, como Leonardo da Vinci (1452-1519), Michelangelo (1475-1564) e Benvenuto Cellini (1500-1571).

No século XVI, a álgebra e a aritmética continuaram crescendo, sendo a descoberta da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas pelos matemáticos italianos o feito mais importante da matemática. Os matemáticos que se destacaram foram Tartaglia[18] (1499-1557), Girolando Cardano[19] (1501-1576), Raphael Bombelli[20]. (1526-1573)

[13]É lembrado pelo trabalho na reforma do calendário e por suas tentativas de quadrar o círculo e trisseccionar o ângulo (EVES, 2011, p. 296).

[14]Ele escreveu uma aritmética, alguns trabalhos de astronomia e coligiu uma tábua de senos (EVES, 2011, p. 296).

[15]Escreveu seu tratado *De triangulis omnimodis*, primeira exposição europeia sistemática de trigonometria plana e esférica (EVES, 2011).

[16]Escreveu uma aritmética intitulada Triparty en la science des nombres que possui o cálculo com números racionais, com números irracionais e aborda a teoria das equações (EVES, 2011, p. 297).

[17]Escreveu a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, uma compilação livre de muitas fontes, pretendendo ser um sumário da aritmética, da álgebra e da geometria da época, inclusive problemas com probabilidades (EVES, 2011, p. 298).

[18]Descobriu uma fórmula pra resolver equações cúbicas, porém não publicou sua obra. Ele foi o primeiro a utilizar matemática na balística de artilharias e escreveu sobre as operações numéricas e a Aritmética mercantil do seu tempo.

[19]Publicou a obra *Arte Maior*, na qual apresentou a fórmula descoberta por Tartaglia, porém não soube resolver uma raiz quadrada de um número negativo. Ele também escreveu sobre probabilidade no livro "os raciocínios nos jogos de azar". (DANTE, 2016, p. 260)

[20]Trabalhou com a ideia de número imaginário para a $\sqrt{-1}$

e o francês François Viète[21] (1540-1603).

Já o século XVII foi marcado pela abertura de vastos campos novos para a pesquisa matemática. No início do século, o escocês John Napier (1550-1617) revelou, dentre outras, sua mais importante invenção: os logaritmos. Já o inglês Thomas Harriot (1560-1621) publicou sobre grande parte da teoria das equações e o inglês William Oughtred (1574-1660) um trabalho sobre aritmética e álgebra, dando ênfase aos símbolos matemáticos, sendo que, ambos contribuíram para a notação e a codificação da álgebra.

Segundo Eves (2011), dois importantes astrônomos também contribuíram notavelmente para a matemática nesse século. O italiano Galileu Galilei (1564-1642) fundou a ciência da dinâmica em geral, lançou a mecânica dos corpos em queda livre, o compasso de setores e captou a ideia de equipotência de conjuntos infinitos, dentre outras descobertas.

Na mesma época, o alemão Johann Kepler (1571-1630) anunciou suas três importantes leis do movimento planetário, foi um dos precursores do cálculo de volumes, desenvolveu ideias relativas a infinitésimos para o cálculo de áreas e em trabalho com a integração, estabeleceu a teoria da continuidade, deu notáveis contribuições ao estudo dos poliedros e descobriu o cuboctaedro, o dodecaedro rômbico e o triacontraedro rômbico.

No século XVII, a Geometria experimenta um avanço significativo. "Por um lado, Desargues e Pascal iniciam o desenvolvimento de um novo ramo da geometria pura, a **Geometria Projetiva**, e, por outro, Descartes e Fermat elaboram as primeiras ideias de um novo método para estudo da geometria: **Geometria Analítica**[22]"(PAVANELLO, 1989, p. 42).

Há divergências entre os historiadores da matemática sobre quem e quando se originou a Geometria Analítica, mas a maioria considera as contribuições dos matemáticos franceses Descartes e Fermat como a origem essencial da matéria. Assim, "A essência da Geometria Analítica reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente"(EVES, 2011, p. 383).

René Descartes (1596-1650) escreveu um tratado filosófico sobre a ciência universal[23] , mas foi no seu terceiro e último apêndice, intitulado La géometrie, que ele lançou a Geometria Analítica Moderna. Esse novo método mistura Álgebra e Geometria, ensinando a transformar pontos, retas e circunferências em números, e demonstra como fazer contas com as figuras geométricas. Assim, surgiu o estudo do plano cartesiano ou sistema cartesiano ortogonal.

---

[21] A vasta obra de Viète compreende trabalhos de trigonometria, álgebra e geometria, sendo os principais *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579), *In artem analyticam isagoge* (1591), *Supplementum geometriae* (1593), De numerosa *potestatum resolutione* (1600) e *De aequationum recognitione et emendatione* (1615). (EVES, 2011, p. 309)

[22] A Geometria Analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, bem como analisa essas equações por meio de gráficos, estabelecendo relações com a Álgebra e a Geometria, plana e espacial . (LEONARDO, 2016, p. 101)

[23] *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências).

Segundo Eves (2011), o apêndice La géometrie é dividido em três partes: a primeira explana alguns dos princípios da geometria algébrica, sendo estes mais avançados em relação aos gregos; a segunda uma classificação de curvas agora superada e um método interessante de construir tangentes a curvas diferentes e a terceira trata da resolução de equações de grau maior que dois, cuja finalidade é determinar limites para o número de raízes positivas e o número de raízes negativas de um polinômio.

Contemporâneo de Descartes, Pierre de Fermat (1601-1665), num trabalho sobre tangentes e quadraturas, descobriu como encontrar tangentes de curvas representadas algebricamente, mas sua maior contribuição para a matemática foi estabelecer os fundamentos da moderna teoria dos números. Ele também determinou os pontos máximos e mínimos de uma função e desenvolveu um trabalho pioneiro no que se refere à diferenciação e a integração.

No tocante a Geometria Projetiva, seus elementos surgiram, inicialmente no século XV, da necessidade de uma teoria da perspectiva para que arquitetos, artistas e desenhista do Renascimento pudessem criar quadros mais realistas, ou seja, figuras tridimensionais representadas em duas dimensões. Contudo, a teoria somente foi ampliada no início do século XVII, quando o matemático francês Gérard Desargues (1591-1661) publicou um tratado sobre secções cônicas, no qual se desenvolveram muitos dos teoremas fundamentais sobre involução, conjuntos harmônicos, homologia, polos e polares, perspectiva e, principalmente, a ideia de projeção.

Contudo, o trabalho de Desargues foi negligenciado, esquecido e suas publicações desapareceram em decorrência do seu estilo demasiado excêntrico de escrever e do novo método da geometria que estava no auge, a geometria analítica introduzida dois anos antes por Descartes. Assim, a Geometria Projetiva só teve prosseguimento no século XIX com Gaspar Monge, Chasles, Poncelet e outros.

Outro matemático que nesse período também estudou sobre Geometria Projetiva foi Blaise Pascal (1623-1662). Ele escreveu um inteligente manuscrito não publicado sobre secções cônicas, no qual figurava o famoso teorema do hexagrama místico de Pascal da geometria projetiva, lançou os fundamentos da teoria das probabilidades e inventou a primeira máquina de calcular.

Eves (2011) relata que o século XVII foi altamente produtivo no campo da matemática e cita as contribuições de alguns nomes, tais como os geômetras e físicos Gilles Persone de Roberval[24] (1602-1675) e Evangelista Torricelli[25] (1608-1647) , o holandês Christiaan Huygens[26] (1629-1695), os franceses Claude-Gaspar Bachet (1581-1638) e Marin

[24]Elaborou o método de traçar tangentes, teve descobertas no campo das curvas planas superiores e reivindicou para si a invenção do método pré-cálculo dos indivisíveis e a primazia de ter quadrado a cicloide antes de Torricelli.

[25]Determinou o traçado de uma tangente à parábola, o comprimento de um arco de espiral logarítmica, além de outras contribuições à física.

[26]Escreveu o primeiro tratado formal sobre probabilidade, introduziu evoluta e involuta de uma parábola e de uma cicloide e publicou um tratado em que expunha a teoria ondulatória da luz.

Mersenne (1588-1648), na teoria dos números, além de Claude Mydorge (1585-1647) e Phillipe de la Hire (1640-1718), com as secções cônicas. Dentre os matemáticos italianos, citou Vicenzo Viviani (1622-1703), Bonaventura Cavalieri[27] (1598-1647) e a notável família Cassini - Giovanni Domenico Cassini (1625-1712); Jacques Cassini (1677-1756); César-François Cassini e Jacques Dominique Cassini (1748-1845).

No entanto, perto do final do século XVII, Newton e Leibniz descobriram um notável instrumento: a invenção do cálculo. Primeiro surgiu o cálculo integral e só depois o cálculo diferencial.

> A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou- se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2011, p.417).

Através desse novo instrumento, a resolução de problemas na geometria tornou-se mais eficiente, passando a ser conhecida como Geometria Diferencial. Segundo Eves (1994), a Geometria Diferencial, na roupagem moderna, sofreu influência de descobertas de matemáticos anteriores, como Arquimedes com estudo de figuras infinitesimais em questões de determinações de áreas e volumes, Bonaventura Cavalieri com os métodos dos indivisíveis e Christiaan Huygens com as curvaturas e evolutas, mas seu surgimento resultou das aplicações do cálculo e da geometria analítica.

Newton e Leibniz foram muito importantes para a matemática no século XVII. Isaac Newton (1642- 1727), além do desenvolvimento do cálculo na área da matemática, descobriu o teorema do binômio generalizado, inventou o método dos fluxos (atual cálculo diferencial), criou a teoria das emissões (teoria corpuscular da luz), elaborou um conjunto de leis para o movimento, fez um estudo sobre gravitação universal, contribuiu para consolidar o conceito de função, além de ter uma habilidade extraordinária na integração de algumas equações diferenciais.

Já Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), rival de Newton na invenção do cálculo, inventou uma máquina de calcular, criou um sistema binário de numeração, usou a palavra função em geometria no sentido que atualmente é compreendido, criou a teoria dos determinantes, generalizou o teorema binomial para o teorema multinomial, contribuiu no lançamento dos fundamentos da teoria das envoltórias, definiu círculo osculador, deduziu muitas das regras de diferenciação, foi um dos primeiros a falar de relatividade e descobriu o teorema fundamental do cálculo, desenvolvendo grande parte de sua notação, inclusive usou o símbolo da integral pela primeira vez: o S alongado ($\int$).

[27] Sacerdote jesuata e discípulo de Galileu que conseguiu melhor definir os segmentos indivisíveis, os quais foram expostos na sua obra "Geometria indivisibilibus continuorum"(1635). Neste tratado, conseguiu dar embasamento ao cálculo infinitesimal proposto por Kepler e o raciocínio de "O método de Arquimedes".

A contribuição dos dois é resumida:

> Na prática, os dois definem duas operações, as diferenciais e as integrais, com uma propriedade muito importante, de ser uma o inverso da outra, que é conhecida como o "Teorema Fundamental do Cálculo". Este resultado revolucionou o cálculo de área uma vez que integrar é calcular a área sob uma curva. O desenvolvimento do conceito de função, e a noção de limite, foram fundamentais para que o cálculo diferencial e integral tomasse a forma atual. À medida que esses conceitos foram desenvolvidos, o cálculo passou a ter um caráter algébrico maior que geométrico (MIRANDA, 2017, p. 37).

Com a invenção do cálculo, a história da matemática elementar não teve novas descobertas significantes. Assim, atualmente a matemática elementar é composta pela aritmética, álgebra, geometria e trigonometria ensinada nas escolas de primeiro e segundo graus, bem como a álgebra clássica superior, a geometria analítica e o cálculo das séries básicas dos cursos superiores de matemática.

O século XVIII, no âmbito social, político e econômico, foi uma época de turbulência e revoltas na Europa[28] e na América[29] . A nova classe média, a burguesia, emergiu derrubando a antiga ordem aristocrática na Inglaterra, na França e na maior parte dos países da América, e o feudalismo foi substituído pelo liberalismo clássico do filósofo inglês John Locke (1632-1704). Já no âmbito da ciência, especificamente a matemática, esse século foi gasto na exploração dos novos métodos do cálculo.

No âmbito da Geometria, a contribuição do suíço Leonhard Euler (1707-1783) foi de suma importância. Ele descobriu a relação entre o número de vértices (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um polígono convexo (V - A + F = 2), mas também influenciou a matemática com o uso do símbolo i para representar a raiz quadrada de -1, criou a representação de uma função pela notação f(x) e desenvolveu estudos sobre a probabilidade.

A matemática no século XVIII também teve contribuições de membros da família Bernoulli[30] , Abraham De Moivre (1667-1754), Brook Taylor (1685-1731), Colin Maclaurin (1698-1746), Alexis Claude de Clairaut (1713-1765), Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace[31] (1749-1827), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), e Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823). Deve-se observar que a linha principal da matemática desses homens teve como origem e meta as aplicações do cálculo à mecânica e a astronomia.

---

[28]Revolução Gloriosa (1688); Revolução Francesa (1789-1799).

[29]Revolução Americana (1776-1783); Revoluções latino-americanas (1800-1825).

[30]A família produziu mais de 10 matemáticos famosos. Um deles foi Jacques Bernoulli que contribuiu em assuntos como lógica, álgebra, teoria dos números, análise combinatório, probabilidades, curvas planas, séries, cálculo e equações diferenciais. Outros foram Johann Bernoulli (1667 - 1748) e Daniel Bernoulli (1700 - 1782) que contribuíram para construir a teoria do cálculo que se tem hoje.

[31]Introduziu novas ideias de cálculo e aplicações de probabilidades em seu livro "Teoria analítica das probabilidades" em 1812 (DANTE, 2016, p. 261).

Esse período também teve a contribuição do francês Gaspard Monge (1746-1818) para o avanço da geometria através da sistemática aplicação do cálculo para a investigação da curvatura das superfícies, o que preparou caminho para Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduzir o método de estudar geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de representações paramétricas desses objetos e verificar a não demonstrabilidade do quinto postulado de Euclides, o que possibilitou a construção de uma geometria não euclidiana.

Já o século XIX, no âmbito social, foi marcado por guerras e revoluções, crescimento populacional, urbanização, avanços científicos e tecnológicos que resultaram na Revolução Industrial. Vale destacar que, na Matemática, os assuntos como álgebra linear, cálculo diferencial, análise matemática e determinante se tornaram mais complexos e aperfeiçoados, sendo que foi nesse período que a "pesquisa matemática se emancipou das balizas científicas"(EVES, 2011, p. 463).

Os novos meios de cálculos proporcionaram o desenvolvimento da geometria projetiva. O seu precursor foi Desargues, mas o francês Jean Victor Poncelet (1788- 1867), aluno de Gaspar Monge, quem a criou, em 1822, através de sua obra "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Nesse período, a geometria passou por sua maior reestruturação, após não demonstrabilidade do quinto postulado de Euclides por Gauss, o que resultou no surgimento das **Geometrias não euclidianas**.

Esses novos campos de estudos das formas geométricas fizeram surgir a chamada Geometria Moderna. Em 1826, o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) desenvolveu a geometria hiperbólica, o estudo de Gauss inspirou Bernhard Riemann (1826-1866) a desenvolver a Geometria Riemanniana na teoria da relatividade, a qual foi utilizada por Einstein, e o alemão David Hilbert (1862-1943), em 1899, publicou o livro "Fundamentos da Geometria" com um processo de axiomatização e formalização da matemática e sistematizou todas as novidades incorporadas à matemática dos séculos anteriores.

A matemática do século XIX também recebeu influência do suíço Jean Robert Argand[32] (1768-1822), o alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass[33] (1815-1897) , Johann Dirichlet[34] (1805-1859), George Cantor[35] (1845-1918), Francês Augustin-Louis Cauchy[36] (1789-1857) e Jacob Jacobi[37] (1804-1851).

O século XX foi marcado pelos inúmeros avanços tecnológicos, como exemplo as invenções da lâmpada, do automóvel e do telefone, as conquistas da civilização, como as criação de novos estados independentes, as reviravoltas em relação ao poder, exemplificada pelas competições entre as potências europeias, e muitos massacres, entre elas o

[32]Introduziu o conceito de módulo ou valor absolutos de um número.
[33]Introduziu a notação /x/.
[34]Desenvolveu seus trabalhos na área da Teoria dos números.
[35]Criou a Teoria dos Conjuntos.
[36]Primeiro a nomear as configurações numéricas em tabelas (1826) e teoria das determinantes.
[37]Realizou o estudo dos determinantes.

Holocausto e a Primeira e Segunda Guerra Mundial. No campo da Geometria Espacial, após toda a evolução geométrica, novos conceitos de tempo e espaço foram fundamentados pela teoria da relatividade do físico Albert Einstein (1879-1955).

Desse modo, após o término da história da matemática elementar , pode-se resumir os avanços na matemática, principalmente na geometria, nos séculos seguintes, como:

> O século XVIII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo. O século XIX foi dedicado grandemente a tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente. Uma das maiores ênfases do século XX tem sido a de generalizar, tanto quanto possível, os progressos já alcançados, e que muitos matemáticos da atualidade estão envolvidos com problemas de fundamentos mais profundos ainda. (EVES, 2011, p. 463)

Assim, ao longo da história ocorreram muitas transformações no estudo relacionado com o desenvolvimento da geometria, desde a geometria subconsciente até os avanços tecnológicos dos dias atuais. Logo, vale destacar a importância da história da Matemática como instrumento para entender axiomas, postulados, teoremas, fórmulas e conceitos, para contextualizar o conteúdo apresentado e para proporcionar uma aprendizagem significativa daquilo que se almeja.

4 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Após abordar aspectos da história da geometria, o trabalho adentra no estudo teórico sobre os conceitos matemáticos necessários para se compreender o cálculo das áreas dos sólidos geométricos. Inicialmente, é importante entender que a geometria atualmente é dividida em dois conjuntos: Geometria Euclidiana[38] e Geometrias não Euclidianas[39] . Esse estudo foi baseado na Geometria Euclidiana, a qual está dividida em subáreas: Geometria Plana[40], Geometria Espacial[41] e Geometria Analítica[42].

A priori, o presente trabalho abordou noções da Geometria Plana para, *a posteriori*, adentrar nos conteúdos da Geometria Espacial. Primeiramente, faz-se necessário entender que a Geometria Plana é composta pelos seguintes conteúdos programáticos: ponto, reta e plano; Posições relativas entre retas; Ângulos; Triângulos; Quadriláteros; Polígonos; Perímetro e Áreas de regiões planas.

O pesquisador, inicialmente, apresentou as noções primitivas da Geometria Euclidiana (ponto, reta e plano), depois citou os postulados delas decorrente (Postulados da Existência, da Determinação, da Inclusão e das Paralelas ou Postulado de Euclides), em seguida adentrou o conteúdo das áreas de superfícies planas e, por fim, abordou as áreas dos sólidos geométricos.

Neste primeiro subitem serão abordadas, de maneira intuitiva, as fórmulas para os cálculos das áreas das figuras poligonais e no subitem seguinte o cálculo de áreas não poligonais, como a área do círculo.

4.1 Áreas dos Polígonos

Os polígonos são caracterizados por definições, propriedades e elementos. Eles podem ser definidos como figuras geométricas planas e fechadas formadas pela união de um número finito de segmentos de reta.

Essa junção de segmentos possui os seguintes elementos: vértice, lado, ângulo e diagonal. O vértice corresponde ao ponto de encontro dos segmentos que formam o polígono, sendo representado por uma letra maiúscula (A_1, A_2, A_3,...). Já os lados são os segmentos de reta que unem vértices consecutivos e formam o polígono, os quais são expressos, por exemplo, assim (A_1A_2, A_2A_3,...). Os ângulos, por sua vez, podem ser

[38] Homenagem a Euclides de Alexandria que é chamado de pai da geometria. Ele reuniu toda a geometria em uma única obra, "Os Elementos", e baseou a geometria plana em cinco postulados.

[39] Lobatchevsky, no século XIX, utilizou a negação do quinto postulado de Euclides para dar origem à geometria Rhiemanniana, a qual abriu uma porta para a construção de outras geometrias completamente distintas da geometria euclidiana.

[40] Geometria Plana ou Euclidiana estuda as figuras planas ou bidimensionais (comprimento e largura).

[41] Geometria Espacial estuda as figuras geométricas espaciais ou tridimensionais (comprimento, largura e volume).

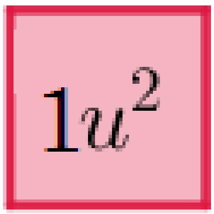
[42] Relaciona a geometria com a álgebra e utiliza uma para resolver problemas provenientes da outra.

internos, os que são formados por dois lados consecutivos, ou externos, os que são formados por um ângulo suplementar e adjacente a um ângulo interno, sendo esta sua representação ($\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$,...). E, por último, a diagonal é o segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos.

Os polígonos também possuem propriedades relativas ao número de diagonais, a soma dos ângulos, a medição do perímetro e o cálculo da área de um polígono. Desta feita, o trabalho adentra no estudo das áreas das figuras geométricas planas fechadas.

Primeiramente, é importante ressaltar que medir uma grandeza é compará-la a outra grandeza da mesma espécie tomada como unidade. Logo, a área é definida como a medida da extensão de uma superfície, que é expressa em uma unidade padrão preestabelecida, a qual corresponde um número positivo, obtido pela "comparação da porção ocupada pela superfície poligonal com a porção ocupada por uma unidade de medida de área"(LEONARDO, 2016, p. 67). A unidade de medida de área, por sua vez, é a área delimitada por um quadrado unitário, isto é, um quadrado de lado $1u$, sendo u uma unidade de comprimento. Portanto, a área de um quadrado unitário é $1u^2$.

Figura 1: Quadrado unitário



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo Muniz Neto (2013, p.180), um conceito qualquer de área para polígonos só tem utilidade quando as seguintes propriedades (postulados intuitivamente desejáveis) sejam válidas:

> **1.** Polígonos congruentes têm áreas iguais. **2.** Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores. **3.** Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor. **4.** A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2.

Partindo desses 4 postulados serão obtidas as fórmulas para o cálculo de áreas de algumas figuras planas, como será visto nos itens a seguir.

4.1.1 Área do quadrado

O quadrado é um quadrilátero regular, ou seja, uma figura geométrica com quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos.

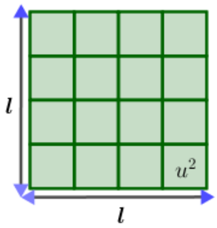
Proposição 4.1. *Um quadrado de lado l tem área l^2.*

Demonstração

Considere uma superfície quadrada R, com lados medindo l, em que l é um número natural. A superfície R pode ser decomposta em u^2 superfícies quadradas justapostas com área unitária. Assim, a superfície R tem área igual a l^2. Logo, a área de uma superfície quadrada R de lado l é dada por l^2.

Nessa demonstração, consideramos l um número natural. A relação obtida, porém, é válida para qualquer valor real de l (racional ou irracional).

Figura 2: Superfície R - Fórmula do Quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.2 Área do retângulo

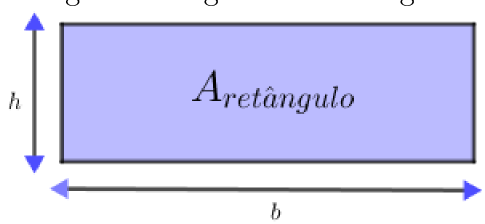
O retângulo é um quadrilátero que possui lados opostos congruentes, paralelos e todos os ângulos internos retos.

Proposição 4.2. *Um retângulo de lados a e b tem área* ***a.b***

Demonstração

Considere uma região retangular A de base b e altura h, em que b e h são números reais.

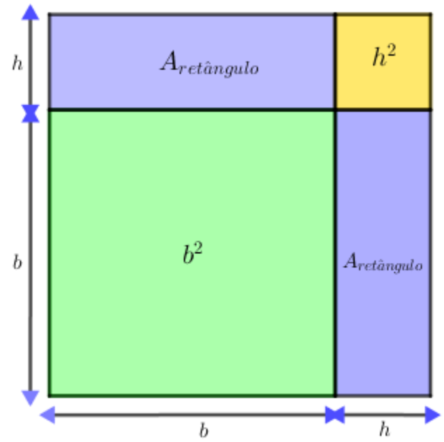
Figura 3: Figura do Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Construa um quadrado Q, cuja medida do lado é $(b + h)$. Essa região quadrada contém duas cópias de A e mais duas regiões quadradas, uma cujo lado mede b e outra cujo lado mede h.

Figura 4: Fórmula do Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

A área dessa região quadrada Q é dada $(b+h)^2$. Tal expressão, tem a seguinte fatoração:

$$(b+h)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot h + h^2$$

Por outro lado, a área desse quadrado de lado (b + h) é igual a área do quadrado de lado b mais a área do quadrado de lado h e mais duas vezes a área do retângulo de lados b e h. Comparando as duas expressões, concluímos que

$$\boxed{A_{Retângulo} = b \cdot h} \tag{1}$$

4.1.3 Área do paralelogramo

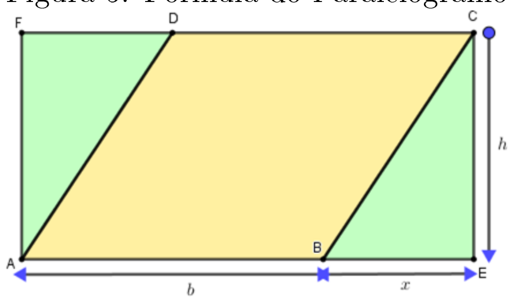
Um paralelogramo é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos, ângulos opostos iguais e pares de lados opostos congruentes.

Proposição 4.3. *A área de um paralelogramo de comprimento b e largura h é igual a* ***b.h***

Demonstração

Seja ABCD um paralelogramo cuja comprimento mede b e largura h. Ele determina um retângulo $AECF$, cujos lados medem $(b+x)$ e h.

Figura 5: Fórmula do Paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

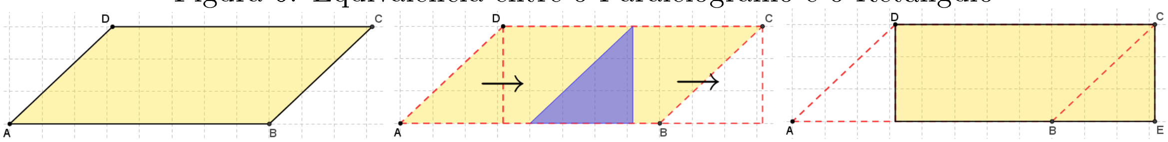
A área dessa região retangular é dada pelo produto do comprimento $(b+x)$ e largura h. Os dois triângulos de verde formam um retângulo de lados x e h. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Área do retângulo } AECF &= \text{Área do paralelogramo amarelo} + \text{Área do retângulo verde} \\
\text{Área do paralelogramo amarelo} &= \text{Área do retângulo } AECF \text{ - Área do retângulo verde} \\
\text{Área do paralelogramo} &= (b+x)\cdot h - x\cdot h
\end{aligned}$$

$$\boxed{A_{Paralelogramo} = b\cdot h} \tag{2}$$

Portanto, a área de um paralelogramo é o produto do comprimento pela largura. Conclui-se, também, que paralelogramo e retângulo que possuem o mesmo comprimento e largura, as suas áreas são equivalentes, conforme ilustra figura abaixo.

Figura 6: Equivalência entre o Paralelogramo e o Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.4 Área do triângulo

Triângulo é um polígono formado por três lados e três ângulos internos.

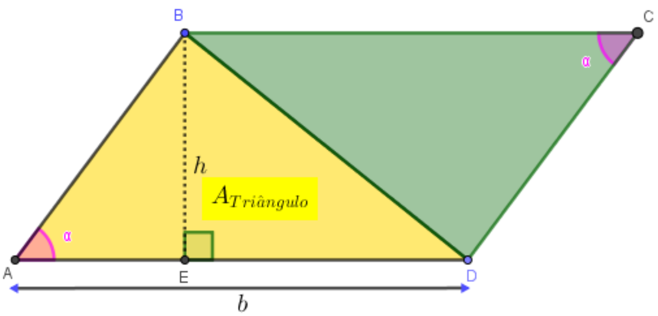
Proposição 4.4. *Um triângulo de comprimento b e largura h tem área igual a* $\mathbf{\dfrac{b.h}{2}}$

Demonstração

Seja $ABCD$ um paralelogramo de base b e altura h. Por ser um paralelogramo, os lados opostos são paralelos e congruentes ($AD \cong BC$ e $AB \cong CD$). E os ângulos opostos são congruentes entre si ($B\hat{A}D \cong B\hat{C}D$ e $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$).

Cria-se uma diagonal BD no paralelogramo formando dois triângulos (amarelo e verde).

Figura 7: Fórmula do Triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Logo, pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado, ângulo, lado), as regiões triangulares são congruentes. Logo, esses triângulos têm áreas iguais.

Assim:

$$\begin{aligned} \text{Área do Paralelogramo} &= 2\ .\ \text{Área do Triângulo} \\ b \cdot h &= 2 \cdot A_{Triângulo} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}} \tag{3}$$

Conclui-se, portanto, que a área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer de seus lados pela medida da altura correspondente.

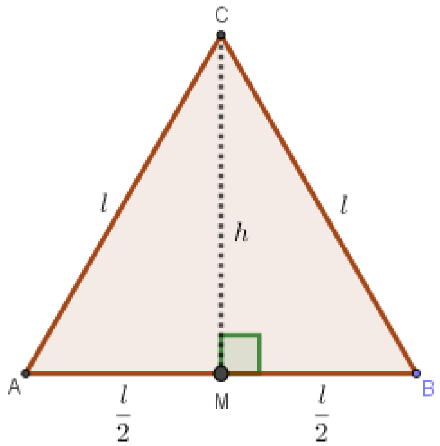
Um dos casos particulares desse polígono é o triângulo equilátero. Ele é formado por três lados iguais, sendo que todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também mediatriz, mediana e bissetriz.

Corolário 4.1. *A área de um triângulo equilátero de lado l é igual a* $\mathbf{\frac{l^2.\sqrt{3}}{4}}$

Demonstração

Seja o triângulo ABC, cria-se uma região triangular.

Figura 8: Triângulo Equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor

Como o triângulo AMC é retângulo, usa-se a relação de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + (\frac{l}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3 \cdot l^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área da região triangular ABC é dada por:

$$A_{T_{eq}} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\boxed{A_{T_{eq}} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} \tag{4}$$

É importante destacar que o estudo da área do triângulo equilátero é tópico de suma importância para resolver questões de Sólidos Geométricos, envolvendo, principalmente, os poliedros de Platão.

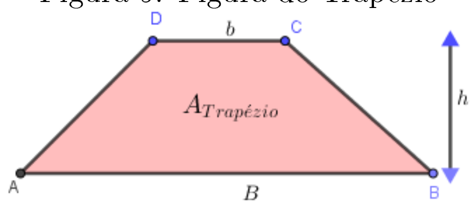
4.1.5 Área do trapézio

O trapézio é um quadrilátero com pelo menos dois lados paralelos entre si, que são chamados de base maior e base menor, e os outros dois lados são chamados laterais.

Proposição 4.5. *A área de um trapézio de bases* $\boldsymbol{B}$ *e* $\boldsymbol{b}$ *com largura* $\boldsymbol{h}$ *é* $\mathbf{\frac{(B+b)\cdot h}{2}}$

Demonstração

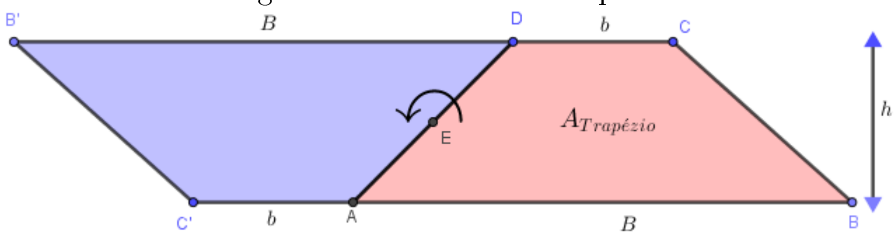
Figura 9: Figura do Trapézio



Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se pensar na área do trapézio como a metade de um paralelogramo de comprimento $(B+b)$ e largura h. Considerando E como o ponto médio do segmento AD, o trapézio azul é obtido do rosa fazendo uma rotação horária de 90º. Assim, a união dos trapézios resulta em um paralelogramo.

