



Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Algumas contribuições de Euler para a geometria

Vicente Paula de Sousa Junior

Juazeiro do Norte - CE

2020

Algumas contribuições de Euler para a geometria

Vicente Paula de Sousa Junior

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga

Juazeiro do Norte - CE

2020

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri – URCA
Bibliotecária: Ana Paula Saraiva de Sousa CRB: 3/1000

Sousa Junior, Vicente Paula de.
S719a Algumas contribuições de Euler para a geometria/ Vicente
Paula de Sousa Junior. – Juazeiro do Norte-CE, 2020
115p.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Redes - PROFMAT
Orientador: Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga.

1 Geometria, 2. Euler, 3. Construções geométricas; I. Título.

CDD: 516

Algumas contribuições de Euler para a geometria

Vicente Paula de Sousa Junior

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

*Dedico a minha avó materna, Maria Emília
Nobre, que partiu desse mundo sem poder ver
este neto obtendo o sonhado diploma.*

Agradecimentos

Agradeço principalmente aos meus avós, pais e ao meu irmão por sua paciência e inspiração que me ajudaram a chegar até aqui nessa longa batalha desde o ensino fundamental.

Agradeço também a todos que foram meus professores desde quando eu era somente frequentador de creches até o mestrado, sendo a principal entre eles minha professora da quarta série, professora Marlene.

Não sendo injusto com os muitos que aparecem ao longo de nossa vida estudantil e fora dela agradeço a todos os conhecidos e desconhecidos que colaboraram direta ou indiretamente para eu ter chegado até o mestrado dos quais incluo até os inimigos sinceros, pois amigos falsos temos bastante.

“Nunca imitei ninguém e rio de todos aqueles
que nunca riram de si.”(Friederich Nietzsche)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo servir de complemento teórico e didático ao primeiro ano do ensino médio, sendo a geometria uma área muito vasta na matemática, delimitamos esse trabalho especificamente em referência a Leonhard Euler e à geometria plana. Procuramos desenvolver de forma gradativa os conceitos elementares necessários aos tópicos referentes às suas contribuições geométricas desde pontos e retas até as noções de circunferências e áreas, com complemento de algumas questões práticas nos capítulos 1 e 2. Tendo em vista que ao longo da história da matemática as construções geométricas sempre estiveram muito presentes viu-se a necessidade de resgatar a importância delas incluindo-as nesse trabalho, no qual as colocamos de forma gradativa de desenvolvimento descrevendo o passo a passo na obtenção de alguns segmentos das expressões algébricas decorrentes das demonstrações feitas dos capítulos anteriores e com ajuda de ilustrações para o entendimento do que se deseja obter com construções de figuras auxiliares.

Palavras-chave: Geometria, Euler, Construções Geométricas

Abstract

This work aims to serve as a theoretical and didactic complement to the first year of high school, geometry being a very wide area in mathematics, we delimit this work specifically in reference to Leonhard Euler and plane geometry. We seek to gradually develop the elementary concepts necessary to the topics concerning their geometric contributions from points and lines to the notions of circles and areas, with the complement of some practical questions in chapters 1 and 2. Bearing in mind that throughout the history of mathematics, geometric constructions have always been very present, we saw the need to rescue their importance by including them in this work, in which we put it in a gradual form of development describing the step by step obtaining some segments of the algebraic expressions resulting from the demonstrations made in the previous chapters and with the help of illustrations for the understanding of what we want to obtain with auxiliary figure constructions.

Keywords: Geometry, Euler, Geometric Constructions.

Lista de Figuras

Figura 1.1:	Pontos coincidentes	19
Figura 1.2:	Segmentos paralelos	20
Figura 1.3:	Base média de um triângulo	21
Figura 1.4:	Base média de um trapézio	21
Figura 1.5:	Projeção ortogonal sobre uma reta	22
Figura 1.6:	Teorema de Euclides	23
Figura 1.7:	Teorema das medianas	24
Figura 1.8:	Ângulos inscritos	25
Figura 1.9:	Centro no interior do ângulo inscrito na circunferência	26
Figura 1.10:	Ângulo excêntricos	27
Figura 1.11:	Relações métricas no triângulo retângulo	29
Figura 1.12:	Razões métricas	30
Figura 1.13:	Lei dos senos	31
Figura 1.14:	Área de um triângulo	32
Figura 1.15:	Fórmula de Heron	33
Figura 1.16:	Circunferência ex-inscrita	35
Figura 1.17:	Circunferência inscrita	36
Figura 1.18:	Razão entre área de triângulos semelhantes	37

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.19:	Quadrilátero inscritoível	38
Figura 1.20:	Quadriláteros inscritoíveis	39
Figura 1.21:	Triângulo pedal	40
Figura 1.22:	Triângulo pedal e quadrilátero inscritoível	41
Figura 1.23:	Triângulo pedal e quadriláteros inscritoíveis	42
Figura 1.24:	Triângulo pedal e quadrilátero inscritoível	43
Figura 1.25:	Triângulo pedal e quadrilátero inscritoível	44
Figura 1.26:	Triângulo pedal e quadrilátero inscritoível	45
Figura 1.27:	Triângulo pedal e quadrilátero inscritoível	46
Figura 1.28:	Triângulo pedal e quadriláteros inscritoíveis	47
Figura 1.29:	Potência de um ponto	48
Figura 1.30:	Potência de um ponto	49
Figura 1.31:	Questão 1.1	50
Figura 1.32:	Questão 1.2	51
Figura 1.33:	Questão 1.3	52
Figura 1.34:	Questão 1.4	53
Figura 1.35:	Questão 1.5	54
Figura 1.36:	Questão 1.7	56
Figura 1.37:	Questão 1.8	57
Figura 1.38:	Questão 1.9	59
Figura 1.39:	Questão 1.10	60
Figura 2.1:	Partes e segmentos determinados por pontos sobre uma reta	65
Figura 2.2:	Mediana de Euler	66
Figura 2.3:	Quadrilátero qualquer	67
Figura 2.4:	Triângulo dado e as referidas construções	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.5:	Fórmula de Heron	72
Figura 2.6:	Reta de Euler	75
Figura 2.7:	Círculo de Euler	77
Figura 2.8:	Relações entre os cinco raios	79
Figura 2.9:	Questão 2.2	88
Figura 2.10:	Questão 2.3	89
Figura 2.11:	Questão 2.4	91
Figura 2.12:	Questão 2.5	92
Figura 3.1:	Triângulo ABC e alturas relativas	96
Figura 3.2:	Diâmetro da circunferência circunscrita, $2R$	98
Figura 3.3:	Raio da circunferência circunscrita R	98
Figura 3.4:	Semiperímetro do triângulo ABC	99
Figura 3.5:	Obtenção do segmento $p - a$	100
Figura 3.6:	Obtenção do segmento $p - c$	101
Figura 3.7:	Obtenção do raio r da circunferência inscrita	102
Figura 3.8:	Raio r_a da circunferência ex-inscrita	103
Figura 3.9:	Raio r_c da circunferência ex-inscrita	104
Figura 4.1:	Raio r_b da circunferência ex-inscrita	106
Figura 4.2:	Distância \overline{OI}	107
Figura 4.3:	Distância $\overline{OI_a}$	108
Figura 4.4:	Distância $\overline{II_a}$	109
Figura 4.5:	Distância $\overline{I_aI_c}$	111

Lista de Símbolos

$a, b, c \dots$	Medidas de segmentos de retas
$A, B, C \dots$	Pontos
r, s, t	Retas
\overrightarrow{AB}	Semirreta que começa em A
\overleftrightarrow{AB}	Reta AB
$\angle ABC$	Ângulo de vértice B
\widehat{ABC}	Medida do ângulo $\angle ABC$
AB	Segmento de reta que começa em A e termina em B
\overline{AB}	Medida do segmento AB
\equiv	Congruente
$\triangle ABC$	Triângulo ABC
\sim	Semelhante
\widehat{AB}	Arco de circunferência que começa em A e termina em B
\widehat{ACB}	Arco \widehat{AB} passando por C
$2p$	Perímetro

Sumário

Introdução	16
1 Pré-requisitos	18
1.1 Conceitos básicos	18
1.2 Relações métricas no triângulo retângulo	28
1.3 Razões trigonométricas	29
1.4 Lei dos senos	31
1.5 Área de um triângulo	32
1.6 Quadriláteros inscritíveis	38
1.7 Potência de um ponto	47
Questões Práticas	50
2 Teoremas de Euler	61
2.1 Resumo histórico	61
2.2 Partes determinadas por pontos sobre uma reta	64
2.3 Mediana de Euler num trapézio	65
2.4 Quadrilátero qualquer	66
2.5 Razão entre áreas	68
2.6 Fórmula de Heron	72

SUMÁRIO

2.7	A reta de Euler	75
2.8	Círculo de Euler	76
2.9	Relação entre os cinco raios	78
2.10	Distâncias entre os centros das circunferências	84
2.10.1	Distância do incentro ao circuncentro	84
2.10.2	Distância do circuncentro a um ex-incentro	85
2.10.3	Distância do incentro a um ex-incentro	86
2.10.4	Distância entre dois ex-incentros	86
	Questões Práticas	87
3	Construções geométricas I	94
3.1	Construir o triângulo com os lados dados	95
3.2	Alturas relativas aos lados do triângulo ABC	96
3.3	Raio R da circunferência circunscrita ao triângulo ABC	97
3.4	O semiperímetro do triângulo ABC	99
3.5	Segmentos $p - a$ e $p - c$	100
3.6	Raio r da circunferência inscrita	101
3.7	Raios r_a e r_c das circunferências ex-inscritas	102
4	Construções geométricas II	105
4.1	Obtendo o raio r_b	105
4.2	Distância do incentro ao circuncentro	106
4.3	Distância do circuncentro a um ex-incentro	108
4.4	Distância do incentro a um ex-incentro	109
4.5	Distância entre dois ex-incentros	110
	Conclusão	113

Introdução

Mesmo que para muitos a geometria plana seja algo muito repetitivo desde o ensino fundamental, nem sempre sabemos tudo que está presente nela e que servem de suporte para as suas subdivisões como a geometria espacial, a analítica, a descritiva e a diferencial.

Disso vemos que mesmo que nos livros didáticos editados nos últimos 20 anos tenha ocorrido um aumento significativo nas referências aos matemáticos e seus trabalhos de grande relevância ao desenvolvimento da humanidade, ainda são bastante ignorados.

Ao longo do ensino médio quase nunca se fala de Leonhard Euler (1707 – 1783), sendo ele lembrado somente quando se define a base do logaritmo natural $e = 2,71828\dots$, a relação de Euler ($V + F = A + 2$) em geometria espacial e ao citarem a relação $e^{\pi i} + 1 = 0$ em números complexos, dessa reflexão, vi a necessidade de fazer um trabalho delimitado na geometria e em especial sobre o trabalho de Leonhard Euler tendo como principal objetivo o de complementar o que já é ensinado em geometria plana no ensino médio.

No capítulo 1, desenvolvemos um aprofundamento da base teórica a ser utilizada ao longo de todo o trabalho.

No capítulo 2, com uso da base teórica feita no capítulo 1, fazemos as demonstrações dos teoremas referentes ao tema deste trabalho donde alguns são atribuídos a Euler e outros tiveram alguma colaboração dele em suas demonstrações.

INTRODUÇÃO

Das revisões bibliográficas feitas, selecionamos resultados que podem ser inéditos para alguns como o método atribuído a Euler na demonstração da fórmula de cálculo de áreas em triângulos quaisquer, conhecida como fórmula Heron, bem como outras 11 contribuições de Euler à geometria plana. Sendo que a seção 2.9, consiste em obter as expressões algébricas que dependem dos raios das circunferências relativas a um triângulo dado ABC .

No capítulo 3, dedicamos a uma abordagem mais didática, partindo de três segmentos correspondentes aos lados de um triângulo qualquer com a utilização das construções geométricas com régua e compasso procuramos obter os raios das circunferências, inscrita, circunscrita e as ex-inscritas referentes a cada um dos lados do triângulo, descrevendo as construções.

No capítulo 4, continuando com as construções geométricas passo a passo e se utilizando de expressões algébricas dos capítulos 1 e 2, a partir dos segmentos referentes aos raios das circunferências obtidos no capítulo 3 procuramos obter as soluções algébricas correspondentes às distâncias entre os centros das referidas circunferências descritas anteriormente, isto é:

- Distância do incentro ao circuncentro,
- Distância do circuncentro a um ex-incentro,
- Distância do incentro a um ex-incentro,
- Distância entre dois ex-incentros.

Capítulo 1

Pré-requisitos

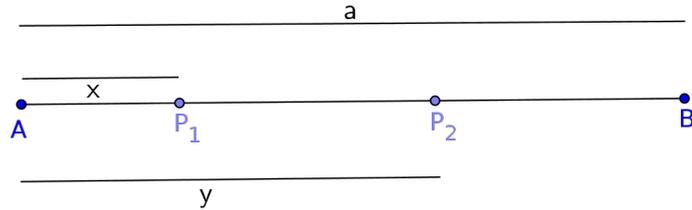
Para este capítulo necessita-se dos conhecimentos básicos nos assuntos como os casos de congruências e de semelhanças de triângulos que servem de base para o que será demonstrado além de saber sobre retas paralelas cortadas por transversais, pontos notáveis dos triângulos, quadriláteros, circunferências e suas propriedades. Todos podem ser encontrados com maiores detalhes em alguns dos livros citados nas referências, entre eles o de João Lucas ([1]).

1.1 Conceitos básicos

Proposição 1. *Sejam P_1 e P_2 pontos interiores de um segmento AB , tais que $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}$ então P_1 e P_2 coincidem.*

PRÉ-REQUISITOS

Figura 1.1: Pontos coincidentes



Fonte: O Autor

Demonstração. $P_1, P_2 \in AB$; considerando $\overline{AB} = a$, $\overline{AP_1} = x$ e $\overline{AP_2} = y$ temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}} &\iff \frac{x}{a-x} = \frac{y}{a-y} \\
 &\iff \frac{x}{a-x} + 1 = \frac{y}{a-y} + 1 \\
 &\iff \frac{x+a-x}{a-x} = \frac{y+a-y}{a-y} \\
 &\iff \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{a-x} = \frac{a}{a-y} \cdot \frac{1}{a} \\
 &\iff \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-y} \\
 &\iff a-x = a-y \\
 &\iff a-x-a = a-y-a \\
 &\iff x = y \\
 &\iff \overline{AP_1} = \overline{AP_2} \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

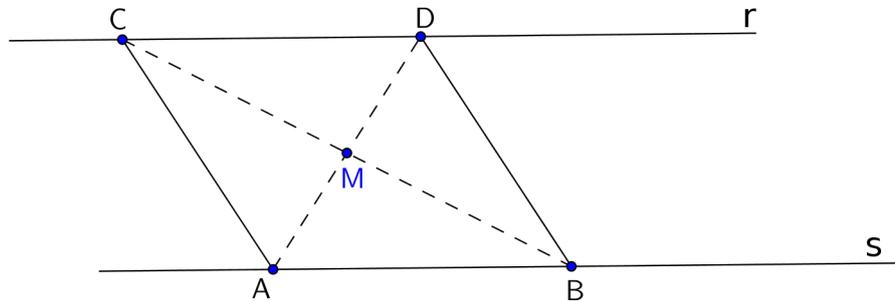
Assim, concluímos que P_1 e P_2 são coincidentes. □

Proposição 2. *Se dois segmentos são congruentes e paralelos, suas extremidades são vértices de um paralelogramo.*

Demonstração. Traçando-se os segmentos paralelos AB e CD temos $BC \cap AD = \{M\}$

$$\left. \begin{aligned}
 \widehat{ABC} &\equiv \widehat{BCD} \\
 \widehat{ADC} &\equiv \widehat{BAD}
 \end{aligned} \right\} \text{(Alternos Internos).}$$

Figura 1.2: Segmentos paralelos



Fonte:O Autor

Assim, pelo caso *ALA* temos que o $\triangle MAB \equiv \triangle CMD$:

$$\overline{AM} \equiv \overline{MD}$$

$$\overline{BM} \equiv \overline{MC}$$

Portanto, M é o ponto médio dos segmentos AD e BC e o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, pois possui lados opostos paralelos e congruentes. \square

Postulado 1 (Quinto postulado de Euclides). *Dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s , paralela a r e passando por A .*

Teorema 1 (Teorema da Base Média). *O segmento formado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Demonstração. Dado o triângulo ABC com M e N sendo pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente. Prolongando o segmento MN até um ponto P tal que $\overline{MN} \equiv \overline{NP}$ temos:

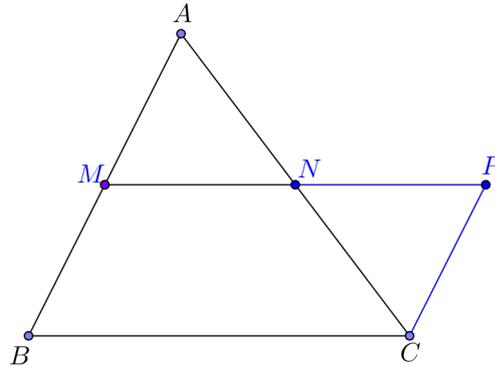
$$\overline{MN} \equiv \overline{NP}$$

$$\overline{AN} \equiv \overline{NC}$$

$$\widehat{ANM} \equiv \widehat{PNC}$$

PRÉ-REQUISITOS

Figura 1.3: Base média de um triângulo



Fonte: O Autor

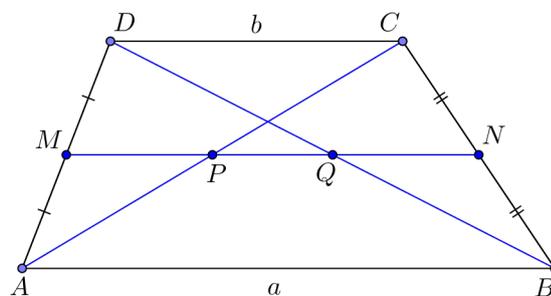
Então pelo caso *LAL* temos que o $\triangle ANM \equiv \triangle PNC$. Logo, $\overline{PC} \equiv \overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e $\widehat{AMN} \equiv \widehat{NPC}$, assim pela proposição 2, o quadrilátero $BCPM$ é um paralelogramo. Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{MP} &\equiv \overline{BC} \\ \overline{MN} &= \frac{\overline{BC}}{2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

□

Corolário 1. *A base média de um trapézio é igual à semissoma das suas bases.*

Figura 1.4: Base média de um trapézio



Fonte: O Autor

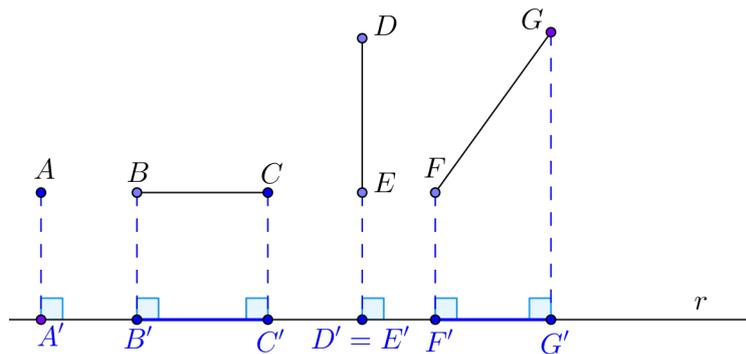
Demonstração. Seja $ABCD$ um trapézio qualquer de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, com M e N sendo os pontos médios dos lados AD e BC , respectivamente. Temos que NQ e NP são bases médias dos triângulos CBD e ABC , respectivamente, assim pela proposição 1 $\overrightarrow{NQ} \parallel \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{AB}$, mas como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ concluímos pelo postulado 1 que P, Q e N são colineares o que ocorre analogamente com M, P e Q . Assim, pelo teorema 1, temos $\overline{MQ} = \frac{a}{2}$ e $\overline{NQ} = \frac{b}{2}$ portanto,

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \overline{MQ} + \overline{NQ} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ \overline{MN} &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

□

Definição 1. Chama-se *projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta qualquer*, o pé da perpendicular baixada do ponto até a reta.

Figura 1.5: Projeção ortogonal sobre uma reta



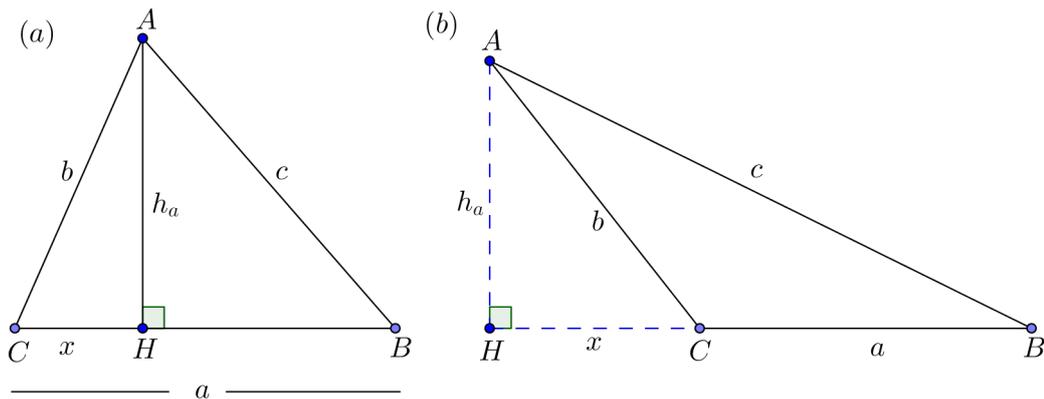
Fonte: Autor

Teorema 2 (Euclides). *A diferença (soma) entre a soma dos quadrados de dois lados de um triângulo acutângulo (obtusângulo) e o dobro do produto da projeção ortogonal de um deles sobre o outro é igual ao quadrado do terceiro lado.*

PRÉ-REQUISITOS

Dividiremos a demonstração em duas partes, quando o triângulo é acutângulo e quando é obtusângulo.

