Universidade Federal do ABC

Allysson Ribeiro

Jogos Combinatórios, Nim e Hex

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES)"

Santo André, 2022

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Allysson Ribeiro

Jogos Combinatórios, Nim e Hex

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Allysson Ribeiro, e orientada pelo Prof. Dr. Rodrigo Roque Dias.

Santo André, 2022

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ALLYSSON, RIBEIRO
“Jogos combinatórios, Nim e Hex” / RIBEIRO ALLYSSON. — 2022.

126 fls.

Orientador: DIAS RODRIGO ROQUE

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, São Bernardo do Campo, 2022.

1. JOGOS COMBINATÓRIOS. 2. NIM. 3. HEX. 4. CNJM. 5. CEJTA. I. RODRIGO ROQUE, DIAS. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2022. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do orientador.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, ALLYSSON RIBEIRO realizada em 08 de Julho de 2022:

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
Data: 13/07/2022 10:14:54-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS

Documento assinado digitalmente
gov.br SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
Data: 13/07/2022 10:19:13-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) EDUARDO GUERON
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) LEANDRO FIORINI AURICHI
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Documento assinado digitalmente
gov.br RODRIGO ROQUE DIAS
Data: 09/07/2022 18:04:42-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof.(a) RODRIGO ROQUE DIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho

Aos meus queridos pais, Euclides Ribeiro (in memorian) e Regina Célia Ribeiro, por todo amor e carinho que me deram.

Aos meus tios, Silvia (in memorian) e meu Tio Goes (in memorian), que tanto me incentivaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço

À minha querida noiva e companheira Cristiane Pivato, por todo amor e dedicação. Sem você nada disso seria possível.

Aos meus sogros, Eliana e Jair pela estrutura e apoio.

A minhas cobaias, João Pedro e Arthur pela paciência.

Aos meus irmãos pela compreensão.

Aos meus tios, Cesar e Rosa pelo apoio.

Aos meus amigos Valter Pequeno e Kleber Pecegueiro, pela ajuda e carinho em um momento tão desgastante.

Aos meus colaboradores e mestres Eduardo, Leonardo e Odilon.

Um agradecimento especial a minha tia Sueli e meu sobrinho Giovanni, por sempre acreditarem e lutar comigo, pelo meus sonhos.

Um mais que especial para o meu orientador, Rodrigo Dias, pela paciencia, esforço e luta.

Quero ser hoje, melhor do que fui ontem, e amanhã, melhor do que sou hoje.
— Renan Fehrer

RESUMO

Esse trabalho foi concebido com o objetivo de dar dois passos acerca do tema de jogos combinatórios. O primeiro passo seria um aprofundamento do tema utilizando dois jogos como base: o Hex e o Nim. Como se jogam, particularidades, curiosidade, variações, classificação, estratégias vencedoras, estrutura, os conceitos e habilidades matemáticas envolvidas. O segundo passo é mostrar tipos de jogos matemáticos que entram nesta classificação, porque se tornam interessantes em um exemplo de aplicação de sucesso já existente, que é o Campeonato Nacional de Jogo Matemáticos de Portugal.

Palavras-chave:
Hex, Nim, Jogos Combinatórios, Estratégias, CNJM.

ABSTRACT

This work was conceived with the objective of taking simultaneous steps on the subject of combinatorial games. The first step would be to deepen our know age in to the theme by using two games as a basis, Hex and Nim. How they are played, particularities, curiosities, variations, classification, winning strategies, structure, concepts and mathematical skills involved. The second step is to show of mathematical games that fall into this classification, because they become interesting as an example of a successful application that already exists, which is the National Mathematical Game Championship in Portugal.

Keywords: Hex, Nim, CNJM, Combinatorial Games, Strategies.

CONTEÚDO

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

É de conhecimento de todos os educadores envolvidos com a área que os jogos Matemáticos são uma ferramenta fantástica para o desenvolvimento dos alunos, tema frequente em várias teses. Mas só o fato de conhecer um jogo e aplicá-lo será certeza de sucesso? Que seja algo significativo? De que traga alguma evolução perseptiva? Os trabalhos que tive oportunidade de acompanhar, trabalhos que colegas de disciplina me relataram, ou ainda em escolas que trabalhei! Que gastaram fortunas com materiais e jogos que apenas coletam pó e ocupam espaço. A perspectiva de sucesso é estritamente ocasional, momentâneo, e em grande parte não permanente, mas a pergunta fica, como podemos mudar esta situação? Como podemos buscar resultados mais robustos, que seriam extremamente importantes para o ensino de Matemática, e de maneira permanente e crescente. Criemos uma situação hipotética onde uma escola organiza um campeonato de "Jogo da Velha", e tentemos responder algumas perguntas:

- Foi relevante para todos os alunos?
- Trouxe algum conhecimento matemático?
- É algo que pode ser repetido?
- Vai despertar algum interesse?

Acredito que quase em totalidade as respostas serão negativas para a empreitada. Mas sabemos do poder dos "jogos" e do seu apelo, para o aluno é mais interessante vencer de um adversário, e que ainda trabalhado de forma correta é possível ter diversos ganhos que queremos enfatizar e a necessidade de se aprofundar no tema. E se aprofundar significa conhecer melhor e mais jogos, definir aqueles que são mais atrativos, que desenvolvam mais habilidades, que tragam mais conhecimentos, os que possam trazer possibilidades de novas práticas, que despertem o interesse pela disciplina. Para casar com a proposta, escolhi dois jogos para esmiuçar. O jogo do Hex que é idolatrado e fez despertar fascínio em vários matemáticos famosos, com muito conteúdo implícito, forma simples de jogar e de difícil domínio de estratégia vitoriosa. E por outro lado o jogo do Nim que é extremamente atraente, com diversas variações, mas de domínio palpável e de fácil compreensão. E por fim mostrarei uma iniciativa de extremo sucesso, o "Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos(CNJM) de Portugal".

2 JOGOS COMBINATÓRIOS

2.1 HISTÓRIA DOS JOGOS COMBINATÓRIOS

Em 1902, a análise do jogo Nim pelo matemático americano Charles Leonard Bouton [3] foi o ponto de partida para o nascimento de uma área da Matemática, a teoria de jogos combinatórios imparciais, que foi seguida por outros matemáticos. Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos [23], e este teorema afirmava que no o jogo de xadrez era um jogo determinado, isto é um dos jogadores tem uma estratégia vencedora ou o jogo se encaminha para um empate. Emile Borel [17] foi outro matemático que se interessou por jogos combinatórios e publicou quatro artigos sobre o mesmo, ele achava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de maneiras similares.

2.2 TEORIA DOS JOGOS

A teoria dos jogos é uma teoria matemática utilizada para modelar situações que se manifestam quando duas ou mais pessoas, na iminência de uma decisão interagem entre si. Ao utilizar esses modelos, podemos formular uma linguagem comum a diferentes tipos de jogos, haja visto que muitos deles representam situações do cotidiano, o que facilita o estudo e análise dos resultados dessas interações. Estes estudos estão intimamente ligados à Matemática, e o alvo das áreas onde se aplica a teoria dos jogos é tão extenso quanto diversificado. Fizemos uma breve citação desta teoria para que possamos deixar clara a diferença entre os temas.

2.3 O QUE SÃO JOGOS COMBINATÓRIOS?

Definição 2.1 (Jogos Combinatórios). *Um* jogo combinatório *é um jogo que satisfaz as seguintes condições:*

- *É jogado por dois jogadores, aqui denominados por* J_1 *e* J_2*;*
- *Existe um conjunto, geralmente finito, de posições do jogo;*
- *Para cada jogador e para cada posição, estão definidos que movimentos são permitidos para outras posições;*
- *Os jogadores fazem jogadas alternadamente, sendo* J_1 *o jogador que inicia a partida;*
- *O jogo termina quando a posição atual é uma posição em que não existem mais movimentos possíveis. Sendo esta posição chamada posição terminal;*
- *O jogo sempre termina em uma quantidade finita de movimentos.*

2.4 POSIÇÕES DE UM JOGO COMBINATÓRIO

O conceito de posição descreve o estado do jogo, o conceito de jogada ou lance, seria o movimento de transição entre as posições.

Classificação de uma posição

Cada *posição* de um jogo combinatório pode ser classificada como, inicial, terminal, vencedora ou perdedora, de acordo com as seguintes definições:

Definição 2.2 (Posição inicial-P_1). *A* posição inicial *seria a posição onde ainda não ocorreu nenhum lance.*

Definição 2.3 (Posição terminal-P_t). *Uma* posição terminal *é onde termina a partida, não existindo um próximo lance, nestes tipos de posições é onde se declara o vencedor.*

Definição 2.4 (Posição vencedora-w). *Uma* posição vencedora *é aquela que possui ao menos um movimento que leva a uma posição perdedora para o seu adversário ou a uma posição terminal que determine sua vitória.*

Definição 2.5 (Posição perdedora-l). *Uma* posição perdedora *é aquela que todos os lances levam a uma posição vencedora do adversário ou a uma posição terminal que decreta a vitória do seu adversário.*

2.5 ÁRVORES

Definição 2.6 (Árvore de possibilidades). *Em um jogo combinatório, dizemos que* árvore de possiblidades *é a representação de uma partida, onde os nós são as possíveis posições e as arestas os possíveis lances.*

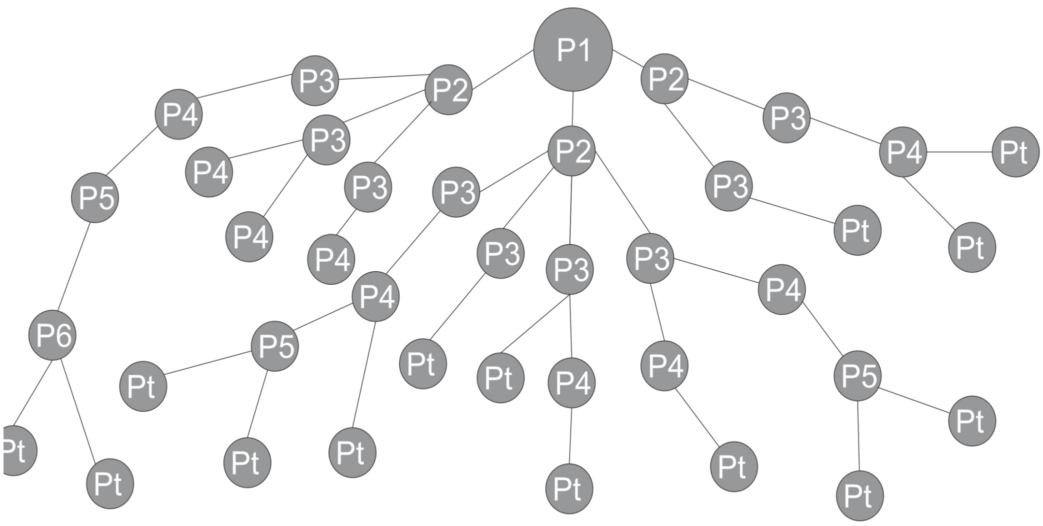


Figura 1: Árvore de possibilidades

Exemplo 2.7 (Árvore de possibilidades).

2.6 DISTRIBUIÇÃO NA ÁRVORE

Associando um jogo combinatório a uma árvore de possibilidades:

O jogo começa de uma posição inicial que chamamos de P_1, o jogador que faz o primeiro lance de J_1, e seu adversário de J_2, tendo que de cada posição, os jogadores possuem uma certa quantidade de possibilidades para executar o seu lance, a partir do momento que ele executa este lance, se cria uma nova posição, que chamaremos de P_2, desta posição o segundo JogadorJ_2 faz o seu primeiro lance, e entrega uma outra nova posição para J_1, para que possa realizar o seu segundo lance, e assim o jogo continua, nesta ordem, $\{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_t\}$ onde o jogo acaba e é possível decretar um vencedor. Para efeito de organização podemos verificar que, de uma posição ímpar para uma posição par, ocorre a jogada de J_1, e de uma posição par para uma posição ímpar, ocorre a jogada de J_2. Esta associação é feita, com cada nó da árvore representando uma posição do jogo e cada ramo da árvore como uma partição da partida, ou seja, uma partida completa . Podemos ainda definir a profundidade de um jogo combinatório, verificando a quantidade de lances dos seus ramos, ou seja, se a posição terminal coincide com P_1, este ramo possui profundidade 1, se a P_t coincide com a P_2 este ramo tem uma profundidade 2, e assim por diante, o ramo com a maior quantidade de lances e quem define a profundidade da árvore. Para fins de melhor vizualização, a próxima ilustração terá os nós coloridos com verde as posições pares, e amarela as posições ímpares, o primeiro jogador J_1 com a cor azul, e o segundo jogador J_2 com a cor vermelha, e a cor das arestas indica o jogador que realizou a jogada, e ainda as posições terminais circulamos com a cor do jogador que vence a partida.

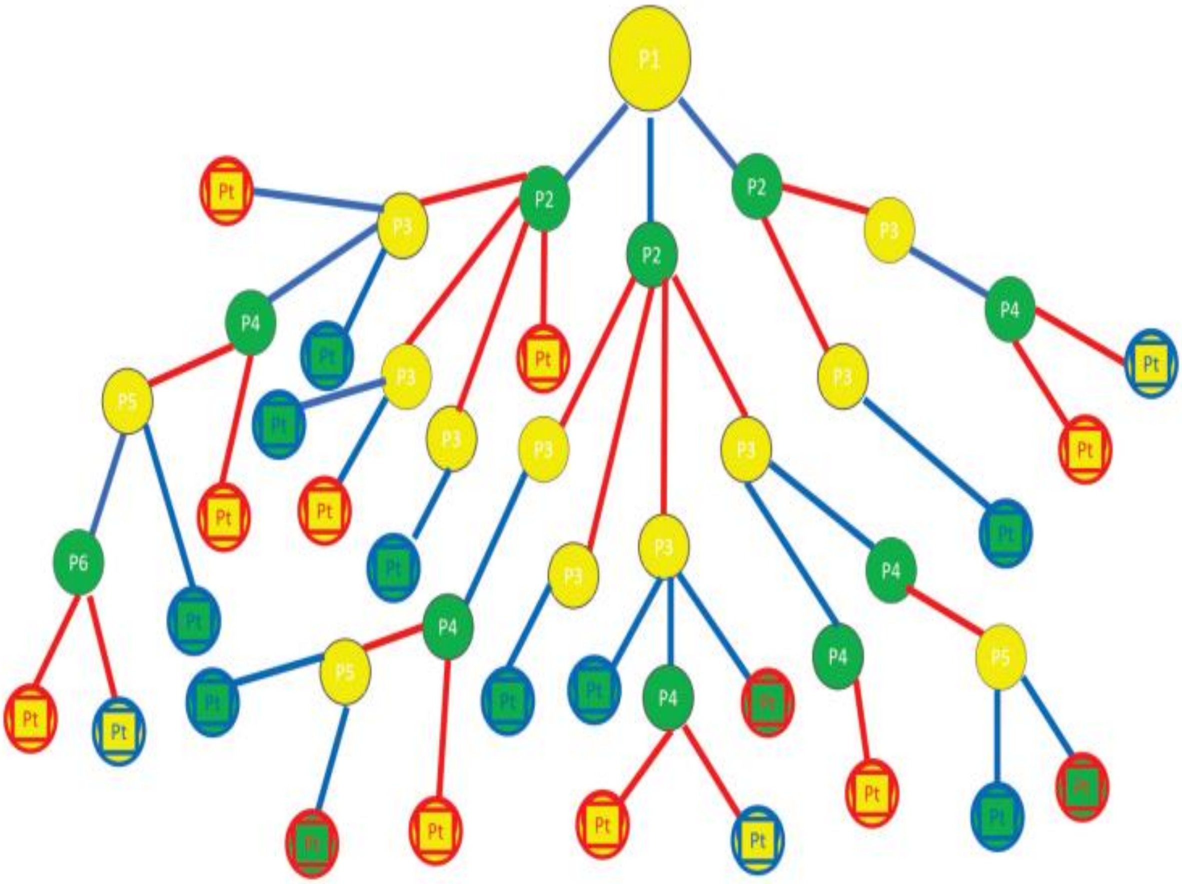


Figura 2: Árvore Completa

E agora, numeramos cada posição, para melhor identificar a profundidade dos ramos, e por consequência a profundidade da partida.

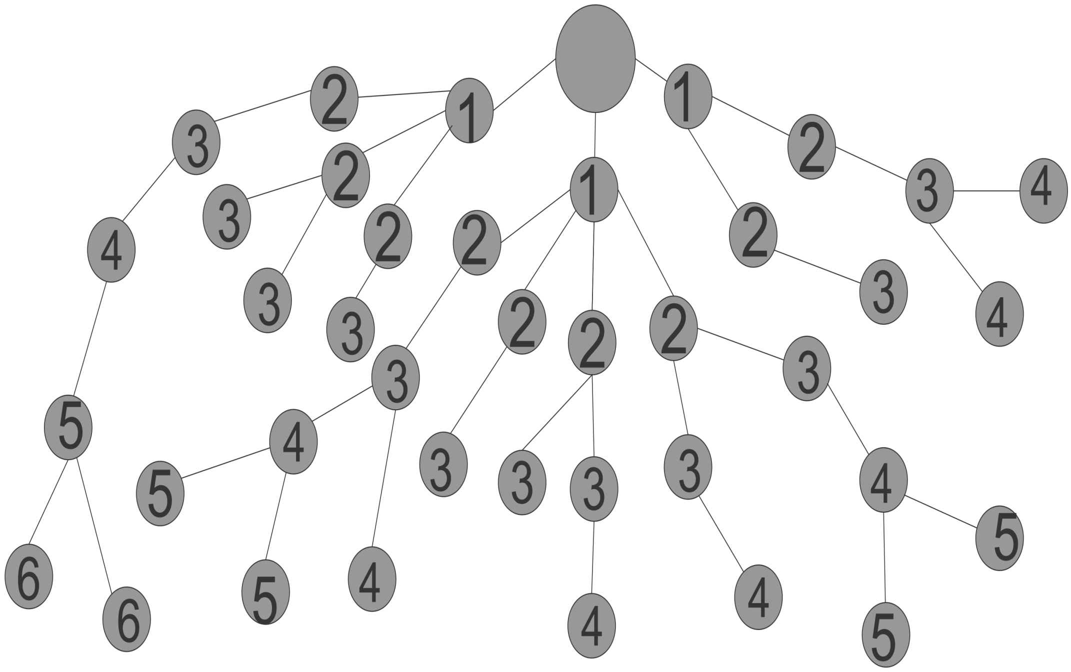


Figura 3: Árvore posicional

2.7 SOLUÇÕES DE UM JOGO COMBINATÓRIO

Definição 2.8 (Soluções)**.** *Uma* solução (S) *de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado de um jogo, neste trabalho definiremos que em um Jogo Combinatório, a solução (S) é conjunto de lances que levam um dos jogadores a vencer o jogo.*

2.8 O QUE É UMA ESTRATÉGIA VENCEDORA?

Definição 2.9 (Estratégia vencedora)**.** *Uma* estratégia *para determinado jogador é uma função que associa a cada posição do jogo que esse jogador pode encontrar na partida, uma posição à qual ele pode chegar efetuando um lance. Uma estratégia é vencedora se, em toda partida na qual o jogador faz seus lances de acordo com essa estratégia, ele é o vencedor da partida.*

2.9 TEOREMA DE ZERMELO

Teorema 2.1 (Zermelo [23]). *Também conhecido como o* Teorema Fundamental dos Jogos Finitos *[10], em qualquer jogo finito, entre duas pessoas, em que os jogadores movem alternadamente e onde o acaso não afeta o processo de decisão, se o jogo não pode terminar em um empate, então deve ocorre uma das seguintes possibilidades:*

- J_1 *tem estratégia vencedora;*
- J_2 *tem a estratégia vencedora.*

Demonstração. Faremos a demonstração por *indução reversa*, em uma árvore de possibilidades.

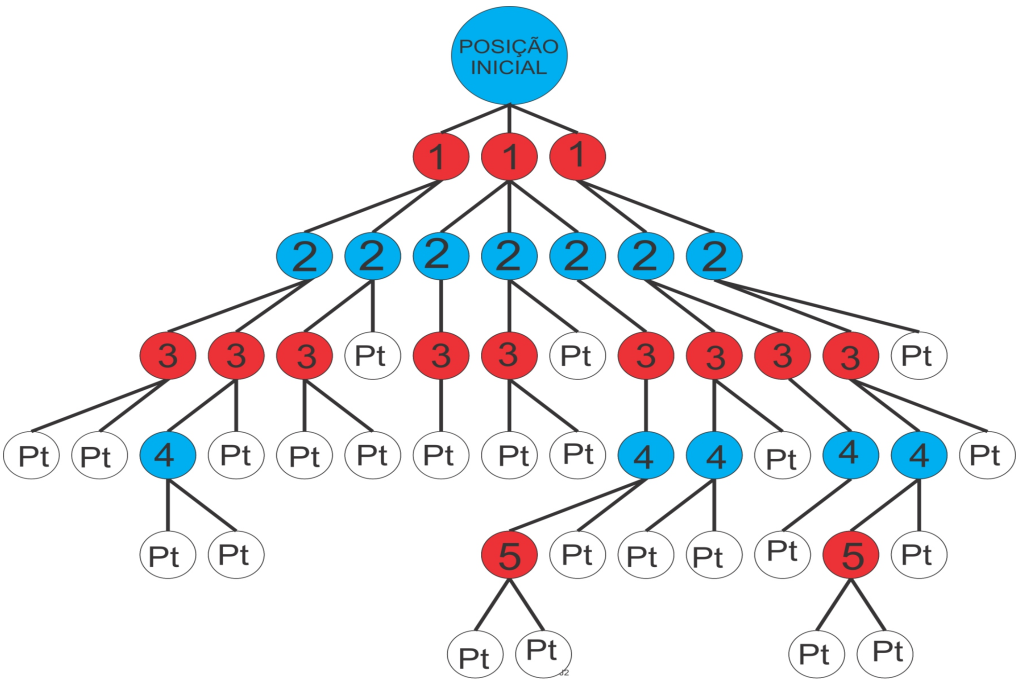


Figura 4: Partida Modelo

Iremos analisar a situação do jogo com todas as suas possibilidades de uma maneira inversa ao que se realiza a partida, ou seja, partindo das posições terminais, passando pelas posições anteriores, indo pelos maiores ramos até chegar na posição inicial. Esta análise tomaremos como uma classificação das posições que se dará da seguinte forma:

1. Seja N a profundidade do jogo, classificamos as posições de profundidade N, como J_1(Azul) ou J_2(Vermelho), J_1 se quem venceu a partida foi o primeiro jogador ou como J_2 se quem venceu a partida foi o segundo jogador;

