

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Compressão de imagens JPEG como aplicação de trigonometria, matrizes e álgebra linear

Irineu Marcelo Zocal

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Irineu Marcelo Zocal

Compressão de imagens JPEG como aplicação de trigonometria, matrizes e álgebra linear

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
Dezembro de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Z84c Zocal, Irineu Marcelo
 Compressão de imagens JPEG como aplicação de
 trigonometria, matrizes e álgebra linear / Irineu
 Marcelo Zocal; orientador Miguel V.S. Frasson. --
 São Carlos, 2023.
 51 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
 Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
 Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

 1. Álgebra Linear. 2. Matrizes. 3. Imagens. 4.
 JPEG. 5. Ensino de Matemática. I. Frasson, Miguel
 V.S., orient. II. Título.

Irineu Marcelo Zocal

**JPEG image compression as an application to trigonometry,
matrices and linear algebra**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP,
in partial fulfillment of the requirements for the
degree of Mathematics Professional Master's Program.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Professional Master Degree
Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
December 2023

*Com muito amor, dedico esse trabalho a
meu filho Guilherme, a minha mãe Lourdes
e a meu pai Anibal.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Primeiramente a Deus que me abençoou e protegeu desde a aprovação no exame nacional de acesso do Profmat, como também em todas as viagens a São Carlos, em todas as provas, até a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Miguel Frasson que sempre me atendeu com muita atenção e dedicação, e pelo grande comprometimento e apoio demonstrados durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao coordenador do programa Prof. Sérgio Luis Zani.

À Prof. Dra. Ires Dias, pelo incentivo aos estudos desde o período da graduação.

Aos meus pais Lourdes e Anibal pela educação e os princípios que me ensinaram e sempre cobraram de mim.

Ao meu filho Guilherme, cuja simples existência é inspiração para os meus dias.

A todos os professores que me acompanharam durante toda a minha vida escolar e acadêmica.

A todas as pessoas acreditaram em meu potencial e me incentivaram durante todo este curso de mestrado, em especial todos os meus colegas de curso.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina”
(Cora Coralina)

RESUMO

ZOCAL, I. M. **Compressão de imagens JPEG como aplicação de trigonometria, matrizes e álgebra linear**. 2023. 52 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Nos dias atuais, as imagens, tanto estáticas quanto em movimento, são uma das formas mais importantes de expressão. Seu armazenamento e difusão pelos meios de comunicação eletrônicos (internet, mídias eletrônicas, televisão digital etc.) exigem que possam ser representadas com a menor quantidade de dados possível, mantendo uma qualidade razoável. O padrão de compressão de imagens JPEG é, de longe, o mais utilizado atualmente. A imagem é dividida em regiões 8x8 pixels, onde a cor de cada pixel é dada por um número. Imagens fotográficas têm a tendência de ter pouca variação de cores, e ao escrevermos tal matriz em termos de uma base que separa frequências (com na Transformada Discreta de Cosseno), os coeficientes dos elementos de baixa frequência serão muito mais significativos que os demais, e através de um processo de truncamento (quantização), acontece a compressão principal. Uma versão comprimida da matriz resultante, com números inteiros muito menores que os da matriz original, é escrita no arquivo JPEG. Acabamos de descrever em linhas gerais como combinar diversas aplicações matemáticas, como funções trigonométricas e matrizes.

Palavras-chave: Compressão de imagens, JPEG, Transformada Discreta de Cosseno, Álgebra Linear.

ABSTRACT

ZOCAL, I. M. **JPEG image compression as an application to trigonometry, matrices and linear algebra.** 2023. 52 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Nowadays, images, both static and moving, are one of the most important forms of expression. Their storage and dissemination through electronic means of communication (internet, electronic media, digital television, etc.) require that they can be represented with the least amount of data possible, maintaining a reasonable quality. The JPEG image compression standard is, by far, the most used today. The image is divided into 8×8 regions, where the color of each pixel is given by a number. Photographic images tend to have little color variation, and when we write such a matrix in terms of a base that separates frequencies (as in the Discrete Cosine Transform), the coefficients of the low-frequency elements will be much more significant than the others, and through a process of truncation (quantization), the main compression takes place. A compressed version of the resulting matrix, with integers much smaller than those in the original matrix, is written to the JPEG file. We have just described in general terms how to combine various mathematical applications, such as trigonometric functions and matrices.

Keywords: Image compression, JPEG, Discrete Cosine Transform, Linear Algebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A terna ordenada (a_1, a_2, a_3) pode ser interpretada geometricamente como um ponto ou um vetor.	20
Figura 2 – Artefatos JPEG	30
Figura 3 – Os vetores da base J_1 da TDC de dimensão 1	32
Figura 4 – A base J_2 dos 64 vetores $V_{n,m}$ da TDC usada no JPEG.	35
Figura 5 – Efeito da TDC nos dados	37
Figura 6 – Ordem em ziguezague.	48

SUMÁRIO

1	ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR	19
1.1	História dos espaços vetoriais	19
1.2	Um protótipo dos espaços vetoriais: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$	20
1.3	Espaços Vetoriais	21
1.4	Combinações lineares	22
1.5	Dependência linear	22
1.6	Base e dimensão	23
1.7	Produto interno	24
1.8	Ortogonalidade	25
2	ASPECTOS GERAIS DO PADRÃO JPEG	27
2.1	História do JPEG	27
2.1.1	<i>Metas Originais do formato JPEG</i>	28
2.1.2	<i>Principais metas alcançadas</i>	28
2.2	Vantagens e desvantagens dos arquivos JPEG	29
2.2.1	<i>Vantagens dos arquivos JPEG</i>	30
2.2.2	<i>Desvantagens dos arquivos JPEG</i>	30
3	TRANSFORMADA DISCRETA DE COSSENO	31
3.1	TDC em dimensão 1	31
3.2	TDC em dimensão 2	34
3.3	A Transformada Discreta de Cosseno	36
3.4	Propriedades da TDC	36
4	A COMPRESSÃO DE IMAGENS JPEG	39
4.1	O processo de compressão JPEG	39
4.2	Primeiros passos	39
4.3	Passo 2: mudança de base – TDC	40
4.4	Passo 3: redução de resolução – Quantização	40
4.5	Passos finais	40
4.6	Exemplo para sala de aula: JPEG reduzido 2 x 2	41
4.6.1	<i>Passo da TDC no bloco</i>	42
4.6.2	<i>Passo da quantização no bloco, obtendo o bloco JPEG</i>	43
4.6.3	<i>Desfazendo a compactação JPEG do bloco</i>	44

4.6.4	<i>Todo o processo na imagem original</i>	44
4.7	Um exemplo completo	46
REFERÊNCIAS		51

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

1.1 História dos espaços vetoriais

A ideia de vetores e soma de vetores já eram usadas por pensadores na Grécia Antiga, principalmente para o auxílio na análise de problemas físicos, mas ainda eram muito pouco para estruturar o conceito de Espaços Vetoriais.

Historicamente, os matemáticos sempre buscaram representações para os números, assim como, os cientistas físicos por representações matemáticas das entidades físicas e dos fenômenos que as envolviam. Essa representação de entidades físicas foi possível, em parte, pela geometria grega e pelas filosofias naturais. Durante o século XVII, os físicos matemáticos começaram a preencher e transformar essa lacuna representando quantidades escalares através de sua posição e de seu comprimento para as grandezas vetoriais como força, velocidade, momento e aceleração, cf. (KASAHARA; OLIVEIRA; Sá, 2022).

As primeiras ideias de vetores surgem a partir do conceito do paralelogramo de forças. A ideia de um paralelogramo de velocidade era defendida por muitos autores antigos gregos, dentre estes, Aristóteles. Para a teoria de vetores, Aristóteles traz a ideia que seria utilizada mais tarde na adição geométrica de vetores.

Entretanto, somente no século XIX, houve a criação e desenvolvimento de métodos vetoriais. Assim, as noções intuitivas de vetores começam a ser exploradas de forma contundente na busca por resultados numéricos que expressem as ideias da união da Geometria com a Álgebra.

O matemático e filósofo francês René Descartes, ao relacionar a Álgebra com a Geometria, criou princípios matemáticos capazes de analisar por meio de métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas no plano cartesiano, cf. (KASAHARA; OLIVEIRA; Sá, 2022)

O adjetivo cartesiano refere-se a Descartes, que publicou esta ideia em 1637 enquanto residia na Holanda. Foi descoberto de forma independente por Pierre de Fermat, que também trabalhou em três dimensões, embora Fermat não tenha publicado a descoberta. A clériga francesa Nicole Oresme utilizou construções semelhantes às coordenadas cartesianas muito antes da época de Descartes e Fermat.

No século XVIII, o matemático August Ferdinand Möbius (1790-1868), em sua obra *Barycentrische Calcul*, de 1827, criou um sistema geométrico quase vetorial. O desenvolvimento de tais estudos e conceitos, levaram à estruturação do conceito de espaço vetorial como é hoje, ou seja, conjuntos que têm as propriedades dos conjuntos de vetores, aqueles que satisfazem as 8 propriedades de *soma* e *produto por escalar*, cf. (TÁBOAS, 2020).

1.2 Um protótipo dos espaços vetoriais: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$

O exemplo mais simples de um espaço vetorial é o espaço tridimensional ($n = 3$), o conjunto dos vetores em dimensão 3. Quando fixamos uma origem e um sistema de coordenadas cartesianas, isto é, uma origem e um conjunto básico de vetores direção $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$, conseguimos interpretar geometricamente a simbologia (a_1, a_2, a_3) de duas formas distintas: como um ponto de coordenadas a_1 , a_2 e a_3 ou como um vetor de componentes a_1 , a_2 e a_3 , dado por $v = a_1\vec{x} + a_2\vec{y} + a_3\vec{z}$. Veja a Figura 1.