Figura 10: Fórmula do Trapézio



Fonte: Elaborada pelo autor

Para encontrar a área do trapézio, faz-se o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \text{Área do Paralelogramo} &= 2\ .\ \text{Área do Trapézio} \\ (B+b)\cdot h &= 2\cdot A_{Trapézio} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_{Trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}} \tag{5}$$

Portanto, a área de um trapézio é a metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.

4.1.6 Área do polígono regular

Um polígono é regular se tiver todos os seus lados iguais e todos os seus ângulos internos congruentes.

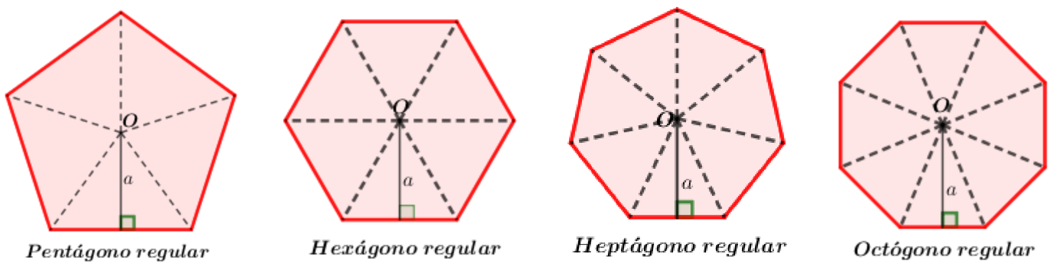
Proposição 4.6. *A área de um polígono regular de n lados de medidas igual a l, cujo apótema mede a, é* $\frac{\mathbf{n.l.a}}{\mathbf{2}}$

Demonstração

Em um polígono regular de n lados, ao traçar n segmentos de reta, cada um unindo o centro do polígono a um vértice, decompõe-se o polígono em n triângulos isósceles. Vale ressaltar que a altura desses triângulos correspondem a apótema (a).

Além do triângulo equilátero e do quadrado, os mais importantes polígonos regulares são o pentágono, hexágono e octógono.

Figura 11: Polígonos regulares decompostos em triângulos isósceles



Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, a área A de um polígono regular de n lados, cujo lado mede l e apótema sendo a, é dada por:

$$A_{Pol_{Reg}} = quantidade\ de\ lados \cdot área\ de\ cada\ triângulo$$

$$\boxed{A_{Pol_{Reg}} = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}} \tag{6}$$

Sendo $n.l$ o perímetro (2p), então $\frac{n \cdot l}{2}$ corresponde ao semiperímetro(p) de forma equivalente, temos:

$$\boxed{A_{Pol_{Reg}} = p \cdot a} \tag{7}$$

Na prática, em vez de apenas memorizar a fórmula da área de cada polígono regular, é útil saber os passos que levam a ela, ou seja, decompõe-se o polígono em n triângulos isósceles, cuja medida do lado é l e a medida da altura é o apótema[43] (a).

É notório salutar que o estudo dessas áreas são relevantes para calcular a área de poliedros de bases regulares.

[43] O apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e outra no ponto médio de um lado do polígono.

4.2 Áreas de Regiões não Poligonais

Determinar a área de regiões não poligonais requer a adoção de métodos que exploram a ideia de aproximação. Uma dessas ideias se baseia no método de exaustão de Eudoxo[44](c. 408-355 a.C), o qual pode ser usado no cálculo da área do círculo.

4.2.1 Área do círculo

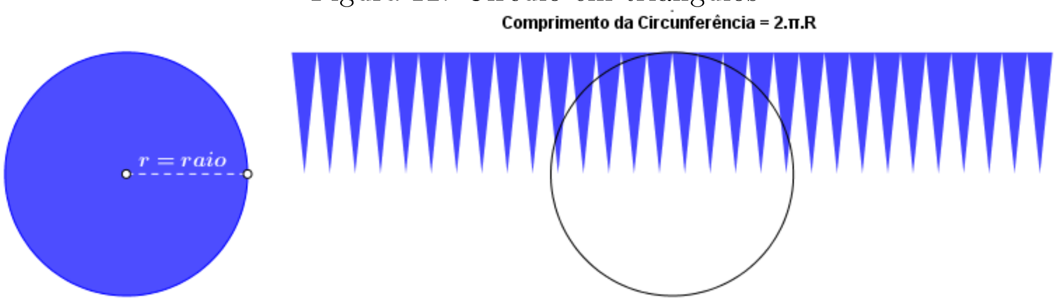
Um círculo é o conjunto dos pontos internos de uma circunferência.

Proposição 4.7. *A área de um círculo de raio r é $\pi \cdot r^2$*

Demonstração

A primeira maneira de determinar a área do círculo é dividindo-o em setores. O círculo a seguir foi aberto em setores circulares que formaram vários triângulos.

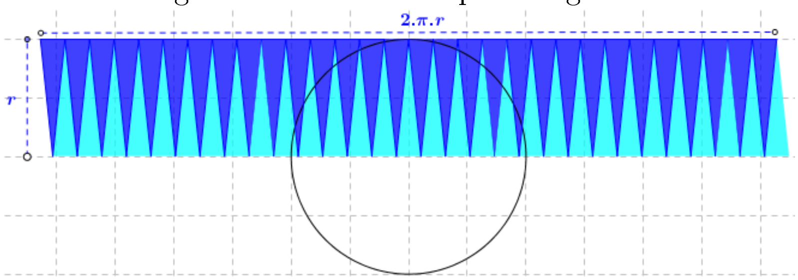
Figura 12: Círculo em triângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

Duplicou-se, então, os triângulos e formou se uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo.

Figura 13: Círculo em paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

A área do círculo corresponde a metade da área desse paralelogramo, cuja base mede o comprimento da circunferência e sua altura é o raio r. Assim, o círculo possui área igual a:

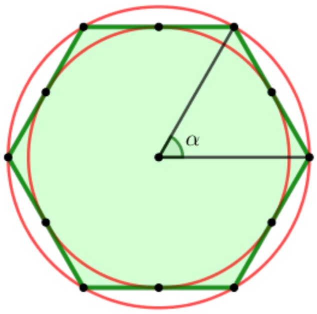
[44] O método da exaustão é um método para se encontrar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada.

$$
\begin{aligned}
\text{Área do Círculo} &= \frac{\textit{Área do Paralelogramo}}{2} \\
\text{Área do Círculo} &= \frac{2\pi \cdot r \cdot r}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A_{Círculo} = \pi \cdot r^2} \tag{8}$$

Outra maneira de calcular a área de um círculo é usando a propriedade dos polígonos regulares, em que todos eles são inscritíveis e circunscritíveis numa circunferência. Sendo que, a medida que o número de lados do polígono aumenta, o comprimento do apótema também aumenta, mas o comprimento do lado diminui. Dessa forma, "quando o número de lados de um polígono é extremamente grande o seu perímetro é aproximadamente igual ao comprimento da circunferência do círculo(2πr) e seu apótema a é aproximadamente igual ao raio do círculo r"(IEZZI et. al., 2006, p. 217).

Figura 14: Exemplo de polígono regular inscrito e circunscrito



Fonte: Elaborada pelo autor

Dessa forma, a área do polígono regular também será a área da circunferência.

Comprimento = Perímetro = 2 . semiperímetro

$$
\begin{aligned}
\text{Área do Polígono Regular} &= p \cdot a \\
\text{Área do Círculo} &= \pi \cdot r \cdot r
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A_{Círculo} = \pi \cdot r^2}$$

Vale ressaltar que a área do círculo é um tema relevante para resolver questões de sólidos geométricos envolvendo cilindros e cones.

5 ÁREAS DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Sólidos geométricos são figuras geométricas que possuem três dimensões e, por isso, só podem ser definidas no espaço tridimensional.

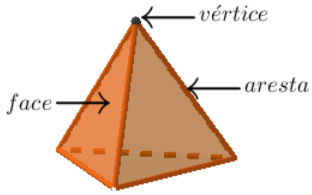
Os sólidos geométricos podem ser classificados em **poliedros**, **corpos redondos** e outros.

5.1 Poliedros

A palavra poliedro vem do grego poli que significa "várias" e da palavra edro que significa "face". Deste modo, conceituam-se poliedros como sólidos geométricos formados pela reunião de um número finito de polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc) e a região do espaço limitada por eles, cujos ângulos poliédricos são todos congruentes (DANTE, 2016).

Os elementos que compõem os poliedros são: faces, vértices e arestas. Faces são polígonos que formam a superfície do sólido e as arestas, por sua vez, são os segmentos de reta que formam os lados dos polígonos que constituem as faces dos poliedros, sendo aqueles determinados pela interseção de duas faces. Já os vértices são o ponto comum a três ou mais arestas.

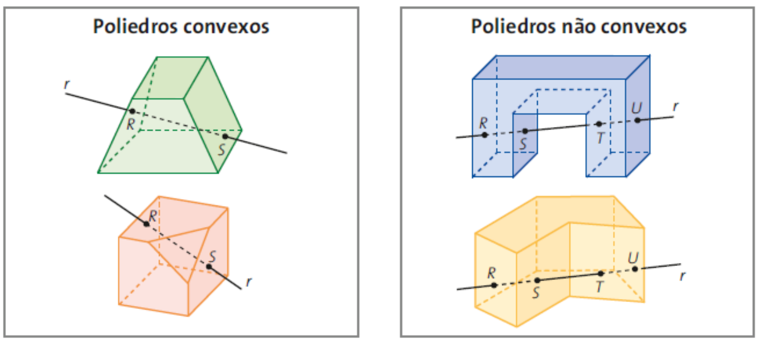
Figura 15: Elementos do Poliedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Os poliedros podem se dividir em convexo e não convexo (côncavo). Um poliedro é convexo quando o segmento de reta que liga dois de seus pontos está sempre contido nele, ou seja, não apresentam reentrâncias em sua superfície. No entanto, o poliedro não convexo é aquele que possui reentrâncias.

Figura 16: Poliedros convexos e não convexos (côncavos)



Fonte: DANTE, 2016, p.168.

A representação dos poliedros pode ser de diferentes maneiras, por exemplo, em perspectiva ou pela planificação de sua superfície. A perspectiva será explanada através do ensino de suas áreas através do GeoGebra, já a planificação será essencial para o cálculo de áreas através dos materiais manipuláveis.

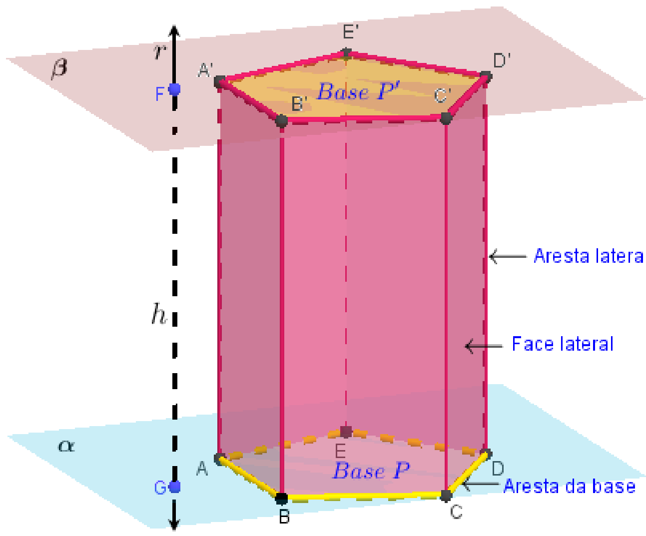
A quantidade de tipos e formas existentes desses sólidos é enorme, mas este trabalho abordará apenas os poliedros mais relevantes.

5.1.1 Área do prisma

Prisma é o sólido geométrico formado por polígonos, sendo dois polígonos congruentes e paralelos (bases) e os demais (faces laterais) são os paralelogramos formados pela união de todos os segmentos de reta congruentes e paralelos a um segmento dado, com extremidades nos pontos do polígono fixo e não paralelo a esse.

Considerando dois planos paralelos distintos α e β, uma região poligonal convexa ABCDE contida em α e uma reta r que intersecta os planos α e β.

Figura 17: Prisma



Fonte: Elaborada pelo autor

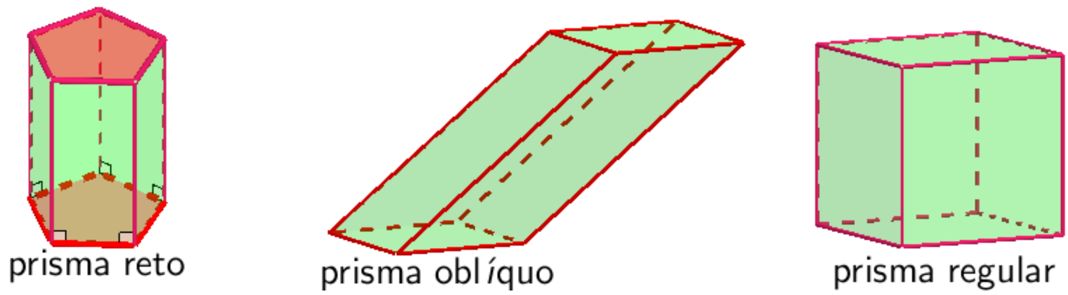
Baseado na figura acima, o prisma é a região do espaço limitada por todos os segmentos de reta paralelos a r tais que uma de suas extremidades no polígono P e a outra extremidade é um ponto no plano β.

O prisma possui os seguintes elementos: bases, altura, arestas da base, arestas laterais e as faces laterais. As bases são os polígonos congruentes e estão situados em planos paralelos (ABCDE e A'B'C'D'E'). A altura é a distância entre os planos das bases (h). As arestas da base são os lados dos polígonos das bases ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$ *e* $\overline{E'A'}$). As arestas laterais são os segmentos de reta paralelos a r (*AA', BB', CC', DD' e EE'*). As faces laterais são os paralelogramos formados pela união dos segmentos de retas ($\overline{AA'B'B}$, $\overline{BB'C'C}$, $\overline{CC'D'D}$, $\overline{DD'E'E}$ e $\overline{EE'A'A}$).

A nomenclatura desses sólidos geométricos é de acordo com o número de lados dos polígonos das bases: triangular (triângulo), quadrangular (quadrilátero), pentagonal (pentágono), etc.

Esses poliedros são classificados de acordo com a inclinação da reta r em relação aos planos que contêm as bases. O prisma reto é aquele em que as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base e o prima oblíquo é quando não são. Já o prisma é considerado regular quando é um prisma reto em que as bases são polígonos regulares.

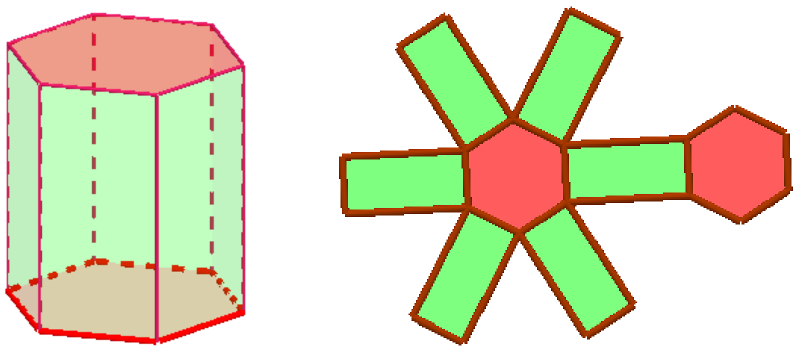
Figura 18: Classificação dos prismas



Fonte: Elaborada pelo autor

Já para o cálculo da área, observa-se a planificação do prisma.

Figura 19: Planificação do prisma



Fonte: Elaborada pelo autor

A área da superfície de um prisma é calculada da seguinte forma.

$$\boxed{A_T = 2 \cdot A_B + A_L} \tag{9}$$

Área da base (A_B) corresponde à área do polígono da base.
Área lateral (A_L) é a soma das áreas das faces laterais.
Área total (A_T) é a soma da área lateral com as áreas das bases.

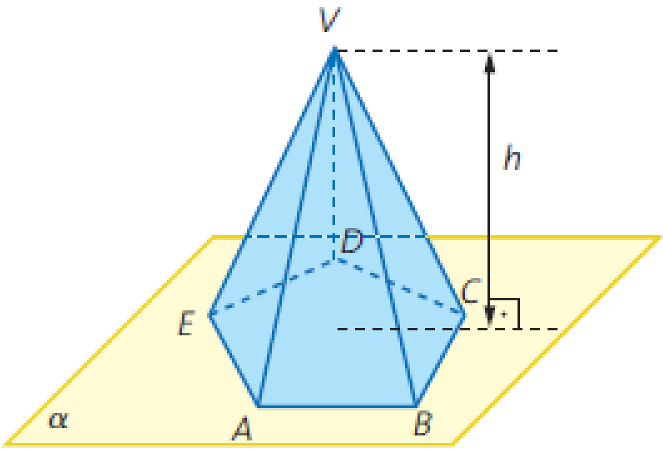
Portanto, a área total de um prisma é duas vezes a área da base adicionada ao somatório das áreas laterais. Vale ressaltar que a área de cada polígono já foi mencionada anteriormente.

5.1.2 Área da pirâmide

A pirâmide é um poliedro formado por um conjunto de segmentos de reta formando faces laterais triangulares, cujas extremidades são um único polígono (base) e um ponto fora do plano onde se encontra essa base.

Considerando um plano α, uma região poligonal convexa ABCDE contida em α e um ponto V fora do plano.

Figura 20: Pirâmide



Fonte: DANTE, 2016, p.188.

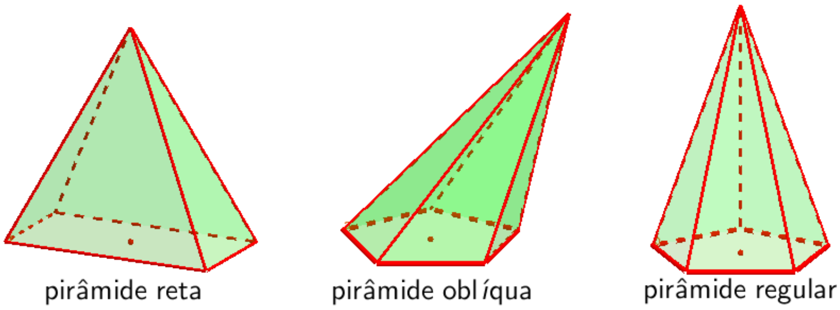
De acordo com a figura acima, a pirâmide é a região do espaço limitada pelos segmentos com uma extremidade em V ($V \notin \alpha$) e outra nos pontos do polígono situado em α.

Os elementos da pirâmide são: base, vértice, altura, arestas da base, arestas laterais e as faces laterais. A base é um polígono (ABCDE). O vértice é o ponto fora do plano onde está a base (V). A altura é a distância entre o ponto e o plano da base (h). As arestas da base são os lados do polígono da base ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$). As arestas laterais são os segmentos de reta com uma extremidade no vértice e a outra em um dos vértices do polígono da base ($\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$). As faces laterais de uma pirâmide são triangulares (AVB, BVC, CVD, DVE e EVA).

A nomenclatura desse sólido geométrico é de acordo com o número de arestas da base: pirâmide triangular (3 arestas), pirâmide quadrangular (4 arestas), pirâmide pentagonal (5 arestas) e pirâmide hexagonal (6 arestas), etc.

Esses poliedros podem ser classificados de acordo com a coincidência da projeção do seu vértice com o centro geométrico da base. A pirâmide é reta quando a projeção de seu vértice coincide com o ponto que tem a mesma distância dos vértices do polígono da base. Ela será oblíqua quando a projeção do vértice não coincide com o centro da base. Contudo, para a pirâmide ser regular é necessária que seja reta, sua superfície poligonal seja um polígono regular e suas faces laterais sejam triângulos isósceles e congruentes.

Figura 21: Classificação das pirâmides

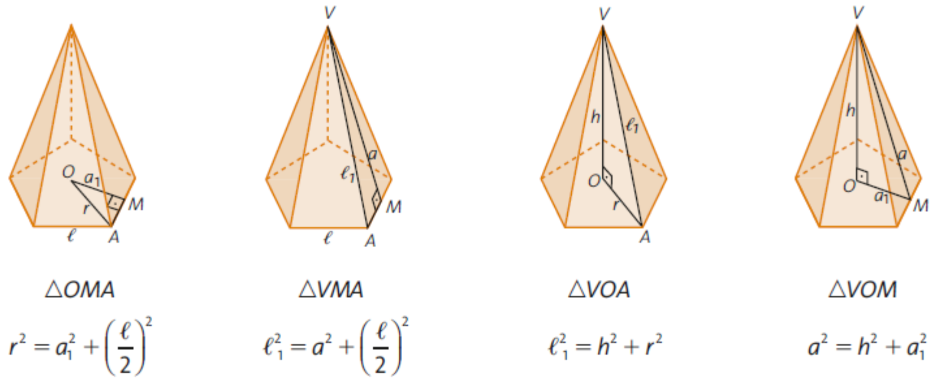


Fonte: Elaborada pelo autor

Vale destacar que em toda pirâmide regular possui quatro importantes triângulos retângulos, nos quais aparece a aresta de base (l), a aresta lateral (l_1), o raio da circunferência circunscrita à base (r), o apótema da pirâmide (a), o apótema da base (a_1) e altura da pirâmide (h).

Tomando como demonstração uma pirâmide regular pentagonal, aplica-se a relação de Pitágoras nestes triângulos.

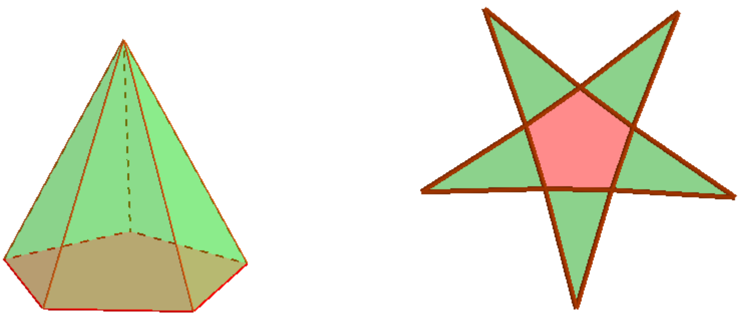
Figura 22: Relações Métricas do triângulo retângulo na pirâmide



Fonte: DANTE, 2016, p.189.

Já para o cálculo da área, observa-se a planificação da pirâmide.

Figura 23: Planificação da pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor

A área da superfície de uma pirâmide é calculada assim:

$$\boxed{A_T = A_B + A_L} \tag{10}$$

Área da base (A_B) é a área do polígono da base.
Área lateral (A_L) é a soma das áreas das faces laterais.
Área total (A_T) é a soma da área lateral com a área da base.

Portanto, a área de uma pirâmide é a área da base adicionada ao somatório das áreas das faces laterais.

5.2 Poliedros de Platão

Um poliedro convexo e regular é chamado sólido de Platão se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:

- Todas as faces têm o mesmo número **n** de arestas.
- Todos os vértices são pontos em que concorre o mesmo número **m** de arestas.
- O poliedro satisfaz a relação de Euler (V - A + F = 2). (IEZZI et.al., 2016, p. 187)

O matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre o número de vértice (V), o número de arestas (A) e o número de faces (F) de um poliedro convexo. De acordo com o matemático, $V - A + F = 2$ é característica a todos os poliedros convexos.

Contudo, existem somente cinco sólidos platônicos: tetraedro, hexaedro ou cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Usando a fórmula de Euler, tal fato será demonstrado.

Demonstração

Considere um polígono regular em que n ($n \geq 3$)[45] é o número de lado de cada face (F) e p (p≥3)[46] é o número de arestas (A) que concorrem em cada vértice (V). Como cada aresta do polígono é definida pela interseção dos lados de dois polígonos adjacentes, então se contar todos os lados dos polígonos, cada aresta do poliedro será contada duas vezes. Assim, a aresta está contida em 2 faces (2A = nF). Do mesmo modo, como cada aresta do poliedro que concorrem em um mesmo vértice se conecta a dois vértices, conclui-se que quando conta-se o número de arestas em cada face, conta-se duas vezes o número de arestas do poliedro. Portanto, cada aresta contém 2 vértices (2A = pV).

Assim:

$$2A = n.F = p.V \quad \Rightarrow \quad \text{A}=\frac{n.F}{2} \ \text{ e } \ \text{V}=\frac{n.F}{p}$$

Utilizando a relação de Euler $V - A + F = 2$ e substituindo os valores, tem-se:

[45] O menor número possível de lados em cada face é 3 (face triangular).
[46] O menor número possível de arestas que concorrem para o mesmo vértice é 3.

$$\frac{n.F}{p} - \frac{n.F}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2n + 2p - np} \tag{11}$$

Para que essa fórmula tenha validade e o número de faces seja positivo, o denominador deve ter valor maior que zero.

$$2n + 2p - np > 0 \quad \Rightarrow \quad 2n > np - 2p \quad \Rightarrow \quad 2n > p.(n-2) \quad \Rightarrow \quad \frac{2n}{n-2} > p$$

Como $p \geq 3$, tem-se que:

$$\frac{2n}{n-2} > p \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 2n > 3n - 6 \quad \Rightarrow \quad 2n - 3n > -6 \quad \Rightarrow \quad -n > -6 \quad \Rightarrow \quad n < 6$$

Partindo disso, tem as seguintes possibilidades: $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$.

- Para $n = 3$ (3 lados - faces triangulares):
  Sendo F um número positivo, segue que $3 \leq p < 6$. Então: $p = 3$, $p = 4$ ou $p = 5$.

$$\begin{array}{lcll} p = 3 & \rightarrow & F = 4 & \text{(tetraedro)} \\ p = 4 & \rightarrow & F = 8 & \text{(octaedro)} \\ p = 5 & \rightarrow & F = 20 & \text{(icosaedro)} \end{array}$$

- Para $n = 4$ (4 lados - faces quadrangulares):
  Substituindo em (11), temos: $F = \dfrac{4p}{4-p}$

  Sendo F um número positivo, segue $p < 4$. Logo, a única possibilidade é $p = 3$.

$$p = 3 \quad \rightarrow \quad F = 6 \quad \text{(cubo)}$$

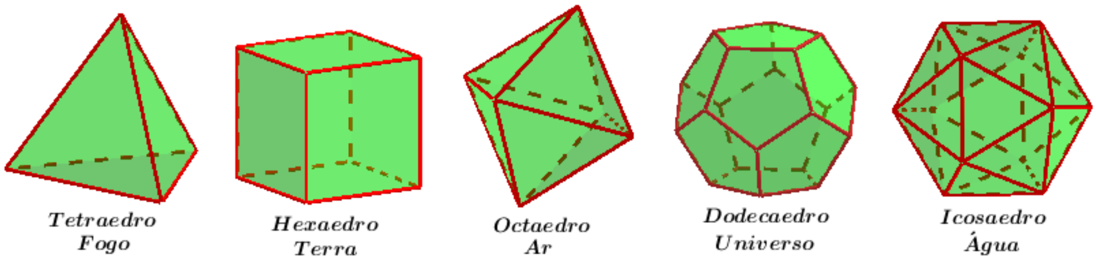
- Para $n = 5$ (5 lados - faces pentagonais):
  Substituindo em (11), temos: $F = \dfrac{4p}{10-3p}$

  Sendo F um número positivo, segue $p < 10/3$. Logo, a única possibilidade é $p = 3$.

$$p = 3 \quad \rightarrow \quad F = 12 \quad \text{(dodecaedro)}$$

Os cinco poliedros platônicos ou corpos cósmicos receberam este nome porque foram estudados pela escola de Platão e este estudioso os associou aos elementos da natureza. O tetraedro ao fogo, o hexaedro a terra, o octaedro ao ar, o icosaedro a água e o dodecaedro ao universo.

Figura 24: Poliedros de Platão



Fonte: Elaborada pelo autor

A tabela abaixo resume as principais características dos poliedros regulares que, a posterior, será detalhada suas áreas.

Tabela 2: Características dos poliedros regulares

Poliedros regulares	Formas das faces	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas
Tetraedro	Triangular	04	04	06
Hexaedro	Quadrangular	06	08	12
Octaedro	Triangular	08	06	12
Dodecaedro	Pentagonal	12	20	30
Icosaedro	Triangular	20	12	30

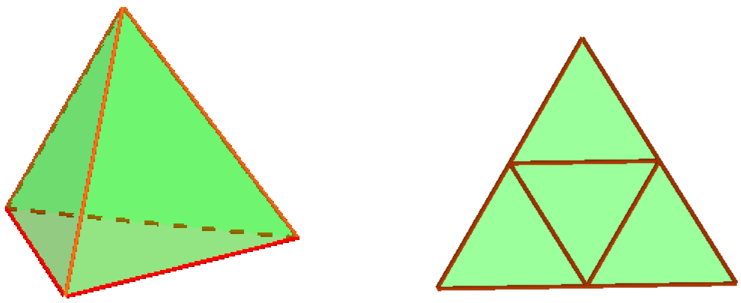
Fonte: Elaborada pelo autor

5.2.1 Área do tetraedro

Tetraedro regular é uma pirâmide regular de base triangular em que todas as arestas são congruentes e, portanto, todas as faces são triângulos equiláteros. Esse poliedro é composto por 4 faces triangulares, 4 vértices e 6 arestas.

Através da planificação desse sólido geométrico, torna-se mais compreensível o cálculo da sua área.

Figura 25: Planificação do tetraedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se perceber que a área do tetraedro é quatro vezes a área do triângulo equilátero por ele formado.

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área do tetraedro} &= 4\ .\ \text{Área do triângulo equilátero} \\ &= 4 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

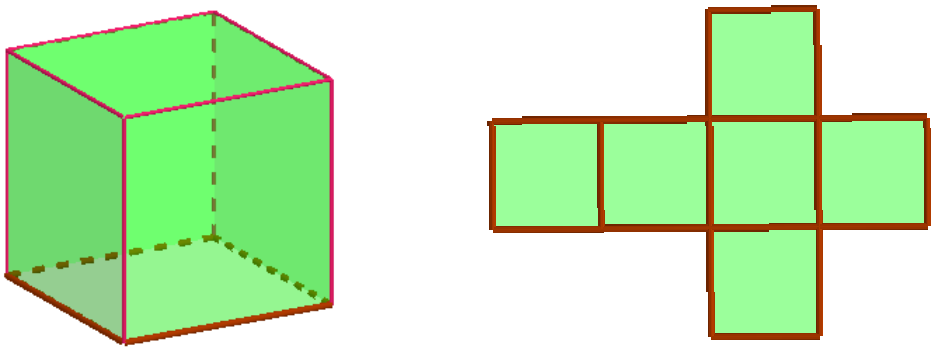
$$\boxed{A_{Tetraedro} = l^2 \cdot \sqrt{3}} \qquad (12)$$

5.2.2 Área do hexaedro

Hexaedro regular é um prisma regular em que todas as faces são quadrados. Ele também é conhecido como cubo, sendo um caso particular de paralelepípedo regular e composto por 6 faces quadrangulares, 8 vértices e 12 arestas.

O cálculo da área desse poliedro é mais perceptível por intermédio de sua planificação.

Figura 26: Planificação do hexaedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Conclui-se, portanto, que a área do hexaedro é seis vezes a área do quadrado por ele formado.

Assim,

$$\text{Área do hexaedro} = 6\ .\ \text{Área do quadrado}$$

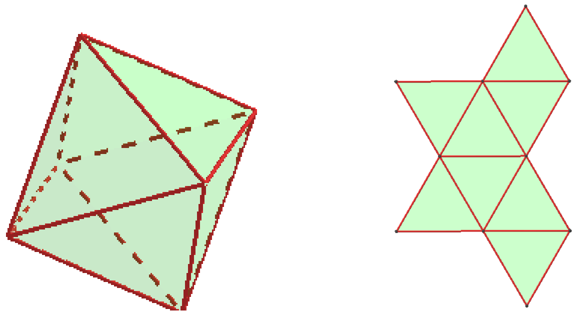
$$\boxed{A_{Hexaedro} = 6 \cdot l^2} \qquad (13)$$

5.2.3 Área do octaedro

Octaedro regular é o sólido de 8 faces, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Ele também é chamado de bipirâmide quadrada, pois é resultante de duas pirâmides de base quadrada, as quais foram colocadas base a base. Esse poliedro é composto por 8 faces triangulares, 6 vértices e 12 arestas.