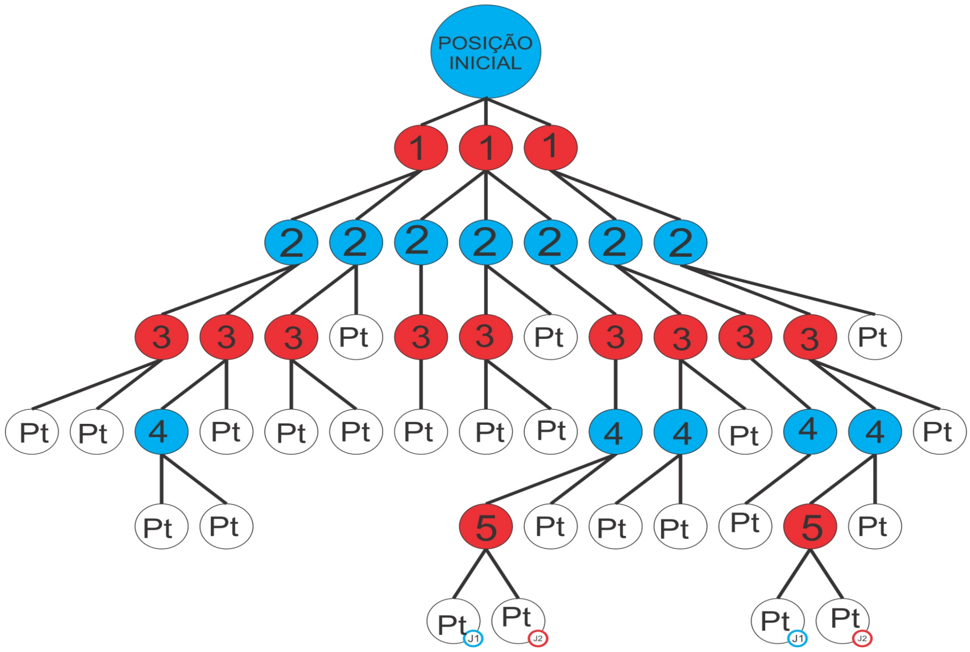


Figura 5: 1ª Classificação

2. Vamos classificar todas posições $N-1$, com W (posição vencedora) ou L (posição perdedora), W se ao menos algum ramo desta posição se conectou a uma P_t que determina sua vitória, L se todos os ramos se conectam a uma P_t que determina a vitória do seu adversário, lembrando que estamos classificando pela ótica do jogador que irá fazer o lance. Caso as posições $N-1$ sejam P_t, as classificamos como, J_1(Azul) ou J_2(Vermelho), J_1 se quem venceu a partida foi o primeiro jogador ou como J_2 se quem venceu a partida foi o segundo jogador, completando assim todos os nós dos ramos de profundidade $N-1$;

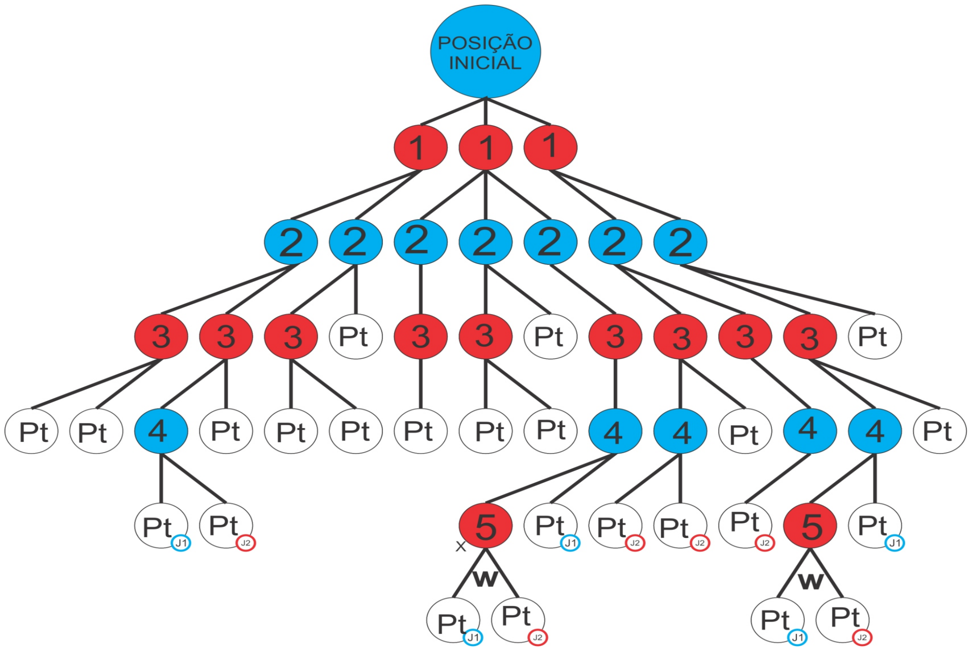


Figura 6: 2ª Classificação

3. Para as posições de profundidade $N-2, N-3, \ldots$, sucessivamente, as classificamos com os seguintes critérios:

   - Posições terminais ainda não classificadas, as classificaremos como J_1(Azul) ou J_2(Vermelho), J_1 se quem venceu a partida foi o primeiro jogador ou J_2 se quem venceu a partida foi o segundo jogador;

   - Posições que se conectem com posições terminais, a classificaremos, como W (posição vencedora) ou L (posição perdedora): W se ao menos algum ramo desta posição se conectou a uma posição terminal que determina sua vitória, L se todos os ramos se conectam a uma posição terminal que determina a vitória do seu adversário;

   - Posições que não são se conectam a uma posição terminal, e sim a posições que foram classificadas como W ou L; estas posições classificaremos como W (posição vencedora) ou L (posição perdedora), W se ao menos um dos ramos se conecta a uma posição L, L se todos os ramos se conectam a uma posição W;

- Posições em que exista a possibilidade de conexão com uma posição terminal e com uma posição já classificada, e as classificamos com W ou L: W se houver a possibilidade de conexão a uma P_t que determine sua vitória, ou ao menos algum ramo se conecte a uma posição L, L se nenhum dos ramos se conecta a uma posição L ou a uma posição terminal que determine a sua vitória.

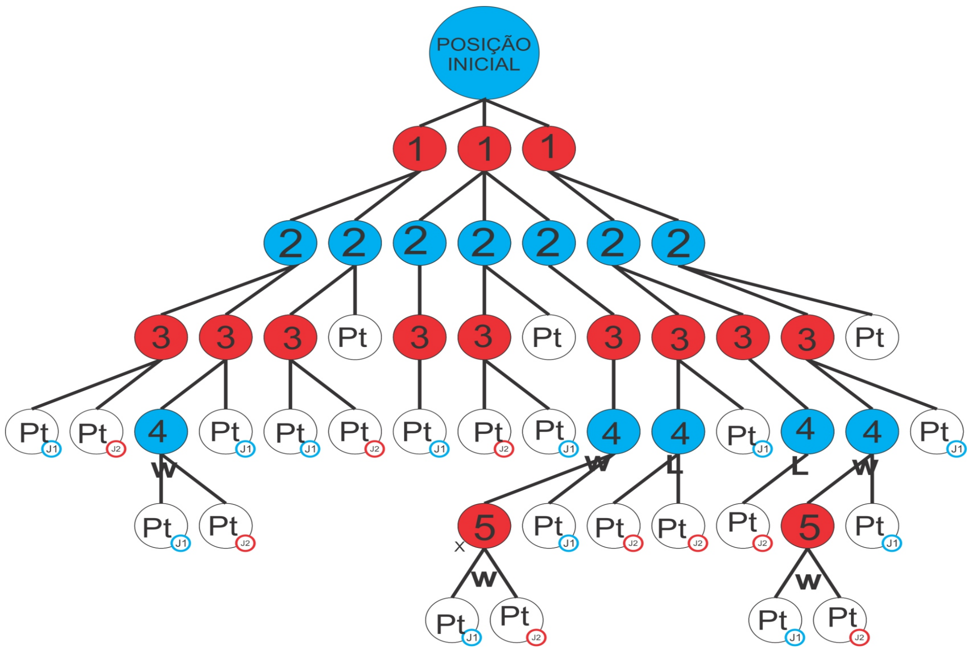


Figura 7: 3ª Classificação

4. O processo de classificação se mantém, até que se chegue à posição inicial.

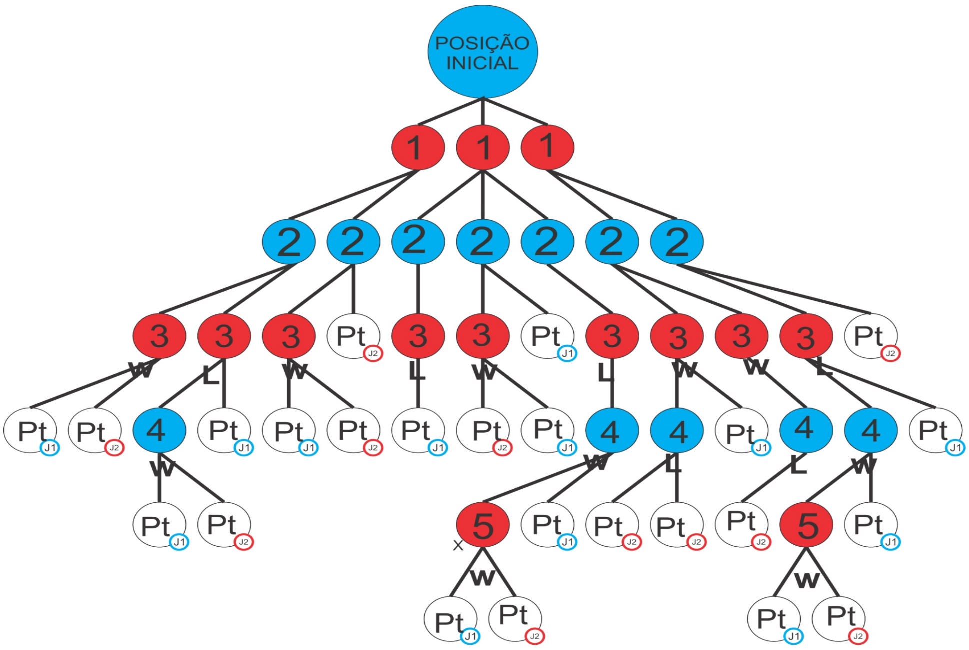


Figura 8: 4ª Classificação

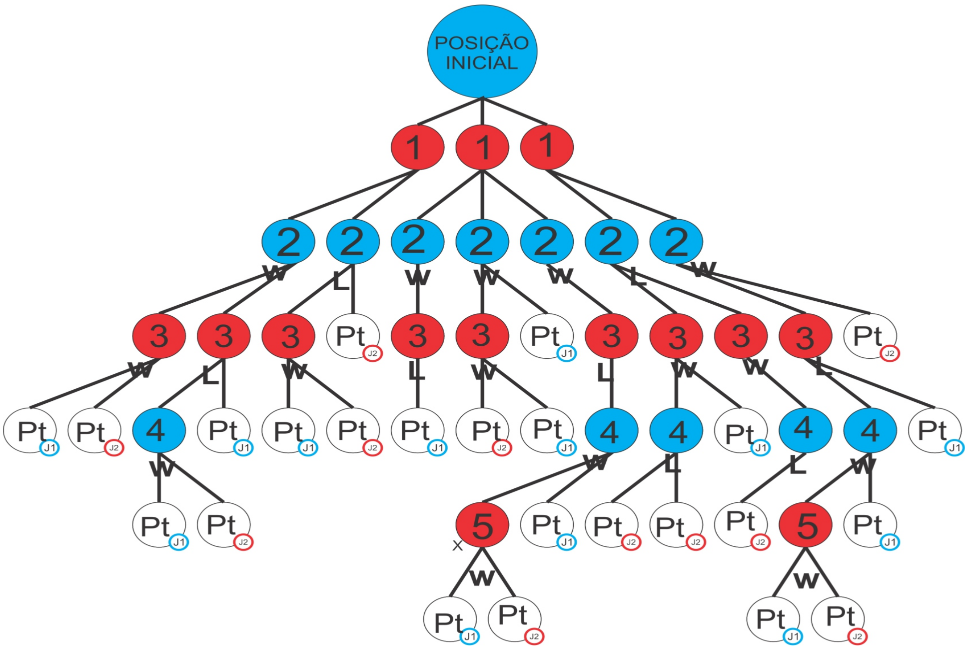


Figura 9: 5ª Classificação

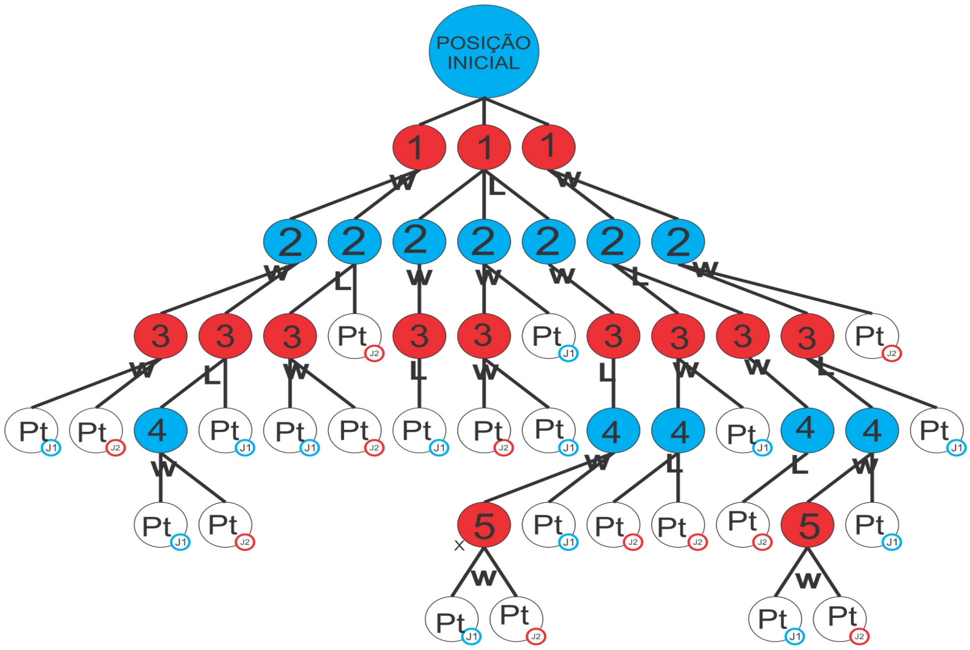


Figura 10: 6ª Classificação

Chegando nesta posição P_0, podemos determinar o jogador que possui a estratégia vencedora:

- Se esta posição for W, quem possui a estratégia vencedora é J_1, pois sempre será possível ele se conectar a uma posição L, e seu adversário, a partir desta posição, sempre se conecta a uma posição W.

- Se esta posição for L quem possui a estratégia vencedora é J_2, pois todas as suas jogadas se conectam a uma posição W, e destas posições seu adversário consegue se conectar a uma posição L.

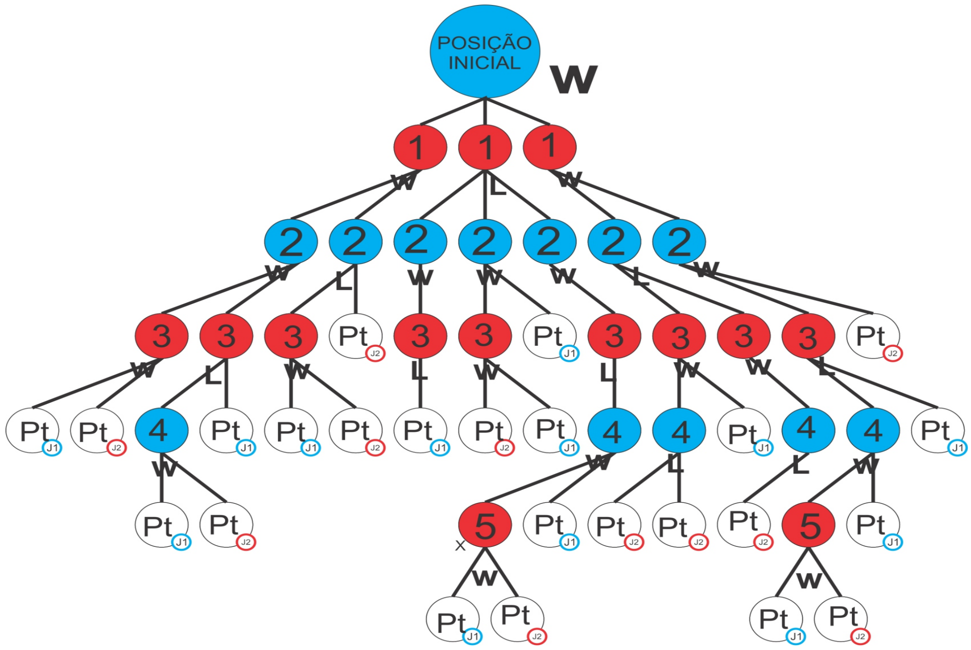


Figura 11: Classificação Final

□

Demonstração: Teorema de Zermelo-Indução Finita. **Caso básico**

Iremos fazer a indução na profundidade N da árvore.

- Se a profundidade do jogo for zero, ele não sai da posição inicial e o jogo acabou, ou J_1 ganhou, ou J_2 venceu. Assim sendo, o vencedor possui uma estratégia vencedora trivial. Provada assim para $N = 0$.

- Sendo N a profundidade da árvore de possibilidades, portanto para $N = 1$, após o primeiro lance, estaremos em uma posição terminal. Partindo da posição inicial, neste instante existe uma certa quantidade de escolhas, que podem ser realizadas por quem realiza o primeiro lance (J_1), porém elas são reduzidas para dois tipos de situações:

  1. Ao menos uma conexão leva a uma vitória do primeiro jogador;
  2. Nenhuma conexão leva a uma vitória do primeiro jogador.

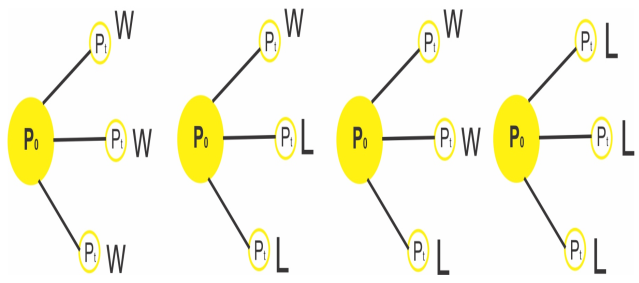


Figura 12: Profundidade 01

Na tentativa de facilitar o entendimento do passo indutivo, mostraremos que vale para N=1.

A primeira situação ocorrem quando o jogador que executou o primeiro lance J_1, tem a possibilidade de fazer uma conexão com uma posição terminal que determine a sua vitória, e é ele quem possui a estratégia vencedora. E a segunda situação acontece, quando todas as conexões determinam a vitória do seu adversário, e quem vai possuir a estratégia vencedora e o seu adversário J_2. Estas situações estão abaixo:

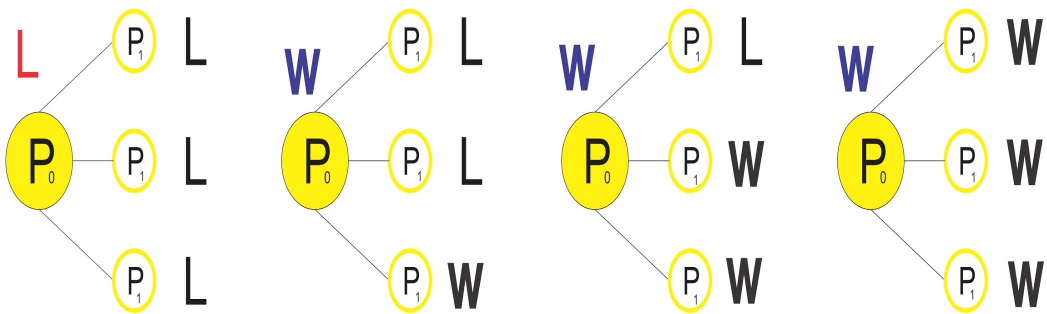


Figura 13: Profundidade 01 com Estratégia Vencedora

- Hipótese de Indução:

Suponhamos que para $N > 1$, com $N \in \mathbb{N}$, que o resultado seja verdade para todas os jogos cuja árvore tem profundidade menor que N.

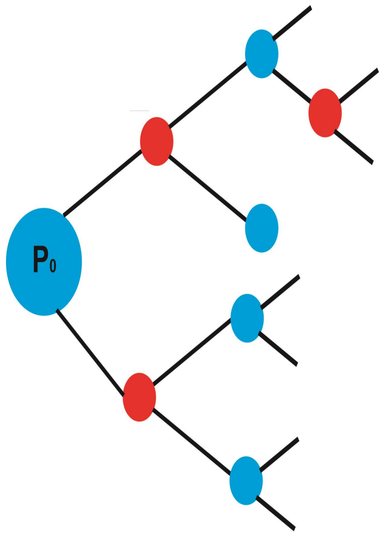


Figura 14: Representação de uma partida

Em uma partida de um jogo combinatório, representada por uma árvore, temos que a partir de uma posição, independente de qual jogador seja a vez, ele possui algumas possibilidades para realizar o seu lance, e estas possibilidades também estão representadas na árvore, ocorrendo o que chamamos de conexões entre as posições de profundidades sucessivas, e em cada uma dessas conexões representadas na árvore podemos chamar de subjogos (galhos), e todas elas vão ter uma profundidade menor que N.

Consideraremos os subjogos iniciados a partir de cada posição P que pode ser obtida após o lance inicial; note que todos estes subjogos têm profundidade menor que N.

E por hipótese de indução, em cada subjogo, o jogador que inicia esse subjogo tem uma estratégia vencedora, ou o outro jogador tem uma estratégia vencedora.

Se o jogador que inicia este subjogo possuir a estratégia vencedora, podemos classificar esta posição como vencedora (W); porém, se o jogador que inicia este subjogo não possui a estratégia vencedora, classificamos esta posição como perdedora (L).

E isto nos permite classificar a posição inicial, como vencedor (W), se existir a conexão com uma posição perdedora (L); como perdedora (L), se todos os caminhos se conectam com uma posição vencedora (W).

Portanto o resultado vale para todos os jogos de comprimento finito. □

Exemplo 2.10. ***Subjogos***

Temos a ilustração de um jogo combinatório em uma árvore de possibilidades, destacando dois galhos desta árvore, que no caso chamaremos de subjogos, com isso temos:

O subjogo 01 *tem uma solução* W*, sendo que* J_1 *é quem possui a estratégia vencedora.*

O subjogo 02 *tem uma solução* L *, sendo que* J_2 *é quem possui a estratégia vencedora.*

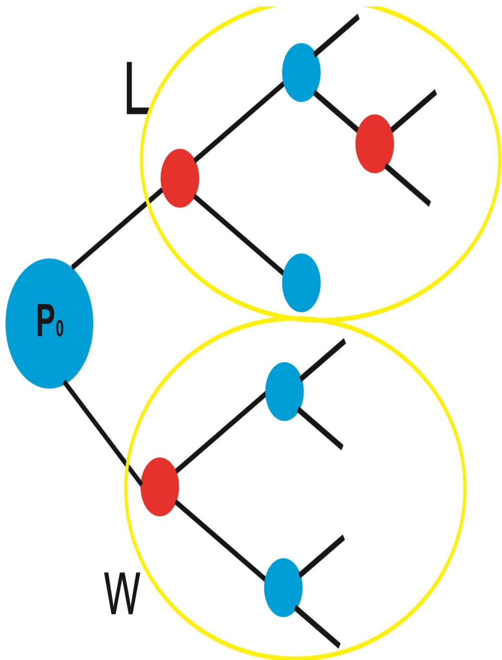


Figura 15: Subjogos com Estratégia vencedora

Para o subjogo 01 *a profundidade é* 3 *e na partida é* 4.

Para o subjogo 02 *a profundidade é* 2 *e na partida é* 3.

