UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Triângulos aritméticos

Darlene Dias da Silva Mendes

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Darlene Dias da Silva Mendes

Triângulos aritméticos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
Dezembro de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M538t Mendes, D. D. S., Darlene Dias da Silva Mendes
Triângulos aritméticos / Darlene Dias da Silva Mendes Mendes, D. D. S.; orientador Hermano de Souza Ribeiro Ribeiro, H. S.. -- São Carlos, 2021.
141 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Números binomiais. 2. Triângulo aritmético de Pascal. 3. Números de Euler. 4. Números de Stirling. 5. Números de Bernoulli. I. Ribeiro, H. S., Hermano de Souza Ribeiro, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Darlene Dias da Silva Mendes

Arithmetic triangles

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

USP – São Carlos
December 2021

Dedico este trabalho ao meu esposo Rafael e minhas filhas Lídia e Júlia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, pela saúde e todas as oportunidades recebidas.
Meus agradecimentos:
À Sociedade Brasileira de Matemática e à USP, pelo oferecimento deste importante programa de mestrado, o PROFMAT, que me proporcionou a realização de um sonho.
Aos professores do PROFMAT, que tiveram paciência e disposição, especialmente à professora Ires Dias pelo acolhimento e carinho com nossa turma.
À equipe da secretaria de pós-graduação, pela competência e presteza no atendimento.
Aos colegas pelo carinho e companheirismo, nos dias tensos e nos dias felizes.
Agradeço especialmente, ao meu orientador, professor Dr. Hermano de Souza Ribeiro, pela paciência, competência e disponibilidade na orientação deste trabalho, desde a escolha do tema até o final da dissertação.

Ser humilde com os superiores é obrigação, com os colegas é cortesia, com os inferiores é nobreza.

Benjamin Franklin.

RESUMO

MENDES,D.D.S. **Triângulos aritméticos**. 2021. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Esta dissertação apresenta um estudo sobre os números binomiais e os triângulos artméticos como o triângulo de Pascal, triângulo harmônico de Leibniz, triângulo euleriano e outros. É um estudo das propriedades e curiosidades desses triângulos, que geralmente não são estudados no ensino médio. Sendo assim pode ser utilizado pelos docentes para aprofundar seus conhecimentos nesse assunto, bem como incentivar os alunos à busca de conhecimentos que vão além da sala de aula.

Palavras-chave: Números binomiais, triângulo de Pascal, Leibniz, Euler, Bernoulli.

ABSTRACT

MENDES,D.D.S. **Arithmetic triangles**. 2021. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

This dissertation presents a study on binomial numbers and arithmetic triangles such as Pascal's triangle, Leibniz's harmonic triangle, the Eulerian triangle and others. It is a study of the properties and curiosities of these triangles, which are not usually studied in high school. Therefore, it can be used by teachers to deepen their knowledge on this subject, as well as encourage students to seek knowledge that goes beyond the classroom.

Keywords: binomial number, Pascal's triangle, Leibniz, Euler, Bernoulli.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre os números binomiais, o triângulo de Pascal e outros triângulos aritméticos, que são alguns dos itens inseridos no conteúdo Análise combinatória do Ensino Médio. O texto apresenta as propriedades dos números binomiais com as demonstrações matemáticas correspondentes.

O capítulo 2 introduz os números binomiais e as suas propriedades fundamentais. E além disso apresenta a relação dos números binomiais com as progressões aritméticas.

O capítulo 3, apresenta o triângulo de Pascal o qual é construído pelos números binomiais e são estudadas algumas figuras geométricas contidas no triângulo de Pascal como a flor de Pascal, a estrela de Davi e o moinho de vento. A relação entre o triângulo de Pascal e a trigonometria também é abordada no capítulo.

O capítulo 4 é um breve estudo do triângulo aritmético harmônico bem como a sua relação com o triângulo de Pascal.

O capítulo 5 introduz os números de Euler os quais aparecem como pesos em somas ponderadas de números binomiais cujos resultados são quadrados perfeitos ou cubos perfeitos de números naturais.

O capítulo 6 traz o estudo dos números de Stirling de primeira e segunda espécies e os respectivos triângulos aritméticos de Stirling.

O capítulo 7 apresenta os números de Bernoulli e a soma das potências dos primeiros números naturais.

CAPÍTULO

2

NÚMEROS BINOMIAIS

2.1 Definição

O número binomial $\binom{n}{k}$, para cada número inteiro não negativo $n \in \{0,1,2,3,...\}$ e para cada número inteiro $k \in \mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$, é definido se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $k = 0,1,2,3,...,$ como o número de todas as sequências binárias de n termos dos quais k termos são iguais ao dígito 1 e $(n-k)$ termos são iguais ao dígito 0 e é definido igual a zero se $n = 0,1,2,3,...$ e $k = -1,-2,-3,...$; o número binomial $\binom{0}{0}$ é definido igual a um e o número binomial $\binom{0}{k}$ é definido igual a zero para cada número inteiro k diferente de zero.

Exemplos:

Cálculo de $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$: as duas sequências binárias de 1 termo são (0) e (1).

Cálculo de $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$: as quatro sequências binárias de 2 termos são (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

Cálculo de $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$: as oito sequências binárias de 3 termos são (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).

Cálculo de $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{4}{4} = 1$: é desnecessário listar todas as sequências de 4 termos. É preferível indicar as posições dos dígitos 1 ou dos dígitos 0 nas sequências.

As sequências de 4 termos com um único termo igual ao dígito 1 tem o dígito 1 nas posições 1, 2, 3 e 4 enquanto que as sequências binárias de 4 termos com 2 termos iguais ao dígito 1 tem o dígito 1 nas posições (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) e (3,4); e as sequências de 4 termos com 3 termos iguais ao dígito 1 tem o 0 nas posições 1, 2, 3 e 4.

Cálculo de $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 5, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 1.$

As sequências binárias de 5 termos com um único termo igual ao dígito 1 tem o dígito 1 nas posições 1, 2, 3, 4, e 5 enquanto que as sequências binárias de 5 termos com 4 termos iguais ao dígito 1 tem o dígito 0 nas posições 1, 2, 3, 4 e 5.

As sequências de 5 termos com dois termos iguais ao dígito 1 tem os dígitos 1 nas posições (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5) e (4,5) enquanto que as sequências binárias de 5 termos com 3 termos iguais ao dígito 1 tem os dois dígitos 0 nas posições (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5) e (4,5).

Os números binomiais não nulos são apresentados no formato triangular conhecido como triângulo de Pascal-Tartaglia:

$\binom{0}{0} = 1$

$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$

$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$

$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$

$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$

$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$

....

2.2 Propriedades

1- Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = \binom{n}{n+3} = ... = 0.$$

devido a impossibilidade de uma sequência binária de n termos exibir um número de termos iguais ao dígito 1 superior ao número de termos da sequência.

2- Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

pelo fato de existir uma única sequência binária de n termos com todos os termos iguais ao dígito 0 ou com todos os termos iguais ao dígito 1.

3- Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

pois existem n sequências binárias de n termos com um único termo igual ao dígito 1 a saber (1 0 0....0 0), (0 1 0....0 0), (0 0 1....0 0), ... (0 0 0....1 0), (0 0 0....0 1) e existem n sequências binárias de n termos com um único termo igual ao dígito zero, a saber (0 1 1....1 1), (1 0 1....1 1), (1 1 0....1 1), ..., (1 1 1....0 1), (1 1 1....1 0).

4- Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

porque por definição o número binomial $\binom{n}{2}$ é o número de todas as sequências binárias de n termos com dois termos iguais ao dígito 1 e $(n-2)$ termos iguais ao dígito 0 enquanto que $\binom{n}{n-2}$ é o número de todas as sequências binárias de n termos com dois termos iguais ao dígito 0 e $(n-2)$ termos iguais ao dígito 1 o que implica que as posições possíveis dos dois termos iguais ao dígito 1 ou iguais ao dígito 0 são: 1 2, 1 3, ... 1 n, 2 3, ..., 2 n, ..., (n-1) n; (i j significa que os dois dígitos 1 ou os dois dígitos 0 são os termos i e j da sequência binária). Portanto o número binomial $\binom{n}{2}$ é igual a soma $(n-1)+(n-2)+...+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Teorema 1 (Lei de simetria)**.** Se $n = 0, 1, 2, ...$ e se $k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, então

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. Caso $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$, a igualdade é válida devido a correspondência que associa, a cada sequência binária de n termos $x_1x_2...x_n$ à sequência binária de n termos $y_1y_2...y_n$ definida para cada $j = 1, 2, ..., n$ por

$$y_j = 0 \quad se \quad x_j = 1 \quad e \quad y_j = 1 \quad se \quad x_j = 0$$

que é uma correspondência biunívoca entre o conjunto das sequências binárias de n termos dos quais k termos são iguais ao dígito 1 e $(n-k)$ termos são iguais ao dígito 0 e o conjunto das sequências binárias de n termos dos quais $(n-k)$ termos são iguais ao dígito 1 e k termos são iguais ao dígito 0.
Os dois membros da lei de simetria são nulos se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $k \in \{n+1, n+2, n+3, ...\}$, ou se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $k \in \{-1, -2, -3, ...\}$ ou se $n = 0$ e k é um número inteiro não nulo; e os dois membros da lei de simetria são iguais a 1 se $n = k = 0$. □

Teorema 2 (Teorema das linhas)**.** Se $n = 0, 1, 2, 3, ...$ então,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração. Caso $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, o número de todas as sequências binárias de n termos formadas pelos dígitos 0 e 1 é igual a 2^n e é igual a soma do número binomial $\binom{n}{0}$ que é o número de sequências binárias de n termos com todos os termos iguais ao dígito 0; do número binomial $\binom{n}{1}$ que é o número de sequências binárias de n termos com um único termo igual ao dígito 1; do número binomial $\binom{n}{2}$ que é o número de sequências binárias de n termos com exatos dois termos iguais ao dígito 1 e assim sucessivamente do número binomial $\binom{n}{n}$ que é o número de sequências binárias de n termos com todos os termos iguais ao dígito 1.

Se $n = 0$, o teorema das linhas é de verificação imediata: $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$. □

Teorema 3 (STIFEL 1)**.** A igualdade

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{1}{0}\binom{n}{k} + \binom{1}{1}\binom{n}{k+1}$$

é válida para cada número natural $n = 0,1,2,3,...$ e para cada número inteiro $k \in \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

Demonstração. Caso $n = 0,1,2,3,...$ e $k = 0,1,2,3,...,$

O número binomial $\binom{n+1}{k+1}$ é igual ao número de todas as sequências binárias de $(n+1)$ termos com $(k+1)$ termos iguais ao dígito 1 e $(n-k)$ termos iguais ao dígito 0 e é igual a soma do número de tais sequências cujo último termo é 0 com o número de tais sequências cujo último termo é 1.
O número binomial $\binom{n}{k+1}$ é o número de todas as sequências binárias de $(n+1)$ termos com $(k+1)$ termos iguais ao dígito 1 e $(n-k)$ termos iguais ao dígito 0 cujo último termo é o dígito 0, porque a sequência constituída pelos n primeiros termos apresenta $(k+1)$ termos iguais ao dígito 1 e $(n-k-1)$ termos iguais ao dígito 0; enquanto que o número binomial $\binom{n}{k}$ é o número de sequências binárias , de $(n+1)$ termos com $(k+1)$ termos iguais ao dígito 1 e $(n-k)$ termos iguais ao dígito 0, cujo último termo é o dígito 1 porque a sequência constituída pelos n primeiros termos apresenta k termos iguais ao dígito 1 e $(n-k)$ termos iguais ao dígito 0.

Caso $n = 1,2,3,... \quad e \quad k = -2,-3,-4,...,$ $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} = 0;$

caso $n = 1,2,3,... \quad e \quad k = -1,$ $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{-1} = 1+0;$

caso $n = 0 \quad e \quad K = -2,-3,-4,...,$ $\binom{0+1}{k+1} = \binom{0}{k+1} + \binom{0}{k} = 0+0;$

e caso $n = 0 \quad e \quad k = -1,$ $\binom{1}{0} = 1 = \binom{0}{0} + \binom{0}{-1} = 1+0.$ □

Teorema 4 (STIFEL 2)**.** A igualdade

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{2}{0}\binom{n}{k+2} + \binom{2}{1}\binom{n}{k+1} + \binom{2}{2}\binom{n}{k}$$

é válida para $n = 0,1,2,3,...$ $\quad e \quad$ $k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Demonstração. Utilizando a relação de Stifel 1,

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+2} + \binom{n+1}{k+1}$$

$$= \binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

□

Teorema 5 (STIFEL 3)**.** . A igualdade

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n}{k+3} + 3\binom{n}{k+2} + 3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{3}{0}\binom{n}{k+3} + \binom{3}{1}\binom{n}{k+2} + \binom{3}{2}\binom{n}{k+1} + \binom{3}{3}\binom{n}{k}$$

é válida para $n = 0,1,2,3,...$ $\quad e \quad$ $k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Demonstração. Aplicando Stifel 1 e Stifel 2,

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n+2}{k+3} + \binom{n+2}{k+2}$$

$$= \binom{n+1}{k+3} + \binom{n+1}{k+2} + \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{n}{k+3} + \binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

$$+2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{n}{k+3} + 3\binom{n}{k+2} + 3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

□

Teorema 6 (STIFEL 4)**.** A igualdade

$$\binom{n+4}{k+4} = \binom{n}{k+4} + 4\binom{n}{k+3} + 6\binom{n}{k+2} + 4\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{4}{0}\binom{n}{k+4} + \binom{4}{1}\binom{n}{k+3} + \binom{4}{2}\binom{n}{k+2} + \binom{4}{3}\binom{n}{k+1}$$

$$+ \binom{4}{4}\binom{n}{k}$$

é válida para $n = 0,1,2,3,...$ *e* $k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

A demonstração é análoga a do teorema anterior.

Em geral, se $n,k,r \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

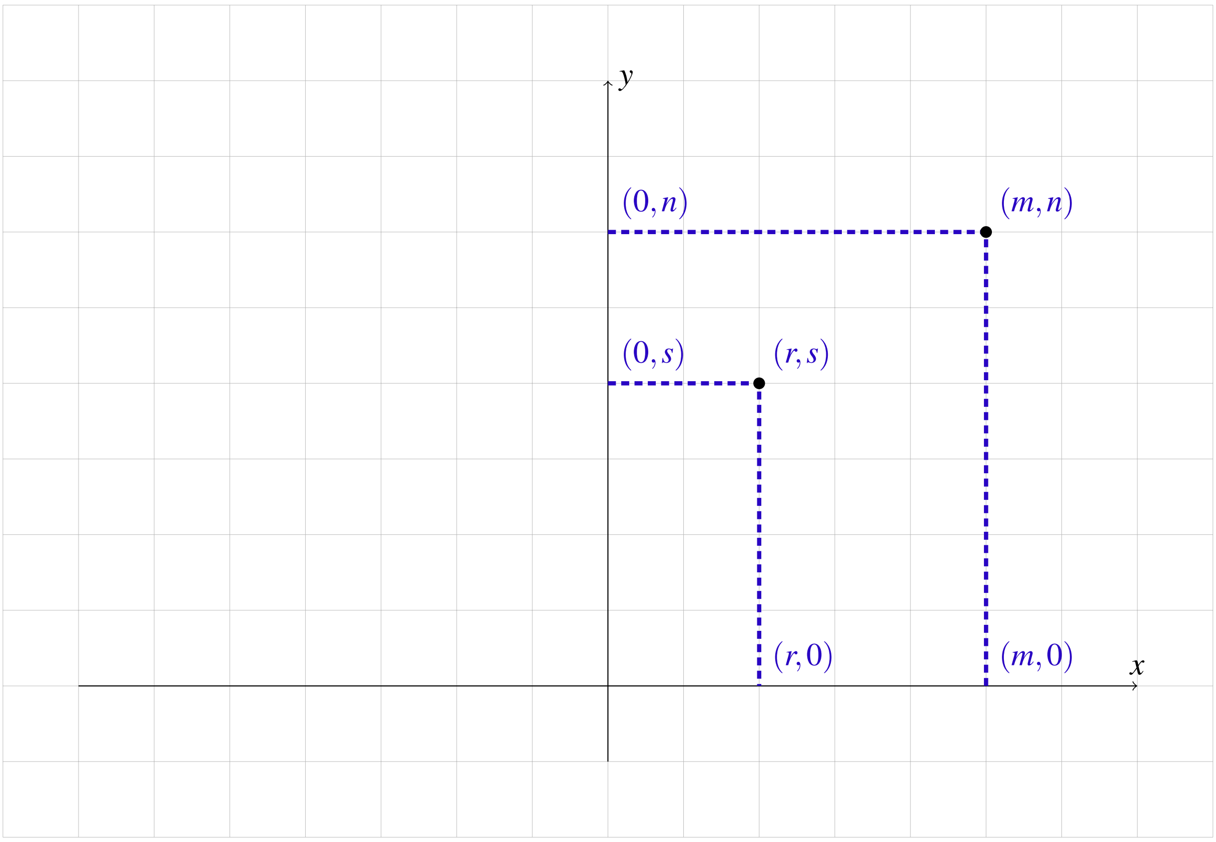
$$\binom{n+r}{k+r} = \binom{r}{0}\binom{n}{k+r} + \binom{r}{1}\binom{n}{k+r-1} + ... + \binom{r}{r}\binom{n}{k}.$$

Fixado um sistema de eixos cartesianos ortogonais em um plano, o número de caminhos cujo ponto inicial é a origem $(0,0)$ do sistema e o ponto final é o ponto com coordenadas inteiras não negativas (m,n) não simultâneamente nulas em que $m,n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$, com a hipótese de que cada caminho é formado por segmentos horizontais e segmentos verticais de comprimento unitário e com a hipótese de que o caminho é formado com um número mínimo de segmentos horizontais e verticais é igual ao número binomial

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

devido a correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os caminhos com ponto inicial $(0,0)$ e ponto final (m,n) e o conjunto de todas as sequências binárias com $(m+n)$ termos dos quais m termos iguais ao dígito 1 e n termos iguais ao dígito 0 (se o primeiro segmento do caminho é horizontal, o primeiro termo da sequência binária associada é igual ao dígito 1 e se o primeiro segmento do caminho é vertical o primeiro termo da sequência binária associada é o dígito 0 e assim sucessivamente).

Figura 1 – Sistema de eixos cartesianos

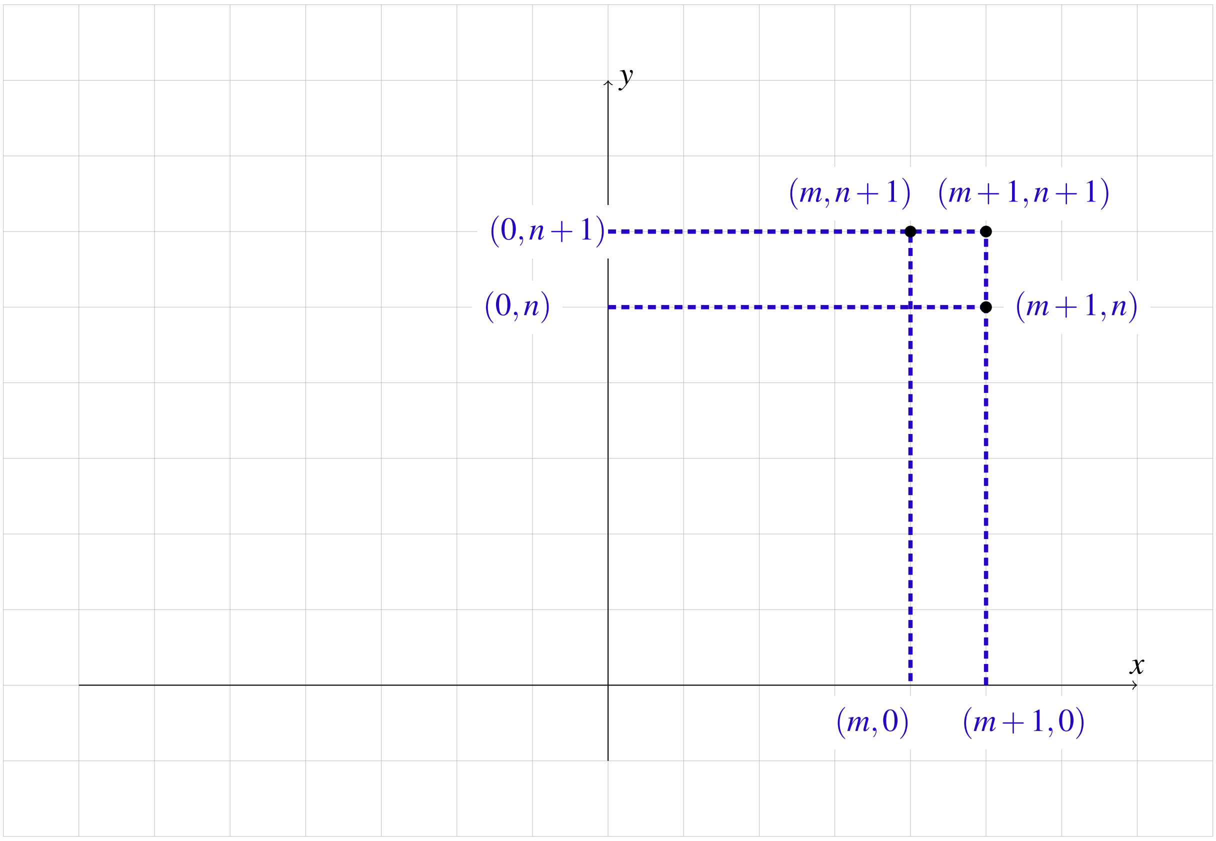


Fonte: Elaborada pelo autor.