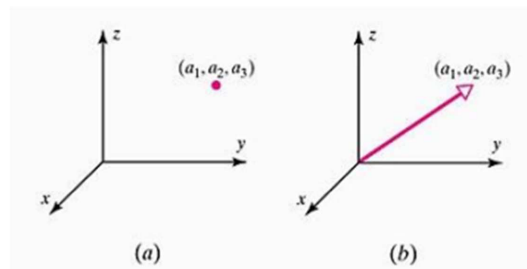


Figura 1 – A terna ordenada (a_1, a_2, a_3) pode ser interpretada geometricamente como um ponto ou um vetor.

O conceito de terna ordenada pode ser generalizado para n entradas. Dizemos que uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de números reais é uma n -úpla ordenada. O conjunto de todas as n -úplas ordenadas é chamado o *espaço n -dimensional* e denotado por $\mathbb{R}^n$.

Infelizmente, perde-se a noção geométrica dos vetores em duas ou três dimensões, mas as mesmas propriedades dos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ seguem valendo analogamente (ANTON; RORRES, 2001, cap. 4).

Além das operações de soma e produto por escalar, que veremos em mais detalhe abaixo, nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ temos a operação de *produto escalar*, que pode ser usada para medir ângulos e distâncias.

1.3 Espaços Vetoriais

Nessa seção, nossas principais referências são (ANTON; RORRES, 2001) e (HOFFMAN; KUNZE, 1976).

Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{R}$ se as seguintes operações são válidas sobre seus elementos, chamados de vetores:

1. Dados $u, v \in V$, a operação *soma* resulta em um elemento $u + v$ que também pertence a V , satisfazendo:
 - para $u, v, w \in V$, vale a propriedade associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$;
 - o elemento nulo 0 pertence a V , de forma que para cada $v \in V$ temos $v + 0 = v$;
 - para cada $v \in V$, existe o elemento $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$ para todo $v \in V$;
2. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, existe um vetor $\alpha v \in V$ denominado *produto por escalar* de α por v , satisfazendo:
 - a propriedade associativa da multiplicação: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v \in V$
 - $1v = v$, $\forall v \in V$;
3. As operações estão relacionadas pelas seguintes propriedades distributivas:
 - $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$;
 - $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in V$.

Exemplo 1. *O espaço das n -úplas, $\mathbb{R}^n$.* Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n -úplas $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de escalares x_i em $\mathbb{R}$. Se $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ com y_i em $\mathbb{R}$ a soma de α e β é definida por

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

O produto de um escalar c pelo vetor α é definido por

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$

Exemplo 2. *O espaço dos polinômios.* Seja B o conjunto das funções polinomiais, isto é, das funções $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que são da forma

$$p(x) = c_0 + c_1x^1 + \dots + c_nx^n$$

onde $c_0, c_1, \dots, c_n$ são coeficientes reais. Nesse conjunto dos polinômios, podemos somar polinômios e multiplicá-los por escalares, satisfazendo todas as operações descritas acima.

Exemplo 3. O espaço das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$. Sejam m e n inteiros positivos. Seja U o conjunto de todas as $m \times n$ matrizes sobre o espaço vetorial V . A soma de dois vetores A e B em V é definida por

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

O produto de um escalar c por A em V é definido por

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}$$

Matrizes de mesma ordem $m \times n$ podem ser somadas (satisfazendo as propriedades de soma usuais, como associativa, comutativa etc.) e multiplicadas por escalares, de forma que formam um espaço vetorial.

1.4 Combinações lineares

Um vetor v é uma *combinação linear* de vetores $u_1, u_2, \dots, u_n$ se existem escalares $k_1, k_2, \dots, k_n$ tais que

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n$$

isto é, se a equação

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

tem solução, para os x_i escalares.

Seja $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ um conjunto de elementos de um espaço vetorial V . Chamamos o conjunto das combinações lineares dos elementos de U , a saber

$$C = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in V\}$$

de subespaço *gerado* de U , denotado $C = [U]$.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, seja $U = \{(1, 0), (0, 1)\}$, com $(1, 0) = e_1$ e $(0, 1) = e_2$. Vemos que qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de e_1 e e_2 :

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Dizemos, nesse caso, que $U = \{e_1, e_2\}$ gera $\mathbb{R}^2$.

1.5 Dependência linear

Dizemos que os vetores $u_1, u_2, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ são linearmente dependentes (LD) se existirem escalares não conhecidos x_i não nulos tais que:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = 0$$

Caso contrário, serão classificados vetores linearmente independentes (LI)

Exemplo 4. A equação vetorial

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

tem como única solução $x = 0, y = 0, z = 0$. Portanto são três vetores linearmente independentes.

Exemplo 5. A equação vetorial

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

tem como solução não trivial $(3, -2, 1)$, ou seja, $x = 3, y = -2, z = 1$. Assim, os três vetores são linearmente dependentes.

1.6 Base e dimensão

Uma base para um espaço vetorial V finitamente gerado é um conjunto U linearmente independente (LI) que gera V . Distinguimos a ordem dos vetores numa base B , para podermos atribuir coordenadas em V .

Se um dos vetores é combinação linear dos outros, segue facilmente que o conjunto é LD. Por exemplo,

$$u_3 = u_1 + u_2 \implies u_1 + u_2 - u_3 = 0.$$

de forma que vetor 0 tem mais de uma maneira de ser escrito como combinação linear de elementos de U :

$$0 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$$

$$0 = 1u_1 + 1u_2 - 1u_3$$

Ao pedirmos que um conjunto seja LI, eliminamos essa duplicidade.

Assim, dizemos que U é base de V se

- U gera V ;
- U é LI.

Assim, um conjunto B de vetores é uma base de V se todo vetor v pertence V pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores base.

Se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos, dizemos que V tem dimensão finita n , ou que é n -dimensional e escreve-se $\dim V = n$. Então, toda base de V tem o mesmo número de elementos.

Exemplo: Considere o espaço vetorial $P_n(t)$ de polinômios de grau $\leq n$. Os polinômios $1, t, t_2, \dots, t_n$ formam uma base de $P_n(t)$ e assim a dimensão de $P_n(t) = n + 1$

1.7 Produto interno

O produto interno é uma ferramenta que podemos usar para medir ângulos e distâncias em certos espaços vetoriais. A motivação geométrica veio de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Em $\mathbb{R}^2$, podemos escrever um vetor u usando a ideia de coordenadas polares, de forma que um vetor de módulo r e ângulo α (a partir do eixo das abscissas, no sentido anti-horário), tem coordenadas cartesianas

$$u = (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Da mesma forma, um vetor v de módulo s e ângulo β tem coordenadas cartesianas

$$v = (s \cos \beta, s \sin \beta).$$

De u e v podemos encontrar os vetores unitários

$$\frac{1}{r}u = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \text{e} \quad \frac{1}{s}v = (\cos \beta, \sin \beta).$$

Assim, podemos dizer que o ângulo formado pelos vetores u e v é $\theta = \alpha - \beta$. O cosseno desse ângulo é

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

que é a soma dos produtos coordenada a coordenada de $\frac{1}{r}u$ e $\frac{1}{s}v$. Vamos chamar essa operação de *produto escalar*. As notações mais usadas para o produto escalar de dois vetores é $u \cdot v$ ou $\langle u, v \rangle$. Usaremos ambas, conforme a conveniência. Disso tudo, em $\mathbb{R}^2$, se $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$, podemos definir seu produto escalar por

$$\langle u, v \rangle = ac + bd,$$

de forma que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Assim, podemos medir ângulos com o produto escalar.

Mas também podemos medir distâncias: o módulo de $u = (a, b)$ é

$$\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (!),$$

ou se preferir evitar a raiz quadrada,

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle.$$

Essa operação de produto escalar satisfaz operações de linearidade, coputatividade e “o módulo de qualquer vetor é maior ou igual a 0” e “apenas o vetor nulo tem módulo 0”.

Apesar das noções geométricas acima valerem para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, elas podem estender-se para qualquer espaço vetorial onde podemos definir uma operação que toma dois vetores u e v e retorna um escalar $\langle u, v \rangle$ satisfazendo os seguintes axiomas:

- (I1) $\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a \langle u_1, v \rangle + b \langle u_2, v \rangle$;
 (I2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
 (I3) $\langle u, u \rangle \geq 0$; e $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$.

Em muitos espaços, como em $\mathbb{R}^n$ e nas matrizes $M_{n \times m}$, o produto interno é a soma dos produtos coordenada a coordenada, como em $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^n : \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

$$M_{n \times m} : \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} b_{ij}.$$

1.8 Ortogonalidade

Em um espaço vetorial V com produto interno, os vetores $u, v \in V$ são ortogonais entre si se $\langle u, v \rangle = 0$. A motivação é que u e v são ortogonais se são “perpendiculares”, isto é, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ou $\theta = 90^\circ$), o que implica $\cos \theta = 0$, que só se dá se $\langle u, v \rangle = 0$.

Um subconjunto B de V de vetores não nulos é chamado de *ortogonal* se os seus elementos são ortogonais dois a dois e dizemos que B é um conjunto *ortonormal* se for um conjunto ortogonal e se $\|u\| = 1$, para qualquer $u \in B$.