Figura 1.6: Teorema de Euclides



Fonte: O Autor

1° caso: Triângulo acutângulo

Demonstração. Seja x a projeção ortogonal do lado b sobre o lado a e h_a a altura relativa ao lado a do triângulo ABC temos no triângulo ACH da figura 1.6 (a)

$$b^2 = h_a^2 + x^2 \quad (1.4)$$

Por outro lado, no triângulo AHB ,

$$\begin{aligned} c^2 &= h_a^2 + (a - x)^2 \\ &= h_a^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\ &= h_a^2 + x^2 + a^2 - 2ax. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Substituindo (1.4) em (1.5) temos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax. \quad (1.6)$$

2° caso: Triângulo obtusângulo

Seja x a projeção ortogonal do lado b sobre o prolongamento da reta suporte do lado a e h_a a altura relativa ao lado a do triângulo ABC da figura 1.6 (b)

$$b^2 = h_a^2 + x^2 \quad (1.7)$$

E no triângulo AHB ,

$$\begin{aligned} c^2 &= h_a^2 + (a + x)^2 \\ &= h_a^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\ &= h_a^2 + x^2 + a^2 + 2ax. \end{aligned} \quad (1.8)$$

De (1.7) e (1.8) temos,

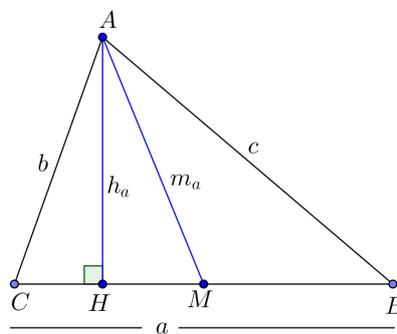
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ax \quad (1.9)$$

□

Observação 1. *Generalizando, aplica-se o primeiro (segundo) caso quando a altura relativa a um dos lados é interna (externa) ao ângulo oposto a este lado.*

Corolário 2. *A soma dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual à soma da metade do quadrado do terceiro lado com o dobro do quadrado da mediana relativa.*

Figura 1.7: Teorema das medianas



Fonte: O Autor

PRÉ-REQUISITOS

Demonstração. Seja ABC um triângulo acutângulo com m_a sendo a mediana e h_a a altura relativa ao lado a , com $\angle AMC$ agudo e $\angle AMB$ obtuso. Temos na figura 1.7, pelas equações (1.6) e (1.9),

$$b^2 = \overline{CM}^2 + m_a^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{HM}$$

$$c^2 = \overline{MB}^2 + m_a^2 + 2\overline{MB} \cdot \overline{HM}.$$

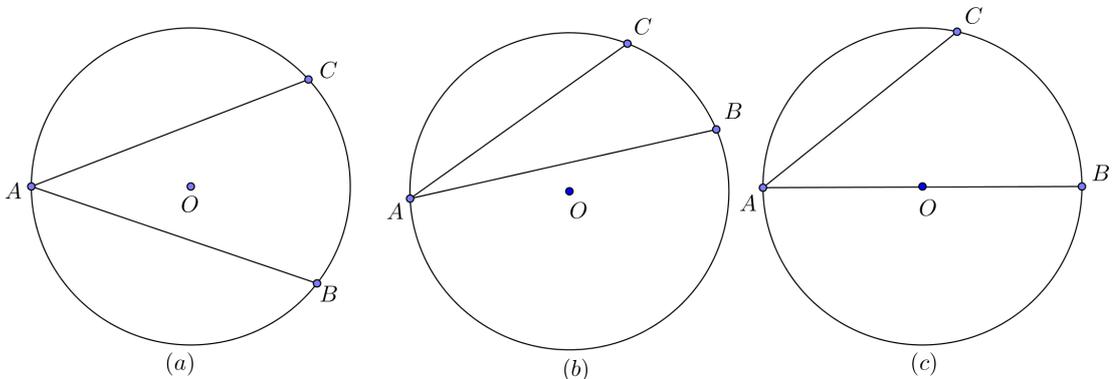
Somando as duas equações obtemos,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= \overline{CM}^2 + \overline{MB}^2 + 2m_a^2 + 2\overline{MB} \cdot \overline{HM} - 2\overline{CM} \cdot \overline{HM} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2m_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{HM} - 2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \overline{HM} \\ &= \frac{2a^2}{4} + 2m_a^2 \\ &= \frac{a^2}{2} + 2m_a^2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

□

Definição 2. Chama-se ângulo inscrito numa circunferência, o ângulo cujo vértice pertence a circunferência.

Figura 1.8: Ângulos inscritos

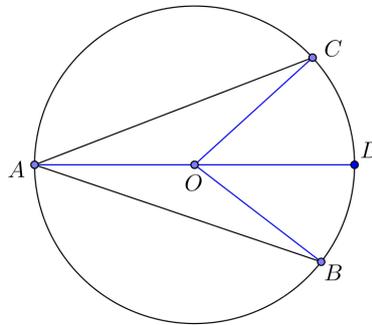


Fonte: O Autor

Proposição 3. *O ângulo inscrito numa circunferência mede metade do ângulo central do arco correspondente¹ ao ângulo.*

Demonstração. No caso (a) da figura 1.8, traça-se o diâmetro da circunferência passando pelo ponto A obtemos o ponto D . Os triângulos OAB e OAC são isósceles então,

Figura 1.9: Centro no interior do ângulo inscrito na circunferência



Fonte: O Autor

$$\begin{aligned}
 \widehat{DOC} &= 2\widehat{OAC} && \text{(externo ao triângulo } OAC) \\
 \widehat{DOB} &= 2\widehat{OAB} && \text{(externo ao triângulo } OAB) \\
 \widehat{BDC} &= \widehat{BD} + \widehat{DC} \\
 \widehat{BOC} &= \widehat{DOC} + \widehat{DOB} \\
 &= 2\widehat{OAC} + 2\widehat{OAB} \\
 &= 2(\widehat{OAC} + \widehat{OAB}) = 2\widehat{BAC} && (1.11)
 \end{aligned}$$

Nos outros dois casos, segue-se o mesmo raciocínio. □

¹um arco corresponde a vários ângulos inscritos numa circunferência, por isso recebe o nome de Arco Capaz.

PRÉ-REQUISITOS

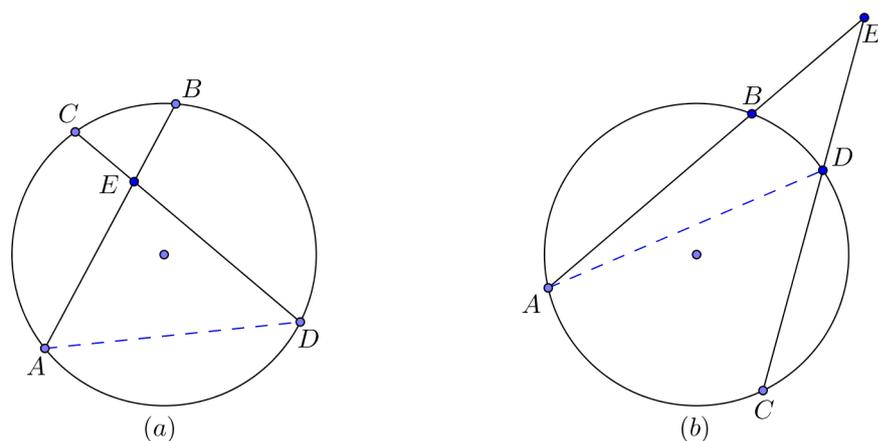
Definição 3. Quando duas cordas se intersectam no interior ou no exterior de uma circunferência, temos o que chamamos de ângulo excêntrico interior ou exterior, respectivamente.

Proposição 4. Sejam AB e CD duas cordas de uma circunferência, cujas retas suportes, isto é, retas que contêm os segmentos correspondentes as referidas cordas, se intersectam em um ponto E .

(I) Se E for interior à circunferência, então a medida do ângulo excêntrico interior $\angle AEC$ é igual à média aritmética das medidas dos arcos \widehat{AC} e \widehat{BD} subtendidos.

(II) Se E for exterior à circunferência, então a medida do ângulo excêntrico exterior $\angle AEC$ é igual ao módulo da semidiferença das medidas dos arcos \widehat{BD} e \widehat{AC} subtendidos.

Figura 1.10: Ângulo excêntricos



Fonte: O Autor

Demonstração. (I) Traçando o segmento AD na figura 1.10 (a) temos $\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$,

$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2}$ e $\angle AEC$ é externo ao triângulo ADE assim,

$$\begin{aligned} \widehat{AEC} &= \widehat{BAD} + \widehat{ADC} \\ &= \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \end{aligned}$$

(II) Traçando o segmento AD na figura 1.10 (b) temos $\widehat{EAD} = \widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2}$, $\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$ e $\angle ADC$ é externo ao triângulo ADE assim,

$$\begin{aligned} \widehat{ADC} &= \widehat{EAD} + \widehat{AED} \\ &= \widehat{EAD} + \widehat{AEC} \quad \text{pois, } \widehat{AED} \equiv \widehat{AEC} \\ \widehat{AEC} &= \widehat{ADC} - \widehat{EAD} \\ &= \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} \end{aligned}$$

□

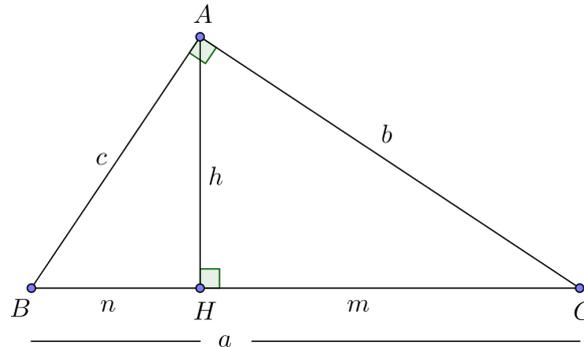
1.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Considerando o triângulo retângulo ABC na figura 1.11 abaixo cuja medida da hipotenusa é a , temos que $\angle BCA$ é complementar do ângulo $\angle ABC$ no triângulo ABC e do ângulo $\angle CAH$ no triângulo HCA . Logo, $\widehat{CAH} \equiv \widehat{ABC}$ já que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{AHC} \equiv \widehat{AHB} = 90^\circ$. Portanto, pelo caso AA , temos que $\triangle HCA \sim \triangle ABC$.

Por outro lado, sendo $\angle ABC$ complementar do ângulo $\angle BCA$ no triângulo ABC e do $\angle BAH$ temos que $\widehat{BAH} \equiv \widehat{BCA}$ e pelo caso AA , temos $\triangle HBA \sim \triangle ABC$.

PRÉ-REQUISITOS

Figura 1.11: Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: O Autor

Assim, temos entre os triângulos ABC , HBA e HCA , partindo das razões de semelhanças entre os mesmos,

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{b} = \frac{n}{c}$$
$$ah = bc \quad (1.12)$$

$$c^2 = an \quad (1.13)$$

$$bn = ch \quad (1.14)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c} = \frac{m}{b}$$
$$cm = bh \quad (1.15)$$

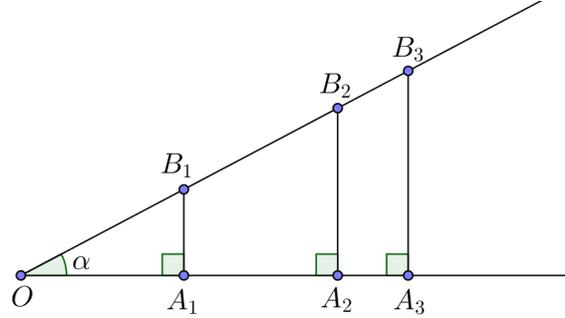
$$b^2 = am \quad (1.16)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$
$$h^2 = mn \quad (1.17)$$

1.3 Razões trigonométricas

Dado um ângulo qualquer de vértice O , traçamos retas perpendiculares à uma das semirretas que formam o ângulo, obtendo os segmentos A_1B_1 , A_2B_2 e A_3B_3 . O ângulo

Figura 1.12: Razões métricas



Fonte: O Autor

O é comum aos triângulos OA_1B_1 , OA_2B_2 e OA_3B_3 , além disso $\widehat{OA_1B_1} \equiv \widehat{OA_2B_2} \equiv \widehat{OA_3B_3} = 90^\circ$. Então pelo caso *AA* temos $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2 \sim \triangle OA_3B_3$.

Daí,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_2}} \Rightarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} \quad (1.18)$$

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_3}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OB_3}} \Rightarrow \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} \quad (1.19)$$

De (1.18) e (1.19) obtemos,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}}. \quad (1.20)$$

Temos que (1.20) é constante, e a essa constante damos o nome de seno ² ($\text{sen } \alpha$). De forma análoga obtemos as outras razões conhecidas como cosseno e tangente, denotados por $\text{cos } \alpha$ e $\text{tg } \alpha$

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OB_3}} = \text{cos } \alpha \quad (1.21)$$

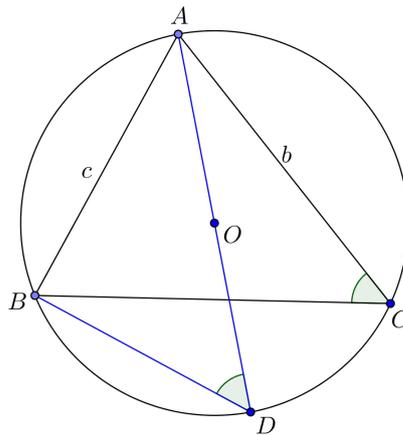
$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \text{tg } \alpha. \quad (1.22)$$

²O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar e igual ao seno do seu suplementar.

1.4 Lei dos senos

Dados um triângulo ABC e a circunferência circunscrita de raio R , traçamos por A o seu diâmetro obtendo o ponto D , conforme a 1.13 abaixo.

Figura 1.13: Lei dos senos



Fonte: O Autor

Da proposição 3 temos $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ACB}$ e $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

Mas de (1.20) temos,

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \operatorname{sen} \widehat{D} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R. \quad (1.23)$$

Usando os mesmos procedimentos nos demais ângulos do triângulo ABC obtemos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2R \quad (1.24)$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = 2R. \quad (1.25)$$

Portanto, de (1.23), (1.24) e (1.25) temos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R. \quad (1.26)$$

A fórmula (1.26) é conhecida como lei dos senos.

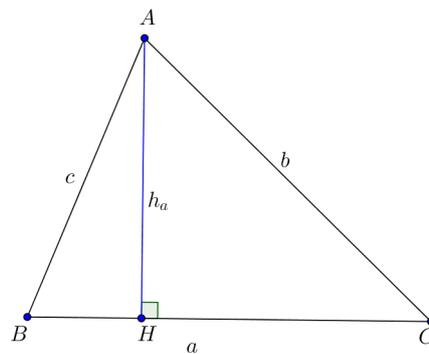
1.5 Área de um triângulo

Dado um triângulo ABC conforme ilustrado na figura 1.14 abaixo, com h_a sendo a altura relativa ao lado a .

Temos no triângulos AHB ,

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} \quad (1.27)$$

Figura 1.14: Área de um triângulo



Fonte: O Autor

Ora, a área de um triângulo é dada por

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad (1.28)$$

substituindo (1.27) em (1.28) vem,

$$S = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \widehat{B}. \quad (1.29)$$

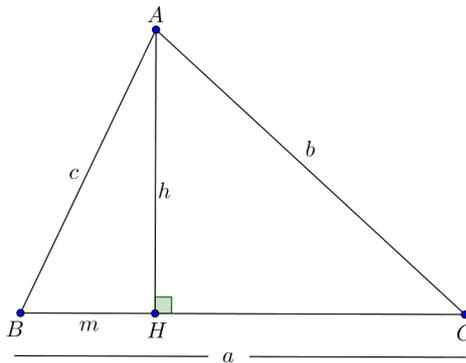
Mas, de (1.26) temos $\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{2R}$, então

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ac \cdot \frac{b}{2R} \\ &= \frac{abc}{4R} \end{aligned} \quad (1.30)$$

PRÉ-REQUISITOS

Teorema 3 (Heron). A área de um triângulo qualquer é $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo dado.

Figura 1.15: Fórmula de Heron



Fonte: O Autor

Demonstração. Dado um triângulo acutângulo ABC , com h sendo a altura relativa ao lado a e m a projeção ortogonal do lado c sobre o lado a temos, pelo teorema 2,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2am \\ 2am &= a^2 + c^2 - b^2 \\ m &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

No triângulo AHB , temos,

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + m^2 \\ h^2 &= c^2 - m^2 \\ h^2 &= (c+m)(c-m) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Substituindo (1.31) em (1.32) obtemos,

$$\begin{aligned}
 h^2 &= \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \\
 &= \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \left(\frac{2ac - (a^2 + c^2 - b^2)}{2a} \right) \\
 &= \frac{(a+c)^2 - b^2}{4a^2} (b^2 - (a-c)^2) \\
 &= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+(a-c))(b-(a-c))}{4a^2} \\
 &= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2} \\
 &= \frac{2p(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)}{4a^2} \\
 &= \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2} \\
 &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2} \\
 \frac{a^2 h^2}{4} &= p(p-a)(p-b)(p-c) \\
 \left(\frac{ah}{2} \right)^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c) \\
 \frac{ah}{2} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
 S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{1.33}
 \end{aligned}$$

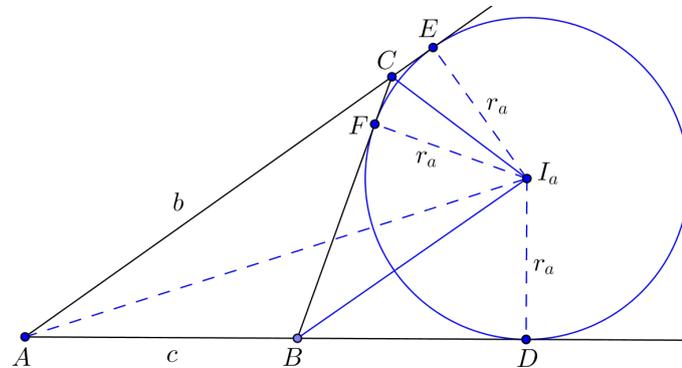
□

Usam-se os mesmos procedimentos quando se deduz utilizando triângulos obtusângulos.

Definição 4. Diz que uma circunferência é ex-inscrita a um triângulo quando é tangente a um de seus lados e aos prolongamentos das retas suportes dos outros dois lados do triângulo.

Seja dado um triângulo ABC e a circunferência ex-inscrita relativa ao lado a de raio r_a e ex-incentro I_a conforme a figura 1.16 abaixo, e seja S a área do triângulo ABC .

Figura 1.16: Circunferência ex-inscrita



Fonte: Morgado [3], p.173

$$\begin{aligned}
 S &= S_{AI_aC} + S_{AI_aB} - S_{BCI_a} \\
 &= \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a \\
 &= \frac{1}{2}r_a(b + c - a) \\
 &= \frac{1}{2}r_a(a + b + c - 2a) \\
 &= \frac{1}{2}r_a(2p - 2a) \\
 &= r_a(p - a).
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

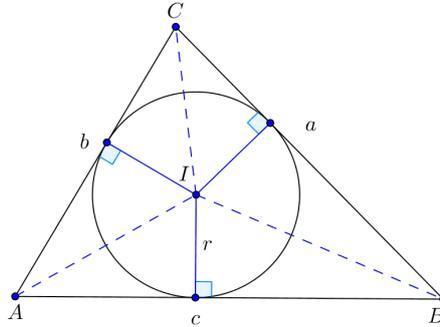
Onde $2p$ é o perímetro do triângulo ABC , para as circunferências ex-inscritas relativas aos outros lados segue-se o mesmo raciocínio, obtendo:

$$S = r_b(p - b) \tag{1.35}$$

$$S = r_c(p - c) \tag{1.36}$$

Dado o triângulo ABC de área S e a circunferência inscrita de raio r e incentro I , descrito como na figura 1.17 abaixo, temos que a área do triângulo ABC será:

Figura 1.17: Circunferência inscrita



Fonte: O Autor

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\
 &= \frac{1}{2}r(a + b + c) \\
 &= \frac{1}{2}r(2p) \\
 &= rp.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Proposição 5. *Se dois triângulos são semelhantes então a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos semelhantes conforme a figura 1.18, com a, b, c e a', b', c' sendo lados opostos aos ângulos A, B, C e A', B', C' , respectivamente.

Temos,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \tag{1.38}$$

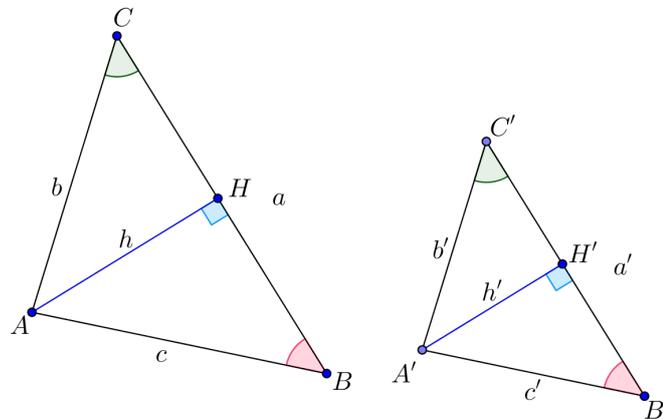
Traçam-se suas alturas relativas ao lado a e a' e obtemos $\widehat{AHB} \equiv \widehat{A'H'B'}$, então pelo caso AA temos $\triangle AHB \sim \triangle A'H'B'$.

Assim,

$$\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c} = k \tag{1.39}$$

PRÉ-REQUISITOS

Figura 1.18: Razão entre área de triângulos semelhantes



Fonte: O Autor

Portanto, vê-se que a razão entre as alturas de triângulos semelhantes é a mesma entre seus lados.

Observação 2 (Muniz Neto [2], p.158). *A razão de semelhança entre dois triângulos semelhantes é a mesma entre todas as suas medidas correspondentes, incluindo bissetrizes e medianas relativas, por exemplo.*

Sejam $S = \frac{1}{2}ah$ e $S_1 = \frac{1}{2}a'h'$ as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente.