O número de caminhos que passam por (r,s) e cujos pontos inicial e final são respectivamente $(0,0)$ e (m,n) é igual a

$$\binom{r+s}{r}\cdot\binom{m-r+n-s}{m-r}.$$

Figura 2 – Sistema de eixos cartesianos



Fonte: Elaborada pelo autor.

O número de caminhos cujos pontos inicial e final são respectivamente $(0,0)$ e $(m+1,n+1)$ é a soma do número de caminhos que passam por $(m,n+1)$ a saber $\binom{m+n+1}{n+1}$, com o número de caminhos que passam por $(m+1,n)$ a saber $\binom{m+n+1}{n}$, isto é,

$$\binom{m+1+n+1}{n+1}=\binom{m+n+1}{n+1}+\binom{m+n+1}{n}$$

que é a relação de Stifel.

Teorema 7. Para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e para cada número inteiro $k \in \{0,1,2,...,n\}$, o número binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é igual ao número de subconjuntos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ que contém k elementos.

Demonstração. Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto constituído por todos os subconjuntos com k elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ e o conjunto de todas as sequências com n termos dos quais k termos são iguais a 1 e $(n-k)$ termos são iguais a zero.
Dado um subconjunto com k elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$, a sequência com n termos correspondente ao subconjunto dado é definida tendo o primeiro termo igual a 1 ou zero, caso 1 pertença ou não pertença ao subconjunto dado; o segundo elemento será 1 ou zero caso o elemento 2 pertença ou não pertença ao subconjunto dado e assim sucessivamente até o n-ésimo termo. $\square$

Exemplo: O número binomial $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ tem 10 sequências de 5 termos com 3 termos iguais ao dígito 1 e 2 termos iguais ao dígito 0.
Os subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ são: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$ e as respectivas sequências binárias de 5 termos com 3 termos iguais ao dígito 1 e 2 termos iguais ao dígito 0:

$$\{1,2,3\} \longrightarrow (1,1,1,0,0)$$

$$\{1,2,4\} \longrightarrow (1,1,0,1,0)$$

$$\{1,2,5\} \longrightarrow (1,1,0,0,1)$$

$$\{1,3,4\} \longrightarrow (1,0,1,1,0)$$

$$\{1,3,5\} \longrightarrow (1,0,1,0,1)$$

$$\{1,4,5\} \longrightarrow (1,0,0,1,1)$$

$$\{2,3,4\} \longrightarrow (0,1,1,1,0)$$

$$\{2,3,5\} \longrightarrow (0,1,1,0,1)$$

$$\{2,4,5\} \longrightarrow (0,1,0,1,1)$$

$$\{3,4,5\} \longrightarrow (0,0,1,1,1)$$

Por exemplo, está associado ao subconjunto $\{1,2,5\}$ a sequência binária (1,1,0,0,1) com o primeiro, segundo e quinto termos iguais ao dígito 1 devido a 1, 2 e 5 serem elementos do subconjunto $\{1,2,5\}$.

Teorema 8. O número binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e para cada número inteiro $k \in \{0,1,2,...,n\}$, é o número de todas as sequências estritamente crescentes (estritamente decrescentes) de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$.

Demonstração. Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todas as sequências estritamente crescentes (estritamente decrescentes) de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ e o conjunto de todos os subconjuntos de k elementos contidos no conjunto $\{1,2,3,...,n\}$. $\square$

Teorema 9. O número binomial $\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e para cada número natural $k \in \{0,1,2,...,n\}$, é igual ao número de todas as sequências crescentes (decrescentes) de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$.

Demonstração. O número de sequências crescentes de k termos $(x_1,x_2,...,x_k)$, $\quad x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k$ cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ é igual ao número de sequências estritamente crescentes de k termos $(y_1,y_2,...,y_k)$, $\quad y_1 < y_2 < ... < y_k$ cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,...,(n+k-1)\}$ devido a seguinte correspondência biunívoca entre o conjunto de todas as sequências crescentes de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,...,n\}$ e o conjunto de todas as sequências estritamente decrescentes de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,...,(n+k-1)\}$: se $(x_1,x_2,...,x_k)$ é tal que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k \leq n$ então $(y_1,y_2,...,y_k)$ definido por $y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2+1,..., \quad y_k = x_k+(k-1)$ é tal que $1 \leq y_1 < y_2 < ... < y_k \leq n+k-1$ e reciprocamente se $(y_1,y_2,...,y_k)$ é tal que $1 \leq y_1 < y_2 < ... < y_k \leq n+k-1$ então $(x_1,x_2,...,x_k)$ definido por $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2-1,...,x_k = y_k-(k-1)$ é tal que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k \leq n$.

$\square$

Teorema 10 (Teorema das colunas)**.** *Se* $n,\ k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Demonstração. A relação de Stifel para $n,k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ implica que

$$\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$$
$$\binom{k+2}{k+1} = \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}$$
$$...................$$
$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

e a soma das igualdades

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + ... + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}$$

completa a demonstração do teorema das colunas.

□

Teorema 11 (Teorema das diagonais)**.** *Se* $n,\ k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Demonstração. A lei de simetria dos números binomiais mostra que

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+k}{k} =$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

pelo teorema das colunas. □

Exemplo 1. Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$, o número triangular T_n é definido como a soma dos n primeiros números naturais, isto é,

$$\begin{aligned} T_n &= 1+2+...+n \\ &= \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{n}{1} \\ &= \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

pelo teorema das colunas.

Exemplo 2. Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

porque

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = 2! \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2} &= 2! \sum_{k=0}^{n} \binom{k+1}{2} \\ &= 2! \left[\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + ... + \binom{n+1}{2} \right] \\ &= 2! \binom{n+2}{3} \end{aligned}$$

pelo teorema das colunas.

Exemplo 3. Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$$

porque

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = 3! \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} &= 3! \sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{3} \\ &= 3! \left[\binom{2}{3} + \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + ... + \binom{n+2}{3} \right] \\ &= 3! \binom{n+3}{4} \end{aligned}$$

pelo teorema das colunas.

2.3 O Binômio de Newton

Teorema 12 (Binômio de Newton)**.** Para cada número real (ou complexo) x e para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Demonstração. i)Por argumento combinatório.

Para cada número natural $k \in \{1,2,3,...,n\}$, o coeficiente de x^k no produto de n fatores iguais a $(1+x)$ é o número de sequências de n termos

$$a_1\ a_2\ a_3...a_n$$

com k termos iguais a 1 e $(n-k)$ termos iguais a 0, porque a_1 é igual a 1 ou 0 caso o número escolhido no primeiro fator $(1+x)$ de $(1+x)^n$ é x ou 1; a_2 é igual a 1 ou 0 caso o número escolhido no segundo fator $(1+x)$ de $(1+x)^n$ é x ou 1 e assim sucessivamente até a escolha de k parcelas iguais a x.

ii) Por indução

Passo 1- $P(n) : (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n$ é válida para $n = 1$.

$(1+x)^1 = 1 + \binom{1}{1}x = 1 + x.$

Passo 2: Supondo que para um determinado $n\ natural, n > 1$ $P(n)$ é válida ou seja:

$$P(n) : (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n \tag{2.1}$$

O objetivo é demonstrar a validade de $P(n+1)$.

Multiplicando ambos os lados da equação (2.1) por $(1+x)$,

$$(1+x)^{n+1} = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

$$+ \binom{n}{0}x^1 + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^n + \binom{n}{n}x^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0}x^0 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]x^1 + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]x^2$$

$$+ \left[\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\right]x^3 + \ldots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right]x^n + \binom{n}{n}x^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n+1}{1}x^1 + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+1}{3}x^3 + \ldots$$

$$+ \binom{n+1}{n}x^n + \binom{n}{n}x^{n+1}.$$

Portanto $P(n+1)$ é válida. Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, a propriedade $P(n)$ vale para qualquer $n \in \{1,2,3,\ldots\}$.

□

Uma das consequências do teorema binomial é o cálculo das primeiras potências do número natural 11 pelo triângulo de Pascal:

$11^2 = (1+10)^2 = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}10 + \binom{2}{2}10^2 = 121$

1, 2, 1 é a segunda linha do triângulo de Pascal.

$11^3 = (1+10)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}10 + \binom{3}{2}10^2 + \binom{3}{3}10^3 = 1331$

1, 3, 3, 1 é a terceira linha do triângulo de Pascal.

$11^4 = (1+10)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}10 + \binom{4}{2}10^2 + \binom{4}{3}10^3 + \binom{4}{4}10^4 = 14641$

1, 4, 6, 4, 1 é a quarta linha do triângulo de Pascal.

$11^5 = (1+10)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}10 + \binom{5}{2}10^2 + \binom{5}{3}10^3 + \binom{5}{4}10^4 + \binom{5}{5}10^5 =$ 161051.

A potência de 11^5 é diferente da quinta linha do triângulo de Pascal, sendo que os elementos da quinta linha: 1, 5, 10, 10, 5, são os coeficientes das potências de 10 no sistema decimal de 11^5.

Corolário 1. Se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Para provar basta considerar $x = 1$ no desenvolvimento do binômio de Newton $(1+x)^n$.

Corolário 2. Se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + ... + \binom{2n}{2n} = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + ... + \binom{2n}{2n-1}.$$

$$\binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + ... + \binom{2n-1}{2n} = \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + ... + \binom{2n-1}{2n-1}.$$

Para provar basta considerar $x = -1$ no desenvolvimento de $(1+x)^{2n}$ e no desenvolvimento de $(1+x)^{2n-1}$.

Corolário 3 (Generalização do teorema binomial)**.** Para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e para números reais (complexos) x e y,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= x^n \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \\
&= x^n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{y}{x}\right)^k\right] \\
&= x^n \left[1 + \binom{n}{1}\frac{y}{x} + \binom{n}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + ... + \binom{n}{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{x}\right)^n\right] \\
&= x^n + \binom{n}{1} yx^{n-1} + \binom{n}{2} y^2x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} y^{n-1}x + y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.
\end{aligned}$$

□

Teorema 13 (Multinomial)**.**

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}.x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}, \quad onde\ n_1+n_2+...n_m=n.$$

Demonstração. Por indução completa sobre m.

Se $m=2$, é verdadeiro pois essa é a fórmula do binômio de Newton.
Suponha que a fórmula seja válida para todos os números naturais menores ou iguais a m, ou seja:

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}.x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}.$$

O objetivo é demonstrar a fórmula para $m+1$.
Pelo teorema binomial,

$$(x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1})^n=\sum \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (x_1+x_2+...+x_m)^{n-k}x_{m+1}^k.$$

Mas pela hipótese de indução,

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}.x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}.$$

Então,

$$(x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1})^n=\sum \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \sum \frac{(n-k)!}{n_1!n_2!...n_m!}.x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}x_{m+1}^k$$

$$=\sum \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(n-k)!}{n_1!n_2!...n_m!}.x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}x_{m+1}^k$$

$$=\sum \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{n_1!n_2!...n_m!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}x_{m+1}^k$$

$$=\sum \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}x_{m+1}^k.$$

Logo pelo princípio da indução matemática,

$$(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}.x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_m^{n_m}$$

é válida para todo número natural m.

□

2.4 A identidade de Vandermonde

Teorema 14. Se $m,n,k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + ... + \binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

Demonstração.

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$$

$$= (1+x)^m (1+x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k . \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Igualando os coeficientes de x^k em ambos os membros

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + ... + \binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

□

Corolário 1. Se $m,n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m}{0}\binom{n}{n} + \binom{m}{1}\binom{n}{n-1} + ... + \binom{m}{n}\binom{n}{0}.$$

Corolário 2. Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,..\}$

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2.$$

pela lei da simetria dos números binomiais.

Teorema 15 (Generalização da identidade de Vandermonde)**.** Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e se $x, y \in \mathbb{R}$ então

$$\binom{x+y}{n} = \binom{x}{0}\binom{y}{n} + \binom{x}{1}\binom{y}{n-1} + ... + \binom{x}{n}\binom{y}{0}$$

em que se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}.$$

A identidade de Vandermonde válida para $m,n,k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + ... + \binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

é generalizada para $x, y \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$:

$$\binom{x+y}{k} = \binom{x}{0}\binom{y}{k} + \binom{x}{1}\binom{y}{k-1} + ... + \binom{x}{k}\binom{y}{0}$$

e em particular se $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{x+y}{n} = \binom{x}{0}\binom{y}{n} + \binom{x}{1}\binom{y}{n-1} + ... + \binom{x}{n}\binom{y}{0}$$

lembrando que se $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$$

é a generalização do número binomial para $n,k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

2.5 Arranjos simples, permutações simples e números binomiais

2.5.1 Arranjos simples

O arranjo simples $A(n,k)$ para números naturais $n,k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ é definido como o número de sequências de k termos em que todos os termos da sequência são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ com a condição de que os termos da sequência dois a dois são diferentes entre si, isto é, não há repetição de elementos em cada sequência.

Propriedade:

Se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $k \in \{1,2,3,...,n\}$,

$$A(n,k) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

pois há n possibilidades para o primeiro termo da sequência, há $(n-1)$ possibilidades para o segundo termo da sequência e assim sucessivamente $(n-k+1)$ possibilidades para o último termo da sequência. Em particular,

$A(n,1) = n$;

$A(n,2) = n(n-1)$, em particular, $A(1,2) = 0$;

$A(n,3) = n(n-1)(n-2)$, em particular, $A(1,3) = A(2,3) = 0$.

2.5.2 Permutações simples

Para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ a permutação simples $P(n)$ é definida como o número de sequências de n termos em que todos os termos da sequência são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ com a condição de que dois a dois termos da sequência são diferentes entre si ou com a condição equivalente à anterior de que todos os elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ apareçam na sequência.

Para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$P(n) = A(n,n) = n(n-1)(n-2)...2.1$$

e o fatorial de n indicado por $n!$ é definido como o produto $n(n-1)(n-2)...2.1$ e, além disso, o fatorial do número zero indicado por $0!$ é definido igual a 1.

Seja $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e seja $k \in \{1,2,..n\}$. Para cada subconjunto $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ em que $j_1 < j_2 < ... < j_k$, O número de sequências de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ é $k!$, ou seja, cada subconjunto de k elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ origina $k!$ sequências de k termos dois a dois diferentes entre si. O número de sequências de k termos cujos termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,...,n\}$ e dois a dois diferentes entre si é por definição o arranjo simples $A(n,k)$ enquanto que o número de subconjuntos de k elementos do conjunto $\{1,2,3,...n\}$ é igual ao número binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Portanto,

$$A(n,k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} k!$$

o que permite calcular o número binomial para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $k \in \{0,1,2,...,n\}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \frac{A(n,k)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Se $k = 0$, o fatorial de 0 é definido igual a 1 e $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ e além disso se $k = n+1, n+2, ...$ a fórmula abaixo continua válida.

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = 0.$$

2.6 Números binomiais generalizados

O número binomial generalizado $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, para todo número inteiro $n \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ e para todo número inteiro $k \in \mathbb{Z}$, é definido como o coeficiente de x^k no desenvolvimento de $(1+x)^n$ em potências de $x \in \mathbb{R}$. Em outros termos, se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \qquad para \quad k = 1, 2, 3, ...,$$

em particular, $\begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n+3 \end{pmatrix} = ... = 0$

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} n \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ -k \end{pmatrix} = 0 \qquad para \quad k = 1, 2, 3, ...$$

$$\begin{pmatrix} -n \\ k \end{pmatrix} = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} \qquad para \quad k = 1, 2, 3, ...$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} = 0 \qquad para \quad k = 1, 2, 3, ...$$

De fato, se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e se $x \in \mathbb{R}$ pelo teorema do binômio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k + ... + x^n$$

os números binomiais generalizados coeficientes de x^{n+1}, x^{n+2}, $x^{n+3}, ...$, e de x^{-1}, x^{-2}, $x^{-3}, ...$ são todos iguais a zero; para $k = 0, 1, 2, .., n$ o número binomial generalizado $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ definido como o coeficiente de x^k é o número binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (lembrando que $0! = 1$).

A identidade para $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$ de

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 + ...$$

mostra que os números binomiais generalizados $\begin{pmatrix} -n \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -n \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -n \\ -3 \end{pmatrix}$, coeficientes de x^{-1}, x^{-2}, $x^{-3}, ...$ respectivamente são todos iguais a zero e para $k = 1, 2, 3, ...$ o número binomial generalizado $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ definido como coeficiente de x^k é igual a

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!}$$

e $\begin{pmatrix} -n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ como coeficiente de x^0.

A igualdade $(1+x)^0 = 1$ para $x \in \mathbb{R}$ mostra o coeficiente binomial generalizado $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ como coeficiente de x^0 e que para $k = 1, 2, 3, ...$ $\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} = 0$ por serem coeficientes de x^k e de x^{-k}.

A extensão da definição de números binomiais $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ para todos os valores inteiros de n e k com o objetivo de preservar a lei de simetria

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \qquad n, k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\},$$

e a relação de Stifel

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}, \qquad n, k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

é dada na seguinte definição de números binomiais: o número binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e para cada número inteiro $k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ é definido como o coeficiente de x^k no desenvolvimento de $(1+x)^n$ em potências de $x \in \mathbb{R}$; o número binomial $\begin{pmatrix} -n \\ k \end{pmatrix}$ para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e para cada número inteiro não negativo $k = 0, 1, 2, 3, ...$ é definido como o coeficiente de x^k na expansão de $(1+x)^{-n}$ em potências de $x \in \mathbb{R}$ válida para os valores reais de x cujo módulo $|x|$ é menor do que 1 enquanto que o número binomial $\begin{pmatrix} -n \\ -k \end{pmatrix}$, para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e para cada número inteiro $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ é definido como o coeficiente de x^k na expansão de $(1+x)^{-n} = x^{-n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n}$ em potências de $x \in \mathbb{R}$ válida para os valores reais de x cujo módulo $|x|$ é maior do que 1. Em resumo, se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$, então:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

$$\binom{0}{0} = 1.$$

$$\binom{0}{k} = \binom{0}{-k} = 0.$$

$$\binom{n}{0} = \binom{-n}{0} = 1.$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

$$\binom{-n}{-k} = 0 \qquad se \quad k = 1,2,...,(n-1).$$

$$\binom{-n}{-k} = \binom{-n}{k-n} \qquad se \quad k = n, n+1, n+2, ...$$

De fato, se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} x^k \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} x^k \qquad |x| < 1.$$

$$(1+x)^{-n} = x^{-n}(1+x^{-1})^{-n} = x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} x^{-k} \qquad |x| > 1.$$

Em particular,

$(1+x)^0 = 1$

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... \qquad |x| < 1$

e por definição

$$\binom{-1}{0} = 1 \quad \binom{-1}{1} = -1 \quad \binom{-1}{2} = 1 \quad \binom{-1}{3} = -1 \quad \binom{-1}{4} = 1...;$$

$$(1+x)^{-1} = x^{-1} - x^{-2} + x^{-3} - x^{-4} + x^{-5} + ... \qquad |x| > 1$$

e por definição

$$\binom{-1}{-1} = 1 \quad \binom{-1}{-2} = -1 \quad \binom{-1}{-3} = 1 \quad \binom{-1}{-4} = -1...;$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + ... \quad |x| < 1$$

e por definição

$$\binom{-2}{0} = 1 \quad \binom{-2}{1} = -2 \quad \binom{-2}{2} = 3 \quad \binom{-2}{3} = -4 \quad \binom{-2}{4} = 5...;$$

$$(1+x)^{-2} = x^{-2} - 2x^{-3} + 3x^{-4} - 4x^{-5} + ... \quad |x| > 1$$

e por definição

$$\binom{-2}{-1} = 0 \quad \binom{-2}{-2} = 1 \quad \binom{-2}{-3} = -2 \quad \binom{-2}{-4} = 3...;$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + ... \quad |x| < 1$$

e por definição

$$\binom{-3}{0} = 1 \quad \binom{-3}{1} = -3 \quad \binom{-3}{2} = 6 \quad \binom{-3}{3} = -10...;$$

$$(1+x)^{-3} = x^{-3} - 3x^{-4} + 6x^{-5} - 10x^{-6} + 15x^{-7} + ... \quad |x| > 1$$

e por definição

$$\binom{-3}{-1} = 0 \quad \binom{-3}{-2} = 0 \quad \binom{-3}{-3} = 1 \quad \binom{-3}{-4} = -3... .$$

	$k=-5$	$k=-4$	$k=-3$	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=-4$	-4	1	0	0	0	1	-4	10	-20	35
$n=-3$	6	-3	1	0	0	1	-3	6	-10	15
$n=-2$	-4	3	-2	1	0	1	-2	3	-4	5
$n=-1$	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
$n=0$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$n=1$	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
$n=2$	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0
$n=3$	0	0	0	0	0	1	3	3	1	0

O quadro acima mostra algumas linhas de números binomiais para valores inteiros com a anomalia inevitável da relação de Stifel

$$\binom{-1}{-1} + \binom{-1}{0} = 2 \neq \binom{0}{0} = 1.$$

Em outros termos se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k \qquad |x| < 1.$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{-k} x^{-k} \qquad |x| > 1.$$

$$(1+x)^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A validade da relação de Stifel dos números binomiais para valores inteiros segue do fato que se $x \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$

$$(1+x)(1+x)^{-n-1} = (1+x)^{-n}$$

a igualdade dos coeficientes de x^k para $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{-n-1}{k} + \binom{-n-1}{k+1} = \binom{-n}{k+1}$$

resulta na relação de Stifel e que se $|x| > 1$

$$(1+x)(1+x)^{-n-1} = (1+x)^{-n}$$

a igualdade dos coeficientes de x^{-k} para $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$\binom{-n-1}{-k} + \binom{-n-1}{-k-1} = \binom{-n}{-k}$$

resulta na relação de Stifel.

A anomalia na relação de Stifel ocorre porque para $x \in \mathbb{R}, \quad |x| > 1$

$$(1+x)(1+x)^{-1} = (1+x)[x^{-1} - x^{-2} + x^{-3} - x^{-4} + ...]$$

o coeficiente de x^0 é zero enquanto que para $x \in \mathbb{R}$ em $(1+x)^0 = 1$ o coeficiente de $x^0 = 1$.