Quando queremos escrever um vetor x na base $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, temos que calcular n incógnitas $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$. Isso nos leva a resolver um sistema linear $n \times n$.

No entanto, se a base B é ortogonal, essa conta fica muito simplificada. Usando o fato de que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, calculando o produto escalar de x por u_1 , vemos que podemos isolar a_1 :

$$\begin{aligned} \langle x, u_1 \rangle &= \langle a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n, u_1 \rangle \\ &= a_1 \langle u_1, u_1 \rangle + a_2 \langle u_2, u_1 \rangle + \dots + a_n \langle u_n, u_1 \rangle \\ &= a_1 \|u_1\|^2 \end{aligned}$$

e portanto

$$a_1 = \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}.$$

Do mesmo modo, poderíamos calcular o caso geral

$$a_i = \frac{\langle x, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Isto é, cada a_i tem uma expressão explícita dada por um produto interno.

ASPECTOS GERAIS DO PADRÃO JPEG

Neste capítulo veremos a história do formato de compressão de imagens JPEG e as principais vantagens e desvantagens desse formato. Nossa referência principal é ([PENNEBAKER; MITCHELL, 1993](#)).

2.1 História do JPEG

Em 1982, pesquisadores interessados em mostrar imagens de alta qualidade em telas iniciaram atividades em um padrão de compressão de dados de imagens coloridas, na agência de padronização ISO (*International Organization for Standardization*). Um grupo de especialistas em fotografia foi formado no âmbito do Grupo de Trabalho 8 (WG8) da ISO/TC97/SC2, chamado “Representação Codificada de Informações de Imagem e Áudio”. O grupo queria desenvolver um esquema progressivo de compressão de dados que operasse a taxas de Internet discada (64 Kbits/s) e produzisse algo que fosse reconhecível em aproximadamente um segundo e que continuasse a melhorar até que uma imagem visualmente sem perdas fosse obtida. A eles juntou-se em 1986 o Grupo de Relatores Especiais do Grupo de Estudo VIII do CCITT (*Comité Consultatif International Téléphonique et Télégraphique*) sobre novas formas de compartilhamento de imagens. Este grupo de estudos do CCITT tinha várias seções e grupos de relatores que precisavam de compactação de dados coloridos. Neste momento a colaboração conjunta entre o CCITT e a ISO estava fortemente incentivada, a fim de evitar a criação de normas concorrentes e desenvolvidas de forma independente. O *Joint Photographic Experts Group* (JPEG) foi, portanto, estabelecido com o propósito de desenvolver um padrão de compressão de dados coloridos de imagens estáticas, sendo um subcomitê de um grupo de trabalho da ISO que continha membros da ISO e do CCITT.

2.1.1 Metas Originais do formato JPEG

O padrão de compactação JPEG para imagens coloridas e em escala de cinza em tons contínuos foi planejado para cobrir a mais ampla gama de aplicações consistentes com uma série de requisitos pré-determinados. Isto levou a uma capacidade obrigatória para codificação sequencial, codificação progressiva, codificação com perdas, codificação sem perdas e viabilidade de implementação de hardware a 64 Kbits/s. Os especialistas em JPEG desejavam alcançar um desempenho de compressão quase de última geração, por isso metas ambiciosas de bits/pixel foram definidas para a compressão com perdas. A esperança era que imagens reconhecíveis pudessem ser obtidas a 0,25 bit/pixel, imagens de excelente qualidade pudessem ser obtidas a 1,00 bit/pixel (ou mesmo a 0,75 bit/pixel) e imagens indistinguíveis da imagem original pudessem ser obtidas a cerca de 4 bits/pixel. As imagens teste escolhidas tinham um formato apropriado para sistemas de vídeo europeus: 720 amostras/linha por 576 linhas com 8 bits/amostra para a luminância, e 360 amostras/linha por 576 linhas com 8 bits/amostra para cada componente de cromaticidade. No entanto, a intenção declarada era ter um padrão independente de resolução. Esses objetivos eram uma fusão dos requisitos do *photovideotex*¹ e dos requisitos de telecomunicações do CCITT.

2.1.2 Principais metas alcançadas

Ao re-examinar a lista de funcionalidades e objetivos, indicamos aqui como os diferentes modos podem ser usados para alcançá-los:

Qualidade: Todos os modos sequenciais e progressivos baseados em TDC (Transformada Discreta de Cosseno²) geram exatamente a mesma imagem de saída final, independente da entropia e da escolha da progressão (assumindo que a progressão esteja concluída). Pouca ou nenhuma penalidade de compressão é paga pelo uso de um progressivo baseado em TDC.

Nestes modos baseados em TDC a qualidade é controlada exclusivamente pela tabela de quantização. Uma ampla gama de níveis de distorção pode ser alcançada incluindo distorções bem abaixo do limite de visibilidade. Os autores experimentam um quantizador de 1 que fornece um erro quadrático médio na ordem de 0,6 ou menos. No entanto, neste nível de distorção, a compressão é muito melhor do que a obtida com codificação sem perdas.

Progressivo: O modo progressivo baseado em TDC permite uma progressão elegante. Um número quase ilimitado de estágios pode ser alcançado combinando seleção espectral e aproximações sucessivas.

Reversível: O modo sem perdas está dentro de uma pequena porcentagem do melhor alcançável com modelos de complexidade semelhante. Para o conjunto de testes JPEG, a melhor compressão média é 2,14:1 para codificação aritmética.

¹ Imagens de alta qualidade em telas

² Veja a Seção ?? sobre a TDC.

Síncrono: O modo sequencial de operação é síncrono se usar tabelas Huffman predefinidas ou codificação aritmética. Os codificadores progressivos podem ser bastante síncronos.

Sequencial: O modo sequencial tem desempenho de compressão dentro de uma pequena porcentagem dos modos progressivos baseados em TDC e, embora os dados sejam limitados no momento, parece ter desempenho de compressão significativamente melhor do que o modo hierárquico. O modo sequencial é capaz de ser um sistema de passagem única se forem usadas tabelas de Huffman predefinidas ou se for usada codificação aritmética.

Custo-benefício tanto em hardware quanto em software: O número de fornecedores que oferecem hardware e software indica o cumprimento bem-sucedido dessa meta.

Independência de resolução: Resoluções arbitrárias de imagens de origem podem ser tratadas. Imagens cujas dimensões não são múltiplas de oito são preenchidas internamente para múltiplos de oito nos modos de operação baseados em TDC.

Sem metas absolutas de taxa de bits: A compensação taxa de bits/qualidade é controlada principalmente pela tabela de quantização, enquanto as tabelas Huffman personalizadas e a codificação aritmética fornecem algum refinamento nessa compensação. Além disso, os dois modos TDC progressivos oferecem muitas opções sobre como obter um equilíbrio entre taxa variável e distorção, e os modos hierárquicos fornecem flexibilidade adicional em termos de resolução de imagem.

Blocos TDC 8×8 : Os blocos TDC são sempre blocos 8×8 . Uma das principais motivações para fazer esta escolha foi a riqueza de hardware prático já disponível ou em desenvolvimento no momento em que este parâmetro foi definido.

Coeficientes TDC em oito bits: A exigência de armazenar o valor quantizado TDC em um byte foi posteriormente relaxada quando efeitos adversos foram demonstrados. Experimentos com imagens médicas mostraram que os coeficientes TDC limitados à precisão de oito bits poderiam exibir artefatos muito visíveis sob certas condições.

Matriz de quantização (tabela): o JPEG era originalmente destinado a especificar uma tabela de quantização padrão. No entanto, à medida que a dependência da quantização do espaço de cores e a distorção da taxa desejada se tornaram mais óbvias, a especificação foi alterada de modo que as tabelas originalmente propostas como padrão foram mantidas apenas como exemplos informativos de tabelas de quantização para imagens de luminância-crominância.

2.2 Vantagens e desvantagens dos arquivos JPEG

A relação entre tamanho do arquivo e qualidade da imagem é onde o usuário costuma decidir se o formato JPEG vale a pena.

2.2.1 Vantagens dos arquivos JPEG

Formato JPEG tornou-se o padrão: os arquivos JPEG são considerados o formato de arquivo de imagem mais reconhecido no mundo todo e são compatíveis com todos os *softwares*, como navegadores, aplicativos, editores de imagem, bem como (virtualmente) todo *hardware* como câmeras fotográficas, filmadoras, celulares etc.

Altas taxas de compressão: os tamanhos menores de arquivos permitem transferência e acesso rápidos para visualização online. Com a compactação com perdas através de diversas estratégias, como o descarte inteligente de todas as cores que o olho humano não reconhece, além do ferramental matemático da TDC e quantização dos coeficientes, os arquivos JPEG são uma representação bastante fiel da imagem original, mas com um tamanho do arquivo reduzido ao máximo possível. Em comparação com formatos sem perdas, como GIF e PNG, os arquivos JPEG são consideravelmente menores.

2.2.2 Desvantagens dos arquivos JPEG

“Artefatos” em regiões com alto contraste: a compactação com perdas economiza espaço, mas ao lidar com imagens muito compactadas, a qualidade pode ser afetada. Imagens com bordas e linhas destacadas perderão um pouco de nitidez na compactação, apresentando os chamados “*artefatos JPEG*”. Perder tantos dados pode causar a perda da transição suave entre cores, de modo que a imagem tenha mais blocos visíveis e seja mais abrupta. Veja a Figura 2.