Portanto possui solução para todas as profundidades:

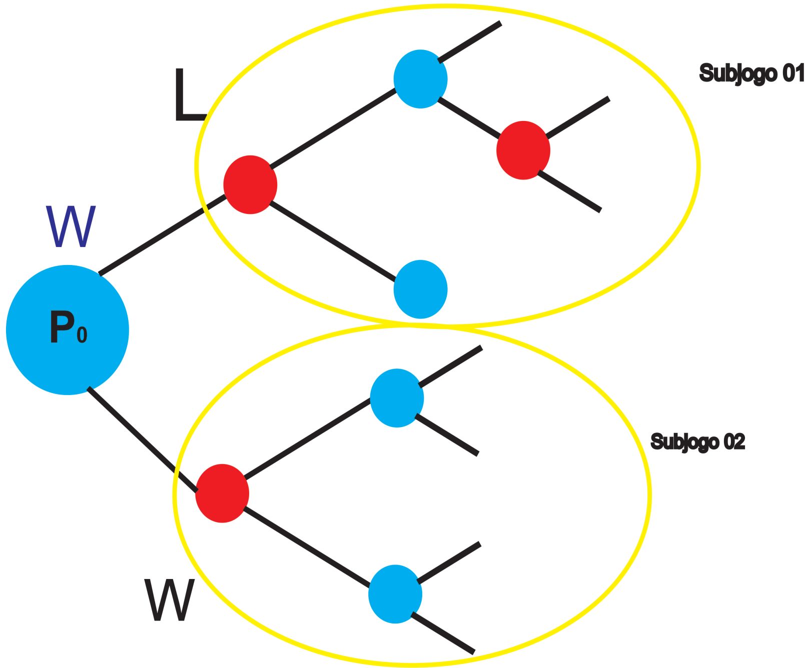


Figura 16: Partida com Subjogos

3 NIM

3.1 HISTÓRIA DO NIM

O nome Nim é derivado da palavra alemã *nimm*, que significa retirada, e provavelmente tem origem em um jogo de aposta chinês chamado Fan Tan. O primeiro estudo sobre o Nim foi feito pelo matemático americano Charles Leonard Bouton, da Universidade de Harvard há mais de um século, que indicou a origem chinesa do jogo. A teoria de estratégia de vitória de Bouton está ligada à aritmética dos números naturais no sistema binário de numeração, tendo sido demonstrada no artigo [3].

Segundo o matemático Martin Gardner, existem mais de dois milhões de possiblidades de sequência de jogo, conforme detalhado em seu livro [8].

3.2 COMO JOGAR? O NIM E SUAS VARIAÇÕES.

Um dos sucessos atríbuidos ao Nim é a facilidade de fazer pequenas modificações nas regras do jogo, e isso mudar as posições e as possibilidades do jogos; estas modificações criam novos jogos, que neste trabalho chamaremos de variações. Estas variações são tão interessantes quanto a forma tradicional de jogar, porém vamos trabalhar apenas com o Nim tradicional, que chamaremos de Nim das pilhas, e o Nim da subtração, juntamente com as suas respectivas versões misère.

3.2.1 Nim Tradicional: Nim das Pilhas

As regras do jogo:

- Jogam dois jogadores, J_1 (quem inicia a partida) e J_2 (o seu adversário);

- Uma jogada (lance) consiste em retirar pelo menos uma peça de uma das pilhas, deixando as outras pilhas inalteradas;
- As jogadas se alternam entre os jogadores;
- O jogador que retirar o último objeto é o vencedor;
- Existe a variação Misère, onde quem retira o último objeto é o perdedor.

3.2.2 Posição do Jogo-Nim

Definição 3.1 (Posição Nim). *Definimos por posição de um jogo de Nim com n pilhas ao n-upla* $(x_1, \ldots, x_n)$, *em que* x_i *é a quantidade de objetos da pilha i.*

Exemplo 3.2 (Nim das Pilhas). *Vamos mostrar uma partida de Nim por completo, sem qualquer tipo de análise.*

Sendo dois jogadores, J_1 *e* J_2*, jogam um partida de Nim, com a posição inicial de* $(2, 5, 7)$*, ou seja, existem três grupos de sapos, com* 2*,* 5 *e* 7 *sapos respectivamente.*

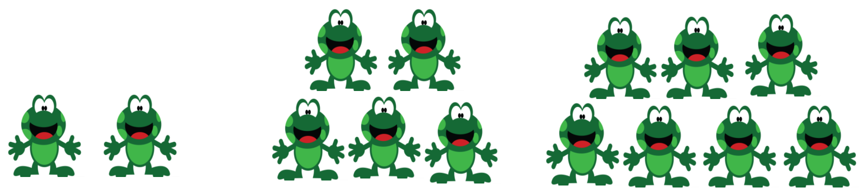


Figura 17: Posição inicial

J_1 **- *Lance*** 01
Retira 02 *sapos do grupo* 02*, jogando para a posição* $(2, 3, 7)$*.*

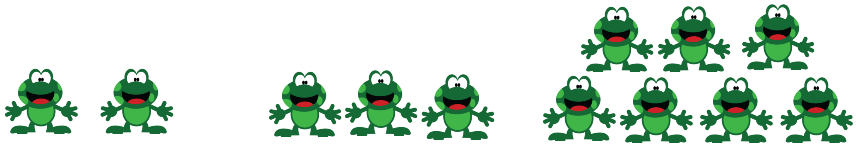


Figura 18: Posição 02

J_2 **- *Lance*** 02
Retira 03 *sapos do grupo* 03*, jogando para a posição* $(2, 3, 4)$*.*

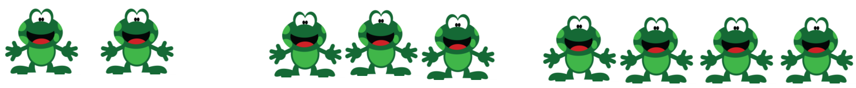


Figura 19: Posição 03

J_1 - ***Lance*** 03
Retira 01 *sapos do grupo* 01*, jogando para a posição* $(1, 3, 4)$.

Figura 20: Posição 04

J_2 - ***Lance 04***
Retira 04 *sapos do grupo* 03*, jogando para a posição* $(1, 3, 0)$.

Figura 21: Posição 05

J_1 - *Lance*05

Retira 02 *sapos do grupo* 02, *jogando para a posição* $(1, 1, 0)$.

Figura 22: Posição 07

J_2 **- *Lance*** 06

Retira 01 *sapo do grupo* 01, *jogando para a posição* $(0, 1, 0)$.

Figura 23: Posição final

J_1 *Retira o último sapo e vence a partida.*

3.2.3 Nim da Subtração

Nesta variação, o Nim é jogado com apenas uma pilha de peças, porém existe um limite na quantidade de peças que pode ser retirada por vez. Trabalharemos com uma generalização com uma quantidade N de peças, em uma única pilha, onde dois jogadores, J_1 (o jogador que inicia a partida) e J_2 (o seu adversário), alternadamente retiram da mesa de 1 até K peças, formando assim o conjunto de jogadas possíveis que chamaremos de $G = \{1, 2, ...K\}$, com $N \in \mathbb{N}$, para $K \leq N$. Para definir o vencedor, temos duas versões para esta variação do Nim: a primeira ganha onde quem retirar a última peça da mesa, e a versão misère, onde quem retirar a última peça perde.

3.3 ESTRATÉGIAS VENCEDORAS

Nesta seção, iremos mostrar quem possui a estratégia vencedora e quando, generalizando para todas as possíveis partidas do Nim das pilhas, do Nim da subtração e suas respectivas variações misère.

3.3.1 Estratégia vencedora-Nim da Subtração

Consideremos uma partida do Nim da subtração com N peças, em que cada jogador retira de 1 a K peças. Para determinarmos uma estratégia vencedora, inicialmente devemos definir quem, possui a estratégia vencedora, quando se inicia a partida.

Proposição 3.1. *Se $(K + 1) \mid N$, J_2 tem a posse da estratégia vencedora.*

Demonstração. Vamos provar que J_2 possui a estratégia vencedora se o número inicial de peças é $N = M \cdot (K + 1)$, sendo M um inteiro positivo.

Procederemos por indução em M.

- **Caso base:**

  Para $M = 1$, temos $N = 1 \cdot (K + 1)$.

  Como J_1 é quem inicia a partida e sua jogada se limita em $G = \{1, \ldots, K\}$, não ocorrendo uma retirada maior que K, portanto não atingindo a posição $(K + 1)$, pois este lance não pertence ao conjunto G. Se J_1 retira X peças em seu lance, restam pelo menos uma peça (já que $X \leq N$) e no máximo N peças (já que $X \geq 1$); logo J_2 consegue retirar todas as peças que estão na mesa em sua jogada. Concluímos então que para qualquer jogada X de J_1, J_2 pode fazer um lance $Y \in G$ onde $X + Y = K + 1$.

- **Caso geral:**

  Hipótese de Indução: $N = M \cdot (K+1)$, para um certo $M \geq 1$, é uma posição vencedora para J_2.

  Tese: $N = (M+1) \cdot (K+1)$ também é uma posição vencedora para J_2.

Dada um jogada $X \in G = \{1, 2, \ldots, K\}$ realizada por J_1, temos que a quantidade de peças sobre a mesa será:
$(M+1) \cdot (K+1) - X = M \cdot (K+1) + K + 1 - X$.
Como $1 \leq X \leq K$, temos $-K \leq -X \leq -1$, logo $1 \leq (K+1) - X \leq K$.
Concluímos que uma jogada $Y = (K+1) - X$ de J_2 pertence a $G = \{1, 2, \ldots, K\}$.
Para
$N = M \cdot (K+1) + K + 1$
Com o lance de J_1 teremos
$M \cdot (K+1) + K + 1 - X$ peças sobre a mesa.
Com o lance de J_2 teremos:
$M \cdot (K+1) + K + 1 - X - Y$ que são equivalentes a:
$M \cdot (K+1) + K + 1 - X - ((K+1) - X)$
$M \cdot (K+1) + K + 1 - X - (K+1) + X$
Portanto
$N = M \cdot (K+1)$
Com isso o próximo lance de J_1 é realizado em uma posição onde o número de peças sobre a mesa é igual a $M \cdot (K+1)$. Logo, pela hipótese de indução, J_2 é quem possui a estratégia vencedora para o Nim da subtração.
Portanto a afirmação é válida para todo inteiro positivo M. □

Proposição 3.2. *Se $(K+1) \nmid N$, J_1 tem a posse da estratégia vencedora.*

Demonstração. Pelo algoritmo de Euclides, podemos escrever N na forma:
$N = q \cdot (K+1) + R$, onde $R \in \{0, 1, \ldots, K\}$ é o resto da divisão de N por $(K+1)$ e $q \geq 0$.

Para que $(K+1)$ não divida N temos que $R \neq 0$, logo $R \in \{1 \ldots, K\} = G$.

Com isso basta J_1 retirar R peças na sua jogada (o que é um lance válido), e então a quantidade de peças na mesa será um múltiplo de $(K+1)$. Assim, pela proposição 3.1, a segunda pessoa a jogar a partir deste momento tem estratégia vencedora, neste caso J_1. $\square$

Usaremos um exemplo similar do jogo do Nim da Subtração, nas suas duas versões, aplicando a estratégia vencedora, para quem a possuir, no jogo apresentado no desenho "Cyberchase" no episódio "Resolvendo problemas em Shangri-lá" que no Brasil passa no canal Cultura. [16]

Figura 24: Cyberchase

Exemplo 3.3 (Nim Subtração-Cyberchase)**.** *Estão sobre uma mesa* 15 *dragões,* 14 *dragões verdes e um vermelho, alternadamente dois jogadores retiram* 1 *(um),* 2 *(dois) ou* 3 *(três) dragões, quem levar o dragão vermelho na última jogada, ganha a partida.*

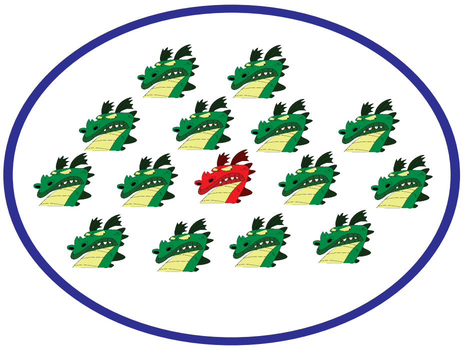


Figura 25: Cyberchase-Posição Inicial

A partir desta posição inicial, temos $N = 15$*,* $K = 3$ *e* $G = \{1, 2, 3\}$*. O primeiro passo é verificar quem possui a estratégia vencedora:*

Como N *não é múltiplo de* $(K + 1)$*, quem possui a estratégia vencedora é* J_1*, agora iremos aplica-lá:*

Como

$15 = 3 \cdot 4 + 3$

Jogador **01*- Lance*** 01 J_1 *deve retirar* 3 *dragões, deixando* 12 *dragões para* J_2*, para entregar para* J_2 *uma posição perdedora, onde a quantidade pde peças na mesa vira um múltiplo de* $K + 1$*.*

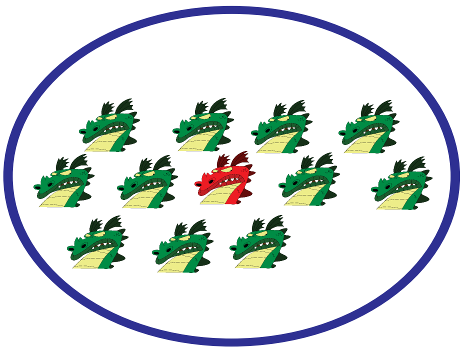


Figura 26: Cyberchase-Posição 02

Jogador 02-Lance 02

J_2 *tem as opções de retirar* 1*,* 2*, ou* 3 *dragões, deixando* $9, 10$ *ou* 11 *dragões para* J_1*, e em todos os casos* J_2 *devolve uma posição vencedora para* J_1*, pois nem* $9, 10$ *ou* 11 *é múltiplo de* $(K + 1)$*.*

Dado

$11 = 2 \cdot 4 + 3$

$10 = 2 \cdot 4 + 2$

$9 = 2 \cdot 4 + 1$

Divisões que sempre possuem resto diferente de zero.

Jogador 01-***Lance*** 03

J_1 *retira* 1, 2 *ou* 3 *dragões, de acordo com a estratégia, deixando* 8 *dragões para* J_2.

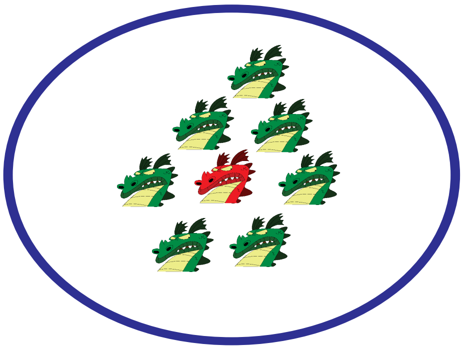


Figura 27: Cyberchase-Posição 03

Jogador 02-***Lance*** 04

J_2 *pode retirar* 1, 2, *ou* 3 *dragões, deixando* 7, 6, *ou* 5 *dragões para* J_1, *somente posições vencedoras.*

Dado

$7 = 1 \cdot 4 + 3$

$6 = 1 \cdot 4 + 2$

$5 = 1 \cdot 4 + 1$

Novamente posições onde ocorre resto não nulo na divisão de N *por* $(K + 1)$

Jogador 01-***Lance*** 05

J_1 *retira* 1, 2 *ou* 3 *dragões, de acordo com a estratégia, deixando* 4 *dragões para* J_2.

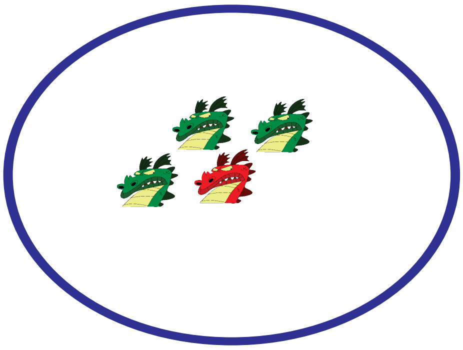
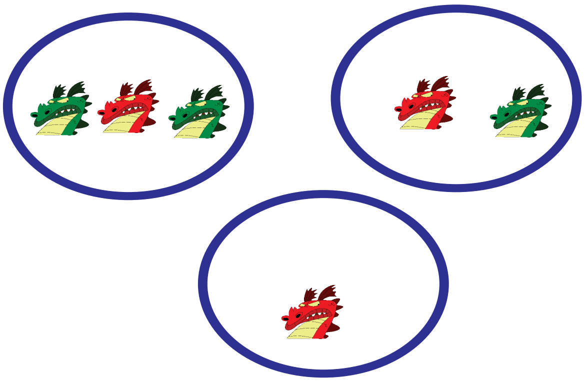


Figura 28: Cyberchase-Posição 05

Jogador 02- ***Lance*** 06

J_2 pode retirar 1, 2, *ou* 3 *dragões, deixando* 3, 2, *ou* 1 *dragão para* J_1.



Jogador 01-**Lance** 07

Figura 29: Cyberchase-Posição final

J_1 retira 1, 2,*ou* 3 *dragões, retirando todos os dragões da mesa (incluindo o vermelho) e vencendo a partida.*

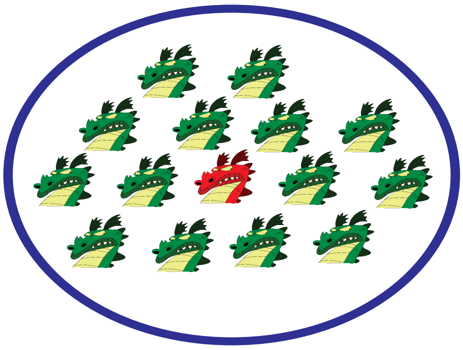


Figura 30: Cyberchase-Posição Inicial Misère

Exemplo 3.4 (Misère Nim da Subtração-Cyberchase)**.** *Ainda não definimos uma estratégia vencedora, nesta versão porém ela elucidará o raciocínio.*

Como nesta versão quem leva o último dragão (vermelho) perde, a ideia será excluí-lo, tanto para definir quem possui a estratégia vencedora, como para aplica-lá, pois nota-se que quem consegue retirar todos os dragões verdes consegue deixar o dragão vermelho para o adversário.

Podemos então concluir que, se um jogador tem a estratégia vencedora para a versão tradicional com N *peças, possui a estratégia vencedora para a versão misère com* $N+1$ *peças.*

Agora devemos verificar qual jogador possui a estratégia vencedora:

Como $N = 15$ *devemos verificar se* $(K+1)|(N-1)$

$14 = 3 \cdot 4 + 2$

Como esta divisão possui resto maior que zero, quem possui a estratégia vencedora é J_1.

Jogador 01-***Lance*** 01***M***

Como J_1 *deve ignorar o dragão vermelho e dado que:* $14 = 3 \cdot 4 + 2$, J_1 *deve retirar 02 dragões, deixando* $12\,(+1)$ *dragões para* J_2*;*

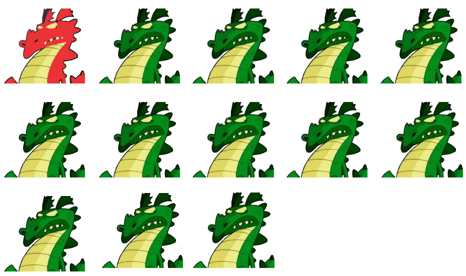


Figura 31: Cyberchase Posição 02 Misère

Jogador 02-***Lance*** 02M

J_2 pode retirar 1, 2 *ou* 3 *dragões, deixando* 9 (+1), 10 (+1), *ou* 11 (+1) *dragões para* J_1.

Como

$11 = 2 \cdot 4 + 3$

$10 = 2 \cdot 4 + 2$

$9 = 2 \cdot 4 + 1$

Jogador 01-***Lance*** 03M

Mantendo a estratégia J_1 *retira* 1, 2 *ou* 3 *dragões, deixando* 8 (+1) *dragões para* J_2.

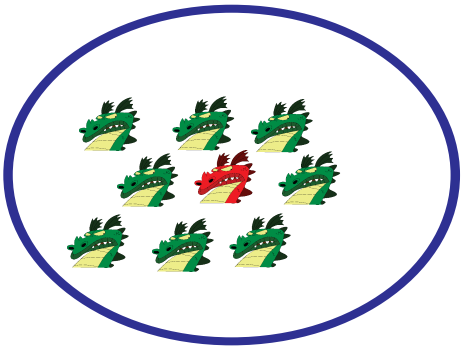


Figura 32: Cyberchase Posição 03 Misère

Jogador 02-***Lance*** 04M

J_2 pode retirar 1, 2 *ou* 3 *dragões , deixando* 7 (+1), 6 (+1) *ou* 5 (+1) *dragões para* J_1.

Como

$7 = 1 \cdot 4 + 3$

$6 = 1 \cdot 4 + 2$

$5 = 1 \cdot 4 + 1$

Jogador 01-***Lance*** 05M

J_1 retira 1, 2 *ou* 3 *dragões, de acordo com a estratégia, deixando* 4 (+1) *dragões para* J_2

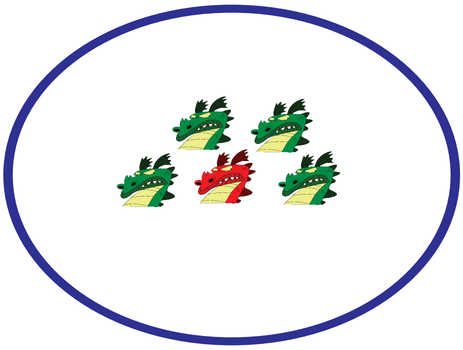


Figura 33: Cyberchase posição 05 Misère

Jogador 02-***Lance*** 06M

J_2 pode retirar 1, 2, *ou* 3 *dragões, deixando* $3\,(+1), 2\,(+1)$, *ou* $1\,(+1)$ *dragões para* J_1.

Jogador 01-***Lance*** 07M

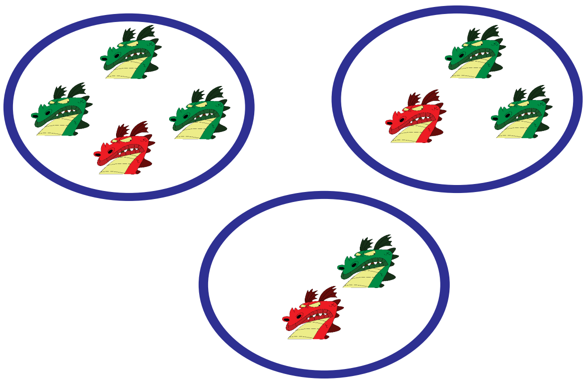


Figura 34: Cyberchase Posição 07 Misère

J_1 retira $1\,(+1)$, $2\,(+1)$ *ou* $3\,(+1)$ *dragões, retirando todos os dragões da mesa e deixando apenas o dragão vermelho à disposição para retirada.*

Jogador 02-***Lance*** 08M

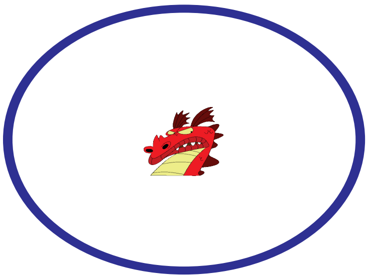


Figura 35: Cyberchase Posição 07 Misère

J_2 retira o último dragão (vermelho) e perde a partida.