A lei de simetria para valores inteiros dos números binomiais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

é válida porque se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$\binom{-n}{k}$ é o coeficiente de x^k em $(1+x)^{-n}$ para $|x| < 1$,

$\binom{-n}{-n-k} = \binom{-n}{n+k-n}$ é o coeficiente de x^{-n-k} em $(1+x)^{-n}$ para $|x| > 1$,

$\binom{-n}{-k}$ é o coeficiente de x^{-k} em $(1+x)^{-n}$, para $|x| > 1$

que é igual a zero quando $k = 1,2,...,(n-1)$ e é igual a $\binom{-n}{-n+k}$ quando $k = n, n+1, n+2, ...$

e $\binom{-n}{-n-(-k)} = \binom{-n}{-n+k}$ é igual a zero quando $k = 1,2,...,(n-1)$ e é igual a $\binom{-n}{-n+k}$

quando $k = n, n+1, n+2, ...$ como coeficiente de x^{k-n} em $(1+x)^{-n}$ $|x| < 1$.

O hexágono de Pascal, ou moinho de vento de Pascal, é a configuração em que ocorrem todos os números binomiais $\binom{n}{k}$ para valores inteiros de n e k, ou seja, $\binom{n}{k}$ para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ e para cada inteiro $k \in \mathbb{Z}$ é o coeficiente de x^k na expansão de $(1+x)^n$ em potências de $x \in \mathbb{R}$; $\binom{-n}{k}$ para números naturais n e k é o coeficiente de x^k na expansão de $(1+x)^{-n}$ em potências de $x \in \mathbb{R}$ válida para x, $|x| < 1$ enquanto que $\binom{-n}{-k}$ para números naturais n e k é o coeficiente de x^{-k} na expansão de $(1+x)^{-n}$ em potências de $x \in \mathbb{R}$ válida para x, $|x| > 1$.

Figura 3 – Moinho de vento

k=-5 k=-4 k=-3 k=-2 k=-1 k=0

k=1

n=-5 ⟶ 1 0 0 0 0 1

k=2

n=-4 ⟶ -4 1 0 0 0 1 -4

k=3

n=-3 ⟶ 6 -3 1 0 0 1 -3 6

k=4

n=-2 ⟶ -4 3 -2 1 0 1 -2 3 -4

k=5

n=-1 ⟶ 1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1

n=0 ⟶ 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0

n=1 ⟶ 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0

s=-5

n=2 ⟶ 0 0 0 1 2 1 0 0 0

s=-4

n=3 ⟶ 0 0 1 3 3 1 0 0

s=-3

n=4 ⟶ 0 1 4 6 4 1 0

s=-2

n=5 ⟶ 1 5 10 10 5 1

s=-1

s=5 s=4 s=3 s=2 s=1 s=0

Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

Teorema 16 (Binômio de Newton)**.** Se $x, y \in \mathbb{R}$ e se $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$a)(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

$$b)(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

Em que para $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)...(x-k+1).$$

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)...(x+k-1) = (-1)^k(-x)^{\underline{k}}.$$

Demonstração. a) A identidade

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

é equivalente a

$$\frac{1}{n!}(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}$$

que é válida pela identidade generalizada de Vandermonde $\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$.

b) A identidade

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$$

é válida porque

$$(x+y)^{\overline{n}} = (-1)^n(-x-y)^{\underline{n}}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^{\underline{k}} (-y)^{\underline{n-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (-x)^{\underline{k}} (-1)^{n-k} (-y)^{\underline{n-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

$\square$

2.7 Números figurados

Enquanto que os números binomiais $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ para qualquer valor inteiro de n e $k = 0,1,2,3,...$ são calculados por

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{k fatores}}{k!}$$

os números figurados de ordem k, $P(n,k)$, para valores inteiros de n e $k = 0,1,2,3...$ são definidos por

$$P(n,k) = \frac{\overbrace{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)}^{k fatores}}{k!} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}.$$

(o termo da língua inglesa "figurate number"indica os números naturais que são iguais ao número de pontos dispostos em uma figura geométrica: por exemplo os números triangulares são números figurados de ordem 2 como mostrado a seguir).

A lei de formação dos números figurados

$$P(n,k) = P(n-1,k) + P(n,k-1)$$

válida para todos os valores inteiros de n e k, é consequência da relação de Stifel que é válida para todos os inteiros de n e k pois

$$P(n,k) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n+k-2 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+k-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

$$= P(n-1,k) + P(n,k-1).$$

(os números binomiais $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ tem a sua definição estendida para todos os valores inteiros de n e k de modo a preservar a relação de Stifel e a lei de simetria).

Os números figurados $P(n,0)$ de ordem zero são iguais a um, isto é, $P(n,0) = 1$ para $n = 1,2,3...$ enquanto que os números figurados de ordem 1, $P(n,1) = n$ para $n = 1,2,3,...$ são os números naturais.

Os números figurados de ordem 2, $P(n,2)=\dfrac{n(n+1)}{2!}$ para $n=1,2,3,\ldots$ são conhecidos como números triangulares e os números figurados de ordem 3, $P(n,3)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ para $n=1,2,3,\ldots$ são conhecidos como números tetraédricos .

Figura 4 – Números binomiais e números figurados

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{1} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) \\
P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) \\
P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) \\
P(4,0) & P(4,1) & P(4,2) \\
P(5,0) & P(5,1) & P(5,2) \\
P(6,0) & P(6,1) & P(6,2) \\
P(7,0) & P(7,1) & P(7,2)
\end{array}
$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A tabela horizontal exibe os primeiros números figurados de ordens zero, um, dois, três, quatro e cinco.

$P(n,0)$	1	1	1	1	1	1	1
$P(n,1)$	0	1	2	3	4	5	6
$P(n,2)$	0	1	3	6	10	15	21
$P(n,3)$	0	1	4	10	20	35	56
$P(n,4)$	0	1	5	15	35	70	126
$P(n,5)$	0	1	6	21	56	126	252

e evidencia que

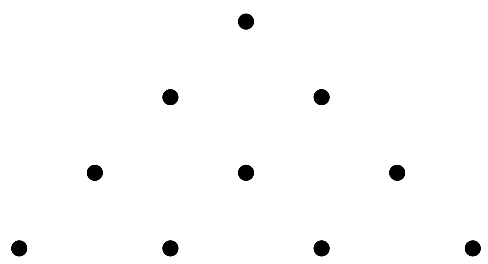
$$P(1,k)+P(2,k)+P(3,k)+...+P(n,k)=P(n,k+1)$$

é válida pelo teorema das colunas dos números binomiais.

Os números triangulares T_n para $n=1,2,3,...$ que por definição são os números figurados de ordem 2

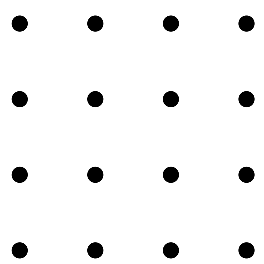
$$T_n=P(n,2)=1+2+3+...+n, \qquad para \quad n=1,2,3,...$$

que é o número de pontos em formação triangular $(1+2+3+...+n)$ pontos.



$T_4=1+2+3+4=10$

Os números quadrangulares Q_n para n= 1,2,3,... é o número de pontos em uma formação quadrada de n^2 pontos.



$Q_4=4^2=16$

São os números naturais quadrados perfeitos.

Enquanto que o número quadrangular $Q_n = n^2$ para n= 1,2,3,... é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 1,

	1	3	5	7	9	11	13	...
Q_n	1	4	9	16	25	36	49	...

o n-ésimo número pentagonal P_n e o n-ésimo número hexagonal H_n para n= 1,2,3,... são as somas dos n primeiros termos de duas progressões aritméticas de razão 3 e 4 e primeiros termos iguais a 1 respectivamente.

	1	4	7	10	13	16	19	...
P_n	1	5	12	22	35	51	70	...

	1	5	9	13	17	21	25	...
H_n	1	6	15	28	45	66	91	...

A fórmula

$$p(r,s) = \frac{r}{2}\left[2+(r-1)(s-2)\right]] \qquad para \quad r,s = 1,2,3,...$$

calcula o n-ésimo número triangular $(s = 3)$, com $r = n$

$$T_n = p(n,3) = \frac{n}{2}\left[2+(n-1)\right] = \quad \frac{n(n+1)}{2}, \qquad para \quad n = 1,2,3,...$$

calcula o n-ésimo número quadrangular $(s = 4)$, com $r = n$

$$Q_n = p(n,4) = \frac{n}{2}\left[2+(n-1)2\right] = \quad n^2 \qquad para \quad n = 1,2,3,...$$

enquanto que o n-ésimo número pentagonal $s = 5$ e o n-ésimo número hexagonal $s = 6$ com $r = n$, são respectivamente

$$p(n,5) = \frac{n}{2}\left[2+(n-1)3\right] = \quad \frac{n(3n-1)}{2} = T_n + 2T_{n-1}$$

$$p(n,6) = \frac{n}{2}\left[2+(n-1)4\right] = \quad n(2n-1).$$

2.8 Progressões aritméticas

O termo geral a_n de uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1 é expresso em termos de números binomiais:
se $n = 1,2,3,...$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$= \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} r.$$

Se $a_n = An + B, \quad com \quad A,B \in \mathbb{R} \quad e \quad n = 1,2,3,...$ então a_n é o termo geral de progressão aritmética de razão A e primeiro termo $A+B$, isto é,

$$a_n = \binom{n-1}{0}(A+B) + \binom{n-1}{1} A = \quad An + B.$$

O termo geral de uma progressão de segunda ordem definida por

$$a_n = An^2 + Bn + C$$

com $A,B,C \in \mathbb{R}$ sendo $A \neq 0$ e $n = 1,2,3,...$
é expresso em termos de números binomiais porque o termo geral b_n, com $n = 1,2,3,...$ da progressão aritmética dado por

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

$$= A(n+1)^2 + B(n+1) + C - An^2 - Bn - C$$

$$= 2An + B$$

$$= \binom{n-1}{0}(2A+B) + \binom{n-1}{1} 2A$$

e então,

$$
\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} = \binom{n-2}{0}(2A+B) + \binom{n-2}{1}2A \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= b_{n-2} = \binom{n-3}{0}(2A+B) + \binom{n-3}{1}2A \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_3 - a_2 &= b_2 = \binom{1}{0}(2A+B) + \binom{1}{1}2A \\
a_2 - a_1 &= b_1 = \binom{0}{0}(2A+B)
\end{aligned}
$$

que somando vem

$$a_n = a_1 + \left[\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \ldots + \binom{n-2}{0}\right](2A+B) + \left[\binom{1}{1} + \ldots + \binom{n-2}{1}\right]2A$$

$$a_n = \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}c_1$$

em que $c_n = b_{n+1} - b_n = 2A$.

O termo geral a_n de uma progressão aritmética de terceira ordem definida por

$$a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0$ e para $n = 1, 2, 3, \ldots$

é expresso em termos de números binomiais porque b_n é o termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem

$$b_n = a_{n+1} - a_n = A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D - (An^3 + Bn^2 + Cn + D)$$

$$= 3An^2 + (3A+2B)n + (A+B+C)$$

$$= \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} d_1$$

em que

$c_n = b_{n+1} - b_n \quad = 6An + (6A+2B), \qquad n = 1,2,3,...$

$d_n = c_{n+1} - c_n \quad = 6A, \qquad n = 1,2,3,...$

e

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} = \begin{pmatrix} n-2 \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} d_1 \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= b_{n-2} = \begin{pmatrix} n-3 \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} n-3 \\ 2 \end{pmatrix} d_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_3 - a_2 &= b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_1 \\
a_2 - a_1 &= b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} b_1
\end{aligned}$$

somando,

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n-2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] b_1 \\
&+ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] c_1 \\
&+ \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n-2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] d_1 \\
a_n &= \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} d_1.
\end{aligned}$$

Por exemplo, para $n = 1,2,3,...$

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= 1+2+3++...+n \\
&= \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + ... + \binom{n}{n} \\
&= \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{array}{lccccccccc}
S_1(n) \longrightarrow & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 \\
b_n = S_1(n+1) - S_1(n) \longrightarrow & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
c_n = b_{n+1} - b_n \longrightarrow & & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

$$
S_1(n) = 1\binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + 1\binom{n-1}{2}.
$$

Por exemplo, para $n = 1,2,3,...$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n^2 \longrightarrow & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\
(n+1)^2 - n^2 \longrightarrow & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
 & & & 2 & & 2 & & 2 & &
\end{array}
$$

$$
n^2 = \binom{n-1}{0} 1 + 3\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2}.
$$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n^3 \longrightarrow & 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 \\
(n+1)^3 - n^3 \longrightarrow & & 7 & & 19 & & 37 & & 61 & \\
 & & & 12 & & 18 & & 24 & & \\
 & & & & 6 & & 6 & & &
\end{array}
$$

$$n^3 = 1\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
S_2(n) \longrightarrow & 1 & & 5 & & 14 & & 30 & & 55 \\
 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & \\
 & & & 5 & & 7 & & 9 & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \\
&= 1\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

$$S_3(n) \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & & 9 & & 36 & & 100 & & 225 \\ & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & \\ & & 19 & & 37 & & 61 & & \\ & & & 18 & & 24 & & & \\ & & & & 6 & & & & \end{array}$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$$

$$= 1\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} + 19\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix} n-1 \\ 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} n-1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2)}{4}.$$

No triângulo dos números naturais quadrados perfeitos

$$\begin{array}{lllllll} 1^2 \\ 2^2 & 3^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 7^2 & 8^2 & 9^2 & 10^2 \\ 11^2 & 12^2 & 13^2 & 14^2 & 15^2 \\ 16^2 & 17^2 & 18^2 & 19^2 & 20^2 & 21^2 \\ 22^2 & 23^2 & 24^2 & 25^2 & 26^2 & 27^2 & 28^2 \\ \ldots\ldots \end{array}$$

a n-ésima linha tem n números naturais quadrados perfeitos cujo último número da linha é

$$(1+2+3+...+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

e cujo primeiro número é

$$
\begin{aligned}
[1+(1+2+...+(n-1))]^2 &= 1+2(1+2+...+(n-1))+(1+2+...+(n-1))^2 \\
&= 1+2\frac{n(n-1)}{2}+\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 \\
&= 4+\frac{4n(n-1)+n^2(n-1)^2}{4} \\
&= \frac{[2+n(n-1)]^2}{4} \\
&= \left[\frac{2+n(n-1)}{2}\right]^2.
\end{aligned}
$$

O segundo elemento da linha n é

$$
\begin{aligned}
[2+(1+2+...+(n-1))]^2 &= 4+4(1+2+...+(n-1))+(1+2+...+(n-1))^2 \\
&= 4+4\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n^2(n-1)^2}{4} \\
&= 16+\frac{8n(n-1)+n^2(n-1)^2}{4} \\
&= \left[\frac{4+n(n-1)}{2}\right]^2
\end{aligned}
$$

e o k-ésimo elemento da linha n é

$$
\begin{aligned}
[k+(1+2+...+(n-1))]^2 &= k^2+2k(1+2+...+(n-1))+(1+2+...+(n-1))^2 \\
&= k^2+2k\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n^2(n-1)^2}{4} \\
&= 4k^2+\frac{4kn(n-1)+n^2(n-1)^2}{4} \\
&= \left[\frac{2k+n(n-1)}{2}\right]^2
\end{aligned}
$$

e a soma dos elementos da linha n é

$$\left[\frac{2+n(n-1)}{2}\right]^2+\left[\frac{2.2+n(n-1)}{2}\right]^2+...+\left[\frac{2n+n(n-1)}{2}\right]^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k+n(n-1)}{2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{n}4k^2+4\sum_{k=1}^{n}kn(n-1)+\sum_{k=1}^{n}n^2(n-1)^2\right]$$

$$=(1^2+2^2+...+n^2)+\frac{2n(n-1)}{4}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{4}n^3(n-1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n^2-1)}{4}+\frac{n^3(n-1)^2}{4}.$$

Analogamente, no triângulo do números naturais

1						
2	3					
4	5	6				
7	8	9	10			
11	12	13	14	15		
16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28
......						

a soma dos elementos da n-ésima linha é

$$\sum_{k=1}^{n}\left[k+\frac{n(n-1)}{2}\right]=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n-1)}{2}$$

enquanto que no triângulo dos números naturais cubos perfeitos

$$
\begin{array}{lllllll}
1^3 \\
2^3 & 3^3 \\
4^3 & 5^3 & 6^3 \\
7^3 & 8^3 & 9^3 & 10^3 \\
11^3 & 12^3 & 13^3 & 14^3 & 15^3 \\
16^3 & 17^3 & 18^3 & 19^3 & 20^3 & 21^3 \\
22^3 & 23^3 & 24^3 & 25^3 & 26^3 & 27^3 & 28^3 \\
\ldots\ldots
\end{array}
$$

a soma dos elementos da n-ésima linha é

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left[k+\frac{n(n-1)}{2}\right]^3 &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}[2k+n(n-1)]^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[8\sum_{k=1}^{n}k^3+6n^2(n-1)^2\sum_{k=1}^{n}k+12n(n-1)\sum_{k=1}^{n}k^2+n^3(n-1)^3\right] \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{3}{8}n^3(n-1)^2(n+1)+\frac{3}{12}n^2(n-1)^2(2n+1)+\frac{1}{8}n^3(n-1)^3.
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO

3

TRIÂNGULO DE PASCAL

3.1 Conceitos iniciais

O triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal mais conhecido como triângulo de Pascal é o triângulo formado por todos os números binomiais diferentes de zero.

Figura 5 – Triângulo de Pascal dos números binomiais

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os números binomiais são os coeficientes de x^k na expansão binomial de $(1+x)^n$, por isso é geralmente chamado de coeficiente binomial. A figura 6 destaca as primeiras linhas do triângulo de Pascal com as respectivas expansões binomiais.

Figura 6 – Triângulo de Pascal e o binômio de Newton

1							$(1+x)^0 = 1$
1	1						$(1+x)^1 = 1+x$
1	2	1					$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$
1	3	3	1				$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$
1	4	6	4	1			$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$
1	5	10	10	5	1		$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
1	6	15	20	15	6	1	$(1+x)^6 = 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$

....

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 7 mostra a relação do triângulo de Pascal e as potências do número 11.

Figura 7 – Visualização das potências de 11 no triângulo de Pascal

1							$11^0 = 1$
1	1						$11^1 = 11$
1	2	1					$11^2 = 121$
1	3	3	1				$11^3 = 1.331$
1	4	6	4	1			$11^4 = 14.641$
1	5	10	10	5	1		$11^5 = 161.051$
1	6	15	20	15	6	1	$11^6 = 1.771.561$

....

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Visualização das propriedades dos números binomiais no triângulo de Pascal

Visualização da relação de Stifel 1

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

no triângulo de Pascal.

Essa propriedade afirma que a soma de dois números binomiais consecutivos na linha do triângulo de Pascal é igual ao número binomial da linha seguinte situado na mesma coluna do segundo.

Figura 8 – Visualização da relação de Stifel 1 no triângulo de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos triângulos acima estão representados os seguintes exemplos:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

Visualização da relação de Stifel 2

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{2}{0}\binom{n}{k+2} + \binom{2}{1}\binom{n}{k+1} + \binom{2}{2}\binom{n}{k}$$

no triângulo de Pascal.

Figura 9 – Visualização da relação de Stifel 2 no triângulo de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	2x 10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		2x 6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Fonte: Elaborada pelo autor.

A soma de três números binomiais da mesma linha multiplicados respectivamente pelos fatores 1, 2, e 1 é o número binomial situado a duas linhas abaixo na mesma coluna do terceiro número.

Nos triângulos acima estão representados os seguintes exemplos:

$$\binom{7}{3} = \binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$$

$$\binom{6}{3} = \binom{4}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

Visualização da relação de Stifel 3

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n}{k+3} + 3\binom{n}{k+2} + 3\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$= \binom{3}{0}\binom{n}{k+3} + \binom{3}{1}\binom{n}{k+2} + \binom{3}{2}\binom{n}{k+1} + \binom{3}{3}\binom{n}{k}$$

no triângulo de Pascal.

Figura 10 – Visualização da relação de Stifel 3 no triângulo de Pascal

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4\overset{3x}{-} & 6\overset{3x}{-} & 4\,- & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & 1 & & 4 & \overset{3x}{-} & 6 & \overset{3x}{-} & 4 & - & 1 \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo:

$$\binom{7}{4} = \binom{3}{0}\binom{4}{4} + \binom{3}{1}\binom{4}{3} + \binom{3}{2}\binom{4}{2} + \binom{3}{3}\binom{4}{1}$$

$$\binom{8}{6} = \binom{3}{0}\binom{5}{6} + \binom{3}{1}\binom{5}{5} + \binom{3}{2}\binom{5}{4} + \binom{3}{3}\binom{5}{3}$$

$$\binom{9}{5} = \binom{3}{0}\binom{6}{5} + \binom{3}{1}\binom{6}{4} + \binom{3}{2}\binom{6}{3} + \binom{3}{3}\binom{6}{2}$$

Visualização do teorema das linhas

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

no triângulo de Pascal.

Essa propriedade afirma que a soma de todos os números binomiais da linha n é igual a 2^n.

Figura 11 – Visualização do teorema das linhas no triângulo de Pascal

1								2^0
1	1							$2^1=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}$
1	2	1						$2^2=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$
1	3	3	1					$2^3=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$
1	4	6	4	1				$2^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$
1	5	10	10	5	1			$2^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$
1	6	15	20	15	6	1		$2^6=\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$
1	7	21	35	35	21	7	1	$2^7=\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$

....

