UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Priscila Moreda Perroni

Brincando com múltiplos e divisores: o jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula

São José do Rio Preto
2021

Priscila Moreda Perroni

Brincando com múltiplos e divisores: O jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profª Drª Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto
2021

P459b

Perroni, Priscila Moreda

Brincando com múltiplos e divisores: O jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula / Priscila Moreda Perroni. -- São José do Rio Preto, 2021

87 f.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Flávia Souza Machado da Silva

1. Jogos Matemáticos. 2. Brincando com Múltiplos e Divisores. 3. Ensino de Matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Priscila Moreda Perroni

Brincando com múltiplos e divisores: O jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof[a]. Dr[a]. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof[a]. Dr[a]. Ligia Laís Fêmina
UFU – Uberlândia

Prof[a]. Dr[a]. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
04 de março de 2021

Dedico esse trabalho aos meus filhos que me fazem querer vencer na vida e aos meus pais PaiPê e MãeMaga (in memorian) que são meus exemplos.

AGRADECIMENTOS

A primeira pessoa que agradecerei, é a pessoa mais importante da minha vida: “EU”, quero me agradecer por acreditar que um dia seria capaz de entrar na UNESP e concluir meu mestrado, esse título é uma parte do sonho realizado. Eu nunca deixei de acreditar em mim!

Aos meus filhos, Amanda e Tárcis que estiveram ao meu lado sempre, me apoiando e acreditando no meu sonho.

Ao meu PaiPê, ao qual não tenho palavras para agradecer e dizer o que ele representa na minha vida!

As minhas irmãs e minha sobrinha afilhada!

Ao Dirceu que aguentou meus choros e ausências durante esse tempo de aprendizado e sempre esteve ao meu lado.

A Camila Facchini que além de ser minha colega de turma e de profissão, se tornou uma amiga a qual eu pude sempre contar, até para empurrar minha cadeira de rodas e pegar minhas muletas.

A todos os professores que dividiram seus conhecimentos comigo e tiveram muita paciência.

A Profª Drª Aparecida Francisco, que me incentivou a dar os primeiros passos.

A Profª Drª Flávia Souza Machado da Silva que desde o primeiro dia de aula foi um exemplo para mim, e sem a qual esse trabalho não sairia do forno.

Aos alunos e equipe da escola onde as atividades propostas para sala de aula neste trabalho foram desenvolvidas, vocês são meus combustíveis.

A Deus por ter deixado que todas essas pessoas fizessem parte da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

“*Para todas as coisas, dicionário. Para que fiquem prontas, paciência.”*

Nando Reis (Albúm “Mais” - 1991)

RESUMO

Este trabalho descreve como explorar o jogo "Brincando com múltiplos e divisores" e a maneira de levar o estudante a construção das habilidades matemáticas, usando o jogo como um recurso didático para ampliá-las e consolidá-las, valendo-se de vários objetos de conhecimentos matemáticos, em particular, múltiplos e divisores de um número natural e números primos.

A fundamentação teórica se baseou nos problemas desencadeados pelas situações vivenciadas pela autora e pelos estudantes durante o trabalho com o jogo na sala de aula. Foram enunciados e demonstrados os principais teoremas e resultados relacionados aos objetos de conhecimento, como os já citados anteriormente, e ainda a congruência, o sistema de numeração decimal, os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10, que foram os mais utilizados pelos estudantes.

A abordagem dos objetos de conhecimento mencionados com a utilização do jogo está de acordo e atende ao Currículo e a BNCC, tentando através do jogo, dar leveza e amabilidade ao ensino e aprendizagem do componente curricular de Matemática, envolvendo e motivando os alunos quanto a aprendizagem dos objetos de conhecimento e habilidades inerentes ao currículo de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental Ciclo II.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Brincando com Múltiplos e Divisores. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work describes how to explore the game “Playing with multiplex and divisors” and how to take the student to the construction of mathematical abilitiee, using the game as a didactic resource to expand and consolidate this knowledge of the students, using various objects of mathematical knowledge, in particular, the multiples and divider within the set of natural numbers and the concept of prime numbers.

The theoretical foundation was based on the problems triggered by the situations experienced by the author and students during work with the game in class. The main theorems and results related to the objects of knowledge were demonstrated and conceptualized, such as the ones cited previously, and even congruence, the decimal numbering system, divisibility criteria by 2, 3, 4, 5, 6, 9 and 10, that were the most utilized by the students.

The approach to the mentioned knowledge objects with the use of the game is in accordance and comply with the Curriculum and the BNCC, trying through it to give lightness and kindness to the teaching of the curriculum component of Mathematics, involving and motivating the students regarding the learning of the objects of knowledge and skills inherent in the mathematics Curriculum of the 6th year of elementary school Cycle II.

Keywords: Mathematical Games. Playing with Multiples and Dividers. Mathematics Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tabuleiro e peças do jogo “Brincando com múltiplos e divisores” 15
Figura 2 – Tabela de registro das jogadas.. 16
Figura 3 – Tabela para enumerar e utilizar como Crivo de Eratóstenes....................... 45
Figura 4 – Tabela para registrar os 25 números primos menores que 100................... 45
Figura 5 – Modelo de avaliação diagnóstica inicial.. 52
Figura 6 – Tabela de registros das jogadas.. 55
Figura 7 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros..................................... 56
Figura 8 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros..................................... 56
Figura 9 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros..................................... 57
Figura 10 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros.................................... 57
Figura 11 – Tabela para análise dos números do tabuleiro... 60
Figura 12 – Divisões com feijões.. 61
Figura 13 – Divisões com feijões.. 61
Figura 14 – Situação problema a partir do jogo.. 63
Figura 15 – Modelo de avaliação diagnóstica final... 65
Figura 16 – Resultado IDESP 2017 e 2018.. 69
Figura 17 – Aplicação da avaliação.. 72
Figura 18 – Resolução incorreta da questão 1 da avaliação diagnóstica inicial.. 72
Figura 19 – Resolução incorreta da questão 3 da avaliação diagnóstica inicial.. 73
Figura 20 – Jogando.. 75
Figura 21 - Resolução da situação problema a partir do jogo..................................... 77
Figura 22 – Resolução da avaliação diagnóstica final.. 79