A planificação desse sólido geométrico facilita o cálculo da sua área.

Figura 27: Planificação do octaedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Percebe-se, então, que a área do octaedro é oito vezes a área do triângulo equilátero por ele formado. Assim,

Assim,

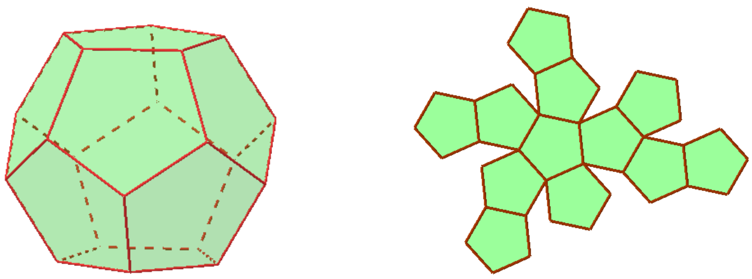
$$\begin{aligned}\text{Área do octaedro} &= 8\ .\ \text{Área do triângulo equilátero}\\ &= 8\ .\ \frac{l^2.\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{A_{Octaedro} = 2 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}} \qquad (14)$$

5.2.4 Área do dodecaedro

Dodecaedro regular é o poliedro que possui 12 faces. Ele é composto por 12 faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas. Para compreender o cálculo de sua área, faz-se necessário realizar sua planificação.

Figura 28: Planificação do dodecaedro



Fonte: Elaborada pelo autor

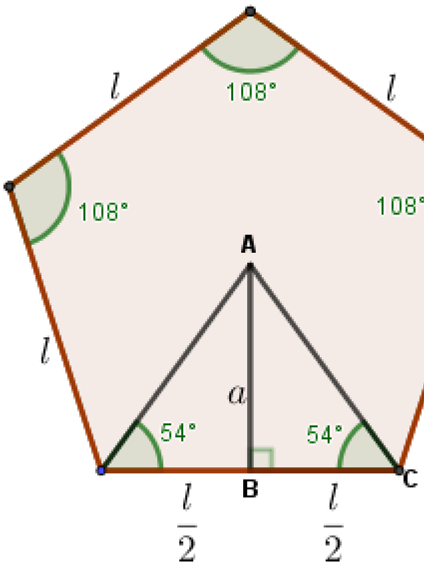
É notório observar que a área do dodecaedro é doze vezes a área do polígono regular com n = 5 (pentágono) por ele formado. Assim:

$$\begin{aligned}\text{Área do dodecaedro} &= 12\ .\ \text{Área do polígono regular}\\ &= 12\ .\ n \cdot \frac{l \cdot a}{2}\\ &= 12\ .\ 5 \cdot \frac{l \cdot a}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{A_{Dodecaedro} = 30 \cdot l \cdot a} \qquad (15)$$

Quando se trabalha com sólidos geométricos de base pentagonal, utiliza-se a fórmula do polígono regular quando a questão fornecer o valor da aresta/lado e do apótema. Caso contrário, é melhor utilizar a fórmula da tangente que é demonstrada logo abaixo.

Figura 29: Pentágono e seus ângulos



Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo a tabela trigonométrica a tan54° = 1,376382. Utilizando a tangente, tem-se uma relação entre a aresta e a apótema da base do dodecaedro. Tomando como base o triângulo ABC da Figura 29, temos:

$$\tan = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjascente} \Rightarrow \tan 54 = \frac{a}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \tan 54 = \frac{2a}{l} \Rightarrow 1,376382 = \frac{2a}{l}$$

$$\boxed{a{=}0{,}68819\ .\ l} \tag{16}$$

Substituindo (16) em (15), tem-se:

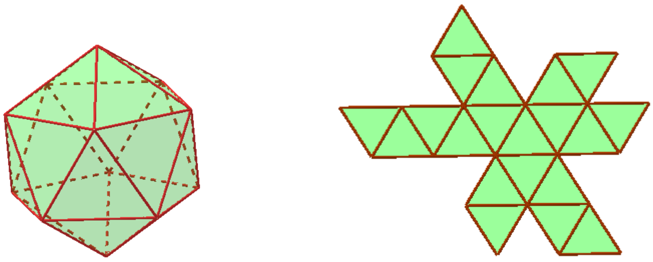
$$A_{Dodecaedro} = 30 \cdot l \cdot l \cdot 0,68819$$

$$\boxed{A_{Dodecaedro} = 20,68 \cdot l^2} \tag{17}$$

5.2.5 Área do icosaedro

Icosaedro regular é o poliedro convexo formado por faces congruentes, no formato de triângulos equiláteros. Esse poliedro é composto por 20 faces triangulares, 12 vértices e 30 arestas. A planificação desse sólido é a melhor forma de entender como calcular sua área.

Figura 30: Planificação do icosaedro



Fonte: Elaborada pelo autor

Desse modo, infere-se que a área do icosaedro é vinte vezes a área do triângulo equilátero por ele formado. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Área do icosaedro} &= 20\ .\ \text{Área do triângulo equilátero} \\ &= 20\ .\ \frac{l^2.\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_{Icosaedro} = 5.l^2.\sqrt{3}} \qquad (18)$$

5.3 Corpos Redondos

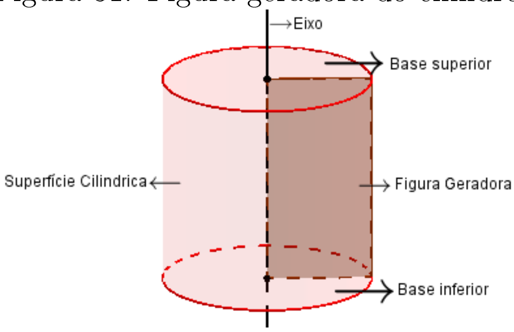
Os corpos redondos são os sólidos geométricos tridimensionais que possuem linhas arredondadas e superfícies curvas (não planas), logo não possuem faces laterais, além de suas bases terem a forma de círculo.

Os principais exemplos de corpos redondos são o cilindro, o cone e a esfera. Eles também são chamados de sólidos de revolução, haja vista que são formados pela rotação de uma figura plana (figura geradora) ao redor do eixo.

5.3.1 Área do cilindro

O cilindro é um sólido geométrico que possui uma estrutura curva, chamada de superfície lateral, e duas bases circulares paralelas. A figura geradora do cilindro é um paralelogramo, o qual gira em torno de seu eixo, conforme figura abaixo.

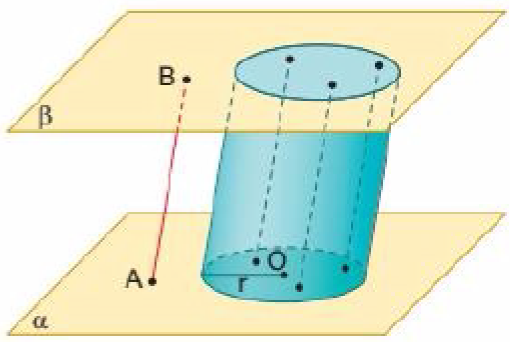
Figura 31: Figura geradora do cilindro



Fonte: Elaborada pelo autor

Considere dois planos paralelos distintos β e α, um círculo C de raio r contido em β e uma reta s secante aos planos.

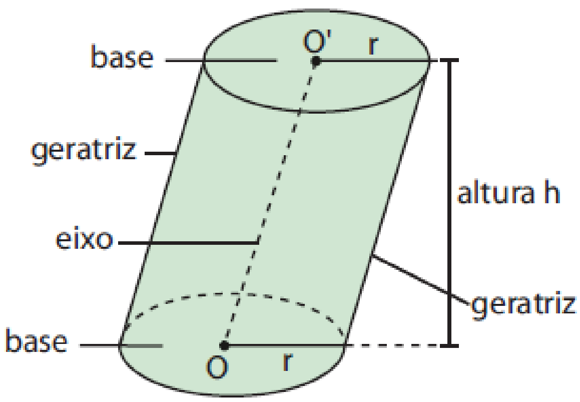
Figura 32: Formação do cilindro



Fonte: SOUZA, 2016, p.235.

Tomando por referência a figura acima, o cilindro é a região do espaço limitada pelos segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade no círculo C e a outra no plano α.

Figura 33: Elementos do cilindro

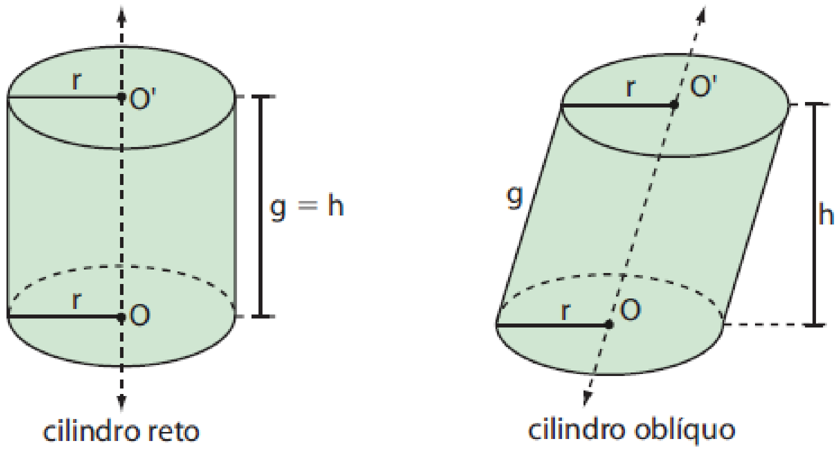


Fonte: IEZZI et.al., 2016, p.192

Os elementos do cilindro são: bases, eixo, altura e geratriz. As bases são os círculos paralelos e congruentes C e C' de centro O e O' e raios r e r' (r = r'). O eixo é a reta que contém os centros dos círculos (OO'). Altura é a distância entre os planos paralelos que contém as bases (h). Já as geratrizes são os segmentos de reta paralelos à direção da reta s, cujos extremos estão em pontos das circunferências das bases (g).

Esses sólidos geométricos são classificados de acordo com a inclinação da geratriz em relação aos planos de sua base. Assim, eles podem ser oblíquos ou retos. O cilindro é oblíquo quando a geratriz é oblíqua aos planos das bases. Mas ele será reto quando a geratriz é perpendicular aos planos das bases. Neste caso, a geratriz é a altura do cilindro. Existe também o cilindro equilátero que é todo cilindro reto cuja altura é igual ao diâmetro da base.

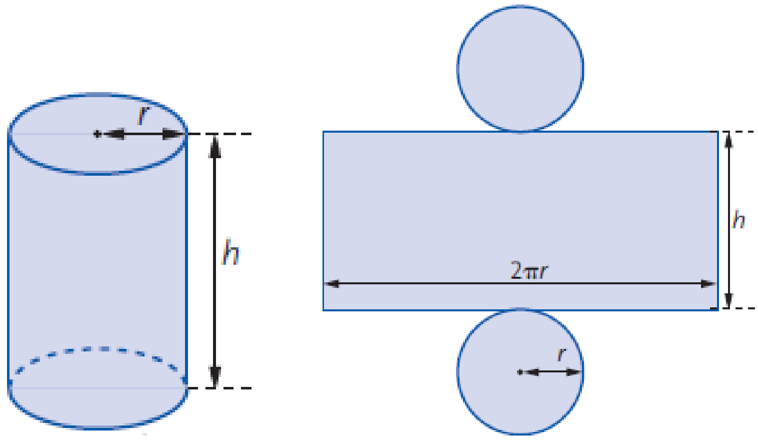
Figura 34: Classificação dos cilindros



Fonte: IEZZI et.al., 2016, p.193.

Contudo, para o cálculo da área desse sólido, faz-se necessário observar sua planificação.

Figura 35: Planificação do cilindro



Fonte: DANTE, 2016, p.72.

Após observar a figura, conclui-se que a área da superfície de um cilindro reto é calculada assim:

$$A_T = 2.A_B + A_L$$
$$A_T = 2.\pi r^2 + 2.\pi.r.h$$
$$\boxed{A_T = 2.\pi.r.(r+h)} \qquad (19)$$

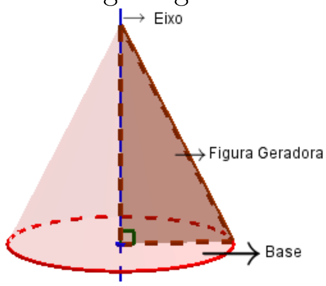
- **Área da base** (A_B) é a área do círculo de raio r dada por $\pi.r^2$.
- **Área lateral** (A_L) é a área do retângulo de lados $2\pi R$ e h, dada por $(A_L) = 2.\pi.R.h$
- **Área total** (A_T) é a soma da área lateral com a área das bases.

Portanto, a área do cilindro é o somatório da área lateral com o dobro da área de uma das bases.

5.3.2 Área do cone

Cone é um sólido geométrico que possui uma superfície arredondada, que é sua lateral, e uma superfície plana, que é uma base em formato de círculo. Em um cone reto, sua formação é dada pela rotação de um triângulo retângulo (figura geradora) em torno do eixo.

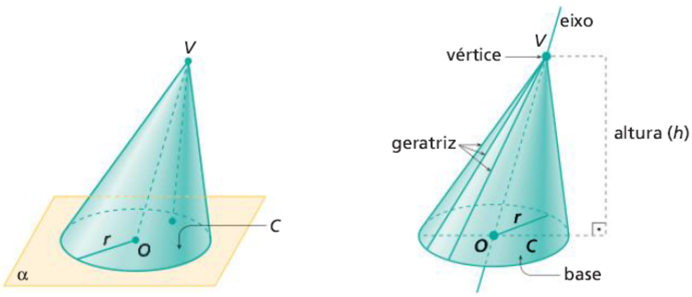
Figura 36: Figura geradora do cone



Fonte: Elaborada pelo autor

Considere um círculo C, de centro O e raio r, em um plano α e um ponto V não pertencente ao plano.

Figura 37: Cone e seus elementos



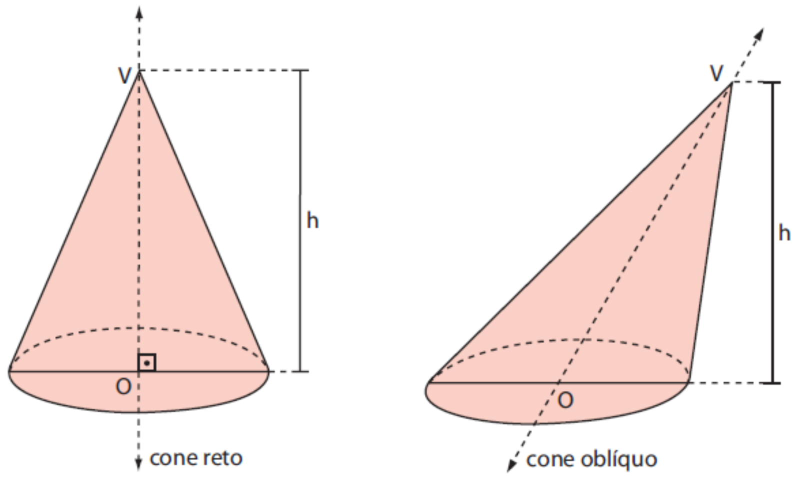
Fonte: LEONARDO, 2016, p.142.

No tocante a figura acima, o cone corresponde à reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra no círculo C.

Os elementos que compõem um cone são: base, vértice, eixo, geratrizes e altura. A base é o círculo C de raio r e o Centro O. O vértice é o ponto externo ao plano (V). O eixo é o segmento de reta que liga o vértice ao centro da base (VO). As geratrizes são segmentos de retas com extremidades em V e na circunferência de base do cone. Já a altura do cone é o segmento de reta perpendicular traçado do vértice ao plano que contém a base (h), sendo que no cone reto, a medida do eixo coincide com a da altura.

O sólido geométrico em estudo é classificado de acordo com a inclinação do eixo em relação ao plano que contém a base. Ele pode ser cone reto quando o eixo é perpendicular ao plano que contém a base, mas será cone oblíquo quando não o for. Além disso, ele também pode ser cone equilátero, quando este for cone reto e a medida da mediatriz for igual ao dobro do raio da base (g = 2r).

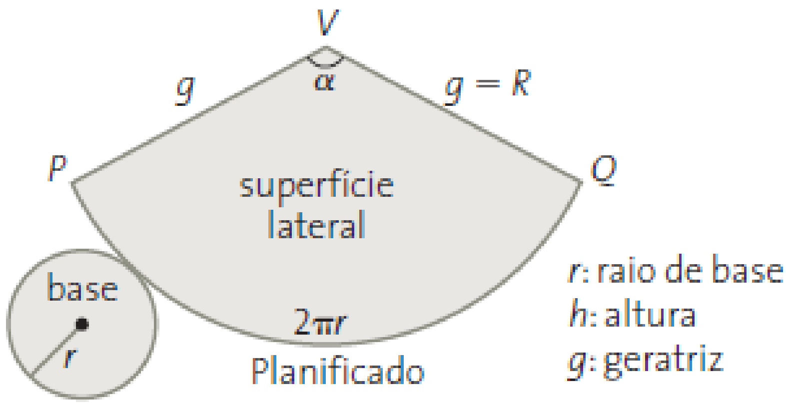
Figura 38: Classificação dos cones



Fonte: IEZZI et.al., 2016, p.201.

Em relação ao cálculo da área de um cone, é mais perceptível quando se observa a planificação desse sólido.

Figura 39: Planificação do cone



Fonte: DANTE, 2016, p.78.

Após analisar a figura acima, a conclusão é que o calculo da área da superfície de um cilindro reto é assim representada:

$$A_T = A_B + A_L$$
$$A_T = \pi.r^2 + \pi.r.g$$
$$\boxed{A_T = \pi.r(r+g)} \tag{20}$$

- **Área da base** (A_B) é a área do círculo de raio r dada por $\pi.r^2$.
- **Área lateral** (A_L) é a área do setor circular tal que o raio é o comprimento g da geratriz e o arco tem comprimento igual da circunferência da base do cone (2πr).

Como a área desse setor é diretamente proporcional ao comprimento do arco que o define, tem-se:

$$\frac{comprimento\ do\ arco\ do\ setor}{comprimento\ da\ circunferência\ de\ raio\ g} = \frac{área\ do\ setor}{área\ do\ círculo}$$

$$\frac{2\pi.r}{2\pi.g} = \frac{A_{Lateral}}{\pi.g^2}$$

$$A_{Lateral} = \frac{(2\pi.r)(\pi.g^2)}{2\pi.g}$$

$$\boxed{A_{Lateral} = \pi.r.g} \tag{21}$$

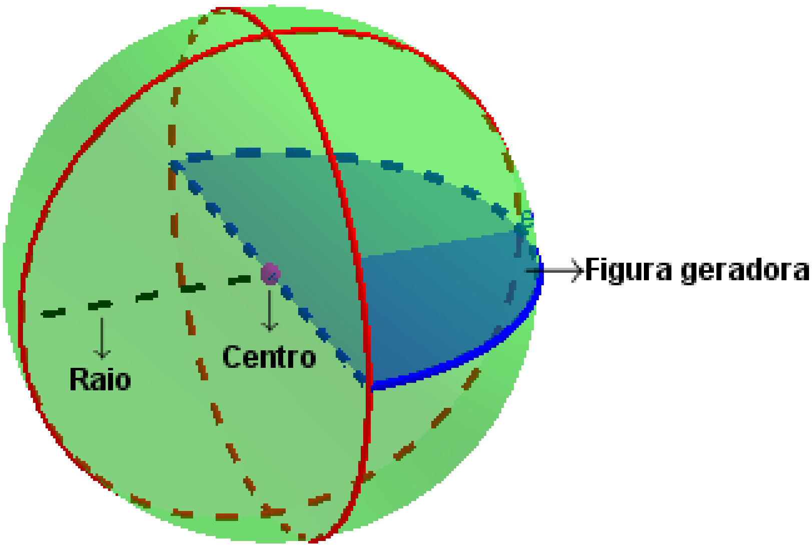
- **Área total** (A_T) é a soma da área lateral com a área da base.

5.3.3 Área da esfera

Esfera é um sólido geométrico formado por todos os pontos do espaço e com uma superfície curva contínua, cujos pontos estão equidistantes do centro, podendo ser igual ou menor que o raio. A esfera pode ser obtida através do movimento de rotação de um semicírculo (figura geradora) em torno de seu diâmetro, formando uma superfície esférica.

É importante diferenciar esfera de superfície esférica. Esta é gerada pela "rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro", ou seja, a casca, e a aquela é o "sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro", ou seja, todo o conteúdo. (IEZZI, 2016, p. 213)

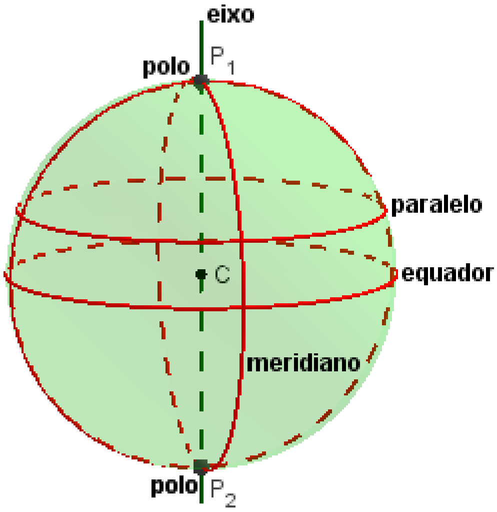
Figura 40: Figura geradora da esfera



Fonte: Elaborada pelo autor

Considere um ponto C do espaço e um segmento de reta de medida r.

Figura 41: Esfera e seus elementos



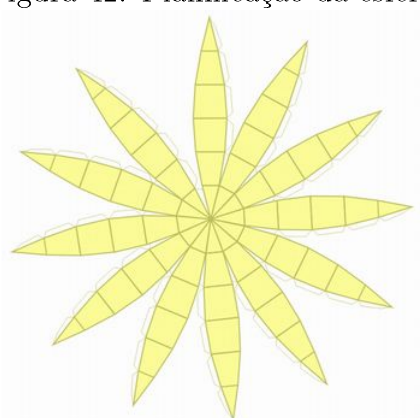
Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando a figura acima, conclui-se que esfera é "conjunto de todos os pontos no espaço cuja distância do ponto O é menor ou igual a r"(BALESTRI, 2016, v. 3, p. 107).

Nesse contexto, a esfera possui os seguintes elementos: polos, equador, paralelo, meridiano, eixo e raio. Os polos são os pontos de interseção da superfície esférica com o eixo (P1 e P2). O equador é a circunferência do círculo (seção) obtido ao se intersectar a esfera por um plano perpendicular ao eixo, pelo centro da esfera, o qual a divide em hemisférios ou semiesferas. O paralelo é qualquer circunferência do círculo obtida ao se intersectar a esfera por um plano perpendicular ao eixo. Já o meridiano é qualquer circunferência do círculo obtida ao se intersectar a esfera por um plano que contém seu eixo. Este, por sua vez, é a reta que passa pelo centro da esfera.

Diferentemente do cilindro e do cone, alguns autores consideram sua planificação impossível, contudo outros afirmam ser difícil, mas possível.

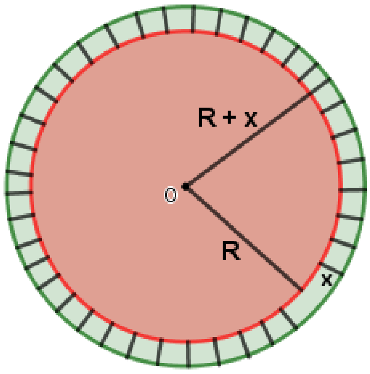
Figura 42: Planificação da esfera



Fonte: HARTUNG, 2010

Após verificar sua planificação, é importante entender o cálculo da área da superfície esférica. Considerando uma esfera de centro O, raio de medida R e área da superfície correspondente a A e outra esfera também de centro O e raio de medida R + x, sendo x um número real positivo, conclui-se que as duas esferas são concêntricas, conforme figura abaixo.

Figura 43: Área da superfície esférica



Fonte: Elaborada pelo autor

O sólido limitado por essas duas esferas parece com uma placa sólida de espessura pequena, ou seja, parece uma "casca", formada por segmentos de reta cujo comprimento é x, o qual tende a zero. O volume V desse sólido limitado pelas duas esferas é aproximado a A.x (área da superfície vezes espessura da superfície), cujo raio é R. O volume V também pode ser expresso pela diferença entre os volumes das duas esferas. Portanto,

$$A.x = \frac{4\pi}{3}(R+x)^3 - \frac{4\pi}{3}R^3$$

$$A.x = \frac{4\pi}{3}(R^3 + 3R^2x + 3Rx^2 + x^3 - R^3)$$

$$A.x = \frac{4\pi.x}{3}(3R^2 + 3Rx + x^2)$$

$$A = \frac{4\pi}{3}(3R^2 + 3Rx + x^2)$$

Se x tende a 0, as parcelas 3Rx e x^2 também tendem a zero.

$$A = \frac{4\pi}{3}(3R^2)$$

$$\boxed{A_{Esfera} = 4.\pi.R^2} \tag{22}$$

Conclui-se, portanto, que (22) é a área de uma superfície esférica de raio medida R.

6 MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Após abordar os conteúdos de Geometria que foram utilizados em sala de aula, faz-se necessário explanar os métodos e instrumentos de seu ensino. Como essa área da Matemática é importante e exige muito da imaginação e criatividade dos alunos, o professor necessita de novos recursos para incentivar a participação do aluno no processo de ensino e aprendizagem, devendo levar em conta os aspectos recreativos e lúdicos das motivações pessoais e o desejo de realizar atividades em grupo.

Tais práticas pedagógicas também devem favorecer a exploração e a resolução de situações problemas através da construção e organização de ideias dos alunos. Assim, a criação, fabricação e utilização dos materiais manipuláveis em sala de aula torna-os um recurso pedagógico útil no aprendizado.

Nesse sentido, a adoção de métodos de aprendizado ativo e interativo está prevista nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM)[47].

> Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes (BRASIL, 2000, p.52).

Outro ponto a ser destacado é que a Geometria está relacionada ao mundo em que vivemos, porém existe a dificuldade dos alunos na passagem do concreto para o abstrato. Esse bloqueio na habilidade de visualização ("ver"no espaço) está presente principalmente na Geometria Espacial, pois não é tarefa fácil imaginar um sólido através de sua planificação ou compreender figuras geométricas espaciais expostas no quadro (MORAES, 2014).

De acordo com Kaleff (2003, p.16), "especificamente no contexto geométrico, a habilidade da visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo tem possibilitado o controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da Geometria".

A mesma autora também ressalta que existe diferença entre percepção visual e percepção espacial. A primeira se refere à representação concreta do que está se vendo,

[47]Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são um conjunto de propostas que trazem sugestões, objetivos e fundamentação teórica dentro de cada área, com a intenção de subsidiar o trabalho docente nas escolas (SILVA; VICTER, 2017, p. 19).

isto é, a apreciação do objeto através da visão. Enquanto, a segunda trata da imagem mental construída a partir do contato e da manipulação do mesmo.

> Crianças pequenas percebem o espaço à sua volta por meio do conjunto de seus sentidos, isto é, o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com os mesmos. É a partir deste contato com as formas do objeto, a textura e as cores do material de que ele é composto, bem como da possibilidade de sua manipulação, que tem origem a construção de uma imagem mental, a qual permitirá evocar o objeto na sua ausência. Assim é que a criança vai formando um conjunto de imagens mentais que representam o objeto, as quais são envolvidas no raciocínio. A partir deste ponto, ela poderá vir a representar com sucesso o objeto observado, através da elaboração de um esboço gráfico ou de um modelo concreto. (KALLEF, 2003, p.16). Grifo nosso.

Assim, a habilidade de visualização mental é melhor desenvolvida à medida que se dá estímulos visuais para que ocorra a construção das imagens mentais. Assim, o uso de materiais concretos ou manipuláveis, como estratégias pedagógicas, irá auxiliar positivamente nessa transição do concreto para o abstrato.

> (...) os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar as crianças na passagem do concreto para o abstrato, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, réguas, papel ponteado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as ideias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático. (SILVA; MARTINS, 2000, p.4). Grifo nosso.

Para auxiliar o desenvolvimento da capacidade de visualização, Moraes (2014) sugere que o professor pode utilizar embalagens que se assemelham com as figuras espaciais para desenvolver imagens mentais, usar modelos que representem os sólidos que estão sendo estudados para formarem uma imagem dos mesmos ou trabalhar com as planificações dos sólidos, facilitando a conexão entre os elementos do plano e espaço.

Neste sentido, Kaleff (2003, p. 17) afirma que:

> Apesar das muitas controvérsias sobre a forma pela qual a visualização se processa em nossa mente, é importante que ocupe seu lugar no ensino da Geometria, pois a habilidade da visualização pode ser desenvolvida até certo ponto, se for disponibilizado ao indivíduo um apoio didático baseado em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo. O material concreto permite ao indivíduo efetivamente ver o objeto de seu estudo.

Diante dessas considerações, faz-se necessário um breve estudo sobre materiais manipuláveis.

6.1 Origem, Definição e Vantagens dos Materiais Manipuláveis

A história dos recursos didático-pedagógicos se confunde com a história da matemática e de seu ensino. Acredita-se que nas civilizações mais antigas utilizavam diversos objetos que estavam ao seu redor para contar, medir e registrar essas informações, cujo objetivo era facilitar e organizar suas rotinas diárias.

No começo da história da humanidade, por não usarem a escrita, a contagem era registrada com materiais disponíveis no dia a dia. O homem primitivo usava como símbolo para sua marcação em ossos, pedaços de madeira ou nas paredes, os quais fazia um traço para cada animal. Também utilizaram as pedras para saber a quantidade do rebanho ou alimento, e mais tarde adotaram os nós em cordas.

No tocante à medição, os povos antigos (egípcios, babilônicos, assírios, chineses, persas e gregos) tinham padrões diferentes para medir. As medidas eram baseadas em partes do corpo, como o cumprimento do pé (passada e jarda), a largura da mão (palmo), a grossura do dedo (polegada), a braça ou o cúbito (distância do cotovelo à ponta do dedo médio). Eles também usaram seixos, vara ou bastão como unidade de medida do comprimento.

Portanto, provavelmente, esses foram os primeiros materiais manipuláveis utilizados pelo homem.

> Foi através da contagem e da manipulação de objetos, que se começou a criar regras, padrões e teorias, ampliando o conceito dos números e surgindo diversos materiais que auxiliam todo o estudo subjacente à Matemática. Desde então, muitos materiais são desenvolvidos em torno desta ciência e, como tal, na educação são considerados recursos fundamentais para a compreensão e construção do conhecimento matemático (CAMACHO, 2012, p. 24).

Neste sentido, faz-se necessário compreender o conceito de Materiais Manipuláveis. No entanto, percebe-se que existem concepções de diversos autores acerca do assunto, dentre eles Zabala, Ribeiro e Camacho. Eles, por sua vez, utilizam nomenclaturas diferentes, como material curricular, recurso educativo, recurso didático, material didático ou instrucional, material estruturado, material manipulativo, material concreto, material manipulável, instrumentos de aprendizagem, objetos de aprendizagem ou artefatos didáticos.

Segundo Zabala (1998), a noção de material curricular é ampla, pois inclui todos os materiais usados pelo professor e cujas finalidades são orientar, guiar, exemplificar, ilustrar, propor e divulgar. Para o autor, os materiais curriculares são "meios que ajudam a responder aos problemas concretos que as diferentes fases do processo de planejamento, execução e avaliação lhes apresentam"(ZABALA, 1998, p.168).

Para Graells (2000 apud CAMACHO, 2012, p. 24), os recursos educativos são "todos os materiais que são usados de modo a facilitar os processos de ensino e de aprendizagem", desde que utilizado num contexto de formação específica. Mas esse autor também distingue os recursos educativos de materiais didáticos, sendo que estes são criados "especificamente" para facilitar a aprendizagem, nos quais os materiais manipuláveis estão inclusos.

Já Chamorro (2003 apud CAMACHO, 2012, p. 26) conceitua recursos didáticos como "todos os recursos que sejam criados, produzidos e aplicados na ação educativa e que promovam o desenvolvimento do processo cognitivo", os quais servem de apoio ao professor enquanto leciona. A autora também diferencia recursos didáticos de materiais didáticos, sendo que estes são todos os materiais manipuláveis usados em sala de aula que permitem aos alunos obterem resultados finais em suas atividades.