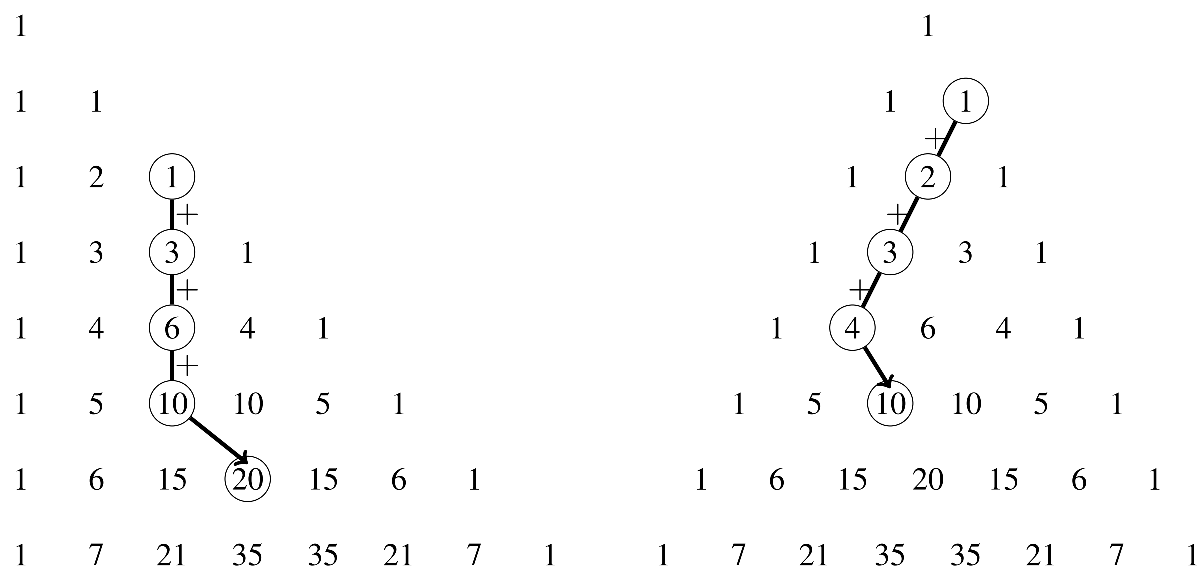
Fonte: Elaborada pelo autor.

Visualização do teorema das colunas no triângulo de Pascal

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

Essa propriedade afirma que somando os elementos de uma coluna, desde o primeiro elemento da mesma, a soma será o elemento da próxima linha, localizado na próxima coluna. Observe a figura a seguir.

Figura 12 – Visualização do teorema das colunas no triângulo de Pascal



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=\binom{6}{3}$$

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}=\binom{5}{2}$$

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}=\binom{8}{5}$$

Lei de simetria no triângulo de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Essa propriedade afirma que os elementos equidistantes dos extremos no triângulo de Pascal são iguais.

Figura 13 – Visualização da lei de simetria no triângulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

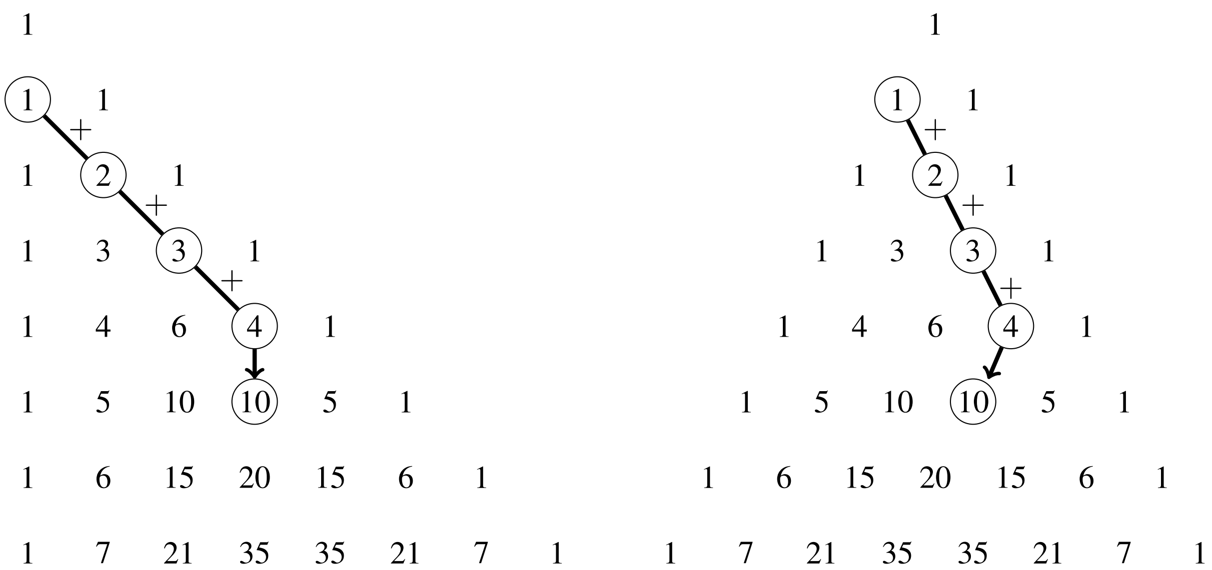
Observe na linha 6, os números binomiais $\binom{6}{1}$ e $\binom{6}{5}$ e na linha 9, os números binomiais $\binom{9}{2}$ e $\binom{9}{7}$.

Visualização do teorema das diagonais no triângulo de Pascal

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

A soma dos números binomiais de uma diagonal do triângulo de Pascal a partir da coluna zero até uma dada coluna é o número binomial situado na linha seguinte e na mesma coluna da última parcela da somatória.

Figura 14 – Visualização do teorema das diagonais no triângulo de Pascal



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$$

$$\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}$$

$$\binom{7}{0}+\binom{8}{1}+\binom{9}{2}+\binom{10}{3}=\binom{11}{4}=\binom{12}{4}$$

$$\binom{10}{0}+\binom{11}{1}+\binom{12}{2}+\binom{13}{3}=\binom{14}{4}=\binom{15}{4}$$

3.3 Teorema binomial e o triângulo de Pascal

Observe agora os coeficientes binomiais da expansão binomial, segundo o Teorema binomial, no triângulo de Pascal.

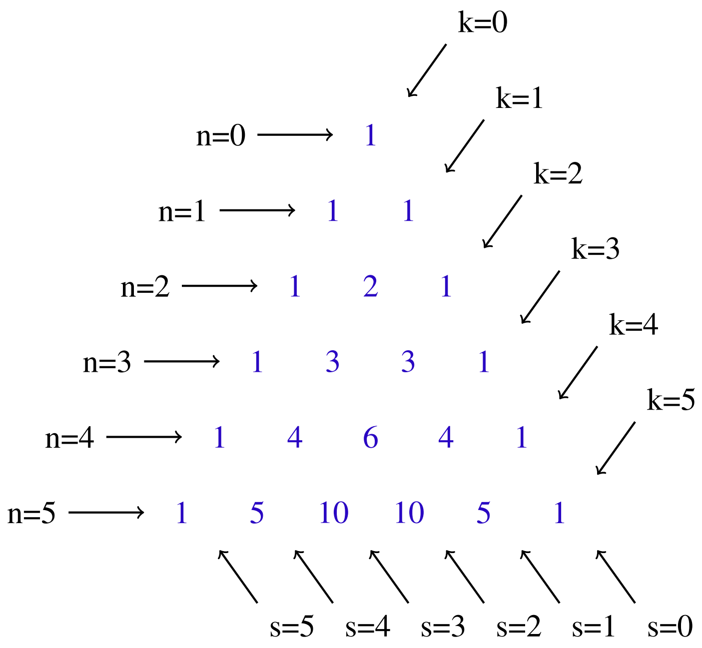
$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + b^n.$$

Nesta expansão, s significa os expoentes de a. Note que $s = n-k$.
Observe também que a identidade de simetria é satisfeita nos coeficientes binomiais,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{s}.$$

Observe a identidade de simetria na figura 15.

Figura 15 – Identidade de simetria



Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

3.4 Figuras geométricas no triângulo de Pascal

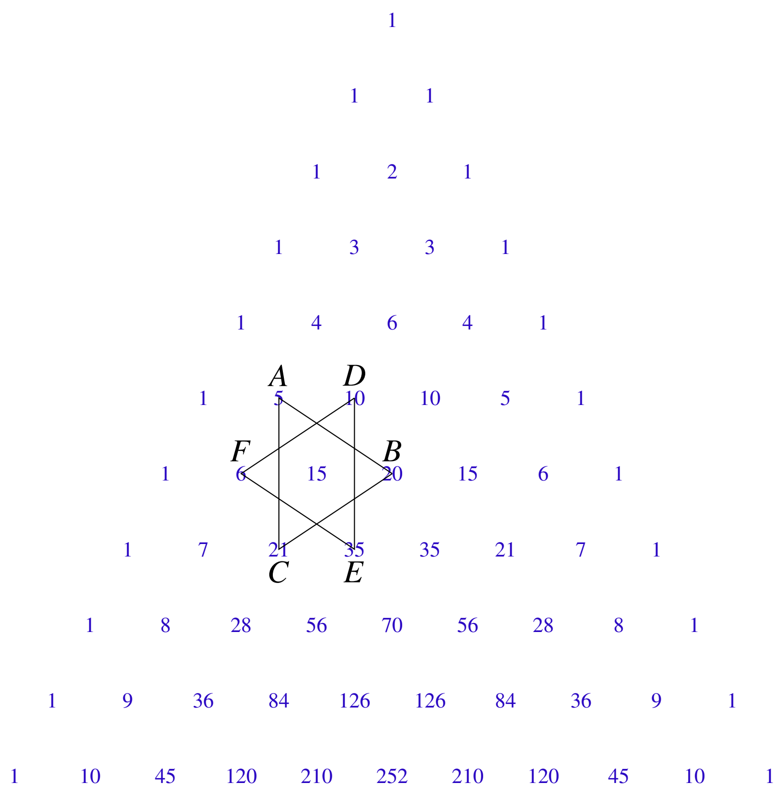
Nesta seção, serão apresentados alguns padrões geométricos interessantes que ocorrem no triângulo de Pascal.

3.4.1 Identidade do Hexágono

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

O significado geométrico dessa propriedade é que o produto dos vértices de cada triângulo que compõe a estrela de Davi, dentro do hexágono formado pelos pontos do triângulo de Pascal nas imediações de $\binom{n}{k}$ são iguais.

Figura 16 – Identidade do hexágono



Fonte: Elaborada pelo autor.

O produto dos vértices do triângulo ABC é igual ao produto dos vértices do triângulo DEF, ou seja, 5x20x21=10x35x6.

3.4.2 Paralelogramos no triângulo de Pascal

Considere um paralelogramo P_1cujos vértices estão localizados no triângulo de Pascal, assim indicado:

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+h}, \binom{n-l}{k}, \binom{n-l}{k+h}$$

onde h e l são valores arbitrários.

Observe que este paralelogramo tem lados paralelos às direções em que k en são constantes. Deslizando o paralelogramo u unidades na direção em qu$s$ é constante, os vértices dos "novos"paralelogramos (os que estão tracejado na figura 17) serão da seguinte forma:

$$\binom{n+u}{k+u} \binom{n+u}{k+h+u} \binom{n-l+u}{k+u} \binom{n-l+u}{k+h+u}.$$

Seja w a razão entre o produto dos coeficientes binomiais dos vértices opostos do primeiro paralelogramo, isto é:

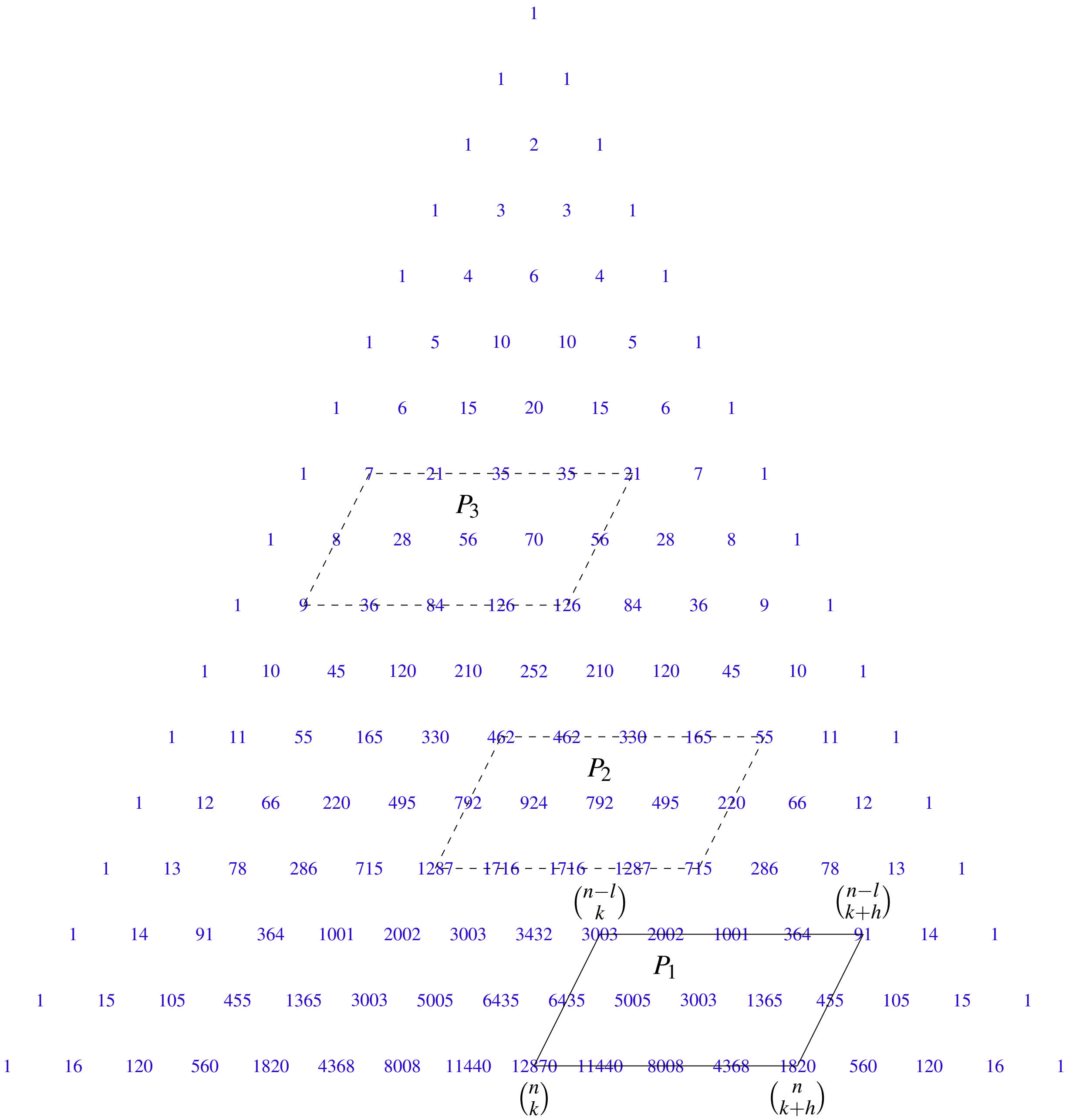
$$w = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-l}{k+h}}{\binom{n-l}{k}\binom{n}{k+h}}.$$

Da mesma forma, seja w'

$$w' = \frac{\binom{n+u}{k+u}\binom{n-l+u}{k+h+u}}{\binom{n-l+u}{k+u}\binom{n+u}{k+h+u}}.$$

Calculando essas razões, obtem-se $w = w'$, ou seja, o valor das razões permanece quando os paralelogramos são deslizados na direção em que seus lados não são paralelos.

Figura 17 – Paralelogramos no triângulo de Pascal



Fonte: Elaborada pelo autor.

O paralelogramo P_2 foi construído deslizando 3 unidades dos vértices de P_1 na direção de s, enquanto que P_3 foi construído deslizando 7 unidades a partir dos vértices de P_1 na direção s.

3.4.3 A flor de Pascal

Outra curiosidade é quando trocam-se os valores de l e h, no paralelogramo P_1. Neste caso obtem-se um paralelogramo que é a reflexão de P_1, na linha que divide o ângulo formado pelos lados que saem do vértice $\binom{n}{k}$, cujos vértices são:

$$\binom{n}{k}\ \binom{n}{k+l}\ \binom{n-h}{k}\ \binom{n-h}{k+l}.$$

Observe também que o valor das razões w e w' não se alteram na reflexão.

A figura 18, é denominada Flor de Pascal. Nesta figura existem três paralelogramos e sua respectivas reflexões. Cada um deles tem um vértice em $\binom{n}{k}$.

Em particular:

P_1 tem lados paralelos às direções r e s (isto é, nas direções em que r e s são constantes).

P_2 tem lados paralelos às direções s e n.

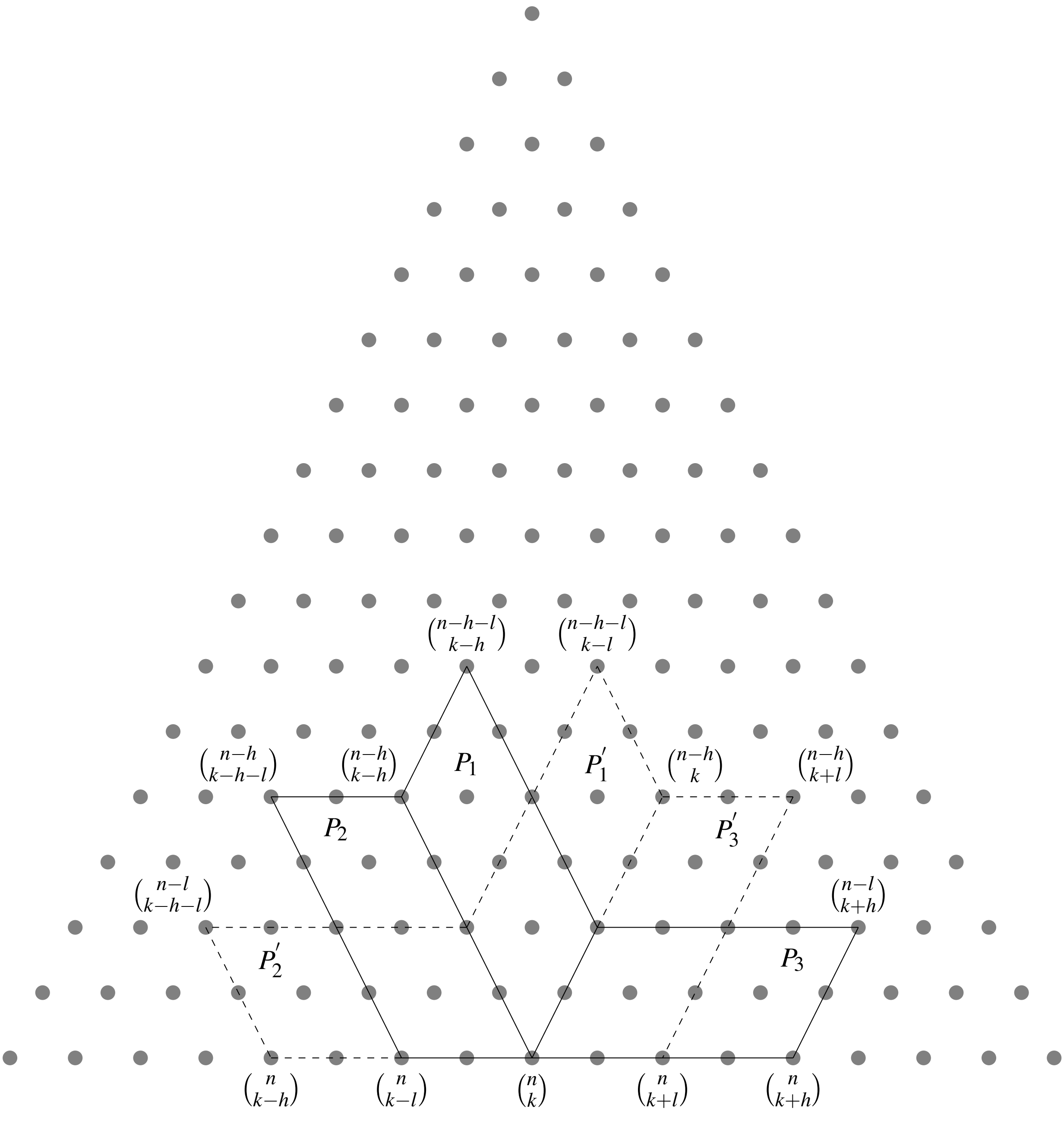
P_3 tem lados paralelos às direções n e r.

P_1' é a reflexão de P_1,

P_2' é a reflexão de P_2 e

P_3" é a reflexão de P_3.