Sumário

1 INTRODUÇÃO 10

2 O JOGO BRINCANDO COM MÚLTIPLOS E DIVISORES 12

2.1 Sobre o jogo 12

2.2 Os objetivos e as regras 13

2.3 Materiais necessários para o jogo 15

3 OS CONCEITOS MATEMÁTICOS PRESENTES NO JOGO "BRINCANDO COM MÚLTIPLOS E DIVISORES" 17

3.1 O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) 17

3.2 Adição em $\mathbb{N}$ 19

3.3 Multiplicação em $\mathbb{N}$ 22

3.4 Relação de ordem 25

3.5 Múltiplos e divisores 30

3.6 Congruência 33

3.7 Sistema de numeração decimal 36

3.8 Critérios de divisibilidade 38

3.8.1 Critério de divisibilidade por 2 39

3.8.2 Critério de divisibilidade por 3 39

3.8.3 Critério de divisibilidade por 4 39

3.8.4 Critério de divisibilidade por 5 40

3.8.5 Critério de divisibilidade por 6 40

3.8.6 Critério de divisibilidade por 9 41

3.8.7 Critério de divisibilidade por 10 41

3.9 Números primos 42

4 ORGANIZANDO O TRABALHO NA SALA DE AULA 47

5 COLOCANDO A MÃO NA MASSA 68

6 O ELO ENTRE: MATEMÁTICA, JOGO, BNCC E O CURRÍCULO PAULISTA 81

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 84

REFERÊNCIAS 86

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho nasce da necessidade de inspirar cada vez mais professores a trabalhar de forma lúdica, mas com seriedade na sala de aula, de forma a fazer o estudante ter prazer em frequentar as aulas de matemática. Pode ser utopia querer unir diversão a aprendizado, mas é incrivelmente possível, e quem ganha com isso é a educação. Com um pé na teoria e outro na prática essa dissertação vem mostrar que é possível trabalhar com jogo matemático e garantir a aprendizagem em sala de aula.

Com embasamento teórico em grandes autores como Júlia Borin, George Polya, Celso Vasconcellos e Smole esse trabalho espera contribuir para a superação dos desafios enfrentados no ensino da matemática básica, principalmente nos conceitos de múltiplos e divisores no qual ele se baseia.

O jogo escolhido para estudo foi "Brincando com múltiplos e divisores", que se encontra disponível no site do Laboratório de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – IBILCE da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de São José do Rio Preto. Este jogo também vem sendo difundido em uma importante competição realizada entre escolas públicas, que é o "Campeonato Escolar de Jogos de Tabuleiro - CEJTA", realizado pelo Laboratório de Matemática da UNESP/IBILCE/São José do Rio Preto, em parceria com as Diretorias de Ensino Regiões (DER) de Andradina, Barretos, Jales, José Bonifácio, Matão, São José do Rio Preto e Votuporanga.

Observamos no jogo a possibilidade de explorar conceitos e resultados matemáticos de grande importância, como múltiplos e divisores dos números naturais, congruência, sistema de numeração decimal e critérios de divisibilidade.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 1, apresentamos explanaremos as regras, o material, enfim toda a logística do jogo "Brincando com múltiplos e divisores", já no Capítulo 2 apresentaremos conceitos e resultados matemáticos explorados no jogo, numa sequência organizada pela discussão de problemas produzidos no contexto do jogo. Iniciamos pela discussão do conjunto dos números naturais, para em seguida, introduzir o conceito de adição e multiplicação dentro dos naturais, incluindo neste contexto a apresentação dos conceitos de múltiplos e divisores. Apresentamos também os conceitos de números primos e compostos, adentrando em congruência, na discussão de aritmética modular. Finalmente apresentando alguns critérios de divisibilidade como aplicação da noção de congruência para enfim chegar aos números primos.

No Capítulo 3 daremos ênfase a uma sequência didática, detalhada, para a utilização do jogo na sala de aula, como mais uma estratégia para o ensino das habilidades matemática. E o Capítulo 4 vem para complementar o Capítulo anterior, comprovando as práticas descritas.

Para finalizar este trabalho no Capítulo 5 analisamos a abordagem das habilidades relacionadas com o jogo, em documentos oficiais de ensino, como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e o Currículo Paulista, justificando a opção pelo uso de jogos como recurso para o ensino de Matemática.

2. O JOGO BRINCANDO COM MÚLTIPLOS E DIVISORES

No ensino da matemática nos deparamos todos os dias, dentro de uma sala de aula, com uma imensa dificuldade em ensinar de maneira eficaz e prazerosa, de modo a construir um conhecimento efetivo e leve. Pensando nesse desafio nasceu a necessidade de escrever, mesmo depois de muito explorado, sobre o tema: "O jogo como mais uma estratégia para o ensino da matemática na sala de aula". Segundo Borin: "[...] ao jogar, o aluno passa a ser um elemento ativo do seu processo de aprendizagem, vivenciando a construção do seu saber e deixando de ser um ouvinte passivo de nossas explicações". (BORIN, 2002, p.4)

Este trabalho visa ajudar nas pesquisas e no trabalho em sala de aula de forma a constatar que jogos matemáticos melhoram o desempenho do aluno na aprendizagem matemática, desperta o interesse pela disciplina e trabalha o protagonismo de uma forma cooperativa.

Trataremos, neste capítulo, de explanar as regras, o material, enfim toda a logística do jogo "Brincando com múltiplos e divisores" que este trabalho contempla. Através dele podem ser abordados vários conceitos matemáticos que vão desde uma simples adição de números naturais até uma progressão aritmética. No presente trabalho será abordado apenas os conceitos básicos de múltiplos e divisores dos números naturais, congruência, sistema de numeração decimal e critérios de divisibilidade, pois ele, o jogo, será aplicado para uma turma de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental Ciclo II, não cabendo no momento o aprofundamento à uma habilidade do Ensino Médio, como é o caso da Progressão Aritmética.

2.1 Sobre o jogo

O jogo "Brincando com múltiplos e divisores" é disputado entre duas equipes adversárias e composto por um tabuleiro, um dado, fichas ou marcadores (de duas cores diferentes, uma para cada equipe) e uma tabela de registro (para cada equipe). Na abordagem que adotamos neste trabalho cada uma das equipes foi constituída por 2 jogadores. Ele propõe situações nas quais o aluno tem que fazer uma escolha que seja um número "bom", de maneira bem pensada, no qual o seu oponente tenha poucos múltiplos e/ou divisores para marcar no tabuleiro, ou seja, o número escolhido tem de ser de maior valor que a soma dos múltiplos e/ou divisores que o oponente marcará, isso faz com que o aluno pense em todos os conceitos matemáticos descritos acima.

E qual o papel do professor nisso tudo? Será que ele deverá ensinar esses conceitos antecipadamente? Ou será que ele deverá questionar o aluno para a construção do conhecimento?