3.3.2 Estratégia vencedora - Misère Nim da Subtração

Nesta versão do Nim da subtração, quem leva a útima peça perde a partida. Então vamos aplicar a mesma estratégia do Nim da subtração, porém imaginando que uma das peças não está disponível para retirada, ou seja, quem conseguir retirar todas as peças exceto uma é o jogador quem possui a estratégia vencedora.

Teorema 3.3. *Temos os casos:*

(a) J_2 possui estratégia vencedora no Misère Nim da subtração com N peças $\Leftrightarrow$ J_2 possuir estratégia vencedora para o Nim da subtração com $N-1$ peças.

(b) J_1 possui estratégia vencedora no Misère Nim da subtração com N peças $\Leftrightarrow$ J_1 possuir estratégia vencedora para o Nim da subtração com $N-1$ peças.

Demonstração. $\rightarrow$ **(a)**

Ao determinarmos que J_2 possui estratégia vencedora no Misère Nim da subtração com N peças, assumimos que ele possui estratégia vencedora para retirar todas as peças da mesa exceto uma, o que é equivalente a ele possuir estratégia vencedora para o Nim da subtração com $N-1$ peças.

$\leftarrow$**(a)**

Se J_2 possui estratégia vencedora para o Nim da subtração com $(N-1)$ peças, isto significa que ele tem estratégia vencedora para retirar todas as peças da mesa, portanto se existir N peças, ele consegue retirar todas e deixar uma para o seu adversário, o que seria uma estratégia vencedora no Misère Nim da subtração.

E estas afirmações são análogas para o item (b) do teorema. □

Fazendo uso das proposições 3.1 e 3.2 e do teorema 3.5 temos o corolário:

Corolário 3.4. ***Misère Nim da subtração***

(a) J_2 *tem estratégia vencedora no Misère Nim da subtração com* N *peças* $\Leftrightarrow (K+1)|(N-1)$.

(b) J_1 *tem estratégia vencedora no Misère Nim da subtração com* N *peças* $\Leftrightarrow (K+1) \not| (N-1)$.

3.3.3 Estratégia Vencedora - Nim (Pilhas)

Neste momento vamos definir a estratégia vencedora do jogo do Nim na sua variação que denominamos acima como Nim das pilhas.

Código-Nim

Esta definição representa um estado de uma posição no jogo do Nim, e ela foi apresentada por Bouton em [3] sem um nome definido, porém ela é parte fundamental da teoria da estratégia vencedora no jogo do Nim e neste trabalho será chamada de código-Nim.

Definição 3.5 (Código-Nim[3])**.** *A quantidade de peças de cada uma das pilhas de uma partida do Nim, representaremos por* x_i*, sendo* x_i *um natural representado pelos algarismos* 0 *e* 1 *(base binária), ou seja*

x_i=($a_{im}a_{i\ (m-1)} \dots a_{i0})_2$,

onde $a_{ij} \in \{0,1\}, \forall j \in \{0,1,2,\dots,m\}$. *Chamaremos de* código-Nim *entre os números* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, *e representaremos por* $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_n$:

$Y = (b_m b_{m-1} \dots b_0)_2$, *sendo*

$$\begin{cases} b_j = 0, & \text{se } \{i : a_{ij} = 1\} \text{ for par} \\ b_j = 1, & \text{se } \{i : a_{ij} = 1\} \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Dispositivo prático

Para facilitar a organização para determinar o código-Nim, criamos um dispositivo prático que nada mais é uma tabela onde nas linhas está disposta a representação binária da quantidade de peças de cada pilha, alinhadas da direita para a esquerda, e na última linha, temos a representação do código-Nim.

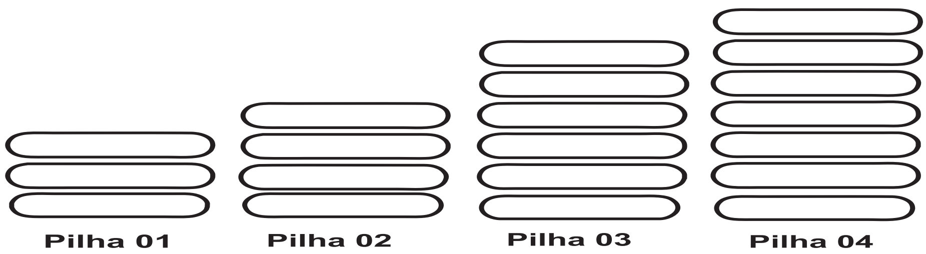


Figura 36: Nim com 4 pilhas

Exemplo 3.6. *Temos uma partida do Nim com* 4 *pilhas com* $3, 4, 6$ *e* 7 *peças respectivamente, a qual podemos representar na forma* $(3, 4, 6, 7)$. *Agora vamos calcular seu código-Nim.*

Inicialmente precisamos definir suas representações binárias:

$$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$$
$$4 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0100)_2$$
$$6 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0110)_2$$
$$7 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0111)_2$$

Agora podemos inserir as representações na tabela, e verificar a quantidade de algarismos 1 *por coluna, se for par resulta em* 0 *na mesma coluna, caso esta quantidade seja ímpar resulta em* 1.

Pilha 01(3)	0	0	1	1
Pilha 02(4)	0	1	0	0
Pilha 03(6)	0	1	1	0
Pilha 04(7)	0	1	1	1
código-Nim	**0**	**1**	**1**	**0**

Com isso definimos o código-Nim da posição.

Definição 3.7 (Posição Segura [3]). *Dizemos que uma posição em uma partida de Nim é* segura *quando seu código-Nim for igual a zero.*

Teorema 3.5 (Bouton [3]). *De qualquer posição insegura é possível jogar para uma posição segura. De uma posição segura, todas as jogadas possíveis conduzem a posições inseguras.*

Demonstração. Seja P o conjunto de estados onde o código-Nim de seus componentes é zero e N o conjunto de estados onde o código-Nim de seus componentes é diferente de zero. Vamos provar três afirmações que implicam o resultado:

1. Todo estado terminal está em P.
   O único estado terminal do jogo de Nim é aquele em que todas as pilhas possuem zero peças. É fácil de ver que a código-Nim do estado terminal é zero e portanto está em P.

2. Para cada estado em N existe um movimento para um estado em P.
   Vamos provar isso construindo um movimento generalizado de um estado com código-Nim diferente de zero para um com código-Nim zero. Se um estado está em N então seu código-Nim é diferente de zero. Se seu código-Nim é diferente de zero, há pelo menos uma posição da representação binária de todos os valores das pilhas que possui um número ímpar de números 1. Escolha a posição mais à esquerda com quantidade ímpar de 1 de todas as pilhas. Escolha uma das pilhas que possui dígito 1 na posição em sua representação binária e transforme esse dígito em 0. Com isso alcançamos duas coisas: a quantidade total de dígitos 1 naquela posição se torna par e podemos alterar qualquer dígito de posições menos significativas do valor da pilha que escolhemos, pois o número resultante será menor que o original. A partir disso, definimos um novo dígito para cada posição menos significativa da pilha que alteramos: se invertermos o dígito atual e a quantidade total de dígitos 1 nessa posição se tornar par, inverte o dígito, caso contrário, permanece o mesmo. Dessa maneira, construímos uma jogada válida que leva o jogo de uma posição com código-Nim diferente de zero para um com código-Nim igual a zero, pois todas as posições possuem quantidades pares de dígitos 1.

3. Todo movimento de um estado em P é para um estado em N.

Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um estado em P.

Como estamos alterando algum $x_i = (a_m\, a_{m-1}\, \ldots\, a_0)_2$ para $x = (c_m\, c_{m-1}\, \ldots\, c_0)_2$, em pelo menos um $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ teremos que $a_j \neq c_j$. Como a alteração se deu em apenas uma pilha, a quantidade de algarismos 1 na j-ésima coluna se altera em uma unidade, alterando a representação do código-Nim de 0 para 1.

□

Proposição 3.6. *Dado uma posição inicial, se o código-Nim for diferente de zero, J_1 possui estratégia vencedora.*

Demonstração. A estratégia vencedora é sempre jogar para uma posição onde o código-Nim seja nulo. O Teorema de Bouton nos garante que é possível manter esta estratégia até o final da partida.

Como a partida se encerra numa posição com código-Nim igual a zero, o jogador que conduziu a esta posição é o vencedor, neste caso, J_1. □

Proposição 3.7. *Dado uma posição inicial, se o código-Nim for igual a zero, J_2 possui estratégia vencedora.*

Demonstração. Pelo Teorema de Bouton, independentemente do lance inicial feito por J_1, J_2 fará o seu lance a partir de uma posição com código-Nim diferente de zero, e então poderá aplicar a estratégia vencedora da proposição anterior. □

Exemplo 3.8. *Vamos aplicar a estratégia vencedora, para quem tiver a sua posse, no jogo do Nim da pilhas em uma partida com 3 pilhas com $3, 6$ e 8 peças respectivamente.*

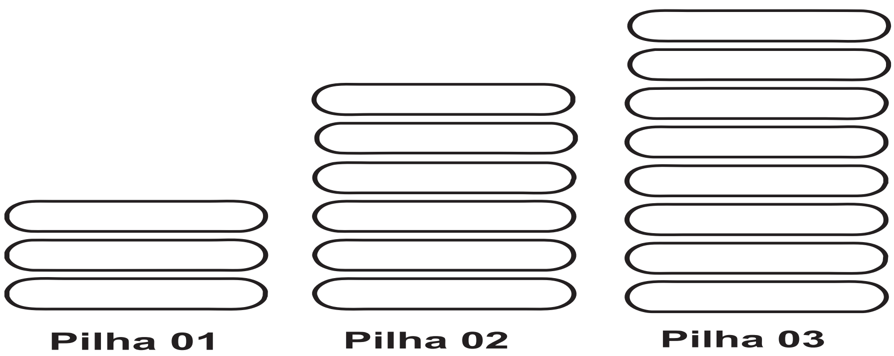


Figura 37: Posição inicial

Inicialmente vamos verificar qual dos jogadores está em uma posição vencedora:

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$

$6 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0110)_2$

$8 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1000)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2 \oplus (0110)_2 \oplus (1000)_2$

Código-Nim $\oplus = (1101)_2$

Como o código-Nim é não nulo, J_1 é quem possui a estratégia vencedora.

***Jogador* 1*- lance* 01**

Para manter a estratégia vencedora o J_1 deve entregar para J_2 uma posição onde o código-Nim seja zero. Como o código-Nim se define na seguinte forma:

Pilha 01(3)	0	0	1	1
Pilha 02(6)	0	1	1	0
Pilha 03(8)	1	0	0	0
código-Nim	**1**	**1**	**0**	**1**

J_1 deverá retirar peças da pilha que tem o dígito 1 *na posição mais à esquerda na representação binária; neste caso, a pilha* 03*. E ainda, combinado com as outras pilhas, deverá deixar uma quantidade par de representações binárias* 1 *nas colunas, ou seja,* $(0101)_2 = (5)_{10}$

Pilha 01(3)	0	0	1	1
Pilha 02(6)	0	1	1	0
Pilha 03(5)	0	1	0	1
código-Nim	**0**	**0**	**0**	**0**

Portanto o lance de J_1 para manter a estratégia vencedora é retirar 3 peças da pilha 03*, resultando na posição* $(3, 6, 5)$*.*

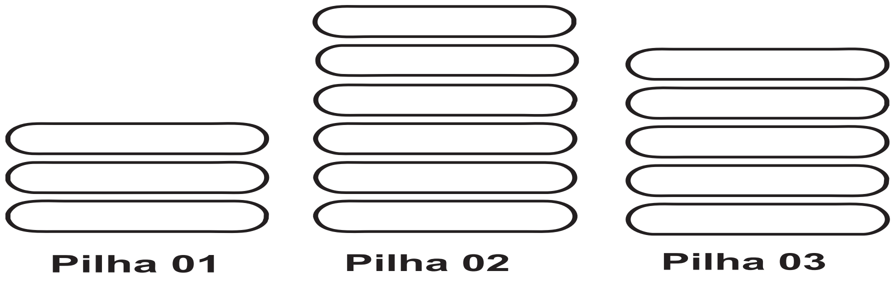


Figura 38: Posição 02

Jogador 02- ***lance*** 02

Pelo Teorema de Bouton não existe um lance para J_2 *onde consiga manter o código-Nim nulo, com isso* J_2 *retira* 4 *peças da pilha* 02*, deixando na posição* $(3,2,5)$

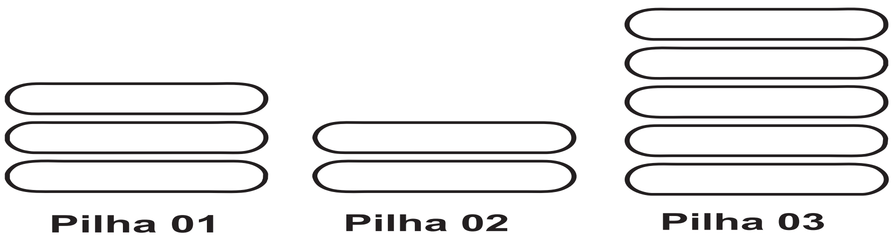


Figura 39: Posição 02

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$

$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$

$5 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0101)_2$

Código-Nim $\oplus =(0011)_2 \oplus (0010)_2 \oplus (0101)_2$

Código-Nim $\oplus = (0100)_2$

Pilha 01(3)	*0*	*0*	*1*	*1*
Pilha 02(2)	*0*	*0*	*1*	*0*
Pilha 03(5)	*0*	*1*	*0*	*1*
código-Nim	***0***	***1***	***0***	***0***

Jogador 01-Lance 03

Para manter a estratégia vencedora J_1 *deve repetir o processo da jogada anterior, com isso vai precisar retirar* 04 *peças da pilha* 03*, passando o jogo para uma posição* $(3, 2, 1)$.

Figura 40: Posição 03

Analisando esta posição $3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$

$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2 \oplus (0010)_2 \oplus (0101)_2$

Código-Nim $\oplus = (0000)_2$

Pilha 01(3)	*0*	*0*	*1*	*1*
Pilha 02(2)	*0*	*0*	*1*	*0*
Pilha 03(1)	*0*	*0*	*0*	*1*
código-Nim	***0***	***0***	***0***	***0***

Jogador 02-***Lance*** 04

Novamente J_2 está em uma posição perdedora, sem possibilidade de reversão. Mas vamos analisar todas as suas possibilidades:

1. *Retirar* $1, 2$ *ou 3 peças da pilha* 01;
2. *Retirar* 1 *ou 2 peças da pilha* 02;
3. *Retirar* 1 *peça da pilha* 03.

Em 1 *temos as posições:*

(2,2,1)

Figura 41: Possível posição 4A

Pilha 01(2)	0	0	1	0
Pilha 02(2)	0	0	1	0
Pilha 03(1)	0	0	0	1
código-Nim	**0**	**0**	**0**	**1**

(1,2,1)

Figura 42: Possível posição 4B

Pilha 01(1)	*0*	*0*	*0*	*1*
Pilha 02(2)	*0*	*0*	*1*	*0*
Pilha 01(1)	*0*	*0*	*0*	*1*
código-Nim	***0***	***0***	***1***	***0***

(0,2,1)

Figura 43: Possível posição 4C

Pilha 01(0)	0	0	0	0
Pilha 02(2)	0	0	1	0
Pilha 03(1)	0	0	0	1
código-Nim	**0**	**0**	**1**	**1**

Em 2 *temos as posições:*

(3,1,1)

Figura 44: Possível posição 4D

Pilha 01(3)	0	0	1	1
Pilha 02(1)	0	0	0	1
Pilha 03(1)	0	0	0	1
código-Nim	**0**	**0**	**1**	**1**

(3,0,1)

Figura 45: Possível posição 4E

Pilha 01(3)	0	0	1	1
Pilha 02(0)	0	0	0	0
Pilha 03(1)	0	0	0	1
código-Nim	**0**	**0**	**1**	**0**

Em 3 *temos a posição:*

(3,2,0)

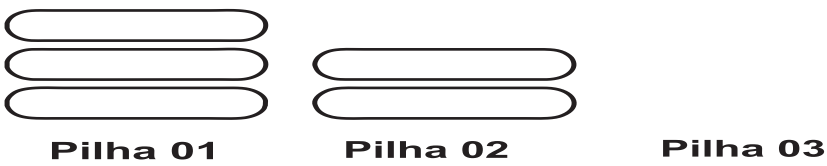


Figura 46: Possivel posição 04F

Pilha 01(3)	0	0	1	1
Pilha 02(2)	0	0	1	0
Pilha 03(0)	0	0	0	0
código-Nim	**0**	**0**	**0**	**1**

Podemos notar que em nenhum dos casos ocorreu código-Nim igual a zero.

Jogador 01-***Lance*** 05

Agora para cada possível jogada 04 *de* J_2 *vamos definir o lance* 05 *de* J_1 *onde o mesmo mantém a estratégia vencedora.*

$(2,2,1)$

J_1 *Retira 01 peça da pilha 03, passando para uma posição* $(2,2,0)$.

$(1,2,1)$

J_1 *Retira* 02 *peças da pilha* 02*, passando para uma posição* $(1,0,1)$.

$(0,2,1)$

J_1 *Retira* 01 *peça da pilha* 02*, passando para uma posição* $(0,1,1)$.

$(3,1,1)$

J_1 *Retira* 03 *peças da pilha* 03*, passando para uma posição* $(0,1,1)$.

$(3,0,1)$

J_1 *Retira* 02 *peças da pilha* 01*, passando para uma posição* $(1,0,1)$.

$(3,2,0)$

J_1 *Retira* 01 *peça da pilha* 03*, passando para uma posição* $(2,2,0)$.

Podemos notar que em todos os casos, a quantidade de peças nas pilhas são iguais, fazendo com que todos os códigos-Nim sejam zero.

Jogador 02-***Lance*** 06

Temos agora apenas dois tipos de posições:

- *Duas peças distribuídas em* 2 *pilhas;*
- *Quatro peças distribuídas em* 2 *pilhas.*

No primeiro caso J_2 *retira uma peça em uma das pilhas, deixando a última para* J_1 *e perde a partida.*

No segundo caso J_2 *retira uma ou duas peças de uma das colunas, caso tire apenas uma peça,* J_1 *tira uma peça da outra pilha, voltando ao caso anterior onde* J_2 *perde a partida, se tirar duas peças de uma das pilhas,* J_1 *tira as duas últimas peças vencendo a partida.*

Com isso mostramos o resultado de uma aplicação da estratégia vencedora.

3.3.4 Estratégia Vencedora-Misère Nim das pilhas

Nesta versão, o jogador que executar o último lance perde. A teoria nesta versão é muito parecida à do Nim das Pilhas tradicional.

A estratégia vencedora nesta versão consiste em utilizar a estratégia do Nim das Pilhas até que existam duas pilhas com mais de uma peça. Depois disso, quando adversário fizer uma jogada para uma posição que tenha apenas uma pilha com mais que um bloco, será suficiente reduzir esta pilha para 0 ou 1 peça, tendo como objetivo deixar um número ímpar de pilhas de tamanho 1.

Proposição 3.8 (Misère Nim das pilhas). *J_1 possui a estratégia vencedora se:*

1. *A quantidade de pilhas for par, e em cada uma destas pilhas existir apenas uma peça.*
2. *Existir apenas uma pilha, e esta pilha possuir mais de uma peça.*
3. *Existir mais de uma pilha, porém apenas uma destas possui mais de uma peça.*
4. *Existirem duas ou mais pilhas com mais do que uma peça e o código Nim for não nulo.*

Demonstração. Em 1 temos que os lances se alternam e com J_2 fazendo seu lance nas posições com quantidade de pilhas ímpares, ou seja, ele que fará o último lance.

Figura 47: Pilhas unitárias- par

Figura 48: Pilhas unitárias- impar

Em 2, será suficiente para J_1 retirar todas as peças exceto uma.

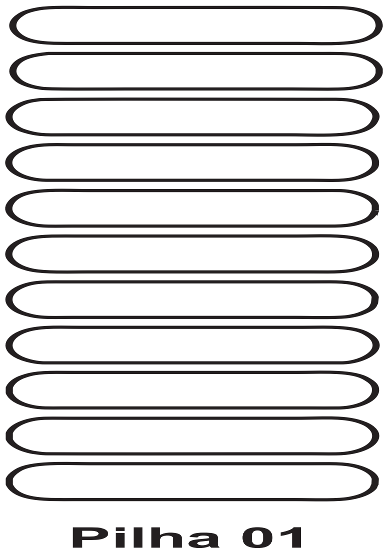


Figura 49: Pilha única

Em 3, J_1 pode reduzir para o caso 01, procedendo da seguinte forma:

Figura 50: Misère Nim-pilhas ímpar

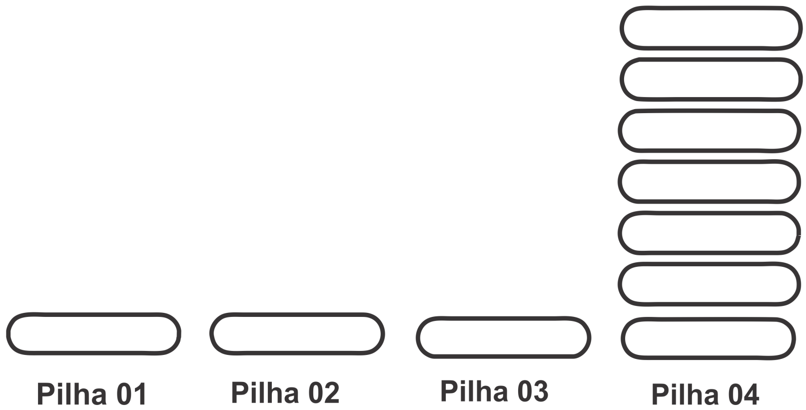


Figura 51: Misère Nim-pilhas par

Se a quantidade de pilhas for par, ele retira todas as peças da pilhas com mais de uma peça; se a quantidade de pilhas for ímpar, ele deixa apenas uma peça na pilha que possui mais que uma peça. E em ambos os casos, ele entrega uma quantidade ímpar de pilhas com uma peça para o seu adversário.

Em 4, como se está aplicando a estratégia do Nim das pilhas tradicional, e a retirada é em apenas uma pilha por lance, J_1 não entrega uma posição para J_2 com várias pilhas com apenas uma delas com quantidade de peças maior que 1 (situação 03), pois o código-Nim nunca é nulo nesta situação, e J_2 não pode realizar um lance de uma posição com duas pilhas com mais de uma peça para uma posição em que não existam pilhas com mais que 1 peça.

Com J_1, mantendo a estratégia de sempre entregar uma posição com código-Nim nulo para J_2, como a quantidade de pilhas vai diminuindo no decorrer da partida, existirá um momento onde J_2 fará um lance que conduzirá situações 2 e 3, determinando a vitória para J_1. □

E se nenhum dos 4 casos ocorrer, quem possui a estratégia vencedora é J_2, pelo simples fato, de que J_2 pode aplicar a estratégia vencedora de entregar uma posição com código-Nim nulo para o adversário ou entregar uma quantidade ímpar de pilhas com uma peça.