Figura 18 – Flor de Pascal



Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

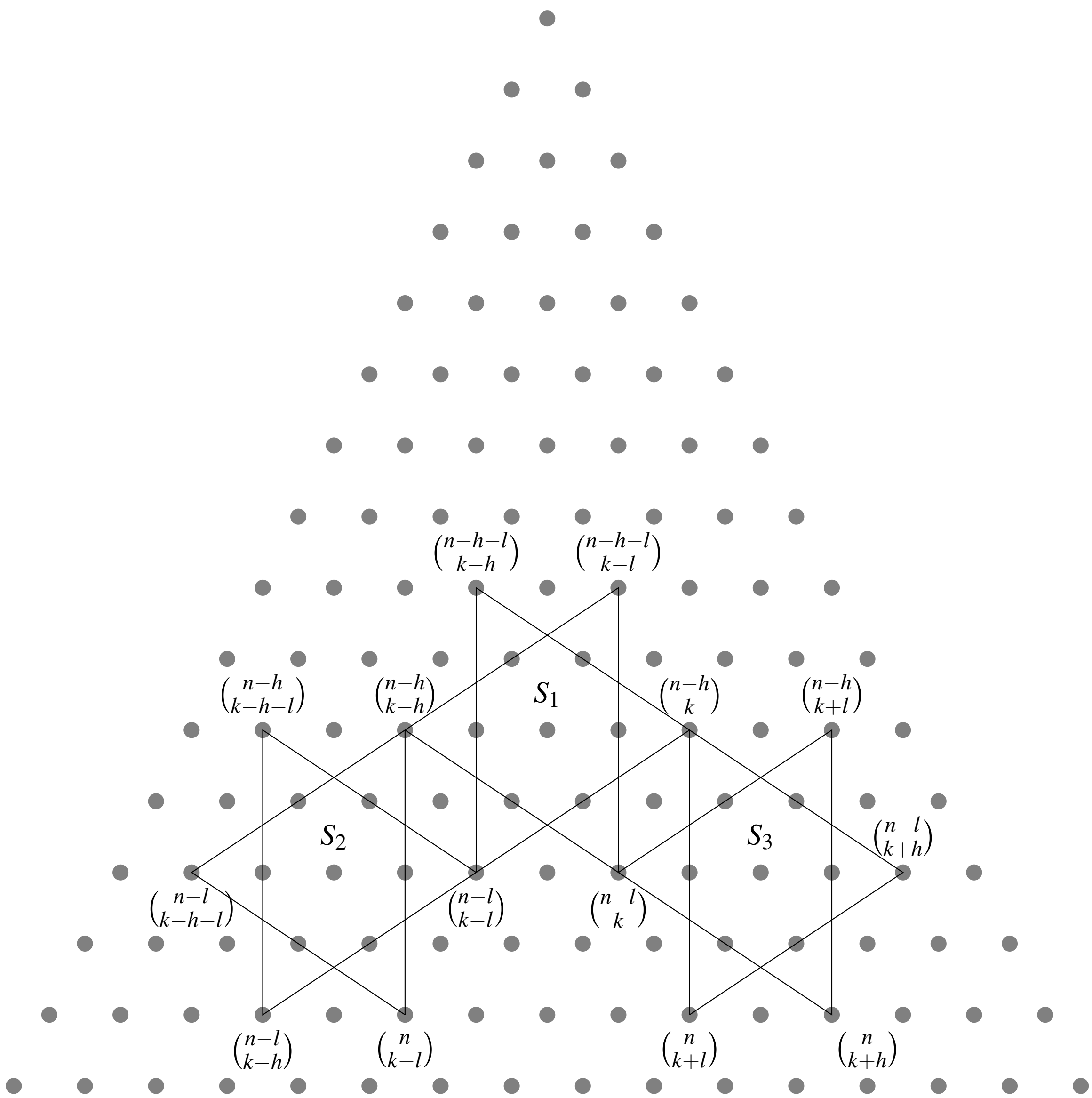
3.4.4 Teorema generalizado da estrela de David

$$\binom{n-l}{k-l}\binom{n-h}{k}\binom{n-h-l}{k-h}=\binom{n-h}{k-h}\binom{n-l}{k}\binom{n-h-l}{k-l}$$

Cada lado da equação deste teorema é o produto dos vértices anexados a um dos dois triângulos que compõem a Estrela de Davi ao redor de S_1.

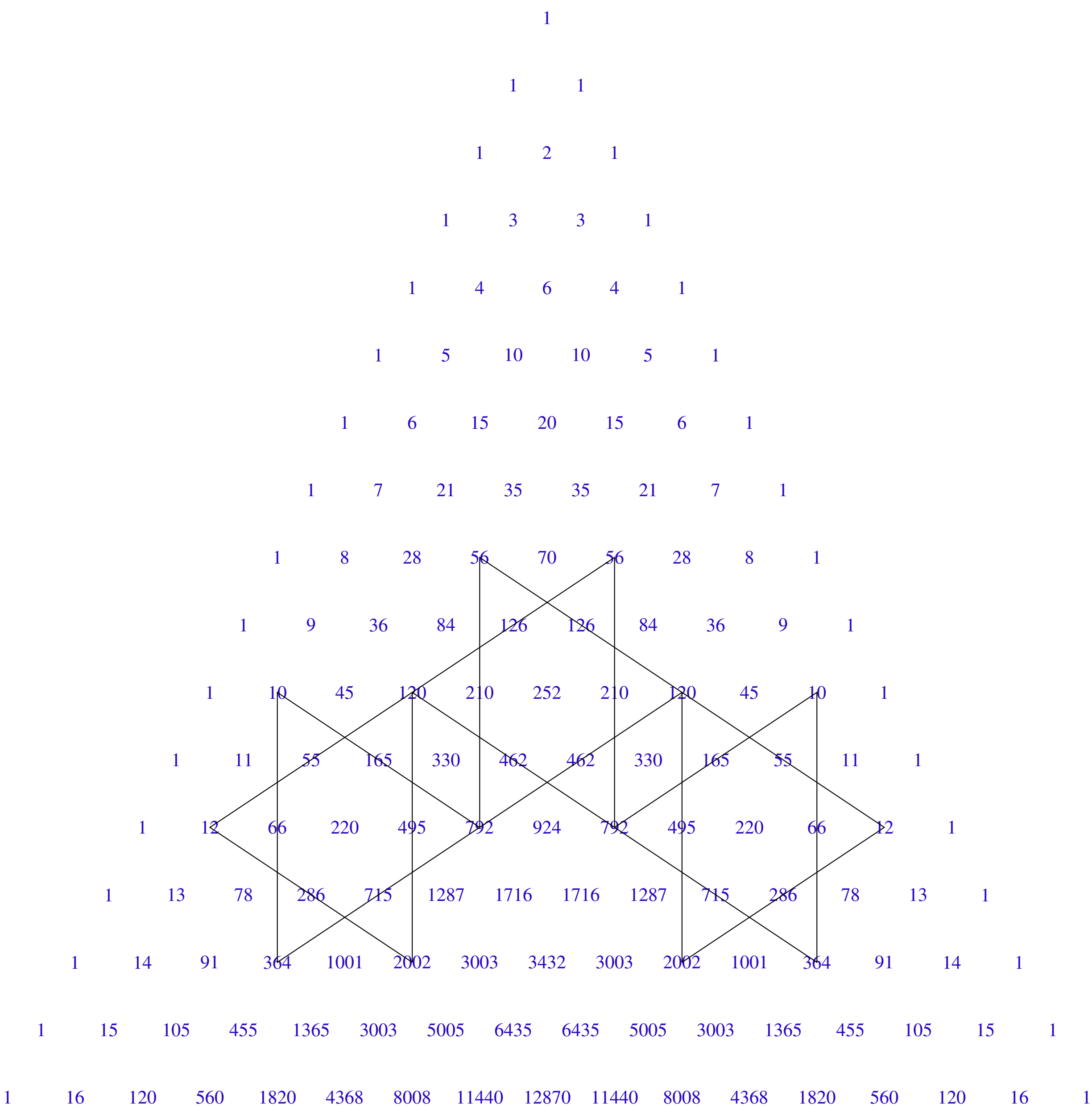
Prova-se facilmente desenvolvendo os cálculos binomiais em cada membro da igualdade. Basta ver que os binomiais de cada membro da igualdade tem os termos iguais, diferenciando-se apenas na composição dos binomiais.

Figura 19 – Estrela de Davi-1



Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

Figura 20 – Estrela de Davi-2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta figura os números binomiais foram calculados para tornar mais fácil a verificação da propriedade da estrela de Davi no triângulo de Pascal.

3.5 O triângulo de Pascal e trigonometria

Observando que para $x \in \mathbb{R}$

$$cos(2x) = cos^2x - sen^2x,$$

$$sen(2x) = 2senx.cosx.$$

Lembrando que para $x, y \in \mathbb{R}$

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$$

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x),$$

vem que para $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} cos(3x) &= cos(2x+x) \\ &= cos^3(x) - 3cos(x)sen^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sen(3x) &= sen(2x+x) \\ &= 3senx.cos^2x - sen^3x \end{aligned}$$

$$cos(4x) = cos^4(x) - 6cos^2(x)sen^2(x) + sen^4(x)$$

$$sen(4x) = 4cos^3(x)sen(x) - 4cos(x)sen^3(x).$$

O cálculo de $cos(nx)$ e de $sen(nx)$, para $n = 1, 2, 3, ...$ e $x \in \mathbb{R}$ é consequência do teorema binomial pois

$$cos(nx) + isen(nx) = [cos(x) + isen(x)]^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [cos(x)]^{n-k} [isen(x)]^k$$

e $cos(nx)$ é a parte real da fórmula acima ou seja, a soma dos dois primeiros termos da expressão para $cos(nx)$ são $cos^n(x) - \binom{n}{2} cos^{n-2}(x)sen^2(x)$ enquanto que $sen(nx)$ por ser a parte imaginária da fórmula tem como soma dos dois primeiros termos $\binom{n}{1} cos^{n-1}(x)sen(x) - \binom{n}{3} cos^{n-3}(x)sen^3(x)$.

Pelo triângulo de Pascal

$$cos(6x) = cos^6(x) - 15cos^4(x)sen^2(x) + 15cos^2(x)sen^4(x) - sen^4(x),$$

$$sen(6x) = 6cos^5(x)sen(x) - 20cos^3(x)sen^3(x) + 6cos(x)sen^5(x)$$

porque os números binomiais da sexta linha do triângulo de Pascal são

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 6, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 15 \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 15 \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 6 \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 1$$

e a fórmula de $cos(6x)$ tem como primeira parcela $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} cos^6(x)$, como segunda parcela $-\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} cos^4(x)sen^2(x)$, como terceira parcela $-\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} cos^2(x)sen^4$ e como quinta parcela $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} sen^6(x)$ (os sinais dos números binomiais são alternados iniciando com o sinal positivo) enquanto que a fórmula de $sen(6x)$ tem como primeira parcela $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} cos^5(x)sen(x)$, como segunda parcela $-\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} cos^3(x)sen^3(x)$, e como terceira parcela $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} cos(x)sen^5$ (os sinais dos números binomiais são alternados iniciando com o sinal positivo).

Como a linha número 7 do triângulo de Pascal é constituída pelos números binomiais 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7 e 1,

$$cos(7x) = cos^7(x) - 21cos^5(x)sen^2(x) + 35cos^3(x)sen^4(x) - 7cos(x)sen^6(x)$$

$$sen(7x) = 7cos^6(x)sen(x) - 35cos^4(x)sen^3(x) + 21cos^2(x)sen^5(x) - sen^7(x)$$

e de quebra para $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

3.6 Triângulo de Pascal e números primos

Teorema 17. Se p é um número natural primo então os números binomiais $\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix}$, são múltiplos de p.

Demonstração. De fato, se $k = 1, 2, \ldots, (p-1)$,

$$\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

é um número natural e como $k!$ divide $p(p-1)\ldots(p-k+1)$ e é relativamente primo com p, pois p não divide $k!$, $k!$ divide $(p-1)\ldots(p-k+1)$. Portanto, p divide o número binomial $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ com $k = 1, 2, \ldots, (p-1)$.

□

Teorema 18. Se p é um número natural primo então o número binomial

$$\begin{pmatrix} np+p \\ np+1 \end{pmatrix} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

é divisível por p.

Demonstração. De fato

$$\begin{pmatrix} np+p \\ np+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np+p \\ p-1 \end{pmatrix} = \frac{p(n+1)(np+p-1)\ldots(np+2)}{(p-1)!}$$

é um número natural e, como p não divide $(p-1)!$ (isto é, p e $(p-1)!$ são relativamente primos), $(p-1)!$ divide $(n+1)(np+p-1)\ldots(np+2)$.

Portanto o número primo p é um dos fatores primos do número binomial $\begin{pmatrix} np+p \\ np+1 \end{pmatrix}$.

□

Figura 21 – Os números primos no triângulo de Pascal

1										
1	1									
1	2	1								
1	$\boxed{3}$	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	$\boxed{15}$	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	$\boxed{36}$	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	···

......

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que a linha em que o úmero binomial da segunda coluna (a coluna dos números naturais) é primo, é constituída pelos múltiplos deste número binomial, conforme o enunciado do teorema 17.

Observe que os números circulados são números binomiais pares, divsíveis pelo número primo 2, que os números dentro dos quadrados são divisíveis pelo número primo 3 (os números estão na diagonal a partir de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ marcados a cada três posições) e que a partir de $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ os números da diagonal destacados dentro dos triângulos e espaçados de cinco posições são divisíveis pelo número primo 5.

3.7 A sequência de Fibonacci no triângulo de Pascal

O número de Fibonacci F_n aparece no triângulo de Pascal como a soma dos elementos da n-ésima diagonal inversa do triângulo de Pascal.

Figura 22 – A sequência de Fibonacci no triângulo de Pascal

	1									
$F_1 = 1$	1	1								
$F_2 = 1$	1	2	1							
$F_3 = 2$	1	3	3	1						
$F_4 = 3$	1	4	6	4	1					
$F_5 = 5$	1	5	10	10	5	1				
$F_6 = 8$	1	6	15	20	15	6	1			
$F_7 = 13$	1	7	21	35	35	21	7	1		
$F_8 = 21$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$F_9 = 34$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
$F_{10} = 55$										

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os números de Fibonacci F_1, F_2, F_3, ... são definidos pela relação de recorrência

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

e pelas condições iniciais $F_1 = F_2 = 1$ (F_0 é definido de modo que $F_2 = F_1 + F_0$, isto é, $F_0 = 0$).

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

com $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sendo as raízes da equação característica $\lambda^2 = \lambda + 1$ associada à relação de recorrência.

Observando os números de Fibonacci no triângulo de Pascal, tem-se:

$$F_1 = \binom{0}{0} \text{ em que ocorre } \left(\frac{1+1}{2}\right) \text{ parcelas,}$$

$$F_3 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} \text{ em que ocorre a } \left(\frac{3+1}{2}\right) \text{ parcelas,}$$

$$F_5 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \text{ em que ocorre } \left(\frac{5+1}{2}\right) \text{ parcelas,}$$

$$F_7 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} \text{ em que ocorre } \left(\frac{7+1}{2}\right) \text{ parcelas,}$$

$$F_9 = \binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} \text{ em que ocorre } \left(\frac{9+1}{2}\right) \text{ parcelas}$$

e assim sucessivamente, segue a fórmula

$$F_{2n-1} = \binom{2n-2}{0} + \binom{2n-3}{1} + \binom{2n-4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n-3} + \binom{n}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}$$

que apresenta $\left(\frac{2n-1+1}{2}\right) = n$ parcelas e o primeiro termo é $\binom{2n-2}{0}$.

Em somatório:

$$F_{2n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-2-j}{j}, \quad para \;\; n = 1, 2, 3, ..$$

e ainda,

$$F_{2n+1} = F_{2(n+1)-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2(n+1)-2-j}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n-j}{j}.$$

Por outro lado,

$F_2 = \binom{1}{0}$ que apresenta $\binom{\frac{2}{2}}{}$ parcelas,

$F_4 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$ que apresenta $\left(\frac{4}{2}\right)$ parcelas,

$F_6 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$ que apresenta $\left(\frac{6}{2}\right)$ parcelas,

$F_8 = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3}$ que apresenta $\left(\frac{8}{2}\right)$ parcelas

e assim sucessivamente, segue a fórmula

$$F_{2n} = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-2}{1} + \binom{2n-3}{2} + \ldots + \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} + \binom{n}{n-1}$$

que apresenta $\frac{2n}{2} = n$ parcelas e o primeiro termo é $\binom{2n-1}{0}$.

Em somatório:

$$F_{2n} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1-j}{j}, \ \ para \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

e ainda,

$$F_{2n+2} = F_{2(n+1)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2(n+1)-1-j}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1-j}{j}.$$

CAPÍTULO

4

O TRIÂNGULO HARMÔNICO DE PASCAL

4.1 Conceitos iniciais

O triângulo aritmético harmônico de Pascal é constituído pelos números harmônicos de Leibniz $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ definidos para $n = 0, 1, 2, 3, ...$ e $k = 0, 1, 2, ..., n$ por

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(n+1)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}$$

em que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é o coeficiente binomial .

Cálculo dos primeiros números harmônicos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3}$$

Figura 23 – Triângulo harmônico de Pascal

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & & & & & & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & & & & \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & & & \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} & \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}
\end{array}
$$

....

Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção do triângulo aritmético harmônico de Pascal tem como base a relação: se $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $k \in \{0,1,2,...,n\}$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

cuja verificação é imediata ou equivalentemente que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que os números harmônicos da segunda coluna do triângulo são resultados da diferença dos números harmônicos consecutivos da primeira coluna, que os números harmônicos da terceira coluna são resultados da diferença dos números harmônicos consecutivos da segunda coluna e assim por diante.

Os números da primeira coluna do triângulo aritmético harmônico são os inversos dos números naturais.

Os números da segunda coluna do triângulo aritmético harmônico são as diferenças entre os números da primeira coluna

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

.....

em geral, para $n=1,2,3,...$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2\frac{n(n+1)}{2!}}$$

e os números da terceira coluna do triângulo aritmético harmônico são as diferenças entre os números da segunda coluna

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$$

.....

em geral, para $n=1,2,3,...$

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{3\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}}$$

e em geral para os números da quarta coluna se $n=1,2,3,...$

$$\frac{2}{n(n+1(n+2)}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3}=\frac{2(n+3)-2n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

4.2 Propriedades

Teorema 19 (Teorema das linhas do triângulo harmônico)**.** Se $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$, a soma S_n dos números harmônicos da linha n

$$S_n = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{2^n}\left[2 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + ... + \frac{2^n}{n+1}\right].$$

Demonstração. Se $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{n+2}$$

porque

$$2S_{n+1} = 2\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} + ... + 2\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$+ ...$$

$$+ \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{n+1} + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{n+1} + S_n$$

pela relação de recorrência dos números harmônincos, ou seja, se $n = 1,2,3,...$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{n+2}$$

$$2^{n+1}S_{n+1} - 2_n S_n = \frac{2^{n+1}}{n+2}$$

para $n = 1 \quad 2^2S_2 - 2S_1 = \dfrac{2^2}{3}$

para $n = 2 \quad 2^3S_3 - 2^2S_2 = \dfrac{2^3}{4}$

....

$2^nS_n - 2^{n-1}S_{n-1} = \dfrac{2^n}{n+1}$

o que implica que

$$2^nS_n - 2S_1 = \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + ... + \frac{2^n}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{2^n}\left[2S_1 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + ... + \frac{2^n}{n+1}\right] \qquad \textit{se} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

□

Assim

$$S_1 = \frac{1}{2}2S_1 = 1 \quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2}\left[2S_1 + \frac{2^2}{3}\right] = \frac{1}{2^2}\left[2 + \frac{4}{3}\right] = \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2^3}\left[2S_1 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4}\right] = \frac{1}{8}\left[2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{4}\right] = \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$$

Teorema 20 (Teorema das colunas do triângulo harmônico)**.** Se $n = 1, 2, 3, ...$ e $k = 1, 2, 3, ...$,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+3 \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+4 \\ k+1 \end{bmatrix} + ...$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+3 \\ k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+4 \\ k+1 \end{bmatrix} + ... \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+ \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+3 \\ k \end{bmatrix} + ... \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO

5

NÚMEROS DE EULER

5.1 Somas ponderadas no triângulo de Pascal

Somando os elementos dentro de cada elipse, na figura 24, tem-se:

$1+3=4$ que é equivalente a $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}=2^2.$

$3+6=9$ que é equivalente a $\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=3^2.$

Figura 24 – Somas ponderadas-1

coluna k=2

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

Veja agora, que tomando 3 elementos dentro da elipse, figura 25, tem-se:

$$10 - 1 = 9 \quad \text{que é equivalente a} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3^2.$$

$$20 - 4 = 16 \quad \text{que é equivalente a} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4^2.$$

Figura 25 – Somas ponderadas-2

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

coluna k=3

Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

5.1.1 Lema

Para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$,

a) $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = n^2.$

b) $\begin{pmatrix} n+2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} = n^2.$

Demonstração. Prova do item a):

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

De maneira análoga prova-se o item b).

□

O lema sugere que os números naturais $S(2,0) = 1$ e $S(2,1) = 1$ tem a propriedade que para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$S(2,0)\binom{n}{2} + S(2,1)\binom{n+1}{2} = n^2$$

e que os números inteiros $S(3,0) = -1$, $S(3,1) = 0$ e $S(3,2) = 1$ são tais que para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$S(3,0)\binom{n}{3} + S(3,1)\binom{n+1}{3} + S(3,2)\binom{n+2}{3} = n^2.$$

A conjectura a fazer é saber se para cada número natural $k \in \mathbb{N} = \{2,3,...\}$ existem números inteiros

$$S(k,0), S(k,1), ..., S(k,k-1)$$

com a propriedade

$$S(k,0)\binom{n}{k} + S(k,1)\binom{n+1}{k} + ... + S(k,k-1)\binom{n+k-1}{k} = n^2$$

para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$.