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. (POLYA, 1995, p.1)

O professor tem dois caminhos a seguir, o primeiro seria de ensinar os conteúdos e recorrer ao jogo como uma maneira de fixar o conhecimento, não é esse o caso ao qual a autora defende que seja feito. O segundo, esse sim estudado e usado pela autora, é o caso no qual através do jogo se constrói o conhecimento e depois se formaliza o conteúdo. E essa maneira de usar o jogo como uma estratégia para a construção do conhecimento é mais trabalhosa pois o estudante não pode ser deixado sozinho ou com auxílio insuficiente porque pode desencadear, como constatado pela autora durante suas aulas, um desanimo ou uma falta de interesse e curiosidade pelo jogo, em contrapartida o professor não pode dar respostas prontas, pois isso também desmotiva o estudante, uma vez que ele não tem desafios para superar. A mediação pelo professor no segundo caso deve ser um equilíbrio entre o deixar o estudante ser protagonista e estar atento aos momentos em que ele necessita de auxílio. Encontrar esse equilíbrio é um grande passo para a efetivação do trabalho com jogos em sala de aula.

2.2 Os objetivos e as regras

Objetivo do jogo: somar o maior número de pontos ao final da partida.

Regras:

1. As equipes definem quem inicia o jogo no par ou ímpar e alternam as jogadas. A equipe que ganhar no par ou ímpar será a primeira equipe a jogar e será a equipe vermelha da tabela de registro.

2. Na sua vez, a equipe joga um dado e escolhe um número do tabuleiro que seja um múltiplo do número sorteado no dado, marcando-o com um de seus marcadores, sempre que possível. Se, ao lançar o dado, não houver múltiplos do número sorteado, disponível para escolha, no tabuleiro, a equipe passa a vez.

3. Em seguida, a outra equipe marca com seus marcadores múltiplos e divisores do número escolhido pela equipe oponente, se houver disponibilidade, e lança o dado seguindo a regra 2 para marcação de sua escolha. Ao lançar o dado a equipe dá por encerrada a marcação de múltiplos e divisores do número escolhido pela equipe oponente.

4. Cada número só poderá ser marcado uma única vez e uma equipe não poderá marcar números após ter passado a sua vez.

5. Se ao lançar o dado uma equipe marcar um número errado, isto é, que não seja múltiplo do número sorteado, e a equipe oponente denunciar o erro, o número escolhido e seus múltiplos e divisores serão marcados pela equipe que denunciou o erro, que em seguida lança o dado e marca sua escolha a partir do lançamento efetuado.

6. Se uma equipe ao realizar a regra 3 faz uma marcação errada e a equipe oponente apontar o erro, a marcação se encerra e o número marcado equivocadamente é pontuado pela equipe denunciante, que deve trocar o marcador da equipe oponente por um seu.

7. O jogo termina quando não houver possibilidade de finalizar uma rodada completa pelas duas equipes ou após seis (6) lançamentos consecutivos do dado sem que as equipes façam marcação no tabuleiro.

8. A rodada completa consiste no seguinte: a primeira equipe realiza a regra 2, a segunda realiza as regras 3 e 2, nesta ordem, e a primeira, se possível, marca pontos, segundo a regra 3, ou seja, há a possibilidade de marcação a partir do lançamento do dado para a primeira e também para a segunda equipe.

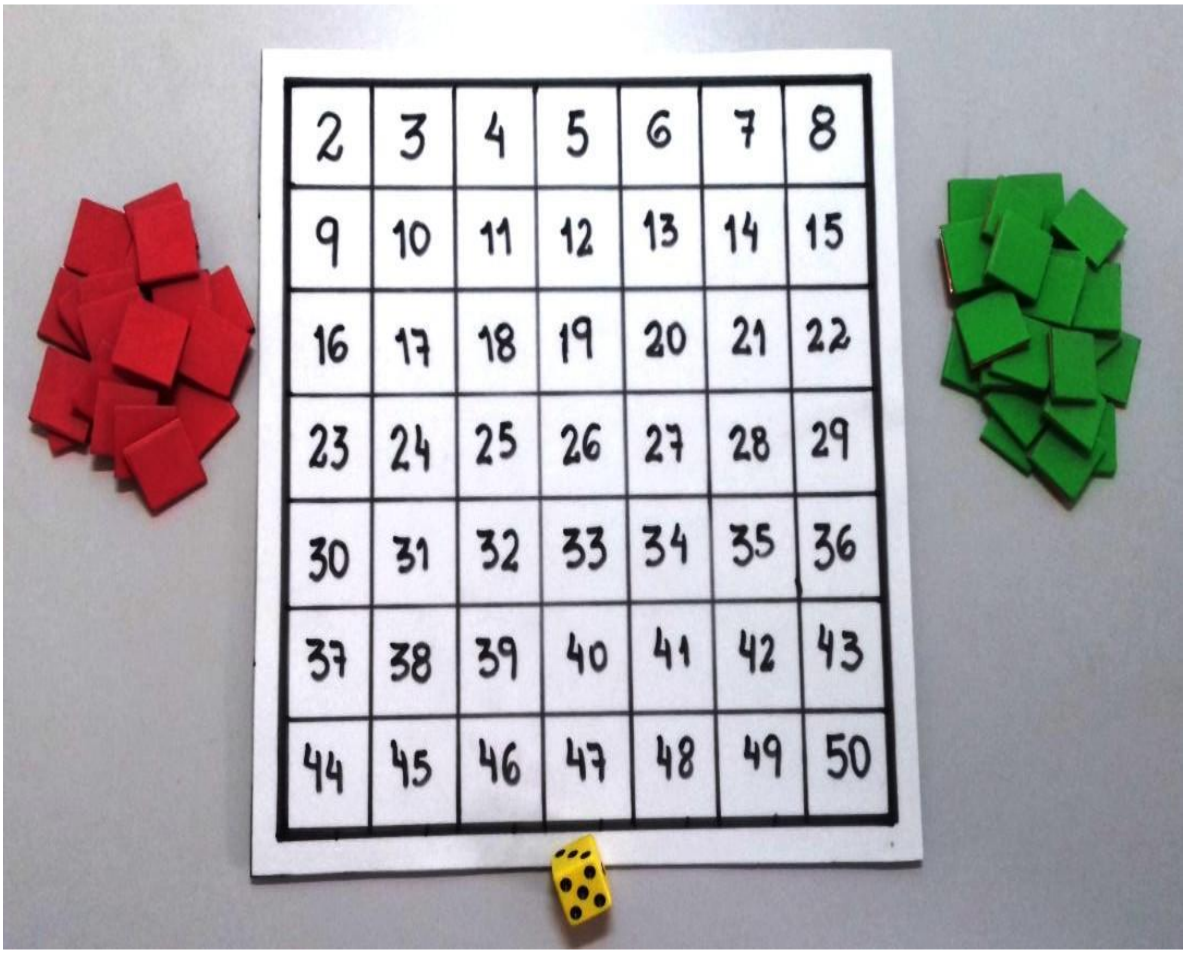
9. Os pontos de uma equipe será a soma de todos os números que ela marcou.