Temos de (1.38) e (1.39).

$$a' = k \cdot a \tag{1.40}$$

$$h' = k \cdot h \tag{1.41}$$

Substituindo em S_1 obtemos,

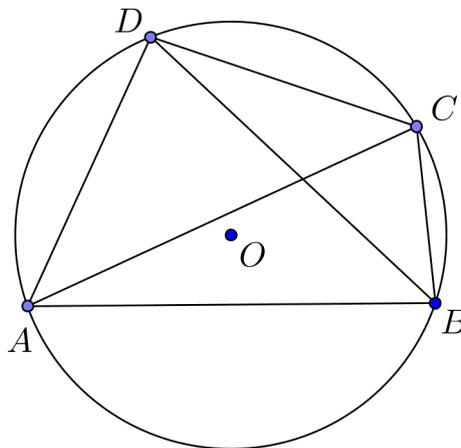
$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}ak \cdot hk \\ &= \frac{1}{2}ah \cdot k^2 \\ &= S \cdot k^2 \\ \frac{S_1}{S} &= k^2 \end{aligned} \tag{1.42}$$



1.6 Quadriláteros inscritíveis

Definição 5. *Classifica-se como quadrilátero inscritível qualquer quadrilátero cujos vértices pertencem a uma mesma circunferência*

Figura 1.19: Quadrilátero inscritível



Fonte: O Autor

Proposição 6. *Um quadrilátero convexo³ $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA , é inscritível se e só se qualquer uma das condições a seguir for satisfeita:*

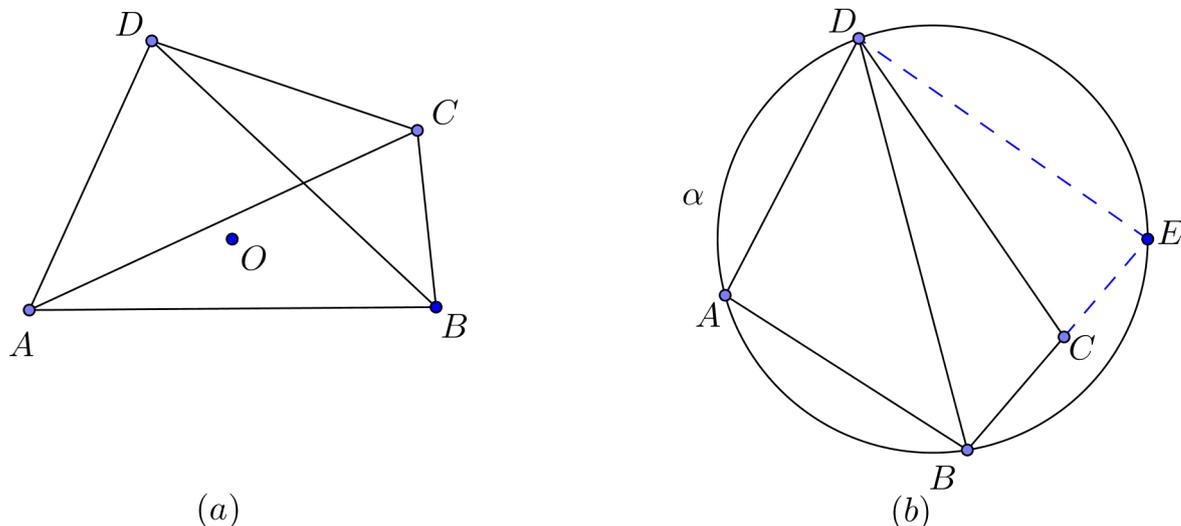
(i) $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$

(ii) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Demonstração. Provaremos primeiro a equivalência com o item (ii). Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscritível, temos pela proposição 3, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$ e $\widehat{ADB} \equiv$

³Um quadrilátero é convexo quando dois pontos pertencentes ao quadrilátero determinam um segmento contido nele.

Figura 1.20: Quadriláteros inscritíveis



Fonte: O Autor

\widehat{ACB} isso mostra (ii). Por outro lado, temos no triângulo ABC ,

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} &= 180^\circ \\ \widehat{BDC} + \widehat{ADB} + \widehat{ABC} &= 180^\circ \\ \widehat{ADC} + \widehat{ABC} &= 180^\circ \end{aligned} \tag{1.43}$$

o que mostra (i). Reciprocamente na figura 1.20 (a), suponhamos primeiro que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Como $ABCD$ é convexo e os vértices de $ABCD$ nomeados consecutivamente, temos que A e D estão situados de um mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} . Sendo θ o valor comum dos ângulos \widehat{BAC} e \widehat{BDC} , temos que A e D estão ambos sobre o arco capaz de θ sobre BC . Logo, a circunferência desse arco capaz é circunscrita a $ABCD$.

Suponhamos, agora, que $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ na figura 1.20 (b) e considere a circunferência α , circunscrita a BAD . Se C estiver no interior do mesmo, seja $\overleftrightarrow{BC} \cap \alpha = \{E\}$.

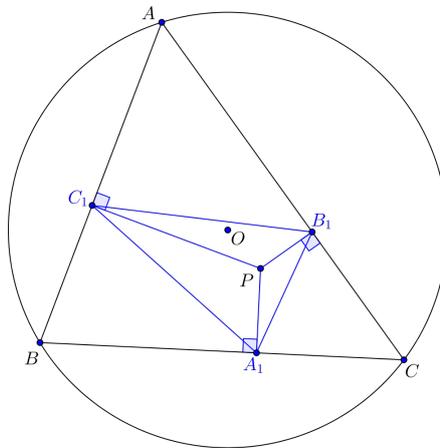
Pelo item (i), temos

$$D\hat{A}B + B\hat{E}D = 180^\circ = D\hat{A}B + B\hat{C}D$$

e, daí, $B\hat{E}D = B\hat{C}D$, uma contradição ao teorema do ângulo externo. Se C for exterior à circunferência chegamos a uma contradição análoga. \square

Definição 6. *Seja P um ponto do plano de um triângulo ABC e sejam $\overline{PA_1}$, $\overline{PB_1}$ e $\overline{PC_1}$ as perpendiculares traçadas por P aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo. Se P não pertence ao círculo circunscrito, o triângulo $A_1B_1C_1$ é chamado de triângulo pedal de P , veja a figura abaixo.*

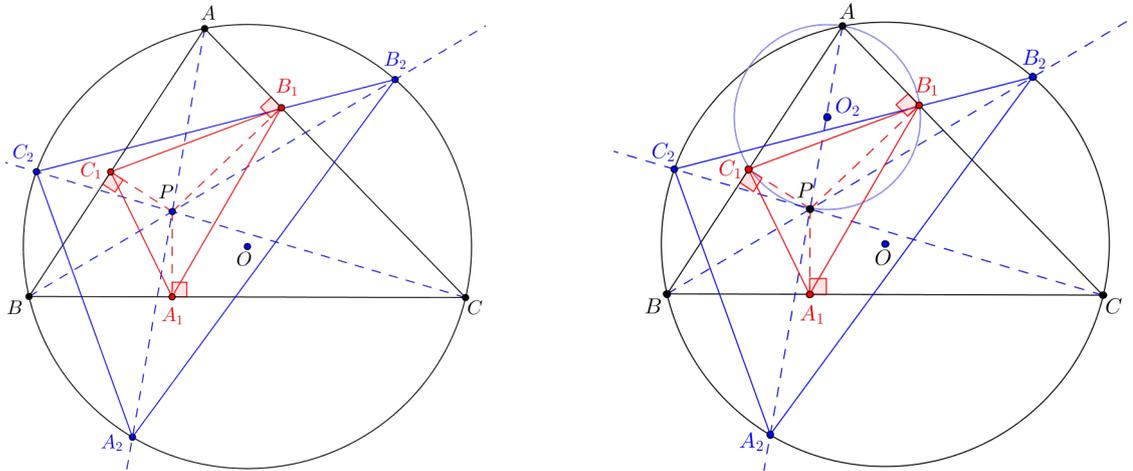
Figura 1.21: Triângulo pedal



Fonte: O Autor

Proposição 7. *Dados um triângulo ABC e um ponto arbitrário P . Sejam o triângulo $A_1B_1C_1$ formado pelos pés das perpendiculares baixadas de P aos respectivos lados e o triângulo $A_2B_2C_2$ formado pelas intersecções das semirretas \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{BP} e \overrightarrow{CP} com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC então o triângulo $A_1B_1C_1$ é semelhante ao triângulo $A_2B_2C_2$.*

Figura 1.22: Triângulo pedal e quadrilátero inscrito



Fonte: O Autor

Demonstração. 1º caso: O ponto P é interno ao triângulo dado:

Dados o $\triangle ABC$ a circunferência circunscrita a ABC e os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ conforme as figuras 1.22 e 1.23 temos pela proposição 3,

$$\begin{aligned} \widehat{AA_2C_2} &\equiv \widehat{AC_2C_2} \\ \widehat{AA_2B_2} &\equiv \widehat{AB_2B_2} \\ \widehat{BAA_2} &\equiv \widehat{BB_2A_2} \\ \widehat{BC_2C_2} &\equiv \widehat{BB_2C_2} \\ \widehat{CAA_2} &\equiv \widehat{CC_2A_2} \\ \widehat{CBB_2} &\equiv \widehat{CC_2B_2}. \end{aligned}$$

Ora, pela proposição 6 os quadriláteros AB_1PC_1 , BA_1PC_1 e CB_1PA_1 são inscritíveis logo,

$$P\widehat{B_1C_1} \equiv P\widehat{AC_1}$$

$$P\widehat{C_1B_1} \equiv P\widehat{AB_1}$$

$$P\widehat{A_1C_1} \equiv P\widehat{BC_1}$$

$$P\widehat{C_1A_1} \equiv P\widehat{BA_1}$$

$$P\widehat{B_1A_1} \equiv P\widehat{CA_1}$$

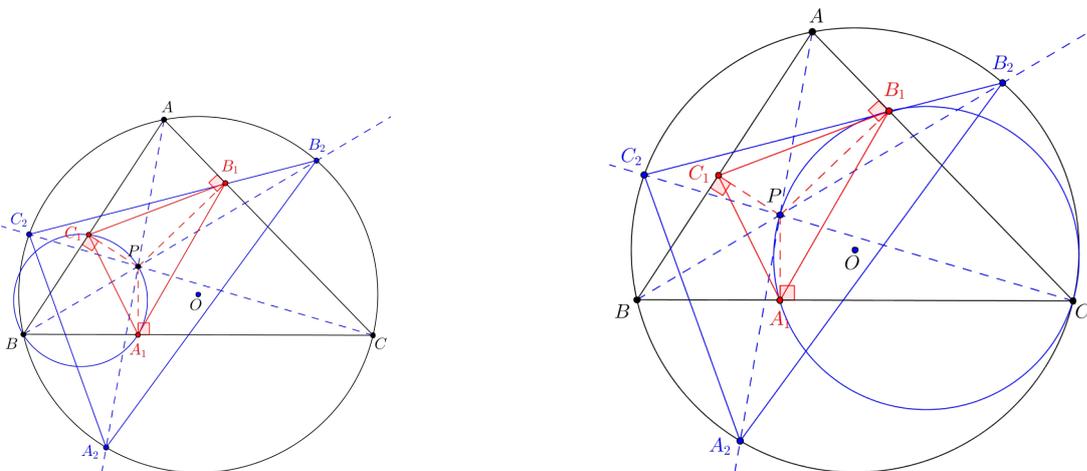
$$P\widehat{A_1B_1} \equiv P\widehat{CB_1}.$$

Mas,

$$P\widehat{B_1C_1} + P\widehat{B_1A_1} \equiv B\widehat{B_2A_2} + B\widehat{B_2C_2}$$

$$A_1\widehat{B_1C_1} \equiv A_2\widehat{B_2C_2}. \tag{1.44}$$

Figura 1.23: Triângulo pedal e quadriláteros inscritíveis



Fonte: O Autor

PRÉ-REQUISITOS

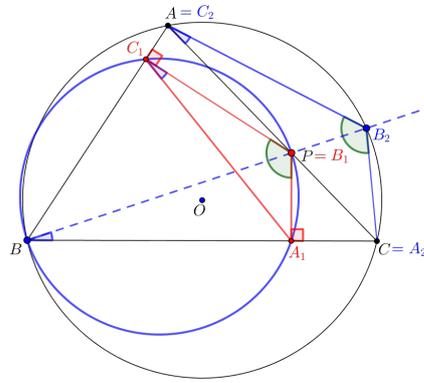
Da mesma forma temos,

$$\begin{aligned} P\widehat{C}_1B_1 + P\widehat{C}_1A_1 &\equiv C\widehat{C}_2A_2 + C\widehat{C}_2B_2 \\ A_1\widehat{C}_1B_1 &\equiv A_2\widehat{C}_2B_2 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Portanto, pelo caso AA, temos que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

2º caso: O ponto P pertence a um dos lados do triângulo dado.

Figura 1.24: Triângulo pedal e quadrilátero inscrito



Fonte: O Autor

Suponha que $P \in AC$ conforme a figura 1.24 temos que P coincide com B_1 e A e C coincidem com C_2 e A_2 , respectivamente. Temos no quadrilátero $ABCB_2$ inscrito na circunferência circunscrita ao triângulo, pela proposição 6,

$$A\widehat{B}C + A_2\widehat{B}_2C_2 = 180^\circ.$$

Ora, no quadrilátero C_1BA_1P , temos que $P\widehat{C}_1B + B\widehat{A}_1P = 180^\circ$, então pela proposição 6, ele é inscrito.

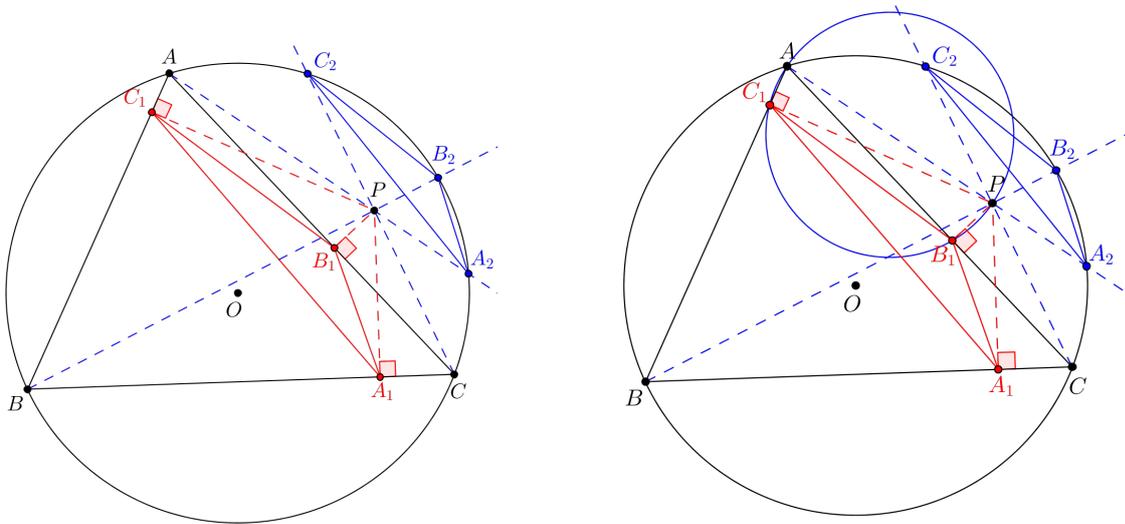
Assim,

$$\begin{aligned} C_1\widehat{P}A_1 + C_1\widehat{B}A_1 &= 180^\circ = C_2\widehat{B}_2A_2 + C_1\widehat{B}A_1 \\ C_1\widehat{P}A_1 &= C_2\widehat{B}_2A_2 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Mas, $B_2\widehat{C_2}A_2 \equiv B_2\widehat{B}A_2 \equiv A_1\widehat{C_1}B_1$ então pelo caso AA temos que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

3º caso: O ponto P é externo ao triângulo dado e interno à circunferência circunscrita ao mesmo.

Figura 1.25: Triângulo pedal e quadrilátero inscritível



Fonte: O Autor

Com base nas figuras 1.25 e 1.26 temos,

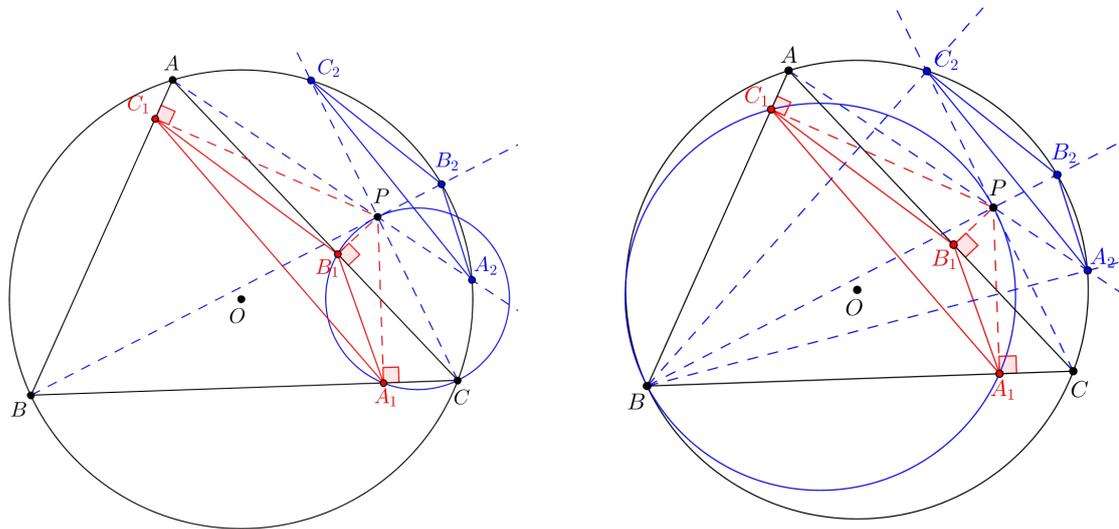
$$\begin{aligned} A_2\widehat{C_2}B_2 &\equiv A_2\widehat{B}B_2 \\ C\widehat{C_2}A_2 &\equiv C\widehat{B}A_2 \equiv C\widehat{A}A_2 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Mas pela proposição 6, o quadrilátero APB_1C_1 é inscritível então $C\widehat{A}A_2 \equiv P\widehat{A}B_1 \equiv P\widehat{C_1}B_1$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} B_2\widehat{A_2}C_2 &\equiv B_2\widehat{B}C_2 \\ A\widehat{A_2}C_2 &\equiv A\widehat{C}C_2 \equiv A\widehat{B}C_2 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Figura 1.26: Triângulo pedal e quadrilátero inscrito



Fonte: O Autor

Mas, o quadrilátero PCA_1B_1 é inscrito então $\widehat{ACC_2} \equiv \widehat{PCB_1} \equiv \widehat{PA_1B_1}$. Ora, $\widehat{PA_1C_1} \equiv \widehat{PBC_1} = \widehat{B_2BC_2} + \widehat{ABC_2}$, pois BA_1PC_1 é inscrito. Logo, $\widehat{B_1A_1C_1} \equiv \widehat{B_2BC_2} \equiv \widehat{B_2A_2C_2}$.

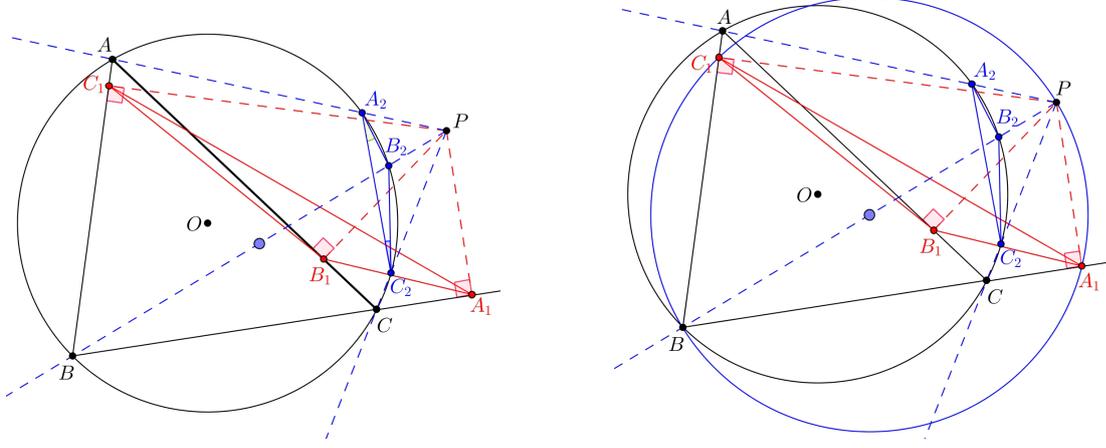
Por outro lado, temos que $\widehat{A_1C_1P} \equiv \widehat{PBA_1} = \widehat{A_2BB_2} + \widehat{CBA_2}$. Assim, $\widehat{B_1C_1A_1} \equiv \widehat{B_2C_2A_2}$ e, portanto, pelo caso AA temos que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

4° caso:⁴ O ponto P externo à circunferência circunscrita ao triângulo dado.

Nas figuras 1.27 e 1.28, os quadriláteros PA_1CB_1 , PA_1BC_1 e PAC_1B_1 são inscritíveis, pela proposição 6, daí

⁴Se o ponto P estiver sobre a circunferência circunscrita ao triângulo dado ABC os pés das perpendiculares traçadas estão sobre uma mesma reta, a reta de Simson-Wallace.

Figura 1.27: Triângulo pedal e quadrilátero inscrito



Fonte: O Autor

$$\begin{aligned}
 \widehat{PBC_1} &\equiv \widehat{PA_1C_1} \equiv \widehat{PCQ} \\
 A_1\widehat{PB_1} &\equiv \widehat{BCA} \equiv \widehat{AA_2B} \\
 \widehat{PCA_1} &\equiv \widehat{BA_2C_2} \\
 \widehat{QCB_1} &\equiv \widehat{C_1A_1B_1}
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Ora, $\widehat{PA_2C_2} \equiv \widehat{PC_1C_1}$, pois $\widehat{AA_2B} + \widehat{BA_2C_2} = \widehat{BCA} + \widehat{PCA_1}$.

Logo, $\widehat{B_2A_2C_2} \equiv \widehat{QCB_1} \equiv \widehat{C_1A_1B_1}$.