Para $k = 4$, a tentativa de determinar números inteiros

$$S(4,0), \quad S(4,1), \quad S(4,2) \quad e \quad S(4,3)$$

com a propriedade de que para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}$,

$$n^2 = S(4,0)\binom{n}{4} + S(4,1)\binom{n+1}{4} + S(4,2)\binom{n+2}{4} + S(4,3)\binom{n+3}{4}$$

é equivalente a encontrar números inteiros a, b, c, d tais que

$$a\binom{n}{4} + b\binom{n+1}{4} + c\binom{n+2}{4} + d\binom{n+3}{4} = n^2$$

o que resulta em

$$(a+b+c+d)n^3 + (-6a-2b+2c+6d)n^2 + (11a-b-c+11d)n + (-6a+2b-2c+6d) = 4!n.$$

Usando o conceito de igualdade de polinômios, chega-se ao sistema linear de quatro equações a quatro incógnitas:

$a+b+c+d=0$
$-6a-2b+2c+6d=0$
$11a-b-c+11d=4!$
$-6a+2b-2c+6d=0$

cuja única solução é $a=1 \quad b=c=-1 \quad d=1.$

A conclusão é que os números inteiros

$$S(4,0)=1,\ S(4,1)=-1,\ S(4,2)=-1,\ e\ S(4,3)=1$$

são tais que para cada número natural $n \in \ =\{1,2,3,...\}$,

$$n^2 = S(4,0)\binom{n}{4} + S(4,1)\binom{n+1}{4} + S(4,2)\binom{n+2}{4} + S(4,3)\binom{n+3}{4}.$$

5.1.2 Teorema

Teorema 21. Definindo:

$S_2(2,0)=S_2(2,1)=1$

$S_2(k,j)=0 \quad \text{se } j<0 \text{ ou } j \geq k$

e para cada número natural $k \geq 3$ a definição por recorrência de $S_2(k,j)$ com

$$S_2(k,j)=S_2(k-1,j-1)-S_2(k-1,j)$$

segue que para número natural $n \in \mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$

$$n^2 = S_2(k,0)\binom{n}{k} + S_2(k,1)\binom{n+1}{k} + ... + S_2(k,k-1)\binom{n+k-1}{k}.$$

Demonstração. Seja k um número natural maior ou igual a 3. Então

$$\sum_{j=0}^{k-1} S_2(k,j)\binom{n+j}{k} = \sum_{j=0}^{k-1}[S_2(k-1,j-1)-S_2(k-1,j)]\binom{n+j}{k}$$

$$= [S_2(k-1,-1)-S_2(k-1,0)]\binom{n}{k}$$

$$+[S_2(k-1,0)-S_2(k-1,1)]\binom{n+1}{k}$$

$$+[S_2(k-1,1)-S_2(k-1,2)]\binom{n+2}{k}+\ldots$$

$$+[S_2(k-1,k-2)-S_2(k-1,k)]\binom{n+k-1}{k}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-2} S_2(k-1,j)\left[\binom{n+j+1}{k}-\binom{n+j}{k}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{k-2} S_2(k-1,j)\binom{n+j}{k-1}$$

pela identidade de Pascal.

E pela hipótese de indução para número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$

$$n^2 = \sum_{j=0}^{k-2} S_2(k-1,j)\binom{n+j}{k-1}.$$

$\square$

Utilizando a definição por recorrência de $S_2(k,j)$ descrita no teorema 21, é possível deteminar os coeficientes nas próximas linhas e assim por diante. Veja na próxima figura.

Figura 26 – Triângulo de Pascal com os coeficientes das somas ponderadas

1

1 1

1 2 (1) 1

1 3 (1)3 (-1) 1

1 4 6 (0) 4 (1)1

1 5 10 (1)10 (-1) 5 (-1)1

1 6 15 20 (-1)15 (2)6 (1)1

1 7 21 35 (1)35 (0)21 (-3)7 (-1)1

1 8 28 56 70 (-2)56 (2)28 (4)8 (1)1

1 9 36 84 126 (1)126 (2)84 (-5)36 (-5)9 (-1)1

1 10 45 120 210 252 (-3)210 (0)120 (9)45 (6)10 (1)1

Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

A pergunta que se faz é: para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ e para cada número natural fixado $l \geq k$, é possível a existência de números inteiros

$$S_k(l,0), S_kl,1), S_k(l,2), \ldots, S_k(l,l-1)$$

com a propriedade de que

$$n^k = S_K(l,0)\binom{n}{l} + S_k(l,1)\binom{n+1}{l} + S_k(l,2)\binom{n+2}{l} + \ldots + S_k(l,l-1)\binom{n+l-1}{l}?$$

Para dar resposta a esta pergunta é preciso definir os númeos de Euler, assunto da próxima seção.

5.2 Números de Euler - conceitos iniciais

O número de Euler de primeira ordem $E(n,k)$, para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ e para cada número inteiro $k \in \mathbb{Z} = \{\ldots -2,-1,0,1,2,\ldots\}$, é definido como o número de sequências de n termos distintos dois a dois cujos termos pertencem ao conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, que apresentam k ascendentes (um ascendente no índice j para $j = 1,2,\ldots,n-1$ em uma sequência de n termos dois a dois distintos entre si pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ocorre quando o j-ésimo termo da sequência é menor do que o próximo termo).

As sequências com 2 termos distintos dois a dois pertencentes ao conjunto $\{1,2\}$ são:
(1,2) com 1 ascendente no índice 1
(2,1) com zero ascendente
e portanto os números de Euler são: $E(2,0) = 1$ e $E(2,1) = 1$.

As sequências de 3 termos distintos dois a dois pertencentes ao conjunto $\{1,2,3\}$ são:
(1,2,3) com dois ascendentes nos índices 1 e 2
(1,3,2) com um ascendente no índice 1
(2,1,3) com um ascendente no índice 2
(2,3,1) com um ascendente no índice 1
(3,1,2) com um ascendente no índice 2
(3,2,1) com zero ascendente
e portanto os números de Euler são: $E(3,0) = 1$, $E(3,1) = 4$ e $E(3,2) = 1$.

Os números de Euler $E(4,0) = 1$, $E(4,1) = E(4,2) = 11$ e $E(4,3) = 1$ tomam estes valores porque a única sequência de quatro termos dois a dois distintos entre si pertencentes ao conjunto$\{1,2,3,4\}$, com zero ascendente é a sequência (4,3,2,1) e a única sequência de quatro termos dois a dois diferentes entre si pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4\}$ com três ascendentes nos índices 1, 2 e 3 é a sequência (1,2,3,4).

As 11 sequências de quatro termos com um único ascendente são:
(1,4,3,2), (2,1,4,3), (2,4,3,1), (3,1,4,2), (3,2,1,4), (3, 2,4,1), (3,4,2,1), (4,1,3,2), (4,2,1,3), (4,2,3,1), (4,3,1,2).

E as 11 sequências com 4 termos distintos dois a dois pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4\}$, apresentam dois ascendentes:
(1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,4,2,3), (1,3,4,2), (2,3,1,4), (2,4,1,3), (2,1,3,4), (3,4,1,2), (3,1,2,4), (4,1,2,3).

Por definição,

$E(0,0) = 1.$

$E(n,k) = 0 \quad para \quad n = 0,1,2,3,... \quad e \quad k = -1,-2,-3,... .$

$E(0,k) = 0, \quad se \quad k \neq 0.$

$E(n,0) = E(n,n-1) = 1.$

$E(n,0) + E(n,1) + n,2) + ... + E(n,n-1) = n!$

5.3 Lei da simetria

Teorema 22. Para $n = 1,2,3,...$ e para cada número inteiro $k \in \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

$$E(n,k) = E(n, n-1-k).$$

Demonstração. A sequência $a_1\ a_2\ ...\ a_n$, cujos termos são diferentes entre si dois a dois e pertencem a $\{1,2,...,n\}$ tem k ascendentes, para $k = 0,1,2,...,(n-1)$, quando e somente quando a sequência invertida $a_n\ a_{n-1}\ a_2\ a_1$ tem $(n-1-k)$ ascendentes. □

5.4 Relação de recorrência para os números de Euler

Para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ *e* $k \in \{0,1,2,...,(n-1)\}$,

$$E(n+1,k) = (k+1)E(n,k) + (n+1-k)E(n,k-1).$$

Demonstração. Fixada uma sequência de n termos dois a dois distintos entre si pertencentes ao conjunto $\{1,2,...,n\}$

$$a_1\ a_2\ ...a_n$$

a sequência de $(n+1)$ termos obtida a partir da sequência fixada com a colocação de $(n+1)$ como o primeiro termo

$$(n+1)\ a_1\ a_2\ ...a_n$$

ou com a colocação do termo $(n+1)$ entre os termos $a_j \quad e \quad a_{j+1}$

$$a_1\ a_2\ a_j\ (n+1)\ a_{j+1}...a_n$$

tem o mesmo número de ascendentes da sequência fixada $a_1\ a_2\ ...a_n$, enquanto que a sequência de $(n+1)$ termos obtida a partir da sequência fixada com a colocação do termo $(n+1)$ como último termo

$$a_1\ a_2\ ...a_n\ (n+1)$$

ou com a colocação do termo $(n+1)$ entre os termos $a_j \quad e \quad a_{j+1}$, tem o número de ascendentes da sequência fixada $a_1\ a_2\ ...a_n$ acrescida de 1.

Portanto, se $a_1\ a_2\ ...a_n$ tem k ascendentes, o número de ascendentes da sequência obtida com a colocação do termo $(n+1)$ no primeiro índice de ascendência, no segundo , ..., no k-ésimo ou primeiro termo gera $(k+1)$ sequências de $(n+1)$ termos com k ascendentes, enquanto que se $a_1\ a_2\ ...a_n$ tem $(k-1)$ ascendentes, a inserção do termo $(n+1)$ nos $[n-1-(k-1)]$ índices de não-ascendência ou como último termo gera $(n-k+1)$ sequências com k ascendentes: como

$E(n,k)$ é o número de sequência de$n$ termos com k ascendentes e como $E(n,k-1)$ é o número de sequências de n termos com $(k-1)$ ascendentes,

$$E(n+1,k) = (k+1)E(n,k) + (n+1-k)E(n,k-1).$$

□

Exemplos:
$E(2,0) = E(1,0) + 2E(1,-1) = E(1,0) = 1.$
$E(1,0) = E(0,0) + E(0,-1) = E(0,0) = 1.$
$E(2,1) = 2E(1,1) + E(1,0) = E(1,0) = 1.$

5.5 O triângulo aritmético dos números de Euler

Conforme a definição por recorrência e a lei de simetria, tem-se abaixo as primeiras linhas do triângulo Euleriano.

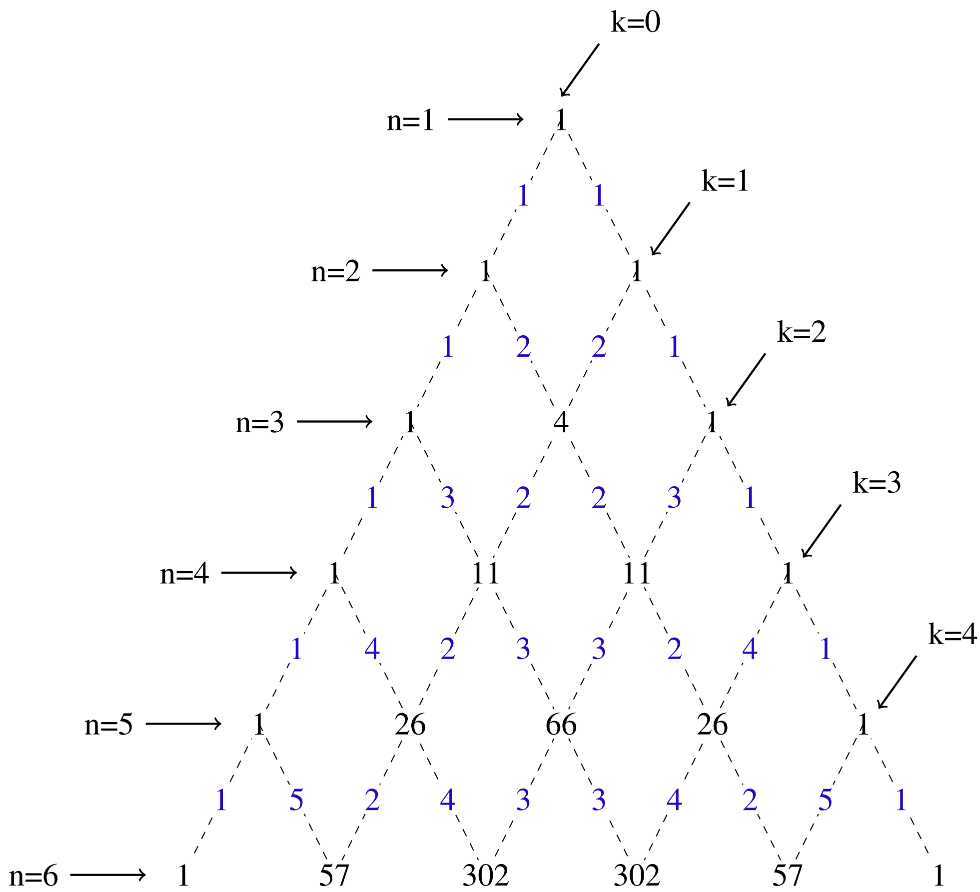
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5...$	
$n=1$	1	0					
$n=2$	1	1	0				
$n=3$	1	4	1	0			
$n=4$	1	11	11	1	0		
$n=5$	1	26	66	26	1	0	
$n=6$	1	57	302	302	57	1	0

....

$E(2,0) = 1$
$E(2,1) = 1.E(1,0) + 2.E(1,1) = 1$
$E(3,0) = 1$
$E(3,1) = 2.E(2,0) + 2.E(2,1) = 2+2 = 4$
$E(3,2) = 1$
$E(4,0) = 1$
$E(4,1) = 3.E(3,0) + 2.E(3,1) = 3+8 = 11$
$E(4,2) = 2.E(3,1) + 3.E(3,2) = 8+3 = 11$
$E(4,3) = 1$
$E(5,0) = 1$
$E(5,1) = 4.E(4,0) + 2.E(4,1) = 4+22 = 26$

$E(5,2) = 3.E(4,1)3.E(4.2) = 33+33 = 66$
$E(5,3) = E(5,1) = 26$
$E(5,4) = 1$
$E(6,0) = 1$
$E(6,1) = 5.E(5,0)+2.E(5,1) = 5+52 = 57$
$E(6,2) = 4.E(5,1)+3.E(5,2) = 104+198 = 302$
$E(6,3) = 3.E(5,2)+4.E(5,3) = 198+104 = 302$
$E(6,4) = 2.E(5,3)+5.E(5,4) = 52+5 = 57$
$E(6,5) = 1$

Figura 27 – Triângulo euleriano



Fonte – Adaptada de (Hilton; Holton; Pedersen, 1997, cap.6)

Nessa figura , mudando a disposição das entradas como no triângulo de Pascal, foram acrescentados os coeficientes da relação de recorrência $(k+1)$ e $(n-k)$, ao longo das diagonais.

5.6 A identidade de Worpitzky

Os polinômios binomiais na variável real x são definidos como generalizações dos números binomiais:

$$\binom{x}{1} = x$$

$$\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2!}$$

$$\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

$$\binom{x}{4} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$$

e assim sucessivamente para $n = 1, 2, 3...$

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{n!}.$$

Quando x é um número natural, $\binom{x}{n}$ é um número binomial.

Com a observação de que se $x \in \mathbb{R}$

$$x^0 = \binom{x}{0} = 1 \quad = E(0,0)$$

$$x^1 = \binom{x}{1} = \quad E(1,0)\binom{x}{1}$$

$$x^2 = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2}$$

$$= E(2,0)\binom{x}{2} + E(2,1)\binom{x+1}{2}$$

$$x^3 = \binom{x}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3}$$

$$= E(3,0)\binom{x}{3} + E(3,1)\binom{x+1}{3} + E(3,2)\binom{x+2}{3}$$

$$x^4 = \binom{x}{4} + 11\binom{x+1}{4} + 11\binom{x+2}{4} + \binom{x+3}{4}$$

$$= E(4,0)\binom{x}{4} + E(4,1)\binom{x+1}{4} + E(4,2)\binom{x+2}{4} + E(4,3)\binom{x+3}{4}.$$

A identidade de Worpitzky

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)\binom{x+k}{n}$$

é válida para $x \in \mathbb{R}$ *e* $n = 0,1,2,...$

Demonstração. A prova da identidade de Worpitzky utiliza o princípio de indução matemática. Para a compreensão da passagem da hipótese de indução para a tese, é melhor observar o seguinte:

$$x^5 = E(5,0)\binom{x}{5} + E(5,1))\binom{x+1}{5} + E(5,2)\binom{x+2}{5} + E(5,3)\binom{x+3}{5}$$

$$+ E(5,4)\binom{x+4}{5}$$

$$= [1.E(4,0)+5.E(4,-1)]\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} + [2.E(4,1)+4.E(4,0)]\begin{pmatrix} x+1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$+ [3.E(4,2)+3.E(4,1)]\begin{pmatrix} x+2 \\ 5 \end{pmatrix} + [4.E(4,3)+2.E(4,2)]\begin{pmatrix} x+3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$+ [5.E(4,4)+1.E(4,3)]\begin{pmatrix} x+4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= E(4,0)\left[\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} x+1 \\ 5 \end{pmatrix}\right] + E(4,1)\left[2.\begin{pmatrix} x+1 \\ 5 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} x+2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

$$+ E(4,2)\left[3.\begin{pmatrix} x+2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} x+3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] + E(4,3)\left[4.\begin{pmatrix} x+3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} x+4 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(4,k)\left[(4-k)\begin{pmatrix} x+k+1 \\ 5 \end{pmatrix} + (k+1)\begin{pmatrix} x+k \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(4,k)\left[\begin{pmatrix} x+k \\ 4 \end{pmatrix}\left[(4-k)\frac{x+k+1}{5} + (k+1)\frac{x+k-4}{5}\right]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(4,k)\left[\begin{pmatrix} x+k \\ 4 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\left[(x+k+1)(4-k+k+1) - 5.(k+1)\right]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E(4,k)\begin{pmatrix} x+k \\ 4 \end{pmatrix} x$$

$$= x^4.x.$$

Admitindo que para $x \in \mathbb{R} \quad e \quad n \in \mathbb{N} = \{1,2,3...\}$

$$x^n = E(n,0)\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} + E(n,1)\begin{pmatrix} x+1 \\ n \end{pmatrix} + ... + E(n,n-1)\begin{pmatrix} x+n-1 \\ n \end{pmatrix}.$$

Então,

$$E(n+1,0)\binom{x}{n+1}+E(n+1,1)\binom{x+1}{n+1}+E(n+1,2)\binom{x+2}{n+1}$$

$$+\ldots+E(n+1,n)\binom{x+n}{n+1}$$

$$=[E(n,0)+(n+1)E(n,-1)]\binom{x}{n+1}$$

$$+[2E(n,1)+nE(n,0)]\binom{x+1}{n+1}$$

$$+[3E(n,2)+(n-1)E(n,1)]\binom{x+2}{n+1}+\ldots$$

$$+[nE(n,n-1)+2E(n.n-2)]\binom{x+n-1}{n+1}$$

$$+[(n+1)E(n,n)+1E(n,n-1)]\binom{x+n}{n+1}$$

$$=E(n,0)\left[\binom{x}{n+1}+n\binom{x+1}{n+1}\right]$$

$$+E(n,1)\left[2\binom{x+1}{n+1}+(n-1)\binom{x+2}{n+1}\right]$$

$$+E(n,2)\left[3\binom{x+2}{n+1}+(n-2)\binom{x+3}{n+1}\right]+\ldots$$

$$+E(n,n-1)\left[n\binom{x+n-1}{n+1}+1\binom{x+n}{n+1}\right]$$

$$= E(n,0)\left[\frac{x!(n-n)}{(n+1)n!(x-n)!} + \frac{n(x+1)x!}{(n+1)n!(n-n)!}\right]$$

$$+E(n,1)\left[2.\frac{(x+1)!(x+1-n)}{(n+1)n!(x+1-n!} + (n-1).\frac{(x+2)(x+1)!}{(n+1)n!(x+1-n)!}\right]$$

$$+E(n,2)\left[3.\frac{(x+2)!(x+2-n)}{(n+1)n!(x+2-n)!} + (n-2)\frac{(x+3)(x+2)!}{(n+1)n!(x+2-n)!}\right] + \dots$$

$$+E(n,n-1)\left[n.\frac{(x+n-1)!(x-1)}{(n+1)n!(x-1)!} + 1.\frac{(x+n)(x+n-1)!}{(n+1)n!(x-1)!}\right]$$

$$= E(n,0)\left[\frac{x-n+n(x+1)}{n+1}\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}\right]$$

$$+E(n,1)\left[\frac{2(x+1-n)+(n-1)(x+2)}{n+1}\begin{pmatrix} x+1 \\ n \end{pmatrix}\right]$$

$$+E(n,2)\left[\frac{3(x+2-n)+(n-2)(x+3)}{n+1}\begin{pmatrix} x+2 \\ n \end{pmatrix}\right] + \dots$$

$$+E(n,n-1)\left[\frac{n(x-1)+(x+n)}{n+1}\begin{pmatrix} x+n-1 \\ n \end{pmatrix}\right]$$

$$= E(n,0)\left[x\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}\right] + E(n,1)\left[x\begin{pmatrix} x+1 \\ n \end{pmatrix}\right] + E(n,2)\left[x\begin{pmatrix} x+2 \\ n \end{pmatrix}\right] + \dots$$

$$+E(n,n-1)\left[x\begin{pmatrix} x+n-1 \\ n \end{pmatrix}\right]$$

$$= x\underbrace{\left[E(n,0)\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} + E(n,1)\begin{pmatrix} x+1 \\ n \end{pmatrix} + E(n,2)\begin{pmatrix} x+2 \\ n \end{pmatrix} + \dots + E(n,n-1)\begin{pmatrix} x+n-1 \\ n \end{pmatrix}\right]}_{x^n}$$

$$= x.x^n = \quad x^{n+1}.$$

□

5.7 A fórmula explícita para os números eulerianos

Teorema 23. Para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e para cada número inteiro $k \geq 0$,

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n.$$

Demonstração. i) Se $n = 1$,
Para $k = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{1+1}{j} (0+1-j)^1 = (-1)^0 \binom{2}{0} = 1 \quad = E(1,0).$$

Para $k = 1$

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{1+1}{j} (1+1-j)^1 = (-1)^0 \binom{2}{0} 2^1 + (-1)^1 \binom{2}{1} 1^1 = 0 \quad = E(1,1).$$

Para $k = 2,3,4,...,$

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{1+1}{j} ((k+1-j)^1 = (-1)^0 \binom{2}{0} (k+1)^1 + (-1)^1 \binom{2}{1} k^1$$

$$+ (-1)^2 \binom{2}{2} (k-1)^1$$

$$= (k+1) - 2k + (k-1) = 0 \quad = E(1,k).$$

ii) Se $n = 2,3,4,...$ *e* $k = 0,1,2,...,n-1$,

$$E(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$$

$$E(n,k-1) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-1+1-j)^n$$

então

$$
\begin{aligned}
E(n+1,k) &= (k+1)E(n,k)+(n+1-k)E(n,k-1) \\
&= (k+1)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{n+1}{j}(k+1-j)^n \\
&+ (n+1-k)\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \binom{n+1}{j}(k-1+1-j)^n \\
&= (k+1)^{n+1}+(k+1)\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{n+1}{j}(k+1-j)^n \\
&+ (n+1-k)\underbrace{\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{n+1}{j-1}(k+1-j)^n}_{trocando\, j\, por\, j+1} \\
&= (k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left[(k+1)\binom{n+1}{j}+(k-n-1)\binom{n+1}{j-1}\right](k+1-j)^n \\
&= (k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left[(k+1)\binom{n+1}{j}+[(k+1)-(n+2)]\binom{n+1}{j-1}\right](k+1-j)^n \\
&= (k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left[(k+1)\binom{n+2}{j}-(n+2)\binom{n+1}{j-1}\right](k+1-j)^n \\
&= (k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left[(k+1-j)\binom{n+2}{j}\right](k+1-j)^n \\
&= (k+1)^{n+1}+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{n+2}{j}(k+1-j)^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+2}{j}(k+1-j)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

5.8 Os números pseudo-eulerianos

Os números pseudo-eulerianos

$$C_k(l,j)$$

são definidos $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$, $\quad l \geq k$ e para $j \in \mathbb{Z}$ pela relação de recorrência

$$C_k(l+1,j) = C_k(l,j-1) - C_k(l,j)$$

com a condição inicial

$$C_k(k,j) = E(k,j), \quad (numero \quad de \quad Euler)$$

$$C_k(l,j) = 0 \quad para \quad j \geq l \geq k \quad ou \quad j = -1,-2,-3,...$$

5.8.1 Teorema

Teorema 24. Para cada natural $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e para cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$,

$$\sum_{j=0}^{l-1} C_k(l,j) \left(\begin{array}{c} n+j \\ l \end{array} \right) = n^k.$$

Demonstração. Prova por indução matemática em l.