10. Vence a equipe com maior pontuação.

As regras mencionadas acima foi a adotada nas atividades que serão apresentadas posteriormente no Capítulo 3. No entanto, existem e podem se adotar outras variações dessas regras. Por exemplo, na regra 2 poderia ser marcado no tabuleiro um número escolhido "aleatoriamente" pela equipe ao invés de ser um número que seja múltiplo do número sorteado no dado.

2.3 Materiais necessários para o jogo

Figura 1 – Tabuleiro e peças do jogo "Brincando com múltiplos e divisores"



Fonte: Imagem e confecção da autora

Figura 2 – Tabela de registro das jogadas.

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								
5ª								
6ª								
7ª								
8ª								
9ª								

Fonte: https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos/4-cejta/jogos---regras/

3. OS CONCEITOS MATEMÁTICOS PRESENTES NO JOGO “BRINCANDO COM MÚLTIPLOS E DIVISORES”

No jogo “Brincando com múltiplos e divisores”, a partir de situações problemas, é possível trabalhar vários conteúdos que são abordados na Educação Básica na área de Matemática. Como já mencionado, esse trabalho destina-se ao estudo de jogos como uma ferramenta da aprendizagem matemática e é direcionado ao 6º ano do Ensino Fundamental.

Apresentaremos neste capítulo um breve estudo teórico dos conceitos e resultados referentes a objetos de conhecimento que são abordados no 6º ano do Ensino Fundamental. Os focos principais são: múltiplos e divisores de um número natural, e números primos e compostos. Inicialmente relatando a origem e a formalização do conjunto dos números naturais, bem como as operações de adição e multiplicação e a relação de ordem.

3.1 O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

A origem dos números naturais sempre esteve ligada a necessidade humana de contar e medir. A constatação de que a ideia de número já existia desde a época da pré-história é confirmada de várias formas através de marcas em ossos, conjunto de pedras, desenhos em paredes de cavernas. Com o passar dos tempos foi surgindo a necessidade de registrar esse pensamento matemático de uma forma simplificada e mais prática o que deu origem ao primeiro conjunto de números que conhecemos: os naturais. (PIRES, 2013)

A formalização da teoria dos números ocorreu lentamente, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três...) que são os números naturais. Foi uma evolução demorada, decorreram muitos milênios.

Hoje podemos escrever de forma concisa e precisa o conjunto dos naturais, valendo-nos da notável síntese, hoje denominada Axiomas de Peano, feita por um matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932).

Axiomas de Peano

Peano propôs uma lista de três conceitos primitivos: zero, número natural e a relação de sucessor. A construção de Peano caracteriza o conjunto dos números naturais por meio dos seguintes axiomas:

P_1) Zero é um número natural.

P_2) Se n é um número natural, então n tem um único sucessor que também é um número natural.

P_3) Zero não é sucessor de nenhum número natural.

P_4) Dois números naturais que têm sucessores iguais são eles próprios, iguais.

P_5) (Axioma da indução completa) Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

De modo a simplificar as notações, utilizaremos: 0 (zero), n' (sucessor de n), $\mathbb{N}$ (conjunto de todos os números naturais) e $\mathbb{N}^*$ (conjunto de todos os números naturais, excetuando-se o zero (0)). Posto isto, podemos resumir os Axiomas de Peano ao seguinte:

P_1) $0 \in \mathbb{N}$.

P_2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$.

P_3) $(\forall\, n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$.

P_4) $n' = q' \Rightarrow n = q$.

P_5) $S \subset \mathbb{N}$ e $i)\ 0 \in S\, , ii)\ n \in S \Rightarrow n' \in S$, então $S = \mathbb{N}$.

Proposição 3.1.1 Se $p \in \mathbb{N}$, então $p' \neq p$.

Demonstração: Seja $S = \{p \in \mathbb{N} \mid p' \neq p\}$. Como pelo axioma P_3, 0 não é sucessor de nenhum número natural, temos $0 \in S$. Se $p \in S$, então, pela definição do conjunto S, $p \neq p'$ e pela contrapositva de P_4 já citada anteriormente, temos $(p')' \neq p'$. Logo $p' \in S$ sempre que $p \in S$ e, portanto, por P_5, conclui-se que $S = \mathbb{N}$, ou seja, para todo $p \in \mathbb{N}$, $p' \neq p$.

■

Proposição 3.1.2 Seja $q \in \mathbb{N}$, com $q \neq 0$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p' = q$.

Demonstração: Considere $S = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{N} \mid y \neq 0\ e\ x' = y\ para\ algum\ x \in \mathbb{N}\}$. Pela construção, obviamente $0 \in S$ e ainda $0' \in S$, já que $0 \in \mathbb{N}$. Seja $p \in S$ tal que $p \neq 0$. Então, para algum $q \in \mathbb{N}$, teremos $p = q'$ e dessa maneira, como números iguais sempre terão sucessores iguais, $p' = (q')'$, o que implica que $p' \in S$. Logo, $p' \in S$ sempre que $p \in S$. Portanto, por P_5, $S = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural distinto de zero é sucessor de algum outro número natural, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 3.1.3 (*Primeiro Princípio de Indução Completa*): Suponhamos que a todo número natural n esteja associada uma afirmação $P(n)$ tal que:

i) $P(0)$ é verdadeira.

ii) $P(r')$ é verdadeira, sempre que $P(r)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Considere $S = \{n \in \mathbb{N} | \, P(n) \text{ é } verdadeira\}$. Pela hipótese ***i)*** $0 \in S$. Supondo $p \in S$, pela hipótese ***ii)***, $p' \in S$. Logo, pelo axioma P_5, $S = \mathbb{N}$, isto é, “$P(n)$ é verdadeira para todo n".

■

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a adição, que aos números $n, \ p$ pertencentes aos $\mathbb{N}$ faz corresponder à soma $n + p$ e a multiplicação, que lhes associa o produto $n \cdot p$.

A soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar sucessor. Em particular, $n + 1$ é o sucessor de n (ou seja, $n' = n + 1$), $n + 2$ é o sucessor do sucessor de n, etc. Então $3 + 2 = 5$, simplesmente porque 5 é o sucessor do sucessor de 3.

Quanto ao produto, tem-se que $n \cdot 1 = n$ por definição e, quando $p \neq 1$, $n \cdot p$ é a soma de p parcelas iguais a n.

A seguir discorremos sobre as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ e suas propriedades.