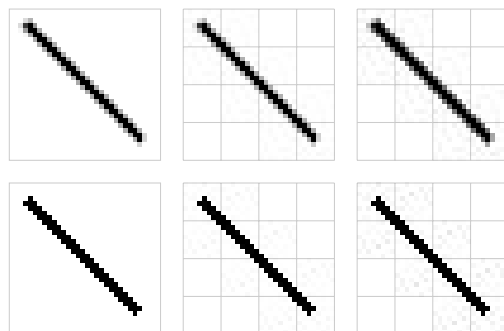


Figura 2 – *Artefatos JPEG*. À esquerda, as figuras originais de linhas pretas num fundo branco em tamanho 32×32 pixels, acima com antisserrilhamento e abaixo a linha em preto e branco. Ao centro, a versão JPEG com parâmetro de qualidade usuais em 90%, e para facilitar a visualização dos artefatos, à direita há uma versão exagerada, através de aumento d contraste, da versão JPEG do centro. Nas versões JPEG, os blocos 8×8 estão desenhados em cinza claro para facilitar sua visualização, mostrando perfeitamente como os blocos ficam aparentes quando há artefatos.

TRANSFORMADA DISCRETA DE COSSENO

O principal ingrediente da compressão de imagens JPEG é a conversão da matriz que representa o bloco da imagem original para outra onde os dados estão separados por frequências. Esse processo chama-se *Transformada Discreta de Cosseno* (TDC). A TDC foi desenvolvida em 1974 por N. Ahmed, T. Natarajan and K. R. Rao ([AHMED; NATARAJAN; RAO, 1974](#)). Nesse capítulo vamos estudar como é feito esse processo, que pode ser interpretado como uma *mudança de base* para uma base do espaço vetorial das matrizes 8×8 em que são claramente notadas as frequências nos sentidos horizontal e vertical. Essa base tem a propriedade de ser uma base ortogonal, o que reduz as contas nos cálculos da TDC dos dados.

A TDC é definida para dados em uma dimensão (um vetor unidimensional, como em $\mathbb{R}^n$), chamada TDC-1d, e a partir dela, é definida para dados bidimensionais (como matrizes $n \times n$). No JPEG, ficou fixado $n = 8$, o que manteremos na dedução da TDC que estudaremos abaixo.

3.1 TDC em dimensão 1

Na Transformada Discreta de Cosseno em dimensão 1, grosso modo, seus idealizadores bolaram uma série de vetores que interpolam a função cosseno nas frequências de 0 a 7, para valores x nos meios dos intervalos de extremos inteiros.

Mais precisamente, dada uma “frequência” $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$, associamos o vetor v_n de $\mathbb{R}^8$ que interpola a função $\cos\left(n\frac{\pi}{8}t\right)$, nos pontos $t = k - \frac{1}{2}$, para k de 1 a 8, isto é,

$$v_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{8}\frac{1}{2}\right), \cos\left(n\frac{\pi}{8}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right), \dots, \cos\left(n\frac{\pi}{8}\left(7 + \frac{1}{2}\right)\right) \right). \quad (3.1)$$

Na Figura 3 vemos uma representação (em azul) as entradas de cada vetor v_n , mostrando a interpolação das funções cosseno (em vermelho). Observe que em $v_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ é

constante, isto é, tem 0 variações. Já

$$v_1 \approx (0.981, 0.831, 0.556, 0.195, -0.195, -0.556, -0.831, -0.981)$$

tem exatamente uma oscilação, começando próximo de 1 e terminando próximo de -1 . Agora

$$v_2 \approx (0.9239, 0.3827, -0.3827, -0.9239, -0.9239, -0.3827, 0.3827, 0.9239)$$

começa perto de 1, desce para perto de -1 nas entradas centrais e sobe novamente para perto de 1 no final, caracterizando 2 oscilações. Seguindo de maneira análoga, vemos que o número de oscilações, ou, como quiser, a “frequência”, fica anotado como índice do vetor.

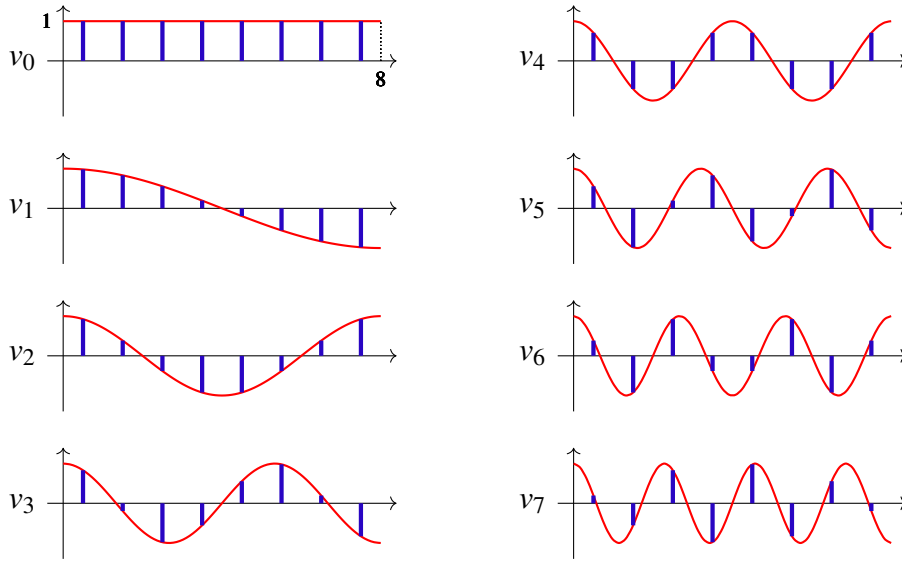


Figura 3 – Os vetores da base J_1 da TDC de dimensão 1. Os vetores ortogonais v_n , representados em azul, obtidos pela interpolação dos cossenos nas diversas frequências.

Queremos mostrar que $C = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^8$, isto é, $\langle v_n, v_m \rangle = 0$ para $n \neq m$. Para isso, precisamos calcular um somatório recorrente nas contas:

Se $n \in \{0, 1, \dots, 15\}$,

$$\sum_{k=0}^7 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) = \begin{cases} 8, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

O caso $n = 0$ é fácil de ver, sendo uma soma de $\cos 0 = 1$.

Para o caso $n \neq 0$, isto é, $n \in \{1, \dots, 15\}$, chame de S o somatório em (3.2). Para trabalhá-lo, usamos a identidade trigonométrica

$$2\cos a \sin b = \sin(a + b) - \sin(a - b) \quad (3.3)$$

ao multiplicar S por $\sin\left(\frac{n\pi}{8}\frac{1}{2}\right)$, de forma que

$$\begin{aligned}
 2S \sin\left(\frac{n\pi}{8}\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=0}^7 2 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{8}\frac{1}{2}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^7 \sin\left(\frac{n\pi}{8}(k+1)\right) - \sum_{k=0}^7 \sin\left(\frac{n\pi}{8}(k)\right) \\
 &= \left(\cancel{\sin 1\frac{n\pi}{8}} + \cancel{\sin 2\frac{n\pi}{8}} + \cdots + \cancel{\sin 6\frac{n\pi}{8}} + \cancel{\sin 7\frac{n\pi}{8}} + \sin 8\frac{n\pi}{8}\right) \\
 &\quad - \left(\sin 0\frac{n\pi}{8} + \cancel{\sin 1\frac{n\pi}{8}} + \cancel{\sin 2\frac{n\pi}{8}} + \cdots + \cancel{\sin 6\frac{n\pi}{8}} + \cancel{\sin 7\frac{n\pi}{8}}\right) \\
 &= \sin n\pi - \sin 0 = 0
 \end{aligned}$$

visto que os termos intermediários se cancelam. Como $\sin\frac{n\pi}{16} \neq 0$ se $n \in \{1, \dots, 15\}$, a única opção é $S = 0$ e, portanto, vale (3.2).

Com base em (3.2), podemos agora calcular os produtos escalares $\langle v_n, v_m \rangle$, que apresentamos no teorema a seguir.

Teorema 1. Sejam $v_n, n = 0, 1, \dots, 7$ dados por (3.1). Então

$$\langle v_n, v_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ C_8(n), & n = m, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde

$$C_8(n) = \langle v_n, v_n \rangle = \begin{cases} 8, & n = 0, \\ 4, & n > 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Portanto a base $J_1 = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$ de $\mathbb{R}^8$ é ortogonal.

Demonstração. Sejam $n, m \in 0, 1, \dots, 7$. Podemos supor que $n \geq m$. Recordemos a identidade

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b)}{2} + \frac{\cos(a-b)}{2}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 \langle v_n, v_m \rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{n\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)(n+m)\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)(n-m)\right). \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Ambas as parcelas de (3.6) são somatórios de cossenos, e usaremos (3.2). Para o primeiro somatório, temos que $n+m=0$ somente se $m=n=0$, de forma que o primeiro somatório de (3.6) vale 4 quando $m=n=0$, e vale 0 em qualquer outro caso. O segundo somatório de (3.6) vale 4 quando $n-m=0 \iff n=m$, e vale 0 quando $n \neq m$. Juntando, concluímos (3.4). $\square$

3.2 TDC em dimensão 2

A partir da base de vetores apresentada na Transformada Discreta de Cosseno em dimensão 1, define-se, pelo simples produto entrada a entrada, a base de matrizes 8×8 da Transformada Discreta de Cosseno em dimensão 2, usada no padrão JPEG.

Cada imagem (em uma cor) 8×8 pode ser interpretada como uma matriz 8×8 de números reais, um elemento do espaço vetorial das matrizes reais de ordem 8×8 . Cada uma dessas matrizes tem $8 \times 8 = 64$ entradas. Vamos definir agora essa base de 64 matrizes.