A igualdade é verdadeira para $l = k$. De fato,

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_k(k,j) \left(\begin{array}{c} n+j \\ k \end{array} \right) \quad = \quad \sum_{j=0}^{k-1} E(k,j) \left(\begin{array}{c} n+j \\ k \end{array} \right) = \quad n^k.$$

Se

$$\sum_{j=0}^{l-1} C_k(l,j) \left(\begin{array}{c} n+j \\ l \end{array} \right) = n^k$$

então

$$\sum_{j=0}^{l} C_k(l+1,j)\begin{pmatrix} n+j \\ l+1 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{l}[C_k(l,j-1)-C_k(l,j)]\begin{pmatrix} n+j \\ l+1 \end{pmatrix}$$

$$= [C_k(l,-1)-C_k(l,0)]\begin{pmatrix} n \\ l+1 \end{pmatrix}$$

$$+[C_k(l,0)-C_k(l,1)]\begin{pmatrix} n+1 \\ l+1 \end{pmatrix}+$$

$$+[C_k(l,1)-C_k(l,2)]\begin{pmatrix} n+2 \\ l+1 \end{pmatrix}+\ldots$$

$$+[C_k(l,k-2)-C_k(l,k-1)]\begin{pmatrix} n+k-1 \\ j \end{pmatrix}$$

$$+[C_k(l,k-1)-C_k(l,l)]\begin{pmatrix} n+k \\ l+1 \end{pmatrix}$$

$$= C_k(l,0)\left[\begin{pmatrix} n+1 \\ l+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n \\ l+1 \end{pmatrix}\right]$$

$$+C_k(l,1)\left[\begin{pmatrix} n+2 \\ l+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n+1 \\ l+1 \end{pmatrix}\right]+\ldots$$

$$+C_k(l,k-1)\left[\begin{pmatrix} n+k \\ l+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n+k-1 \\ l+1 \end{pmatrix}\right]-C_k(l,l)\begin{pmatrix} n+k \\ l+1 \end{pmatrix}$$

$$= C_k(l,0)\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}+C_k(l,1)\begin{pmatrix} n+1 \\ l \end{pmatrix}+\ldots+C_k(l,k-1)\begin{pmatrix} n+k-1 \\ l \end{pmatrix}$$

$$= n^k.$$

$\square$

5.8.2 A fórmula explícita para os números pseudo-eulerianos

Teorema 25.
$$C_k(l,j) = (-1)^{l-k}\sum_{s=0}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k.$$

Demonstração. Prova por indução em l:

Para $l=k$, $\quad C_k(k,j) = E(k,j) = \sum_{s=0}^{j}(-1)^j \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} (j+1-s)^k$

cuja fórmula é válida para os números de Euler.

Admitindo a hipótese de indução de que

$C_k(l,j) = (-1)^{l-k}\sum_{s=0}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k$

$C_k(l+1,j) = C_k(l,j-1) - C_k(l,j)$.

Pela hipótese de indução:

$$C_k(l+1,j) = (-1)^{l-k}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix} (j-s)^k - (-1)^{l-k}\sum_{s=0}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k$$

$$= \underbrace{(-1)^{l-k}\sum_{t=1}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ t-1 \end{pmatrix} (j+1-t)^k - (-1)^{l-k}}_{t=s+1}\left[(j+1)^k + \sum_{s=1}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k\right]$$

$$= (-1)^{l-k)}\sum_{s=1}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s-1 \end{pmatrix} (j+1-s)^k - (-1)^{l-k}\left[(j+1)^k + \sum_{s=1}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k\right]$$

$$= (-1)^{l-k}\sum_{s=1}^{j}(-1)^s \left[\begin{pmatrix} l+1 \\ s-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l+1 \\ s \end{pmatrix}\right] (j+1-s)^k - (-1)^{l-k}(j+1)^k$$

$$= (-1)^{l+1-k}\sum_{s=1}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+2 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k + (j+1)^k.$$

Finalmente,

$$C_k(l+1,j) = (-1)^{l+1-k}\sum_{s=0}^{j}(-1)^s \begin{pmatrix} l+2 \\ s \end{pmatrix} (j+1-s)^k$$

completando a demonstração por indução.

□

Consequências

$C_k(l,l-1) = 1 \quad$ e $\quad C_k(l,j) = 0 \quad para\, j \geq l \quad$ e $\quad l \geq k.$

5.9 Números de Euler de segunda ordem

As sequências próprias do tipo n para $n = 1,2,3,...$ são sequências de $(2n)$ termos com dois 1, dois 2,..., dois n, com a propriedade de que para $j = 1,2,...,n$ os termos da sequência compreendidos entre os dois termos da sequência iguais ao j são maiores do que j, o que implica que os termos da sequência iguais a n são termos consecutivos.

A sequência própria do tipo n para $n = 1,2,...$ tem um ascendente no índice j com $j = 1,2,...,(2n-1)$ caso o j-ésimo termo da sequência é menor do que o termo de índice $j+1$. O número de Euler de segunda ordem

$$e(n,k) \quad para \quad n = 1,2,3,... \quad e \quad k = 0,1,2,...$$

é definido como o número de sequências próprias do tipo n com k ascendentes.
Por exemplo para $n = 3$, as sequências são:
(332211) com 0 ascendente
(221133) com 1 ascendente
(221331) com 1 ascendente
(223311) com 1 ascendente
(233211) com 1 ascendente
(113322) com 1 ascendente
(133221) com 1 ascendente
(331122) com 1 ascendente
(331221) com 1 ascendente
(112233) com 2 ascendentes
(122133) com 2 ascendentes
(112332) com 2 ascendentes
(123321) com 2 ascendentes
(133122) com 2 ascendentes
(122331) com 2 ascendentes
e portanto,
$e(3,0) = 1$, $e(3,1) = 8$, $e(3,2) = 6$.

5.9.1 Propriedades

Se $n = 1,2,3,...$, então:

i) $e(n,0) = 1$.
ii) $e(n,n) = e(n,n+1) = e(n,n+2) = ... = 0$.
iii) $e(n,0)+e(n,1)+e(n,2)+...+e(n,n) = (2n-1)(2n-3)...3.1$.

5.10 A relação de recorrência para os números de Euler de segunda ordem

Teorema 26. Se $n = 1,2,...$ e $k = 0,1,2,...$ então

$$e(n+1,k+1) = (k+2)e(n,k+1) + (2n-k)e(n,k).$$

Demonstração. Uma sequência própria de tipo n para $n = 1,2,3,...$ com $(k+1)$ ascendentes origina $(k+2)$ sequências próprias de tipo $(n+1)$ com $(k+1)$ ascendentes: a primeira sequência própria de tipo $(n+1)$ é obtida com a inserção dos dois valores de $(n+1)$ imediatamente antes do primeiro termo da sequência própria de tipo n e as demais $(k+1)$ sequências próprias do tipo $(n+1)$ são obtidas com a inserção dos dois valores de $(n+1)$ imediatamente antes dos termos onde ocorrem ascendentes.
Uma sequência própria de tipo n com k ascendentes origina $(2n-k)$ sequências próprias de tipo $(n+1)$ com a inserção dos dois valores de $(n+1)$ imediatamente após os termos da sequência própria de tipo n onde não ocorrem ascendentes.
o teorema está demonstrado!

□

Conforme a definição de recorrência, segue as seis primeiras linhas do triângulo aritmético dos números de Euler de segunda ordem.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5...$	
$n=1$	1	0					
$n=2$	1	2	0				
$n=3$	1	8	6	0			
$n=4$	1	22	58	24	0		
$n=5$	1	52	328	444	120	0	
$n=6$	1	114	1452	4400	3708	720	0

....

CAPÍTULO

6

NÚMEROS DE STIRLING

Seja $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ um número natural. Uma função f, cujo domínio de definição $D(f)$ e cujo conjunto de valores $R(f)$ são iguais ao conjunto $\{1,2,3,...,n\}$, é definida pela sequência de n termos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,...,n\}$

$$f(1)\ f(2)\ f(3)\ ...f(n)$$

em que $f(1)$ é o primeiro termo da sequência, $f(2)$ é o segundo termo da sequência e sucessivamente $f(n)$ é o último termo da sequência. E é definida pela sua representação canônica em ciclos disjuntos: se $f(1) = 1$ então (1) é o primeiro ciclo da representação canônica e se $f(1) \neq 1$ então $f[f(1)]$ é o segundo termo do primeiro ciclo; se $f[(f(1)] = 1$, então $(1\ f(1))$ é o primeiro ciclo da representação canônica e se $f[f(1)] \neq 1$ então $f[f[f(1)]]$ é o terceiro termo do primeiro ciclo e assim por diante. Se houver, o segundo ciclo é iniciado com o menor número ausente no primeiro ciclo e a representação está completa quando todos os elementos do conjunto $\{1,2,...,n\}$ estão presentes na representação.

Por exemplo, se f é uma função cujo domínio de definição $D(f)$ e cujo conjunto de valores $R(f)$ são iguais ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ definida por $f(1) = 3$, $f(2) = 8$, $f(3) = 5$, $f(4) = 7$, $f(5) = 1$, $f(6) = 2$, $f(7) = 4$, $f(8) = 9$ e $f(9) = 6$, então f é definida pela sequência de nove termos

$$(3\ 8\ 5\ 7\ 1\ 2\ 4\ 9\ 6)$$

e a representação canônica de f em ciclos disjuntos é

$$(1\ 3\ 5\ )\ \ (2\ 8\ 9\ 6)\ \ (4\ 7)$$

o que significa que $f(1) = 3$, $f(3) = 5$, $f(5) = 1$; $f(2) = 8$, $f(8) = 9$, $f(9) = 6$, $f(6) = 2$ e $f(7) = 4$, $f(4) = 7$. E reciprocamente a representação canônica em ciclos disjuntos

$$(1\ 3\ 4)\ \ (2)\ \ (5\ 9)\ \ (6\ 8)\ \ (7)$$

define uma função g, cujo domínio de definição $D(g)$ e cujo conjunto de valores $R(g)$ são iguais ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ definida pela sequência de nove temos

$$(3\,2\,4\,1\,9\,8\,7\,6\,5).$$

O número de Stirling de primeira espécie $S(n,k)$ para $n = 0,1,2,\ldots \quad k = 0,1,2,\ldots,n$ é definido como o número de funções f cujo domínio de definição $D(f)$ e cujo conjunto de valores $R(f)$ são iguais ao conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, cuja representação canônica em ciclos disjuntos apresenta k ciclos se $n = 1,2,3,\ldots$ e $k = 1,2,\ldots,n$; é definido igual a 0 se $n = 1,2,3,\ldots$ e $k = 0,n+1,n+2,\ldots$ e é definido igual a 1 se $n = k = 0$.

O número de Stirling de primeira espécie $S(1,1) = 1$ porque 1 é a única sequência de um termo para uma função f com domínio de definição $D(f)$ e conjunto de valores $R(f)$ iguais ao conjunto unitário $\{1\}$ e (1) é a sua representação canônica em ciclos disjuntos.

Os números de Stirling $S(2,1) = S(2,2) = 1$ porque $(1\ 2)$ e $(2\ 1)$ são as duas sequências de dois termos e (1) (2) e (1 2) são respectivamente as representações canônicas das duas funções com domínio de definição e conjunto de valores iguais ao conjunto $\{1,2\}$.

Os números de Stirling de primeira espécie $S(3,1) = 2$, $S(3,2) = 3$ e $S(3,3) = 1$ porque as seis sequências de três termos

1 2 3 $\quad 1 \to 1,\ \ 2 \to 2,\ \ 3 \to 3$

1 3 2 $\quad 1 \to 1,\ \ 3 \to 2,\ \ 2 \to 3$

2 1 3 $\quad 1 \to 2,\ \ 2 \to 1,\ \ 3 \to 3$

2 3 1 $\quad 1 \to 2,\ \ 2 \to 3,\ \ 3 \to 1$

3 1 2 $\quad 1 \to 3,\ \ 2 \to 1,\ \ 3 \to 2$

3 2 1 $\quad 1 \to 3,\ \ 2 \to 2,\ \ 3 \to 1$

correspondem respectivamente a funções cujas representações canônicas em ciclos disjuntos são

$$(1)\,(2)\,(3),\ \ (1)\,(2\,3),\ \ (1\,2)\,(3),\ \ (1\,2\,3),\ \ (1\,3\,2),\ \ (1\,3)\,(2).$$

6.1 A recorrência para os números de Stirling de primeira espécie

Se $n = 0,1,2,3,...$ *e se* $k = 0,1,2,...,n$ então

$$S(n+1,k+1) = S(n,k) + n.S(n,k+1)$$

Demonstração. Seja $n = 1,2,3,...$ e $k = 1,2,..,n$
O número de Stirling de primeira espécie $S(n+1,k+1)$ é o número de todas as funções com domínio de definição e conjunto de valores iguais ao conjunto $\{1,2,...,n,n+1\}$ com $(k+1)$ ciclos na representação canônica em ciclos disjuntos: o número de tais funções em que $(n+1)$ é um ciclo unitário na representação canônica em ciclos disjuntos é o número $S(n,k)$ de todas as funções com domínio de definição e conjunto de valores iguais ao conjunto $\{1,2,...,n\}$ com k ciclos na representação canônica em ciclos disjuntos e o número de tais funções em que $(n+1)$ não é um ciclo unitário na representação canônica em ciclos disjuntos é $nS(n,k+1)$ porque toda função com domínio de definição e conjunto de valores iguais ao conjunto $\{1,2,...,n\}$ com $(k+1)$ ciclos na representação canônica em ciclos disjuntos origina n funções com domínio de definição e conjunto de valores iguais ao conjunto $\{1,2,...,n,n+1\}$ com $(k+1)$ ciclos na representação canônica em ciclos disjuntos: a primeira função é determinada pela inserção do valor $(n+1)$ imediatamente após o número 1 do primeiro ciclo, a segunda função é determinada pela inserção do valor $(n+1)$ imediatamente após o segundo número do primeiro ciclo se houver dois números no primeiro ciclo ou imediatamente após o primeiro termo do ciclo seguinte e assim sucessivamente a n-ésima função é determinada pela inserção do valor $(n+1)$ imediatamente após o último termo do último ciclo. □

6.2 Triângulo aritmético dos números de Stirling de primeira espécie

O triângulo aritmético dos números de Stirling de primeira espécie é construído a partir da recorrência válida para $n = 0,1,2,...$ e $k = 0,1,2,...,n$

$$S(n+1,k+1) = S(n,k) + n.S(n,k+1)$$

e dos valores iniciais, *para*$n = 1,2,3,...$

$$S(0,0) = 1, \qquad S(n,0) = 0, \qquad S(0,n) = 0.$$

O complemento nominal de primeira espécie ao número de Stirling provem do fato de que na segunda parcela do segundo membro da relação de recorrência aparece o fator n da linha da tabela.

Figura 28 – Triângulo aritmético dos números de Stirling de primeira espécie

n	$S(n,0)$	$S(n,1)$	$S(n,2)$	$S(n,3)$	$S(n,4)$	$S(n,5)$	$S(n,6)$	$S(n,7)$
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.3 Os números de Stirling de segunda espécie

Os números de Stirling de segunda espécie $s(n,k)$, para n=0,1,2,... e para $k = 0,1,2,...,n$ é definido como o número de partições do conjunto $\{1,2,...,n\}$ constituída por k subconjuntos não vazios do conjunto $\{1,2,...,n\}$ dois a dois distintos entre si cuja união é o conjunto $\{1,2,...,n\}$ se $n = 1,2,3,...$ e $k = 1,2,3,...,n$. É definido como zero se $n = 1,2,3,...$ e $k = 0,n+1,n+2,...$ e é definido como um se $n = k = 0$.

O número de Stirling de segunda espécie $s(1,1) = 1$ porque há uma única partição do conjunto unitário $\{1\}$.

Os números de Stirling de segunda espécie $s(2,1) = s(2,2) = 1$ porque as duas únicas partições do conjunto $\{1,2\}$ são $\{1,2\}$ e $\{1\} \cup \{2\}$.

Os números de Stirling de segunda espécie $s(3,1) = 1$, $s(3,2) = 3$ e $s(3,3) = 1$ porque as partições do conjunto$\{1,2,3\}$ são $\{1,2,3\}$, $\{1\} \cup \{2,3\}$, $\{2\} \cup \{1,3\}$, $\{3\} \cup \{1,2\}$ e $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

6.4 Propriedades

Se $n = 2,3,4,...$

a) $s(n,n) = 1$ porque $\{1,2,...,n\} = \{1\} \cup \{2\} \cup ... \cup \{n\}$.

b) $s(n,1) = 1$ porque $\{1,2,...,n\} = \{1,2,..,n\}$.

c) $s(n,2) = 2^{n-1} - 1$ porque se $X \cup Y = \{1,2,...,n\}$ e $X \cap Y = \varnothing$ e se $n \in Y$ então x é um dos $(2^{n-1} - 1)$ subconjuntos não vazios do conjunto $\{1,2,...,n-1\}$.

6.5 A recorrência para os números de Stirling de segunda espécie

> Se $n = 0,1,2,3,...$ *e se* $k = 0,1,2,...,n$ então
>
> $$s(n+1,k+1) = s(n,k) + (k+1).s(n,k+1)$$

Demonstração. Seja $n = 1,2,...$ e $k = 1,2,...,n$.
O número de Stirling de segunda espécie $s(n+1,k+1)$ é o número de todas as partições do conjunto $\{1,2,...,n+1\}$ constituídas por $(k+1)$ subconjuntos não vazios e dois a dois distintos entre si cuja união é o conjunto $\{1,2,...,n+1\}$: o número de tais partições em que o conjunto unitário $\{n+1\}$ é um dos subconjuntos presentes na partição é o número $s(n,k)$ de todas partições do conjunto $\{1,2,...,n\}$ constituída por k subconjuntos não vazios distintos dois a dois e o número de tais partições em que o conjunto unitário $\{n+1\}$ está ausente na partição é o número $s(n,k+1)$ de todas as partições do conjunto $\{1,2,...,n\}$ constituída por $(k+1)$ subconjuntos não vazios distintos dois a dois porque a partir de uma partição do conjunto $\{1,2,...,n\}$ com $(k+1)$ subconjuntos são originados $(k+1)$ partições diferentes do conjunto $\{1,2,...,n+1\}$: a primeira partição originada é obtida com a inserção do elemento $(n+1)$ no primeiro subconjunto da partição, a segunda partição originada é obtida com a inserção do elemento $(n+1)$ no segundo subconjunto da partição e assim sucessivamente, a última partição é originada com a inserção do elemento $(n+1)$ no último subconjunto da partição.

□

6.6 O triângulo aritmético dos números de Stirling de segunda espécie

O triângulo aritmético dos números de Stirling de segunda espécie é construído a partir da relação de recorrência

$$s(n+1,k+1) = s(n,k) + (k+1).s(n,k+1)$$

e dos valores iniciais $s(n,1) = 1$, para $n = 0,1,2,...$ e $s(n,0) = 0$ para $n = 1,2,3,...$ e $s(0,0) = 1$ para $n = 0,1,2,3,...$

O complemento nominal de segunda espécie do número de Stirling provém do fato que na relação de recorrência, a segunda parcela do segundo membro tem como fator multiplicativo $(k+1)$ que é a segunda coordenada de $s(n+1,k+1)$.