Para Mansutti (1993, p. 17), o conceito de material didático ou material instrucional, criado a partir do significado das palavras "material" e "instruir", é "um recurso utilizado durante a ação do professor em que se conjuga a aprendizagem e a formação".

Sobre o mesmo tema, dois autores se complementam Hole e Ribeiro. Segundo Hole (1977), os materiais podem ser didáticos ou estruturados. Os materiais didáticos são todos os meios de aprendizagem e ensino, enquanto os estruturados são "uma coleção de objetos, configurados de maneira à corporizarem, de forma apropriada, uma ou mais estruturas matemáticas"(HOLE, 1977, p. 150), ou seja, apresentam ideias matemáticas definidas.

Analisando essa classificação, Ribeiro (1995) concluiu que o material estruturado é o mesmo material manipulável e acrescentou a essa classificação o material não estruturado. Segundo o autor, o material estruturado ou manipulável é qualquer objeto concreto/instrumento que, através dos sentidos e da sua manipulação, incorpora conceitos matemáticos, relacionando as partes com o todo, e cujo objetivo é promover a aprendizagem. Já o material não estruturado consiste naquele que, ao ser concebido, "não corporizou estruturas matemáticas, não foi idealizado para transparecer um conceito matemático, não apresentando por isso uma determinada função, dependendo seu uso da criatividade do professor"(RIBEIRO, 1995, apud CAMACHO, 2012, p. 27).

Já o material manipulativo, segundo Caldeira (2009, p. 223),

> constitui um instrumento para o desenvolvimento da matemática, que permite ao indivíduo realizar aprendizagens diversas. O princípio básico referente ao uso dos materiais consiste em manipular objectos e "extrair" princípios matemáticos. Os materiais manipulativos devem representar explicitamente e concretamente ideias matemáticas que são abstractas.

No tocante ao material concreto, Brito e Bellemain (2008) restringe-o aos objetos que o aluno pode manipular com suas próprias mãos, sem necessariamente apreender os conteúdos matemáticos em questão. E Lorenzato (2006, p. 18) conceitua-o como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem". Portanto, material concreto pode ser qualquer objeto concreto que, quando manipulados pelo aluno e pelo professor, forneçam uma oportunidade para atingir certos objetivos.

O material manipulável foi conceituado por Reys (1982, p. 5) como "os objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". Já para Serrazina (1991, p. 37) os materiais manipuláveis são "objetos, instrumentos ou outros meios que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem".

Também sobre materiais manipuláveis, Vale (1999, p. 112) conceitua como "o material concreto, de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento ativo dos alunos, por exemplo, o ábaco, geoplano, folhas de papel, etc".

Após refletir acerca das concepções de diversos autores, Camacho conclui que

> os materiais manipuláveis são materiais lúdicos, pedagogicamente estruturados para a aprendizagem dos diversos conteúdos matemáticos, uma vez que, através da sua utilização, estes propiciam uma melhor interação e socialização entre os alunos, contribuindo para uma maior troca e partilha de ideias entre os mesmos. (CAMACHO, 2012, p. 27).

Neste sentido, os materiais manipuláveis possuem diversas e distintas explicações ou nomenclaturas na literatura, mas, por vezes, elas se confundem ou são considerados como sinônimos. Assim, dentre as nomenclaturas acima expostas, o pesquisador optou por usar a termologia materiais manipuláveis.

Portanto, conclui-se que materiais manipuláveis são os objetos, recursos ou instrumentos físicos, concretos, didáticos, lúdicos, dinâmicos e intuitivos que, através dos sentidos e da sua manipulação, proporciona a construção, estruturação, compreensão e concretização dos conceitos matemáticos, além de propiciar uma melhor interação, socialização e partilha de ideias entre os alunos e promover a aprendizagem.

Hodiernamente, existem vários materiais manipuláveis, como geoplanos, torres de Hanói, ábaco, blocos lógicos, barra de cuisenaire, pentaminós, material multibásico, calculador multibásico, polydron, variados jogos para diversos conteúdos matemáticos, pasta com letras de música envolvendo matemática, tangram, sólidos geométricos e calculadoras.

Eles também podem ser construídos de variados elementos, como madeira, papel-cartão, palitos e massa de modelar, varetas e canudos, linha, quebra-cabeça e outros materiais que sirvam de representação para gerar a imagem mental. Com isso, o professor pode exercitar a produção pelos alunos ou utilizar a forma industrializada. Assim, este estudo explorou os materiais manipuláveis de papel-cartão, produzidos pelos alunos com uso de régua e compasso, cujo molde veio da planificação dos sólidos geométricos, os quais foram utilizados para o cálculo de suas áreas.

O uso desses recursos didáticos na metodologia de ensino da Matemática é tão importante que se encontra exposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio

(PCNEM):

> Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. **O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios**. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado (BRASIL, 2000, p. 53). Grifo nosso.

Além disso, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM+), no item de unidades temáticas da Matemática, reforça o uso de instrumentos para auxiliar na compreensão da Geometria Espacial.

> 2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos. **- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções. - Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos** (...) (BRASIL, 2006, p. 125). grifo nosso

Devido sua importância no ensino dos diferentes conteúdos da Matemática, faz-se necessário destacar as vantagens da utilização dos materiais manipuláveis para a aprendizagem. Segundo Sarmento (2010, p.4), as principais vantagens são:

> a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da Matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas.

Serrazina (1991) defende que a utilização de materiais manipulativos devidamente selecionados permitem os seguintes benefícios:

> a) Diversificar as atividades de ensino; b) Realizar experiências em torno de situações problemáticas; c) Representar concretamente ideias abstractas; d) Analisar sensorialmente dados necessários à formação de conceitos; e) Dar oportunidade aos alunos de descobrir relações e formular generalizações; f) Envolver activamente os alunos na aprendizagem; g) Respeitar as diferenças individuais; h) Aumentar a motivação (SERRAZINA, 1991 apud CALDEIRA, 2009, p. 230).

Já o uso de materiais manipuláveis, como estratégica pedagógica no ensino da Geometria, tem os seguintes objetivos: a) utilizar um suporte da materialidade, sem perder os valores educativos, aproximando o abstrato da realidade; b) reavivar o papel de destaque dessa disciplina, envolvendo atividades lúdicas e dinâmicas que possam prender a atenção dos alunos; e c) reverter significativamente esse terrível quadro de negação à matemática, visando o reconhecimento merecido e aprendizagem dos discentes de forma inovadora e estimulante. É perceptível a relevância da utilização dos materiais manipuláveis em sala de aula, contudo é importante destacar que o professor deve conhecê-los, tê-los e saiba como aplicá-los pedagogicamente antes de inseri-lo em sala de aula. Assim, o docente é o responsável por decidir como, quando e porquê da utilização apropriada desse material, adequando-o ao conteúdo a ser explorado e utilizando-o de forma moderada e prudente para que não se torne apenas um brinquedo para o aluno.

Neste sentido, o professor é o orientador nesse processo, em que propõe novos desafios e estimula os alunos a desempenharem um papel mais ativo na sua própria aprendizagem. Já para Passos (2006, p.78), "os materiais didáticos servem como mediadores para facilitar a relação professor/ aluno/ conhecimento no momento em que um saber está sendo construído".

Corroborando com isso, os PCNEM dispõem.

> Sem pretender estabelecer qualquer hierarquia de prioridades, rapidamente descreveremos alguns aspectos, conceitos ou instrumentos didáticos partilhados no ensino de todas as ciências e no da Matemática, começando por considerações sobre o papel do professor, que, conhecendo os conteúdos de sua disciplina e estando convicto da importância e da possibilidade de seu aprendizado por todos os seus alunos, é quem seleciona conteúdos instrucionais compatíveis com os objetivos definidos no projeto pedagógico; problematiza tais conteúdos, promove e media o diálogo educativo; favorece o surgimento de condições para que os alunos assumam o centro da atividade educativa, tornando-se agentes do aprendizado; articula abstrato e concreto, assim como teoria e prática; cuida da contínua adequação da linguagem, com a crescente capacidade do aluno, evitando a fala e os símbolos incompreensíveis, assim como as repetições desnecessárias e desmotivantes. (BRASIL, 2000, p. 51)

Portanto, verifica-se que a utilização dos materiais manipuláveis na sala de aula como recursos mediadores favorecem a aprendizagem dos alunos, desde que os professores saibam utilizá-los em sua totalidade. Neste sentido, o estudo abordou a influência do uso de sólidos geométricos feitos de papel cartão pelos próprios alunos no estudo de área desses sólidos.

6.2 Atividades com Materiais Manipuláveis

Neste Capítulo são apresentadas as atividades propostas para o estudo das áreas dos sólidos geométricos com o uso de materiais manipuláveis. Elas foram aplicadas nas turmas do 3º Ano do Ensino Médio da rede pública estadual na cidade de Carolina/MA do Centro Educa Mais Sertão Maranhense (CEMSM).

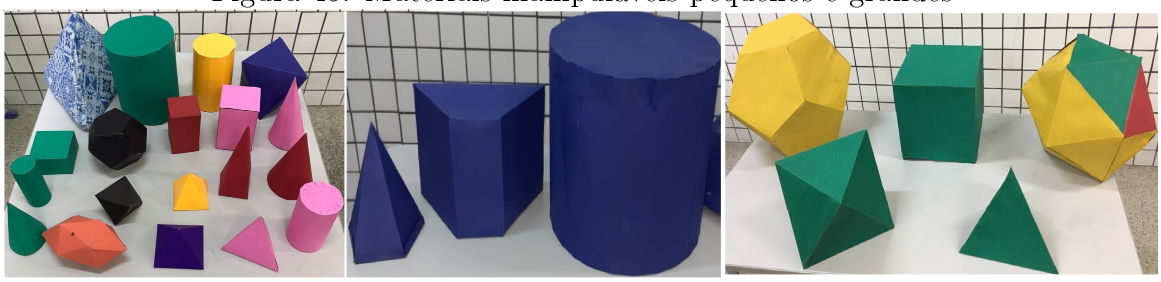
As atividades práticas aplicadas em sala de aula do segundo ciclo de oficinas ocuparam um total de 4 (quatro) aulas, com duração de 2 (duas) horas cada uma. Como os conteúdos de figuras planas e sólidos geométricos já haviam sido ministrados, de forma tradicional, no ciclo de aulas anterior para a amostra total (3 grupos de 7 alunos), foram escolhidos apenas 14 alunos, os grupos A e C com 7 alunos cada, dos 21 (vinte e um) alunos da amostra da pesquisa, para participar das aulas com materiais manipuláveis.

Figura 44: Alunos com materiais manipuláveis

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Na primeira aula, o pesquisador apresentou modelos de materiais manipuláveis e entregou alguns moldes das planificações dos sólidos geométricos para que os alunos previamente os produzissem. Entretanto, exigiu que fossem de tamanhos variados e que o material deveria ser papel cartão, por ser mais resistente.

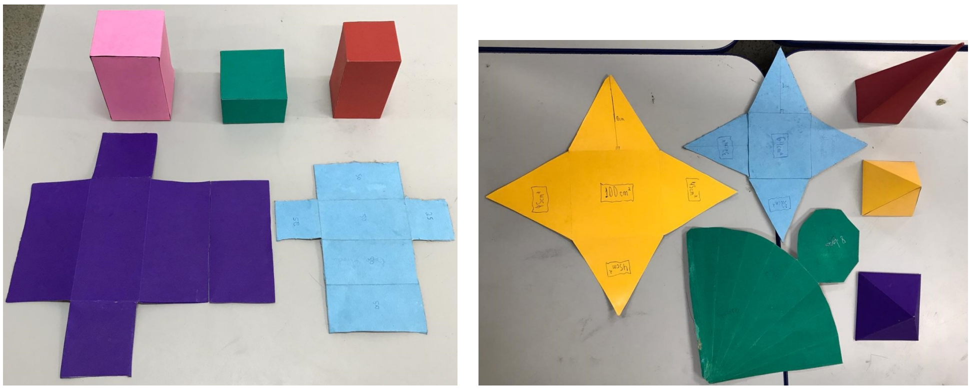
Figura 45: Materiais manipuláveis pequenos e grandes



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Na segunda aula, o professor reuniu todos os sólidos geométricos fabricados pelos alunos e realizou a planificação de alguns. Além disso, aproveitou tal recurso para relembrar elementos como face, aresta e vértice.

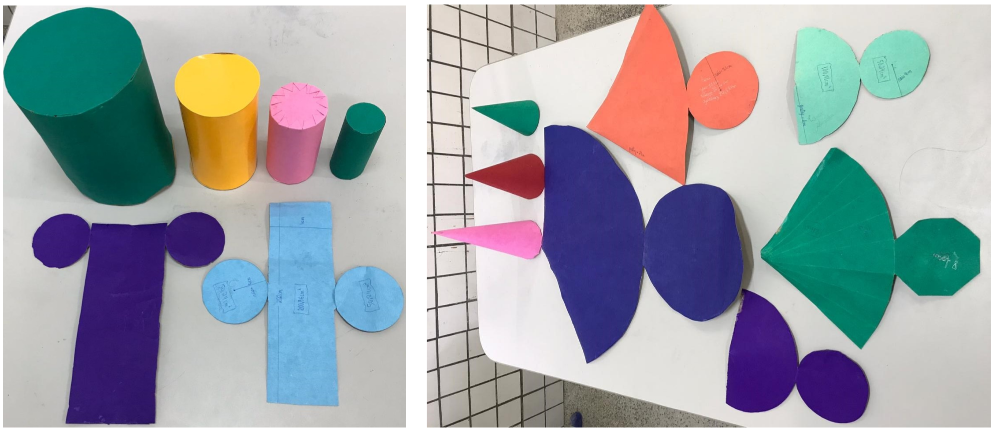
Figura 46: Prisma e Pirâmide planificados



Fonte: Elaborada pelo autor

A terceira e quarta aula foram usadas para os cálculos das áreas dos sólidos geométricos, os quais vêm do processo de decomposição, ou seja, o todo é a soma das partes. Para facilitar o entendimento, após planificação com os materiais manipuláveis, os alunos foram capazes de reconhecer as figuras planas que os compõem, calcular suas áreas e, ao final, realizar o somatório delas para encontrar a área do sólido estudado.

Figura 47: Cilindro e Cone planificados



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

Para concluir esse ciclo de aulas com materiais manipuláveis, foi realizada outra prova diagnóstica com apenas um dos grupos da amostra (7 alunos), já que a primeira avaliação foi realizada no primeiro ciclo de aulas, sem os recursos mediadores. Vale ressaltar que a análise dos rendimentos obtidos pelos alunos será realizada em capítulo posterior.

7 GEOGEBRA

Além dos materiais manipuláveis, o professor também pode usar a tecnologia a seu favor no ensino da matemática. Sabe-se que os avanços tecnológicos proporcionam computadores e softwares cada vez mais avançados e dispositivos de multimídia e celulares mais sofisticados. Tal situação gera a inserção de crianças e jovens nesse mundo digital cada vez mais cedo. Essas tecnologias digitais já são os principais meios de interação social e transformaram a forma de produzir, consumir, interagir, exercer a cidadania, aprender e ensinar nessa sociedade contemporânea.

Diante deste cenário, o ambiente escolar não poderia ficar de fora desse processo de inserção tecnológica, em que é necessário realizar uma reforma educacional no sentido de repensar os conteúdos curriculares e os métodos utilizados pelos docentes. Na visão de Gesser (2012):

> As tecnologias estão trazendo progresso para a área da educação gerando, deste modo, impacto no ensino. O perfil das novas gerações tem se modificado ao longo dos tempos e, neste segmento, também as estratégias de conhecimento e acesso as informações mudaram, passando a sociedade a promover novos métodos de acessibilidade disponíveis a qualquer hora e em qualquer lugar. O processo de introdução das TICs na Educação é uma reforma que, como qualquer outra, sugere tempo, meios e desempenho em vários fatores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio para a área de Matemática também corroboram com tal pensamento.

> Com o advento do que se denomina sociedade pós-industrial, a disseminação das tecnologias da informação nos produtos e nos serviços, a crescente complexidade dos equipamentos individuais e coletivos e a necessidade de conhecimentos cada vez mais elaborados para a vida social e produtiva, as tecnologias precisam encontrar espaço próprio no aprendizado escolar regular, de forma semelhante ao que aconteceu com as ciências, muitas décadas antes, devendo ser vistas também como processo, e não simplesmente como produto. A tecnologia no aprendizado escolar deve constituir-se também em instrumento da cidadania, para a vida social e para o trabalho. No Ensino Médio, a familiarização com as modernas técnicas de edição, de uso democratizado pelos computadores pessoais, é só um exemplo das vivências reais que é preciso garantir, ultrapassando-se assim o "discurso sobre as tecnologias" de utilidade questionável. É preciso identificar na Matemática, nas Ciências Naturais, Ciências Humanas, Comunicações e nas Artes, os elementos de tecnologia que lhes são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetivos da educação e, ao mesmo tempo, como meios para tanto. (BRASIL, 2000, p. 50)

Diante das inúmeras e rápidas mudanças tecnológicas, essas inovações devem ser utilizadas de forma consciente, pois "precisam ser selecionadas, avaliadas, compiladas e processadas para que se transformem em conhecimento válido, relevante e necessário para o crescimento do homem como ser humano em um mundo alto sustentável"(GADOTTI, 2002). Neste contexto, é importante a procura por metodologias inovadoras que proporcionem melhorias da qualidade do ensino e que se adequem ao novo tipo de aluno da sociedade contemporânea.

Deste modo, os professores precisam se familiarizar com essas novas ferramentas de ensino, planejar e escolher metodologias que direcionem os estudantes e favoreçam o processo ensino e aprendizagem. Nesse processo, o aluno torna um ser ativo na apropriação do conhecimento buscando um aprendizado significativo, os recursos didáticos são usados como instrumentos mediadores no ensino e o professor passa a ter o papel de orientador, facilitador e motivador.

Dessa forma, o presente estudo apresenta a utilização do software GeoGebra como outro instrumento mediador no ensino da Geometria Espacial. Tal recurso favorece a construção das figuras planas e dos sólidos geométricos, que antes eram de forma estática e agora, com o recurso tecnológico, apresenta-se de forma dinâmica. Além disso, com a visualização dessas figuras, proporciona o cálculo de áreas desses sólidos de forma didática, que é o objeto desse estudo. Portanto, é a tecnologia a serviço da educação.

7.1 Definição, Origem e Características do GeoGebra.

A definição de GeoGebra dada pelo próprio aplicativo em sua página "é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de usar" (GEOGEBRA, 2019). O nome desse programa resultou das contrações dos termos Geometria (Geo) e Álgebra (Gebra), mas suas aplicações não se limitam somente a esses dois campos da matemática, como já observado.

O GeoGebra é um software educativo, gratuito e multiplataforma. Educativo, pois é um software de matemática cujo principal objetivo é auxiliar, de forma dinâmica, no ensino da Matemática nas escolas, combinando funcionalidades que envolvem o uso de geometria, álgebra, cálculos, estatísticas, tabelas e gráficos em 3D, em um único sistema.

É um programa obtido gratuitamente pela internet, em que pode ser baixado pelo sítio eletrônico: <http://www.geogebra.org>, após seguir instruções de instalação indicadas na página, cuja interface é simples, de fácil utilização por todas as faixas etárias e já tem a versão em português. No site também possui um manual oficial, na versão 4.0, no qual traz basicamente todas as instruções fundamentais de utilização do software em português.

Ele também é multiplataforma porque pode ser instalado em computadores com sistemas operacionais Windows, Linux ou Mac OS, Chrome OS, além das versões online disponível para o navegador Google Chrome e as versões mobile para smartphones e tablets como Android, iPad e Windows (HOHENWARTER, 2013) .

O GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter, entre 2001 e 2002, durante o seu projeto de mestrado, em Salzburg, Áustria. Seu objetivo inicial era criar um programa que integrasse características de softwares de geometria dinâmica e softwares que utilizam um sistema algébrico computacional (SILVA, 2018).

Após publicação da dissertação do mestrado na internet, muitos professores procuraram o programa para usá-lo em sala de aula. Devido a enorme sucesso, Hohenwarter aprimorou os estudos no desenvolvimento do software na sua tese de doutorado. Em 2006, o seu trabalho foi usado em um projeto de formação de professores financiado pela *National Science Foundation's* (NSF) em parcerias com Universidade Atlantic e Escolas do Condado de Broward, na Flórida, cujo objetivo era melhorar a formação do professor em termos de tecnologia e realizar um feedback aos professores em relação as aplicações do GeoGebra em sala de aula (ARRUDA, 2014).

Em decorrência do aumento da popularidade do software e a procura por cursos, palestras e oficinas sobre o software, foram criadas soluções virtuais para atender essas demandas. Existem fóruns, tutoriais, o GeoGebraWiki[48] , GeogebraTube[49] , além de traduções do GeoGebra, por voluntários, para mais de 63 idiomas, incluindo o português no Brasil. Atualmente, Hohenwarter continua liderando o projeto Geogebra no Centro de Pesquisa em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Educação Matemática (FCR-STEM) na Universidade Estadual da Flórida em Tallahassee, nos EUA.

Mas para atender aos professores que necessitam de apoio e assegurar o desenvolvimento técnico do Geogebra, desde 2007, criou-se o Instituto Internacional Geogebra (IGI), "com o propósito de promover a aprendizagem o ensino da Matemática"(ARRUDA, 2014, p. 52). No Brasil, os principais Institutos Geogebra são em São Paulo, no Rio de Janeiro, em Uberlândia-MG, no Paraná, no Rio Grande do Norte e em Fortaleza.

As primeiras versões utilizavam apenas a visualização bidimensional, mas em 2014 o software recebeu uma nova versão, o GeoGebra 3D, Beta, versão 5.0. Essa versão trabalha com a geometria tridimensional, permitindo a criação e interação de objetos em coordenadas (x,y,z), tais como pontos, linhas, polígonos, esferas e poliedros.

O software possui inúmeras características e vantagens em relação aos outros programas. Primeiro, reúne geometria, álgebra, cálculo e todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica, proporcionando construções dinâmicas e interativas.

[48]Comunidade de usuários que compartilham materiais didáticos interativos gratuitos, divulgam estudos e novidades do GeoGebra. Seu endereço eletrônico é http://tube.geogebra.org/?lang=en.

[49]Local na web em que os usuários do software compartilham suas experiências e também divulgam estudos e novidades do GeoGebra. Seu endereço eletrônico é http://wiki.geogebra.org/en/Main Page.

De acordo com Pinheiro (2017, p. 38), o Geogebra

> é um software livre de matemática dinâmica que permite, dentre outras coisas, realizar construções de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos e circunferências, tal como inserir algebricamente funções e alterar. Ele também é capaz de lidar com valores variáveis para pontos, vetores, retas e de encontrar raízes e pontos extremos de funções. Além de dispor de ferramentas para trabalhar com outras áreas da matemática tais como estatística, probabilidade e cálculo diferencial e integral. Na sua versão 5 foi implementada a Janela de Visualização 3D, que expandiu seu poder nativo de atuação para construções tridimensionais.

Segundo, o programa pode ser usado em diversos sistemas operacionais nos computadores, tablets e smartphones, além de existir uma versão online do programa no portal, que funciona diretamente no navegador da internet, e está todo em Português. Terceiro, a interface do programa é simples e de fácil utilização, por ser uma ferramenta intuitiva. Ele também permite que usuários com conhecimentos de programação criem novas ferramentas e ícones (SILVA, 2015).

Quarto, o programa possui várias funcionalidades e uma deles é o controle deslizante, o qual permite o movimento ou animação dos objetos, haja vista a possibilidade de compatibilizar um desenho geométrico e a álgebra a ele relacionada (GOODWIN, 2017). Quinto, o software pode exportar seus arquivos na extensão "html" e publicar em páginas da internet para a socialização do conhecimento científico.

A proposta deste trabalho de pesquisa é explorar o software educativo GeoGebra como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial, o qual facilitará a construção, visualização e compreensão das propriedades dos sólidos geométricos, permitindo a movimentação sob diversas vistas, a planificação de alguns dos sólidos estudados no ensino médio e o cálculo de suas áreas.

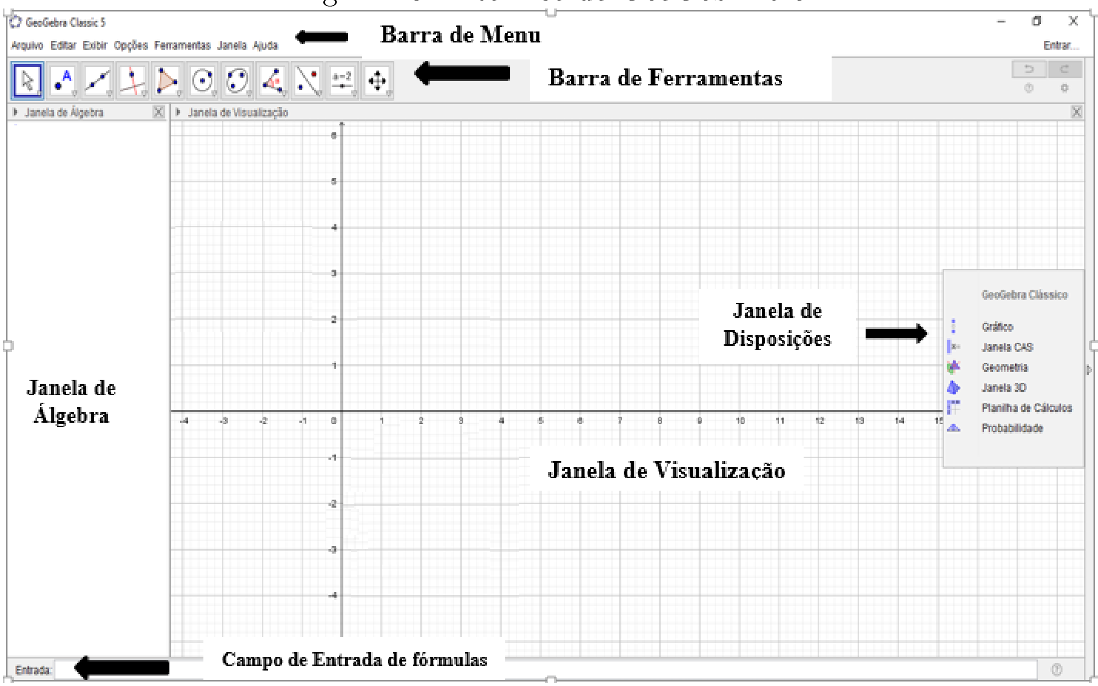
7.2 Principais Ferramentas do GeoGebra

O GeoGebra pode ser baixado do site ou usado online. A instalação do software pode ser feita em computadores ou dispositivos móveis através do site oficial e iniciar seu uso com um clique no ícone GeoGebra 5.0 visualizado na área de trabalho do aparelho ou máquina onde foi baixado o programa. Caso não queira baixar, pode-se também utilizar a interface do programa que fica disponível site oficial.

Para entender melhor o programa, faz-se necessária a análise da janela inicial do GeoGebra. Ela é composta por uma barra de menus, barra de ferramentas, janela de visualização, janela de álgebra, campo para entrada de fórmulas, conforme se visualiza na Figura 48.

Os dados são inseridos no GeoGebra de duas formas, uma através do uso de ferramentas que ficam disponíveis na "Barra de Ferramentas" e a outra através de comandos escritos no "Campo de Entrada de Fórmulas".

Figura 48: Interface do GeoGebra 5.0



Fonte: Elaborada pela autor

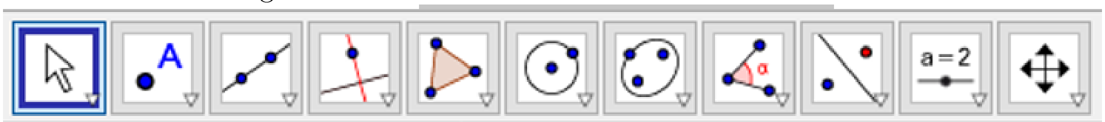
No **Campo de Entrada** permite operar o GeoGebra com a inserção de comandos por escrito. A maioria das funções presentes na Barra de Ferramentas pode ser acessada através de comandos no Campo de Entrada, contudo algumas funções do GeoGebra só podem ser ativadas por meio de comandos, ou seja, não estão na Barra de Ferramentas. A **Janela de Álgebra** mostra a representação algébrica dos objetos criados.

A **Janela de Visualização**, como o próprio nome diz, permite a visualização bidimensional da representação gráfica dos objetos criados. Vale ressaltar que possui a Janela de Visualização 3D, em que o objeto é representado tridimensionalmente. Assim, a vantagem didática do GeoGebra é que apresentam, em um único ambiente virtual, as características algébricas e geométricas do mesmo objeto (FREITAS, 2017).

A **Janela de Disposições** possui os atalhos para Gráfico, Janela CAS, Geometria, Janela 3D, Planilha de Cálculos e Probabilidade. Já a **Barra de Menu** possui comandos que tem funções coerentes com o próprio nome (Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela ou Ajuda) e estas possuem subcomandos que podem ser selecionados.

A **Barra de Ferramentas** contém as ferramentas necessárias para a utilização do GeoGebra. No GeoGebra versão 5.0, os ícones dessa barra são: manipulação, pontos, retas, posições relativas, polígonos, curvas ou formas circulares, cônicas, ângulos e medidas, translação ou transformação, visualização ou controles e exibição.

Figura 49: Barra de Ferramentas do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra

Este ícone representa as Ferramentas de Movimento, seleção ou manipulação, o qual agrupa três opções: "Mover", "Rotação em Torno de um Ponto", "Função à Mão Livre" e "Caneta".

A Ferramenta de Pontos tem oito funcionalidades: "Ponto", "Ponto em Objeto", "Vincular/Desvincular Ponto", "Interseção de Dois Objetos", "Ponto Médio ou Centro", "Número Complexo", "Otimização" e "Raízes".

A Ferramenta de Retas possui sete alternativas: "Reta", "Segmento", "Segmento com Comprimento Fixo", "Semirreta", "Caminho Poligonal", "Vetor" e "Vetor a partir de um Ponto".

A Ferramenta de Retas Específicas ou posições relativas exibe oito ramificações: "Reta Perpendicular", "Reta Paralela", "Mediatriz", "Bissetriz", "Reta Tangente", "Reta Polar ou Diametral", "Reta de Regressão Linear" e "Lugar Geométrico".

A Ferramenta de Polígonos mostra quatro ícones: "Polígono", "Polígono Regular", "Polígono rígido" e "Polígono semideformável".

A Ferramenta de Círculos e Arcos, Curvas ou Formas Circulares se subdividem em sete opções: "Círculo dados Centro e Um de seus Pontos", "Círculo dados Centro e Raio", "Compasso", "Círculo definido por Três Pontos", "Semicírculo", "Arco Circular", "Arco Circuncircular", "Setor Circular" e "Setor Circuncircular".

A Ferramenta de Cônicas apresenta quatro funcionalidades: "Elipse", "Hipérbole", "Parábola" e "Cônica definida por Cinco Pontos".

A Ferramenta de Ângulos e Medidas é dividida em seis itens: "Ângulo", "Ângulo com Amplitude Fixa", "Distância, Comprimento ou Perímetro", "Área", "Inclinação", "Lista" e "Inspetor de Funções".

A Ferramenta de Translação ou Transformação consiste seis possibilidades de utilização: "Reflexão em Relação a uma Reta", "Reflexão em Relação a um Ponto", "Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)", "Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo", "Translação por um Vetor" e "Homotetia dados Centro e Razão".

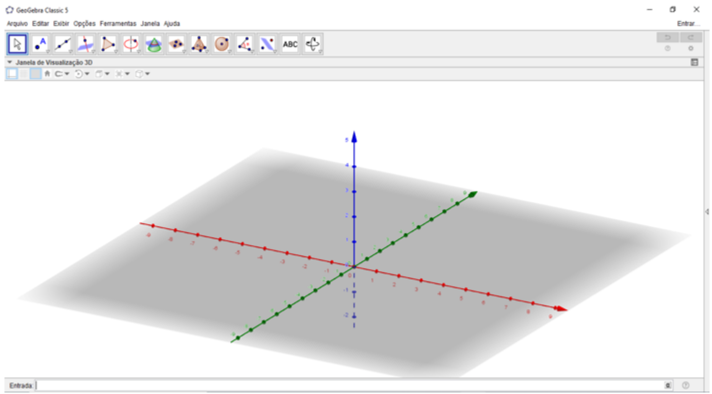
A Ferramenta de Visualização ou Controles tem sete opções: "Controle deslizante", "Texto", "Inserir Imagem", "Botão", "Caixa para obter/ esconder objetos" e "Campo de Entrada". Vale destacar que a ferramenta controle deslizante foi um dos acréscimos a esta versão, a qual permite a manipulação dos gráficos e modificações numa função, possibilitando a visualização dos entes matemáticos.