Na TDC usada no padrão de imagens JPEG, usa-se a base

$$J_2 = \{V_{nm} \in M_{8 \times 8}(\mathbb{R}) : 0 \leq n, m < 8\}, \quad (3.7)$$

$$V_{nm} = v_n v_m'$$

onde os vetores v_k da TDC de dimensão 1 são vistos como vetores coluna e o apóstrofo $'$ denota a matriz transposta. Em outras palavras, $V_{n,M}$ é o pro

$$V_{nm} = (a_{nm}(i, j)) \quad \text{com} \quad a_{nm}(i, j) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Na Figura 4 vemos cada uma das matrizes $V_{n,m}$ de J_2 representada como uma imagem de tamanho 8×8 . Os valores das entradas estão compreendidos entre -1 e 1 , assim que, para facilitar a visualização, usaremos uma escala de cinza onde preto corresponde a -1 , branco corresponde a 1 e valores intermediários com tons de cinza mais escuros ou claros quanto mais próximos de -1 ou 1 , respectivamente.

Em $M_{8 \times 8}$, o produto escalar usual entre duas matrizes $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$, como em $\mathbb{R}^n$, é o somatório dos produtos entrada a entrada, ou seja, é o número

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 x_{ij} y_{ij},$$

de forma que duas matrizes X e Y são ortogonais¹ se e somente se $\langle X, Y \rangle = 0$.

Assim como na TDC de dimensão 1, a TDC em dimensão 2 fornece uma base ortoogonal.

Teorema 2. Para $V_{n,m}, V_{k,\ell}$ dados em (3.7), vale

$$\langle V_{n,m}, V_{k,\ell} \rangle = \begin{cases} 0, & (n, m) \neq (k, \ell), \\ C_8(n)C_8(m), & (n, m) = (k, \ell). \end{cases}$$

onde $C_8(n)$ é dada em (3.5). Portanto J_2 é base ortogonal de $M_{8 \times 8}$.

¹ Não confundir com o conceito de uma matriz ser ortogonal quando sua transposta for sua inversa.

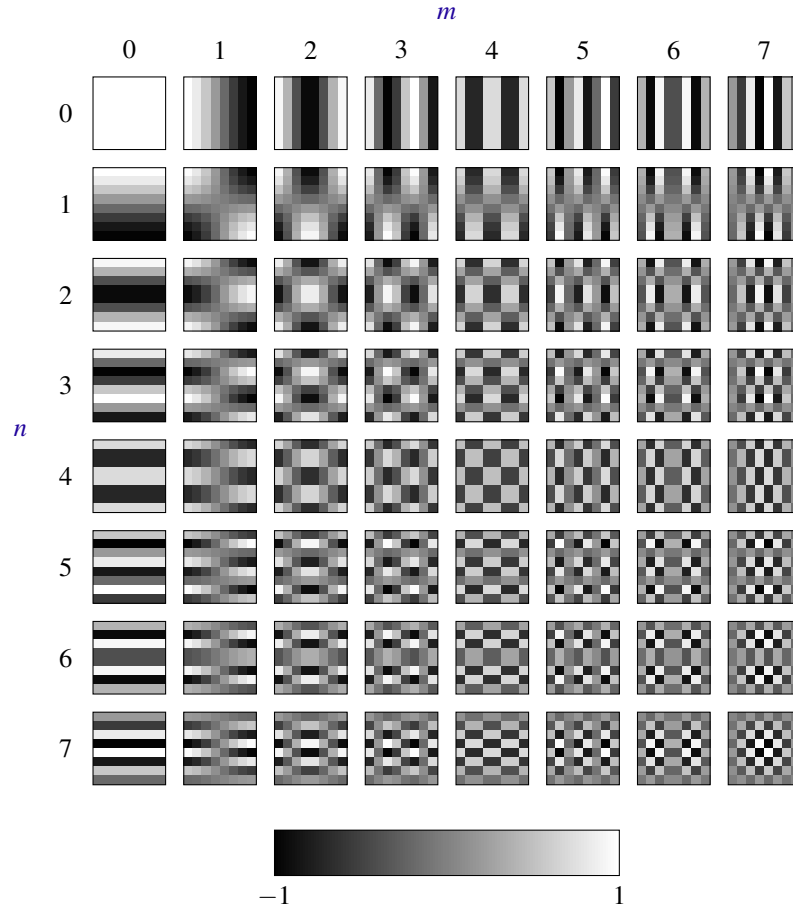


Figura 4 – A base J_2 das 64 matrizes $V_{n,m}$ da TDC usada no JPEG. A frequência aumenta do canto superior esquerdo, que é a matriz constante com entradas 1, representando frequência nula na vertical e na horizontal, ao canto oposto, que se assemelha a um tabuleiro de damas, representando a máxima frequência 7, tanto na horizontal como na vertical. Matrizes intermediárias $V_{n,m}$ apresentam m oscilações na horizontal e n oscilações na vertical.

Demonstração. Desenvolvendo o produto escalar de $V_{n,m}$ e $V_{k,\ell}$,

$$\begin{aligned}
 \langle V_{n,m}, V_{k,\ell} \rangle &= \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{m\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &\quad \times \cos\left(\frac{k\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &= \left[\sum_{i=0}^7 \cos\left(\frac{n\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{k\pi}{8}\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \\
 &\quad \times \left[\sum_{j=0}^7 \cos\left(\frac{m\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{8}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right) \right]. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

(Da primeira igualdade para a segunda, tiramos do somatório $\sum_j$ os fatores independentes de j , obtendo um somatório $\sum_j$ livre de elementos em i , e pudemos logo tirar todo o somatório $\sum_j$ do $\sum_i$, ficando um produto de somatórios.)

Cada fator em (3.8) é um somatório idêntico ao de (3.6). Se $(n, m) \neq (k, \ell)$, algum dos somatórios será nulo. As discussões no Teorema 1 implicam o que está no enunciado. Como J_2 é

um conjunto ortogonal de $M_{8 \times 8}$, é linearmente independente, e como $\dim M_{8 \times 8} = 64$, J_2 forma base de $M_{8 \times 8}$. $\square$

3.3 A Transformada Discreta de Cosseno

Dada uma matriz $X \in M_{8 \times 8}$, escrevemo-la como combinação linear da base J_2

$$X = \sum_{n=0}^7 \sum_{m=0}^7 y_{nm} V_{nm}, \quad (3.9)$$

que, a princípio, seria um sistema linear de 64 equações (uma para cada entrada de X) com 64 incógnitas y_{nm} . Seria um belo sistema para se resolver! No entanto, como J_2 é base ortogonal, das discussões na seção 1.8, podemos calcular explicitamente

$$y_{kl} = \frac{\langle X, V_{kl} \rangle}{\langle V_{kl}, V_{kl} \rangle}, \quad (3.10)$$

Definimos a Transformada Discreta do Cosseno de X como a matriz $Y = (y_{nm})$ e denotamos $Y = \text{TDC}(X)$.

Observação 1. A rigor, há diversas aplicações que definem outras versões da TDC mudando as bases J_1 e J_2 como múltiplas das apresentadas acima, e definem a TDC como apenas $y_{kl} = \langle X, V_{kl} \rangle$ em vez do que está em (3.10). Tais diferenças visam otimizar contas, mas mantêm as ideias por trás da TDC.

Por exemplo, no *software* de cálculo numérico GNU Octave², a TDC é implementada na biblioteca `signal`, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \\ v_n(i) &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{N}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right), \quad n \neq 0, \quad i = 1, \dots, 8, \\ V_{n,m} &= v_n v'_m, \\ \text{TDC}(X) &= (y_{ij}), \quad y_{ij} = \langle X, V_{ij} \rangle \end{aligned}$$

3.4 Propriedades da Transformada Discreta de Cosseno

Observando a base J_2 e vendo a TDC como uma mudança de base da base canônica de $M_{8 \times 8}$ para a base J_2 , vemos que a TDC decompõe uma matriz em termos das frequências. Assim, uma matriz em que há transição suave de uma entrada a outra, ou alternativamente se essa matriz representa uma imagem, se os pixels vizinhos apresentam uma transição suave, os elementos de altas frequências tendem a ser desprezíveis. E essa situação é a mais típica de imagens obtidas de fotografias! Veja a Figura 5. Por outro lado, quando a matriz tem uma transição abrupta de valores com entradas vizinhas, elementos de alta frequência passam a ter um papel fundamental na mudança de base, e quando desprezados, geram os artefatos.