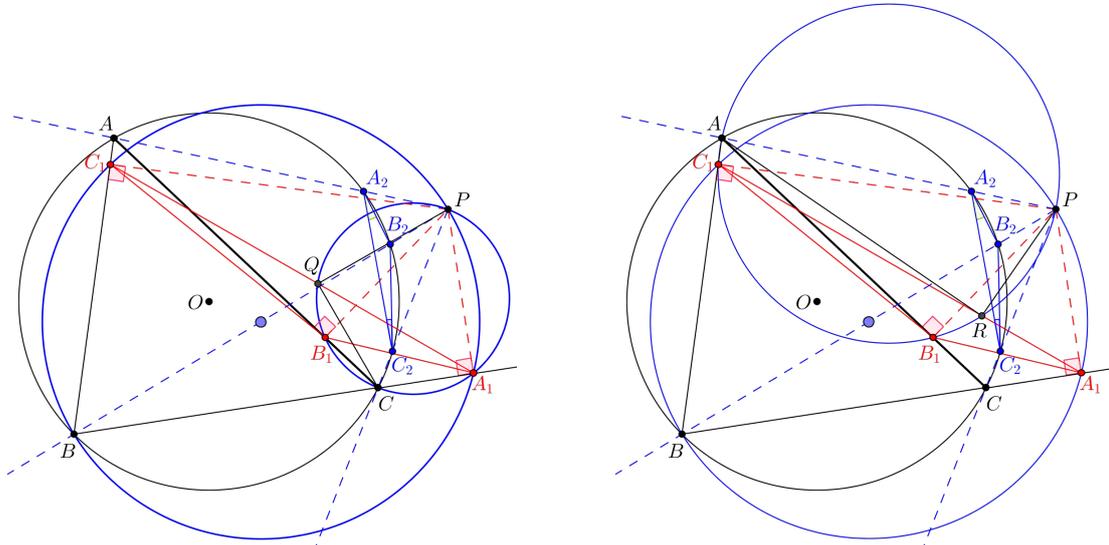
Por outro lado, temos que

$$\widehat{PAR} \equiv \widehat{PC_1R} \equiv \widehat{PC_1A_1} \equiv \widehat{PBA_1} \equiv \widehat{B_2C_2P} \text{ e } \widehat{RAB_1} \equiv \widehat{RC_1B_1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \widehat{PAC} &\equiv \widehat{A_2C_2P} \\
 \widehat{PAR} + \widehat{RAB_1} &= \widehat{PC_1A_1} + \widehat{RC_1B_1} = \widehat{A_2C_2B_2} + \widehat{B_2C_2P} \\
 \widehat{RC_1B_1} &= \widehat{A_2C_2B_2}
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Figura 1.28: Triângulo pedal e quadriláteros inscritíveis



Fonte: O Autor

Portanto, pelo caso AA temos que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. □

Quando o triângulo é escaleno e P é interior ao triângulo, existem oito diferentes pontos P tais que os triângulos correspondentes $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são semelhantes ao triângulo ABC . Nos demais casos, $\triangle ABC \equiv \triangle A_2B_2C_2$, ao mesmo tempo em que seis pontos são interiores e dois exteriores a circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

1.7 Potência de um ponto

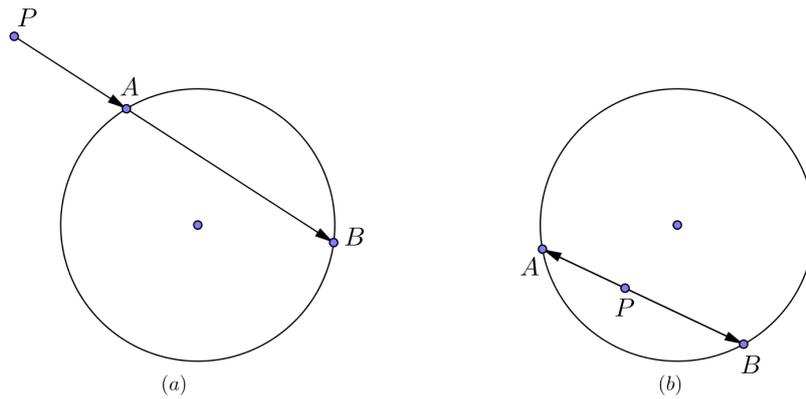
Definição 7. Se por um ponto P traçarmos uma reta que corte um círculo (O, R) nos pontos A e B , chama-se potência de um ponto em relação à circunferência o produto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ e escreve-se.

$$Pot_{(O)}P = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

Definição 8. Define-se o produto escalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ como $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \cos \alpha$, sendo α o

ângulo que \overrightarrow{PA} forma com \overrightarrow{PB} .

Figura 1.29: Potência de um ponto



Fonte: Morgado [3], p.203

1° caso: P é interno à circunferência

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \cos 180^\circ$$

$$Pot_{(o)} = -\overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

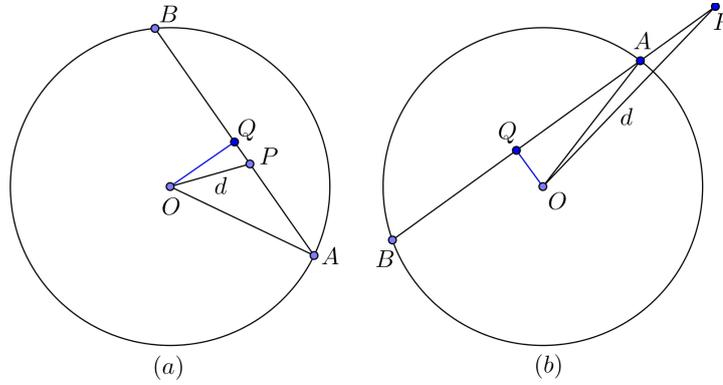
2° caso: P é externo à circunferência

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

$$Pot_{(o)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

Teorema 4. A potência de um ponto em relação a uma circunferência é igual $d^2 - R^2$, sendo d a distância do ponto P ao centro e R o raio da circunferência.

Figura 1.30: Potência de um ponto



Fonte: Morgado [3], p.204

Demonstração. 1° **caso:** P é interno à circunferência

$$\begin{aligned}
 Pot_{(o)}P &= -\overline{PA} \cdot \overline{PB} = -(\overline{QA} - \overline{PQ})(\overline{PQ} + \overline{QB}) \\
 &= (\overline{PQ} - \overline{QA})(\overline{PQ} + \overline{QA}) \\
 &= \overline{PQ}^2 - \overline{QA}^2 \\
 &= (\overline{PO}^2 - \overline{QO}^2) - (\overline{OA}^2 - \overline{QO}^2) \\
 &= \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 \\
 &= d^2 - R^2
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

2° **caso:** P é externo à circunferência

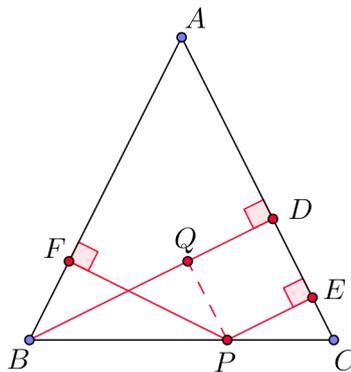
$$\begin{aligned}
 Pot_{(o)}P &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} = -(\overline{PQ} - \overline{QA})(\overline{PQ} + \overline{QB}) \\
 &= (\overline{PQ}^2 - \overline{QB}^2) \\
 &= \overline{PQ}^2 - \overline{QA}^2 \\
 &= (\overline{PO}^2 - \overline{QO}^2) - (\overline{OA}^2 - \overline{QO}^2) \\
 &= \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 \\
 &= d^2 - R^2
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

□

Questões Práticas

Questão 1.1. Demonstrar que em um triângulo isósceles ABC de base BC baixando de um ponto P qualquer sobre a base, PE e PF perpendiculares aos lados iguais, temos $\overline{PE} + \overline{PF} = \overline{BD}$ onde D é o pé da perpendicular baixada do vértice B sobre o lado AC .

Figura 1.31: Questão 1.1



Fonte: Autor

Demonstração. Sejam ABC um triângulo isósceles de base BC e P um ponto sobre a base, onde \overline{PF} a distância de P até AB e \overline{PE} a distância de P até AC .

Traçando-se em P uma reta paralela ao lado AC obtemos $Q \in BD$, onde BD é a altura relativa ao lado AC , temos:

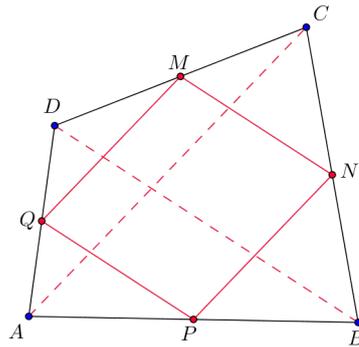
$\overline{PE} \equiv \overline{QD}$, $\widehat{FBP} \equiv \widehat{QPB}$, BP é comum e $\widehat{BFP} \equiv \widehat{PQB}$ então pelo caso LAA_o temos que $\triangle BFP \equiv \triangle BQP$, assim $\overline{BQ} \equiv \overline{FP}$.

Portanto, $\overline{BD} = \overline{FP} + \overline{PE}$. □

PRÉ-REQUISITOS

Questão 1.2. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

Figura 1.32: Questão 1.2



Fonte: Autor

Demonstração. Sejam $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer e M, N, P e Q pontos médios de seus lados:

Temos no $\triangle ABC$, $\overline{NP} = \frac{\overline{AC}}{2} = \overline{MQ}$ no $\triangle ACD$, ou seja $MQ \parallel AC \parallel NP$ pelo teorema da base média.

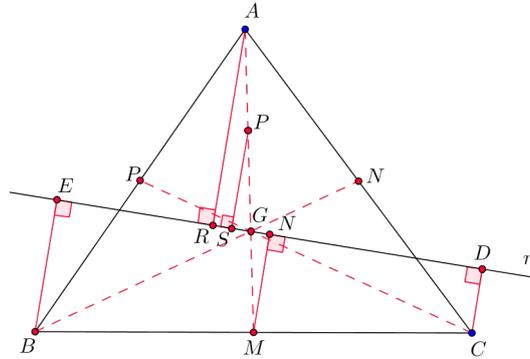
Por outro lado no $\triangle BCD$, $\overline{MN} = \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{PQ}$ do $\triangle ABD$, ou seja $MN \parallel BD \parallel PQ$

Portanto, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo. \square

Questão 1.3. Uma reta r passa pelo baricentro G de um triângulo ABC e deixa o vértice A de um lado e os vértices B e C do outro. Prove que a soma das distâncias de B e C à reta r é igual à distância de A a r .

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer e G seu baricentro temos \overline{BE} , \overline{AR} e \overline{CD} as distâncias dos vértices à reta r . Sendo M o ponto médio de BC temos no

Figura 1.33: Questão 1.3



Fonte: Autor

trapézio $BCDE$:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BE} + \overline{CD}}{2} \iff \overline{BE} + \overline{CD} = 2\overline{MN}.$$

Tomemos o ponto P como ponto médio de AG , temos, $\overline{PG} \equiv \overline{MG}$, $\widehat{PSG} \equiv \widehat{MNG}$ e $\widehat{SGP} \equiv \widehat{MGN}$, pelo caso LAA_o , $\triangle PGS \equiv \triangle MNG$, assim $\overline{MN} \equiv \overline{PS}$.

Portanto, no triângulo ARG temos:

$$\overline{PS} = \frac{\overline{AR}}{2} = \overline{MN} \Rightarrow \overline{AR} = 2\overline{MN} = \overline{BE} + \overline{CD}. \quad \square$$

Questão 1.4. No triângulo ABC da figura abaixo, $\overline{AB} = \overline{BC}$, traça-se a altura AH relativa ao lado BC . Se $\overline{BC} \cdot \overline{CH} = 18$, calcule a medida do lado \overline{AC} .

Com $(\alpha < 90^\circ)$, pela equação (1.6), temos

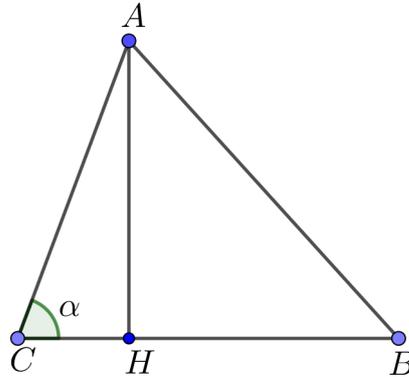
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CH}$$

Cancelando \overline{AB}^2 e \overline{BC}^2 obtemos

$$0 = \overline{AC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CH}.$$

PRÉ-REQUISITOS

Figura 1.34: Questão 1.4



Fonte: Gallegos [4], p.322

Então

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{CH}$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \cdot 18$$

$$\overline{AC} = \sqrt{36}$$

$$\overline{AC} = 6 \text{ u.c}$$

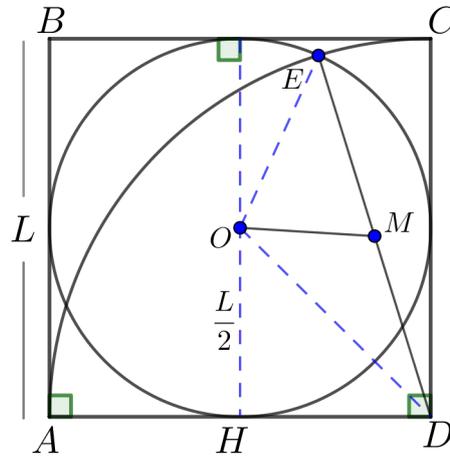
Questão 1.5. Seja $ABCD$ um quadrado de lado L , sendo O o centro do quadrado, D o centro do arco \widehat{AEC} e $\overline{EM} \equiv \overline{MD}$ na figura abaixo. Calcule a medida de OM .

O raio da circunferência inscrita mede $\frac{L}{2}$ e o do arco \widehat{AEC} mede L .

No $\triangle OHD$,

$$\begin{aligned}\overline{OD}^2 &= \overline{OH}^2 + \overline{HD}^2 \\ &= \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4} \\ \overline{OD}^2 &= 2 \cdot \frac{L^2}{4}\end{aligned}$$

Figura 1.35: Questão 1.5



Fonte: Gallegos [4], p.323

No $\triangle EOD$, OM é mediana relativa ao lado ED então Pelo teorema das medianas 1.10 temos,

$$\begin{aligned}
 \overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 &= 2\overline{OM}^2 + \frac{\overline{ED}^2}{2} \\
 \frac{L^2}{4} + 2 \cdot \frac{L^2}{4} &= 2\overline{OM}^2 + \frac{L^2}{2} \\
 3\frac{L^2}{4} &= 2\overline{OM}^2 + \frac{L^2}{2} \\
 2\overline{OM}^2 &= 3\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2} \\
 &= 3\frac{L^2}{4} - 2 \cdot \frac{L^2}{4} \\
 &= \frac{L^2}{4} \\
 \overline{OM}^2 &= \frac{L^2}{8} \\
 \overline{OM} &= \sqrt{\frac{L^2}{8}} \\
 \overline{OM} &= \frac{L\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

PRÉ-REQUISITOS

Questão 1.6. Sejam a, b e c os lados de um triângulo ABC , $a + b + c = 2p$, r o inraio e R o circunraio. Demonstre a seguinte relação:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$$

Demonstração. Seja S a área do triângulo ABC temos de (1.33) que

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Mas de (1.37) temos $r = \frac{S}{p}$ e $\frac{1}{r} = \frac{p}{S}$, por outro lado temos de (1.30) que $4R = \frac{abc}{S}$ então,

$$S \cdot \frac{S}{p} = (p^2 - ap - bp + ab)(p - c)$$

$$Sr = p^3 - ap^2 - bp^2 + abp - cp^2 + acp + bcp - abc$$

$$= p^3 - p^2(a + b + c) + p(ab + ac + bc) - abc$$

$$= p^3 - p^2 \cdot 2p + p(ab + ac + bc) - abc$$

$$= p^3 - 2p^3 + p(ab + ac + bc) - abc$$

$$= -p^3 + p(ab + ac + bc) - abc$$

$$r = \frac{-p^3}{S} + \frac{p}{S}(ab + ac + bc) - \frac{abc}{S}$$

$$= -p^2 \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(ab + ac + bc) - 4R$$

$$r^2 = -p^2 + (ab + ac + bc) - 4Rr$$

$$(ab + ac + bc) = r^2 + p^2 + 4Rr \tag{1.53}$$

Por outro lado temos, $(a + b + c)^2 = (2p)^2 = 4p^2$ logo,

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 4p^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 4p^2 - 2(ab + ac + bc) \end{aligned} \tag{1.54}$$

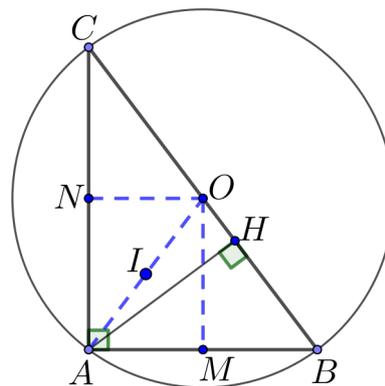
substituindo (1.53) em (1.54) obtemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4p^2 - 2(r^2 + p^2 + 4Rr) \\ &= 4p^2 - 2r^2 - 2p^2 - 8Rr \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 2p^2 - 2r^2 - 8Rr \end{aligned} \tag{1.55}$$

□

Questão 1.7. Demonstrar que em um triângulo retângulo em A , o pé da altura AH , o vértice A , e os pontos médios dos três lados do triângulo são concíclicos. Ache o centro e o raio desta circunferência.

Figura 1.36: Questão 1.7



Fonte: Serrão [12], p.51

PRÉ-REQUISITOS

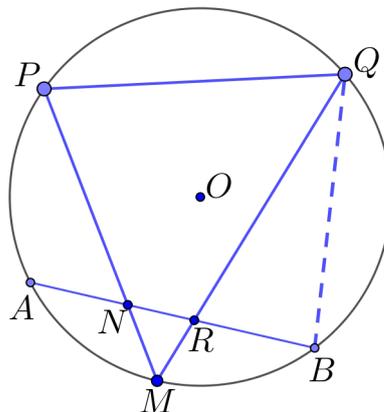
Demonstração. Dado o triângulo ABC retângulo em A e a circunferência circunscrita temos pela proposição 3 $\widehat{BAC} = 90^\circ = \frac{\widehat{BC}}{2}$, assim o lado BC é diâmetro da circunferência de centro O então,

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}.$$

Portanto, os triângulos AOB e AOC são isósceles de bases AB e AC , respectivamente. Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AC temos então OM e ON como respectivas alturas dos triângulos AOB e AOC com AH sendo altura relativa à hipotenusa do triângulo ABC . Assim, pela proposição 6 temos que os quadriláteros $AHON$ e $AMON$ são inscritíveis, pois $\widehat{AHO} + \widehat{ONA} = 180^\circ = \widehat{ONA} + \widehat{OMA}$. Logo, os pontos A, H, O, M e N são concíclicos numa circunferência de raio $r = \frac{\overline{AO}}{2}$ e centro em I , ponto médio de AO . \square

Questão 1.8. Sejas dadas uma circunferência de centro O e uma corda AB . Pelo ponto M , meio do arco AB , traçamos duas cordas quaisquer MP e MQ que cortam AB , nos pontos N e R . Prove que o quadrilátero $NPQR$ é inscritível.

Figura 1.37: Questão 1.8



Fonte: Serrão [12], p.52

Demonstração. Dada a circunferência conforme descrito, temos

$$M\widehat{Q}B = \frac{\widehat{BM}}{2} \text{ e } A\widehat{B}Q = \frac{\widehat{AP} + \widehat{PQ}}{2}$$

Então,

$$\begin{aligned} A\widehat{R}Q &= M\widehat{Q}B + A\widehat{B}Q \\ &= \frac{\widehat{BM}}{2} + \left(\frac{\widehat{AP} + \widehat{PQ}}{2} \right) \\ &= \frac{\widehat{BM} + \widehat{AP} + \widehat{PQ}}{2} = \frac{\widehat{MA} + \widehat{AP} + \widehat{PQ}}{2} \end{aligned}$$

pois $\angle ARQ$ é externo ao triângulo QBR . Mas,

$$\begin{aligned} M\widehat{P}Q &= \frac{\widehat{BM}}{2} + \frac{\widehat{BQ}}{2} \\ &= \frac{\widehat{BM} + \widehat{BQ}}{2} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} M\widehat{P}Q + A\widehat{R}Q &= \frac{\widehat{BM} + \widehat{BQ}}{2} + \frac{\widehat{MA} + \widehat{AP} + \widehat{PQ}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{BM} + \widehat{BQ} + \widehat{MA} + \widehat{AP} + \widehat{PQ}) \\ &= \frac{360^\circ}{2} \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

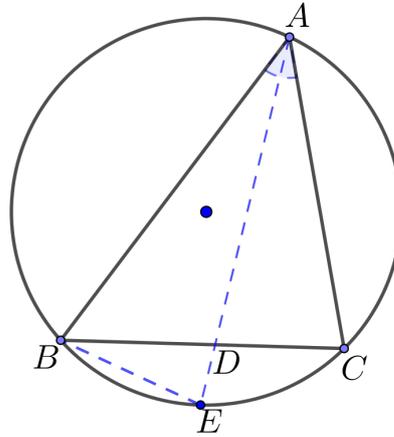
Portanto, pela proposição 6, o quadrilátero $NPQR$ é inscritível. \square

Questão 1.9. Sejam ABC um triângulo qualquer e AD a bissetriz que encontra em E a circunferência circunscrita. Demonstre que

$$\overline{BE}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{AE}.$$

PRÉ-REQUISITOS

Figura 1.38: Questão 1.9



Fonte: Serrão [12], p.101

Demonstração. Seja AD bissetriz do $\angle A$ do triângulo ABC temos

$$\widehat{DBE} \equiv \widehat{DAC} \equiv \widehat{DAB}.$$

O $\angle BEA$ é comum aos triângulos ABE e BED então pelo caso AA temos que $\triangle ABE \sim \triangle BED$. Logo,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$$

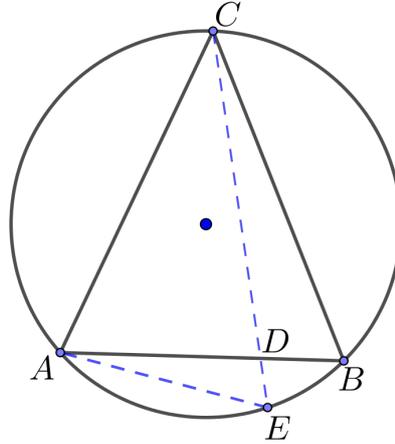
$$\text{Portanto, } \overline{BE}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{AE}.$$

□

Questão 1.10. Pelo vértice C de um triângulo isósceles CBA de base AB traça-se uma reta qualquer que corta a base em D e a circunferência circunscrita em E . Demonstre que

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}.$$

Figura 1.39: Questão 1.10



Fonte: Serrão [12], p.101

Demonstração. Traçando o segmento AE temos o ângulo $\angle ACE$ é comum aos triângulos ADC e AEC .

Por outro lado, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CBA} \equiv \widehat{CEA}$, pois por hipótese o triângulo ABC é isósceles de base AB .

Então, pelo caso AA , temos que $\triangle ADC \sim \triangle AEC$.

Logo,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

$$\text{Donde } \overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}.$$

□

Capítulo 2

Teoremas de Euler

2.1 Resumo histórico

Ao longo da história da humanidade a matemática sempre esteve presente direta ou indiretamente conforme as necessidades que apareciam como forma de facilitar o trabalho humano e o conhecimento de fenômenos da natureza e da astronomia, sempre se buscou facilitar e entender os sincronismos existente entre os seus vários ramos como geometria e álgebra por exemplo que desde os babilônios e passando pelos gregos Pitágoras e Euclides se buscou compreender.

Daí desde esses períodos se obteve várias relações matemáticas conhecidas por muitos de nós e criação de outras áreas matemáticas como a trigonometria, além de sucessivos matemáticos terem buscado solucionar problemas deixados pelos seus antecessores entre eles, Leonhard Euler (1707 – 1783) que segundo Howard Eves ([9], pp.472 – 473) sua contribuições à matemática são demasiado numerosas para serem expostas aqui completamente, das quais se incluem as seguintes notações:

$f(x)$ para funções,

e para a base dos logaritmos naturais,

a, b, c para os lados de um triângulo ABC ,

s para o semiperímetro do triângulo ABC ,

r para o inraio do triângulo ABC ,

R para o circunraio do triângulo ABC ,

Σ para somatórios,

i para unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

Nascido na Basileia em 1707, mesmo tendo passado pela teologia sob influência de seu pai pastor calvinista, Euler se viu apto na matemática o que fez aos 20 anos ser convidado a fazer parte da academia de São Petersburgo a convite dos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli, porém nunca ocupou cargo de professor durante seus 76 anos de vida.

Sendo um matemático que escrevia com profusão e liberdade de intuição, seu interesse de atuação não era limitado somente à física e matemática, se estendia à astronomia, medicina, botânica, teologia e as linguas orientais.