3.2 Adição em $\mathbb{N}$

A adição $(n, m) \longmapsto n + m$ em $\mathbb{N}$ é definida mediante as seguintes condições:

- $n + 0 = n$
- $n + p' = (n + p)'$

Em $r = n + m, n \; e \; m$ são parcelas e r a soma.

Para o que segue, utilizaremos a seguinte notação $0' = 1$, $1' = 2$, $2' = 3$ e assim por diante.

Exemplos 3.2.1

- $1+1=1+0'=(1+0)'=1'=2$
- $2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4$

Proposição 3.2.1 Para todo $p \in \mathbb{N}, p' = p+1$ e, ainda $p+1=1+p$.

Demonstração: Primeiramente, pela definição de adição em $\mathbb{N}$, temos:

$$p+1=p+0'=(p+0)'=p'.$$

Para a segunda parte da demonstração usaremos indução sobre p.

Se $p=0$, temos:

$$1+0=1$$

e, ainda,

$$0+1=0+0'=(0+0)'=0'=1.$$

Portanto, $1+0=1$ e $0+1=1$

Suponha $1+p=p+1$ e mostraremos que $1+p'=p'+1$ é verdadeiro. De fato,

$$1+p'=(1+p)'=(p+1)'=(p')'=p'+1$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, $1+p=p+1, \forall\, p \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.2.2 Para todo $r \in \mathbb{N}, 0+r=r$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre r.

Para $r=0$, temos:

$$0+r=0+0=0.$$

Portanto, $0+r=r$.

Suponhamos que $0+r=r$ e mostraremos que $0+r'=r'$. De fato,

$$0+r'=(0+r)'=r'.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, $0+r=r, \forall\, r \in \mathbb{N}$.

■

Vejamos as propriedades relativas à adição no conjunto dos números naturais.

Proposição 3.2.3 ***(Propriedade Associativa):*** $m + (n + p) = (m + n) + p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$ e provamos que, para todo $p \in \mathbb{N}$, vale $m + (n + p) = (m + n) + p$. Para isso usaremos indução em p.

Quando $p = 0$, a igualdade $m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0$ segue da definição de adição.

Suponha o resultado válido, para um certo p, temos:

$$\begin{aligned} m + [n + (p + 1)] &= m + [(n + p) + 1] \\ &= [m + (n + p)] + 1 \\ &= [(m + n) + p] + 1 \\ &= (m + n) + (p + 1). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução $m + (n + p) = (m + n) + p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.2.4 ***(Propriedade Comutativa):*** $m + n = n + m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $m \in \mathbb{N}$ e provamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $m + n = n + m$. Para isso usaremos indução em n.

Quando $n = 0$, a igualdade $m + 0 = m = 0 + m$ é verdadeira, pois a primeira igualdade é verdadeira pela definição de adição e a segunda igualdade pela proposição 2.2.2.

Suponha o resultado válido, para um certo m, temos:

$$\begin{aligned} m + (n + 1) &= (m + n) + 1 \\ &= (n + m) + 1 \\ &= 1 + (n + m) \\ &= (1 + n) + m \\ &= (n + 1) + m, \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade está na definição de adição, a segunda igualdade está na hipótese de indução, a terceira e a quinta igualdades está no caso particular $m + 1 = 1 + m$ já provado na proposição 2.2.1 e a quarta igualdade na associativa vista anteriormente.

Portanto, pelo Princípio de Indução $m + n = n + m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.2.5 ***(Lei do cancelamento da adição):*** $n + p = m + p \Rightarrow n = m$, $\forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$ e provamos que, para todo $p \in \mathbb{N}$, vale:

$$n + p = m + p \Rightarrow n = m.$$

Para isso usaremos indução em p.

Quando $p = 0$, a igualdade:

$$n + 0 = m + 0 \Rightarrow n = m$$

pois segue da própria definição de adição.

Suponha o resultado válido, para um certo p, temos:

$$\begin{aligned} & n + (p + 1) = m + (p + 1) \\ & \Leftrightarrow (n + p) + 1 = (m + p) + 1 \\ & \overset{P_4}{\Rightarrow} n + p = m + p \\ & \Rightarrow n = n. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução,

$$n + p = m + p \Rightarrow n = m, \forall m, n, p \in \mathbb{N}.$$

■

Proposição 3.2.6 ***(Existência de elemento neutro)****:* Para todo $r \in \mathbb{N}$, $0 + r = r = r + 0$, ou seja, zero é o elemento neutro da adição.

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{N}$. Temos que $r + 0 = r$, das condições dadas na definição de adição. Já pela Proposição 2.2.2, temos que, $r = 0 + r$. Logo, $r + 0 = r = 0 + r, \forall r \in \mathbb{N}$.

3.3 Multiplicação em $\mathbb{N}$

Definimos a multiplicação $(m, n) \longmapsto m \cdot n$ em $\mathbb{N}$ mediante as seguintes condições:
• $m \cdot 0 = 0$.
• $m \cdot n' = m \cdot n + m$.
Temos que em $m \cdot n = p$, m e n são chamados fatores e p, produto.
Também se pode denotar $m \cdot n$ por mn.

Exemplos 3.3.1

• $1 \cdot 1 = 1 \cdot 0' = 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1;$

• $1 \cdot 2 = 1 \cdot 1' = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2.$

Vejamos agora as propriedades relativas à multiplicação no conjunto dos números naturais.

Proposição 3.3.1 ***(Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição):*** $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ e $(n + p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$ e provamos que, para todo $p \in \mathbb{N}$, vale $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$. Para isso usaremos indução em p.

Quando $p = 0$, a igualdade $m \cdot (n + 0) = m \cdot n = m \cdot n + 0 = m \cdot n + m \cdot 0$.

Suponha o resultado válido, para um certo p, temos:

$$\begin{aligned} m \cdot [n + (p + 1)] &= m \cdot [(n + p) + 1] \\ &= m \cdot (n + p) + m \\ &= (m \cdot n + m \cdot p) + m \\ &= m \cdot n + (m \cdot p + m) \\ &= m \cdot n + m \cdot (p + 1), \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade está na definição de adição, a segunda e a quinta igualdade está na definição de multiplicação, a terceira igualdade vem da hipótese de indução e a quarta igualdade da associativa da adição já provada aqui.

Portanto, pelo Princípio de Indução: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

De maneira análoga obtemos $(n + p) \cdot m = n \cdot m + p \cdot m, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.3.2 ***(Propriedade Associativa):*** $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$ e provamos que, para todo $p \in \mathbb{N}$, vale $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$. Para isso usaremos indução em p.

Quando $p = 0$, a igualdade $(m \cdot n) \cdot 0 = 0 = m \cdot 0 = m \cdot (n \cdot 0)$ é verdadeira.