² <https://octave.org/>

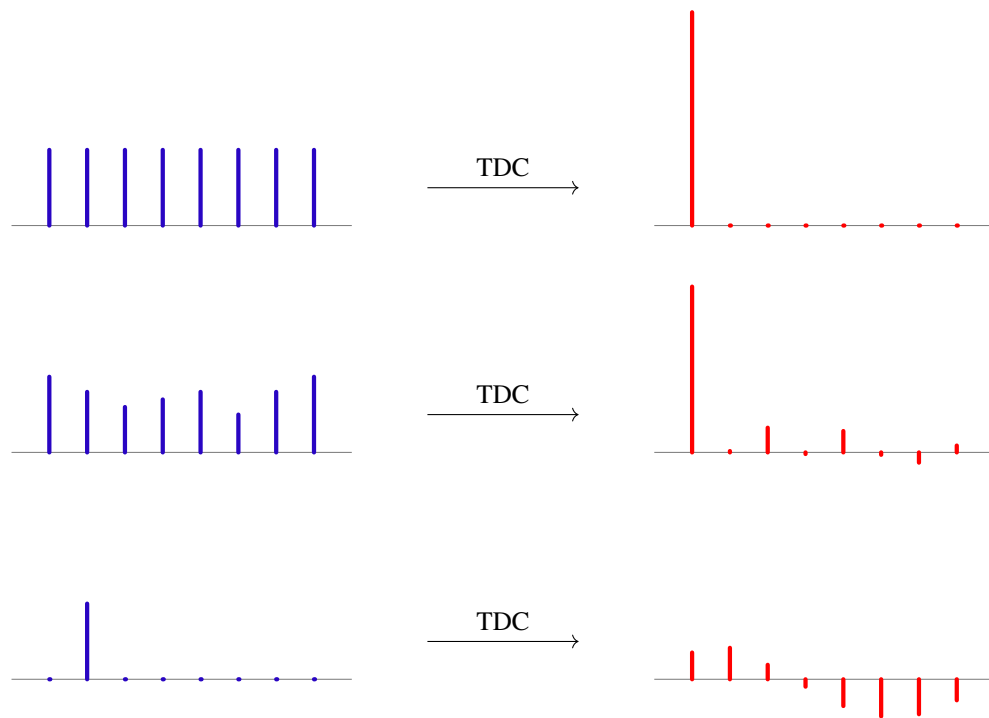


Figura 5 – *Efeito da TDC nos dados*. Na linha de cima, a entrada é o vetor constante $v_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = 1v_0 + 0v_1 + \dots + 0v_7$, e obviamente tem TDC igual a $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, ou seja, um dado extremamente suave tem um primeiro coeficiente alto, e os demais nulos. Na linha do meio, a entrada é o vetor com transição suave de valores, e observamos que sua TDC segue um padrão semelhante à anterior, com um primeiro elemento alto e os demais pequenos. Já abaixo, uma entrada de alto contraste $e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, apresentando uma TDC com valores distribuídos, fora do padrão dos dados suaves.

A COMPRESSÃO DE IMAGENS JPEG

4.1 O processo de compressão JPEG

O processo de compressão JPEG consiste nos seguintes passos:

- 1a) As cores são separadas em brilho (cinza) + azul + vermelho.
- 1b) A resolução das cores é reduzida à metade (sensibilidade a brilho é maior que a cores).
- 1c) A imagem é dividida em blocos 8 x 8: A para cada cor.
- 2) Aplica-se a $TDC-2d$: $B = TDC(A)$ em cada bloco.
- 3) Aplica-se a Quantização $C = Q(B)$.
- 4a) Alinha-se as entradas de C em ziguezague, desprezando os zeros do final.
- 4b) Esse vetor de inteiros é comprimido com um algoritmo sem perdas e escrito no arquivo JPEG.

4.2 Primeiros passos

Segundo (LI; DREW; LIU, 2014, p. 73):

O sistema de visão humana tem algumas limitações específicas, das quais o JPEG aproveita para atingir altas taxas de compressão. O sistema olho-cérebro não consegue ver detalhes extremamente finos. (...) Esta limitação é ainda mais evidente para a visão colorida do que para a escala de cinza (preto e branco). Portanto, as informações de cores em JPEG são dizimadas (parcialmente descartadas ou calculadas em média) (...).

Em outras palavras, como o olho humano vê escalas de cinza em resolução melhor que nas cores, inicialmente a imagem é separada no sistema de cores Luminância-Cromância chamado YCrCb, de maneira que a imagem é decomposta em *brilho* (cinza) + *azul* + *vermelho*. Como a resolução das cores é menor no olho humano, duas linhas são mescladas pela média de suas entradas na mesma coluna, o que reduz em um terço os dados.

Se o tamanho da imagem não for múltiplo de 8, então linhas ou colunas são adicionadas até que isto aconteça. Os pixels adicionais têm a cor do pixel da imagem original mais próximo.

4.3 Passo 2: mudança de base – TDC

Depois de particionar a imagem em blocos 8×8 , a transformada discreta de cosseno é aplicada a cada bloco.

Como visto no capítulo 3, p. 31, o processo da TDC no JPEG basicamente promove uma mudança de base para uma base das matrizes 8×8 , que tem a propriedade de ser ortogonal, reduzindo assim os cálculos da TDC dos dados, conforme vimos na Seção 1.8, p. 25.

4.4 Passo 3: redução de resolução – Quantização

Consiste em transformar coeficientes reais x em inteiros n , fazendo um processo de grande “redução de resolução”: escolha uma resolução $q > 0$. Dado $x \in \mathbb{R}$, escolhemos o número nq ($n \in \mathbb{Z}$) mais próximo de x , e chamamos o valor n de quantização de x (pela resolução q).

$$n = \text{arredonda} \left(\frac{x}{q} \right)$$

Por exemplo, se $q = 10$, a quantização de $x = 27,89$ é $n = 3$, pois $30 = 3 \times 10$ é o múltiplo de q mais próximo de x .

No JPEG, foi escolhido que cada entrada da matriz tivesse uma resolução personalizada. Então dá-se uma matriz 8×8 de resoluções, chamada de matriz de quantização Q , escrita no início do arquivo, que quando aplicada diminui a resolução dos números para inteiros, com magnitude significativamente menor. Assim, boa parte dos coeficientes de B tornam-se 0. Chamamos de $C = \text{quant}(B)$ à matriz dada pela quantização a cada entrada de B .

4.5 Passos finais

Como na Quantização, boa parte dos coeficientes de B tornam-se zeros, os valores de C são alinhados em ziguezague e os zeros do final são desprezados, diminuindo-se consideravelmente a quantidade de dados a serem armazenados no arquivo JPEG.

Para desfazer a compressão é desfeita a quantização, através da multiplicação entrada a entrada respectiva de C por Q .

4.6 Exemplo para sala de aula: JPEG reduzido 2 x 2

Vamos apresentar um exemplo de JPEG reduzido a blocos 2×2 , que poderia ser trabalhado numa sala de aula de ensino médio em que já tivesse trabalhado matrizes e produto escalar, ou como um exemplo de aplicação interessante desses temas. Nesse exemplo reduzido, as contas de um bloco podem ser feitas à mão na lousa com o passo da Transformada Discreta de Cosseno convertido em uma versão simples como a mudança de base com matrizes com entradas ± 1 , em que podemos com facilidade verificar a ortogonalidade da base, o produto escalar sendo usado para escrever uma matriz como combinação linear das matrizes da base, o processo de redução de magnitude dos números com a quantização, enfim, todos os passos sendo limpos para serem expostos aos alunos.

Começamos com uma imagem em tons de cinza (à esquerda), que transformaremos numa imagem de 16×16 *pixels* para trabalharmos:



Essa imagem é colocada numa matriz 16×16 em escala de tons de cinza, de 0 (preto) até 255 (branco), que já dividiremos em blocos 2×2 :

255	255	255	255	243	190	137	97	98	139	190	245	255	255	255	255
255	255	254	188	46	105	147	167	166	148	103	52	192	255	255	255
255	254	155	72	170	191	191	191	191	191	169	70	161	255	255	255
255	186	72	182	191	191	191	191	191	191	191	181	70	192	255	255
240	42	172	191	191	165	183	191	191	191	191	191	169	52	245	
186	108	191	191	163	0	96	191	191	96	89	121	191	191	103	190
129	151	191	191	178	78	134	191	191	154	152	161	191	191	148	138
85	172	191	191	191	191	191	191	191	191	189	191	191	167	97	
84	172	191	191	191	191	191	191	191	191	138	117	191	168	95	
127	152	191	191	191	191	191	191	191	191	61	159	191	149	136	
183	111	191	191	188	191	191	191	191	183	102	103	191	191	106	189
239	35	174	191	150	61	116	124	108	33	113	187	191	171	45	242
255	182	77	184	190	164	143	130	147	175	191	191	182	72	187	255
255	253	149	77	174	191	191	191	191	191	172	73	154	254	255	255
255	255	253	181	35	111	153	173	172	152	109	40	185	254	255	255
255	255	255	255	239	183	126	81	82	128	185	240	255	255	255	255

Para ilustrar o processo de JPEG, vamos escolher o 4º bloco da 1ª linha:

$$A = \begin{pmatrix} 137 & 97 \\ 147 & 167 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

4.6.1 Passo da TDC no bloco

Vamos ilustrar o passo da Transformada Discreta de Cosseno¹ usando a base

$$J = \{V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22}\} : \text{nonumber} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} & V_{12} &= \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ V_{21} &= \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} & V_{22} &= \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Essa base segue a mesma ideia da base J_2 da TDC apresentada na Figura 4, p. 35: a primeira matriz é constante 1, sem variações, representando a “frequência” 0; as duas matrizes seguintes têm variação em apenas uma direção (isto é, constante na linha ou na coluna), representando a “frequência” 1; a última matriz tem variação nas linha e nas colunas, correspondendo à “frequência” 2.