Exemplo 3.9 (Misère Nim das Pilhas)**.** *Aplicaremos a estratégia vencedora para quem a possuir, em uma partida do Misère Nim com três pilhas com* $3, 5$ *e* 8 *peças respectivamente.*

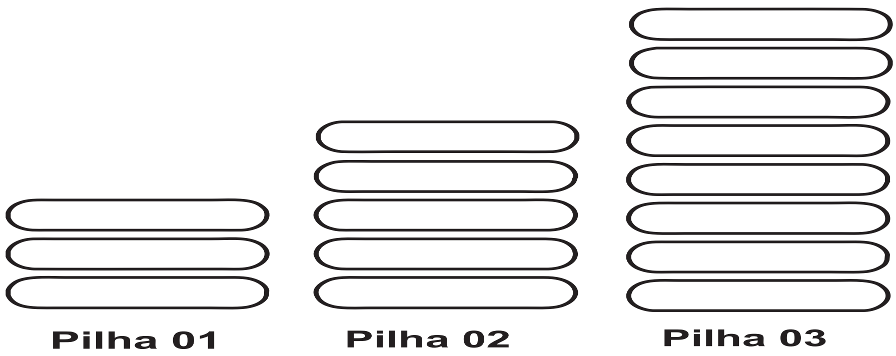


Figura 52: Posição inicial

Inicialmente vamos verificar qual dos jogadores está em uma posição vencedora,

pela proposição temos que as condições $1, 2$ *e* 3 *não estão satisfeitas, agora vamos verificar a* 4*:*

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11)_2$

$5 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (101)_2$

$8 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1000)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2 + (0101)_2 + (1000)_2$

Código-Nim $\oplus = (1000)_2$

Como o código-Nim é não nulo, J_1 *é quem possui a estratégia vencedora.*

Para manter a estratégia, ele deve entregar uma posição com código Nim nulo para J_2*. Para isso,* J_1 *deve retirar* 02 *peças da pilha* 03*, indo para uma posição com a configuração* $(3, 5, 6)$*.*

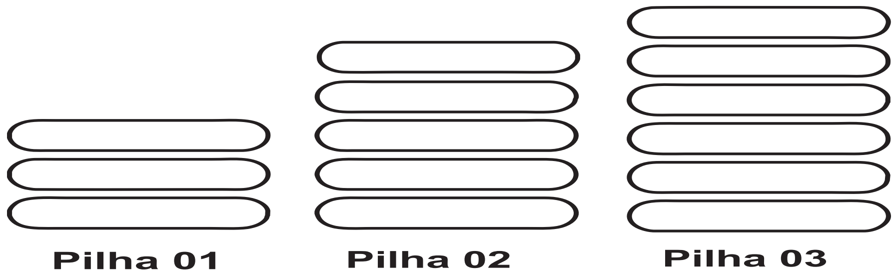


Figura 53: Posição 02

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$
$5 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0101)_2$
$6 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0110)_2$
Código-Nim $\oplus = (0011)_2 + (0101)_2 + (0110)_2$
Código-Nim $\oplus = (0000)_2$

A partir desta posição, J_2 não possui nenhuma jogada que reverta a situação, pois não consegue realizar um lance que mantenha o código-Nim igual a zero, retirando então 3 *peças da pilha* 02*, mudando o jogo para uma posição* $(3, 2, 6)$.

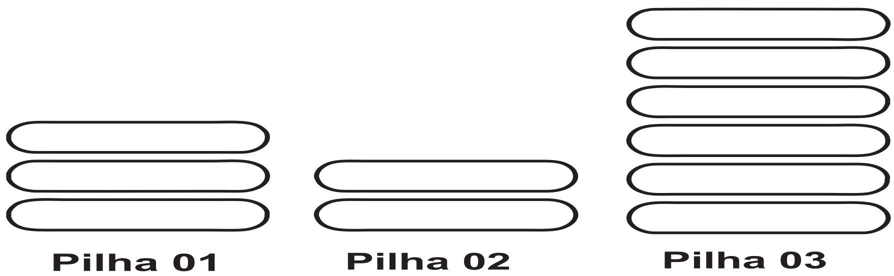


Figura 54: Posição 03

Analizando esta posição:
$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$
$2 = 0 \cdot 2^3 + \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$
$6 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0110)_2$
Código-Nim $\oplus = (0011)_2 + (0010)_2 + (0110)_2$

Código-Nim $\oplus = (0111)_2$

Para manter a estratégia desta posição J_1 *deve retirar* 5 *peças da pilha* 03*, passando para uma posição* $(3, 2, 1)$

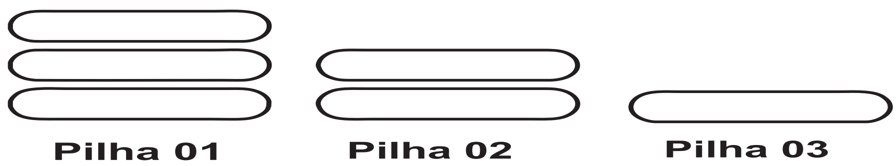


Figura 55: Posição 04

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$

$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2 + (0010)_2 + (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0000)_2$

A partir desta posição podemos fazer uma análise de todas as possibilidades existentes, onde pode ocorrer as seguintes situações:

1. J_2 *Retirar* 1, 2 *ou* 3 *peças da pilha* 01;

2. J_2 *Retirar* 1 *ou* 2 *peças da pilha* 02;

3. J_2 *Retirar* 1 *peça da pilha* 03.

Na situação 1 *temos as seguintes posições com seus respectivos código-Nim:*

$(2, 2, 1)$

Figura 56: Possível posição 05A

$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$
$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$
$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$
Código-Nim $\oplus =(0010)_2 + (0010)_2 + (0001)_2$
Código-Nim $\oplus = (0001)_2$

Mantendo a estratégia vencedora, J_1 *retira uma peça da pilha* 03 *passando para a posição* $(2, 2, 0)$

$(1, 2, 1)$

Figura 57: Possível posição 05B

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$
$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$
$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$
Código-Nim $\oplus =(0001)_2 + (0010)_2 + (0001)_2$
Código-Nim $\oplus = (0010)_2$

Aplicando a estratégia vencedora no caso 3 *na proposição* 4.10*,* J_1 *retira uma peça da pilha* 02 *passando para a posição* $(1, 1, 1)$

$(0, 2, 1)$

Figura 58: Possível posição 05C

$0 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0000)_2$

$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$

Código-Nim $\oplus$ $=(0000)_2 + (0010)_2 + (0001)_2$

Código-Nim $\oplus$ $= (0011)_2$

Aplicando a estratégia vencedora no caso 3 *na proposição* 4.10*,* J_1 *retira duas peças da pilha* 02 *passando para a posição* $(0, 0, 1)$

$(3, 1, 1)$

Figura 59: Possível posição 05D

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2 + (0001)_2 + (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2$

Aplicando a estratégia vencedora no caso 3 *na proposição* 4.10*,* J_1 *retira duas peças da pilha* 01 *passando para a posição* $(1, 1, 1)$

$(3, 0, 1)$

Figura 60: Possível posição 05E

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$

$0 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0000)_2$

$1 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0011)_2 + (0000)_2 + (0001)_2$

Código-Nim $\oplus = (0010)_2$

Aplicando a estratégia vencedora no caso 3 *na proposição* 4.10*,* J_1 *retira três peças da pilha* 01 *passando para a posição* $(0, 0, 1)$

$(3, 2, 0)$

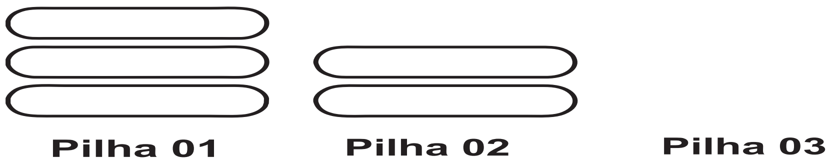


Figura 61: Possível posição 05F

$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (0011)_2$
$2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0010)_2$
$0 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (0000)_2$
Código-Nim $\oplus =(0011)_2 + (0010)_2 + (0000)_2$
Código-Nim $\oplus = (0001)_2$

Aplicando a estratégia vencedora no caso 3 *na proposição* 4.10*,* J_1 *retira uma peça da pilha* 01 *passando para a posição* $(2, 2, 0)$

J_2 *não tem possibilidade de realizar um lance desta posição para uma pilha com uma única peça, e para qualquer lance que realize,* J_1 *consegue realizar uma jogada para uma posição onde exista apenas uma pilha com uma única peça.*

Com isso ilustramos a estratégia vencedora de J_1*.*

4 HEX

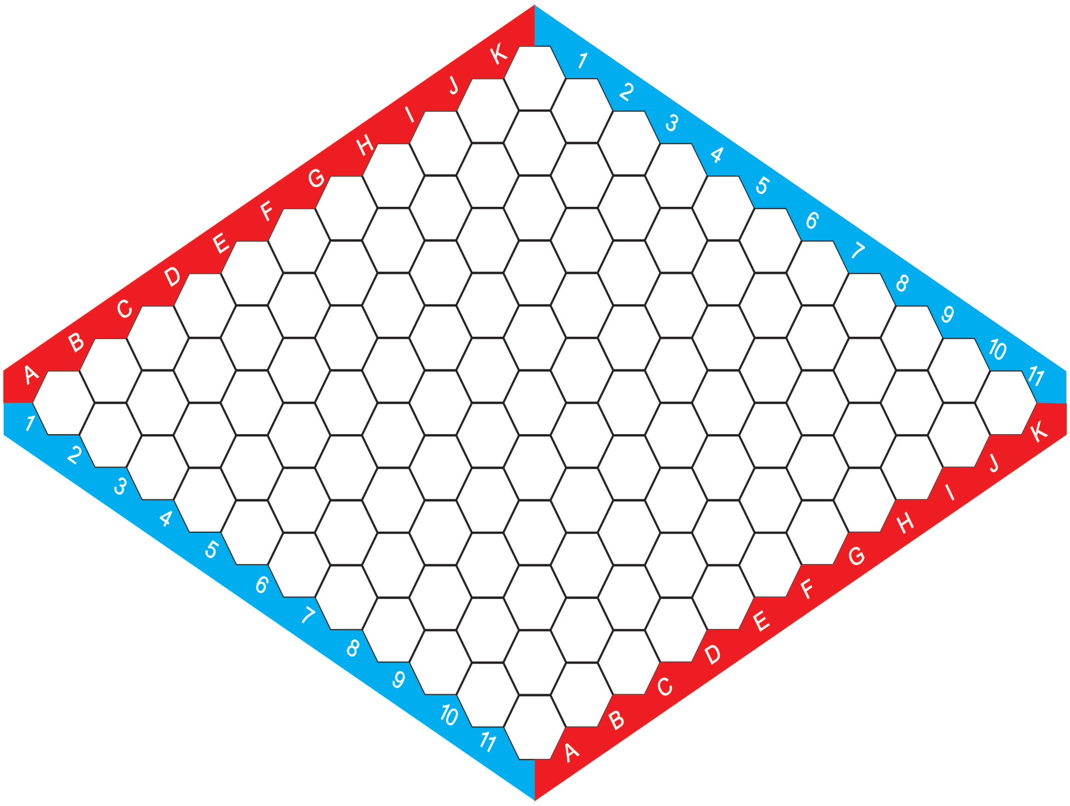


Figura 62: Tabuleiro Hex

Hex é um jogo de estratégia para dois jogadores que interessa os matemáticos há muito tempo, sendo um dos mais amplamente jogados e cuidadosamente analisados. A sua invenção é atríbuida a dois inventores, o primeiro foi em 1942 por Piet Hein no Instituto de Física Teórica de Niels Bohr em Copenhague, depois de dar uma palestra sobre ele no Instituto de Física Teórica da Dinamarca, o jornal Politiken [12] popularizou o jogo publicando um artigo sobre ele com o nome de "Polígono". E reinventado de forma independente em 1948 por John Nash.[11]. John Nash reinventou o jogo enquanto estudava na Universidade de Princeton. Sua primeira versão do jogo usava quadrados, onde uma célula é adjacente a outra célula se compartilha uma borda ou canto com ela.

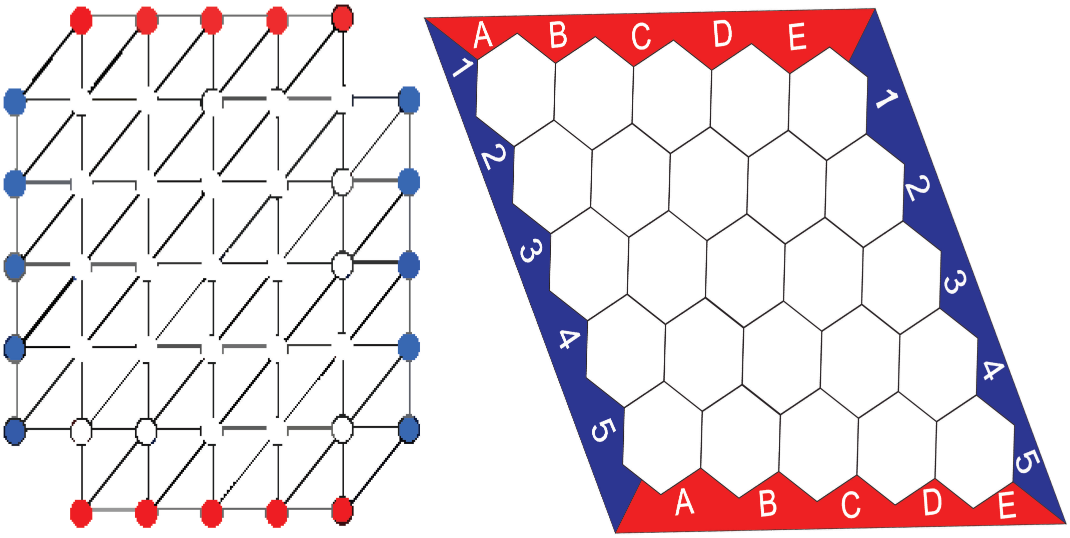


Figura 63: Tabuleiro quadrado

Depois de discutir o jogo com um de seus instrutores, os dois o revisaram para a versão que Hein havia inventado. O jogo passou a ser conhecido como "Nash" (do nome de John Nash) ou *"John"* (porque era comumente jogado nos ladrilhos hexagonais do banheiro da escola; "john" outro nome para banheiro) em Princeton, mas logo se tornou amplamente conhecido como "Hex" quando comercializado pela Parker Brothers, Inc. em 1952.[11]

4.1 REGRAS DO JOGO

O jogo de Hex é tradicionalmente jogado em um $n \times n$ tabuleiro em forma de paralelogramo de hexágonos. O tamanho mais comum do tabuleiro é 11×11, mas outros tamanhos, como 17×17, também são populares; quanto maior o tamanho, maior a sua complexidade. Os pares paralelos opostos das laterais do tabuleiro são de cor azul e vermelha, que também são chamados como margem "A" (Azul) ou "V" (vermelho). Os jogadores alternanadamente colocam peças de cores diferentes nas casas vazias do tabuleiro.

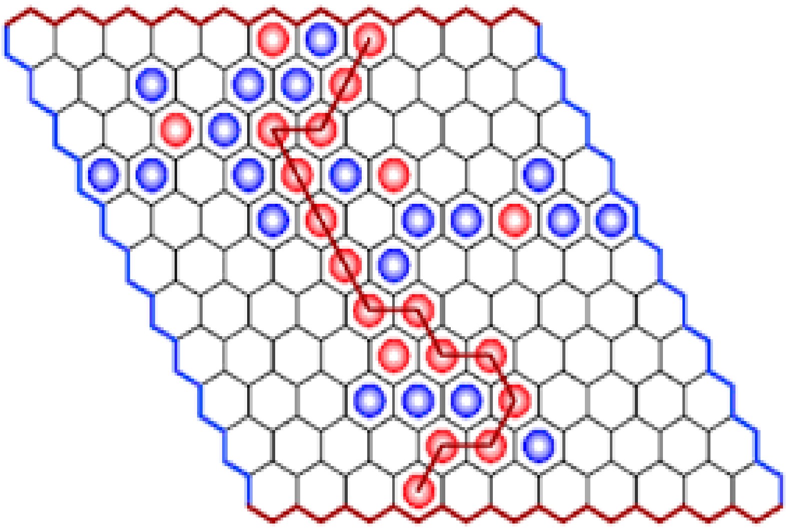


Figura 64: Exemplo de Vitória

O vencedor do jogo é a primeira pessoa a conectar suas extremidades paralelas correspondentes do tabuleiro em uma cadeia contínua de peças de mesma cor. As células de canto (vértices do tabuleiro) são consideradas partes de ambos os lados e podem ser usadas para completar uma cadeia para qualquer uma das cores.

4.2 HEX- O JOGO QUE NUNCA EMPATA

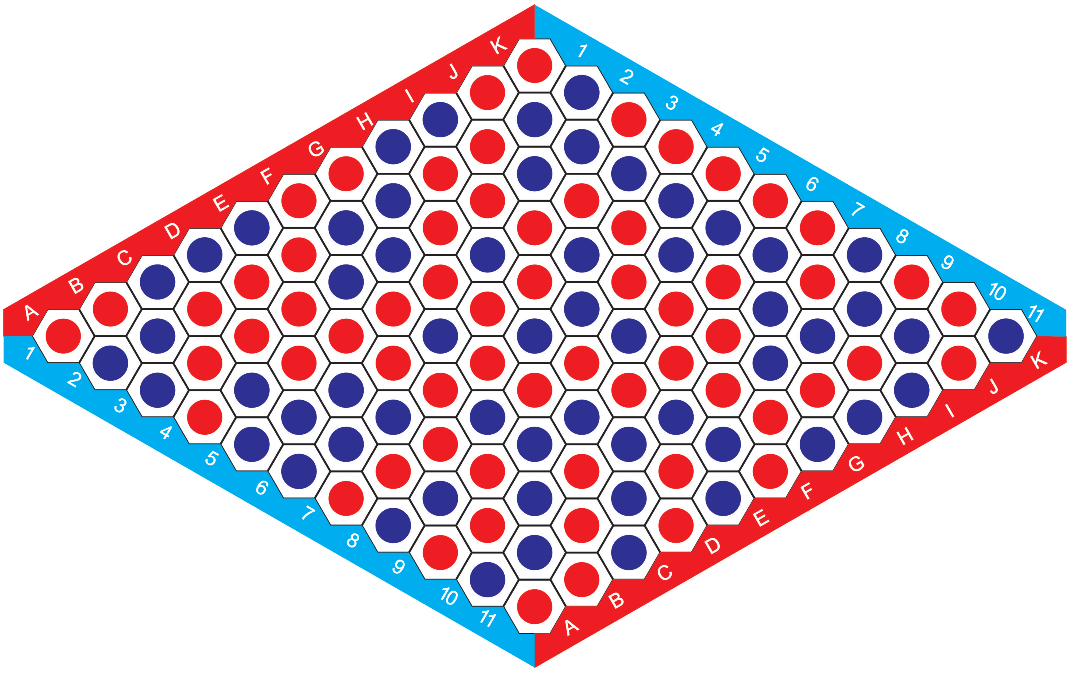


Figura 65: Hex tabuleiro Cheio

No momento que dois adversários estão jogando o Hex, pode ocorrer que um dos jogadores consiga fazer uma ligação contínua de suas peças entre os seus dois lados paralelos do tabuleiro, daí podemos decretar o vencedor, mas o que seria um empate? Consideremos que um empate possa acontecer; isto ocorreria se os jogadores esgotassem suas jogadas, preenchendo todas as casas do tabuleiro, e nesta situação nenhum dos jogadores conseguisse completar um caminho contínuo conectando seus lados paralelos do tabuleiro. E justamente o que queremos mostrar é que isso nunca acontece, ou seja, sempre que o tabuleiro estiver cheio, um dos dois jogadores completou o caminho contínuo que lhe concede a vitória.

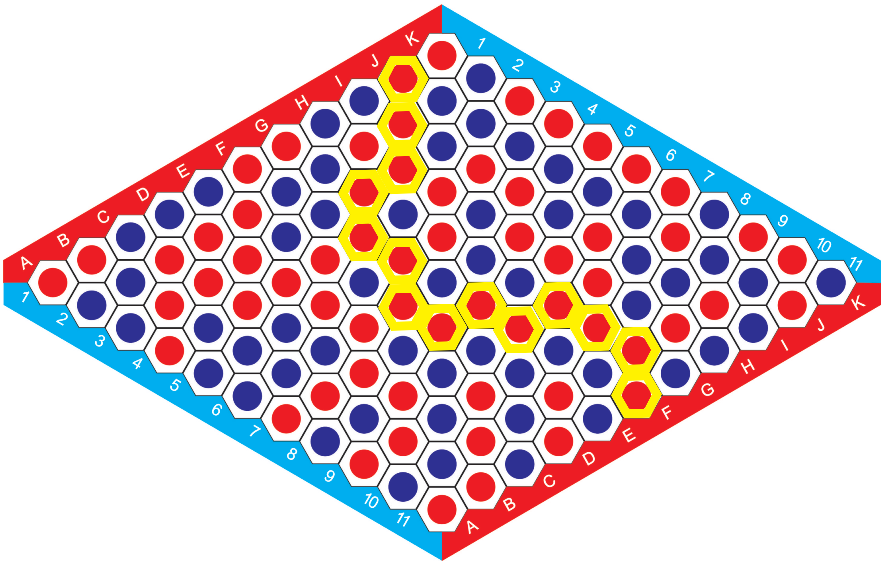


Figura 66: Hex não possui empate

4.2.1 Análise Intuitiva

Quando o tabuleiro estiver completamentamente cheio, e se pensarmos nas peças vermelhas como terra e as peças azuis como água, então ocorre uma das situações :

- A água corre entre as duas margens vermelhas, de modo que o jogador Azul vence a partida;

- O canal de água está bloqueado por terra formando um caminho de terra entre estas margens, definindo a vitória do jogador de vermelho.

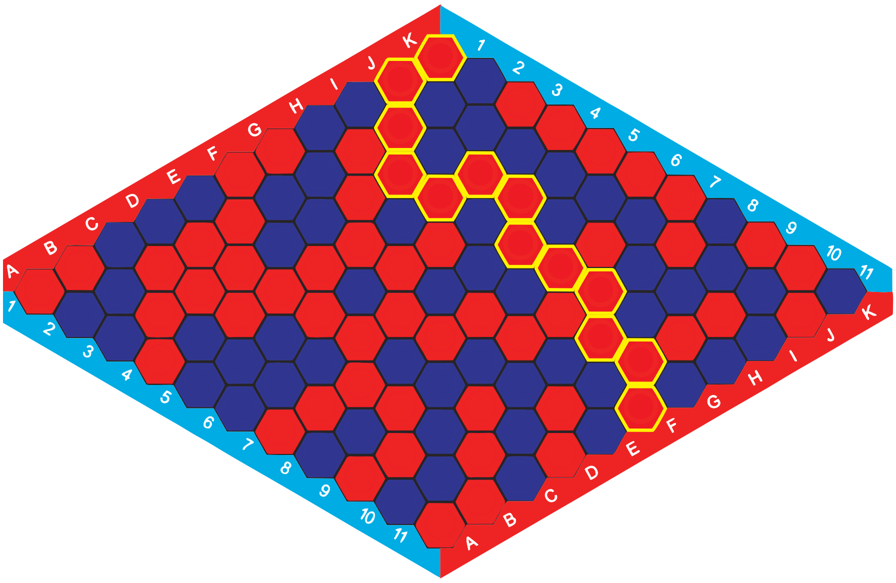


Figura 67: Rio e Terra

4.2.2 Ilustração - No tabuleiro de Papel

Agora iremos mostrar uma ilustração da situação, que foi sugerida pelo estudante Daniel Zwillinger em uma correspondência para a revista Mathematics Magazine[24], a sua demonstração ocorre em um tabuleiro do Hex de papel, e em todas as vezes que o jogador de negras jogar, pinta-se a casa onde foi colocada a peça preta, a branca realiza a sua jogada, e o processo se repete, e assim até não haver mais jogadas possíveis. Agora cortamos todas as casas pintadas de preto, depois, em momento distintos, seguramos os lados paralelos com as mãos, e a tentamos afastá-las. E em um deles vai ser possível este afastamento, e em outro não; se eu conseguir afastar as margens pretas, vitória do branco, se conseguir afastar as margens brancas a vitória é do preto.