Tendo perdido sua visão e já estando cego do olho direito em 1735, não impediu que Euler mantivesse suas atividades, o que fez com que publicasse 530 trabalhos durante sua vida e deixasse manuscritos que enriqueceram as publicações de São Petersburgo por 47 anos.

Dentre suas contribuições matemáticas e sua participação, ele está em quase todos os ramos matemáticos dos quais podemos destacar geometria plana e espacial, geometria diferencial, aritmética, álgebra e cálculo diferencial como alguns deles.

Citando algumas delas destacamos sua contribuição à teoria dos números das quais contribuiu no completamento de proposições relativas a representação de números como soma de dois, três ou quatro quadrados; Euler provou a última proposição do nono livro de Euclides (c.300 a.C) do qual diz que *se $2^n - 1$ é primo então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um*

TEOREMAS DE EULER

número perfeito e todo número perfeito par tem essa forma além de em 1747 fornecer uma lista de 30 números amigáveis.

Deve-se a Euler em 1736 a primeira demonstração do pequeno teorema de Fermat no qual diz que *se p é primo e a é primo com p então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p* e tendo Fermat conjecturado que $f(n) = 2^{2^n} + 1$ é primo para todo inteiro não negativo n Euler provou ser incorreta ao mostrar que $f(5)$ é número composto além de em 1754 ter sido o primeiro a ter demonstrado na qual inclui unicidade da representação do teorema atribuído a Fermat no qual diz que *um primo da forma $4n + 1$ pode ser representado como soma de dois quadrados*.

Por volta de 1760, Euler propôs e resolveu o problema de determinar o número de inteiros positivos menores do que um inteiro positivo n dado e primos com n , esse número chamamos de $\phi(n)$ e a correspondência $n \rightarrow \phi(n)$ é uma função definida e com valores no conjunto dos inteiros positivos, conhecida como função de Euler.

Na álgebra Euler reinventou um método para equação quadrática indeterminada $xy = ax + by + c$ e por volta de 1750 tendo conhecimento de que a resolução de equações quárticas se reduzia a resolução de equações cúbicas, tentou a resolução geral de uma equação quártica pela redução à uma equação quártica, mas obteve insucesso na sua tentativa.

Euler descobriu em 1765 com suas demonstrações sintéticas o que conhecemos como *reta de Euler* na qual prova que o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo são colineares o que se expandiu para a geometria espacial no caso do tetraedro, ao mesmo tempo que demonstrou pela primeira vez em 1752 a relação $V - A + F = 2$ nos polígonos convexos regulares onde A é o número de arestas, V o de vértices e F o de faces do polígono; mesmo que tal relação possa ter sido conhecida por Arquimedes (c.225 a.C) e tendo sido pronunciada por Descartes em 1640 alguns autores se refe-

rem como fórmula de Euler-Descartes sendo esta considerada a propriedade topológica mais antiga embora em 1736 Euler já houvesse entrado no ramo topológico dos grafos lineares ao fazer suas abordagens no problema das pontes de Königsberg.

Em 1673 tendo Leibniz sido consultado por Oldenburg sobre a soma da série $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 + \dots$, mas não sabendo responder o mesmo ocorrendo com Jakob Bernoulli em 1689 coube a solução do problema ao Euler anos depois quando em 1748 deu a soma $1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + \dots$ para valores pares de n de $n = 2$ até $n = 26$ permanecendo os de casos com n ímpar até hoje inabordáveis.

A fórmula de Taylor esperou até 1755 quando Euler usou em seu cálculo diferencial, além de chamar a atenção para a ligação entre a teoria dos números e a série $1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \dots + 1/n^s + \dots$, onde s é um inteiro.

E por volta de 1718 Johann Bernoulli tendo considerado uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes, anos depois Euler considerou uma função como sendo uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.

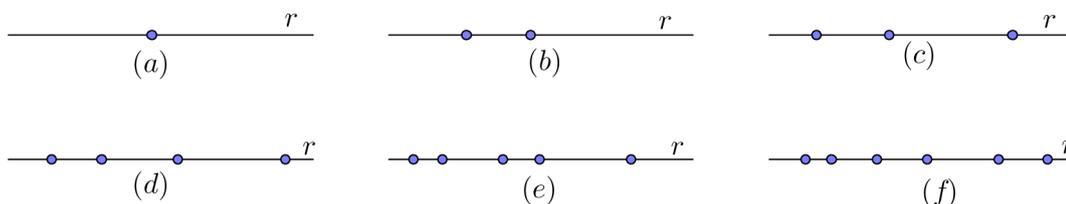
Neste capítulo serão demonstrados alguns teoremas da geometria plana que tiveram algumas contribuições de Euler, tendo o capítulo 1 como pré-requisito para o entendimento das demonstrações dos teoremas nos quais ele contribuiu, em alguns totalmente sendo responsável tanto pela elaboração quanto pela demonstração e em outros parcialmente ou demonstração, ou na elaboração.

2.2 Partes determinadas por pontos sobre uma reta

Teorema 1. *A diferença entre o número de pontos (V) e de partes (A) determinadas pelos pontos sobre uma reta, é constante.*

TEOREMAS DE EULER

Figura 2.1: Partes e segmentos determinados por pontos sobre uma reta



Fonte: O Autor

Demonstração. Ao dividir uma reta r em partes por um conjunto finito de pontos, se temos sobre uma reta, V pontos, estes a dividem em $V - 1$ segmentos e $V + 1$ partes. Designando o número de partes por A temos,

$$\begin{aligned} V - A &= V - (V + 1) \\ V - A &= V - V - 1 \\ V - A &= -1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

□

O que nos diz que na fórmula de Euler a diferença $V - A$ é constante, ou seja, não depende do número de pontos escolhidos nem de sua posição.

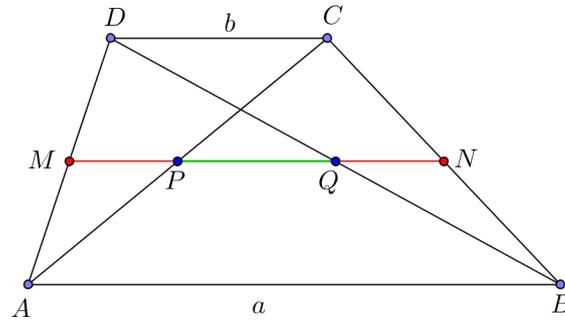
2.3 Mediana de Euler num trapézio

Teorema 2 (Mediana de Euler¹). *O segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é igual a semidiferença de suas bases.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um trapézio qualquer com M, N , sendo os pontos médios dos eventuais lados não paralelos e cujas bases são $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$ com $a > b$. Tendo

¹É o segmento que une os pontos médios das diagonais de um quadrilátero.

Figura 2.2: Mediana de Euler



Fonte: O Autor

P e Q como as intersecções do segmento \overline{MN} com suas diagonais, temos pelo teorema 1 da página 20 no $\triangle ACD$ que,

$$\overline{MP} = \frac{\overline{DC}}{2} = \frac{b}{2}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, temos no $\triangle ABD$ que,

$$\overline{MQ} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a}{2}. \quad (2.3)$$

Das equações (2.2) e (2.3) temos,

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{MQ} - \overline{MP} \\ &= \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ &= \frac{a-b}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

□

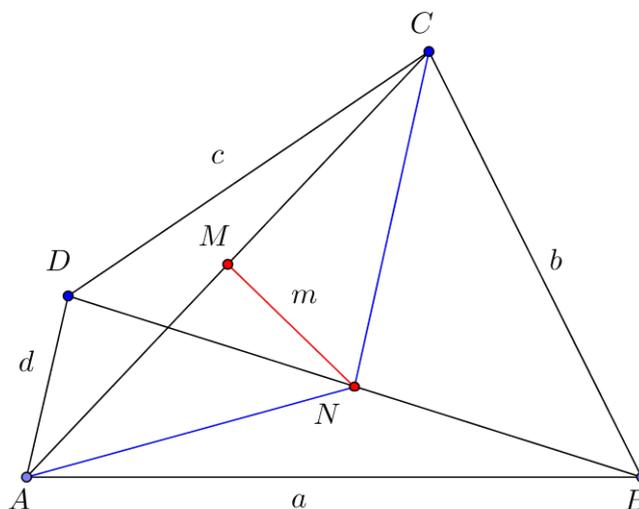
2.4 Quadrilátero qualquer

Teorema 3 (Relação de Euler²). *Em qualquer quadrilátero a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais com o drádruplo da mediana de Euler.*

²será demonstrado o caso do quadrilátero convexo, mas a relação vale também para os não convexos

TEOREMAS DE EULER

Figura 2.3: Quadrilátero qualquer



Fonte: O Autor

Demonstração. No quadrilátero $ABCD$, sejam N o ponto médio de BD , M o ponto médio de AC , $\overline{BD} = p$ e $\overline{AC} = q$, diagonais, temos pelo corolário 2 da página 24 nos triângulos ABD e BCD que,

$$b^2 + c^2 = 2\overline{CN}^2 + \frac{p^2}{2} \quad (2.5)$$

$$a^2 + d^2 = 2\overline{AN}^2 + \frac{p^2}{2}. \quad (2.6)$$

Somando (2.5) e (2.6) obtemos,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(\overline{CN}^2 + \overline{AN}^2) + p^2. \quad (2.7)$$

Ora, M é ponto médio de AC então temos no triângulo ANC ,

$$\overline{AN}^2 + \overline{NC}^2 = 2m^2 + \frac{q^2}{2}. \quad (2.8)$$

Então, de (2.7) e (2.8) obtemos,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 2\left(2m^2 + \frac{q^2}{2}\right) + p^2 \\ &= p^2 + q^2 + 4m^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

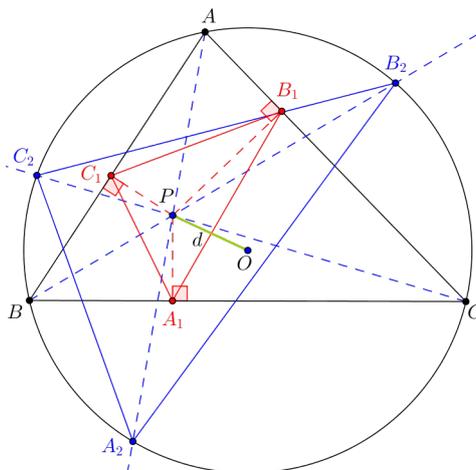
□

2.5 Razão entre áreas

Teorema 4 (Euler³). *Suponhamos que S seja a área de um triângulo dado ABC e R o raio da circunferência circunscrita a este triângulo. Seja S_1 a área do triângulo cujos vértices são os pés das perpendiculares baixadas de um ponto P a uma distância d do circuncentro sobre os lados do triângulo dado, então*

$$S_1 = \frac{S}{4} \left| 1 - \frac{d^2}{R^2} \right|$$

Figura 2.4: Triângulo dado e as referidas construções



Fonte: O Autor

Demonstração. Sejam ABC o triângulo dado, P um ponto arbitrário a uma distância d do seu circuncentro e R o raio da circunferência circunscrita. Sejam A_1 , B_1 e C_1 os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados BC , AC e AB ; A_2 , B_2 e C_2 os respectivos pontos de intersecção das semirretas \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{PC} com a circunferência circunscrita.

³O módulo se deve ao fato de estarmos trabalhando com distâncias

TEOREMAS DE EULER

Sendo a , b e c as medidas dos lados do $\triangle ABC$; a_1 , b_1 e c_1 dos lados do $\triangle A_1B_1C_1$ e a_2 , b_2 e c_2 dos lados do $\triangle A_2B_2C_2$ temos:

$$\text{sen}(B_1\widehat{P}C_1) = \text{sen}(180^\circ - \widehat{A}) = \text{sen } \widehat{A}$$

$$\text{sen}(A_1\widehat{P}B_1) = \text{sen}(180^\circ - \widehat{C}) = \text{sen } \widehat{C}$$

$$\text{sen}(A_1\widehat{P}C_1) = \text{sen}(180^\circ - \widehat{B}) = \text{sen } \widehat{B}$$

Pois, pela proposição 6 da página 38, os quadriláteros AB_1PC_1 , BA_1PC_1 e CA_1PB_1 são inscritíveis. No triângulo B_1PC_1 temos através da equação (1.26),

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\text{sen}(B_1\widehat{P}C_1)} &= \frac{\overline{PC_1}}{\text{sen}(P\widehat{B}_1C_1)} \\ \frac{a_1}{\text{sen } \widehat{A}} &= \frac{\overline{PC_1}}{\text{sen}(P\widehat{B}_1C_1)} \\ a_1 &= \frac{\overline{PC_1}}{\text{sen}(P\widehat{B}_1C_1)} \cdot \text{sen } \widehat{A} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mas, por outro lado temos, pela definição 2 e pela equação (1.20) no triângulo APC_1 que $P\widehat{B}_1C_1 \equiv P\widehat{A}C_1$ e

$$\begin{aligned} \text{sen}(P\widehat{A}C_1) &= \frac{\overline{PC_1}}{\overline{AP}} \\ \overline{AP} &= \frac{\overline{PC_1}}{\text{sen}(P\widehat{A}C_1)} \\ \overline{AP} &= \frac{\overline{PC_1}}{\text{sen}(P\widehat{B}_1C_1)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11) obtemos,

$$a_1 = \overline{AP} \text{sen } \widehat{A} = \overline{AP} \cdot \frac{a}{2R} \quad (2.12)$$

Pois, $\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2R$ no triângulo ABC.

Com o mesmo raciocínio, obtemos,

$$b_1 = \overline{BP} \operatorname{sen} \widehat{B} = \overline{BP} \cdot \frac{b}{2R} \quad (2.13)$$

$$c_1 = \overline{CP} \operatorname{sen} \widehat{A} = \overline{CP} \cdot \frac{c}{2R} \quad (2.14)$$

Ora, $\triangle B_2PC_2 \sim \triangle BPC$, $\triangle A_2PC_2 \sim \triangle APC$ e $\triangle A_2PB_2 \sim \triangle APB$ logo temos,

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_2}{a} &= \frac{\overline{B_2P}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{C_2P}}{\overline{BP}} \\ \frac{b_2}{b} &= \frac{\overline{C_2P}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{A_2P}}{\overline{CP}} \\ \frac{c_2}{c} &= \frac{\overline{A_2P}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{B_2P}}{\overline{AP}} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Os triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são semelhantes, conforme a proposição 7 da página 40, então pela proposição 5 temos,

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \\ \frac{S_1}{S_2} &= \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 \\ \frac{S_1}{S_2} &= \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 \\ \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^3 &= \left(\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \\ \frac{S_1^3}{S_2^3} &= \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{a_2^2 b_2^2 c_2^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Porém, temos pela equação 1.30 que,

$$S_2 = \frac{a_2 b_2 c_2}{4R} \text{ e } S = \frac{abc}{4R}.$$

TEOREMAS DE EULER

Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{S_2}{S} &= \frac{\frac{a_2 b_2 c_2}{4R}}{\frac{abc}{4R}} \\
 &= \frac{a_2 b_2 c_2}{4R} \cdot \frac{4R}{abc} \\
 &= \frac{a_2 b_2 c_2}{abc}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Com todas estas relações obtidas, temos,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{S_1}{S}\right)^3 &= \frac{S_1^3}{S_2^3} \cdot \frac{S_2^3}{S^3} \\
 &= \frac{a_1^2 b_1^2 c_1^2}{a_2^2 b_2^2 c_2^2} \cdot \frac{a_2^3 b_2^3 c_2^3}{a^3 b^3 c^3} \\
 &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 \cdot \frac{\overline{AP}^2 \cdot \overline{BP}^2 \cdot \overline{CP}^2 \cdot a^2 b^2 c^2}{a^3 b^3 c^3} \cdot a_2 b_2 c_2 \\
 &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 \cdot \overline{AP}^2 \cdot \overline{BP}^2 \cdot \overline{CP}^2 \cdot \frac{\overline{B_2 P}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{C_2 P}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{A_2 P}}{\overline{BP}} \\
 &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CP} \cdot \overline{B_2 P} \cdot \overline{C_2 P} \cdot \overline{A_2 P}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Então, pelo teorema 4 da página 48 temos na equação (2.18)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{S_1}{S}\right)^3 &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 (\overline{AP} \cdot \overline{A_2 P})(\overline{BP} \cdot \overline{B_2 P})(\overline{CP} \cdot \overline{C_2 P}) \\
 &= \left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 |R^2 - d^2| \cdot |R^2 - d^2| \cdot |R^2 - d^2| \\
 &= \left(\frac{1}{4R^2} |R^2 - d^2|\right)^3 \\
 \frac{S_1}{S} &= \frac{1}{4R^2} |R^2 - d^2| \\
 S_1 &= \frac{S}{4} \left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

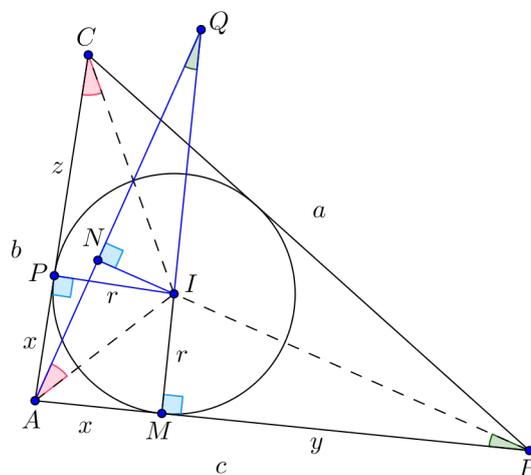
□

Observação 3. Se $d = R$, temos que a área do triângulo formado pelos pés das perpendiculares será igual a zero devido aos três vértices estarem sobre uma reta, conhecida como *Reta de Simson*.

2.6 Fórmula de Heron

Nesta seção, será descrito como Leonhard Euler demonstrou a fórmula (1.33) para cálculo de áreas de triângulos, conhecida como fórmula de Heron, na qual diz que a área S de um triângulo qualquer é $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo dado.

Figura 2.5: Fórmula de Heron



Fonte: Dunham [7], p.131

Demonstração. Dados um triângulo ABC e a circunferência inscrita de raio $\overline{IM} \equiv \overline{IP} = r$, com IA , IB e IC sendo bissetrizes onde,

TEOREMAS DE EULER

$$\left. \begin{aligned} I\widehat{AB} &= \frac{\alpha}{2} \\ I\widehat{BA} &= \frac{\beta}{2} \\ I\widehat{CA} &= \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Inicialmente, Euler prolongou BI e traçou uma perpendicular a BI passando por A , obteve o ponto N , depois prolongou IM e obteve o ponto $Q \in \overrightarrow{AN}$.

O ângulo $\angle AIN$ é externo ao triângulo AIB então,

$$A\widehat{IN} = I\widehat{BA} + I\widehat{AB} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}. \quad (2.21)$$

Ora, $\angle AIN$ e $\angle IAN$ são complementares,

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + I\widehat{AN} = 90^\circ. \quad (2.22)$$

Porém, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ no triângulo ABC , então

$$I\widehat{AN} = \frac{\gamma}{2} = I\widehat{CP} \quad (2.23)$$

Em seguida, percebeu que $\triangle IAN \sim \triangle ICP$, ou seja,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{IP}} = \frac{z}{r} \quad (2.24)$$

Ele também reparou que $\triangle QIN \sim \triangle QAM$ e $\triangle QAM \sim \triangle BAN$, então por transitividade $\triangle QIN \sim \triangle BAN$,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{IN}}{\overline{IQ}} \\ \frac{\overline{AN}}{\overline{IN}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{IQ}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25) obteve,

$$\begin{aligned}\frac{z}{r} &= \frac{\overline{AB}}{IQ} = \frac{x+y}{\overline{MQ}-r} \\ z(\overline{MQ}) - zr &= r(x+y) \\ z(\overline{MQ}) &= r(x+y+z) \\ z(\overline{MQ}) &= rp\end{aligned}\tag{2.26}$$

Onde p é o semiperímetro do triângulo ABC .

$\widehat{BIM} \equiv \widehat{NIQ}$ e $\widehat{IBM} = 90^\circ - \widehat{BIM} = 90^\circ - \widehat{NIQ} = \widehat{AQM}$, conseqüentemente $\triangle QAM \sim \triangle BIM$.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{BM}}{\overline{OM}} \\ \frac{\overline{MQ}}{x} &= \frac{y}{r} \\ \overline{MQ} &= \frac{xy}{r}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Tendo a equação (1.37) da seção 1.5 para cálculo da área do triângulo ABC , obteve

$$\begin{aligned}S = pr &= \sqrt{pr(pr)} \\ &= \sqrt{z(\overline{MQ})pr} \\ &= \sqrt{z\left(\frac{xy}{r}\right)pr} \\ &= \sqrt{pxyz}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Mas,

$$\left. \begin{aligned}x &= p - (y+z) = p - a \\ y &= p - (x+z) = p - b \\ z &= p - (x+y) = p - c.\end{aligned} \right\}\tag{2.29}$$

TEOREMAS DE EULER

Então, substituindo a equação (2.29) na equação (2.28), obteve

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

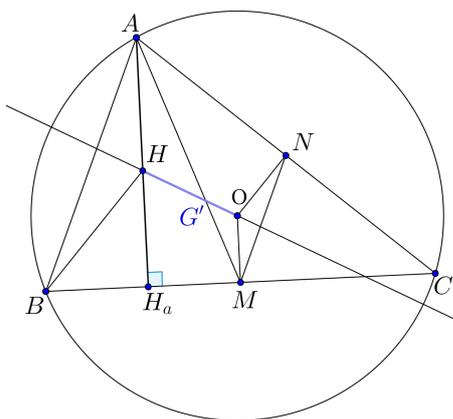
2.7 A reta de Euler

Teorema 5 (Reta de Euler). *Se O , G e H são respectivamente o circuncentro, o bari-centro e o ortocentro de um triângulo ABC , então:*

(a) $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}$, onde M é o ponto médio de \overline{BC} ;

(b) H, G e O são colineares, com $G \in HO$ e $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$

Figura 2.6: Reta de Euler



Fonte: Muniz Neto [2], p.170

Demonstração. (a) Se N é o ponto médio de AC então o teorema da base média nos dá $MN \parallel AB$ e $\overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Portanto, $\widehat{OMN} \equiv \widehat{HAB}$ e $\widehat{ONM} \equiv \widehat{HBA}$, de sorte que pelo caso AA, $\triangle OMN \sim \triangle HAB$ e, daí

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OM}}{\overline{AH}} &= \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \\ \overline{AH} &= 2 \cdot \overline{OM}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

(b) Se G' é o ponto de interseção dos segmentos AM e HO , então $\widehat{OG'M} \equiv \widehat{HG'A}$. Também, como $\overleftrightarrow{OM} \parallel \overleftrightarrow{AH}$, segue que $\widehat{OMG'} \equiv \widehat{HAG'}$. Portanto, o $\triangle MOG' \sim \triangle AHG'$ pelo caso AA e, daí

$$\frac{\overline{OG'}}{\overline{HG'}} = \frac{\overline{MG'}}{\overline{AG'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{AH}} = \frac{1}{2}, \quad (2.31)$$

Sendo G o baricentro do triângulo ABC , temos que, G e G' são pontos do segmento AM , segue da equação (2.31) que,

$$\frac{\overline{AG'}}{\overline{MG'}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{MG}}.$$

Então, pela proposição 1 devemos ter $G = G'$. □

Dizemos que \overleftrightarrow{HO} é a *Reta de Euler* e HO é a *Mediana de Euler* do triângulo ABC .