É fácil verificar, com 6 produtos escalares, que a base é ortogonal:

$$\begin{aligned} \langle V_{11}, V_{12} \rangle &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0, \\ \langle V_{11}, V_{21} \rangle &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\ \langle V_{11}, V_{22} \rangle &= 1 - 1 - 1 + 1 = 0, \\ \langle V_{12}, V(21) \rangle &= 1 - 1 - 1 + 1 = 0, \\ \langle V_{12}, V(22) \rangle &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\ \langle V_{21}, V(22) \rangle &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

O “módulo” das matrizes V_{ij} (que pode ser interpretada como um vetor de 4 entradas, como em $\mathbb{R}^4$ é

$$\|V_{ij}\|^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 = 4.$$

Como vimos na Seção 1.8, p. 25, podemos facilmente escrever A em (4.1) como combinação linear de V_{ij} com coeficientes

$$\alpha_{ij} = \frac{\langle A, V_{ij} \rangle}{\|V_{ij}\|^2} = \frac{\langle A, V_{ij} \rangle}{4}$$

¹ A rigor, a base da Transformada Discreta de Cosseno deveria ser feita com a interpolação das funções $\cos(n\frac{\pi}{2}t)$, com $n \in \{0, 1\}$ e $t \in \{0, 5, 1, 5\}$, como feito no Capítulo 3, obtendo

$$V_{00} = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}, \quad V_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, \quad V_{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix},$$

essencialmente sendo apenas uma múltipla da mesma base com ± 1 .

Fazendo as contas,

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \frac{\langle A, V_{11} \rangle}{4} = \frac{137 + 97 + 147 + 167}{4} = \frac{548}{4} = 137, \\ \alpha_{12} &= \frac{\langle A, V_{12} \rangle}{4} = \frac{137 + 97 - 147 - 167}{4} = \frac{-80}{4} = -20, \\ \alpha_{21} &= \frac{\langle A, V_{21} \rangle}{4} = \frac{137 - 97 + 147 - 167}{4} = \frac{20}{4} = 5, \\ \alpha_{22} &= \frac{\langle A, V_{22} \rangle}{4} = \frac{137 - 97 - 147 + 167}{4} = \frac{60}{4} = 15.\end{aligned}$$

De fato, é fácil tirar a prova de que

$$137V_{11} - 20V_{12} + 5V_{21} + 15V_{22} = \begin{pmatrix} 137 & 137 \\ 137 & 137 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -20 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137 & 97 \\ 147 & 167 \end{pmatrix} = A$$

Assim,

$$B = \text{TDC}(A) = \begin{pmatrix} 137 & -20 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

4.6.2 Passo da quantização no bloco, obtendo o bloco JPEG

A quantização é a parte que de fato promove a compactação da imagem, reduzindo a magnitude dos números, e onde acontecem as perdas. No JEG, há uma matriz de quantização Q onde cada entrada de B seria dividida pela respectiva entrada de Q e arredondada ao inteiro mais próximo², resultando na matriz $C = \text{quant}(B)$. Em vez de usarmos uma matriz de quantização, vamos simplificar mais o processo para apenas a divisão por um número q , de forma que

$$\text{quant}(X) = \text{arredonda} \left(\frac{1}{q} X \right).$$

Vamos adotar $q = 10$.

Assim, a quantização de B , $C = \text{quant}(B)$, fica

$$C = \text{arredonda} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 137 & -20 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = \text{arredonda} \begin{pmatrix} 13,7 & -2 \\ 0,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Essencialmente esse bloco (compactado ainda mais com um algoritmo de compactação de inteiros) é escrito no arquivo JPEG!

Compare a magnitude dos números de A (bloco original) com sua versão compactada C . Fica claro que houve uma grande redução do tamanho dos dados.

$$A = \begin{pmatrix} 137 & 97 \\ 147 & 167 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

² O arredondamento ao inteiro mais próximo só não é claro para pontos com parte fracionária $\frac{1}{2}$, onde convencionou-se arredondar para cima.

4.6.3 Desfazendo a compactação JPEG do bloco

Tendo a versão compactada (JPEG) do bloco, para descompactar, desfazemos os mesmos passos.

- Partimos do bloco JPEG, C :

$$C = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Para “desquantizar”, multiplicamos por q , obtendo uma versão $B' = qC$ da matriz com a $B = \text{TDC}(A)$:

$$B' = 10C = \begin{pmatrix} 140 & -20 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

- Para desfazer a TDC, escrevemos A' como combinação linear das matrizes V_{ij} da base J , usando os respectivos coeficientes de B' :

$$\begin{aligned} A' &= 140V_{11} - 20V_{12} + 10V_{21} + 20V_{22} = \\ &\begin{pmatrix} 140 & 140 \\ 140 & 140 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ -20 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 90 \\ 150 & 170 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Compare as imagens dos dois blocos A e A' :

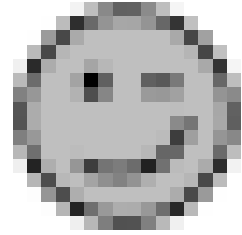
$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 137 & 97 \\ 147 & 167 \end{pmatrix} & \begin{img alt="A 2x2 grayscale image block A, showing a dark gray top-left pixel, a medium gray top-right pixel, a light gray bottom-left pixel, and a dark gray bottom-right pixel." data-bbox="568 733 621 768"/> \\ A' &= \begin{pmatrix} 150 & 90 \\ 150 & 170 \end{pmatrix} & \begin{img alt="A 2x2 grayscale image block A', showing a medium gray top-left pixel, a light gray top-right pixel, a medium gray bottom-left pixel, and a dark gray bottom-right pixel." data-bbox="568 778 621 813"/> \end{aligned}$$

4.6.4 Todo o processo na imagem original

Para ilustrar o resultado todo na imagem, vamos aplicar em todos os blocos o processo, ilustrando a redução do tamanho dos dados.

- Imagem original:

$$A = \begin{pmatrix} 255 & 255 & 255 & 255 & 243 & 190 & 137 & 97 & 98 & 139 & 190 & 245 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 254 & 188 & 46 & 105 & 147 & 167 & 166 & 148 & 103 & 52 & 192 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 254 & 155 & 72 & 170 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 169 & 70 & 161 & 255 & 255 \\ 255 & 186 & 72 & 182 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 181 & 70 & 192 & 255 \\ 240 & 42 & 172 & 191 & 191 & 165 & 183 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 169 & 52 & 245 \\ 186 & 108 & 191 & 191 & 163 & 0 & 96 & 191 & 191 & 96 & 89 & 121 & 191 & 191 & 103 & 190 \\ 129 & 151 & 191 & 191 & 178 & 78 & 134 & 191 & 191 & 154 & 152 & 161 & 191 & 191 & 148 & 138 \\ 85 & 172 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 189 & 191 & 191 & 167 & 97 \\ 84 & 172 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 138 & 117 & 191 & 168 & 95 \\ 127 & 152 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 187 & 61 & 159 & 191 & 149 & 136 \\ 183 & 111 & 191 & 191 & 188 & 191 & 191 & 191 & 191 & 183 & 102 & 103 & 191 & 191 & 106 & 189 \\ 239 & 35 & 174 & 191 & 150 & 61 & 116 & 124 & 108 & 33 & 113 & 187 & 191 & 171 & 45 & 242 \\ 255 & 182 & 77 & 184 & 190 & 164 & 143 & 130 & 147 & 175 & 191 & 191 & 182 & 72 & 187 & 255 \\ 255 & 253 & 149 & 77 & 174 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 191 & 172 & 73 & 154 & 254 & 255 \\ 255 & 255 & 253 & 181 & 35 & 111 & 153 & 173 & 172 & 152 & 109 & 40 & 185 & 254 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 239 & 183 & 126 & 81 & 82 & 128 & 185 & 240 & 255 & 255 & 255 & 255 \end{pmatrix}$$

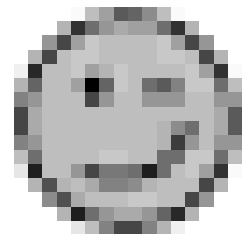


- Versão compactada, que vai no arquivo JPEG. Note a redução da magnitude dos números, comparado à matriz original.

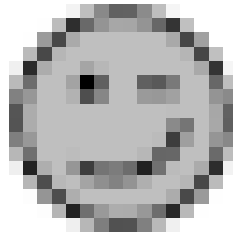
$$\text{JPEG}(A) = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 24 & 2 & 15 & 7 & 14 & -2 & 14 & -2 & 15 & 7 & 24 & 2 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 24 & 2 & 12 & -1 & 19 & -1 & 19 & 0 & 19 & 0 & 19 & -1 & 12 & -1 & 24 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -5 & -2 & 2 \\ 14 & 0 & 19 & 0 & 13 & 5 & 17 & 2 & 17 & 2 & 15 & 4 & 19 & -1 & 15 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 5 & -3 & -3 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 & -7 & -3 \\ 13 & 1 & 19 & 0 & 16 & -3 & 18 & -1 & 18 & -1 & 17 & -2 & 19 & 0 & 14 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 13 & -1 & 19 & 0 & 19 & 0 & 19 & 0 & 19 & 0 & 14 & 2 & 16 & -1 & 14 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 14 & 1 & 19 & 0 & 15 & 4 & 16 & 4 & 13 & 6 & 13 & -2 & 19 & 1 & 15 & 0 \\ 7 & -3 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 & 1 & -1 & -7 & 3 \\ 24 & -2 & 12 & 1 & 18 & 0 & 16 & -3 & 18 & -2 & 19 & 0 & 12 & 1 & 24 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -2 \\ 26 & 0 & 24 & -2 & 14 & -7 & 13 & 3 & 13 & 3 & 14 & -7 & 24 & -2 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Imagem restaurada a partir da versão JPEG:

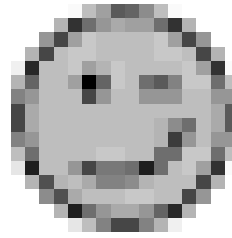
$$A' = \begin{pmatrix} 255 & 255 & 255 & 255 & 250 & 190 & 150 & 90 & 100 & 140 & 190 & 250 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 180 & 50 & 110 & 150 & 170 & 160 & 160 & 110 & 50 & 180 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 150 & 70 & 160 & 200 & 190 & 190 & 190 & 190 & 200 & 160 & 70 & 150 & 255 & 255 \\ 255 & 180 & 70 & 190 & 200 & 200 & 190 & 190 & 190 & 190 & 200 & 200 & 190 & 70 & 180 & 255 \\ 240 & 40 & 190 & 190 & 200 & 160 & 180 & 200 & 190 & 190 & 190 & 190 & 200 & 160 & 50 & 250 \\ 180 & 100 & 190 & 190 & 160 & 0 & 100 & 200 & 190 & 110 & 90 & 130 & 200 & 200 & 110 & 190 \\ 130 & 150 & 190 & 190 & 190 & 70 & 150 & 190 & 190 & 150 & 150 & 150 & 190 & 190 & 150 & 150 \\ 70 & 170 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 170 & 90 \\ 70 & 170 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 180 & 140 & 110 & 190 & 170 & 90 \\ 130 & 150 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 190 & 180 & 60 & 150 & 190 & 150 & 150 \\ 190 & 110 & 190 & 190 & 190 & 190 & 200 & 200 & 190 & 190 & 110 & 110 & 200 & 200 & 110 & 190 \\ 230 & 30 & 190 & 190 & 150 & 70 & 120 & 120 & 110 & 30 & 110 & 190 & 200 & 160 & 50 & 250 \\ 255 & 180 & 80 & 180 & 190 & 170 & 130 & 130 & 140 & 180 & 190 & 190 & 190 & 70 & 180 & 255 \\ 255 & 255 & 140 & 80 & 170 & 190 & 190 & 190 & 200 & 200 & 190 & 190 & 70 & 150 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 180 & 30 & 110 & 150 & 170 & 170 & 150 & 100 & 40 & 180 & 255 & 255 & 255 \\ 255 & 255 & 255 & 255 & 230 & 190 & 130 & 70 & 70 & 130 & 180 & 240 & 255 & 255 & 255 & 255 \end{pmatrix}$$



- Compare as duas versões, original e JPEG descompactada, lado a lado:



Original

JPEG ($q = 10$)

4.7 Um exemplo completo

Vamos apresentar um exemplo completo de aplicação do JPEG, ou seja, desde o passo 1, que consiste basicamente na divisão da imagem em blocos, até o passo final, com a descompressão da imagem e a comparação entre a imagem original e a imagem JPEG.

Começamos com a imagem de uma arara em tons de cinza (à esquerda), na qual escolhemos uma região qualquer (no caso a região delimitada pelo quadrado vermelho), e tomamos essa região (imagem à direita) que consiste em um bloco 8 x 8 pixels (padrão JPEG) para trabalharmos.



A região escolhida é representada pela matriz $A : 8 \times 8$ em escala de tons de cinza, de 0 (preto) até 255 (branco):

$$A = \begin{pmatrix} 84 & 83 & 82 & 77 & 77 & 88 & 118 & 152 \\ 93 & 96 & 107 & 123 & 137 & 126 & 100 & 102 \\ 155 & 156 & 181 & 192 & 166 & 92 & 51 & 46 \\ 222 & 182 & 173 & 155 & 115 & 92 & 111 & 137 \\ 226 & 194 & 165 & 189 & 213 & 226 & 232 & 233 \\ 227 & 219 & 218 & 241 & 255 & 255 & 248 & 223 \\ 225 & 215 & 231 & 225 & 213 & 223 & 207 & 185 \\ 152 & 135 & 149 & 156 & 160 & 183 & 196 & 215 \end{pmatrix}$$

Aplicamos a Transformada Discreta de Cosseno à matriz A , vista no capítulo 3, obtendo assim a matriz $B = \text{TDC}(A)$ a seguir:

$$B = \text{TDC}(A) = \begin{pmatrix} 1313.1 & 21.1 & -6.0 & 7.0 & 29.6 & 9.9 & 6.7 & 0.7 \\ -325.0 & 45.7 & -13.6 & -26.6 & 15.9 & -14.5 & -3.6 & 3.2 \\ -145.2 & -97.8 & 4.1 & -16.7 & -18.3 & -4.0 & 9.7 & -1.3 \\ 138.1 & -98.8 & 37.3 & 29.2 & -17.3 & -1.7 & -9.0 & -3.8 \\ -70.1 & -61.1 & 109.7 & -13.6 & 8.9 & 3.6 & 0.7 & -2.1 \\ -13.2 & 94.6 & 14.0 & -35.0 & -3.0 & 12.2 & 4.4 & 3.7 \\ 0.5 & 7.7 & -26.1 & -11.1 & 9.1 & -2.0 & -6.6 & 3.4 \\ 23.0 & 6.4 & -25.7 & 9.5 & 0.7 & -4.4 & -1.4 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Destacamos em vermelho os números da ordem dos milhares, em verde os da ordem das centenas, em azul os da ordem das dezenas e em preto os números da ordem das unidade ou menor.

Aplicamos então à quantização utilizando uma matriz de quantização³ Q .

$$Q = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Chamamos de C à matriz dada pela quantização a cada entrada de B . Por exemplo, vamos demonstrar a quantização da primeira entrada de B :

$$n = \text{arredonda}\left(\frac{x}{r}\right) = \text{arredonda}\left(\frac{1313,1}{16}\right) = \text{arredonda}(82,06875) = 82$$

A quantização da matriz B fica

$$C = \text{quant}(B) = \begin{pmatrix} 82 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -8 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As entradas de C são alinhadas em ziguezague conforme o padrão da Figura 6.

³ A matriz de quantização apresentada em (4.4) é a que apareceu na primeira apresentação do padrão JPEG.

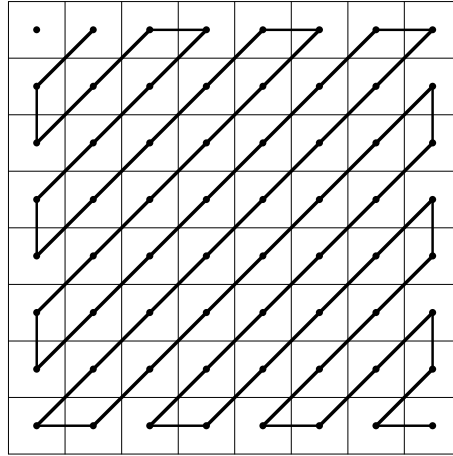


Figura 6 – Ordem em ziguezague de escrita dos números da matriz quantizada como um vetor de inteiros, iniciando do canto superior esquerdo (onde estão os números mais significativos) ao canto oposto. Tipicamente esse vetor termina em muitos zeros, que são descartados.

Exclui-se então os 25 zeros no final, e a versão comprimida do arquivo guardará apenas as seguintes entradas: 82, 2, -27, -10, 4, -1, 0, -1, -8, 10, -4, -6, 0, -1, 1, 0, 1, -1, 2, -3, -1, 0, 3, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, comprimidos com um algoritmo de compressão sem perdas de vetores de inteiros e isso é escrito no arquivo JPEG.

Para desfazer a compressão, é desfeita a quantização, através da multiplicação entrada a entrada respectiva de C por Q obtendo a matriz B' :

$$B' = \begin{pmatrix} 1312 & 22 & -10 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ -324 & 48 & -14 & -19 & 26 & 0 & 0 & 0 \\ -140 & -104 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 140 & -102 & 44 & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -72 & -66 & 111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 105 & 0 & -64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplica-se então a inversa da TDC (que denotaremos iTDC), isto é, escreve-se a matriz A' como combinação linear das matrizes da base J_2 . Vamos denotar como $\otimes$ a multiplicação entrada a entrada de duas matrizes. Então

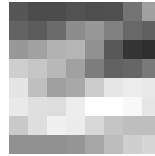
$$A' = \text{iTDC}(C \otimes Q) = \begin{pmatrix} 86 & 76 & 76 & 82 & 78 & 80 & 115 & 160 \\ 99 & 92 & 108 & 141 & 152 & 129 & 104 & 96 \\ 152 & 161 & 178 & 181 & 145 & 88 & 53 & 47 \\ 206 & 198 & 184 & 161 & 125 & 98 & 102 & 121 \\ 229 & 191 & 159 & 168 & 203 & 230 & 237 & 233 \\ 233 & 223 & 221 & 237 & 255 & 255 & 248 & 230 \\ 201 & 222 & 240 & 236 & 216 & 197 & 190 & 190 \\ 145 & 145 & 144 & 149 & 166 & 189 & 207 & 214 \end{pmatrix}$$

Comparando as imagens antes e depois da compressão:

- Da região estudada:



original



JPEG

- Da imagem completa:



original



JPEG

REFERÊNCIAS

AHMED, N.; NATARAJAN, T.; RAO, K. R. Discrete cosine transform. **IEEE Transactions on Computers**, jan. 1974.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros técnicos e Científicos, 1976.

KASAHARA, R. de C. F. R.; OLIVEIRA, I. A. de; Sá, P. F. de. A construção do conhecimento matemático vetorial à luz do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos de bachelard. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, n. 2, 2022.

LI, Z.-N.; DREW, M. S.; LIU, J. **Fundamentals of Multimedia**. 2. ed. [S.l.]: Springer Cham, 2014. (Texts in Computer Science).

PENNEBAKER, W. B.; MITCHELL, J. L. **Still Image Data Compression Standard**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1993.

TÁBOAS, P. Z. Um estudo sobre as origens dos espaços vetoriais. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 10, n. 19, p. 1–38, 2020.