Suponha o resultado válido, para um certo p, temos:

$$\begin{aligned} m \cdot [n \cdot (p + 1)] &= m \cdot (n \cdot p + n) \\ &= m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n \\ &= (m \cdot n) \cdot p + m \cdot n \\ &= (m \cdot n) \cdot (p + 1), \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade vem da definição de multiplicação, a segunda igualdade da distributiva da multiplicação em relação a adição, a terceira igualdade vem da hipótese de indução e a quarta igualdade vem da definição de multiplicação.

Portanto, pelo Princípio de Indução: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.3.3 ***(Existência do elemento neutro):*** $1 \cdot m = m, \forall\, m, \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Provemos que para todo $m \in N$, vale $1 \cdot m = m$. Para isso usaremos indução em m.

Quando $m = 0$, temos diretamente da definição $1 \cdot 0 = 0$.

Suponha o resultado válido, para um certo m, temos:

$$1 \cdot (m+1) = 1 \cdot m + 1$$
$$= m + 1.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução: $1 \cdot m = m, \forall\, m, \in\ \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.3.4 Para todo $p \in \mathbb{N}, 0 \cdot p = 0$.

Demonstração: Façamos por indução sobre p.

Para $p = 0$, temos diretamente da definição que:

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Suponha o resultado válido, para um certo p, temos:

$$0 \cdot (p+1) = 0 \cdot p + 0 = 0 + 0 = 0$$

Portanto, pelo Princípio da Indução, $0 \cdot p = 0, \forall\, p\ \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.3.5 ***(Propriedade Comutativa):*** $m \cdot n = n \cdot m, \forall\, m, n \in\ \mathbb{N}$.

Demonstração: Fixamos arbitrariamente $n \in\ \mathbb{N}$ e provamos que para todo $m \in \mathbb{N}$, vale $m \cdot n = n \cdot m$. Para isso usaremos indução em m.

Quando $m = 0$, temos da Proposição 2.3.4 e da definição de multiplicação que $0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$.

Suponha o resultado válido, para um certo m, temos:

$$(m+1) \cdot n\ = m \cdot n + n$$
$$= n \cdot m + n$$
$$= n \cdot (m+1),$$

onde a primeira igualdade vem da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, a segunda igualdade da hipótese de indução, a terceira igualdade vem da definição de multiplicação.

Portanto, pelo Princípio de Indução: $m \cdot n = n \cdot m, \forall\, m, n \in\ \mathbb{N}$.

■

Proposição 3.3.6 ***(Lei do cancelamento da multiplicação):*** Sendo $m, n, p \in \mathbb{N}$, temos:

$$m \cdot p =\ n \cdot p, p \neq 0 \Rightarrow\ m = n, \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Deixaremos para a próxima seção pois será necessário o uso de propriedades abordadas nela.

3.4 Relação de ordem

Definição 3.4.1 Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que b é menor ou igual que a, denotando por $b \leq a$, se $a = b + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$ (ou, equivalentemente, dizemos que a é maior ou igual que b e denotamos por $a \geq b$). No caso em que $u \neq 0$, dizemos b é menor que a e denotamos por $b < a$ (ou, equivalentemente, dizemos que a é maior que b, denotando por $a > b$).

Observações:

I) O número natural u nas condições da definição acima chama-se diferença entre a e b e é indicado por $u = a - b$, onde b é o minuendo e a é o subtraendo.

II) Para todo $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$. De fato, para todo $a \in \mathbb{N}$, temos $a = 0 + a$, o que implica $a \geq 0$.

III) Temos, também, que se $a + b = 0$, então $a = b = 0$. De fato, se $a \neq 0$ teríamos $b < 0$, o que é absurdo, logo $a = 0$. Analogamente, mostra-se que $b = 0$. Portanto, se $a \in \mathbb{N}^*$ ou $b \in \mathbb{N}^*$, então $a + b \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 3.4.1 São válidas as seguintes propriedades:

1. Reflexiva: $a \leq a$, para todo $a \in \mathbb{N}$;

2. Antissimétrica: Se $a \leq b \; e \; b \leq a$, então $a = b$;

3. Transitiva: Se $a \leq b \; e \; b \leq c$, então $a \leq c$;

4. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}, a \leq b \; ou \; b \leq a$;

5. Compatibilidade com a adição: Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$;

6. Compatibilidade com a multiplicação: Se $a \leq b$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$;

7. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Se $a < b$, então $a + 1 \leq b$;

Demonstração:

1. Seja $a \in \mathbb{N}$. Temos

$$a = a + 0.$$

Logo $a \leq a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

2. Por hipótese $a \leq b$ e $b \leq a$. Por definição, existem $u, v \in \mathbb{N}$ tais que $b = a + u$ e $a = b + v$. Assim,

$$a = b + v = (a + u) + v = a + (u + v).$$

Utilizando a lei do cancelamento da adição segue $0 = u + v$. Pela ***observação III*** acima, vem que $u = 0$ e $v = 0$.

Logo, $a = b$.

3. Da hipótese, existem $u, v \in \mathbb{N}$ tais que $b = a + u$ e $c = b + v$.

Então

$$c = b + v = (a + u) + v = a + (u + v).$$

Logo, $a \leq c$.

4. Para cada $b \in \mathbb{N}$, seja S_b o subconjunto de $\mathbb{N}$ formado pelos elementos n, para os quais se verifica ao menos uma das seguintes condições:

a) Existe $u \in \mathbb{N}$, tal que $n = b + u$;

b) Existe $v \in \mathbb{N}$, tal que $b = n + v$.

ou seja,

$$S_b = \{n \in \mathbb{N} | n \geq b \text{ ou } n \leq b\}.$$

Façamos essa prova por indução sobre n:

Primeiramente observe que quando $n = 0$, a segunda condição é satisfeita, logo $0 \in S_b$.

Suponha que $r \in S_b$, assim temos dois casos a considerar: existe $u \in \mathbb{N}$, tal que $r = b + u$ ou existe $v \in \mathbb{N}$, tal que $b = r + v$.

Como $r \in \mathbb{N}$, pelo axioma de Peano $\boldsymbol{P_2}$ temos $r' \in \mathbb{N}$. Vejamos o caso de $r = b + u$.

Para $u = 0$, temos:

$$r = b + u = b + 0 = b.$$

Logo, $r' = b' = b + 1$ e, portanto, $r' \geq b$, ou seja, $r' \in S_b$.

Agora, para $u \neq 0$ temos $r' = (b + u)' = b + u'$, ou seja, $r' \in S_b$.

Analisando o caso de $b = r + v$.

Se caso, $v = 0$ então $r = b$ e, portanto, $r' = b' = b + 1$. Logo $r' \in S_b$.