2.8 Círculo de Euler

Teorema 6 (Círculo de Euler⁴). *Em todo triângulo, o circuncentro do triângulo órtico coincide com o ponto médio da Mediana de Euler.*

Ademais, o círculo circunscrito ao triângulo órtico é também medial, passa pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro e tem raio igual à metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

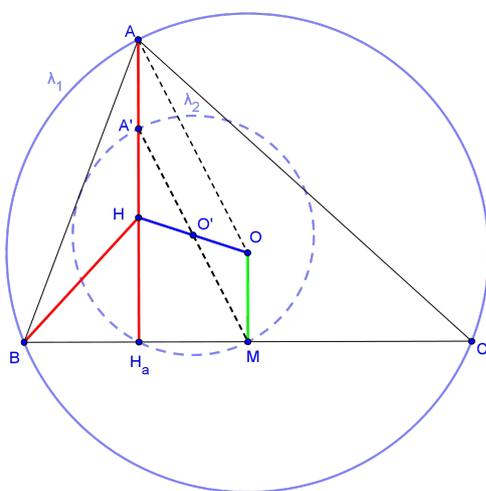
⁴também conhecido na literatura matemática como círculo dos nove pontos

TEOREMAS DE EULER

Definição 9. Dado um triângulo qualquer, chama-se triângulo órtico o triângulo cujos vértices são os pés das alturas referentes a cada um dos lados do triângulo dado.

Definição 10. Dado um triângulo qualquer, chama-se triângulo medial o triângulo cujos vértices são os pontos médios de cada um dos lados do triângulo dado.

Figura 2.7: Círculo de Euler



Fonte: Muniz Neto [2], p.171

Demonstração. Seja ABC um triângulo com circuncentro O e ortocentro H , tal que M é o ponto médio de BC , A' é o ponto médio de AH e R é o raio do círculo circunscrito a ABC . Como $AA' \parallel OM$ e, pelo teorema anterior, $\overline{AA'} \equiv \overline{OM}$, isto garante que o quadrilátero $AA'MO$ é um paralelogramo.

Portanto, $\overline{A'M} \equiv \overline{AO} = R$.

Por outro lado, como $A'H \parallel OM$ (também pelo teorema anterior $\overline{A'H} \equiv \overline{OM}$); segue novamente que o quadrilátero $A'HMO$ é um paralelogramo.

Portanto, suas diagonais cortam-se ao meio, de forma que sendo O' o ponto médio de HO concluimos que O' também é ponto médio de $A'M$.

Assim,

$$\overline{O'A'} \equiv \overline{O'M} \equiv \frac{\overline{A'M}}{2} = \frac{R}{2}$$

Sendo H_a o pé da altura relativa a BC , como em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa do triângulo, no $\triangle A'H_aM$, temos

$$\overline{O'H_a} \equiv \frac{\overline{A'M}}{2} = \frac{R}{2}.$$

Em particular, o círculo de centro O' e raio igual a $\frac{R}{2}$ passa por A' , M e H_a . Por fim, como o mesmo argumento é válido para os outros seis pontos em questão, nada mais há a fazer. □

2.9 Relação entre os cinco raios

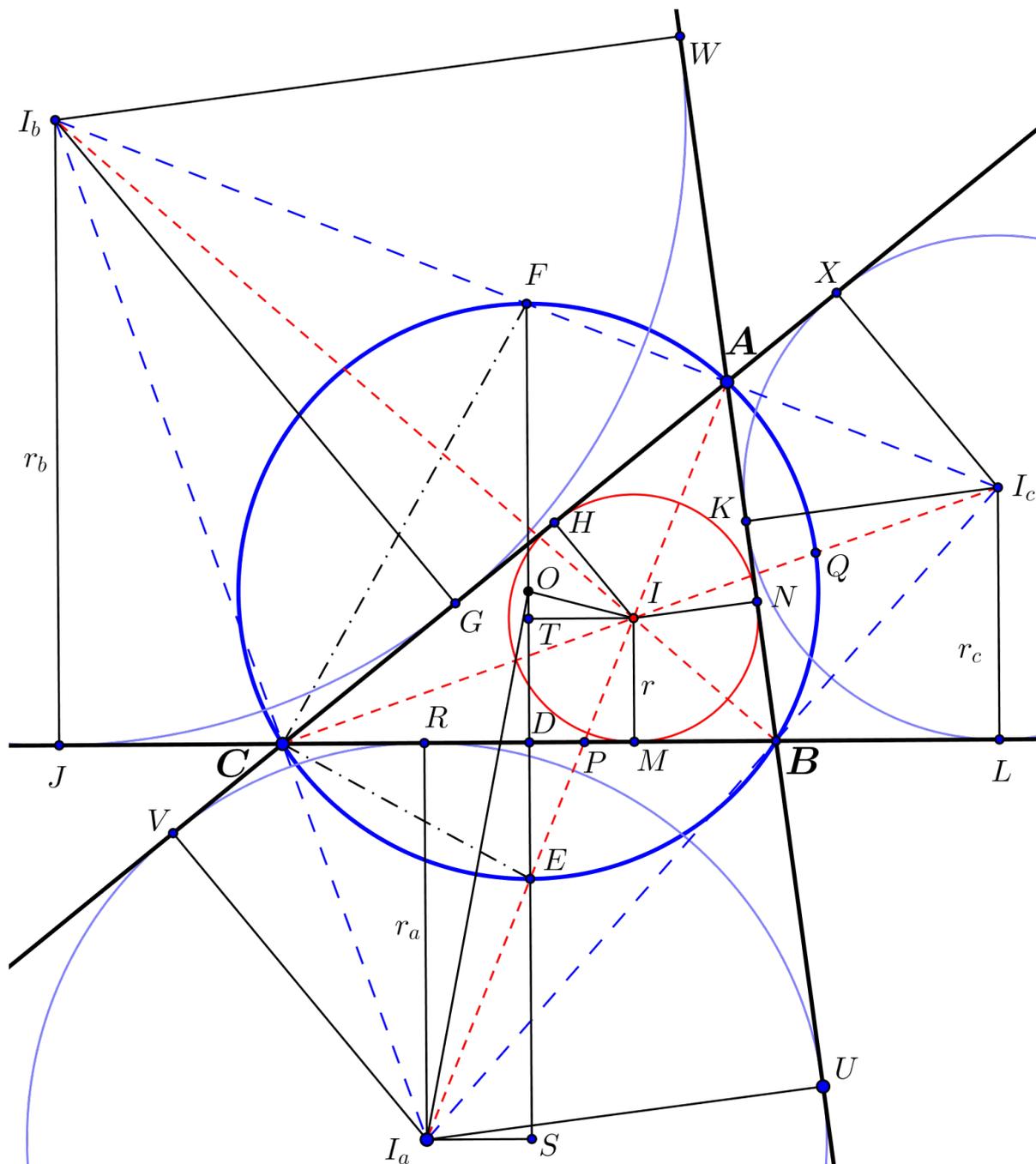
As demonstrações feitas nestas últimas duas seções, serão obtidas a partir da figura 2.8 abaixo. Serão obtidas expressões algébricas que dependem das medidas dos raios das circunferências relativas ao triângulo ABC , para depois serem utilizadas na obtenção da expressão referente à relação dos cinco raios e nas distâncias entre os centros das circunferências na seção seguinte.

As circunferências relativas ao triângulo ABC consistem na circunscrita, na inscrita e nas ex-inscritas relativas a cada um dos lados, com R sendo o raio da circunscrita, r o raio da inscrita e r_a , r_b , r_c os raios das ex-inscritas relativas aos lados a , b e c , respectivamente.

Com O sendo o centro da circunferência circunscrita, I o da inscrita e I_a , I_b e I_c os centros das ex-inscritas relativas aos lados a , b e c , respectivamente.

Dados o triângulo ABC , a circunferência inscrita de raio r e centro I temos, as

Figura 2.8: Relações entre os cinco raios



Fonte: Morgado [3], p.271

bissetrizes internas \vec{AI} , \vec{BI} e \vec{CI} ; e as externas I_aI_b , I_aI_c e I_bI_c .

$$\begin{aligned}\overline{CM} &= \overline{CH} = x \\ \overline{AH} &= \overline{AN} = y \\ \overline{BM} &= \overline{BN} = z \\ 2x + 2y + 2z &= 2p \\ x + y + z &= p.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Daí,

$$\left. \begin{aligned}x &= p - (z + y) = p - c \\ y &= p - (x + z) = p - a \\ z &= p - (x + y) = p - b.\end{aligned}\right\}\tag{2.33}$$

Dadas as circunferências ex-inscritas relativas aos lados do triângulo ABC temos,

$$\left. \begin{aligned}\overline{CR} &\equiv \overline{CV} \\ \overline{BR} &\equiv \overline{BU} \\ \overline{AV} &\equiv \overline{AU}.\end{aligned}\right\}\tag{2.34}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA} &= 2p \\ \overline{AC} + \overline{CR} + \overline{BR} + \overline{BA} &= 2p \\ \underbrace{\overline{AC} + \overline{CV}}_{\overline{AV}} + \underbrace{\overline{BU} + \overline{BA}}_{\overline{AU}} &= 2p.\end{aligned}$$

Mas de (2.34), $\overline{AV} \equiv \overline{AU}$, então

$$\begin{aligned}2\overline{AV} &= 2p \\ \overline{AV} &= p = \overline{AU}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

TEOREMAS DE EULER

Da mesma forma obtemos,

$$\overline{BW} = \overline{BJ} = p \quad (2.36)$$

$$\overline{CL} = \overline{CX} = p. \quad (2.37)$$

Ora,

$$\begin{aligned} \overline{CJ} &= \overline{BJ} - \overline{BC} \\ &= p - a = \overline{CG} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \overline{BL} &= \overline{CL} - \overline{CB} \\ &= p - a = \overline{BK} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Assim, temos de (2.38) e (2.39) que

$$\overline{CJ} = \overline{CG} = \overline{BL} = \overline{BK} = p - a \quad (2.40)$$

Usando o mesmo raciocínio, obtemos,

$$\overline{CV} = \overline{CR} = \overline{AX} = \overline{AK} = p - b \quad (2.41)$$

$$\overline{BR} = \overline{BU} = \overline{AW} = \overline{AG} = p - c. \quad (2.42)$$

Além disso, das equações (2.33) e (2.40), (2.41) e (2.42) vem,

$$\left. \begin{aligned} \overline{RM} &= \overline{CM} - \overline{CR} = (p - c) - (p - b) = b - c \\ \overline{KN} &= \overline{AN} - \overline{AK} = (p - a) - (p - b) = b - a \\ \overline{GH} &= \overline{CH} - \overline{CG} = (p - c) - (p - a) = a - c \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

e também,

$$\left. \begin{aligned} \overline{JR} &= \overline{JC} + \overline{CR} = (p - a) + (p - b) = 2p - (a + b) = c = \overline{VG} \\ \overline{HX} &= \overline{HA} + \overline{AX} = (p - a) + (p - b) = 2p - (a + b) = c \\ \overline{ML} &= \overline{MB} + \overline{BL} = (p - b) + (p - a) = 2p - (b + c) = c \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Da mesma forma, também obtemos,

$$\overline{RL} = \overline{UK} = \overline{WN} = \overline{MJ} = b \quad (2.45)$$

$$\overline{GX} = \overline{KW} = \overline{NU} = \overline{HV} = a. \quad (2.46)$$

Por conseguinte, pelas equações (2.35), (2.36), (2.37), (2.40), (2.41), (2.42), obtemos

$$\left. \begin{aligned} \overline{JL} &= \overline{JB} + \overline{BL} = p + (p - a) = 2p - a = b + c \\ \overline{VX} &= \overline{VA} + \overline{AX} = p + (p - b) = 2p - b = a + c \\ \overline{UW} &= \overline{UA} + \overline{AW} = p + (p - c) = 2p - a = a + b. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Com base em todas as equações obtidas e na figura 2.8, traçando uma perpendicular a BC passando por O temos que EF é diâmetro, logo D é ponto médio de BC . Das equações (2.36) e (2.37) temos no trapézio JLI_cI_b , $\overline{JB} = \overline{CL} = p$, logo D é ponto médio de JL e assim DF é base média do trapézio, então temos, pelo corolário 1.

$$\overline{DF} = \frac{r_b + r_c}{2} \quad (2.48)$$

Pela proposição 3,

$$\frac{\widehat{EB}}{2} = \widehat{BAE} = \widehat{EAC} = \widehat{EFC} = \frac{\widehat{EC}}{2},$$

pois AE é bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$.

Por outro lado CQ é bissetriz interna do ângulo $\angle ACB$ então, $\widehat{ECQ} = \frac{\widehat{EB}}{2} + \frac{\widehat{BQ}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2} + \frac{\widehat{AQ}}{2} = \widehat{EIC}$ pela proposição 4.

Então temos que o triângulo EIC é isósceles de base CI e portanto, $\overline{CE} \equiv \overline{EI}$. Ora, $TI \perp TS$, $I_aS \perp TS$ e das equações (2.33) e (2.41) temos $\overline{BM} \equiv \overline{CR}$. Por outro lado $I_a\widehat{ES} \equiv I\widehat{ET}$ e

$$\overline{CD} \equiv \overline{BD}$$

$$\overline{CR} + \overline{RD} \equiv \overline{BM} + \overline{MD}$$

$$\overline{RD} \equiv \overline{MD}$$

TEOREMAS DE EULER

então $\overline{I_a S} \equiv \overline{RD} \equiv \overline{MD} \equiv \overline{TI}$ e pelo caso LAA_o temos que $\triangle I_a ES \equiv \triangle IET$, portanto $\overline{IE} \equiv \overline{EI_a}$ e, conseqüentemente, o triângulo $EI_a C$ é isósceles de base CI_a .

Assim, $\overline{I_a E} \equiv \overline{EI} \equiv \overline{CE} \equiv \overline{EB}$, pois $\triangle DEC \equiv \triangle DEB$ pelo caso LAL .

Mas, $I_a \widehat{CE} \equiv E \widehat{I_a} C$ e $I \widehat{CE} \equiv E \widehat{IC}$, então temos

$$\left\{ \begin{array}{l} I_a \widehat{CE} + E \widehat{I_a} C = C \widehat{EI} \\ I \widehat{CE} + E \widehat{IC} = C \widehat{EI_a} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2I_a \widehat{CE} = C \widehat{EI} \\ 2I \widehat{CE} = C \widehat{EI_a} \end{array} \right.$$

Logo,

$$2I \widehat{CE} + 2I_a \widehat{CE} = C \widehat{EI} + C \widehat{EI_a}$$

$$2I \widehat{CE} + 2I_a \widehat{CE} = 180^\circ$$

$$I \widehat{CE} + I_a \widehat{CE} = 90^\circ$$

e assim temos que $I_a \widehat{CE}$ é complementar de $I \widehat{CE} \equiv E \widehat{IC}$ e $E \widehat{IC}$ é complementar de $E \widehat{I_a} C \equiv I \widehat{I_a} C$ então o triângulo $II_a C$ é retângulo em C .

$$\overline{BM} = \overline{BJ} - \overline{MJ} = p - b = \overline{VC} = \overline{CR} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{CR} = \overline{BM} \\ \overline{RD} = \overline{DM} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} C \widehat{IE} = E \widehat{CI} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \\ C \widehat{I_a} E = I_a \widehat{CE} \end{array} \right\} \Rightarrow EB = EC = EI = EI_a \quad (2.49)$$

$I_a I_b$ é bissetriz do ângulo $\angle BCV$, então

$$B \widehat{CV} + B \widehat{CA} = 180^\circ$$

$$\frac{B \widehat{CV}}{2} + \frac{B \widehat{CA}}{2} = 90^\circ$$

$$B \widehat{CI_a} + B \widehat{CI} = 90^\circ$$

Ou seja, o ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice de um triângulo, é um ângulo reto.

Ora, D é ponto médio de RM e E de II_a então, DE é mediana de Euler no trapézio I_aMIR de diagonais RM e I_aI , logo, temos pelo teorema 2,

$$\overline{DE} = \frac{r_a - r}{2}. \quad (2.50)$$

Porém, $\overline{DE} + \overline{DF} = 2R$, então pelas equações (2.48) e (2.50) obtemos,

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{r_b + r_c}{2} + \frac{r_a - r}{2} \\ 4R &= r_a + r_b + r_c - r \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.10 Distâncias entre os centros das circunferências

Utilizaremos as expressões obtidas na seção 2.9 para obtermos as expressões referentes às distâncias entre os centros das circunferências relativas ao triângulo ABC ,

2.10.1 Distância do incentro ao circuncentro

No triângulo OIE temos, pelo teorema 2,

$$\overline{OI}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{IE}^2 - 2\overline{OE} \cdot \overline{ET}. \quad (2.52)$$

Mas, $\triangle CEF \sim \triangle CDE$ pelo caso AA então com as razões de semelhaça e a equação (2.49) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{CE}}{\overline{EF}} \\ \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} &= \frac{\overline{CE}}{2R} \\ \overline{CE}^2 &= \overline{DE} \cdot 2R = \overline{IE}^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

TEOREMAS DE EULER

Tendo isso e o fato de $\overline{OE} = R$, substituindo (2.53) em (2.52) temos,

$$\begin{aligned}
 \overline{OI}^2 &= \overline{OE}^2 + \overline{IE}^2 - 2\overline{OE} \cdot \overline{ET} \\
 &= R^2 + \overline{DE} \cdot 2R - 2R \cdot \overline{ET} \\
 &= R^2 - 2R(\overline{ET} - \overline{DE}) \\
 &= R^2 - 2Rr \\
 \overline{OI} &= \sqrt{R^2 - 2Rr}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

2.10.2 Distância do circuncentro a um ex-incentro

Consideremos o triângulo OI_aE , temos então pelo teorema 2,

$$\begin{aligned}
 \overline{OI_a}^2 &= \overline{EI_a}^2 + \overline{OE}^2 + 2 \cdot \overline{OE} \cdot \overline{ES} \\
 &= \overline{EI_a}^2 + R^2 + 2R \cdot \overline{ES}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Porém, de (2.49) e (2.53) temos,

$$\overline{EI_a}^2 = \overline{CE}^2 = 2R \cdot \overline{ED} \tag{2.56}$$

Assim, substituindo (2.56) em (2.55),

$$\begin{aligned}
 \overline{OI_a}^2 &= 2R \cdot \overline{ED} + R^2 + 2R \cdot \overline{ES} \\
 &= R^2 + 2R(\overline{ED} + \overline{ES}) \\
 &= R^2 + 2Rr_a \\
 \overline{OI_a} &= \sqrt{R^2 + 2Rr_a}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Analogamente, obtém-se,

$$\overline{OI_b} = \sqrt{R^2 + 2Rr_b} \tag{2.58}$$

$$\overline{OI_c} = \sqrt{R^2 + 2Rr_c} \tag{2.59}$$

2.10.3 Distância do incentro a um ex-incentro

De (2.49) temos, $\overline{II_a} = \overline{EI_a} + \overline{IE} = \overline{CE} + \overline{CE} = 2\overline{CE}$ então,

$$\overline{II_a}^2 = 4\overline{CE}^2 \quad (2.60)$$

Substituindo (2.53) em (2.60) obtemos,

$$\overline{II_a}^2 = 4 \cdot 2R \cdot \overline{ED} \quad (2.61)$$

Mas, substituindo (2.50) em (2.61) vem,

$$\begin{aligned} \overline{II_a}^2 &= 4 \cdot 2R \left(\frac{r_a - r}{2} \right) \\ &= 4R(r_a - r) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \overline{II_a} &= \sqrt{4R(r_a - r)} \\ &= 2\sqrt{R(r_a - r)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Analogamente obtém-se,

$$\overline{II_b} = 2\sqrt{R(r_b - r)} \quad (2.64)$$

$$\overline{II_c} = 2\sqrt{R(r_c - r)} \quad (2.65)$$

2.10.4 Distância entre dois ex-incentros

Sabemos que $\widehat{ICE} \equiv \widehat{EIC}$, então temos que $I_c\widehat{IA} \equiv \widehat{EIC}$ (opostos pelo vértice), $\widehat{II_cA}$ é complementar de $I_c\widehat{IA}$ pois como sabemos as bissetrizes interna e externa do ângulo $\angle BAC$ formam um ângulo reto.

Mas, também \widehat{ICF} é complementar de \widehat{ICE} , pois o triângulo ECF é retângulo em C , já que um de seus lados é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

TEOREMAS DE EULER

Conseqüentemente temos que $I\widehat{C}F \equiv I\widehat{I}_cA$, portanto o triângulo I_cCF é isósceles e, além disso, como o triângulo I_cCI_b é retângulo em C , $\overline{FI}_c = \overline{CF} = \frac{\overline{I_bI}_c}{2}$, assim temos,

$$\overline{I_bI}_c = 2\overline{CF} \quad (2.66)$$

Por outro lado, o triângulo CEF é semelhante ao triângulo CDF então,

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}}$$

$$\frac{\overline{CF}}{2R} = \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}}$$

$$\overline{CF}^2 = 2R \cdot \overline{DF} \quad (2.67)$$

$$\overline{I_bI}_c^2 = 4\overline{CF}^2 = 4 \cdot 2R \cdot \overline{DF}. \quad (2.68)$$

Então, substituindo a equação (2.48) em (2.68) temos,

$$\overline{I_bI}_c^2 = 4 \cdot 2R \left(\frac{r_b + r_c}{2} \right)$$

$$\overline{I_bI}_c = \sqrt{4R(r_b + r_c)}$$

$$\overline{I_bI}_c = 2\sqrt{R(r_b + r_c)}. \quad (2.69)$$

Analogamente obtém-se,

$$\overline{I_aI}_b = 2\sqrt{R(r_a + r_b)} \quad (2.70)$$

$$\overline{I_aI}_c = 2\sqrt{R(r_a + r_c)}. \quad (2.71)$$

Questões Práticas

Questão 2.1. Demonstre que para qualquer partição de uma reta por um número finito V de pontos, a soma $V + A$ é ímpar.