A Ferramenta de Exibição possui sete ícones de funcionalidades: "Mover Janela de Visualização", "Ampliar", "Reduzir", "Exibir/Esconder Objeto", "Exibir/Esconder Rótulo", "Copiar Estilo Visual" e "Apagar Objeto".

Vale ressaltar que, a versão utilizada neste trabalho, possui a janela de visualização tridimensional (3D), a qual permite a construção de sólidos geométricos. Destaca-se que o cálculo da área destes é o objeto desse estudo e para construí-los foi muito utilizado esta tela 3D.

Para conseguir trabalhar com a visualização 3D, deve-se clicar no menu "Exibir" e na opção "Janela de Visualização 3D" ou teclar conjuntamente as teclas Ctrl, Shift e 3 ou até mesmo na Janela de Disposições no canto direito da tela inicial, o que modifica a janela.

Figura 50: Interface de Visualização 3D



Fonte: GeoGebra 5.0

É notório observar que a Barra de Ferramentas na visualização em 3D também sofre algumas alterações, conforme Figura 51.

Figura 51: Barra de Ferramentas na visualização em 3D

Fonte: GeoGebra 5.0

Alguns itens mantiveram os recursos de manipulação com pequenas alterações em relação as Ferramentas 2D, mas foram acrescentadas outras ferramentas que permitem a exibição tridimensional: "Interseção de duas superfícies", "Planos", "Sólidos Geométricos" e "Esfera".

A Ferramenta "Interseção de duas superfícies" não possui subitens. Já a ferramenta "Planos" possui 4 subdivisões: "Plano por três pontos", "Planos", "Planos Perpendicular" e "Plano Paralelo".

A Ferramenta "Sólidos Geométricos", a que será mais utilizada neste trabalho, divide-se em: "Pirâmide", Prisma", "Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone", "Extrusão para Prisma ou Cilindro", "Cone", "Cilindro", "Tetraedro", "Cubo" e, principalmente para esta pesquisa, "Planificação".

A Ferramenta "Esfera" divide-se em "Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos" e "Esfera dados Centro e Raio". Vale destacar que a Barra de ícones da Janela de Visualização 3D oferece um conjunto de ferramentas úteis para construir objetos, realizar movimentos e modificar propriedades de objetos.

Após uma breve abordagem sobre as principais ferramentas do Software GeoGebra, o estudo abordou a influência do GeoGebra no ensino de áreas dos sólidos geométricos na sala de aula.

7.2.1 Atividades com o GeoGebra

Neste capítulo é apresentado um recurso mediador que auxilia no processo de ensino aprendizagem do estudo de áreas dos sólidos geométricos: o GeoGebra. A pesquisa foi realizada com 21 (vinte e um) alunos, divididas em 3 (três) grupos (A, B e C) de 7 (sete) alunos. Contudo apenas 14 (quatorze) alunos (grupo B e C) participaram das oficinas com o software, cujo objetivo é realizar, a *posteriore*, um quadro comparativo entre os três grupos pesquisados.

Após o primeiro ciclo de aulas tradicionais e o segundo com o auxílio dos materiais manipuláveis, as atividades práticas do terceiro ciclo de oficinas utilizaram GeoGebra como recurso mediador no processo de ensino e aprendizagem. Esse ciclo foi realizado com o 3º Ano do Ensino Médio no laboratório de informática do Centro Educa Mais Sertão Maranhense (CEMSM) da cidade de Carolina/MA no turno vespertino e foi composto de 5 (cinco) aulas com duração de 2 (duas) horas cada, as quais são descritas na próxima seção.

Figura 52: Alunos na sala de informática

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor

7.2.2 1ª aula - apresentação das principais ferramentas do GeoGebra e criação das figuras planas.

Nesta primeira aula o professor relatou a breve história da criação do software GeoGebra e sua utilidade. Em seguida, pediu que os alunos abrissem o programa GeoGebra 5.0 que já havia instalado na área de trabalho de cada computador. Depois, foi projetada no quadro, através do data show, a tela do software GeoGebra, em que ele designava os comandos e os alunos os reproduziam no GeoGebra instalados nos computadores. Nessa tela, o pesquisador também apresentou os ícones, as ferramentas, os comandos e as janelas indicativas de visualização geométricas e algébrica do programa para que os discentes percebessem que o Geogebra pode ser utilizado em vários assuntos da Matemática.

Inicialmente, os alunos visualizaram graficamente as noções de ponto, reta e plano anteriormente abordados, o que facilitou bastante o entendimento. Para a familiarização com as ferramentas e comando, dentro da janela de visualização, o professor pediu que criassem vários pontos utilizando o segundo ícone da Barra de Ferramentas: o "Ponto". Em seguida, utilizando o ícone "Reta" da Barra de Ferramentas, o subitem "Segmento" e tocando em dois pontos distintos, os alunos construíram segmentos de retas com os pontos criados. Assim, o professor mostrou graficamente o postulado da determinação de uma reta (dois pontos distintos determinam uma reta) e o postulado da Inclusão (se uma reta tem dois pontos distintos num plano, ela está contida nesse plano).

Depois, os alunos puderam criar polígonos de tamanhos e formatos variados, através do ícone e ferramenta "Polígono", a qual unindo pontos formava um polígono qualquer. Posteriormente foi solicitado que criassem polígonos regulares (triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos), clicando no ícone "Polígono", depois na Ferramenta "Polígono Regular" e escrevendo o número de vértices desse polígono na Caixa de Texto.

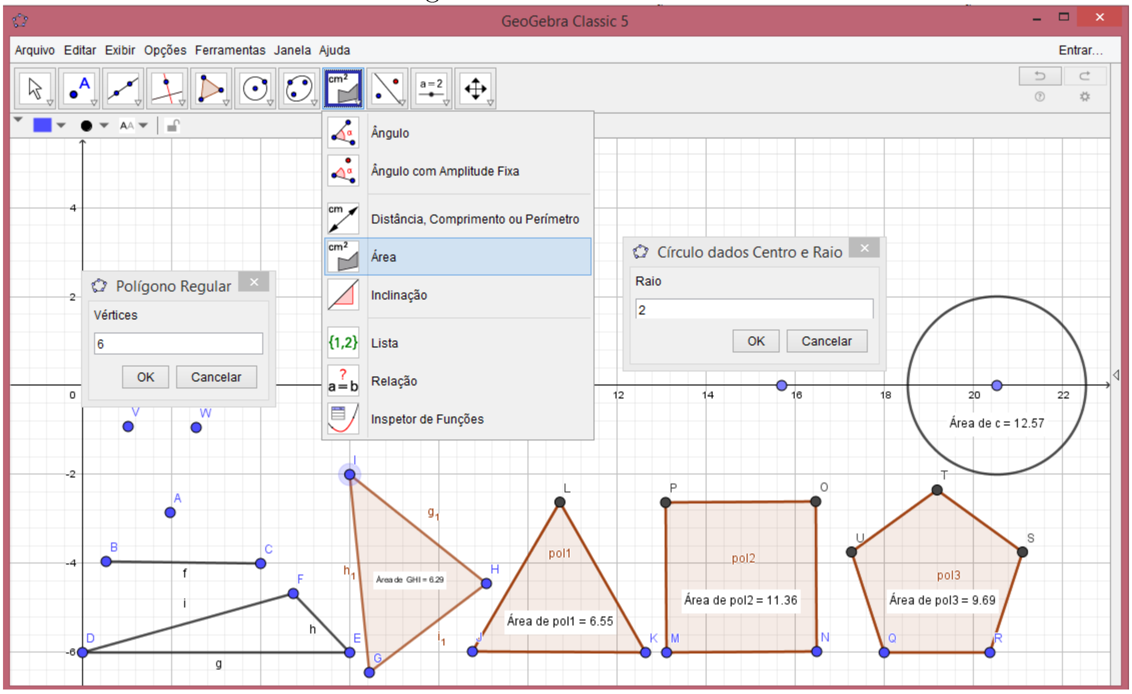
Para criarem o círculo, os alunos foram orientados a clicar no ícone "Formas Circulares" da Barra de Ferramentas, depois na Ferramenta "Círculo dado Centro e Raio", em seguida, na Janela de Visualização, escolhessem o local do centro do circulo e, posteriormente, escrevessem o valor do raio na Caixa de texto.

Foi destacado aos alunos que os polígonos regulares são indispensáveis para a criação dos sólidos geométricos como prisma, pirâmide e poliedros de Platão. Já o círculo é importante para a construção dos sólidos como cilindro, cone e esfera.

Para finalizar a 1ª aula, foi mostrado que, através do software, também é possível saber a área das figuras planas que foram criadas. Para isso, os alunos foram orientados a clicar no ícone "Ângulos e Medidas" da Barra de Ferramentas, depois ativar a ferramenta "Área" e, em seguida, clicar dentro da figura geométrica. Assim, o GeoGebra calculava o valor da área correspondente à figura. Assunto este que foi objeto da aula seguinte, cujo conteúdo foi aprofundado.

A Figura 53 representa um pouco do que foi explorado na 1ª aula da oficina de GeoGebra.

Figura 53: Primeira aula



Fonte: Elaborada pelo autor

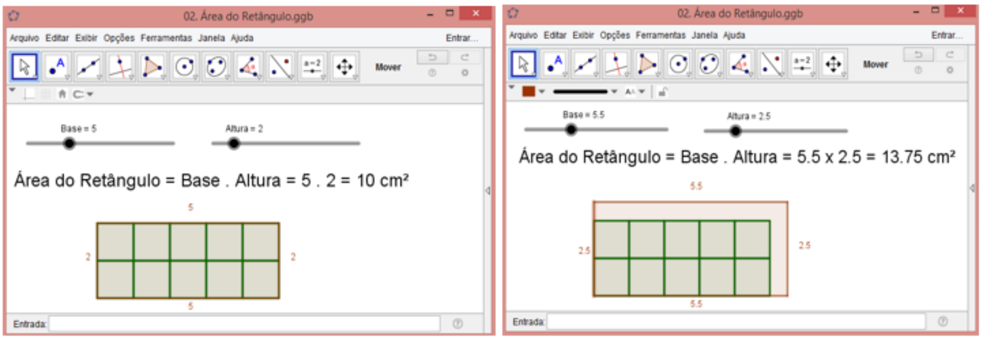
7.2.3 2ª aula - cálculo de áreas das figuras planas no GeoGebra

A segunda aula do GeoGebra foi voltada para mostrar o cálculo das áreas das figuras planas através do GeoGebra. Essa aula foi necessária devido às dificuldades de compreender tal assunto, que é primordial para o ensino das áreas dos sólidos geométricos. Para facilitar a compreensão dos alunos sobre o assunto, o pesquisador colocou na área de trabalho dos computadores uma pasta com todos os arquivos que seriam utilizados na sala de aula.

Os dois primeiros arquivos tratavam sobre a área do retângulo. No primeiro deles, Figura 54 , possuía a figura de um retângulo, em que o professor criou dois controles deslizantes: "Base" e "Altura". Em seguida, o pesquisador acrescentou um incremento de 0,5 no controle deslizante para os alunos observassem e entendessem como a figura se comportava. Depois, foi pedido aos alunos que movimentassem os comandos dinâmicos e analisassem o que ocorreriam com a figura e a área.

Logo, os alunos perceberam que fixada uma das variáveis, a área é proporcional ao comprimento da outra variável. Deste modo, é durante o momento dessa animação, entre o formato do polígono e sua área relacionada, que a aula de matemática se torna dinâmica e interativa.

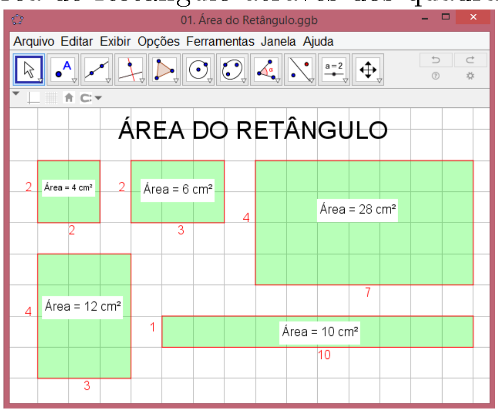
Figura 54: Área do Retângulo e os controles deslizantes do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

No segundo arquivo, com a Figura 55, os alunos perceberam que o valor da área correspondia à quantidade de quadrados unitários que tinha na figura.

Figura 55: Área de Retângulo através dos quadrados unitários

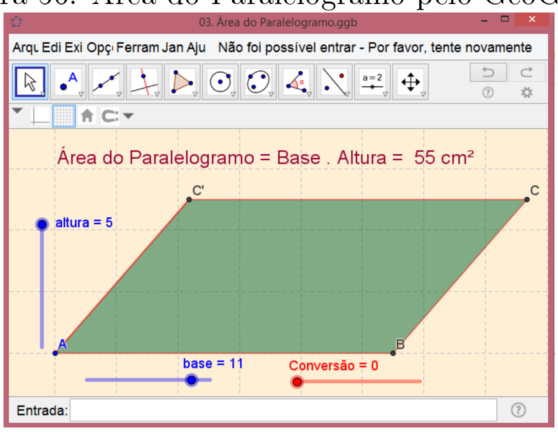


Fonte: Elaborada pelo autor

Destarte, o ensino da área do retângulo serviu de base para demonstrar a área do quadrado e de outras figuras planas.

No terceiro arquivo, a Figura 56, o professor criou um paralelogramo e deixou dois comandos dinâmicos: "base" e "altura".

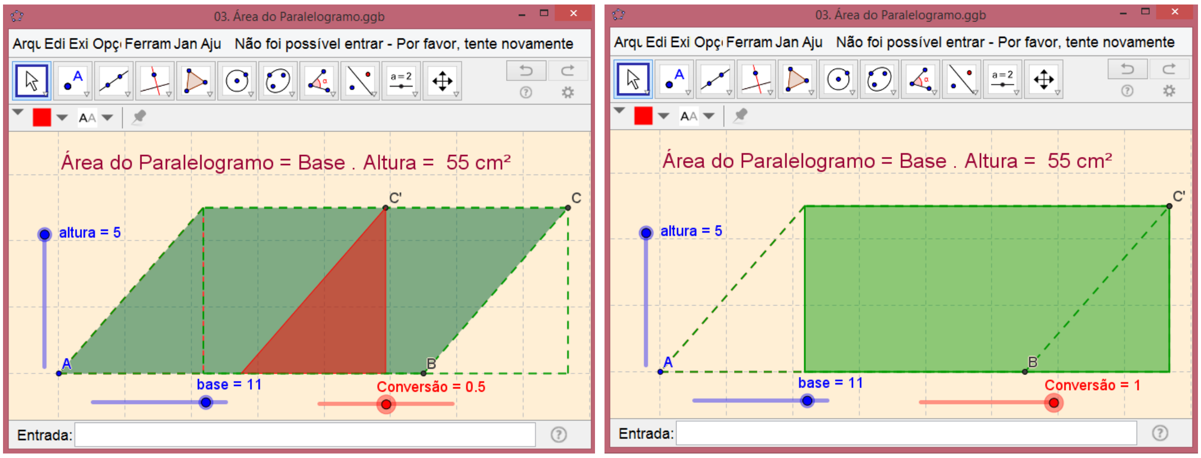
Figura 56: Área do Paralelogramo pelo GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

O professor também apresentou o controle deslizante de conversão ou translação, Figura 57, em que a parte triangular do paralelogramo é deslocada para se transformar em um retângulo de mesma base e altura. Enfim, a representação de figuras em movimento permitiu aos alunos a visualização e a compreensão da explicação do professor que a área do paralelogramo é igual a do retângulo de mesma base e altura, não importando a inclinação do paralelogramo.

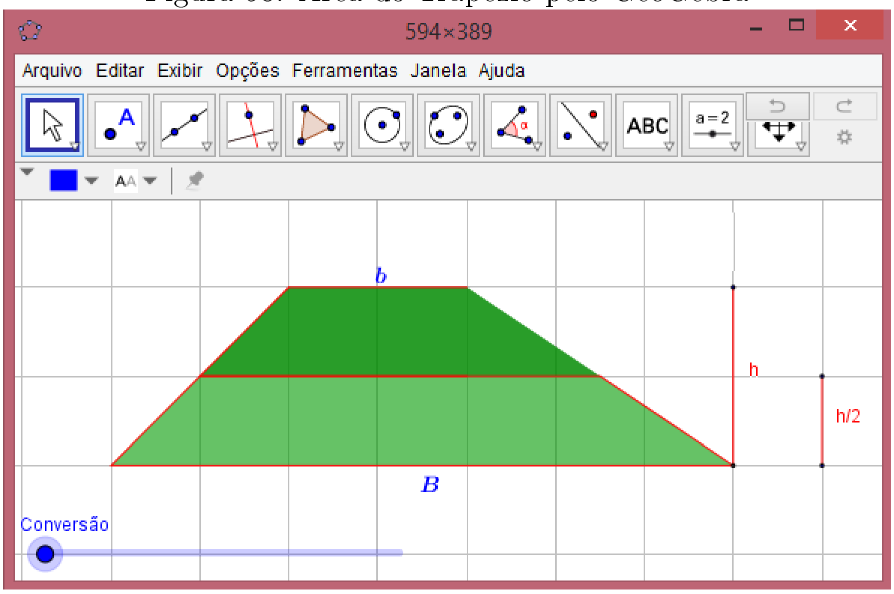
Figura 57: Conversão do Paralelogramo em Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

No quarto arquivo, o professor trouxe o polígono trapézio. A Figura 58 mostra os elementos que compõem essa figura geométrica, "B" a base maior, "b" a base menor e "h" a altura. Para a explicação do cálculo da sua área, foi realizada uma secção na metade da altura do trapézio, conforme figura abaixo.

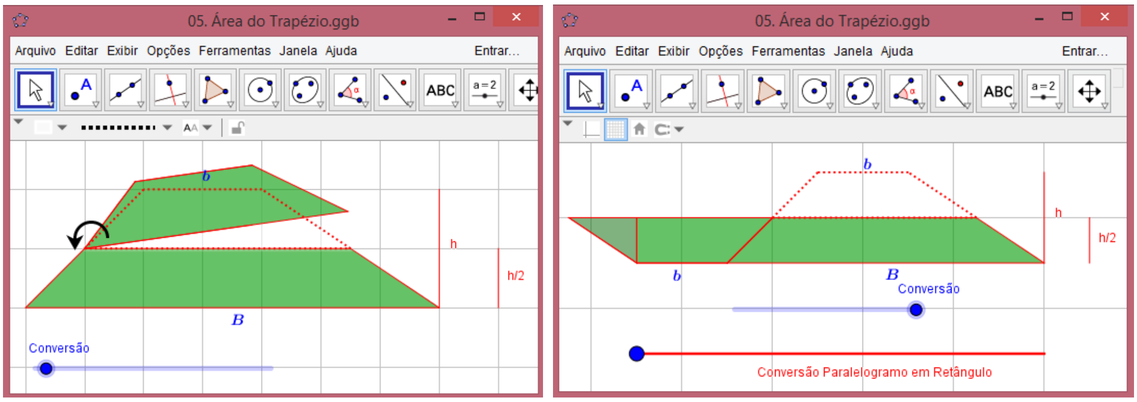
Figura 58: Área do Trapézio pelo GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, com o uso do controle deslizante de conversão, o novo trapézio da parte superior foi girado para se transformar em um paralelogramo.

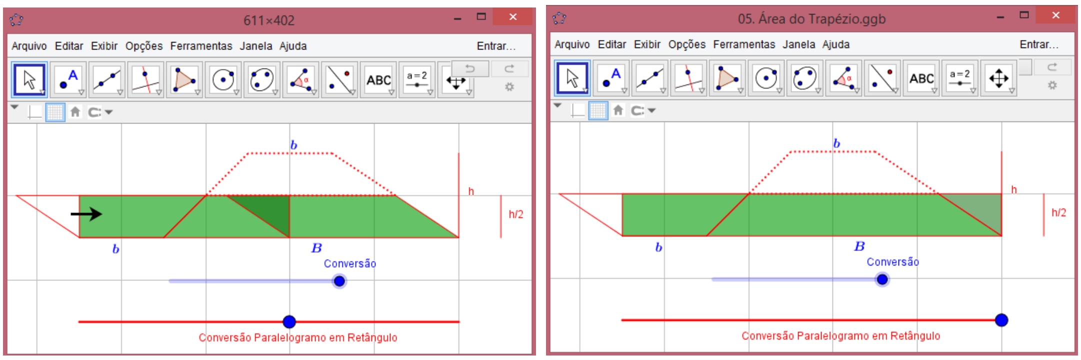
Figura 59: Conversão do Trapézio em Paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

Como a figura plana que os alunos mais sentiram facilidade foi o retângulo, o professor resolveu transformar o paralelogramo da figura acima para um retângulo, conforme Figura 60.

Figura 60: Conversão do Trapézio em Retângulo



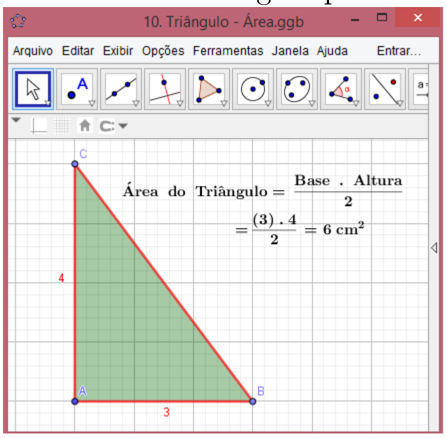
Fonte: Elaborada pelo autor

Logo, os alunos perceberam que a área do trapézio de altura "h" possuía a mesma área do retângulo de base "$B + b$" e altura "$\frac{h}{2}$".

Para finalizar a segunda aula, o quinto arquivo demonstrou a área do triângulo. Com base na Figura 61 o pesquisador orientou os alunos quanto à movimentação do triângulo e o valor de sua área. Inicialmente, os alunos poderiam mover o ponto C para qualquer lugar da linha onde estava. Logo, eles perceberam que o triângulo vai se modificando, contudo o valor de sua área permanece fixo. Por intermédio dessa demonstração, pode-se chamar a atenção dos alunos de que triângulos com a mesma base e mesma altura terão a mesma área.

Outra demonstração foi solicitar que, na mesma figura, modificassem a posição dos pontos B e C. Imediatamente, eles perceberam que a alteração na medida do lado era diretamente proporcional ao valor da área.

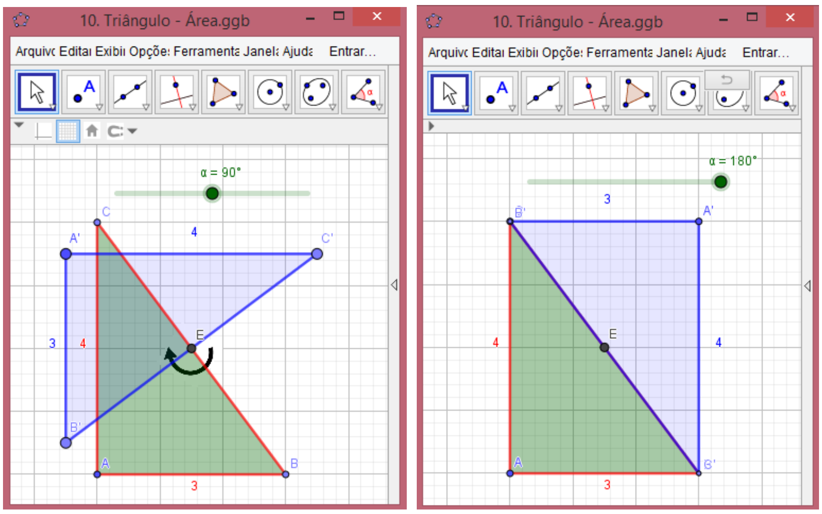
Figura 61: Área do triângulo pelo GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

A última demonstração da aula foi a explicação da fórmula da área do triângulo, ou seja, o motivo dela ser a metade da área de um retângulo. Para isso, o professor fez a duplicação do triângulo e, por meio do controle deslizante α, realizou uma rotação de 180º em torno de um ponto fixo E, que é o ponto médio de um dos lados. A figura formada pela união dos dois triângulos é um paralelogramo. Com a movimentação do polígono, os alunos facilmente perceberam a relação entre a área do triângulo e do paralelogramo que tenham a mesma base e altura, não importando a inclinação, ou seja, a área do triângulo é a metade do produto entre base e altura.

Figura 62: Conversão do Triângulo no Paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

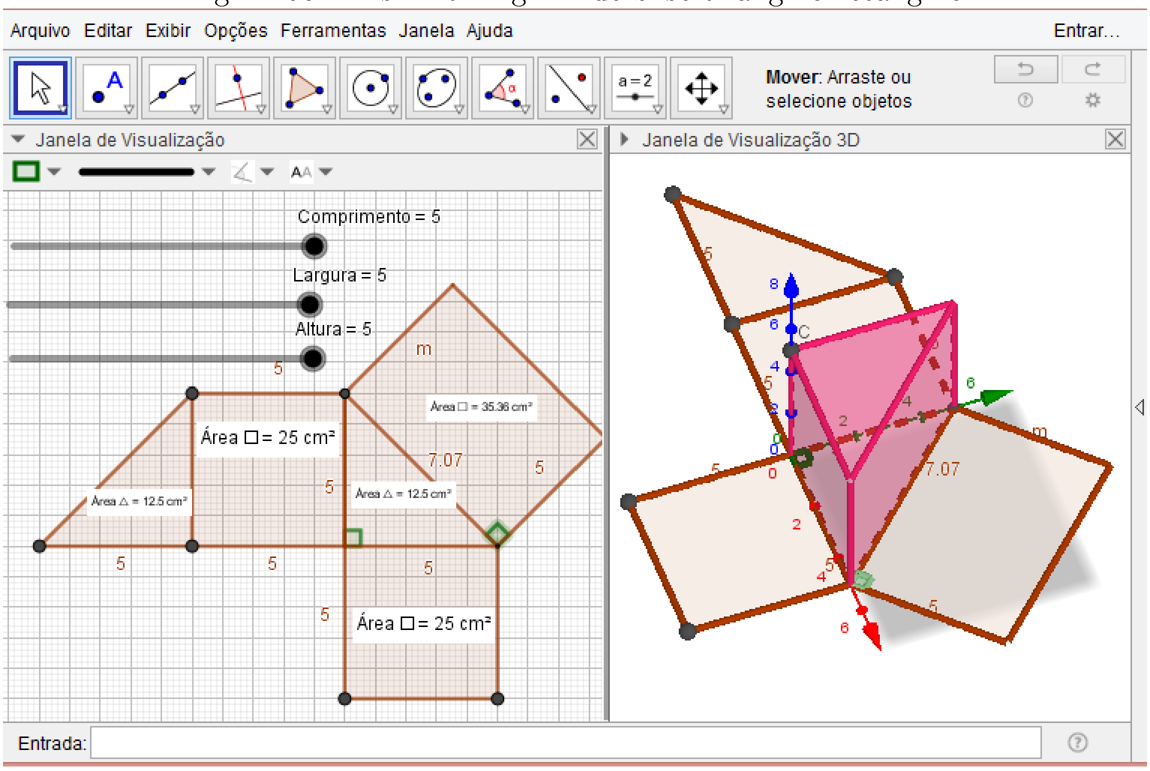
7.2.4 3ª aula - cálculo das áreas dos prismas no GeoGebra

A terceira aula foi voltada para o ensino dos sólidos geométricos no GeoGebra dos diversos prismas. O pesquisador novamente apresentou os arquivos prontos com as figuras e suas planificações que seriam usadas em sala de aula.

O primeiro sólido estudado foi o Prisma triangular, cuja base é um triângulo retângulo. O primeiro arquivo desta aula, Figura 63 , mostra o prisma e sua planificação. Nela possuía três comandos dinâmicos (comprimento, largura e altura), em que o aluno modificava-os e observava as alterações nas figuras planas e no sólido geométrico.

Para calcular a área do prisma triangular, o orientador pediu que os alunos observassem as figuras planas que o compõe. Eles facilmente perceberam, através da planificação, que o sólido era constituído de dois triângulos e três retângulos, sendo que sua área seria a soma de todas as áreas dos polígonos por ele composta.

Figura 63: Prisma triangular de base triângulo retângulo

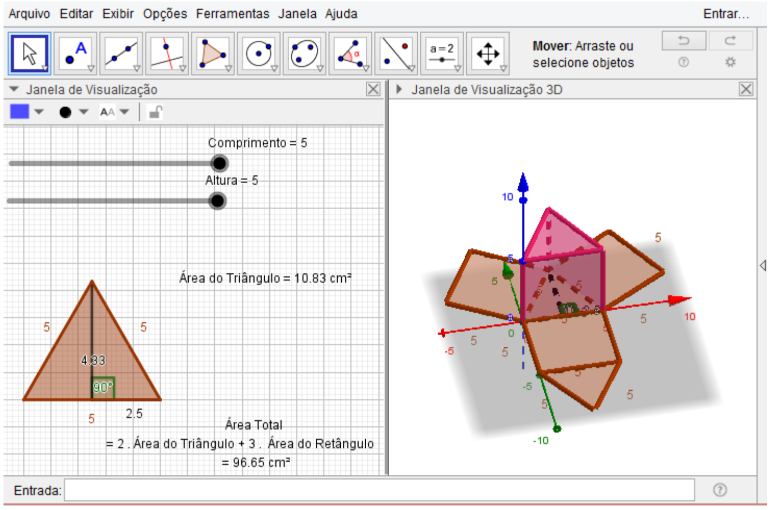


Fonte: Elaborada pelo autor

O segundo arquivo trabalhado, Figura 64 , foi o do prisma triangular cuja base era um triângulo equilátero. Na figura da base possuía dois controles deslizantes, o comprimento e a altura. Na manipulação do comprimento obtinha a medida do lado do triângulo equilátero, enquanto no controle da "altura" obtinha a altura do prisma.

Através da planificação, os alunos observaram que o sólido geométrico se transformava em dois triângulos e três retângulos. Sendo que rapidamente concluíram que a área total do sólido é a soma das áreas das figuras planas.

Figura 64: Prisma triangular com base de triângulo equilátero

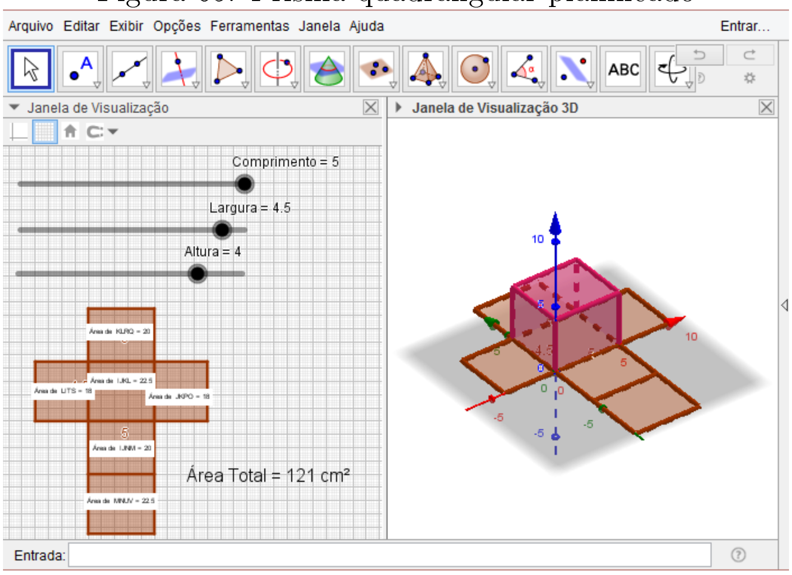


Fonte: Elaborada pelo autor

O terceiro prisma estudado, Figura 65 , foi o "prisma quadrangular". Vale destacar que, dentre os sólidos estudados no dia, esse consistiu no que os alunos sentiram menos dificuldade, pois ele é constituído de seis retângulos e sua área total é a soma dessas figuras planas.