Figura 29 – Triângulo aritmético dos números de Stirling de segunda espécie

n	$s(n,0)$	$s(n,1)$	$s(n,2)$	$s(n,3)$	$s(n,4)$	$s(n,5)$	$s(n,6)$	$s(n,7)$
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	$+3x$ 6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	$+5x$ 15	1	
7	0	1	67	301	350	140	21	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando que se $x \in \mathbb{R}$,
$x(x+1) = x + x^2 = S(s,1)x + S(2,2)x^2$

$x(x+1)+(x+2) = 2x^2 + 3x + x^3 = S(3,1)x + S(3,2)x^2 + S(3,3)x^3$

$x(x+1)(x+2)(x+3) = 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4 = S(4,1)x + S(4,2)x^2 + S(4,3)x^3 + S(4,4)x^4$
a questão natural é saber se a igualdade

$$x(x+1)...(x+n-1) = S(n,1)x + S(n,2)x^2 + ... + S(n,n)x^n$$

é válida para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$.

De fato, assumindo que para $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

$$x(x+1)...(x+n-1) = S(n,1)x + S(n,2)x^2 + ... + S(n,n)x^n$$

então,

$$x(x+1)...(x+n-1)(x+n) = [S(n,1)x + S(n,2)x^2 + ... + S(n,n)x^n](x+n)$$

$$= nS(n,1)x + [S(n,1) + S(n,2)]x^2 + [S(n,2) + S(n,3)x^3] + ...$$

$$+ [S(n,n-2) + nS(n,n-1)]x^{n-1} + [S(n,n-1) + nS(n,n)]x$$

$$+ S(n,n)x^{n+1}$$

$$= S(n+1,1)x + S(n+1,2)x^2 + S(n+1,3)x^3 + ...$$

$$+ S(n+1,n+1)x^{n+1}$$

pela relação de recorrência para números de Stirlinhg de primeira espécie.
Definindo para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

pelo princípio de indução matemática está demonstrado que a igualdade

$$x^{\overline{n}} = S(n,1)x + S(n,2)x^2 + ... + S(n,n)x^n$$

é válida para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Definindo para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

a relação entre $x^{\overline{n}}$ e $x^{\underline{n}}$ é

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)...(x+n-1)$$

$$= (-1)^n(-x)(-x-1)...(-x-n+1)$$

$$= (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$

e além disso para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n(-x)^{\underline{n}}$$

$$= (-1)^n[S(n,1)(-x) + S(n,2)(-x)^2 + ... + S(n,n)(-x)^n]$$

$$= (-1)^{n+1}S(n,1)x + (-1)^{n+2}S(n,2)x^2 + ... + (-1)^{n+n}S(n,n)x^n$$

$$= (-1)^{n-1}S(n,1)x + (-1)^{n-2}S(n,2)x^2 + ... + (-1)^{n-n}S(n,n)x^n.$$

Observando que

$$x^1 = x^{\underline{1}}$$

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = s(2,2)x^{\underline{2}} + s(2,1)x^{\underline{1}}$$

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = s(3,3)x^{\underline{3}} + s(3,2)x^{\underline{2}} + s(3,1)x^{\underline{1}}$$

$$x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = s(4,4)x^{\underline{4}} + s(4,3)x^{\underline{3}} + s(4,2)x^{\underline{2}} + s(4,1)x^{\underline{1}}$$

é válido perguntar se para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$.

$$x^n = s(n,1)x^{\underline{1}} + s(n,2)x^{\underline{2}} + ... + s(n,n)x^{\underline{n}}$$

De fato, assumindo que

$$x^n = s(n,1)x^{\underline{1}} + s(n,2)x^{\underline{2}} + ... + s(n,n)x^{\underline{n}}$$
$$x^{n+1} = x[s(n,1)x^{\underline{1}} + s(n,2)x^{\underline{2}} + ... + s(n,n)x^{\underline{n}}$$

e utilizando que para $k = 1,2,...,n$ e para $x \in \mathbb{R}$

$$x^{\underline{k+1}} = x(x-1)...(x-k+1)(x-k) \quad = x^{\underline{k}}(x-k)$$

ou

$$xx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

vem

$$x^{n+1} = s(n,1)[x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}] + s(n,2)[x^{\underline{3}} + 2x^{\underline{2}}] + s(n,3)[x^{\underline{4}} + 3x^{\underline{3}}] + ...$$

$$+ s(n,n-1)[x^{\underline{n}} + (n-1)x^{\underline{n-1}}] + s(n,n)[x^{\underline{n+1}} + nx^{\underline{n}}]$$

$$= s(n,1)x^{\underline{1}} + [s(n,1) + 2s(n,2)]x^{\underline{2}} + [s(n,2) + 3s(n,3)]x^{\underline{3}} + ...$$

$$+ [s(n,n-1) + s(n,n)]x^{\underline{n}} + s(n,n)x^{\underline{n+1}}$$

$$= s(n+1,1)x^{\underline{1}} + s(n+1,2)x^{\underline{2}} + ... + s(n+1,n+1)x^{\underline{n+1}}.$$

Pelo princípio da indução matemática a igualdade

$$x^n = s(n,1)x^{\underline{1}} + s(n,2)x^{\underline{2}} + ... + s(n,n)x^{\underline{n}}$$

é válida para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$, e além disso, sabendo que para $k = 1,2,...,n$ e $x \in \mathbb{R}$

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}$$

então,

$$(-x)^n = s(n,1)(-x)^{\underline{1}} + s(n,2)(-x)^{\underline{2}} + ... + s(n,n)(-x)^{\underline{n}}$$

$$= (-1)^n x^n = (-1)^1 s(n,1)x^{\underline{1}} + (-1)^2 s(n,2)x^{\underline{2}} + ... + (-1)^n s(n,n)x^{\underline{n}}$$

$$= x^n = (-1)^{n-1} s(n,1)x^{\underline{1}} + (-1)^{n-2} s(n,2)x^{\underline{2}} + ... + (-1)^{n-n} s(n,n)x^{\underline{n}}.$$

É fácil recordar as fórmulas anteriores lembrando que

$$x^{\overline{n}} > x^n > x^{\underline{n}}$$

sempre que $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$ e $x > n > 1$ e que os números de Stirling de primeira e segunda espécie são números naturais: os sinais de subtração são utilizados nas expressões de x^n em termos das potências maiores $x^{\overline{n}}$ e nas expressões de $x^{\underline{n}}$ em termos de x^n.

Portanto, para $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e $x \in \mathbb{R}$

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^{\overline{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{n-k} s(n,k) S(k,j) x^j$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{n-k} s(n,k) S(k,j) x^j = \begin{cases} 1 & se \;\; j = n \\ 0 & se \;\; j \neq n \end{cases} .$$

A figura seguinte foi construída através da relação de recorrência para os números de Stirling de segunda espécie a qual foi estendida para valores negativos, arbitrando que

$$s(0,-1) = s(0,-2) = s(0,-3) = ... = 0$$

e que

$$s(-1,-1) = s(-2,-2) = s(-3,-3) = ... = 1.$$

O que se constata é que

$s(-1,-2) = 1 = S(2,1)$ $\quad$ $s(-2,-3) = 3 = S(3,2)$

$s(-1,-3) = 2 = S(3,2)$ $\quad$ $s(-2,-4) = 11 = S(4,2)$

$s(-1,-4) = 6 = S(4,1)$ $\quad$ $s(-2,-5) = 50 = S(5,2)$

$s(-1,-5) = 24 = S(5,1)$

e provada a fórmula

$$S(n,k) = s(-k,-n) \quad para \quad n,\, k \in \mathbb{Z} = \{... -2,-1,0,1,2,...\}.$$

Figura 30 – Triângulo aritmético estendido dos números de Stirling de segunda espécie

n	$s(n,-5)$	$s(n,-4)$	$s(n,-3)$	$s(n,-2)$	$s(n,-1)$	$s(n,0)$	$s(n,1)$	$s(n,2)$	$s(n,3)$
-5	1								
-4	10	1							
-3	35	6	1						
-2	50	11	3	1					
-1	24	6	2	1	1				
0	0	0	0	0	0	1			
1	0	0	0	0	0	0	1		
2	0	0	0	0	0	0	1	1	
3	0	0	0	0	0	0	1	3	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

O triângulo aritmético dos números de Stirling de primeira espécie emerge do triângulo aritmético dos números de Stirling de segunda espécie e vice-versa.

CAPÍTULO

7

NÚMEROS DE BERNOULLI

7.1 A soma das potências dos primeiros números naturais

O objetivo é o cálculo da soma dos primeiros números naturais, da soma dos quadrados dos primeiros naturais, da soma dos cubos dos primeiros números naturais e assim por diante.

Cálculo de $S_0(n) = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 = n, \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$

Cálculo de $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n, \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$

Cálculo de $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$

Cálculo de $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$

i) Cálculo de $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n, \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$

a) Método de Gauss

$$2S_1(n) = (1+n) + (2+n-1) + ... + (n+1)$$

$$= n(n+1)$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

b) Método das colunas dos números binomiais

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= 1+2+\ldots+n \\
&= \binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{n}{1} \\
&= \binom{n+1}{2} \\
&= \frac{(n+1)n}{2}.
\end{aligned}$$

c) Método da perturbação

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n}(1+k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n}(1+2k+k^2) \\
(n+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n}1+2\sum_{k=0}^{n}k \\
(n+1)^2 &= (n+1)+2S_1(n) \\
S_1(n) &= \frac{1}{2}[(n+1)^2-(n+1) \\
s_1(n) &= \frac{1}{2}(n+1)n.
\end{aligned}$$

d) Método algébrico

Se $x \in \mathbb{R}$, $\quad x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$

então

$$(x=1) \qquad 1^2 - 0^2 = 2.1 - 1$$

$$(x=2) \qquad 2^2 - 1^2 = 2.2 - 1$$

$$(x=3) \qquad 3^2 - 2^2 = 2.3 - 1$$

$$.......$$

$$(x=n) \qquad n^2 - (n-1)^2 = 2.n - 1$$

a soma das linhas implica que

$$n^2 = 2S_1(n) - n$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Conclusão, a partir da identidade

$$x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1 \qquad para \qquad x \in \mathbb{R}$$

vem que

$$n^2 = 2S_1(n) - S_0(n) \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

ii) Cálculo de $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \qquad para \quad n = 1, 2, 3, ...$

a) Método da perturbação

$$1^3+2^3+...+n^3=(n+1)^3=\sum_{k=0}^{n}(1+3)^3$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(1+3k+3k^2+k^3)$$

$$(n+1)^3=\sum_{k=0}^{n}1+\quad 3\sum_{k=0}^{n}k+\quad 3\sum_{k=0}^{n}k^2$$

$$=(n+1)+3S_1(n)+3S_2(n)$$

$$3s_2(n)=(n+1)^3-(n+1)-3S_1(n)$$

$$=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{(n+1)}{3}-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b) Método algébrico

Se $x\in\mathbb{R}$, $\quad x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$

então

$$(x=1)\qquad 1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$

$$(x=2)\qquad 2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$

$$(x=3)\qquad 3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$

....

$$(x=n)\qquad n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

somando membro a membro,

$$n^3 = 3S_2(n) - 3S_1(n) + S_0(n)$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3}{2}n(n+1) - n\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Conclusão, a partir da identidade

$$x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1 \qquad para \quad x \in \mathbb{R}$$

vem que

$$n^3 = 3S_2(n) - 3S_1(n) + S_0(n) \qquad para \quad n = 1,2,3,...$$

iii) Cálculo de $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 \qquad para \quad n = 1,2,3,...$

a) Método da perturbação

$$1^4 + 2^4 + ... + n^4 + (n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} (1+k)^4$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 + 4k + 6k^2 + 4k^3 + k^4$$

$$(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} 1 \quad + 4\sum_{k=0}^{n} k \quad + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 \quad + 4\sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$(n+1)^4 = (n+1) + 4S_1(n) + 6S_2(n) + 4S_3(n)$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - (n+1) - 4\frac{n(n+1)}{2} - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Método algébrico

Se $x \in \mathbb{R}$, $\quad x^4 - (x-1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

então

$$(x=1) \qquad 1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$

$$(x=2) \qquad 2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$

$$(x=3) \qquad 3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$

$$\ldots\ldots$$

$$(x=n) \qquad n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

a soma das linhas implica em

$$n^4 = 4S_3(n) - 6S_2(n) + 4S_1(n) - S_0(n) \qquad para \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Conclusão: A partir da identidade

$$x^4 - (x-1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 \qquad para \quad x \in \mathbb{R}$$

vem que,

$$n^4 = 4S_3(n) - 6S_2(n) + 4S_1(n) - S_0(n) \qquad para \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Generalizando,

como $x^5 - (x-1)^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1 \qquad para \quad x \in \mathbb{R}$

vem que

$$n^5 = 5S_4(n) - 10S_3(n) + 10S_2(n) - 5S_1(n) + S_0(n) \qquad para \quad n = 1,2,3,\ldots$$

e assim sucessivamente.

Em resumo, se $n = 1,2,3,...$

$$\begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ S_4(n) \end{pmatrix}.$$

Com a observação de que as linhas da matriz são constituídas pelos números binomiais do triângulo de Pascal com sinais alternados mais e menos.
Por exemplo,

$$n^6 = -1S_0(n) + 6S_1(n) - 15S_2(n) + 20S_3(n) - 15S_4(n) + 6S_5(n) \qquad para \quad n = 1,2,3,...$$

E se $n = 1,2,3...$

$$\begin{pmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ s_4(n) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_0(n) \\ S_1(n) \\ S_2(n) \\ S_3(n) \\ s_4(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ n^5 \end{pmatrix}.$$

Em consequência, a soma dos primeiros números pares, para $n = 1,2,3,...$

$$\begin{aligned} E_1(n) &= 2+4+6+...+2n \\ &= 2(1+2+3+...+n) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

e a soma dos primeiros números ímpares, para $n = 1,2,3,...$

$$
\begin{aligned}
O_1(n) &= 1+3+5+...+(2n-1) \\
&= (1+2+...+(2n-1)+2n) - E_1(n) \\
&= S_1(2n) - E_1(n) \\
&= \frac{1}{2}2n(2n+1) - n(n+1) \\
&= n^2.
\end{aligned}
$$

A soma dos quadrados do primeiros números pares, para $n = 1,2,3,...$

$$
\begin{aligned}
E_2(n) &= 2^2+4^2+...+(2n)^2 \\
&= 4[1^2+2^2+...+n^2] \\
&= 4S_2(n) \\
&= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

e a soma dos quadrados dos primeiros números ímpares, para $n = 1,2,3,...$

$$
\begin{aligned}
O_2(n) &= 1^2+3^2+...+(2n-1)^2 \\
&= 1^2+2^2+3^2+...+(2n-1)^2+(2n)^2 - E_2(n) \\
&= S_2(2n) - E_2(n) \\
&= \frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{3}n(2n+1)[4n+1-2n-2] \\
&= \frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1).
\end{aligned}
$$

A soma dos cubos dos primeiros números pares, para $n = 1,2,3,...$

$$
\begin{aligned}
E_3(n) &= 2^3+4^3+...+(2n)^3 \\
&= 8[1^3+2^3+...+n^3] \\
&= 8S_3(n) \\
&= \frac{8}{4}n^2(n+1)^2 \\
&= 2n^2(n+1)^2
\end{aligned}
$$

e a soma dos cubos dos primeiros números ímpares, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} O_3 &= 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n)^3 - E_3(n) \\ &= S_3(2n) - E_3(n) \\ &= \frac{1}{4}(2n)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\ &= n^2[4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2] \\ &= n^2(2n^2 - 1). \end{aligned}$$

Generalizando para $k = 1, 2, 3, \ldots$ e para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} E_k &= 2^k + 4^k + \ldots (2n)^k \\ &= 2^k S_k(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_k &= 1^k + 3^k + \ldots + (2n-1)^k \\ &= S_k(2n) - O_k(n). \end{aligned}$$

O triângulo seguinte facilita a memorização das fórmulas de $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, ... expressas em potências decrescentes de n.

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \binom{1}{0}B_0 & & & & \\[2ex]
\frac{1}{2} & \binom{2}{0}B_0 & \binom{2}{1}B_1 & & & \\[2ex]
\frac{1}{3} & \binom{3}{0}B_0 & \binom{3}{1}B_1 & \binom{3}{2}B_2 & & \\[2ex]
\frac{1}{4} & \binom{4}{0}B_0 & \binom{4}{1}B_1 & \binom{4}{2}B_2 & \binom{4}{3}B_3 & \\[2ex]
\frac{1}{5} & \binom{5}{0}B_0 & \binom{5}{1}B_1 & \binom{5}{2}B_2 & \binom{5}{3}B_3 & \binom{5}{4}B_4
\end{array}$$

....

7.2 Os números de Bernoulli

Os números de Bernoulli B_0, B_1, $B_2,...$, para $n = 1,2,3,...$ são:

$$S_0(n) = \binom{1}{0} B_0 n = n \Rightarrow B_0 = 1$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}\left[\binom{2}{0} B_0 n^2 + \binom{2}{1} B_1 n\right]$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left[\binom{3}{0} B_0 n^3 + \binom{3}{1} B_1 n^2 + \binom{3}{2} B_2 n\right]$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left[\binom{4}{0} B_0 n^4 + \binom{4}{1} B_1 n^3 + \binom{4}{2} B_2 n^2 + \binom{4}{3} B_3 n\right]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Rightarrow B_3 = 0$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}\left[\binom{5}{0} B_0 n^5 + \binom{5}{1} B_1 n^4 + \binom{5}{2} B_2 n^3 + \binom{5}{3} B_3 n^2 + \binom{5}{4} B_4 n\right]$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{30}n \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{30}.$$

As fórmulas seguintes

$$S_0(n) = 1^0 + 2^0 + ... + n^0 = n$$

$$S_1(n) = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$S_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{2} - \frac{n}{30}$$

$$S_5(n) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$S_6(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$S_7(n) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

$$S_8(n) = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}$$

$$S_9(n) = \frac{n^{10}}{10} + \frac{n^9}{2} + \frac{3n^8}{4} - \frac{7n^6}{10} + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{20}$$

$$S_{10}(n) = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}$$

mostram que:

Para $k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$, o coeficiente de n^{k+1} é $\dfrac{1}{k+1}$.

Para $k = 12,3,4,5,6,7,8,9,10$, o coeficiente de n^k é $\dfrac{1}{2}$.

Para $k = 2,3,4,5,6,7,8,9,10$, o coeficiente de de n^{k-1} é $\dfrac{k}{12}$.

Para $k = 3,4,5,6,7,8,9,10$, o coeficiente de n^{k-2} é 0.

Para $k = 4,5,6,7,8,9,10$, o coeficiente de n^{k-4} é 0.

Para $k = 5,6,7,8,9,10$, o coeficiente de n^{k-3} é $-\dfrac{k(k-1)(k-2)}{7}$.

Pela observação de que o coeficiente de n^{k-3} é $\dfrac{k(k-1)(k-2)}{7}$ para $k = 5,6,7,8,9,10$, Bernoulli propôs a conjectura de o coeficiente de n^{k-j} para $k = j+2, j+3, ...$, é um número multiplicado por $k(k-1)(k-2)...(k-j+1)$ e a fórmula empírica de Bernoulli é que para $k = 0,1,2,3,...$ e $n = 1,2,3,...$

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[B_0\binom{k+1}{0}n^{k+1} + B_1\binom{k+1}{1}n^k + ... + B_k\binom{k+1}{k}n\right]$$

em que $B_0, B_1, B_2, ...$ é a sequência dos números de Bernoulli.
Ou

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j.n^{k+1-j} \qquad para \quad n = 1,2,3,...$$

Os primeiros números de Bernoulli são representados na tabela

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

e o valor de $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ indica a inexistência de uma fórmula simples para os números de Bernoulli.

Os números de Bernoulli satisfazem a relação

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j = 0 \qquad para \quad k = 1,2,3,... \quad e \quad B_0 = 1.$$

Por exemplo

$$(k=1), \qquad \binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 0 \quad \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$(k=2), \qquad \binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 = 0 \quad \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}.$$

$$(k=3), \qquad \binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3 = 0 \quad \Rightarrow B_3 = 0.$$

$$(k=4), \qquad \binom{5}{0}B_0 + \binom{5}{1}B_1 + \binom{5}{2}B_2 + \binom{5}{3}B_3 + \binom{5}{4}B_4 = 0 \quad \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{30}.$$

CAPÍTULO

8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentou-se o conceito de números binomiais em termos de sequências binárias, proporcionando ao docente do ensino médio uma nova abordagem no estudo dos números binomiais. Além disso priorizou-se o argumento combinatório na maioria das demonstrações das propriedades do número binomial.

Este trabalho atingiu seu objetivo de apresentar as propriedades e curiosidades do triângulo de Pascal, mais conhecido no ensino médio e também de outros triângulos aritméticos como o triângulo harmônico, o triângulo aritmético dos números de Euler e o triângulo artimético dos números de Stirling.

O estudo dos números de Euler, dos números de Stirling, dos números de Bernoulli sendo um assunto mais avançado em relação ao nível de conhecimento dos alunos do ensino médio, podem ser trabalhados como pesquisa ou iniciação científica com os alunos mais curiosos.

REFERÊNCIAS

DANTE, L.R. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2004.

GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: matemática discreta e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: vol.5, combinatória probabilidade**. São Paulo: Atual, 2013.

HEFEZ, A.**Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HILTON, P.; HOLTON, D.; PEDERSEN, J. **Mathematical Reflection**. Editora Springer, 1997.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, A. C. *et al*. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SANTIAGO, T. P. **Triângulo de Pascal: Aplicações no ensino fundamental e médio.** Salvador, 2016. Dissertação (Mestrado: PROFMAT). UFBA.

SILVA, M. R. **Números binomiais: uma abordagem combinatória para o ensino médio**. Fortaleza, 2015. Dissertação (Mestrado: PROFMAT). UFC.

SILVA, N. A. **Os números de Stirling**. Dourados, 2018. Dissertação (Mestrado: PROFMAT). UFGD.