Demonstração. Pela fórmula (2.1) temos $A - V = 1$, com V finito soma-se $2V$ a ambos os membros obtemos,

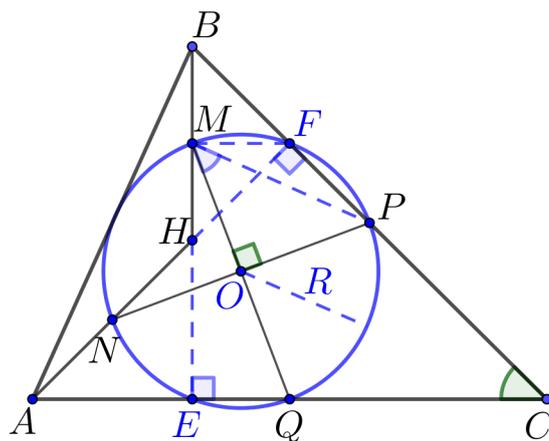
$$A - V + 2V = 1 + 2V$$

$$V + A = 2V + 1$$

Portanto, $V + A$ é ímpar. □

Questão 2.2. Dado um triângulo ABC com H sendo o ortocentro, sabendo que M é ponto médio de BH , N é ponto médio de AH , P é ponto médio de BC , Q é ponto médio de AC e $NP \perp MQ$. Calcule o $\angle ACB$.

Figura 2.9: Questão 2.2



Fonte: Rodríguez [13], p.358

Prolongando BH até o ponto $E \in AC$ e AH até $F \in BC$ observa-se que os pontos M , N , P e Q estão no círculo de nove pontos.

Ora, MP e NQ são diâmetros e o triângulo OMP é isósceles então

$$\widehat{OMP} \equiv \widehat{MPN} = \frac{\widehat{MN}}{2} = 45^\circ$$

$$\widehat{MFN} = \frac{\widehat{MN}}{2} = 45^\circ$$

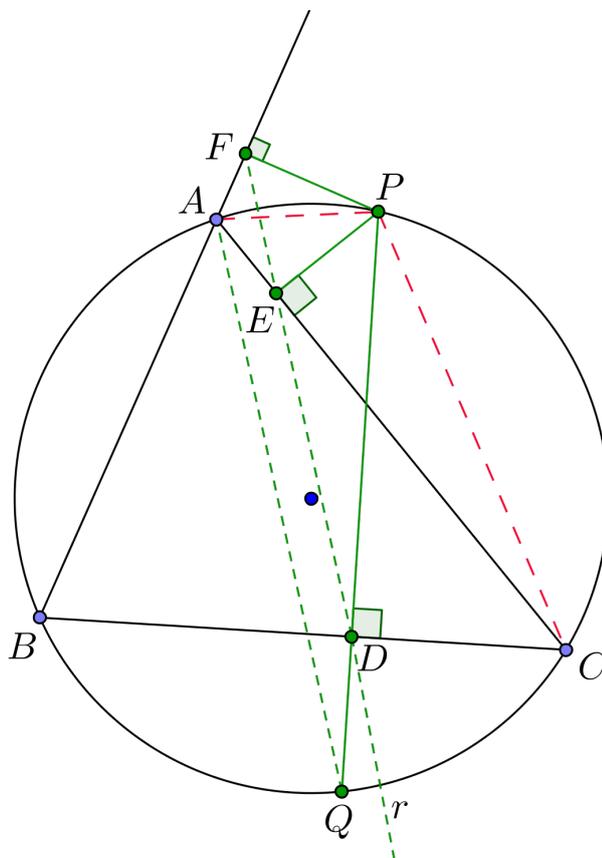
TEOREMAS DE EULER

logo, $\widehat{BFM} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Por outro lado M é ponto médio de BH assim temos no triângulo retângulo BFH que $\overline{BM} \equiv \overline{MH} \equiv \overline{FM}$.

Assim, $\widehat{MBF} = 45^\circ$ e portanto $\widehat{ACB} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Questão 2.3. Dado um triângulo ABC com círculo circunscrito Γ , sejam P um ponto situado sobre o arco \widehat{AC} de Γ que não contém o vértice B e D o pé da perpendicular baixada de P à reta suporte do lado BC . Se $Q \neq P$ é o outro ponto de interseção da reta \overleftrightarrow{DP} com o círculo Γ e r denota a reta de Simson-Wallace de P em relação a ABC , prove que $r \parallel \overleftrightarrow{AQ}$.

Figura 2.10: Questão 2.3



Fonte: O Autor

Demonstração. $\widehat{AQP} \equiv \widehat{ACP} \equiv \widehat{PCE} = \frac{\widehat{AP}}{2}$

O quadrilátero $AFPE$ é inscrito, pois

$$\widehat{PFA} \equiv \widehat{AEP} = 90^\circ$$

$\widehat{PAB} + \widehat{BCP} = 180^\circ$ já que $ABCP$ é inscrito

$$\widehat{APF} \equiv \widehat{AEF} \equiv \widehat{CED}$$

$$\widehat{PAB} = \widehat{APF} + 90^\circ = \widehat{CED} + 90^\circ = \widehat{PED}$$

$$\widehat{PAB} + \widehat{BCP} = \widehat{PED} + \widehat{DCP} = 180^\circ$$

Portanto o quadrilátero $CDEP$ é inscrito

Assim $\widehat{PDE} \equiv \widehat{PCE} \equiv \widehat{AQP}$, portanto $r \parallel \overleftrightarrow{AQ}$ □

Questão 2.4. Sejam ABC um triângulo com círculo circunscrito Γ , e P e P' pontos situados sobre o arco \widehat{AC} de Γ que não contém o ponto B . Se r e r' denotam, respectivamente, as retas de Simson-Wallace de P e P' em relação a ABC , prove que o ângulo entre r e r' é igual à metade da medida do arco $\widehat{PP'}$ de Γ que não contém o vértice A .

Demonstração. Usando o problema anterior,

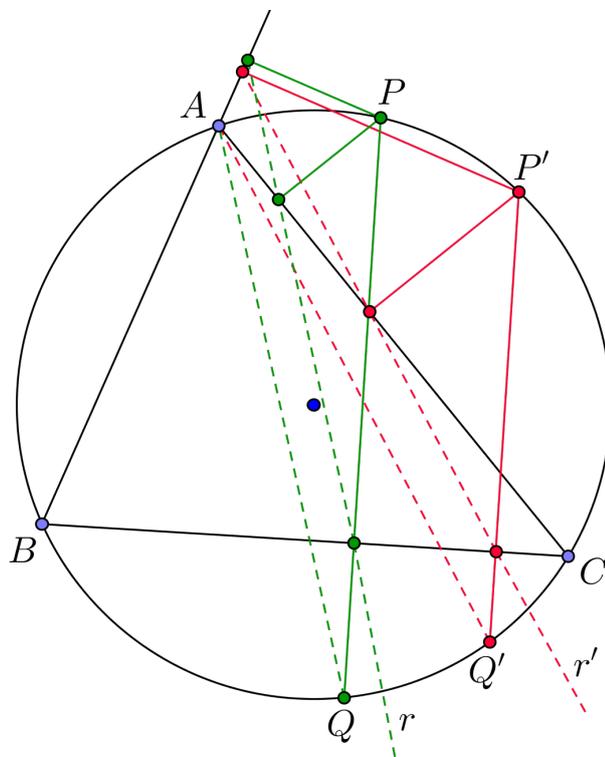
$r \parallel \overleftrightarrow{AQ}$ e $r' \parallel \overleftrightarrow{AQ'}$, logo o ângulo entre r e r' será igual ao ângulo $\widehat{QAQ'}$.

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{BQ} + \widehat{PC}}{2} &= \frac{\widehat{BQ'} + \widehat{P'C}}{2} \\ \frac{\widehat{BQ} + (\widehat{PP'} + \widehat{P'C})}{2} &= \frac{\widehat{P'C} + (\widehat{QQ'} + \widehat{BQ})}{2} \\ \widehat{BQ} + (\widehat{PP'} + \widehat{P'C}) &= \widehat{P'C} + (\widehat{QQ'} + \widehat{BQ}) \\ \widehat{PP'} &= \widehat{QQ'} \end{aligned}$$

TEOREMAS DE EULER

Figura 2.11: Questão 2.4



Fonte: O Autor

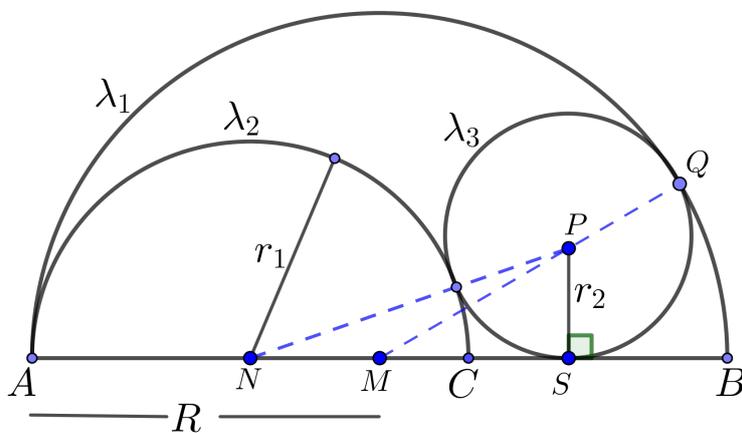
Portanto, $\widehat{QAQ} = \frac{\widehat{QQ'}}{2} = \frac{\widehat{PP'}}{2}$ □

Questão 2.5. Sejam λ_1 e λ_2 semicircunferências de raios R e r_1 , respectivamente. Sendo λ_3 uma circunferência de raio r_2 tangente às semicircunferências conforme a figura abaixo, calcule r_2 em função de R e r_1

Trançando os segmentos NP , MQ e PS sendo M , N e P os centros de λ_1 , λ_2 e λ_3 , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \overline{NP} &= r_1 + r_2 \\ \overline{MP} &= \overline{MQ} - \overline{PQ} \\ &= R - r_2 \end{aligned}$$

Figura 2.12: Questão 2.5



Fonte: Gallegos [4], p.325

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{MA} - \overline{NA} \\ &= R - r_1.\end{aligned}$$

No triângulo MNP , o semiperímetro é

$$\begin{aligned}p &= \frac{\overline{NP} + \overline{MN} + \overline{MP}}{2} \\ &= \frac{(r_1 + r_2) + (R - r_1) + (R - r_2)}{2} \\ &= \frac{2R}{2} \\ &= R.\end{aligned}$$

TEOREMAS DE EULER

Então, usando a fórmula (2.29) temos, no triângulo MNP ,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MN} \cdot \overline{PS}}{2} &= \sqrt{p(p - \overline{MN})(p - \overline{NP})(p - \overline{MP})} \\ \frac{(R - r_1)r_2}{2} &= \sqrt{R[R - (R - r_1)][R - (r_1 + r_2)][R - (R - r_2)]} \\ (R - r_1)r_2 &= 2\sqrt{Rr_1(R - r_1 - r_2)r_2} \\ (R - r_1)^2r_2^2 &= 4(Rr_1r_2(R - r_1 - r_2)) \\ (R - r_1)^2r_2 &= 4(Rr_1(R - r_1 - r_2)) \\ &= 4Rr_1(R - r_1) - 4Rr_1r_2 \\ (R - r_1)^2r_2 + 4Rr_1r_2 &= 4Rr_1(R - r_1) \\ [(R - r_1)^2 + 4Rr_1]r_2 &= 4Rr_1(R - r_1) \\ (R + r_1)^2r_2 &= 4Rr_1(R - r_1) \\ r_2 &= \frac{4Rr_1(R - r_1)}{(R + r_1)^2}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Construções geométricas I

Segundo Pitombeira e Roque ([10], pp.49-50), "a história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto [...] a matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.E.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides,[...] além de que Pitágoras teria introduzido um tipo de matemática abstrata na Grécia."

Com o desenvolvimento da geometria entre os gregos, ela foi usada na busca de soluções para problemas aritméticos e algébricos com a utilização de sistemas de medidas de comprimentos, áreas através de construções geométricas com régua e compasso das quais usando proporções se usavam medidas de comprimentos de segmentos conhecidos se obtinha áreas como soluções de problemas algébricos no desenvolvimento de expressões como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ por exemplo.

Porém, após sucessivos séculos de desenvolvimento em toda a geometria e álgebra nos séculos XVI e XVII surgem os nomes de René Descartes (1596 – 1650) e de Pierre de Fermat (1601 – 1665), dando início ao que hoje conhecemos como geometria analítica tendo, a partir daí, se adotado métodos algébricos na representação de curvas.

Conforme Pitombeira e Roque ([10], p. 196), "Na abertura do primeiro livro do Ge-

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS I

ometria, Descartes se refere às cinco operações básicas da aritmética, adição, subtração, divisão, multiplicação e radiciação, e mostra que estas operações correspondem a construções simples com régua e compasso."É a partir disso que técnicas de construções geométricas não são somente adotadas na obtenção de áreas como soluções aritméticas e algébricas a partir segmentos dados, disso a multiplicação de dois segmentos ab passa a ser interpretado como um outro segmento e não somente como área de um retângulo de comprimento a e largura b ."

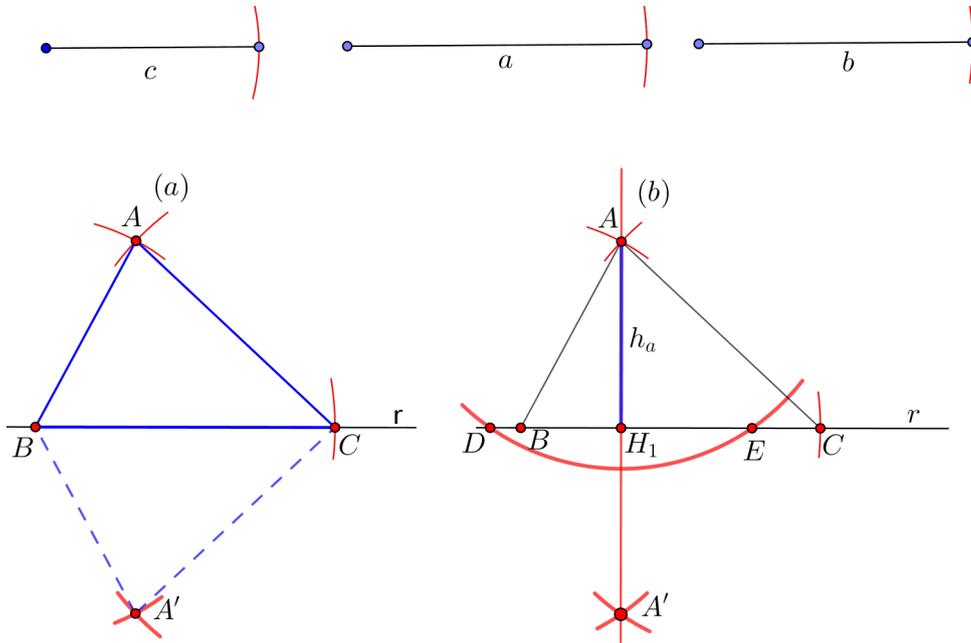
Este capítulo requer que se tenha conhecimento das construções geométricas elementares com régua e compasso como transportar ângulos e retas, traçar bissetrizes, paralelas e perpendiculares a uma reta dada, segmentos proporcionais entre outras que podem ser encontradas em Wagner ([8]).

Partindo de três segmentos dados correspondentes aos três lados de um triângulo qualquer serão obtidos os cinco raios correspondentes às circunferências, inscrita, circunscrita e as ex-inscritas relativas ao triângulo obtido, utilizando técnicas de construções geométricas com régua e compasso e os conceitos abordados nos capítulos 1 e 2, sendo que cada etapa sucessiva das construções se utiliza dos segmentos obtidos nas construções anteriores.

3.1 Construir o triângulo com os lados dados

- Sobre uma reta qualquer r , transporta-se o segmento de medida a obtendo os pontos B e C
- Com abertura igual a b fixa-se em C e gira o compasso
- Com abertura igual a c fixa-se em B e gira o compasso
- Obtemos os pontos A e seu simétrico em relação a reta suporte do lado a , o ponto

Figura 3.1: Triângulo ABC e alturas relativas



Fonte: O Autor

A'

- O $\triangle ABC$ é o triângulo pedido e o $\triangle A'BC$ é o seu simétrico conforme a figura 3.1 (a).

3.2 Alturas relativas aos lados do triângulo ABC

- Tendo obtido triângulo ABC da construção anterior
- Com abertura do compasso suficiente para intersectar a reta r , fixa-se em A e gira, obtendo os ponto D e E
- Com a mesma abertura fixa-se em D e gira no outro semiplano que não contém A

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS I

- Com a mesma abertura fixa-se em E e gira no outro semiplano que não contém A
- Obtemos o ponto A' e a reta $\overleftrightarrow{AA'}$ perpendicular ao lado a em H_1
- Assim temos $\overline{AH_1} = h_a$ como a altura relativa ao lado a conforme a figura 3.1 (b).
- Da mesma forma obtemos os segmentos h_b e h_c , alturas relativas aos lados b e c , respectivamente.

3.3 Raio R da circunferência circunscrita ao triângulo

ABC

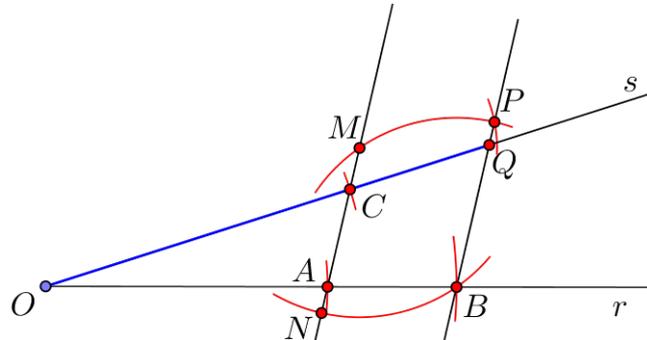
Sabemos que a área S de um triângulo pode ser dada por $S = \frac{abc}{4R}$ conforme a equação (1.30) onde R é o raio da circunferência circunscrita.

Ora,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{abc}{4R} \\ h_a &= \frac{bc}{2R} \\ \frac{h_a}{b} &= \frac{c}{2R} \end{aligned} \tag{3.1}$$

- De um ponto O qualquer, conforme a figura 3.2 traçam-se duas semirretas, r e s
- Transporta-se os segmentos b e h_a da figura 3.1 (b) para uma mesma semirreta
- Obtemos os pontos B e A , respectivamente
- Transporta-se o segmento c da figura 3.1 (b) para a outra semirreta, obtemos o ponto C

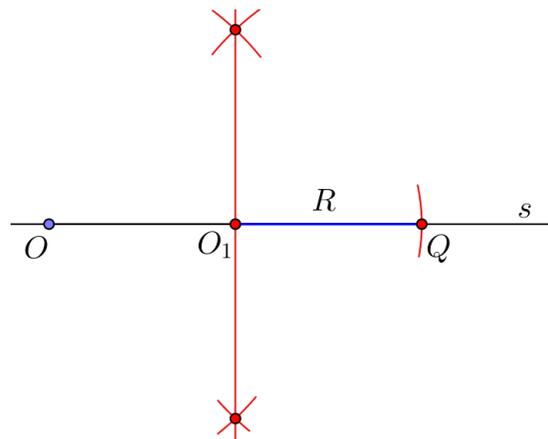
Figura 3.2: Diâmetro da circunferência circunscrita, $2R$



Fonte: O Autor

- Obtemos a reta \overleftrightarrow{AC}
- Traça-se uma paralela a \overleftrightarrow{AC} passando pelo ponto B
- Obtemos a reta \overleftrightarrow{BP} e o ponto Q pertencente a semirreta s
- Temos que $\overline{OQ} = 2R$

Figura 3.3: Raio da circunferência circunscrita R



Fonte: O Autor

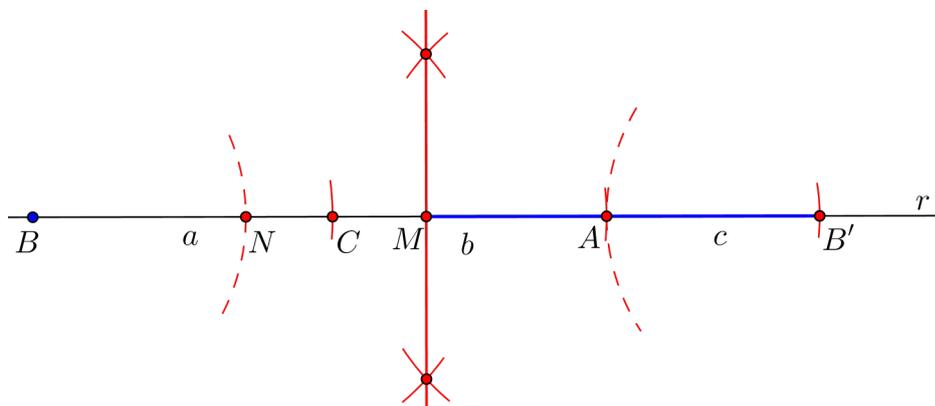
- Traçamos a mediatriz de \overline{OQ}

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS I

- Obtemos o ponto O_1 , ponto médio de OQ
- Temos $\overline{OO_1} = \overline{O_1Q} = R$, o segmento procurado

3.4 O semiperímetro do triângulo ABC

Figura 3.4: Semiperímetro do triângulo ABC



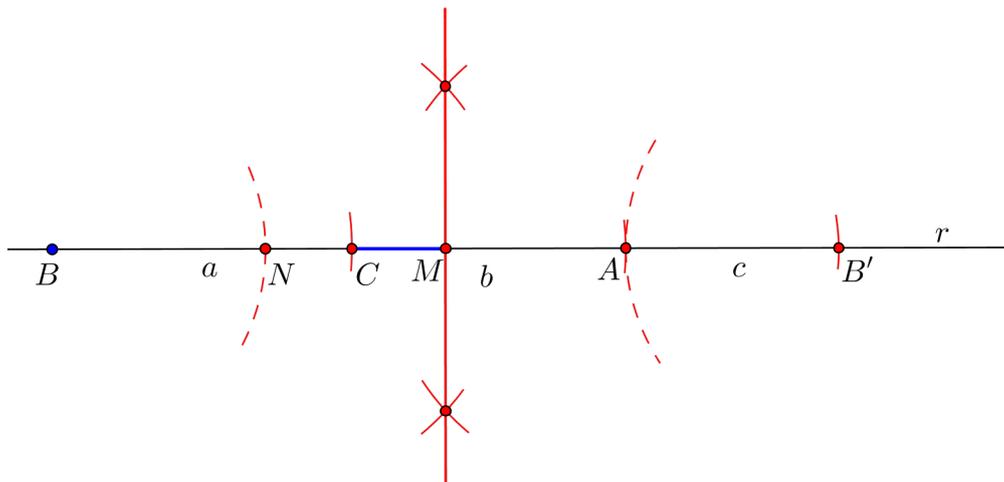
Fonte: O Autor

- Sobre uma reta r qualquer transportam-se os segmentos $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $\overline{AB'} = c$, da figura 3.1
- Obtemos o segmento $\overline{BB'} = 2p$
- Se o semiperímetro não superar a abertura máxima do compasso traçamos a mediatriz do segmento $2p$
- Obtemos o ponto M , o ponto médio de BB'
- Assim $\overline{BM} = \overline{MB'} = p$ (semiperímetro)