Esse sólido possuía a manipulação de três comandos dinâmicos (comprimento, largura e altura). Após as modificações, os alunos também obtiveram as seguintes conclusões: pelo menos de duas a duas figuras tinham a mesma área e, quando os três controles apresentaram a mesma medida, os seis retângulos possuíam o mesmo valor.

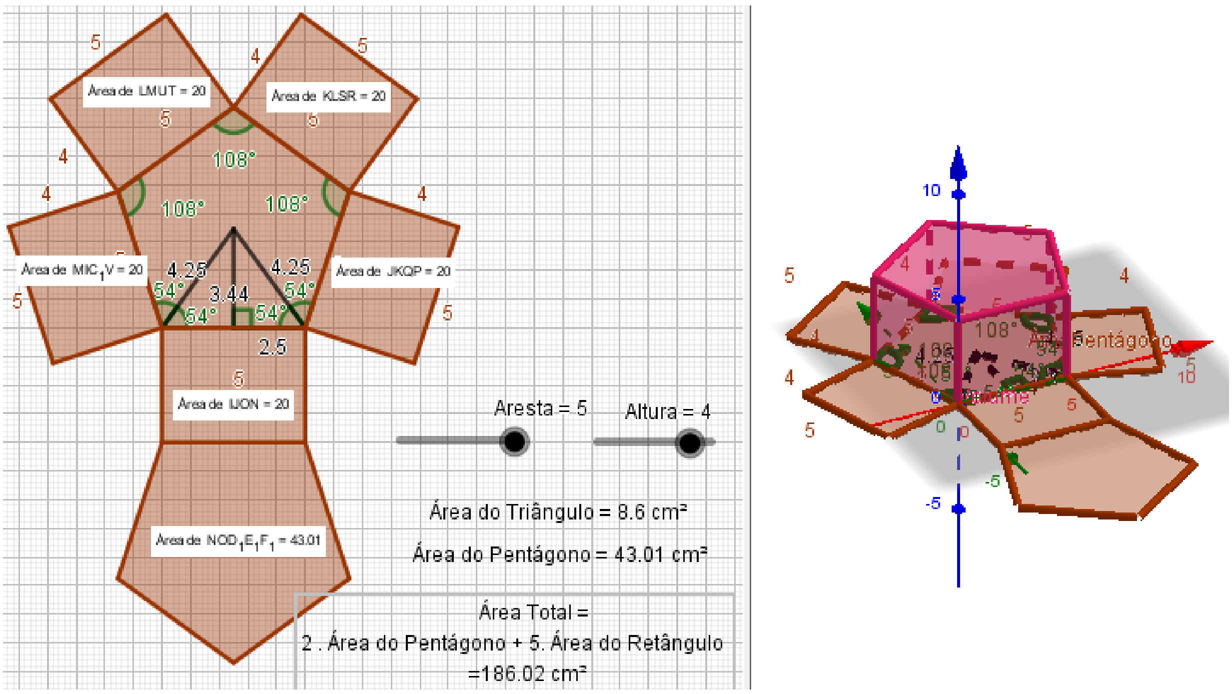
Figura 65: Prisma quadrangular planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

O quinto sólido estudado no dia, Figura 66 , foi o prisma pentagonal regular. Dentre os prismas abordados, este foi o que os alunos sentiram mais dificuldade, devido sua base ser um pentágono. Ressalta-se que o ensino dos cálculos dessa base foi ministrado nas aulas teóricas do primeiro ciclo, a qual foi recapitulada nesta aula com a imagem do sólido no GeoGebra.

Figura 66: Prisma pentagonal regular planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

A figura possuía dois controles deslizantes (aresta e altura). Neste sentido, observou-se que, quando se movimentava o controle da altura, a área da base não se alterava. Diferentemente do controle da aresta, em que sua manipulação modificava simultaneamente as áreas dos pentágonos e dos retângulos. Após a planificação, os discentes concluíram que a área total desse sólido geométrico é a soma das áreas de 2 (dois) pentágonos e 5 (cinco) retângulos.

Para encerrar os exemplos com prisma, o sexto arquivo, Figura 67 , demonstrou o prisma hexagonal regular. Destaca-se que o cálculo da área da base desse sólido também foi ensinado nas aulas teóricas do primeiro ciclo, no entanto, com a visualização da planificação do sólido os alunos entenderam melhor.

A figura possuía dois comandos dinâmicos (aresta e altura). Neste sentido, observou-se que, analogicamente ao que acontece com o prisma pentagonal, a movimentação da altura não modifica a área da base e a aresta altera a área de todas as figuras. Ao planificá-lo, os discentes concluíram que sua área total era a soma de 2 (dois) hexágonos mais 6 (seis) retângulos.

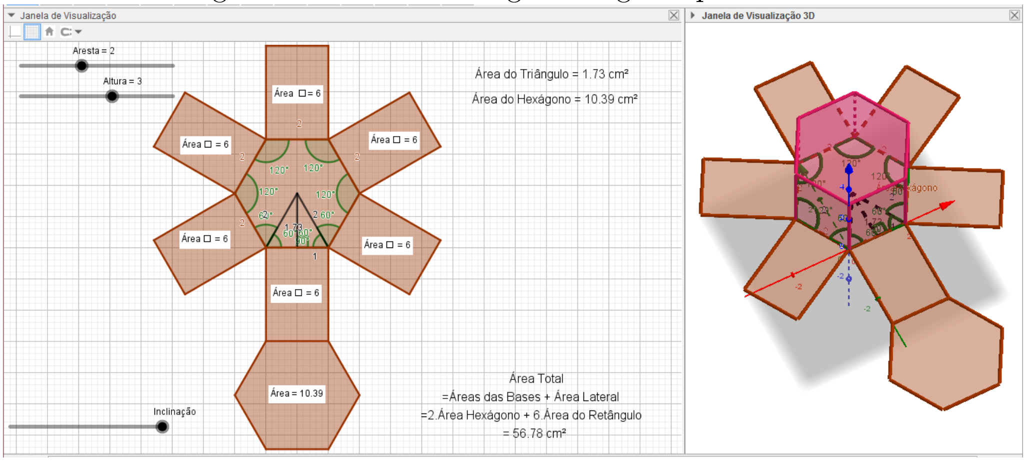


Figura 67: Prisma hexagonal regular planificado

Fonte: Elaborada pelo autor

7.2.5 4ª aula - cálculo das áreas das pirâmides no GeoGebra

A quarta aula foi voltada para o ensino das áreas das diversas pirâmides. O pesquisador também apresentou os arquivos com as figuras e suas planificações que seriam usadas em sala de aula

Dentre os conteúdos de sólidos geométricos estudados neste ciclo, as pirâmides foram as mais difíceis para compreensão dos alunos. Assim, o primeiro arquivo estudado, Figura 68 , foi a pirâmide cuja base é um triângulo equilátero. Ela foi criada com apoio de dois controles deslizantes (aresta da base e altura).

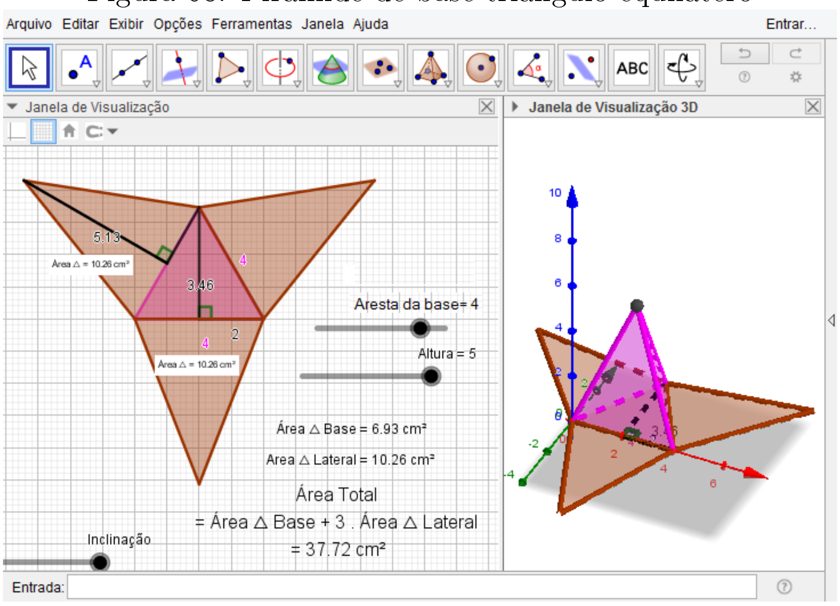


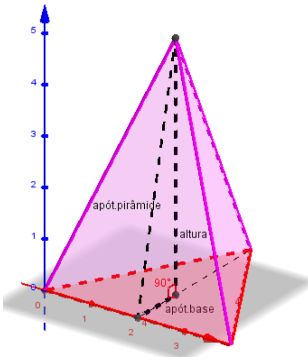
Figura 68: Pirâmide de base triângulo equilátero

Fonte: Elaborada pelo autor

Para calcular a área desse sólido, o orientador pediu que os alunos observassem as figuras planas que o compõe. Eles perceberam, através da planificação, que era constituído de 4 (quatro) triângulos, sendo o da base equilátero e os outros três congruentes entre si. Assim, a área da pirâmide triangular seria a soma de todas as áreas dessas figuras planas por ele composta.

Ao movimentar os comandos dinâmicos da aresta da base ou altura, o software já atribuía o valor de cada face lateral triangular. Através de um exemplo, o pesquisador ensinou que quando a questão não disponibilizasse o valor do apótema ou da aresta lateral para o cálculo da área do sólido, os alunos utilizariam o Teorema de Pitágoras pra encontrar o apótema da Pirâmide, e assim calcular a área da face lateral do sólido.

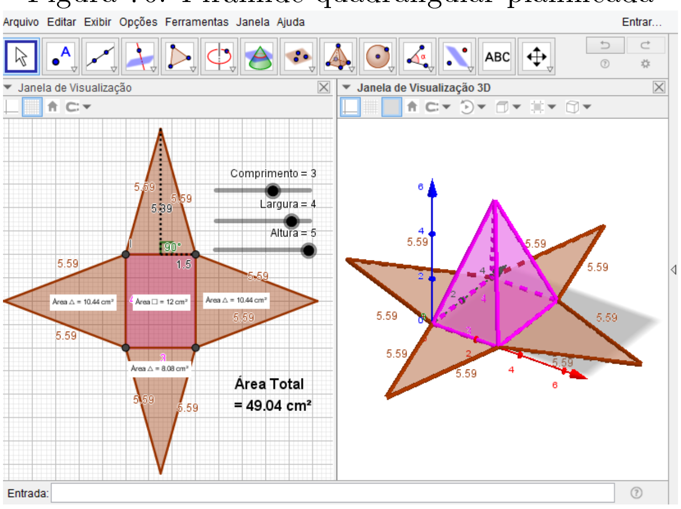
Figura 69: Amplificação da pirâmide para cálculo da face lateral triangular



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, os alunos acessaram o segundo arquivo, Figura 70 : a pirâmide quadrangular planificada. Nessa imagem foram utilizados três comandos dinâmicos (comprimento, largura e altura).

Figura 70: Pirâmide quadrangular planificada



Fonte: Elaborada pelo autor

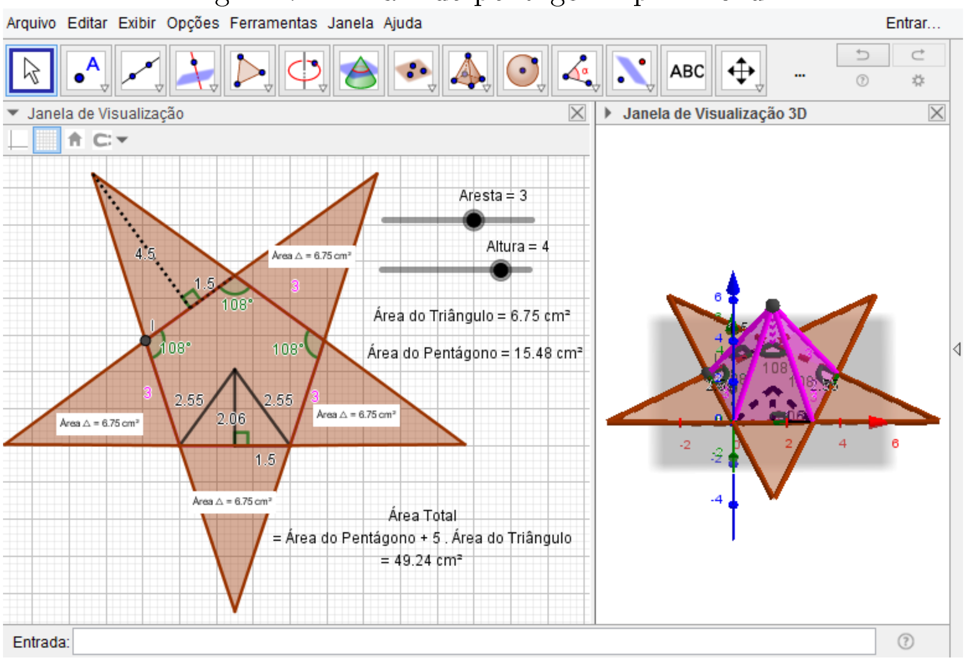
Ao movimentar o controle deslizante comprimento, altera-se a área da base e de dois triângulos opostos, dentre os quatro que compõe o sólido, a qual a base desses triângulos é o comprimento do retângulo. Movimentando o controle da largura, altera também a área da base e dos outros dois triângulos opostos, a qual a base desses triângulos é a largura do retângulo. E modificando a altura, não altera a área da base, no entanto, transforma as áreas dos triângulos.

Portanto, concluiu-se que a área total desse sólido é a soma das áreas da base quadrangular mais 4 (quatro) triângulos, sendo que de dois a dois são congruentes. Nesta aula também foi demonstrado que as faces laterais serão iguais somente se a base for um quadrado.

No arquivo seguinte, Figura 71 , a pirâmide pentagonal regular, possuía dois controles deslizantes (aresta e altura da pirâmide). Ao movimentar a altura, somente a área da superfície lateral é alterada. Contudo, modificando a aresta altera-se toda a área do sólido geométrico.

Os alunos também observaram, pela planificação, que a área total desse sólido corresponde à soma da área do pentágono mais cinco triângulos congruentes.

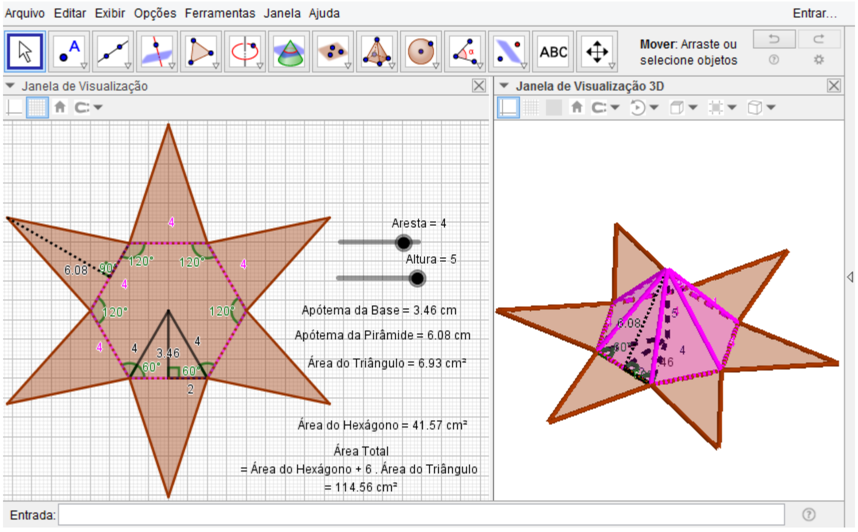
Figura 71: Pirâmide pentagonal planificada



Fonte: Elaborada pelo autor

Para finalizar a aula, foi aberto o arquivo da pirâmide hexagonal regular planificada, Figura 72, em que possuía os comandos dinâmicos altura e aresta. O primeiro interfere na área das faces laterais e não mexe na base e o segundo modifica a área de toda a pirâmide. Verificou-se que a área total desse sólido geométrico corresponde à soma da área do hexágono mais 6 (seis) triângulos congruentes.

Figura 72: Pirâmide hexagonal planificada



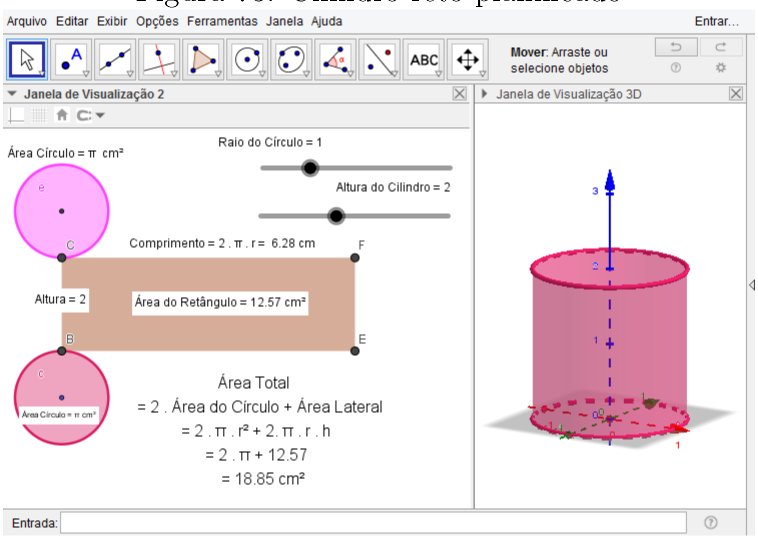
Fonte: Elaborada pelo autor

7.2.6 5ª aula - cálculo das áreas dos corpos redondos e poliedros de Platão

A quinta aula foi voltada para o ensino dos corpos redondos e dos poliedros de Platão. O primeiro corpo redondo mostrado no dia foi o cilindro reto planificado. Como o GeoGebra não faz a planificação do cilindro e nem do cone, foi necessária a criação da planificação na janela de visualização 2D. Foi colocado um comando que, à medida que alterasse o comprimento do raio e da altura na Janela 3D, modificavam-se também as áreas dos círculos e do retângulo.

Quando se faz a planificação do cilindro, o corpo redondo se transforma em 2 (dois) círculos congruentes mais 1 (um) retângulo. Os círculos são as bases e o retângulo representa a superfície lateral.

Figura 73: Cilindro reto planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

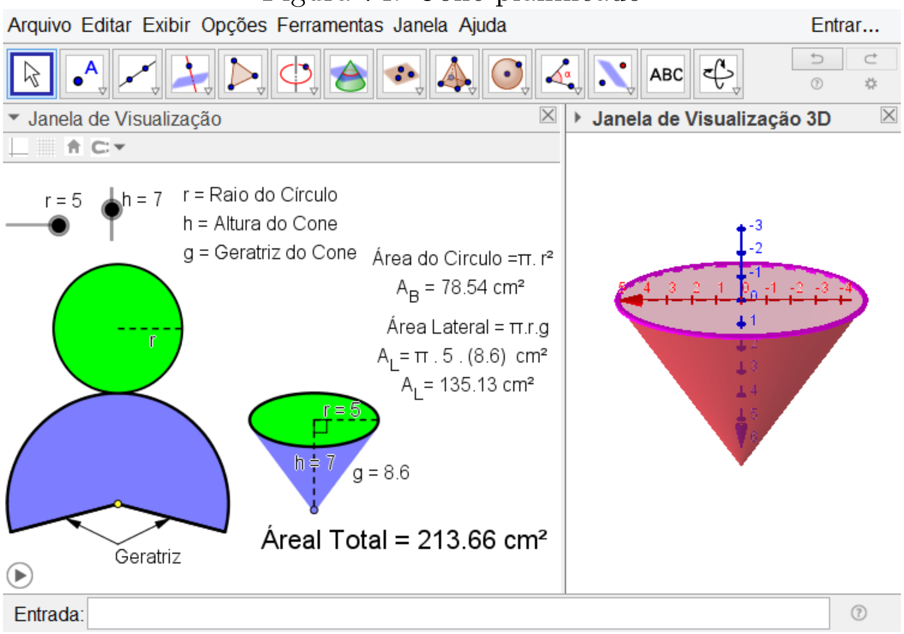
O software ajudou os alunos a entenderem melhor o cálculo da área total do cilindro. Isso porque os alunos são levados, no primeiro momento, a pensarem que superfície lateral seja um retângulo de base 2r e altura h. Enquanto, na verdade, a superfície lateral é um retângulo de altura h e cuja base é o comprimento da circunferência, ou seja, $2\pi r$.

O sólido, Figura 73 , possuía os controles deslizantes raios e altura. A movimentação do controle dos raios alterava a área de todo o sólido, já o controle da altura modificava a área apenas da superfície lateral e não mexia na base.

Assim como no cilindro, o GeoGebra não disponibiliza a planificação do cone. Assim, é necessária a criação de figuras planas atreladas aos comandos dinâmicos raio e altura, conforme Figura 74 . Para calcular a área lateral, os alunos deveriam encontrar o valor da geratriz "g", ou seja, a hipotenusa, além da altura (h) e o raio (r) dos catetos, através do Teorema de Pitágoras.

Portanto, concluiu-se que a área total do cone é a soma das áreas do círculo e do setor circular.

Figura 74: Cone planificado

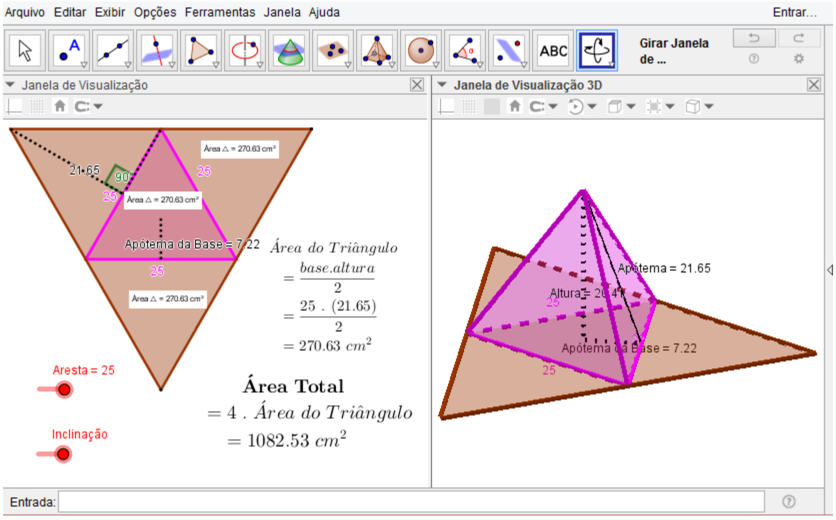


Fonte: Elaborada pelo autor

Logo após o ensino dos corpos redondos, seguiu-se para a parte final do estudo da oficina: os Poliedros de Platão. O pesquisador destacou que esses poliedros, por serem figuras regulares, necessitavam encontrar apenas o valor da área de uma face e a área total do sólido geométrico seria o valor de uma face multiplicada pela quantidade de faces.

O primeiro arquivo sobre os poliedros de Platão estudado foi o que continha o tetraedro, Figura 75. A figura plana que o constitui é um triângulo. Quando ele foi planificado surgiram as figuras de 4 (quatro) triângulos congruentes. Logo, a área total dele é quatro vezes o valor da área de um triângulo equilátero.

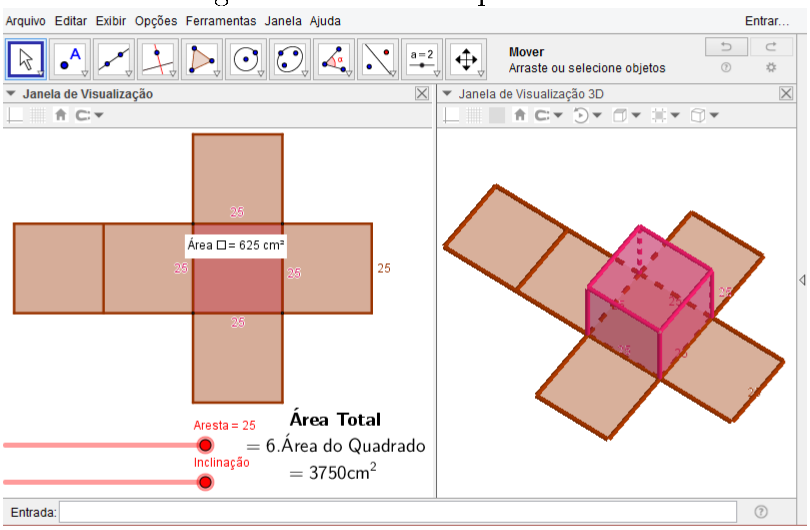
Figura 75: Tetraedro planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

O sólido seguinte, Figura 76 , foi o hexaedro, cuja figura plana que o compõe é um quadrado. Na janela de visualização foi colocado um comando para que, à medida que se alterasse o valor da aresta, alterava-se o valor da área total do hexaedro. Através da planificação, verificou-se que ele era composto de seis quadrados congruentes, ou seja, sua área total é seis vezes o valor de um quadrado.

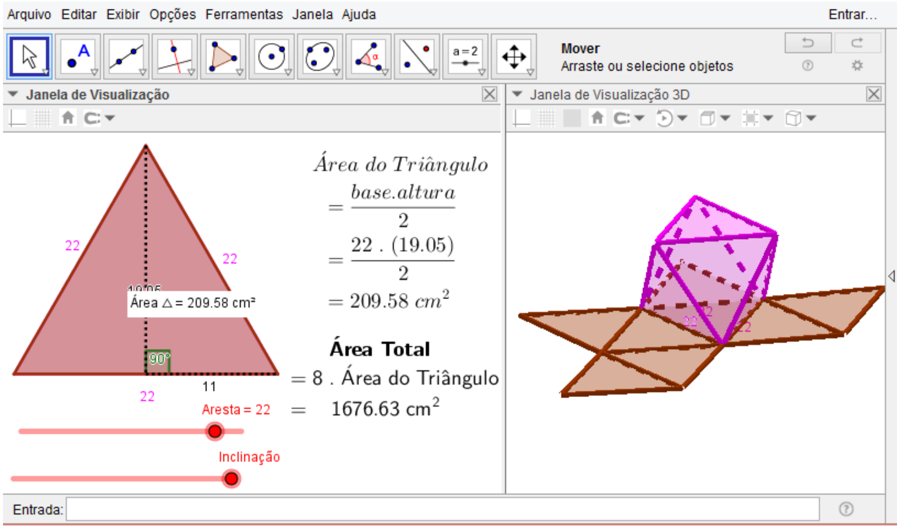
Figura 76: Hexaedro planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida foi o octaedro, Figura 77 , em que a figura plana que o compõe é um triângulo. Na janela de visualização foi colocado o controle deslizante da aresta, a qual sua alteração modificava a área do triângulo e, consequentemente, a área do octaedro. Logo, após sua planificação, verificou-se que sua área é igual a oito vezes a área de um triângulo.

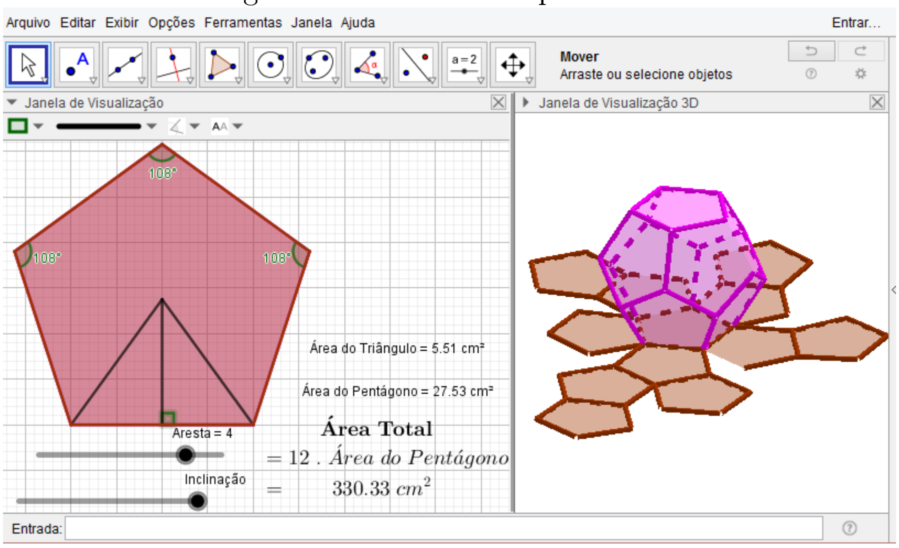
Figura 77: Octaedro planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

Depois foi estudado o dodecaedro, Figura 78 , cuja figura plana que o compõe é um pentágono. O comando dinâmico da aresta colocado nessa figura ocasionou as mesmas mudanças vistas no sólido anterior. Logo, verificou-se também, após a planificação, que a área do dodecaedro é igual a 12 (doze) pentágonos.

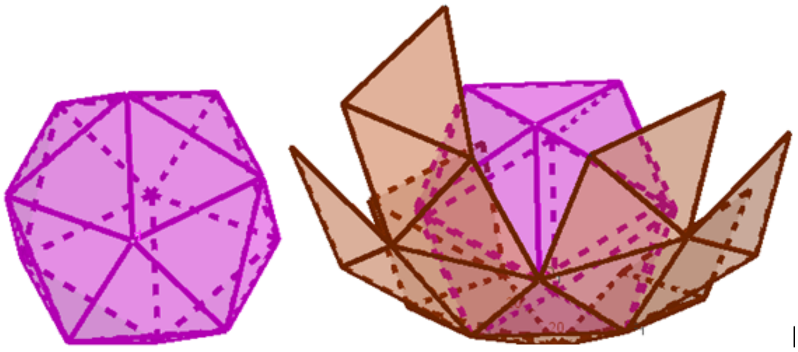
Figura 78: Dodecaedro planificado



Fonte: Elaborada pelo autor

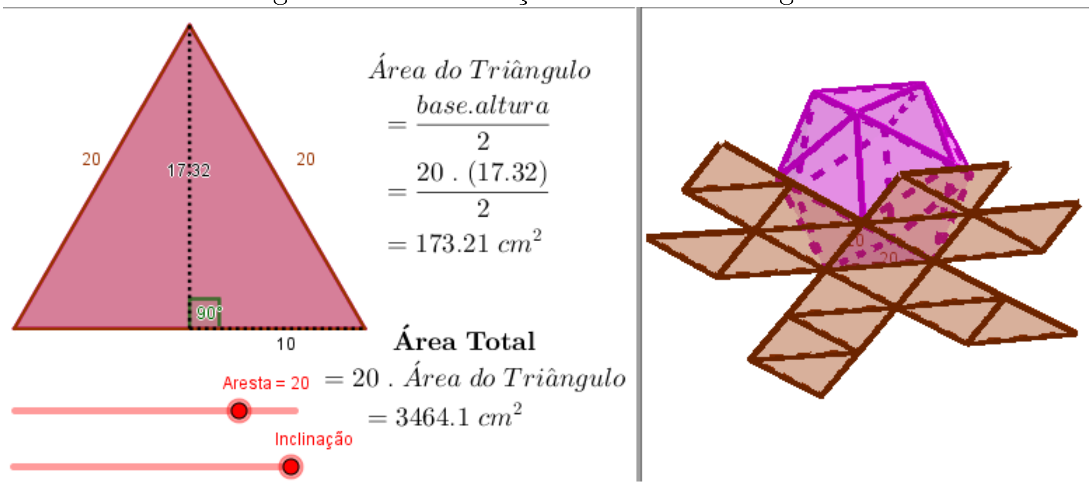
Por fim, o último sólido estudado foi o icosaedro, Figuras 79 e 80 , o qual é formado por triângulos. O controle deslizante aresta também altera a área do triângulo e, consequentemente, a área total do sólido geométrico. Por possuir 20 (vinte) faces triangulares, sua área total é vinte vezes o valor da área de um triângulo.

Figura 79: Icosaedro regular



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 80: Planificação do Icosaedro regular



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, os alunos puderam compreender melhor o conteúdo ministrado no ciclo inicial e, através dos comandos dinâmicos, puderam perceber suas interferências no cálculo da área. Portanto, o programa GeoGebra trouxe dinamicidade nas construções dos sólidos geométricos.