Se $v \neq 0$, segue, pela proposição 2.1.2, que $v = w'$ para algum $w' \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$b = r + v = r + w' = r + (w + 1) = (r + 1) + w = r' + w.$$

Portanto, $r' \in S_b$.

Portanto pelo axioma de Peano $\boldsymbol{P_5}$ temos que $S_b = \mathbb{N}$.

5. Como $a \leq b$, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + u$. Assim,

$$b + c = (a + u) + c = (a + c) + u.$$

Daí concluímos que $a + c \leq b + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$.

6. Como $a \leq b$, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + u$. Logo,

$$b \cdot c = (a + u) \cdot c = a \cdot c + u \cdot c.$$

Portanto, conclui-se que $a \cdot c \leq b \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$.

7. Por hipótese $a < b$. Assim existe $u \in \mathbb{N}$, com $u \neq 0$ tal que $b = a + u$. Como $u \neq 0$, segue pela proposição 2.1.2 $u = v'$ para algum $v \in \mathbb{N}$. Além disso, pela proposição 2.2.1 temos que $v' = v + 1$.

Logo,

$$b = a + u = a + v' = a + (v + 1) = (a + 1) + v.$$

Portanto, $a + 1 \leq b$.

■

Observação: A propriedade 6 apresentada na proposição 2.4.1 também é válida quando se considera a relação "menor que", ou seja, se $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$, para todo $c \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 3.4.2 ***(Princípio da Boa Ordem)*** Qualquer que seja o subconjunto não vazio, $S \subset \mathbb{N}$, S possui mínimo.

Demonstração: Seja $H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \forall x \in S\}$. Note que $0 \in H$, pois pelo axioma de Peano $\boldsymbol{P_1}$, $0 \in \mathbb{N}$ e pela proposição 2.2.2 temos $x = 0 + x$ o que implica $0 \leq x$, para todo $x \in S$, assim $0 \in H$. Pela hipótese, $S \neq \emptyset$, sendo assim podemos tomar $a \in S$. Claramente $a + 1 \notin H$, pois $a + 1 > a$. Logo, $H \neq \mathbb{N}$, pois $a + 1 \in \mathbb{N}$ e $a + 1 \notin H$. Como $0 \in H$ e $H \neq \mathbb{N}$, deve existir $b \in H$ tal que $b + 1 \notin H$, pois caso contrário pelo axioma de Peano $\boldsymbol{P_5}$, $H = \mathbb{N}$.

Agora vamos provar que $b = minS$, ou seja, temos que mostrar que $b \in S$ e $b \leq x$, para todo $x \in S$. De fato, como $b \in H$, então $b \leq x$, para todo $x \in S$.

Vamos supor $b \notin S$. Então, $b < x$, para todo $x \in S$ e assim pela proposição 2.4.1 item 7 temos $b + 1 \leq x$, para todo $x \in S$. Logo $b + 1 \in H$ e isso é um absurdo.

Portanto, $b \in S$ e assim fica provado que $b = minS$.

■

Proposição 3.4.3 Dado um número natural n qualquer, não existe nenhum número natural m tal que $n < m < n + 1$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista um número natural m com $n < m < n + 1$. Como $n < m$, segue que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = n + k$.

Temos que $n + 1 = m + s$ para algum $s \in \mathbb{N}^*$, pois $m < n + 1$.

Logo,

$$n + 1 = m + s = (n + k) + s = n + (k + s) \Longrightarrow k + s = 1.$$

Considerando que $k \neq 0$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $k = r'$. Desse modo,

$$1 = k + s = (r + 1) + s = (r + s) + 1 \Longrightarrow r + s = 0 \Longrightarrow r = s = 0$$

o que é um absurdo.

■

Teorema 3.4.1 (Primeiro Princípio de Indução) Seja $a \in \mathbb{N}$ e supomos que a cada número natural $n \geq a$, esteja associada uma afirmação $p(n)$. Admitamos ainda que seja possível provar o seguinte:

(i) $p(a)$ é verdadeira.

(ii) Para todo $r \geq a$, se $p(r)$ é verdadeira, então $p(r + 1)$ também é verdadeira.

Então**,** $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração: Seja $V = \{n \in \mathbb{N}; p(n) \text{ é verdadeira}\}$.

Considere o conjunto

$$S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\}.$$

Note que $a + S = \{a + m \mid m \in S\} \subset V$.

Como, pela condição (i), temos que $a + 0 = a \in V$, segue-se que $0 \in S$.

Por outro lado, se $m \in S$, então $a + m \in V$ e, por (ii), temos que $a + m + 1 \in V$; logo $m + 1 \in S$. Assim, pelo Axioma de Indução, temos que $S = \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V,$$

o que prova o resultado.

■

Teorema 3.4.2 (Segundo Princípio de Indução) Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$, esteja associada uma afirmação $p(n)$. Admitamos ainda que seja possível provar as duas condições seguintes:

(i) $p(a)$ é verdadeira.

(ii) Para todo $r > a$, se $p(s)$ é verdadeira sempre que $a \leq s < r$, então $p(r)$ também é verdadeira.

Então**,** $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração: Considere o conjunto

$$V = \{n \in a + \mathbb{N}; p(n) \text{ é verdadeira}\}.$$

Queremos provar que o conjunto $W = (a + \mathbb{N}) \setminus V$ é vazio. Suponha, por absurdo, que vale o contrário. Logo, pelo Princípio da Boa Ordem, W teria um menor elemento k, e, como sabemos de (i) que $a \notin W$, segue-se que existe um $n \neq 0$ tal que $k = a + n > a$. Portanto, $a, a+1, \dots, k-1 \notin W$; logo $a, a+1, \dots, k-1 \in V$. Por (ii) conclui-se que $k \in V$, o que contradiz o fato de $k \in W$.

■

Agora, de posse das ferramentas necessárias, voltemos para demonstrar a Proposição 2.3.6:

Suponha que $m \neq n$.

Então pela propriedade 4 da proposição 2.4.1, $m < n$ ou $n < m$.

Se $m < n$ então $m \cdot p < n \cdot p$, o que contradiz a hipótese.

Analogamente para $n < m$ teríamos uma contradição.

Logo $m = n$.

■

Os conceitos e resultados vistos até aqui serão aplicados no jogo durante várias etapas, uma delas é que a cada jogada o número escolhido terá de ser maior que a soma dos números marcados pelo oponente, e assim o aluno perceberá que terá de pontos a diferença entre o seu número escolhido e a soma dos números marcados pelo seu oponente.

Consta no próprio Currículo Paulista que justificar procedimentos utilizados na solução de problemas e analisar todas as relações observadas é primordial para que os estudantes tenham consciência da construção do seu conhecimento, bem como desenvolvam suas competências e habilidades matemáticas. E a utilização de jogos que ativem o cálculo mental, o cálculo estimado, o raciocínio e ampliem os desafios propostos para os estudantes, ao longo de toda vida escolar.