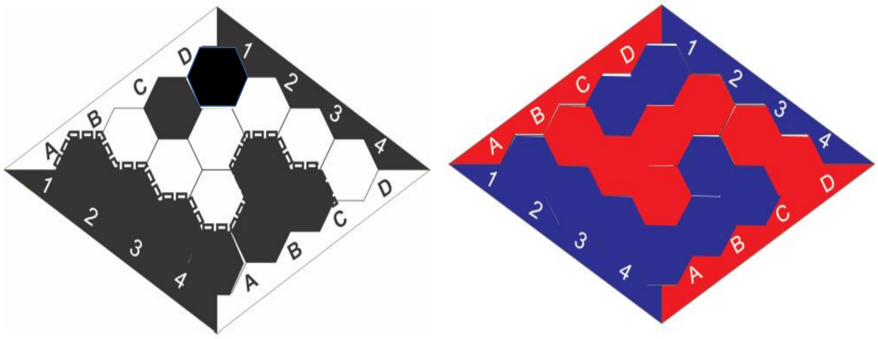


Figura 68: Vitória do branco

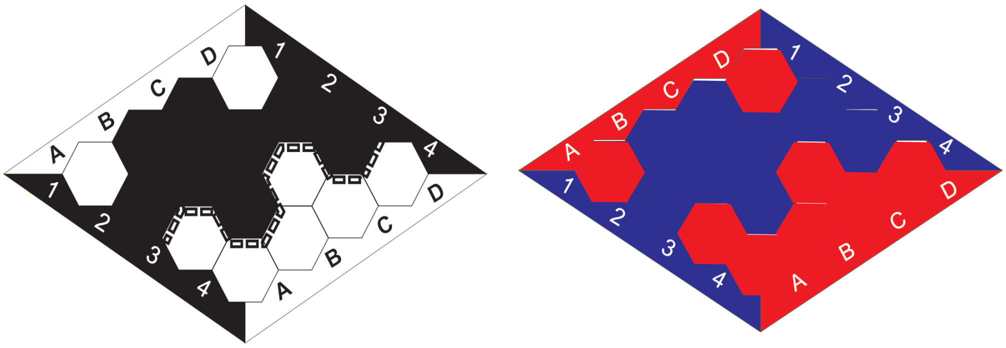


Figura 69: Vitória do Preto

4.2.3 Demonstração- David Gale

Teorema 4.1 (Gale[11] [6]). *Se um tabuleiro está completamente preenchido com peças vermelhas e azuis, então para exatamente uma das cores existe um caminho que une os lados opostos.*

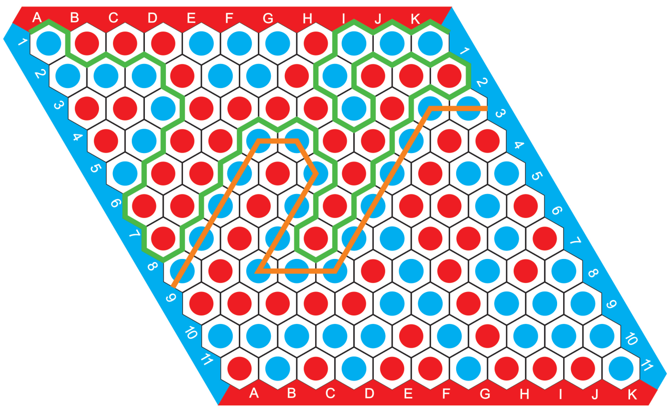


Figura 70: Hex-Vitória

Demonstração. Consideraremos um tabuleiro completamente cheio com peças azuis e peças vermelhas. Definiremos com face-A um hexágono com uma peça azul, e face-V o hexágono que possuir uma peça vermelha.

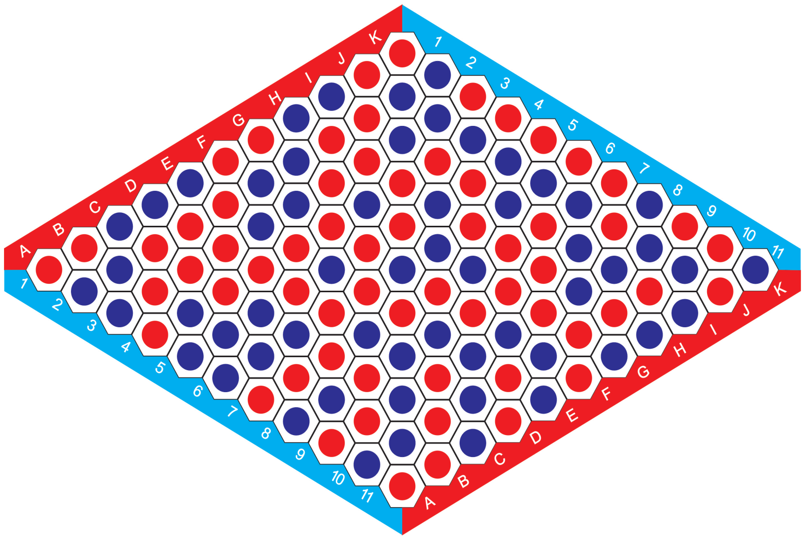


Figura 71: Hex -Tabuleiro Cheio

Associando ao tabuleiro Hex um grafo, temos que os vértices do grafo são os vértices dos hexágonos do tabuleiro e ainda as arestas desse grafo são os lados internos comuns a dois hexágonos ou os externos que fazem margem com a borda do tabuleiro.

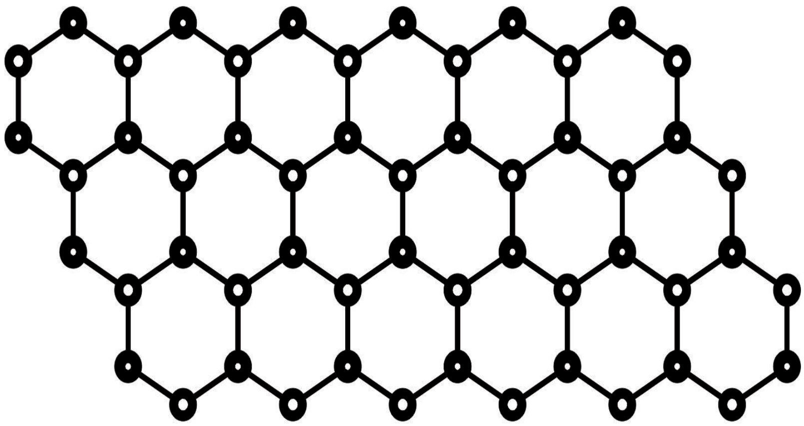


Figura 72: Caminho nos Hexágonos

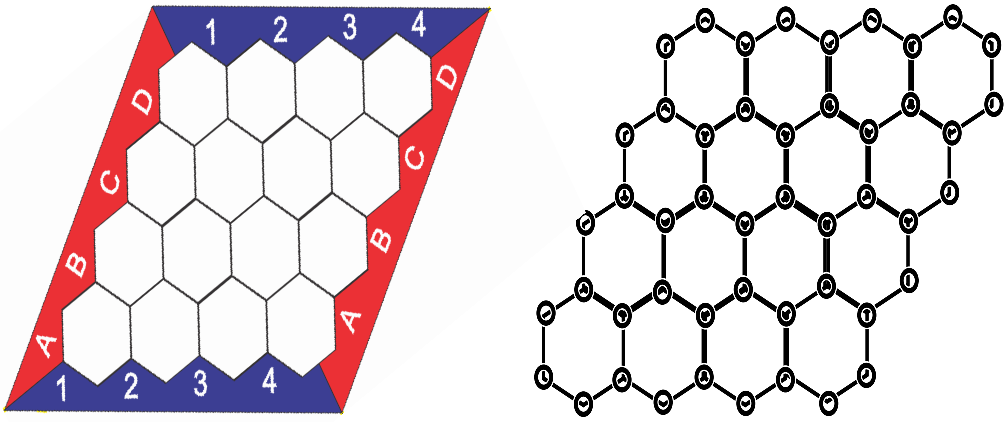


Figura 73: Caminho nos Hexágonos 02

Definiremos ainda como os "vértices do tabuleiro", os vértices dos hexágonos nos extremos do tabuleiro, que estão localizados nos hexágonos notados no exemplo abaixo como: A_1, A_{11}, K_1,K_{11}.

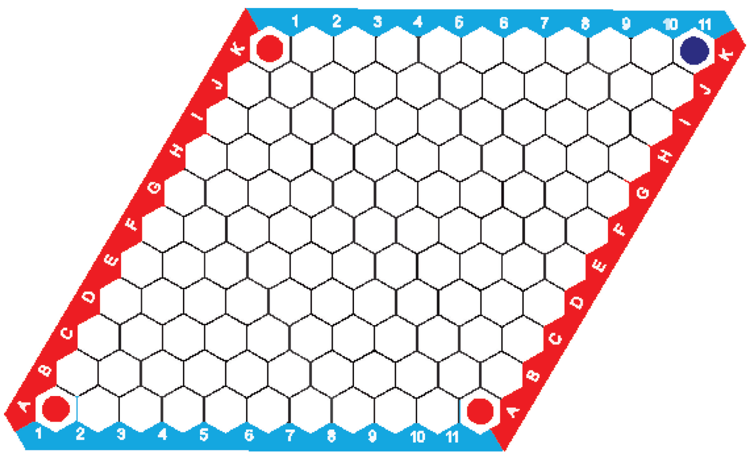


Figura 74: Casa dos Cantos

Notemos que os quatro hexágonos dos cantos do tabuleiro podem pertencer a caminhos completos de qualquer um dos jogadores, ou seja, pertencem as duas cores simultaneamente. E nestes hexágonos estão os vértices considerados vértices do tabuleiro que são justamente aqueles de grau 01.

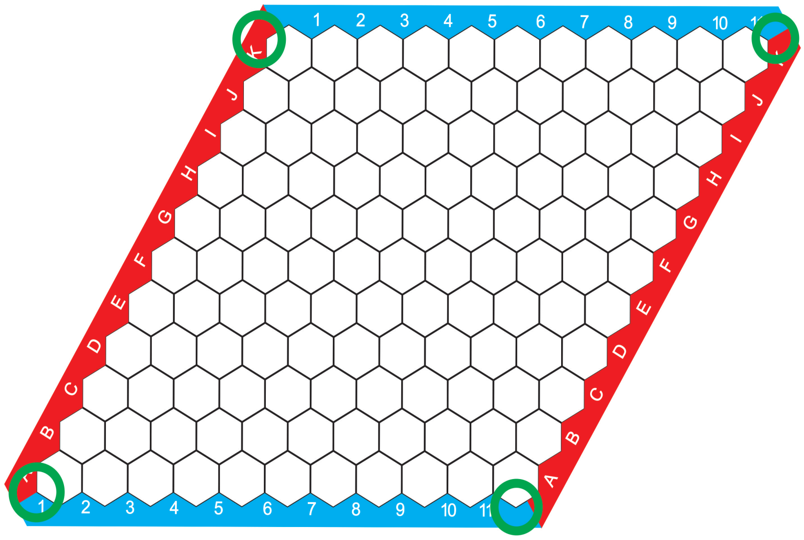


Figura 75: Vértices do tabuleiro

Agora iremos utilizar dois lemas, que serão demonstrados na Seção 2.3 do Apêndice:

.1 Um gráfico com n vértices, cada um com grau no máximo 2, terá no máximo n arestas.

.2 Qualquer grafo finito onde cada vértice tem um grau no máximo 2 é uma união de componentes disjuntos, e cada componente é:

   1. Um vértice isolado

   2. Um ciclo simples

   3. Um caminho simples

Agora traçaremos um caminho entre as arestas dos hexágonos, e este caminho só pode ser percorrido pelas arestas compreendidas entre casas ocupadas por cores distintas, ou seja, entre face-A e face-V, e sobre as arestas compreendidas entre a face-V e margem azul e face-A e margem vermelha. Como ilustrado no exemplo abaixo:

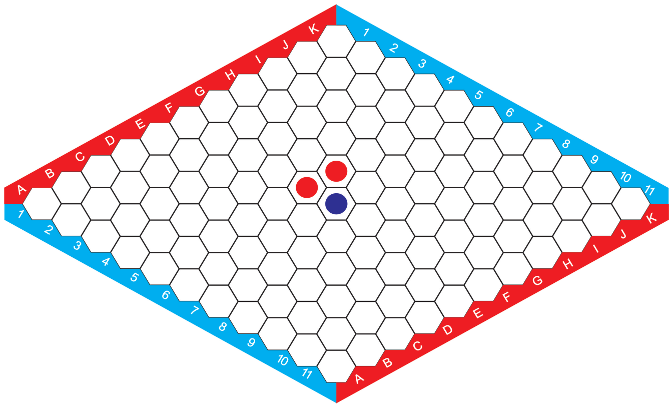


Figura 76: Jogadas Iniciais

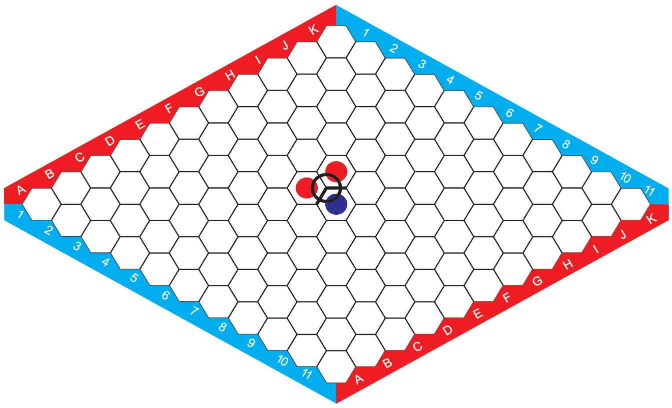


Figura 77: Possíveis caminhos

Dado um vértice, temos quatro situações possíveis para as casas ocupadas nos hexágonos ao seu redor:

1. Todas azuis;
2. Todas vermelhas;
3. Duas azuis e uma vermelha;
4. Duas vermelhas e uma azul.

Para 1 e 2 o vértice terá grau 0, para 3 e 4 o vértice terá grau 2, como a ilustração abaixo:

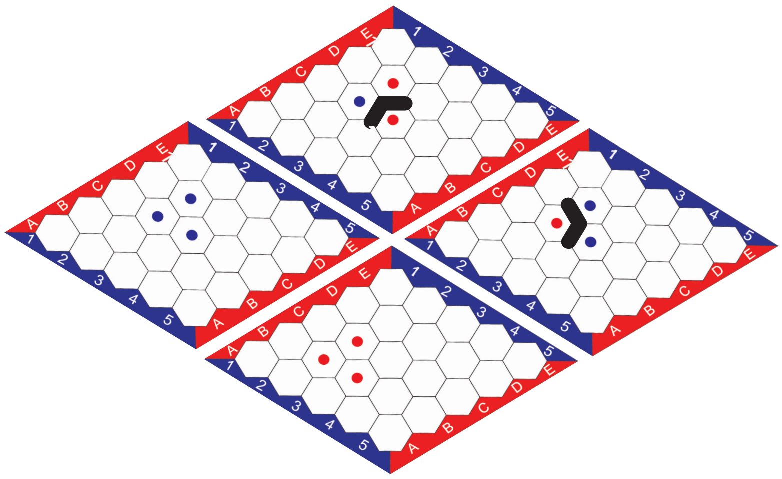


Figura 78: Possíveis caminhos

Vamos começar o caminho pelo vértice A_1 do tabuleiro. Para ilustrar estenderemos as margens do tabuleiro apenas com peças da mesma cor da sua respectiva margem.

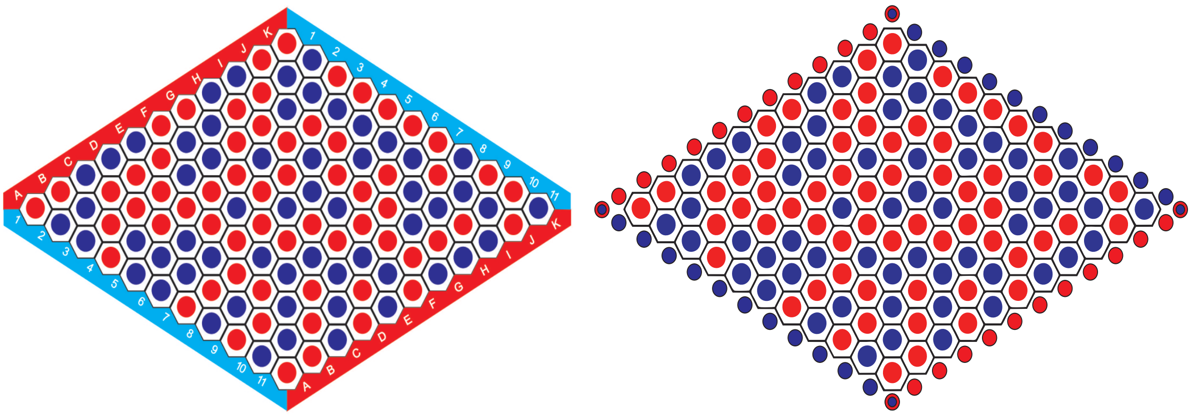


Figura 79: Margens estendidas

Agora mostraremos um exemplo de um caminho completo, traçado em um tabuleiro cheio.

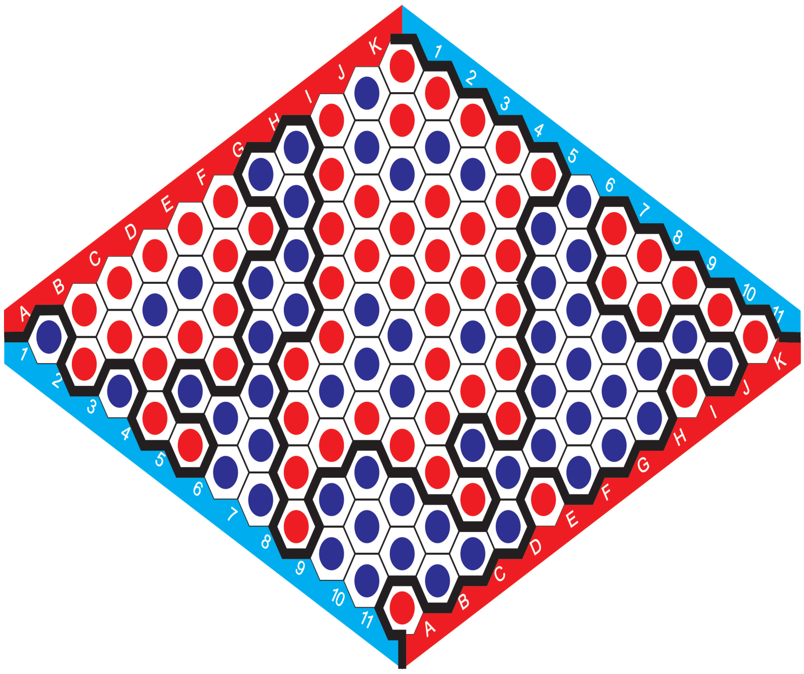


Figura 80: Tabuleiro cheio com o caminho

No caminho percorrido respeitamos as regras pré estabelecidas, iniciamos nos vértices do tabuleiro e caminhamos entre as arestas compreendidas por casas ocupadas por cores distintas, ou em margem de cor diferente. E podemos perceber que ocorrem três tipos de situação:

- Vértice isolado;

- Caminho simples;

- Ciclos simples.

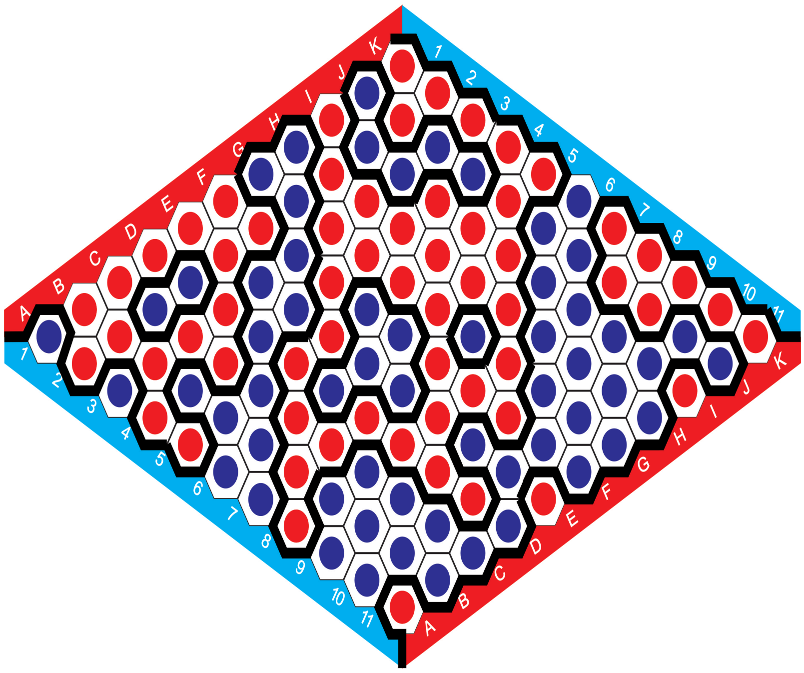


Figura 81: Tabuleiro completo com o caminho

Conclusão:
Podemos começar nossa conclusão com alguns fatos:

- Como o número de arestas é finito, o processo sempre terminará em uma quantidade finita de etapas;
- A cada aresta que passamos, existirá uma nova aresta pertencente ao caminho, como todo vértice que não é um dos 4 vértices do tabuleiro, possui grau 0 *ou* 2, o caminho nunca é interrompido num vértice que está no interior ou na margem do tabuleiro.
- O caminho que começa no vértice do tabuleiro em A_1 deve terminar em outros vértices do tabuleiro;
- Como os vértices do caminho possuem no maximo grau 02, o caminho não possui bifurcações.
- Se no ínicio do caminho as casas do lado esquerdo são ocupadas por peças vermelhas, e as do lado direito por peças azuis, isto ocorrerá até o fim do caminho; da mesma forma, se as casas do lado esquerdo forem azuis e as do lado direito forem vermelhas, esta situação também permanecerá até o final do caminho.

Vamos ilustrar estes fatos com um Hex reduzido.

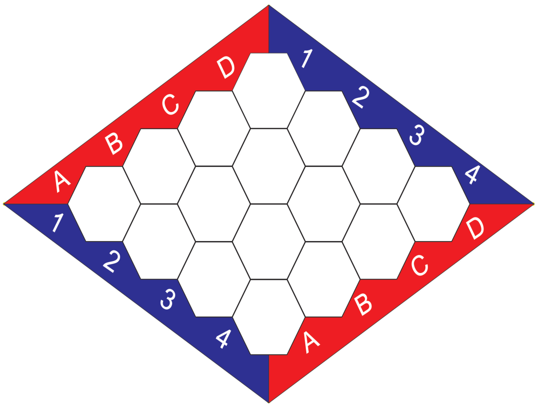


Figura 82: Hex reduzido vazio

As figuras abaixo ilustram tabuleiros de Hex 4×4, respeitando todas as regras do jogo.