- Caso $2p$ supere a abertura máxima do compasso como se supôs nessa construção, aproximamos do centro os pontos extremos do segmento com uma abertura fixa, dos extremos para o centro
- Na figura 3.4 usou-se uma abertura igual a c obtemos o segmento \overline{NA} menor que a abertura máxima do compasso
- Depois procede-se como descrito anteriormente, traçando a sua mediatriz

3.5 Segmentos $p - a$ e $p - c$

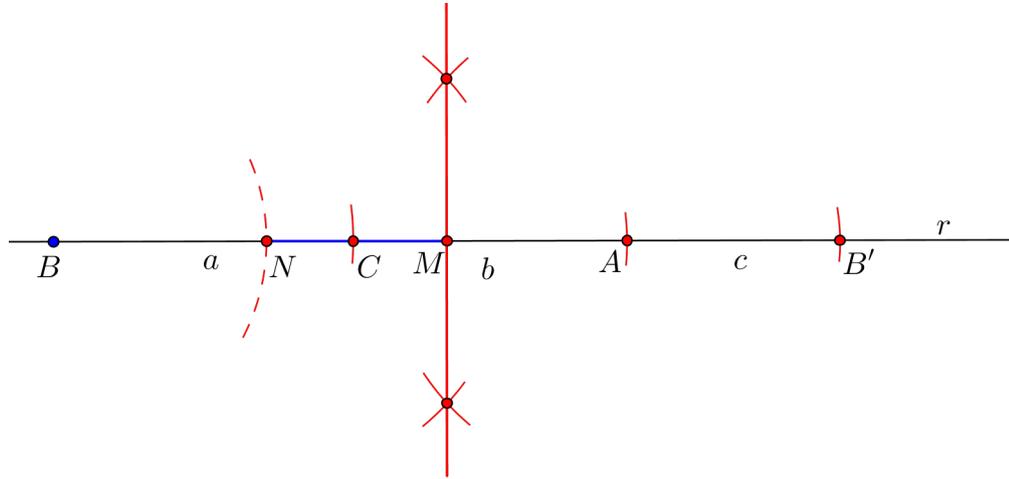
Figura 3.5: Obtenção do segmento $p - a$



Fonte: O Autor

- Aproveitando a construção anterior, temos $\overline{BM} = p$
- $\overline{BC} = a$
- Logo, $\overline{CM} = p - a$

Figura 3.6: Obtenção do segmento $p - c$



Fonte: O Autor

- Aproveitando a construção anterior temos $\overline{BM} = p$
- $\overline{BN} = c$
- Logo, $\overline{NM} = p - c$

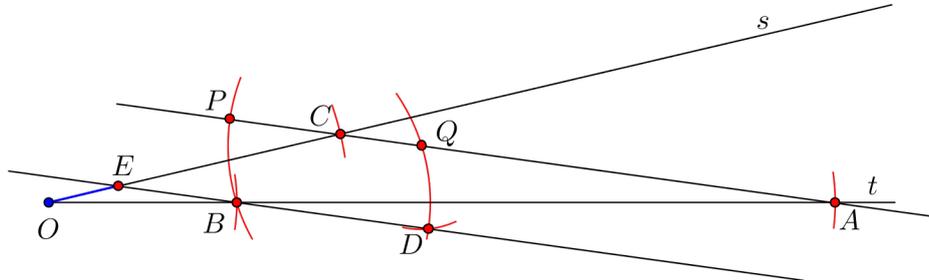
3.6 Raio r da circunferência inscrita

Sabemos que conforme a equação (1.37) a área S de um triângulo dado ABC é dada por $S = p \cdot r$, onde r é o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC e p é o seu semiperímetro.

Ora,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}a \cdot h_a = p \cdot r \\
 \frac{h_a}{p} &= \frac{2r}{a} \\
 \frac{h_a}{2p} &= \frac{r}{a}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Figura 3.7: Obtenção do raio r da circunferência inscrita



Fonte: O Autor

- De um ponto O qualquer, traçam-se duas semirretas, s e t
- Transporta-se os segmentos $2p$ e h_a da figura 3.5 para a mesma semirreta
- Obtemos os pontos A e B , respectivamente
- Transporta-se o segmento a para a outra semirreta
- Obtemos o ponto C e conseqüentemente a reta \overleftrightarrow{AC}
- Traçamos uma reta paralela à reta \overleftrightarrow{AC} passando pelo ponto B
- Obtemos o ponto E e a reta \overleftrightarrow{DE}
- Temos $\overline{OE} = r$

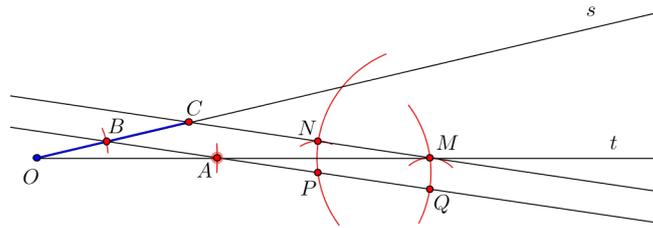
3.7 Raios r_a e r_c das circunferências ex-inscritas

Sabemos que de acordo com a equação (1.34) a área S de um triângulo dado ABC é dada por $S = r_a(p - a)$, onde r_a é o raio da circunferência ex-inscrita relativa ao lado

- Temos $\overline{OC} = r_a$

Da mesma forma temos que $\frac{r_c}{r} = \frac{p}{p-c}$, usando os mesmos procedimentos utilizados para obter o segmento r_a temos, ao substituir $p-a$ por $p-c$:

Figura 3.9: Raio r_c da circunferência ex-inscrita



Fonte: O Autor

- Sendo $p-c = \overline{OA}$
- Obtemos o segmento $\overline{OC} = r_c$

Observação 4. O quinto raio r_b pode ser encontrado pelo mesmo raciocínio utilizado na obtenção de r_a e r_c , mas será deixado para o capítulo seguinte no qual será utilizado as fórmulas de Euler presentes na seção 2.9.

Capítulo 4

Construções geométricas II

Partindo de segmentos referentes aos raios obtidos no capítulo anterior, neste obteremos através das construções geométricas o quinto raio e os segmentos correspondentes às distâncias entre os centros com auxílio das expressões algébricas abordadas nas seções 2.9 e 2.10 e algumas do capítulo 1.

4.1 Obtendo o raio r_b

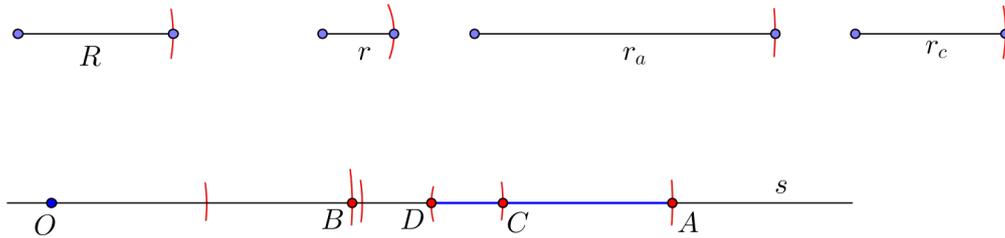
Considerando os quatro segmentos correspondentes raios R , r , r_a e r_c encontrados no capítulo anterior, temos para encontrar o quinto raio restante,

Pela equação (2.51) sabemos que entre os 5 raios vale a relação,

$$\begin{aligned}4R &= r_a + r_b + r_c - r \\4R &= (r_a + r_c - r) + r_b\end{aligned}\tag{4.1}$$

- Sobre uma reta qualquer s , transporta-se o segmento R até obtermos o ponto A com $\overline{OA} = 4R$
- Fixando-se em O , transportamos o segmento r_a obtendo o ponto B

Figura 4.1: Raio r_b da circunferência ex-inscrita



Fonte: O Autor

- Fixando-se em B , transportamos o segmento r_c obtendo o ponto C
- Fixando-se em C , transportamos o segmento r obtendo o ponto D
- Logo temos que $\overline{OD} = r_a + r_c - r$
- Portanto, $\overline{DA} = r_b$

4.2 Distância do incentro ao circuncentro

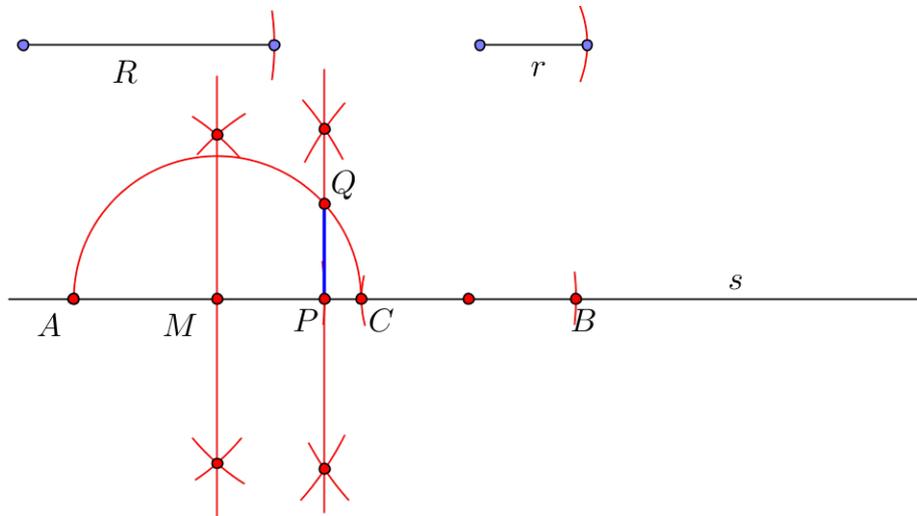
Conhecendo os segmentos correspondentes ao raio R da circunferência circunscrita e r da inscrita num triângulo qualquer, temos pelas equações (2.54) e com base na equação (1.17) para obter a distância do circuncentro O ao incentro I ,

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr} = \sqrt{R(R - 2r)}. \quad (4.2)$$

- Sobre uma reta qualquer s , transportamos o segmento R duas vezes obtemos o ponto P e o segmento $\overline{AB} = 2R$
- $\overline{AP} = \overline{PB} = R$
- Fixa-se em B e transporta-se duas vezes o segmento r para o segmento AB obtendo o ponto C

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS II

Figura 4.2: Distância \overline{OI}



Fonte: O Autor

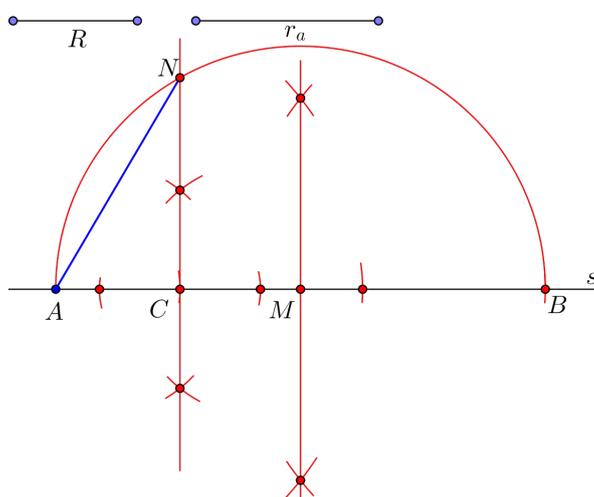
- $\overline{BC} = 2r$
- Então $\overline{PC} = R - 2r$
- Traçamos a mediatriz de AP obtendo o ponto M
- Com abertura \overline{AM} fixamos em M e traçamos uma semicircunferência
- Traçamos uma perpendicular a AC passando por P
- Obtemos o ponto Q
- Logo \overline{PQ} é a distância procurada
- $\overline{PQ} = \overline{OI}$

4.3 Distância do circuncentro a um ex-incentro

Conhecendo os raios R e r_a temos, pelas equações (2.57) e (1.13) que a distância do circuncentro ao ex-incentro relativo ao lado A é dado por,

$$\overline{OI_a} = \sqrt{R^2 + 2Rr_a} = \sqrt{R(R + 2r_a)}. \quad (4.3)$$

Figura 4.3: Distância $\overline{OI_a}$



Fonte: O Autor

- Sobre uma reta qualquer s , fixamos num ponto A e transportamos o segmento R
- Obtemos o ponto C
- Fixando em C transportamos $2r_a$ obtendo o ponto B
- Temos $\overline{AC} = R$ e $\overline{CB} = 2r_a$ logo $\overline{AB} = R + 2r_a$
- Traçamos a mediatriz do segmento AB e obtemos o ponto M
- Fixando em M traçamos a semicircunferência de raio \overline{AM}

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS II

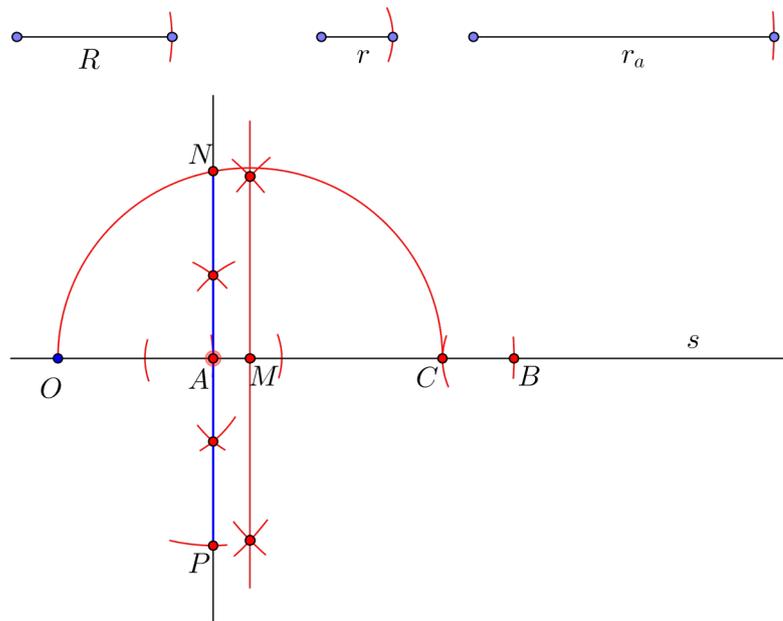
- Traçamos uma perpendicular à AM passanso pelo ponto C
- Obtemos o ponto N sobre a semicircunferência
- Então $\overline{AN} = \overline{OI_a}$

4.4 Distância do incentro a um ex-incentro

Dados os raios R , r e r_a de um triângulo qualquer temos pelas equações (2.63) e (1.17) que a distância $\overline{II_a}$ é dada por,

$$\overline{II_a} = 2\sqrt{R(r_a - r)}. \quad (4.4)$$

Figura 4.4: Distância $\overline{II_a}$



Fonte: O Autor

- Sobre uma reta qualquer s , fixamos num ponto O e transportamos o segmento R
- Obtemos o ponto A

- Fixamos em A e transportamos o segmento r_a
- Obtemos o ponto B
- Fixamos em B e transportamos o segmento r para o interior do segmento AB
- Obtemos o ponto C
- Temos $\overline{OA} = R$ e $\overline{AC} = r_a - r$
- Traçamos a mediatriz do segmento OC obtendo o ponto M
- Fixando em M e com raio \overline{OM} traçamos uma semicircunferência
- Traçamos uma perpendicular a OM passando por A
- Obtemos o ponto N sobre a semicircunferência
- Sobre a reta \overleftrightarrow{AN} , duplicamos o segmento AN
- Obtemos o ponto P
- Temos que $\overline{I_a} = \overline{NP}$

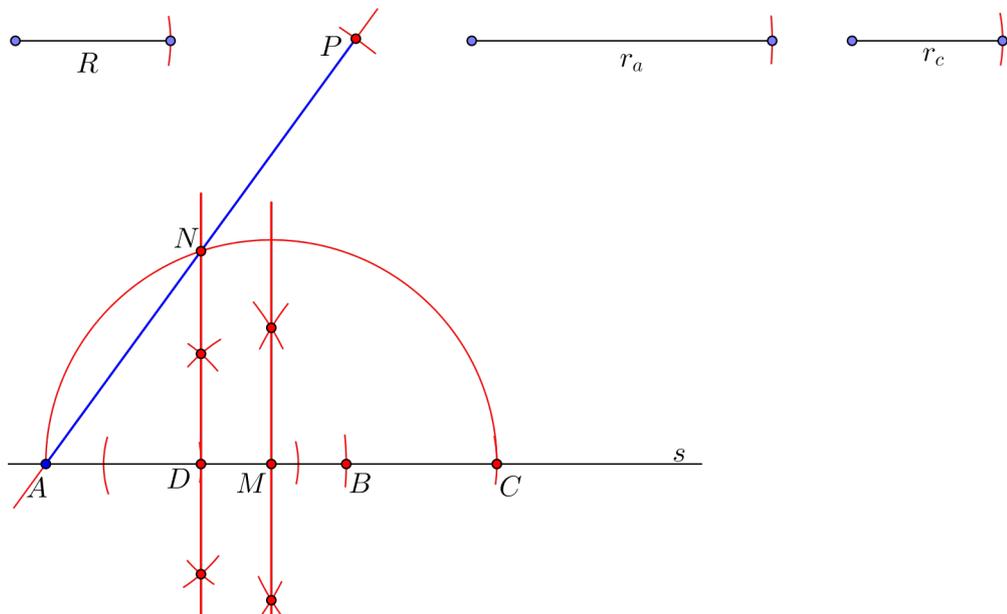
4.5 Distância entre dois ex-incentros

Para finalizar, sejam R o raio da circunferências circunscrita, r_a o raio da ex-inscrita relativa a a e r_c da ex-inscrita relativa a c , de um triângulo qualquer, temos pelas equações (2.69) e (1.13) que a distância entre os ex-incentros I_a e I_c é dada por,

$$\overline{I_a I_c} = 2\sqrt{R(r_a + r_c)}. \quad (4.5)$$

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS II

Figura 4.5: Distância $\overline{I_a I_c}$



Fonte: O Autor

- Sobre uma reta qualquer s , fixamos num ponto A e transportamos o segmento r_a obtendo o ponto B
- Fixando em B , transportamos o segmento r_c obtendo o ponto C
- Fixando em A , transportamos o segmento R obtendo o ponto D
- Temos $\overline{AD} = R$ e $\overline{AC} = r_a + r_c$
- Traçamos a mediatriz do segmento AC , obtendo o ponto M
- Fixando em M e com raio \overline{AM} traçamos uma semicircunferência
- Traçamos uma perpendicular a AM passando pelo ponto D
- Obtemos o ponto N sobre a semicircunferência
- Sobre a reta \overleftrightarrow{AN} fixamos em N e duplicamos o segmento AN

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS II

- Obtemos o ponto P
- Temos que $\overline{I_a I_c} = \overline{AP}$

Conclusão

Tendo cursado todo o ensino básico e superior em instituições públicas procurei ao longo deste trabalho compartilhar parte do meu conhecimento adquirido ao longo da vida estudantil. Observei durante minha estadia no ensino médio o matemático Leonhard Euler raramente era referenciado pela maioria dos docentes, tendo isso como uma das inspirações para o desenvolvimento deste trabalho, procurei fazer, com este trabalho, como um complemento específico para primeiro ano do ensino médio referente a presença dele na geometria plana.

Infelizmente ao longo dos últimos trinta anos também reparei que, ao mesmo tempo em que a tecnologia evoluiu com a inclusão de recursos computacionais em todas as áreas, veio junto um excesso de comodismo no qual a cada nova geração todos sempre querem tudo pronto sem ter que fazer nenhum esforço mental.

Isso me levou a incluir, além das partes teóricas, um pouco de dinâmica com construções geométricas utilizando régua e compasso dada a sua enorme importância ao longo da história da matemática. Lembrando que os métodos descritos nas construções geométricas não são únicos, há vários outros métodos de obtenção dos segmentos, porém procurei fazer com utilização de expressões obtidas nos capítulos anteriores donde na maioria das construções utilizei construções auxiliares baseadas nas seções 1.5 e 1.2.

Conclui para os que atuam com a matemática, seja como pesquisadores ou docentes, jamais devem se render ao comodismo através de uso excessivo de tecnologias achando

que não deve mais estudar algum tópico ou autor matemático simplesmente por estar graduado ou atuando na área matemática, sempre se deve constantemente procurar saber os princípios do desenvolvimento matemático, conhecendo os autores de fórmulas que nos dão prontas no ensino básico e como elas foram desenvolvidas ao longo da história da humanidade.

Isso significa para mim que no mínimo, qualquer docente da área matemática do ensino básico tem obrigação de ler todo o livro que sua escola utiliza como complemento didático do ano letivo no qual atua e jamais ficar preso as decorebas nas quais se lê e repassa para os seus alunos somente fórmulas descritas nos conteúdos e exercícios resolvidos dos livros utilizados em suas escolas sem jamais procurar raciocinar o desenvolvimento de suas obtenções, ou saber o significado de tal resolução, ou ainda quando erros são encontrados não saberem corrigi-los.

Referências Bibliográficas

- [1] **BARBOSA, João Lucas Marques.** Geometria Euclidiana Plana. 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção do professor de Matemática)
- [2] **MUNIZ NETO, Antônio Caminha.** Geometria. Rio de Janeiro: SBM , 2013. (Coleção PROFMAT)
- [3] **MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo; MIGUEL, Jorge.** Geometria II. 4.ed. Fortaleza: VestSeller 2008.
- [4] **GALLEGOS, Fernando A..** Geometría Teoría y Práctica. Lima, Peru: San Marcos, 2003.
- [5] **SHASHKIN, Yu..** Característica Euleriana. URSS: MIR Moscú,1989. (traducido del ruso por B. Mirchevski)
- [6] **SHARIGUIN, I..** Problemas de geometría planimetría. URSS: MIR Moscú,1989. (traducido del ruso por G. Lozhkin)
- [7] **DUNHAM, William .** Euler The Master of Us All, USA: The Mathematical Association of America, 1999.
- [8] **WAGNER, Eduardo.** Construções Geométricas. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM , 2013. (Coleção do professor de Matemática)

- [9] **EVES, Howard**. Introdução à história da matemática. Tradução Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [10] **PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins**. Tópicos de história da matemática. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM , 2012. (Coleção PROFMAT)
- [11] **SERRÃO, Alberto Nunes**. Exercícios e problemas de geometria no plano. Parte A. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1964.
- [12] **SERRÃO, Alberto Nunes**. Exercícios e problemas de geometria no plano. Parte B. Rio de Janeiro: Ao livro técnico, 1966.
- [13] **RODRÍGUEZ, Ernesto Quispe; CABALLERO, Luis Ubaldo**. Problemas de geometría y cómo resolverlos.1.ed. Lima: Racso editores, 2000. (Colección Racso)