Após a ministração das aulas, num horário posterior, foi realizado um último teste com os dois últimos grupos (B e C) para avaliar o desempenho desses alunos após o uso dos recursos mediadores e fazer uma posterior análise dos resultados obtidos.

Vale ressaltar que a esfera não pôde ser estudada nem nos materiais manipuláveis e nem no Geogebra devido a indisponibilidade de material e tempo, pois tal assunto demandava um prazo maior, o que não aconteceu.

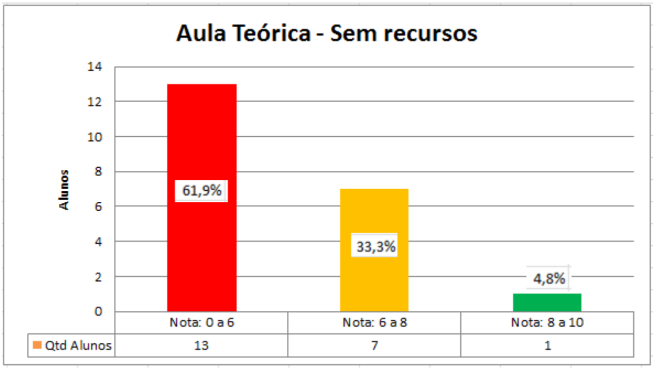
8 ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo será realizada uma análise e reflexão sobre os dados recolhidos ao longo das aulas, das avaliações e dos questionários, com finalidade de obter informações acerca da utilização dos recursos mediadores na sala de aula e sua importância na aprendizagem da Matemática.

O objetivo deste trabalho foi analisar o GeoGebra e os materiais manipuláveis como recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no Ensino Médio. Através desta pesquisa, o resultado a ser alcançado é a introdução de novas metodologias em sala de aula que sejam capazes de atrair a atenção e interesse dos alunos nos conteúdos de matemática, por meio de experiências visuais, táteis e imaginárias, transformando as aulas mais dinâmicas, interativas, desafiantes, construtivistas, motivadoras e divertidas. Logo, a aprendizagem, quando prazerosa, contribui para a redução nos índices de faltas, recuperação, reprovação nessa matéria e até mesmo no abandono da escola.

Antes de utilizar os recursos mediadores, o pesquisador ministrou o conteúdo das áreas dos sólidos geométricos de forma tradicional aos 21 (vinte e um) alunos da amostra da pesquisa, utilizando apenas quadro e pincel. No término do conteúdo, aplicou-se uma prova diagnóstica para fazer um panorama do rendimento escolar dos alunos antes da utilização dos recursos. A maioria dos alunos que compunham a amostra da pesquisa (grupos A, B e C) obtiveram resultados insatisfatórios.

Figura 81: Rendimento dos alunos sem os recursos mediadores



Fonte: Elaborada pelo autor

A análise dos resultados mostrou que 61,9% dos alunos tiveram notas entre 0 a 6, o que é considerado um resultado negativo, sendo que apenas 33,3% dos alunos ficaram com notas medianas entre 6 a 8 pontos e apenas 1 (um) aluno teve resultado favorável, o que correspondeu a 4,8%. Logo, a média aritmética das notas dos alunos foi de 4,76 e que servirá para a comparação entre a utilização ou não de recursos.

Conclui-se, portanto, que as aulas ministradas de forma tradicional resultaram em um número elevado de notas baixas e que tal forma de ensinar não estimulou a aprendizagem dos alunos. Esse quadro é perceptível no dia a dia dos professores de matemática, o que corrobora com as afirmações dos alunos de uma disciplina chata e difícil. Contudo, esta pesquisa quis mostrar que as aulas podem ser mais atrativas e que os recursos mediadores podem facilitar o processo ensino e aprendizagem.

8.1 A análise do uso dos Materiais Manipuláveis nas aulas

No segundo ciclo de aulas, o professor trabalhou com os 14 (quatorze) alunos dos grupos A e C. Antes de iniciar suas aulas, o professor realizou um pré-questionário com os dois grupos contendo duas perguntas.

A primeira questionava ao aluno se em algum momento da sua vida estudantil o professor de Matemática já havia utilizado algum material manipulável como ferramenta dinâmica de ensino na qual o aluno havia construído. Dos alunos pesquisados, 12 (doze) ou 85,72% responderam que sim e outros 2 (dois) ou 14,28% responderam que não. Segue abaixo alguns comentários deixados pelos alunos, mas por motivo de privacidade não são identificadas.

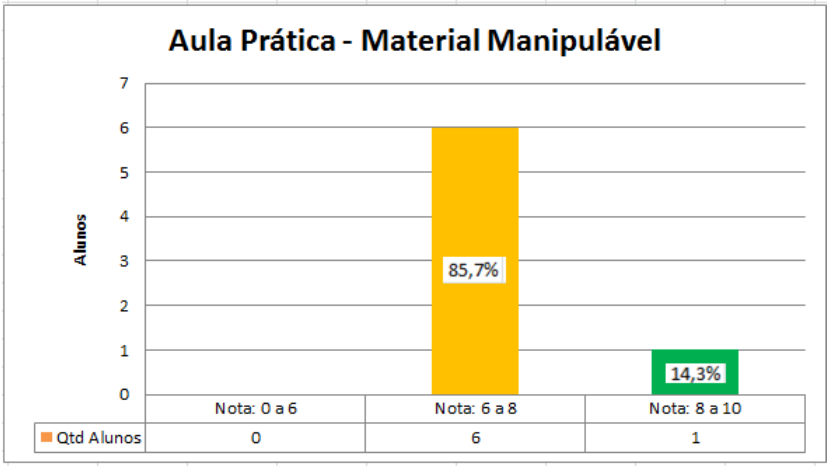
> Melhora a forma como você enxerga a Matemática, tornando o ensino prazeroso e você derruba o "pesadelo" que é estudar Matemática. (ALUNO A)
> Construímos as figuras planas e depois desenvolvemos os cálculos. (ALUNO B)
> Foi bom porque aprendemos coisas novas. (ALUNO C)
> É muito melhor construir os sólidos geométricos e planificá-los, pois você aprende mais rápido sobre como os sólidos são formados.(ALUNO D)
> Os materiais nos ajudam a ter dimensão sobre as imagens.(ALUNO E)
> Aprendemos na prática e vemos como são e funcionam.(ALUNO F)
> As formas geométricas que ele utilizou ajudaram a compreender melhor a matéria. (ALUNO G)

A segunda pergunta questionava se o aluno acreditava que o uso de material manipulável poderia ajudá-lo a aprender Matemática no ensino de áreas dos sólidos geométricos. A resposta afirmativa foi unânime, ou seja, todos concordam que o uso desse recurso auxilia na aprendizagem dos conteúdos da Matemática. No campo designado aos comentários, os participantes deixaram algumas anotações:

> Você conhece as formas por extenso, de forma mais incisiva. É melhor porque tem contato direto com os sólidos. (ALUNO A)
> É uma maneira prática de se aprender, tanto construir quanto desenvolver. (ALUNO B)
> É muito mais fácil, pois já podemos ver as medidas certas. (ALUNO C)
> Ao ver os sólidos de forma concreta fica melhor para entender sobre o assunto. (ALUNO D)
> Ter esses materiais a nossa disposição nos ajuda a entender o conteúdo, desde que o professor se desempenhe melhor para chamar a atenção dos alunos para esse tipo de aula. (ALUNO E)
> Porque no papel ou no quadro não temos a noção exata da dimensão do objeto. Já o Material Manipulável ajuda a diminuir o tempo que temos que ficar decifrando ou entendendo a área dos sólidos geométricos. (ALUNO F)
> Os materiais manipuláveis irão ajudar muito, pois têm métodos novos para aprender Matemática na resolução de uma determinada atividade. (ALUNO G)

Assim, percebeu-se que parte dos alunos já teve contato com os materiais manipuláveis em outros conteúdos matemáticos e estavam com boa expectativa para o ciclo de aulas com a utilização desses recursos no conteúdo de áreas dos sólidos geométricos. Após o término desse ciclo, foi realizado um segundo teste avaliativo apenas com o grupo A, já que esse grupo servirá para analisar a influência do uso de materiais manipuláveis em sala de aula.

Figura 82: Rendimento dos alunos do Grupo A após as aulas com Materiais Manipuláveis



Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando os resultados, percebeu-se que o aproveitamento dos alunos melhorou em relação às aulas tradicionais. Com a utilização dos materiais manipuláveis, dos 7 (sete) alunos pesquisados, 6 (seis) conseguiram notas entre 6 a 8, que correspondeu a 85,7% da amostra. Contudo, continuou sendo apenas 1(um) aluno que teve nota satisfatória entre 8 a 10, que correspondeu a 14,3%. Logo, a média aritmética das notas dos alunos ficou em 6,47, o que servirá para a comparação entre a não utilização de recursos e o uso desse material.

Após aplicação da prova diagnóstica, os alunos responderam outro questionário com duas perguntas sobre a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula. Vale ressaltar que essas mesmas questões foram apresentadas ao grupo A e C, sendo que o primeiro grupo respondeu após o fim deste ciclo e o segundo grupo após o término do terceiro ciclo.

A primeira pergunta questionava como o aluno classificaria a oficina envolvendo os materiais manipuláveis na qual ele participou: ótima, boa, regular ou ruim. Dos 14 (quatorze) alunos pesquisados, 8 (oito) ou 57,14% responderam que as aulas foram ótimas e 5 (cinco) ou 35,72% marcaram que foram boas e 1 (um) ou 7,14% afirmaram que foi regular , sendo que nenhum marcou como ruim. Os comentários deixados pelos alunos foram os seguintes:

> O aluno, além de "bater cabeça" na construção, também aprende a calcular. (ALUNO A)
> Facilitou para compreender as formas das figuras e ajudou mais ainda no conhecimento. (ALUNO B)
> Muito boa. Foi uma aula bem participativa, atraente e muito divertida. Eu gosto de aula assim. Além do mais a gente aprendeu bastante mesmo. Aula nota 10. (ALUNO C)
> Muito boa, porque temos que montar os desenhos e acabamos interagindo com os colegas de classe. (ALUNO D)
> Boa, porque envolve seu empenho, facilitando o estudo. (ALUNO E)
> Boa, pois é uma aula prática onde você tem que entender mais do conteúdo. (ALUNO F)
> Regular, porque os desenhos, muitas vezes, são difíceis. (ALUNO G)

O segundo questionamento foi se a utilização de materiais manipuláveis como recurso complementar nas aulas tradicionais de matemática pode tornar o conteúdo mais atrativo/compreensível e a resposta afirmativa foi unânime. Dentre os comentários deixados, destacaram-se os seguintes:

> Colar, desenhar e cortar sempre foi algo que os alunos gostam, desde o prezinho. Então, nada mais justo juntar isso tudo à matemática e deixar a aula mais divertida. (ALUNO A)
> Com isso as aulas se tornam mais compreensíveis e faz com que o aluno tenha facilidade para entender as ideias mostradas. (ALUNO B)
> Com os materiais manipuláveis a aula se torna mais divertida e interessante, sendo uma nova maneira de se aprender. (ALUNO C)
> É algo que não se torna rotineiro e, se tivesse esse método desde o início, teria melhorado muito em relação ao aprendizado. (ALUNO D)
> Uma aula diferente os alunos têm mais interesse (ALUNO E)
> Os alunos criando seus próprios materiais, eles vão ter interesse em saber de todos os detalhes e fazer os cálculos corretos para ter a dimensão exata das figuras. (ALUNO F)
> Os materiais manipuláveis faz com que os alunos participem mais das aulas. (ALUNO G)

Portanto, ao analisar o resultado da avaliação e as respostas nos questionários, o pesquisador concluiu que o uso dos materiais manipuláveis no ensino das áreas dos sólidos geométricos influenciou no aprendizado desse conteúdo, facilitando sua compreensão e aumentando o aproveitamento dos alunos.

Assim, essa experiência com materiais manipuláveis proporcionou aos alunos a criação de imagens de algo que lhes é familiar no seu cotidiano, ampliou a capacidade de representação mentalmente desses objetos, aproximou o abstrato da realidade através da materialidade, possibilitou uma maior interação dos alunos com o conteúdo através da participação, prendeu a atenção dos alunos na aula, proporcionou uma aprendizagem dos discentes de forma dinâmica, divertida, interessante e estimulante, facilitou a compreensão e mudou significativamente a imagem negativa em relação à Matemática.

8.2 A análise do uso do GeoGebra nas aulas

Inicialmente, é importante fazer algumas colocações sobre os fatos observados. Primeiro, nas aulas iniciais com a utilização do recurso GeoGebra foi perceptível a demora na manipulação do software, pois os alunos estavam se adaptando, mas no decorrer das aulas observou-se uma melhor desenvoltura e intimidade desses com o programa. Já nas aulas finais se percebeu que as dúvidas diminuíram e teve pouca dificuldade na compreensão da matéria.

Segundo, na realização dos exercícios de fixação realizados após as ministrações das aulas, ocorreu um certo atraso nas aulas iniciais, mas o pesquisador incentivou aos alunos a um ajudar o outro que estava necessitando de apoio. No decorrer das aulas com o software observou-se que os alunos passaram a demonstrar mais interesse e ansiedade pelas aulas de Matemática, resultando em maior interatividade e fluidez.

Nesse terceiro ciclo de aulas, o professor trabalhou com 14 (quatorze) alunos dos grupos B e C. Assim como ocorreu no ciclo anterior, antes de iniciar as aulas, o pesquisador realizou um pré-questionário de seis perguntas com os dois grupos. O objetivo deste foi investigar se durante a vida estudantil os estudantes tiveram contato com recursos computacionais na escola e sua influência no seu aprendizado.

Ao serem questionados sobre ter dificuldade na aprendizagem de conteúdos da Matemática, 57,14% dos estudantes marcaram que sim, 28,57% responderam que parcialmente e 14,29% afirmaram que não. Portanto, a maioria dos alunos pesquisados possuía algum grau de deficiência no estudo desta disciplina. No tocante a pergunta sobre a existência de laboratório de informática na escola, todos responderam positivamente.

Mas quando foram perguntados sobre a frequência da utilização desse laboratório de informática pelos professores de qualquer disciplina, 57,14% respondeu que os professores não usavam o local e 42,86% afirmou que sim. Segue alguma das respostas dadas pelos alunos no local destinado aos comentários sobre a importância da utilização desse espaço da escola, mas por motivo de privacidade não serão identificadas.

> Poderiam utilizar com mais frequência. Além de sair da rotina de ensino, acredito que auxiliaria mais no aprendizado. (ALUNO 1)
> Usado de forma eficiente poderá resolver os problemas dos alunos com dificuldades em Matemática. (ALUNO 2)
> Sua utilização pode complementar ainda mais na aprendizagem do aluno. (ALUNO 3)
> O uso dos computadores nos ajuda a abrir mais nossas mentes e, também, não ficarmos na "mesmice" da sala de aula. (ALUNO 4)
> Ajuda os alunos a absorver melhor e entender de forma detalhada o conteúdo. (ALUNO 5)
> É importante, pois diversifica a forma de aprendizagem e melhora o entendimento do conteúdo na prática. (ALUNO 6)
> O laboratório é importante para pesquisas e uso de imagens mais elaboradas, fazendo com que os alunos e os professores prossigam com o conteúdo. (ALUNO 7)

Assim, conclui-se que os alunos consideram o uso do laboratório de informática importante para o ensino, mas percebe-se que ele é pouco ou nada utilizado pelos docentes. Vale ressaltar que os recursos computacionais disponíveis nesta escola só são possíveis devido a uma parceria com o Instituto Federal do Maranhão que usa temporariamente o prédio da escola, em decorrência da reforma na sua sede. Os computadores foram disponibilizados aos docentes e discentes, mas esses são utilizados para outras finalidades. Destaca-se também que os computadores próprios da escola estão sucateados, pois não possuem suporte técnico para sua manutenção.

Ao serem questionados sobre a utilização do laboratório de informática pelo professor de Matemática como ferramenta dinâmica de ensino em que o aluno operou o computador, 85,71% respondeu que ele não utilizava tal recurso e apenas 14,29% respondeu positivamente.

No tocante à opinião dos alunos se o uso do computador pode ajudá-los a aprender Matemática, 85,71% marcaram que sim e os 14,29% responderam negativamente. No local destinado aos comentários, os alunos deram as seguintes respostas.

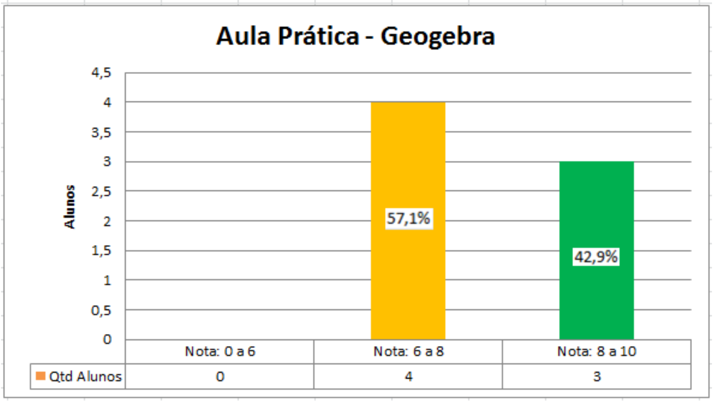
> Ter disponibilidade de informação sempre ajuda no ensino, é dinâmico. (ALUNO 1)
> Usando as mais novas e eficientes tecnologias podem ajudar no aprendizado. (ALUNO 2)
> De modo geral, sim, pois o uso do computador é uma maneira diferente de aprender. (ALUNO 3)
> Não adianta ficar apenas na escrita, temos que entender como acontece todo o procedimento. (ALUNO 4)
> Proporciona novos olhares para com a disciplina, buscando assim mais conhecimento. O uso do computador é imprescindível na vida do estudante. (ALUNO 5)
> Temos acesso a outros tipos de ferramentas que auxiliam na aprendizagem (ALUNO 6)
> Não. Depende de cada pessoa. Para mim, o melhor seria aprender a matemática em sala de aula. (ALUNO 7)

A última pergunta questionava se os alunos já conheciam ou já tinham utilizado o software GeoGebra. 92,86% dos alunos responderam negativamente e somente 7,14%, o que corresponde a um estudante, afirmaram positivamente. Em seguida, caso a resposta anterior fosse positiva, foram questionados se aprenderam algo novo e se recomendaria o programa. A resposta desse estudante foi que o GeoGebra é "um excelente programa, pois visualiza e demonstra as áreas das figuras espaciais"(ALUNO 2). Assim, conclui-se que esse software é pouco conhecido pelos alunos e não utilizado pelos professores em sala de aula.

Após o término desse último ciclo, foi realizado um teste avaliativo com os dois grupos que participaram, sendo que um grupo serviu para analisar a influência do uso somente do GeoGebra no ensino da matemática e ou outro para avaliar a utilização dos dois recursos mediadores em sala de aula.

Avaliando os resultados, percebeu-se o aumento do rendimento dos alunos. Com a utilização do software GeoGebra, dos 7 (sete) alunos pesquisados do grupo B, 4 (quatro) conseguiram notas entre 6 a 8, que correspondeu a 57,1% da amostra, mas foi perceptível o aumento do número de alunos que tiraram notas entre 8 a 10, ou seja, de 1 (um) passou para 3 (três), que em percentual significa 42,9%. Logo, a média aritmética das notas dos alunos foi de 7,42, e esta servirá para a comparação entre a não utilização de recursos e o uso desse material.

Figura 83: Rendimento dos alunos do Grupo B após as aulas com Geogebra



Fonte: Elaborada pelo autor

Após o término do terceiro ciclo, os alunos responderam outro questionário, cujo propósito foi averiguar a receptividade que as atividades propostas tiveram e verificar a influência do uso do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Essas perguntas foram respondidas pelo grupo B e C. Sendo que o primeiro o grupo assistiu às aulas tradicionais e as com auxílio do GeoGebra e o segundo grupo participou de todos os ciclos.

A primeira pergunta abordou a opinião dos alunos sobre a utilização do GeoGebra nas aulas de Matemática, classificando-a como ótima, boa, regular ou ruim. Metade dos alunos pesquisados marcou que a oficina do GeoGebra foi ótima e os outros 50% disseram que foi boa, sendo que nenhum aluno marcou como regular ou ruim. Isso mostra que a proposta foi bem aceita. Dentre os comentários realizados, destacaram-se os seguintes:

> O GeoGebra ajuda o aluno em cálculos, planificações e as áreas das figuras. (ALUNO A)
> Ajudou a identificar as figuras em diferentes ângulos e facilitou o entendimento. (ALUNO B)
> Um programa ótimo para trabalhar com os alunos. Ajuda muito no aprendizado. (ALUNO C)
> Uma aula onde os alunos podem se aprofundar muito mais no conteúdo, entendendo melhor como são as formas das figuras geométricas. (ALUNO D)
> Facilitou na aprendizagem e tornou as aulas mais atrativas, divertidas e animadas (ALUNO E)
> Me ajudou a entender melhor as questões e nas resoluções das atividades (ALUNO F)
> Porque faz com que os alunos interajam mais nas aulas. (ALUNO G)

O segundo questionamento foi para saber se a utilização do GeoGebra como recurso complementar nas aulas tradicionais de Matemática pode tornar o conteúdo mais atrativo/compreensível. A resposta sim foi unânime entre os alunos, ou seja, todos concordaram que esse recurso didático influencia na aprendizagem dos alunos. Dentre os comentários, destacaram-se:

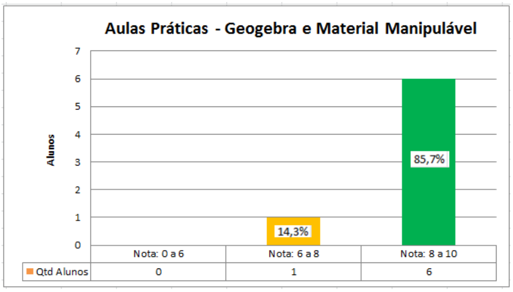
> O aluno ao ver como constrói a figura tem interesse em criar a sua e compreende melhor sobre elas. (ALUNA A)
> Torna a aula mais dinâmica e melhora a compreensão (ALUNO B)
> A tecnologia chama a atenção dos jovens, ajuda a testar o conhecimento e ensinar o conteúdo. (ALUNO C)
> Acredito que todos puderam ampliar suas visões e enxergar a matemática de uma forma mais fácil. (ALUNO D)
> É mais compreensível por ter exemplos na prática (ALUNO E)
> O GeoGebra desperta a curiosidade do aluno e não fica uma aula chata. A aula é diferente e você realmente aprende o que o professor quer passar (ALUNO F)
> Traz maneiras diferentes para os alunos aprenderem. (ALUNO G)

Neste sentido, conclui-se que o uso e a valorização das tecnologias de informação e comunicação, em suas diferentes formas e usos, trazem significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Assim, essa nova forma de comunicar e conhecer transforma o estudante em um ser ativo na apropriação do conhecimento, sendo que o professor deve estar apto para o seu papel de orientador, facilitador e motivador na construção desse conhecimento.

8.3 A análise do uso dos Materiais Manipuláveis e do GeoGebra

Outro ponto a ser observado foi o resultado obtido pelo grupo C da amostra (7 alunos que participaram de todas as oficinas). Após análise dos resultados, observou-se mais um aumento do aproveitamento dos alunos comparado às outras aplicações. Com a utilização dos dois recursos, dos 7 (sete) alunos pesquisados, apenas 1 (um) ficou com a nota entre 6 a 8, o que em percentual significa 14,3%. Os outros 6 (seis) conseguiram notas entre 8 a 10, que correspondeu a 85,7% da amostra. Logo, a média aritmética das notas dos alunos foi de 8,58, que servirá para a comparação entre a utilização ou não de recursos mediadores.

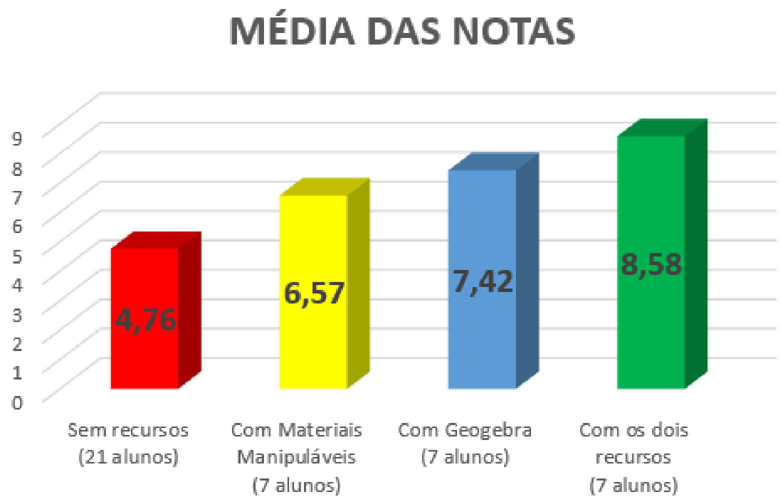
Figura 84: Rendimento dos alunos do Grupo C após as aulas



Fonte: Elaborada pelo autor

Outra análise que se pode fazer é em relação às médias aritméticas das notas dos alunos após os testes avaliativos, conforme Figura 85. A avaliação diagnóstica realizada após o primeiro ciclo de aulas, que foram ministradas de forma tradicional e sem o uso de recursos mediadores, demonstrou o alto índice de notas reprovativas. Logo, a média aritmética das notas foi 4,76, valor este menor que o índice aprovativo que é 6,00.

Figura 85: Média aritmética das notas dos alunos



Fonte: Elaborada pelo autor

Após o segundo ciclo de aula com o uso dos materiais manipuláveis, a média das notas dos alunos no teste avaliativo teve melhora comparada à prova diagnóstica anterior. Logo, os alunos saíram de 4,76 para a média de 6,57. Mesmo conseguindo uma média aprovativa, o professor percebeu que os alunos ainda precisavam crescer no seu aprendizado.

Já no fim do terceiro ciclo de aulas com o uso do GeoGebra, a média das notas dos estudantes na avaliação cresceu ainda mais, passando de 4,76 para 7,42. Assim, o professor concluiu que a interação dos alunos com o software proporcionou maior empenho dos alunos com o conteúdo, o que favoreceu a melhora no desempenho das atividades.

Diante dos resultados obtidos, o desempenho do grupo C foi o que obteve melhor resultado. A média das notas saiu de 4,76, sem os recursos mediadores, para 8,58 com o uso dos dois recursos estudados. É importante destacar que esse grupo abordou o mesmo conteúdo de formas diferentes: aulas tradicionais, aulas com materiais manipuláveis e aulas com GeoGebra. Por consequência, era esperado um melhor desempenho desses alunos. Contudo, o pesquisador percebeu que os dois recursos mediadores se complementavam, já que um facilitava o aprendizado por ser palpável (concreto) e o outro por ser dinâmico.

Assim, observou-se que o desempenho dos alunos, com o uso dos recursos mediadores em conjunto, cresceu consideravelmente. Portanto, quanto mais tempo e estímulo o professor proporcionar ao aluno no ensino dos conteúdos matemáticos, mais produtivas serão as aulas, além da melhora no rendimento dos discentes.

Dessa forma, conclui-se que o ensino de áreas dos sólidos geométricos com o uso concomitante do material manipulável e aplicação do software GeoGebra tornam as aulas mais atrativas. Assim, com os materiais manipuláveis, os alunos puderam interagir na elaboração e fabricação dessas figuras tridimensionais de forma real, através do uso do papel cartão na sua planificação. Já com o apoio da tecnologia, os alunos puderam construir e modificar os sólidos virtualmente na tela de um computador de forma dinâmica.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No Brasil, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB - 9.394/96), a Educação Básica é constituída pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. O ensino da Matemática na Educação Básica apresenta forte resistência por parte dos alunos, dentre as causas dessa dificuldade de aprendizagem estão na abstração, generalização, complexidade e hierarquização dos conceitos matemáticos. Isso implica que, para entender conteúdos mais avançados, os alunos já deveriam ter os conceitos matemáticos básicos solidificados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), instaurados em 1997, destacaram a importância do estudo da Matemática e orientaram que esta deveria ser transmitida de forma lúdica e prazerosa pelos docentes para que os alunos alcancem o desenvolvimento do conhecimento matemático necessário para resolver problemas do dia a dia.

A Geometria, que é um dos blocos de conteúdos da Matemática, está no cotidiano de todos. Segundo os PCN's (1997), os conceitos geométricos permitem ao aluno compreender, descrever e representar o mundo em que vive de forma organizada. Assim, o seu ensino não pode ser transmitido com metodologias que focam na memorização de conceitos e fórmulas através da oralidade ou apenas na manipulação de códigos e símbolos, sem associar os significados atribuídos a eles.

Tais práticas tem produzido um grande fracasso escolar nessa disciplina, com baixos índices na apropriação de conhecimentos e competências matemáticas. Para verificar a aprendizagem da Educação Básica, principalmente a Matemática, um dos instrumentos governamentais criados foi o PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Mas vale ressaltar que nos últimos resultados dessa avaliação, o Brasil está numa má colocação, ocupando a 70ª posição de um total de 80 países participantes.

Nesse contexto escolar, torna-se indispensável alterar os papéis dos atuantes (aluno, professor e recursos) no processo de ensino e aprendizagem. É necessário envolver os alunos na sua própria aprendizagem, transformando-os em protagonista na construção do seu próprio conhecimento, buscando um aprendizado significativo. Essa significação está relacionada com a funcionalidade, ou seja, os conhecimentos adquiridos devem ser úteis aos alunos para que os utilizem quando as situações os exigem.

Nesse sentido, o aluno para ser ativo nesse processo e ter motivos de ação é indispensável o interesse. Essa motivação está intimamente ligada às relações de troca com o meio, principalmente seus colegas e professores. Assim, o professor deve identificar e aproveitar aquilo que atrai cada aluno para proporcionar o autoconhecimento dos mesmos, auxiliando-os na concretização e na construção do seu próprio saber. Portanto, o aluno motivado relaciona o que aprende com o que já sabe e o utiliza quando necessário.

Por sua vez, os recursos didáticos devem ser usados como instrumentos mediadores no ensino, os quais facilitam a relação professor/aluno/conhecimento no processo de construção do saber. Eles também podem ser uma ponte entre o concreto e o abstrato, os quais proporcionam a construção mental das representações abstratas dos conceitos matemáticos correspondentes aos objetos.

Já o professor passa a ter o papel de orientador, facilitador e motivador. Nesse processo, o professor deixaria de ser o detentor e transmissor do conhecimento e o aluno não seria mais um mero expectador ou memorizador. O papel do docente é criar um ambiente adequado, promover a interação e comunicação entre alunos, utilizar estratégias criativas que incentivem o raciocínio matemático e proporcionar diferentes formas de avaliação.

Tendo em vista essa realidade, o professor de matemática deve buscar novas estratégias metodológicas de ensino que proporcionem um aprendizado ativo/participativo. É notório que os alunos se interessam por abordagens novas, então o uso de materiais concretos e da tecnologia em sala de aula são recursos didáticos que podem ser usados pelos professores como instrumentos mediadores para a aprendizagem. O presente trabalho apresentou dois recursos mediadores, o software GeoGebra e os materiais manipuláveis, para o ensino das áreas dos sólidos geométricos.

Com o objetivo de diminuir esse insucesso escolar e elevar o índice de aproveitamento dos alunos nos conteúdos matemáticos, o professor de matemática tem os materiais manipuláveis como uma das opções de instrumentos mediadores. Nesse sentido, conclui-se que materiais manipuláveis são os objetos, recursos ou instrumentos físicos, concretos, didáticos, lúdicos, dinâmicos e intuitivos que, através dos sentidos e da sua manipulação, proporciona a construção, estruturação, compreensão e concretização dos conceitos matemáticos, além de propiciar uma melhor interação, socialização, partilha de ideias entre os alunos e promover a aprendizagem.

Esses recursos podem desempenhar diversas funções em sala de aula, sendo que não existe um material individualizado para atender um determinado conceito e nem um problema pode ser solucionado apenas por um tipo de material. Assim, cada conteúdo pode ser trabalhado por meio de diversos materiais e um recurso pode ser usado para estudar diversos conceitos.

Mas para que o uso desses recursos seja eficiente, o professor deve conhecer as potencialidades e possibilidades do material a ser utilizado, saber usá-lo com confiança e adequá-lo ao objetivo que quer chegar. Vale destacar que o objetivo não está no material em si, mas no modo que será explorado, sendo esse apenas um apoio na construção do pensamento matemático do aluno.