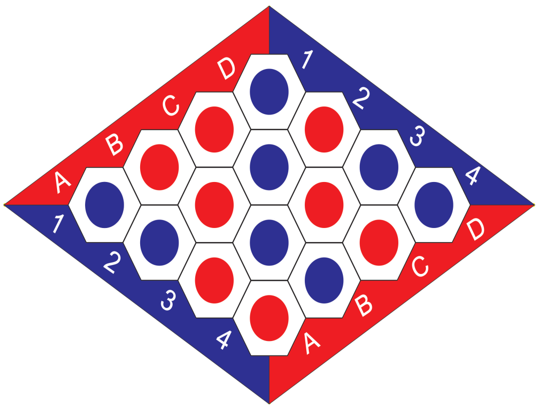


Figura 83: A_1 ocupada com azul

A1 ocupada com uma peça azul.

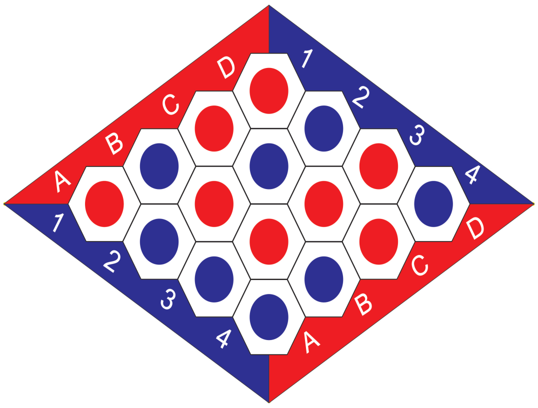


Figura 84: A_1 ocupada com vermelho

Nestas figuras acrescentamos os caminhos criados nas arestas que estão comprendidas entre casas que estão ocupadas com peças de cor diferente, ou com borda de cor diferente partindo de A_1.

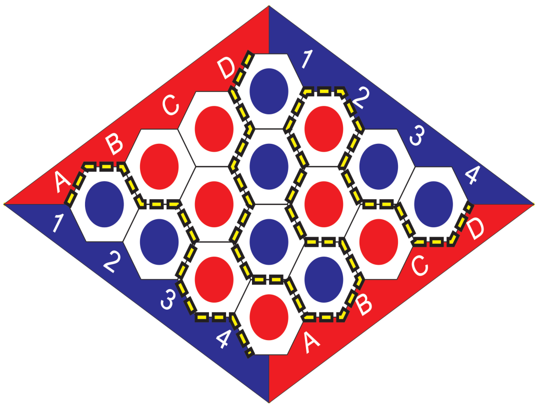


Figura 85: Hex reduzido cheio com caminho

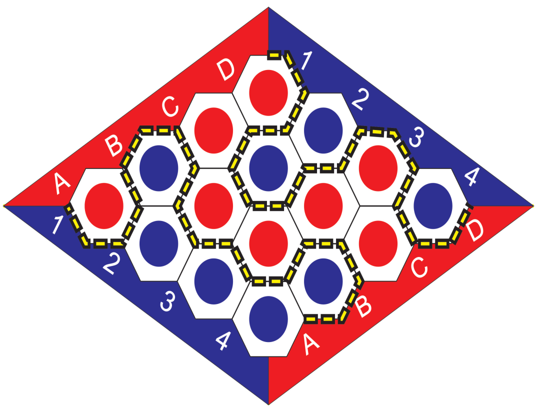


Figura 86: Hex reduzido cheio com caminho A_1 vermelho

Nestas figuras iremos mostrar os caminhos de forma isolada:

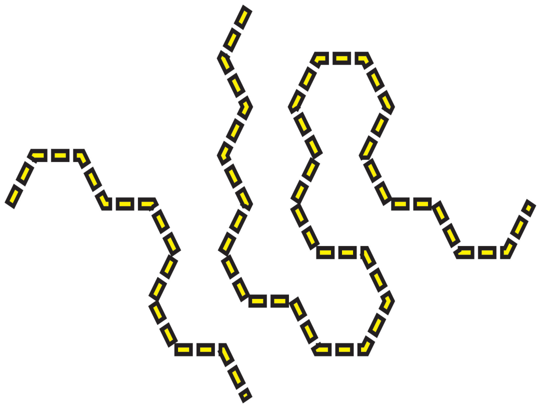


Figura 87: Caminho isolado 01

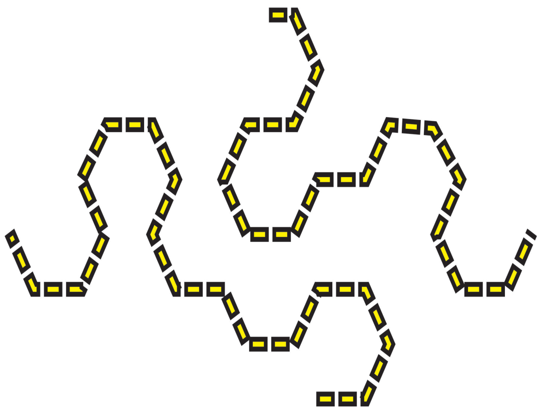


Figura 88: Caminho isolado 02

Agora vamos supor por absurdo que exista uma caminho que parte de A_1 e termina em D_4. Sejam P o último vértice desse caminho que não pertence à margem do tabuleiro e Q o vértice seguinte a P nesse caminho. Temos dois casos possíveis:

1. Q esta na margem azul (superior direita). Como o caminho se iniciou com o lado azul à direita do caminho, e, como já vimos, isto não se altera, ao se chegar em Q o caminho deve seguir para a esquerda, de modo a preservar esta condição. Isso contradiz o fato de que o caminho termina no vértice do tabuleiro em D_4.

2. Q está na margem vermelha (inferior direita). Como o caminho se iniciou com o lado azul à direita do caminho, e, como já vimos, isto não se altera, ao se chegar em Q o caminho deve seguir para a direita, de modo a preservar esta condição. Isso contradiz o fato de que o caminho termina no vértice do tabuleiro em D_4.

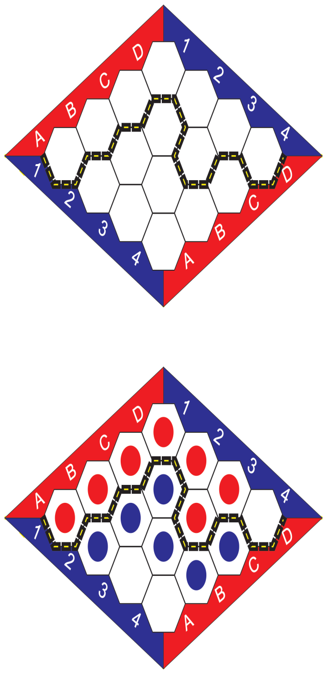


Figura 89: Caminho Impossível a_1-d_4

De maneira análoga podemos mostrar que o vértice D_1 não tem um caminho para A_4.

Nota-se que não é possível distribuir as peças ao lado do caminho que o torne válido.

Com isso temos apenas duas situações possíveis:

- O vértice da esquerda se conecta ao vértice de cima e o vértice da direita se conecta ao vértice de baixo, e, nessa situação, a vitória é do azul.

- O vértice da esquerda se conecta ao vértice de baixo e o vértice da direita se conecta ao vértice de cima, e, nessa situação, a vitória é vermelho.

□

4.3 ESTRATÉGIA VENCEDORA DO HEX

Uma maneira prática de entender o jogo do Hex, é teorizando em tabuleiros menores. Por exemplo quando o jogo é jogado em um tabuleiro 2×2 (quatro hexágonos):

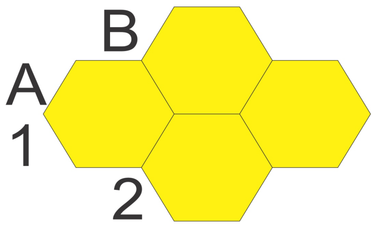


Figura 90: Hex 2x2

o jogador que faz o primeiro movimento obviamente ganha. Em um tabuleiro 3×3:

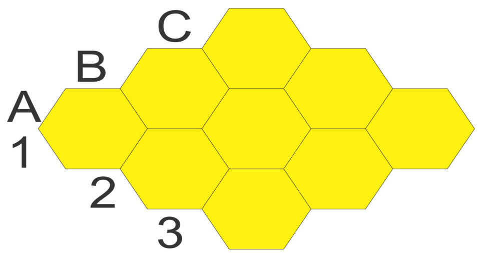


Figura 91: Hex 3x3

Em um tabuleiro 3×3 o primeiro jogador ganha facilmente fazendo seu primeiro movimento no centro do tabuleiro. Em um tabuleiro 4×4 a análise começa a ficar mais detalhada. Existem estudos[11] que informam que o primeiro jogador certamente ganhará se ocupar imediatamente qualquer uma das quatro células destacadas:

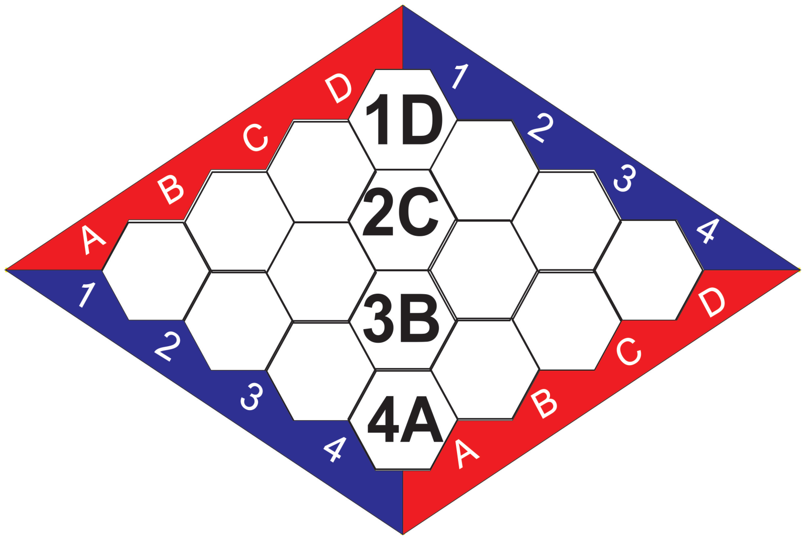


Figura 92: Hex 4×4

Em alguns estudos mais aprofundados[19] [22] afirmam que se J_1 fizer sua primeira jogada em outro lugar, ele sempre pode ser derrotado. Uma jogada de abertura nas casas 2C ou 3B garante uma vitória no quinto movimento; uma jogada de abertura na cela 1 ou 4, uma vitória no sexto movimento. Nos tabuleiros 5×5 até 8×8 são conhecidas as estratégias vencedoras, porém as mesmas foram descobertas com o auxílio de técnicas de programação derivadas de inteligência artificial[21]. A partir de tabuleiros de dimensões maiores que 8×8 não se conhece a estratégia vencedora,nem com o auxílio de computadores, porém nosso objetivo nesta seção, não é mostrar qual é a estratégia vencedora, mas apenas mostrar que ela existe.

Pietr Hein mencionou isso numa conversa, nas colunas Politiken[12], e dá uma prova em uma carta de 1957 para Martin Gardner.[7] "Você me diz que você tem uma prova bastante longa, mas bastante elegante que o primeiro jogador tem uma vitória certa. Você pode estar interessado em um pouco curto também (apenas para ter um de cada tipo):

"Considere o segundo jogador B como o primeiro, com a peculiaridade de que o primeiro jogador A que agora é o segundo tem uma marca de antecedência – já lá no tabuleiro. Agora, se o segundo jogador tem certeza de (ser capaz de) vencer, essa marca não o impedirá de vencer (pois só pode conectar suas áreas e barrar a conexão do adversário) de modo que a premissa que o segundo jogador ganha leva à conclusão que o primeiro jogador ganha".

Cabe citar que John Nash fez esta mesma demonstração no mesmo ano.

4.3.1 O primeiro Jogador possui a estratégia Vencedora

Vamos agora fazer uma versão da demonstração de John Nash.

Inicialmente precisamos destacar alguns aspectos já demonstrados:

1. Teorema do Hex: o jogo não pode terminar em empate;

2. Teorema de Zermelo: o primeiro jogador (J_1-Azul) ou o segundo jogador (J_2-Vermelho) possui estratégia vencedora.

4.3.2 Roubo da estratégia

Nesta versão da demonstração afirmaremos que o jogador que inicia a partida (J_1-Azul) possui uma estratégia (RE) que evita a derrota. Assumimos por absurdo que este resultado é falso, ou seja, que J1 não consegue evitar a derrota; sendo assim pelo Teorema de Zermelo, quem possui a estratégia vencedora é o segundo jogador (J_2-Vermelho). RE consiste em que na primeira jogada de J_1, ele execute um lance que definiremos como falso: ele aconteceu em alguma casa qualquer, mas J_1 interpretará que ele não existiu; com isso, temos que o vermelho se torna o primeiro jogador, aquele que de fato realizou um lance efetivo. A partir deste momento, J_1 passa a ser o segundo se ignorarmos o primeiro lance, porém com uma peça a mais no tabuleiro, e como era J_2 quem possuía a estratégia vencedora, e J_1 passando a ser o segundo jogador, é ele quem assume a estratégia vencedora. Caso no decorrer da partida faça parte da estratégia efetuar um lance que passe por esta casa já ocupada, basta J_1 fazer um outro lance em qualquer outra casa vazia, como J_1 vence a partida onde o primeiro lance foi ignorado, ele também vence na partida em que ele é considerado, pois em nenhum instante o fato de já possuir uma peça a mais no tabuleiro o atrapalhará. Portanto ao assumirmos que J_2 possui uma estratégia vencedora, concluímos que J_1 tem uma estratégia vencedora, criando assim uma contradição, portanto a hipótese é falsa, e daí pelo Teorema de Zermelo que J_1 e quem possui a estratégia vencedora.

Em alguns lugares, como quem possui a estratégia vencedora é o primeiro jogador, adiciona-se ao jogo uma regra, cuja a intenção é minimizar a vantagem de quem começa a partida.

Regra do equílibrio

Através de um sorteio aleatório um jogador é escolhido para iniciar a partida com o tabuleiro vazio, podendo colocar a primeira peça em qualquer casa do tabuleiro. O segundo jogador na sua primeira vez tem duas possibilidades: coloca a peça da sua cor em qualquer outra casa vazia ou pode substituir a peça do adversário por uma peça sua.

4.4 MISÈRE HEX

Como já vimos o Hex é um jogo combinatório onde dois jogadores alternadamente colocam peças de cores diferentes num tabuleiro com casas hexagonais, onde cada peça ocupa no máximo uma casa, e o objetivo do jogo é ligar as respectivas margens paralelas, um a parte superior com a inferior, o outro, o lado direito com o esquerdo, de uma forma onde as peças tenham um caminho ininterrupto, quem atingir este objetivo primeiro é o vencedor. Já no Misère Hex, é o contrário: o primeiro jogador a completar este caminho perde.

Mas aparecem as perguntas:

- Quem vence o Misère Hex?
- A estratégia vencedora é a mesma?
- A dimensão do tabuleiro tem alguma influência?
- O jogo ainda não possui empate?

4.4.1 Estratégia Vencedora-Misère Hex

A primeira pergunta que podemos responder é que no Misère Hex o jogo também não possui empate, pois a partir do momento que todas as casas estão preenchidas, pela mesma demonstração do Hex (David Gale), vai ter que existir um caminho que ligue um dos pares de lados paralelos.

Teorema 4.2 (Lagarias–Sleator [13]). *O primeiro jogador tem uma estratégia vencedora para o Misère Hex em um tabuleiro de dimensões $N \times N$ quando N é par e o segundo jogador tem uma* *estratégia vencedora quando N é ímpar. E ainda, o perdedor tem uma estratégia que garante que cada casa do tabuleiro deve ser jogada antes que o jogo termine.*

Demonstração. Inicialmente vamos definir algumas notações:

- Temos que Γ é um caminho que conecta dois lados paralelos;
- Chamaremos de casa vazia, o hexágono que não foi ocupado por nenhuma peça;
- Chamararemos de L uma estratégia vencedora;
- Identificaremos como LR a estratégia "roubada".

Uma das etapas desta demonstração é mostrar que, em uma partida de Misére Hex, existe a possibilidade da vitória de um dos jogadores ocorrer apenas no último lance possível, instante este onde a útima casa é ocupada.

Para isso faremos as seguintes considerações:

1. Suponha uma posição terminal de um jogo que é uma vitória de um dos jogadores;
2. Como o jogo do Hex não possui empate, por definição tal posição possui um caminho Γ que liga um par de lados paralelos;
3. Suponha a que a distribuição de peças seja modificada, como se preenchêssemos as casas que estivessem vazias de maneiras válidas, e depois permutássemos as peças de cores diferentes de lugar sem mexer nas peças que formaram o caminho vencedor; temos que o vencedor continuaria inalterado.

Com estas considerações estabelecidas podemos iniciar a prova do teorema.

Seja P o jogador que tem uma estratégia vencedora L, e seja Q o seu adversário.

Lema 4.3. *Existe uma partida em que P joga de acordo com a estratégia L e ao final da partida, todas as casas estão preenchidas.*

Suponhamos por absurdo, que todas as partidas em que P joga de acordo com a estratégia L terminam com pelo menos uma casa vazia no tabuleiro.

Dividiremos a prova em duas partes, em relação a quem inicia a partida.

Caso 01

Assumindo que Q seja o primeiro jogador, ele pode aplicar a seguinte estratégia (LR):

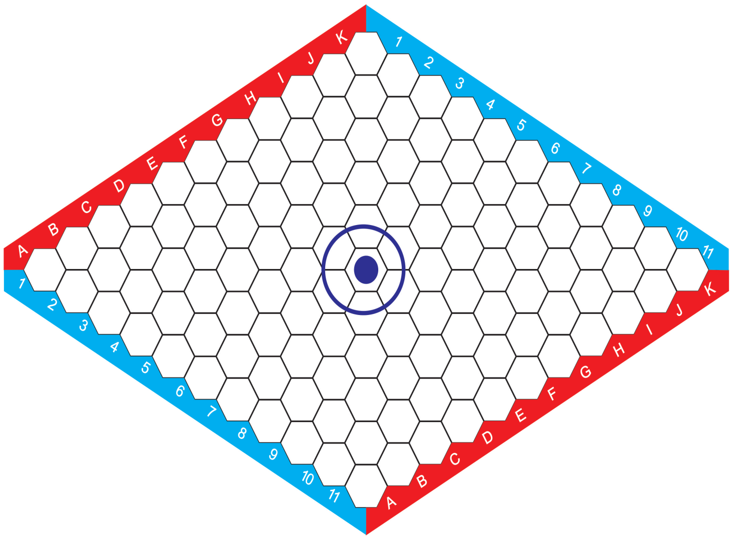


Figura 93: Partida real

Ele executa seu primeiro lance de maneira aleatória, e circula este lance, e considera que este lance não existiu, e considera um novo tabuleiro onde este lance não ocorreu; este procedimento chamaremos de jogo imaginário (I). Teremos então dois tabuleiros, como se fossem duas partidas, um que chamamos de real, onde o seu primeiro lance existe e o outro como imaginário, onde seu primeiro lance não existe, e onde Q utiliza a estratégia L. As posições das partidas serão exatamente iguais exceto pelo fato que em uma delas a casa circulada está vazia.

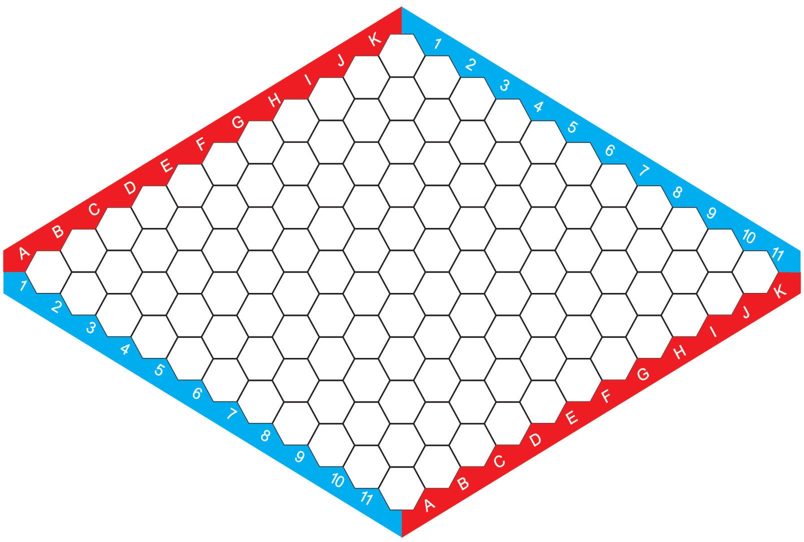


Figura 94: Partida imaginária

Esta estratégia será mantida por Q até o final da partida, e quando a estratégia L aplicada no jogo imaginário (I) exigir que Q jogue nesta casa que está circulada, Q repete o processo, joga em uma casa vazia arbitrária e circula esta nova casa, e no jogo imaginário ela estará vazia.

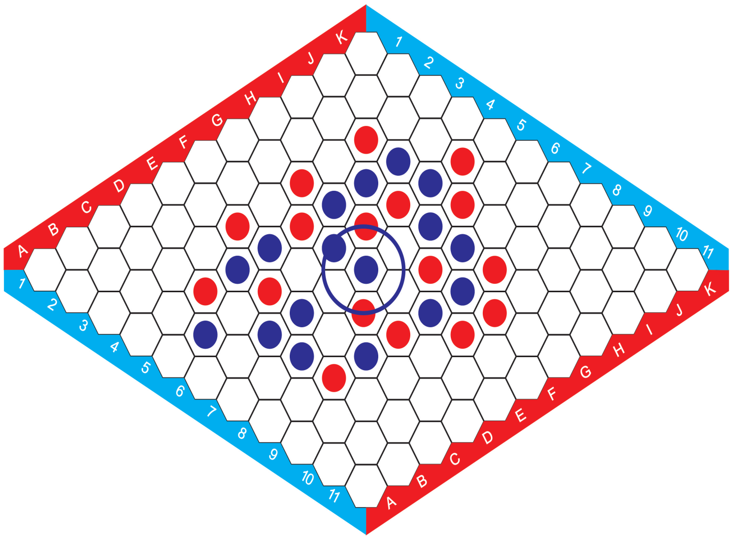


Figura 95: Partida real com um lance imaginário

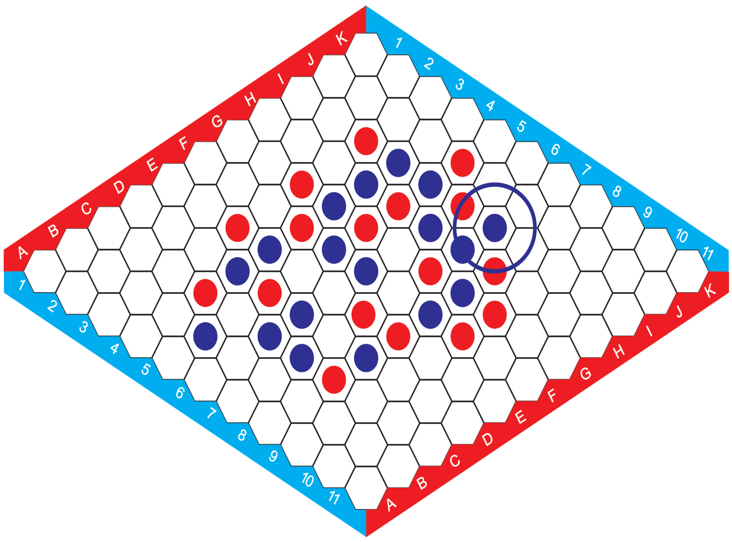


Figura 96: Partida real após segundo lance imaginário

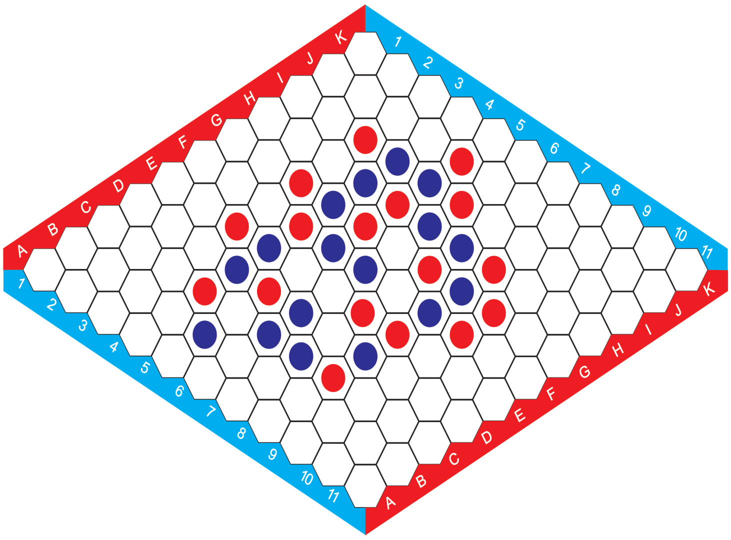


Figura 97: Partida imaginária após segundo lance imaginário

Como assumimos que existirá ao menos uma casa vazia, temos que quando for a vez de P fazer o seu lance, terá que existir ao menos duas casas no jogo imaginário, e quando chegar nesta situação exista ao menos uma casa vazia no Jogo Real, sendo pelo menos uma casa vazia para que Q execute um lance.

Temos até este momento que a partida não terminou, nenhum dos jogadores completou um caminho ligando duas margens paralelas, porém em algum momento eventualmente P fará esta conexão na partida imaginária.

Com isso Q irá vencer o jogo imaginário, porque como quem possuía a estratégia vencedora era P, Q aplicou o roubo de estratégia (LR), e quando isso acontece ele também ganhou o jogo real, pelo fato de que quando um caminho está conectado, lances diferentes do que estão neste caminho não alteram o resultado da partida, e isso contradiz nossa suposição de que P tem a estratégia vencedora.

Caso 02

Agora vamos supor que Q é o segundo jogador, e que p_0 seja o primeiro lance de P. O jogador Q começa circulando p_0, e a partir deste momento ele recorre a uma partida imaginária, criando um tabuleiro fictício que chamaremos de tabuleiro imaginário, e o tabuleiro onde efetivamente acontece a partida chamamos de real. No tabuleiro imaginário Q circula a mesma, neste tabuleiro esta vazia.Aplicando a estratégia L, Q realiza um lance no tabuleiro imaginário, se tornando o primeiro jogador deste tabuleiro, e repete este lance no tabuleiro real. Q continua com esta estratégia: os lances de P no tabuleiro real ele são repetidos no tabuleiro imaginário; aplicando a estratégia L,

Q realiza seu lance no tabuleiro imaginário, e o repete no tabuleiro real (lembrando que esta casa vazia destacada no tabuleiro imaginário nunca é ocupada por P, pois no tabuleiro real ela já está ocupada). Q mantém esta estratégia (LR), porém se a estratégia L aplicada no tabuleiro imaginário, exigir que a casa vazia circulada seja ocupada por Q, ele ocupa esta casa com a sua peça, circula uma outra casa vazia do tabuleiro imaginário e na mesma posição ele faz o seu lance no tabuleiro real. Por hipótese, o jogo sempre terá ao menos uma casa vazia, e isto garante que ambos os jogadores continuam se movendo. Mas, como L é uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, em algum momento P completará um caminho que conecta as suas margens paralelas no tabuleiro imaginário. Como todas as peças de P que estão no tabuleiro imaginário correspondem a peças de P no tabuleiro real, Q também venceu no tabuleiro real. E isso contradiz nossa suposição que P tem uma estratégia vencedora.

Por contradição provamos nosso lema.

Para finalizarmos a demonstração iremos provar a primeira afirmação:

Como conseguimos mostrar que Q consegue jogar de modo a garantir que sua última jogada preenche o tabuleiro, podemos afirmar:

- Quando o tabuleiro tem uma quantidade par de casas, Q é J_2
- Quando o tabuleiro tem uma quantidade ímpar de casas, Q é J_1

□

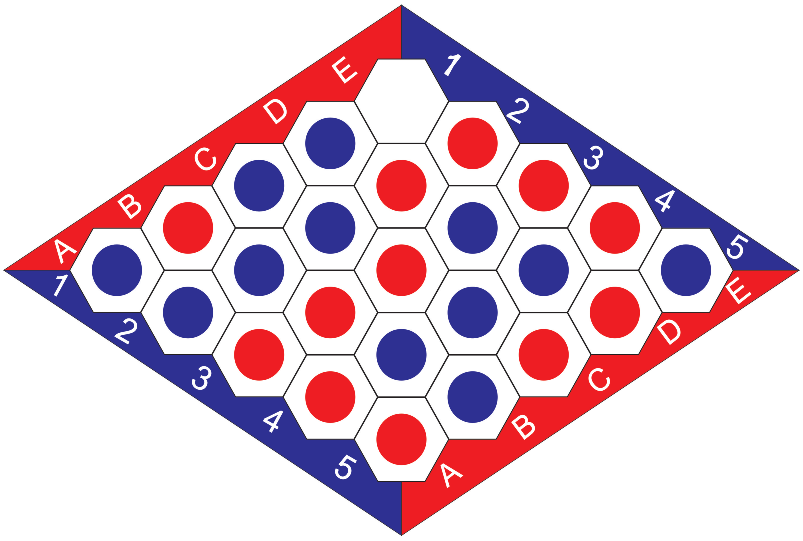


Figura 98: Hex 5x5-Faltando uma casa

5 CNJM DE PORTUGAL

Como este trabalho visa contribuir para a evolução do ensino de matemática através dos jogos, ressaltamos em seções anteriores a importância de conhecermos os jogos, suas propriedades, suas particularidades, suas definições para que se possa escolher o jogo apropriado, para o público apropriado e se fazer a devida exploração para o rompimento com o simples trabalho de entretenimento, e sim um casamento com crescimento efetivo desta contribuição. Para tanto, iremos explorar uma iniciativa de excelência, que possui um sucesso significativo, duradouro e de expansão, que é o Campeonato Nacional dos Jogos Matemáticos de Portugal.

5.0.1 História e Organização

A CNJM é organizada pela Associação Ludus, criada em 2006 sem fins lucrativos com o único objetivo de promover e divulgar a matemática em seus diferentes aspectos. A competição é organizada para todos os alunos dos ensinos básicos e secundário, o que corresponde ao ensino fundamental e médio do Brasil, distribuída em quatro categorias, três correspondentes ao ciclo básico e a última ao ensino secundário, onde em todas as categorias há uma final nacional. É criada uma comissão organizadora responsável por diversas atividades, que cuida para que os professores e alunos recebam treinamentos, tais como práticas, oficinas e torneios. A competição é constituída por seis jogos distribuídos nos quatro níveis existentes e cada escola inscreve um aluno por jogo desenvolvido no sistema suíço de competição, onde os jogadores se enfrentam em pares, com uma quantidade pré determinada de rodadas, normalmente a raíz quadrada do número de participantes, onde os vencedores a cada etapa vão se enfrentando na próxima até a última rodada, onde quem tiver mais pontos é declarado vencedor.

5.0.2 Invente o seu jogo

Uma das etapas mais interessantes do CNJM é o concurso "Inventa o teu jogo" onde os alunos das escolas participantes inventam seus próprios jogos, onde posteriormente são julgados por uma comissão. O que faz esse concurso ser tão interessante é que, além de trabalhar a imaginação, a ideia de desenvolvimento, a força da criação, o poder de testar algo de passível evolução, e o mais interessante, tanto que as regras do concurso, quanto as caractéristicas dos jogos, coincidem com as dos "jogos combinatórios" o que mostra a sua relevância.

5.0.3 Benefícios

Para alguns alunos é mais atraente vencer um adversário em um jogo, do que para resolver um exercício de matemática. Como foi mencionado na introdução são inúmeros os trabalhos que provam os benefícios dos "Jogos Combinatórios", porém queremos discutir os benefícios de um evento como o CNJM, que além de despertar o interesse pela disciplina de matemática, e desenvolver um número alto de habilidades como o raciocínio e a concentração similar ao xadrez em aspectos competitivos.

Nos dias atuais são mencionadas diversas possibilidades a cerca de um evento como esse, que trariam progressos para o ensino da matemática, tal como notoriedades de evolução, tipificação de interesses, características e semelhanças nos campeões.

5.0.4 Sucesso

A CNJM está indo para sua 17ª edição. Evento realizado desde 2006 com uma crescente participação desde então, hoje conta com centenas de escolas e dezenas de milhares de alunos, com uma efetiva mobilização nas escolas durante o ano, apenas com o intuito de pensar matemática.

5.0.5 Jogos

A motivação inicial deste trabalho foram o Hex e o Nim, e a escolha desses jogos foi devida a suas características marcantes, que criavam um bom objeto de estudo, no momento em que pesquisava exemplos de sucesso na aplicação desses jogos, descobri o CNJM, e percebi que parte do sucesso desse evento se dava pela escolha dos jogos praticados, e estes que possuíam características próprias, relevantes, marcantes e de alto valor educativo, características que casam com os nossos objetivos, e ainda entram na classificação de "Jogos Combinatórios". Valendo a iniciativa de citarmos alguns destes jogos em que achei interessante, e que o leitor desta, que se interessar, pode obter mais informações.:

- Rastros;
- Go;
- Produto;
- Plainim;
- Atari Go;
- Cães e gatos;
- Semáforo.

[1].

1 Todas as informações, regras, materiais e imagens podem ser retiradas do site http://ludicum.org/cnjm

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi aprofundar o estudo acerca do tema "jogos combinatórios" com a intenção de ser uma referência para outros educadores, e com isso contribuir para a evolução das práticas de ensino de matemática nos segmentos escolares fundamental e médio. O tema "jogos combinatórios" demonstrou a potencialidade dessa prática em sala de aula [18] e a possibilidade de ampliação dos saberes dos alunos que são expostos a ela. No entanto, este trabalho aponta que a simples aplicação de jogos como ferramenta pedagógica contribui de maneira menos efetiva, do que, quando aplicada com um estudo aprofundado. Sendo condição primordial que o professor reconheça as características, as regras, o formato, o objetivo e o conteúdo matemático para que a condução da aplicação desses jogos seja efetiva e eficaz, e para que os jogos sejam uma prática de sucesso na aprendizagem matemática.

O Hex é um caso em que não falta referência, haja visto a quantidade de estudos acerca dele, e isto mostra o quanto ele é atraente. A simplicidade em suas regras contrasta com a dificuldade em se obter a estratégia vencedora, e a prova da ausência de empate, se relaciona como uma das caracteristicas importantes citadas na introdução. Já no caso do Nim, as suas regras também são simples, porém a estratégia vencedora é de aparente facilidade, e que apenas o seu estudo o torna acessível, algo que o torna intrigante, e mesmo se tomarmos posse dessa estratégia, o jogo do Nim apresenta diversas variações, todas trazendo um novo desafio, riquíssimos em conteúdo matemático com a divivisão euclidiana e a representação binária de números naturais. Por último trouxemos a menção a um evento de excelência que é o CNJM [15], evento desconhecido por mim até então, e que a cada ano apresentou evoluções e crescimento, tanto na qualidade quanto no número de participantes, e acredito que esta evolução se passa pelo fato dos organizadores frequentemente fornecerem formações, pertinentes ao assunto, aos educadores de matemática envolvidos, produzirem diversos artigos acadêmicos [18] sobre os jogos e seus benefícios. Gostaria que a CNJM fosse conhecida pelo maior número possível de educadores, para que possa inspirar iniciativas semelhantes no Brasil.

APÊNDICE

1 PRÉ REQUISITOS DE MATEMÁTICA

1.1 Sistemas de Numeração

Podemos dizer que um sistema de numeração é uma forma de representar quantidades através de símbolos. No nosso sistema de numeração chamamos estes símbolos de algarismos e totalizam em 10,

$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.$

E ainda dissemos que é um sistema posicional, pois em diferentes posições os algarismos assumem valores diferentes. Este sistema chamamos de numeração decimal, pois definimos os valores de cada posição em potencias de base 10 como os exemplos:

$785 = 700 + 80 + 5 = 7.10^2 + 8.10^1 + 5.10^0$

$9346 = 9.10^3 + 3.10^2 + 4.10^1 + 6.10^0$

Cada sistema tem suas características de acordo com a cultura dos povos. A matemática desenvolveu-se de acordo com a necessidade da humanidade, assim povos diferentes inventaram sistemas de numeração únicos. Ainda que os símbolos fossem diferentes, a idéia de número e de sistema de numeração esteve presente em quase todas as civilizações.

1.2 Base Binária

Os números binários formam um sistema matemático usado por computadores para criar informações. Esse sistema é composto por uma base de apenas dois algarismos: 0 e 1.

A primeira versão desse sistema binário surgiu no século III a. C. O matemático indiano Pingala [1] apresentou uma sequência numérica usando 8 algarismos, sendo 1 e 0 símbolos modernos. Então, a aplicação foi feita desse modo: 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 e 1000. Posteriormente, outros matemáticos tentaram atualizar o método [14].

Base 10	Base 2
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010

Transformações:

Base 10 para Base 2 :

Para calcular é simples. Pegamos um número de base 10 (decimal) e decompomos por 2 até não ser possível mais dividir. Com os resultados formamos um novo número de base 2. Agrupamos o último resultado seguido dos restos das divisões anteriores, do último para o primeiro.

Exemplo .1 (Transformação-Base 10 ⇒ Base 2)**.** $56|2 = 28 \Rightarrow$ *Resto 0*

$$28|2 = 14 \Rightarrow \textit{Resto } 0$$
$$14|2 = 7 \Rightarrow \textit{Resto } 0$$
$$7|2 = 3 \Rightarrow \textit{Resto } 1$$
$$3|2 = 1 \Rightarrow \textit{Resto } 1$$
$$(56)_{10} = (11100)_2$$

Base 2 para Base 10:

Mas para transformar números binários em decimais separamos os dígitos por casa. Depois transformamos essas casas em expoente para o número 2, sendo o primeiro expoente da esquerda para a direita o número zero. Então, multiplicamos as potências pelos seus respectivos algarismos binárias. Por fim, somamos todos os resultados.

Exemplo .2 (Transformação-Base 2 ⇒ Base 10)**.**

$$11100 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$
$$11100 = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$
$$11100 = 32 + 16 + 8$$
$$(11100)_2 = (56)_{10}$$

Dispositivo Prático

Como todos os números podemos representar através de potencias de base 2, podemos definir um processo prático para a transformação.

Dada as potências:

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

$2^6 = 64$

$2^7 = 128$

Quando a potência de base 2 estiver presente na composição do referido número, atribuímos o algarismo 1, quando não estiver presente atribuímos 0.

Exemplo .3 (Dispositivo prático). *Sejam os números:*

$$99 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1100011$$
$$75 = 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1001011$$
$$36 = 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 100100$$
$$27 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11011$$

Número	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
99	$1 \cdot 2^6$	$1 \cdot 2^5$	$0 \cdot 2^4$	$0 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$1 \cdot 2^0$
	1	1	0	0	0	1	1
75	$1 \cdot 2^6$	$0 \cdot 2^5$	$0 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$1 \cdot 2^0$
	1	0	0	1	0	1	1
36	$0 \cdot 2^6$	$1 \cdot 2^5$	$0 \cdot 2^4$	$0 \cdot 2^3$	1·2^2	$0 \cdot 2^1$	$0 \cdot 2^0$
	0	1	0	0	1	0	0
27	$0 \cdot 2^6$	$0 \cdot 2^5$	$1 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$0 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^1$	$1 \cdot 2^0$
	0	0	1	1	0	1	1

1.3 Grafos

Definição .4 (Grafos). *Utilizamos a Teoria de grafos como uma ferramenta de modelagem para o tabuleiro do Hex, fizemos uso de suas definições para nos auxiliar na prova do Teorema do Hex.*

Um grafo *é um conjunto de vértices interconectados dois a dois por arestas.*

A Teoria dos Grafos é uma das área importante da Matemática Discreta, e muito utilizada em jogos e recreações matemáticas. Atribui-se a sua criação a Euler ao resolver o problema das pontes de Konigsberg em 1736, mas foram os problemas acerca de fórmulas de estrutura de compostos químicos que Arthur Cayley resolveu na segunda metade do século XIX que a começaram a desenvolver[5].

Usamos como referências nesta seção:[2] [9][20][4]

Definição .5 (Grafo Simples). *Um* grafo simples G= $(X(G), F(G))$ *consiste num conjunto finito e não vazio* $X(G)$ *de elementos chamados vértices e num conjunto finito* $F(G)$ *de pares não ordenados de elementos distintos de* $X(G)$ *chamados arestas.*

Definição .6 (Adjacência). *Dois vértices a e b do grafo G dizem-se* adjacentes *se o par* $\{a, b\}$ *pertence a F(G). Habitualmente representa-se um grafo simples* $G = (X(G), F(G))$, *abreviadamente* $G = (X, F)$, *por um diagrama no qual os vértices são representados por pontos e as arestas por linhas unindo vértices adjacentes.*

Definição .7 (Grau de um vértice). *Dissemos que um* grau de um vértice *de um grafo G, é o número de arestas que são incidentes a este vértice.*

Definição .8 (Subgrafo). *Um grafo* $G' = (V', E')$ *diz-se* subgrafo *de* $G = (V, E)$ *se* $V' \subset V$, $E' \subset E$ *e* E' *contém todas as arestas de G que ligam os vértices de* V'.

Definição .9 (Caminho). *Um* caminho *num grafo G entre os vértices* x_1 *e* x_p *é um subgrafo, P, tal que*

V(P)={x_1,x_2,...,x_p*}*

e

E(P)={$[x_1,x_2],\ldots[x_p-1, x_p]$*}*

Definição .10 (Ciclo). *Um* ciclo *é um caminho de comprimento não nulo cujos únicos vértices que coincidem são os vértices extremos.*

Definição .11 (Grafo conexo). *Um grafo G diz-se* conexo *se existe sempre um caminho a unir quaisquer dois dos seus vértices.*

Lema .1 (Grau máximo). *Um gráfico com N vértices, cada um com grau no* máximo 2, *terá no máximo N arestas.*

Lema .2 (Componentes). *Qualquer grafo finito onde um vértice tem um grau de no máximo* 2 *é uma união de componentes disjuntos, e cada* componente *é:*

- (A) *um vértice isolado;*
- (B) *um ciclo simples;*
- (C) *um caminho simples.*

Demonstração. Por indução sobre o número de arestas do grafo.

Caso básico

Considere-se um grafo G com n vértices.

Cada vértice pode ter no máximo grau dois, então G pode ter no máximo n arestas.

Denota-se um grafo com k arestas por G_k.

No caso de G_0, todos os vértices são isolados.

Caso Geral

Tese: No caso G_{n+1}, escolhe-se aleatoriamente uma aresta para ser retirada e designe-se essa aresta por (u, v). Os vértices u e v passam a ter no máximo grau 1, uma vez que se retirou a aresta porque os ligava e no máximo tinham grau dois. Como os vértices u e v tem no máximo grau 1 então não podem pertencer a um ciclo.

Hipótese de indução: G_n é a união de vértices isolados, ciclos e caminhos, se se adicionar novamente a aresta (u, v) ao grafo, os subgrafos que se tinham obtido pela exclusão da aresta continuam inalterados e ao adicionar novamente a aresta a única coisa que se altera é que os vértices u e v passarão a fazer parte de um mesmo ciclo ou caminho.

Portanto, pode-se concluir que G_{n+1} também é a união de vértices isolados, ciclos e caminhos. Onde concluímos que o Lema se verifica para todos os grafos G_k, com $0 \leq k \geq n$.

□

BIBLIOGRAFIA

[1] AMULYA, K. B. Binomial theorem in ancient India, Indian J. Sci. 1 (1996), 68-74.

[2] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph theory. Springer, 2008.

[3] BOUTON, C. Nim, a game with a complete mathematical theory, Annals of Mathematics, Second Series 3 (1901), 35-39.

[4] CAMPOS, C. N.; DANTAS, S.; MELLO, C. P. Colouring clique-hypergraphs of circulant graphs, Graphs and Combinatorics 29 (2013), 1713–1720.

[5] CAYLEY, A. Desiderata and Suggestions: No. 2. The Theory of Groups: Graphical Representation, Amer. J. Math. 1 (1878), 174-176.

[6] GALE, D. The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem, American Math. Monthly 86 (1979), 818-827.

[7] GARDNER, M. Mathematical games, Sci. Amer. 197 (1957), 145–150.

[8] GARDNER, M. "The Game of Hex", in: The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. Simon and Schuster, New York, 1959, pp. 73-83.

[9] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-completeness. WH Freeman and Co., 1979.

[10] HAMKINS, J. D. Proof and the art of Mathematics. Massachusetts Institute of Technology, 2020.

[11] HAYWARD, R.; TOFT, B. Hex, inside and out: the full story. CRC Press, Boca Raton, 2019.

[12] HEIN, P. Vil de laere polygon? Series of articles in Politiken newspaper, starting 26 December 1942.

[13] LAGARIAS, J.; SLEATOR, D. Who wins misère Hex?, in: E. Berlekamp, T. Rogers (Eds.), The Mathemagician and Pied Puzzler, AK Peters, Natick, 1999, pp. 237–240.

[14] LOPES, F. J. A.; LEIBNIZ, E. A. Aritmética Binária. Revista de História da Matemática 11, no. 22 (2020), 89-94.

[15] http://ludicum.org/

[16] NELVANA, EMISSORA PBS, Temporada 01, episódio 18, Canadá 21/01/2022.

[17] O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. F. Émile Borel. In: MacTutor History of Mathematics archive.

[18] REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.3, p.30-40, UFSC: 2008

[19] VAN RIJSWIJCK, J. Computer Hex: Are Bees better than Fruitflies? Dissertação de mestrado, University of Alberta, Edmonton, 2000.

[20] SZWARCFITER, J. L. Grafos e algoritmos computacionais. Campus, Rio de Janeiro, 1986.

[21] YANG, J.; LIAO S.; PAWLAK, M. "New winning and losing positions for 7x7 Hex", in: SCHAEFFER, J.; MULLER, M; BJÖRNSSON, Y. (eds.), Computers and Games 2002, number 2883 in LNCS, Springer, 2003, pp. 230–248.

[22] YOUNG, K.; HAYWARD, R. B. Um solucionador Hexavertido. Departamento de Ciência da Computação, UAlberta, Canadá. Abril 2017.

[23] ZERMELO, E. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. 5º Congresso Internacional de Matemáticos, Cambridge, 1913.

[24] ZWILLINGER, D. "News and Letters", in: Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 3, May 1976, p. 156.