Outro ponto a ser destacado é que o professor deve privilegiar os materiais que sejam manipulados pelos alunos e em segundo os recursos que o aluno saiba qual a finalidade do seu uso, já os materiais em que o aluno apenas ver ou mexe sem objetivo são ineficazes. Além disso, trabalhar com materiais manipuláveis requer disponibilidade de um maior tempo para a interação, exploração e conhecimento do material e a sua relação com os conceitos trabalhados.

De modo geral, as propostas utilizadas neste estudo ajudaram a visualizar a importância da utilização dos materiais manipuláveis. Considerando os dados coletados e as análises efetuadas nesta pesquisa, foi possível concluir que os alunos que utilizam este tipo de recurso apresentaram melhor rendimento comparado às aulas expositivas e trouxeram benefícios ao processo de ensino e aprendizagem.

Os resultados obtidos sugerem que a utilização dos materiais manipuláveis motivam os alunos a participarem mais das aulas, porque as tornam mais atraentes, interativas e dinâmicas, além de despertarem e estimularem a curiosidade, a espontaneidade, a concentração e o interesse nos alunos. A manipulação, a visualização e a exploração do objeto, através de experiências visuais, táteis e imaginárias, auxiliam nas dificuldades de abstração matemática, pois os alunos criam imagens familiares do seu dia a dia, e facilitam a compreensão das regras, propriedades e teorias. Além disso, proporciona uma maior interação entre os alunos e um aumento na troca de ideias.

Desta forma, os materiais manipuláveis são ferramentas que auxiliam os alunos na construção dos seus conhecimentos, através de experiências lúdicas, dinâmicas, significativas e diversificadas, e contribuem com os docentes como mediadores do processo de ensino e aprendizagem, proporcionando aulas agradáveis e motivadoras.

Outro instrumento que também foi abordado nesta pesquisa e que auxiliou no ensino da geometria foi o GeoGebra. Ele é um software de matemática dinâmica educativo, gratuito e multiplataforma.

Esse programa com interface pedagógica proporciona uma aprendizagem construtivista, em que o conhecimento se constrói a partir das percepções e ações do sujeito que lhes são significativas. Nessa perspectiva, os alunos podem construir, visualizar e manipular objetos geométricos; analisar, fazer simulações ou experimentos; conjecturar, interpretar, induzir, abstrair e generalizar os conceitos matemáticos importantes. Portanto, os ambientes informatizados favorecem a compreensão de conceitos matemáticos e propiciam animação e criatividade durante a aprendizagem.

Outra vantagem dessa ferramenta é a interação e dinamicidade. Através desse software os alunos realizam grande variedade de experimentos e construções em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta, as quais suas propriedades e relações são preservadas. Tal recurso também proporciona aulas mais atrativas, divertidas e dinâmicas, estimulando a curiosidade e a busca pelo conhecimento.

Apesar de saber as vantagens e contribuições do uso do software em sala de aula, este não simboliza a solução dos problemas educacionais. Essa ferramenta não substitui o método tradicional, apenas complementa e dinamiza as aulas. Contudo, para que esse recurso tenha êxito, é necessário que as aulas sejam planejadas, com objetivos e regras bem definidas, para poder conciliar essa combinação de metodologias, e o professor também conheça o programa e saiba utilizá-lo com confiança.

Nesse contexto, o educador deve desempenhar seu papel fundamental de facilitador da construção do conhecimento. Como nem todos os alunos aprendem da mesma forma e pelas mesmas atividades, é evidente que os professores devem encontrar alternativas e estratégias adequadas que atinjam a maior variedade de estudantes. Não existe uma única forma correta de ensinar, por isso, o docente deve estar atualizado em relação às novas tendências e tecnologias para poder selecionar e utilizar recursos mais adequados.

Este trabalho abordou o estudo do GeoGebra e dos Materiais Manipuláveis como recursos mediadores no ensino de áreas dos sólidos geométricos no Ensino Médio. A partir da intervenção, foi possível avaliar a eficácia dessas ferramentas como mediadoras no processo de ensino e aprendizagem. De fato, os objetivos propostos foram alcançados, pois se constatou que tais recursos pedagógicos facilitaram a compreensão dos conteúdos proporcionando um aprendizado significativo e as aulas se tornaram mais dinâmicas, interativas e motivadoras.

Contudo, na questão dos métodos, perceberam-se pontos que poderiam ser melhorados. O primeiro ponto é quanto ao uso do *software*. Devido à indisponibilidade de tempo, os alunos não puderam utilizar todas as ferramentas do software e construir seus sólidos geométricos, apenas manipulá-los. Para trabalhos futuros, fica a sugestão de que primeiro haja uma capacitação quanto ao uso das ferramentas, para depois utilizá-lo no conteúdo específico.

O segundo ponto é tocante à distribuição dos encontros. Devido à dificuldade dos alunos nos conteúdos de prismas e pirâmides, não teve a possibilidade de adicionar encontros para abordar o conteúdo da esfera com os recursos mediadores. Sugere-se, portanto, como proposta para um novo trabalho, que seja reorganizada a distribuição das aulas e dedique-se mais tempo ao ensino de área da esfera, utilizando os materiais manipuláveis e o Geogebra.

Por fim, espera-se que o presente estudo sirva de referência para todos os docentes, principalmente os de matemática, e que esses acreditem que, através do uso de recursos pedagógicos dinâmicos, o processo de ensino e aprendizagem torna-se mais atrativo e agradável, aumenta o interesse dos alunos pelas aulas e proporciona o desenvolvimento intelectual, profissional e social dos envolvidos no processo.

Referências

1 ARRUDA, Patrícia Carange Bueno. **Estudo da versão 3D** - Beta do GeoGebra, em geometria espacial. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2014.

2 BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: interação e tecnologia, volume 3. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

3 BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação.** Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

4 BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acessado em: 20.04.2020

5 BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Bases Legais. Brasília: MEC, 2000.

6 BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM+)** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2006. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acessado em: 20.04.2020.

7 FREITAS, Marlúcia Morais de. **Explorando o software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial.** Ilhéus/ BA: UESC, 2017. 101f.

8 BRITO, Alexsandra Felix; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. **O uso de material manipulativo como recurso didático**: construção da grandeza comprimento. Anais... II Simpósio Internacional de Educação Matemática - SIPEMAT. Recife, 2008.

9 CAETANO, Paulo Antonio Silvani; GIRALDO, Victor; MATTOS, Francisco Roberto Pinto. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2013

10 CALDEIRA, Maria Filomena Tomaz Henrique. **A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática.** 826f. Tese de Doutorado. Universidade de Mágala, 2009.

11 CAMACHO, Mariana Sofia Fernandes Pereira. **Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática**: Aprender explorando e construindo. 102f. Dissertação (Ensino da Matemática) - Universidade da Madeira, 2012. Disponível em:

https://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf. Acessado em: 20/03/2020.

12 CERVO, Armando Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino. **Metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

13 DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**: ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008.

14 DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**: ensino médio, volume 2. 3. ed. São Paulo, 2016.

15 DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**: ensino médio, volume 3. 3. ed. São Paulo, 2016.

16 EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula** - Geometria. v. 3. Tradução Higyno H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992.

17 EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: UNICAMP, 2011.

18 FREITAS, Marlúcia Morais de. **Explorando o software GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial**. 101f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Ilhéus, BA: 2017.

19 GADOTTI, Moacir. A boniteza de um sonho: aprender e ensinar com sentido. Abceducatio, Ano III, n. 17, p. 30-33, 2002.

20 GESSER, Audrei. **Libras? Que língua é essa?**: crenças e preconceitos em torno da língua de sinais e da realidade surda. São Paulo: Parábola, 2012.

21 GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6.ed. São Paulo: Atlas, 2008.

22 GOODWIN, Fernanda Coelho. **A Utilização do Software GeoGebra no Tablet para o Estudo das Funções.** Revista Formação do Docente. Belo Horizonte. Vol. 9. 3ª Ed. 2017.

23 HARTUNG, Guilherme Erwin. **Maquetes construídas com planificações de sólidos.** 2010. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27229. Acessado em: 26.03.2020.

24 HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra 4.4** - from Desktops to Tablets. In Indagatio Didactica, v. 2013. 5, n. 1, p. 8-18.

25 HOLE, V. **Como ensinar matemática no básico e no secundário.** Lisboa: Livros Horizonte. Biblioteca do educador profissional, 1977.

26 IEZZI et al, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**: ensino médio, volume 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

27 INEP, BRASIL. Relatório Brasil no PISA 2018. Brasília: INEP/MEC, 2019. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_ Acessado: 01/04/2020

28 KALLEF, Ana Maria. **Vendo e entendendo poliedros.** 2. ed. Niterói: UFF, 2003.

29 LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica.** 4.ed. São Paulo: Atlas, 2001.

30 LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**: Componente curricular-Matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

31 LIMA, E. L. **Áreas e volumes.** Rio de Janeiro: SBM, 1980.

32 LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

33 MANSUTTI, Maria Amabile. **Concepção e Produção de Materiais Instrucionais em Educação Matemática. Revista de educação Matemática**. São Paulo: SBEM,1993.

34 MIRANDA, Robson Resende de. **Uma abordagem sobre cálculo de áreas com base na decomposição de figuras.** 139 p. São João del-Rei, 2017.

35 MORAES, Luciana de Souza de. **A Geometria Espacial no Ensino Médio: Um estudo sobre o uso do material concreto na resolução de problemas.** Dissertação .55p. Rio de Janeiro, 2014.

36 MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

37 OLIVEIRA, Maxwell Ferreira de. **Metodologia científica**: um manual para a realização de pesquisas em Administração. 72 p. Catalão: UFG, 2011.

38 PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática**. In: Lorenzato, Sérgio Aparecido (org). *O*

Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

39 PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica**. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1989.

40 PINHEIRO, Nicson Nongelle Gomes. **O uso do software GeoGebra como mecanismo para produção de material didático e estudo de objetos do cotidiano dos alunos**. 131f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFVJM, 2017.

41 POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

42 REYS, R. **Considerations for teaching using manipulative materials**. Em Teaching made aids for elementary school mathematics. Reston: NCTM, 1982.

43 RIBEIRO, A. **Concepções de professores do 1º ciclo**: A Matemática, o seu ensino e os materiais didácticos (Tese de Mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática(APM), 1995.

44 SANCHEZ, Jesús Nicasio Garcia. **Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

45 SARMENTO, Alan Kardec Carvalho (s.d). **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. IV Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI, Teresina/PI, p. 1-12. Disponível em: http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf

46 SCHLIEMANN, Analúcia Dias. CARRAHER, David Willian. CARRAHER, Terezinha Nunes. **Na vida dez, na escola zero**. 11 ª ed. São Paulo: Cortez Editora, 2001.

47 SERRAZINA, L. **Aprendizagem da Matemática**: a importância da utilização dos materiais, Noesis, 21, 37-39, 1991.

48 SILVA, Anabela.; MARTINS, Susana. **Falar de Matemática hoje é...** Millenium. Revista do ISPV: Instituto Superior Politécnico de Viseu. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm. Acessado em 20 de Março de 2020.

49 SILVA, J. C. E. **A Aprendizagem Baseada em Problemas e o Software GeoGebra no Ensino das Funções Matemáticas**. 103 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

50 SILVA, Paulo Cosme Amorim da. **Geometria Espacial**: Uso do Aplicativo GeoGebra em Smartphones. 70f. Mestrado (Dissertação) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de matemática e Tecnologia - PROFMAT, Programa de Pós-graduação em matemática em Rede Nacional - Sociedade brasileira de Matemática (RG), Catalão, 2018.

51 SILVA, Quezia de O. Vargas; VICTER, Eline das Flores. **Geometria espacial**: uma abordagem no ensino médio com GeoGebra: versão para professores. Duque de Caxias, RJ : Editora Unigranrio, 2017.

52 SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **Contato matemática**, 2º ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

53 VALE, I. **Materiais manipuláveis na sala de aula**: Que se diz, o que se faz. In Atas PROFMAT. Lisboa: APM, 1999.

54 ZABALA, Antoni. A Prática Educativa: como ensinar. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda,1998.

A QUESTIONÁRIO INICIAL

CENTRO EDUCA MAIS SERTÃO MARANHENSE - CEMSM
Componente Curricular: Matemática
Professor: Misael Soares   Série: 3º Ano   Turma: "A"

QUESTIONÁRIO 1
Abordagem sobre o Geogebra

Prezado(a) estudante:
Tendo em vista a realização de uma pesquisa de término de conclusão de mestrado, solicito sua contribuição ao responder este questionário sobre o tema:
Geogebra e materiais manipuláveis: Recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no ensino médio;

1. Você sente dificuldade na aprendizagem de conteúdos da Matemática?
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente

2. Na escola onde você estuda possui laboratório de informática?
( ) Sim
( ) Não

3. O laboratório da sua escola é utilizado pelos professores de qualquer disciplina, com frequência?
( ) Sim
( ) Não

Deseja comentar sobre a importância da utilização:
____
____
____

4. Em algum momento da sua vida estudantil o seu professor de Matemática já utilizou o computador ou laboratório de informática como uma ferramenta dinâmica de ensino, onde você operou o computador?
( ) Sim
( ) Não

5. Você acredita que o uso do computador pode ajudá-lo a aprender Matemática?
( ) Sim
( ) Não

Deixe seu comentário:
____
____
____

6. Você conhece ou já utilizou o software GeoGebra?
( ) Sim
( ) Não

Caso resposta positiva, responda:
O que você acha do Geogebra? Aprendeu algo novo? Recomendaria?
____
____
____

QUESTIONÁRIO 2

Abordagem sobre Materiais Manipuláveis

1. Em algum momento da sua vida estudantil o seu professor de Matemática já utilizou material manipulável como uma ferramenta dinâmica de ensino, na qual você fez construções?
   ( ) Sim
   ( ) Não

   Deixe seu comentário:

   ____
   ____
   ____

2. Você acredita que o uso de material manipulável pode ajudá-lo a aprender Matemática no ensino de áreas de sólidos geométricos?
   ( ) Sim
   ( ) Não

   Deixe seu comentário:

   ____
   ____
   ____

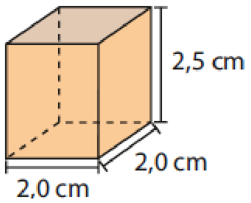
B TESTE INICIAL

	CENTRO EDUCA MAIS SERTÃO MARANHENSE - CEMSM	NOTA
CEMSM SERTÃO MARANHENSE	Componente Curricular: Matemática Professor: Misael Soares Série: 3º Ano Aluno: _______________________________ Data____/____/____	

PRIMEIRO QUESTIONÁRIO - ÁREA DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

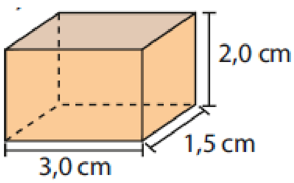
Cada questão vale 1 ponto - Será preciso o uso dos cálculos

1. Calcule a medida da área total do paralelepípedo retângulo (Prisma) representado abaixo:



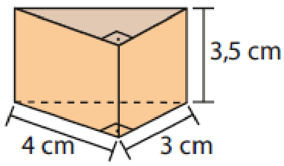
a) 28 cm^2
b) 24 cm^2
c) 22 cm^2
d) 16 cm^2
e) 10 cm^2

2. Calcule a medida da área total do prisma representado abaixo:



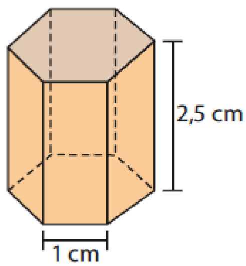
a) 30 cm^2
b) 27 cm^2
c) 20 cm^2
d) 15 cm^2
e) 09 cm^2

3. Calcule a área total do prisma reto retangular cuja medida é indicada abaixo.



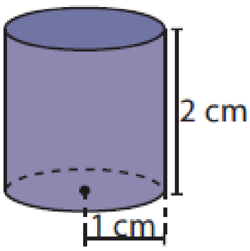
a) 72 cm^2
b) 60 cm^2
c) 54 cm^2
d) 48 cm^2
e) 36 cm^2

4. Calcule a área lateral e a área total do prisma reto hexagonal retangular, respectivamente, cuja medida é indicada abaixo.
Dados:
Área de um hexágono é 2,6 cm^2.
tg 54=1,3763



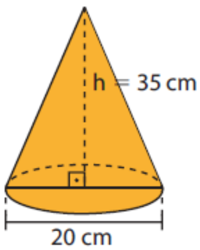
a) 10 cm^2; 11,72 cm^2;
b) 10 cm^2; 13,44 cm^2;
c) 15 cm^2; 16,72 cm^2;
d) 15 cm^2; 20,20 cm^2;
e) 20 cm^2; 12,65 cm^2;

5. Calcule os valores aproximados da área lateral e da área total do cilindro reto, respectivamente, cuja figura é indicada abaixo . Suponha $\pi = 3,14$



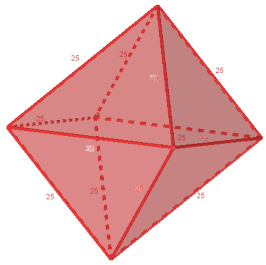
a) 6,28 cm^2; 12,56 cm^2;
b) 6,28 cm^2; 18,84 cm^2;
c) 8,45 cm^2; 15,70 cm^2;
d) 12,56 cm^2; 15,70 cm^2;
e) 12,56 cm^2; 18,84 cm^2;

6. Calcule os valores aproximados da área da base, da área lateral e da área total do cone reto, respectivamente, da figura abaixo. Suponha $\pi = 3,14$



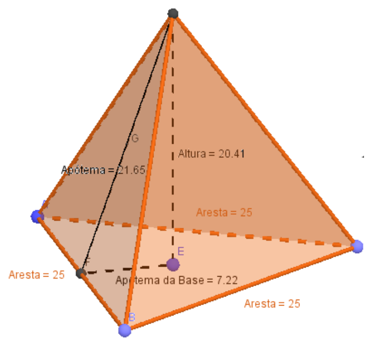
a) 314 cm^2; 1143 cm^2; 1457 cm^2;
b) 314 cm^2; 1099 cm^2; 1413 cm^2;
c) 400 cm^2; 1143 cm^2; 1499 cm^2;
d) 1256 cm^2; 1099 cm^2; 2399 cm^2;
e) 1256 cm^2; 2198 cm^2; 3454 cm^2;

7. Calcule os valores aproximados da área de um triângulo e da área total do octaedro de aresta igual a 25cm, respectivamente.



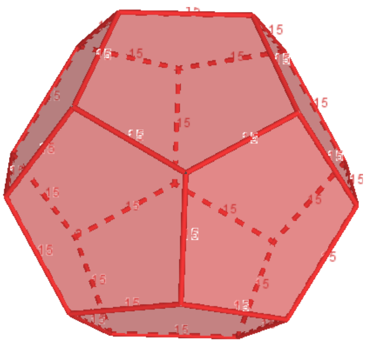
a) 270,63 cm^2; 1082,52 cm^2;
b) 270,63 cm^2; 2165,04 cm^2;
c) 349,38 cm^2; 2795,04 cm^2;
d) 541,26 cm^2; 4002,04 cm^2;
e) 541,26 cm^2; 4330,08 cm^2;

8. Calcule o valor aproximado da área de um triângulo e da área total do tetraedro de aresta igual a 25 cm e apótema igual 21,65 cm, respectivamente.



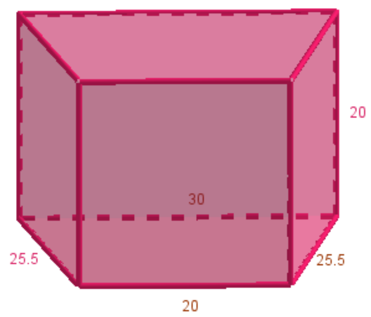
a) 349,38 cm^2; 2795,04 cm^2;
b) 270,63 cm^2; 2165,04 cm^2;
c) 270,63 cm^2; 1082,52 cm^2;
d) 541,26 cm^2; 4002,04 cm^2;
e) 541,26 cm^2; 4330,08 cm^2;

9. Calcule os valores aproximados da área de um pentágono e da área total do dodecaedro de aresta igual a 15 cm, respectivamente.
   Sabe-se que tg 54=1,3763



   a) 200 cm^2; 1200 cm^2
   b) 225 cm^2; 2700 cm^2
   c) 225 cm^2; 1350 cm^2
   d) 387,11 cm^2; 4645,32 cm^2
   e) 387,11 cm^2; 2322,66 cm^2

10. Calcule a área total do sólido geométrico abaixo.



   a) 1570 cm^2
   b) 1750 cm^2
   c) 2850 cm^2
   d) 3150 cm^2
   e) 3270 cm^2

Provérbios 14.16 - ”O sábio teme e desvia-se do mal, mas o tolo é arrogante e dá-se por seguro.”

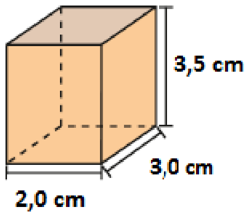
C TESTE FINAL

	CENTRO EDUCA MAIS SERTÃO MARANHENSE - CEMSM Componente Curricular: Matemática Professor: Misael Soares Série: 3º Ano Aluno: ________________________________ Data____/____/____	**NOTA**

PÓS TESTE - ÁREA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

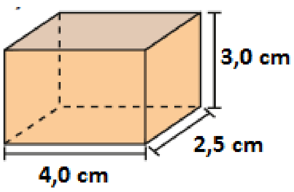
Será necessário o uso dos cálculos

1. Calcule a medida da área total do paralelepípedo retângulo (Prisma) representado abaixo:



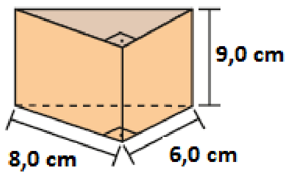
a) 27 cm^2
b) 28 cm^2
c) 32 cm^2
d) 42 cm^2
e) 47 cm^2

2. Calcule a medida da área total do prisma representado abaixo:



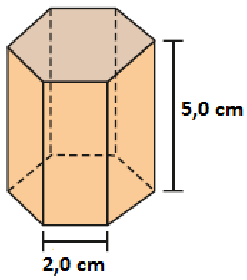
a) 37 cm^2
b) 42 cm^2
c) 46 cm^2
d) 59 cm^2
e) 66 cm^2

3. Calcule a área total do prisma reto retangular cuja medida é indicada abaixo.



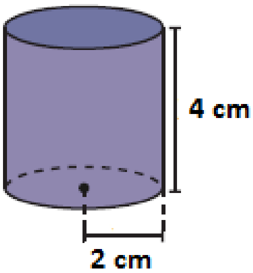
a) 168 cm^2
b) 192 cm^2
c) 264 cm^2
d) 276 cm^2
e) 288 cm^2

4. Calcule a área lateral e a área total do prisma reto hexagonal retangular, respectivamente, cuja medida é indicada abaixo.
Dados:
Área de um hexágono é 10,39 cm^2.
tg 54=1,3763



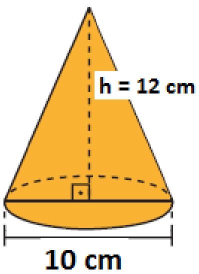
a) 60 cm^2; 68,78 cm^2;
b) 60 cm^2; 80,78 cm^2;
c) 55 cm^2; 56,78 cm^2;
d) 50 cm^2; 91,77 cm^2;
e) 50 cm^2; 82,77 cm^2;

5. Calcule os valores aproximados da área lateral e da área total do cilindro reto, respectivamente, cuja figura é indicada abaixo . Suponha $\pi = 3,14$



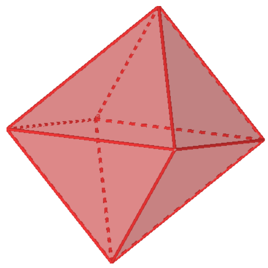
a) 50,24 cm^2; 75,36 cm^2;
b) 50,24 cm^2; 18,84 cm^2;
c) 26,46 cm^2; 75,36 cm^2;
d) 12,56 cm^2; 31,40 cm^2;
e) 12,56 cm^2; 18,84 cm^2;

6. Calcule os valores aproximados da área da base, da área lateral e da área total do cone reto, respectivamente, da figura abaixo. Suponha $\pi = 3,14$



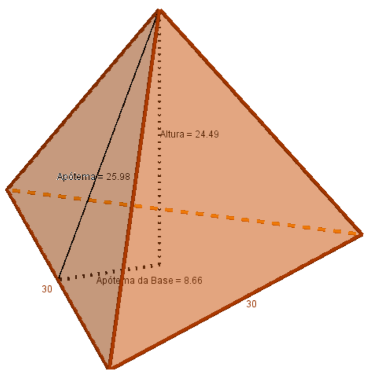
a) 153,9 cm^2; 323,9 cm^2; 477,8 cm^2;
b) 113,1 cm^2; 248,3 cm^2; 361,4 cm^2;
c) 113,1 cm^2; 204,1 cm^2; 317,2 cm^2;
d) 78,5 cm^2; 248,3 cm^2; 326,8cm^2;
e) 78,5 cm^2; 204,1 cm^2; 282,6 cm^2;

7. Calcule os valores aproximados da área de um triângulo e da área total do octaedro de aresta igual a 30 cm e apótema igual 25,98 cm, respectivamente.



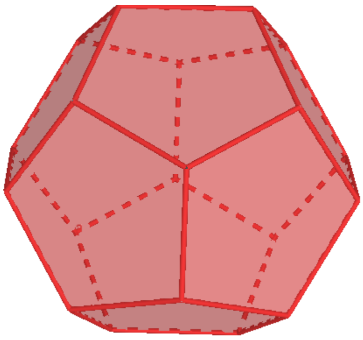
a) 270,63 cm^2; 1082,52 cm^2;
b) 270,63 cm^2; 2165,04 cm^2;
c) 389,70 cm^2; 2795,04 cm^2;
d) 389,70 cm^2; 3117,60 cm^2;
e) 541,26 cm^2; 4330,08 cm^2;

8. Calcule o valor aproximado da área de um triângulo e da área total do tetraedro de aresta igual a 30 cm e apótema igual 25,98 cm, respectivamente.



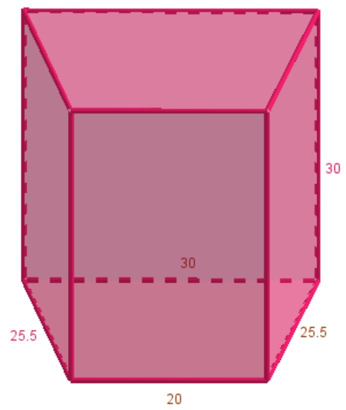
a) 270,63 cm^2; 1558,80 cm^2;
b) 270,63 cm^2; 2165,04 cm^2;
c) 389,70 cm^2; 1558,80 cm^2;
d) 389,70 cm^2; 2165,04 cm^2;
e) 541,26 cm^2; 4330,08 cm^2;

9. Calcule os valores aproximados da área de um pentágono e da área total do dodecaedro de aresta igual a 20 cm, respectivamente.
Sabe-se que tg 54=1,3763



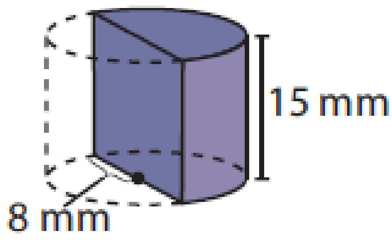
a) 172,05 cm^2; 2064,56 cm^2
b) 688,19 cm^2; 8258,28 cm^2
c) 688,19 cm^2; 2064,56 cm^2
d) 387,11 cm^2; 4645,32 cm^2
e) 387,11 cm^2; 8258,28 cm^2

10. Calcule a área total do sólido geométrico abaixo.



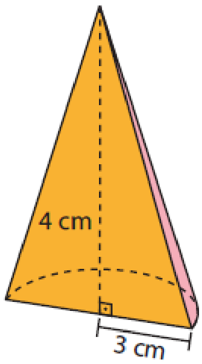
a) 4280 cm^2
b) 3775 cm^2
c) 3472 cm^2
d) 3371 cm^2
e) 3270 cm^2

11. Calcule o valor aproximado da área total do semicilindro reto da figura abaixo.
Suponha $\pi = 3,14$



a) 697,76 mm^2;
b) 817,76 mm^2;
c) 898,72 mm^2;
d) 1074,56 mm^2;
e) 1395,52 mm^2;

12. Calcule o valor aproximado da área total do semicone reto da figura abaixo.
Suponha $\pi = 3,14$



a) 49,68 cm^2;
b) 73,23 cm^2;
c) 85,23 cm^2;
d) 87,36 cm^2;
e) 98,47 cm^2;

D QUESTIONÁRIO FINAL

QUESTIONÁRIO 3

Abordagem sobre as Oficinas

1. Como você classifica a oficina envolvendo GeoGebra na qual participou?
   (   ) Muito Boa
   (   ) Boa
   (   ) Regular
   (   ) Ruim

   Deixe seu comentário:

2. Você acredita que a utilização do GeoGebra como recurso complementar nas aulas tradicionais de matemática pode tornar o conteúdo mais atrativo/compreensível?
   (   ) Sim
   (   ) Não

   Deixe seu comentário:

3. Como você classifica a oficina envolvendo Materiais Manipuláveis na qual participou?
   (   ) Muito Boa
   (   ) Boa
   (   ) Regular
   (   ) Ruim

   Deixe seu comentário:

4. Você acredita que a utilização de Materiais Manipuláveis como recurso complementar nas aulas tradicionais de matemática pode tornar o conteúdo mais atrativo/compreensível?
   (   ) Sim
   (   ) Não

   Deixe seu comentário:

E TERMO DE CONSENTIMENTO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI
CAMPUS POETA TORQUATO NETO - CPTN
CURSO MESTRADO EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS RESPONSÁVEIS DOS MENORES DE IDADE

Caro Responsável/Representante Legal,

Gostaria de obter o seu consentimento para o menor ____ participar como voluntário da pesquisa intitulada **G**EOGEBRA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS: RECURSOS MEDIADORES NA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE ÁREAS DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS NO ENSINO MÉDIO, que se refere a um Trabalho de Conclusão de Curso para o Mestrado Profissional em Matemática realizado na Universidade Estadual do Piauí (UESPI).

Os objetivos deste estudo consistem em analisar as possibilidades do geogebra e materiais manipuláveis como recursos mediadores na organização do ensino de áreas dos sólidos geométricos no ensino médio. Os resultados contribuirão para o desenvolvimento de situações problemas sobre áreas de sólidos geométricos com a mediação do programa geogebra e materiais manipuláveis.

Vale destacar que a participação dele(a) não é obrigatória e, a qualquer momento, poderá desistir da contribuição na pesquisa. Além disso, tal recusa não trará prejuízos em sua relação com o pesquisador ou com a instituição em que ele estuda e não acarretará em nenhuma penalidade.

Destaca-se também que o nome dele(a) não será utilizado em qualquer fase da pesquisa, o que garante o anonimato, e a divulgação dos resultados será feita de forma a não identificar os voluntários.

Por ser uma participação voluntária, o(a) senhor(a) e o menor de idade pelo qual é responsável não receberão remuneração pela participação e não será cobrado nada, pois não haverá gastos decorrentes de sua participação.

Caso você autorize, a forma de participação do seu filho será participar de aulas expositivas dos conteúdos de áreas de figuras geométricas (matemática), depois a utilização de materiais manipuláveis e o programa geogebra para aprimorar o conhecimento e, por fim, realizar um teste avaliativo.

Tudo foi planejado para minimizar os riscos da participação dele(a), porém se ele(a) se sentir desconfortável com as perguntas, dificuldade ou desinteresse na pesquisa, poderá interromper a participação e, se houver interesse, conversar com o pesquisador sobre o assunto.

Desde já, agradeço a atenção e a participação e coloco-me à disposição para maiores informações, podendo tirar dúvidas agora ou a qualquer momento.

CONSENTIMENTO

Eu, ____ declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do aluno menor de idade pelo qual sou responsável, ____, sendo que:

( ) aceito que ele(a) participe ( ) não aceito que ele(a) participe

Carolina, MA, 14 de Janeiro de 2020

Assinatura do responsável pelo menor de idade

____