Surge então a necessidade de mais recursos para trabalhar a adição e a multiplicação, que faz parte do trabalho com a aritmética, na sala de aula, e o jogo serve como tal, nele os alunos podem ter a liberdade de escolher o algoritmo com o qual queiram trabalhar, desenvolvendo tais habilidades presentes e recorrentes no currículo e em várias etapas da vida escolar, como as descritas abaixo:

- Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito e para a resolução de problemas.
- Resolver e elaborar situações-problema com números naturais envolvendo adição, utilizando estratégias diversas, como cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas e/ou arredondamento do resultado.
- Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

A seguir abordaremos o conceito de múltiplos e divisores de um número natural, que é uma das habilidades trabalhadas na sala de aula durante o uso do jogo Brincando com Múltiplos e Divisores.

3.5 Múltiplos e divisores

Trabalharemos apenas com múltiplos e divisores dentro do conjunto dos números naturais, uma vez que no jogo “Brincando com Múltiplos e Divisores” utiliza-se apenas esse conjunto numérico e, também, na BNCC e no currículo oficial do estado de São Paulo, no 6º ano do Ensino Fundamental quando se trabalham múltiplos e divisores são considerados conjunto dos números naturais.

Definição 3.5.2 Sejam $d, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que d divide n, denotando por $d|n$, se existe um número natural k tal que $n = d \cdot k$. Neste caso, dizemos também que:

- d é um divisor de n;
- d é um fator de n;
- n é um múltiplo de d;
- n é divisível por d.

A notação $d \nmid n$ significa que $d|n$ é uma proposição falsa.

Exemplo 3.5.1 $3|9$, pois $9 = 3 \cdot 3$. Também podemos dizer de forma equivalente que:

- 3 é divisor de 9;
- 3 é fator de 9;
- 9 é múltiplo de 3;
- 9 é divisível por 3.

Mas, note que $9 \nmid 3$.

Veremos a seguir algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 3.5.1

i) $1|n, \forall n \in \mathbb{N}$ (ou seja, 1 divide qualquer número natural).

ii) $d|0, \forall d \in \mathbb{N}$ (ou seja, todo número natural é divisor de zero).

iii) $n|n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (isto é, todo número natural é divisor de si mesmo).

Demonstração: Consequência das igualdades $n = 1 \cdot n, 0 = d \cdot 0\ e\ n = n \cdot 1$.

■

Proposição 3.5.2 Sejam $n, m, a, b, d \in \mathbb{N}$. Então temos as seguintes propriedades da relação "divisor de":

i) se $d|n$ e $n|m$ então $d|m$ (propriedade transitiva da relação "divisor de");

ii) se $d|n$ e $d|m$ então $d|(n+m)$ e $d|c \cdot n, \forall c \in \mathbb{N}$;

iii) se $(ad)|(an)$ e $a \neq 0$ então $d|n$ (propriedade do cancelamento);

iv) se $d|n$ e $d|m$ então $d|(an+bm)$(propriedade de linearidade da relação "divisor de").

Demonstração:

i) Da hipótese e da Definição 2.5.1 temos que existem $k, l \in \mathbb{N}$, tais que $n = d \cdot k\ e\ m = n \cdot l$ de onde obtemos que $m = (d \cdot k)l = d(k \cdot l)$. Logo, existe $r = k \cdot l \in \mathbb{N}$ tal que $m = d \cdot r$. Portanto, $d|m$.

ii) Da hipótese e da Definição 2.5.1 temos que existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $n = d \cdot k \; e \; m = d \cdot l$, donde $n + m = d(k + l) \; e \; n \cdot c = d(k \cdot c), \forall c \in \mathbb{N}$. Isto demonstra a afirmação.

iii) Como $(ad)|(an)$, então $a \cdot n = (a \cdot d)k$ para algum k natural. Por hipótese, $a \neq 0$. Logo, por propriedade da multiplicação, se obtém $n = d \cdot k$, o que mostra que $d|n$.

iv) Por hipótese, $d|n$ e $d|m$. Por (ii), usando a propriedade do produto obtemos que $d|a \cdot n \; e \; d|b \cdot m$ e usando novamente (ii), concluímos que $d|(a \cdot n + b \cdot m)$.

■

Proposição 3.5.3 Se $d \; e \; n$ são números naturais tais que $d|n$ e $n \neq 0$ então $d \leq n$.

Demonstração: Por hipótese, $d|n$. Então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = q \cdot d$. Como $n \neq 0$ devemos ter $q \geq 1$ e por propriedade da relação de ordem obtemos que:

$$n = q \cdot d \geq d \Rightarrow n \geq d \Rightarrow d \leq n.$$

■

Observação:

(I) Em particular, se na proposição acima consideramos $n = 1$, segue que $d \leq 1$ e, portanto, $d = 1$.

(II) A recíproca da proposição anterior não é válida, pois, por exemplo, temos que $4 \leq 5$, mas 4 não divide 5.

Notação: Para um número natural a, denotaremos por $D(a)$ o conjunto dos divisores de a e por $M(a)$ conjunto dos múltiplos de a. Por exemplo, para $a = 24$ temos:

$$D(24) = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$$

$$M(24) = \{0,24,48,72 \ldots\}$$

Durante o ensino de números devemos ter como finalidade o desenvolvimento do pensamento numérico, o que, além de desenvolver conhecimentos sobre os números e suas relações, envolve a compreensão das operações e seus resultados, reconhecendo o significado ao operar com números para obter outros. O jogo possibilita desenvolver todo esse conhecimento nos alunos, levando a adquirir as habilidades descritas a seguir:

- Explorar as ideias da multiplicação e da divisão de modo intuitivo.
- Construir fatos básicos da multiplicação e divisão e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.
- Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.
- Resolver e elaborar situações-problema com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Para discorrer sobre os critérios de divisibilidade é preciso tocar em outros dois assuntos muito importantes para a compreensão desses critérios com mais clareza, falaremos sobre congruência modular e sobre o sistema de numeração decimal.

3.6 Congruência

Faremos agora a definição da Divisão Euclidiana, com seu Teorema e proposições, que não é o foco do nosso trabalho, mas que se faz necessária para o entendimento do que virá a seguir.

DIVISÃO EUCLIDIANA

Teorema 3.6.1 (Teorema da Divisão Euclidiana): Sejam d e n dois números naturais com $0 < d < n$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que

$$n = d \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < d.$$

Demonstração: Suponha que $n > d$ e considere, enquanto fizer sentido, os números:

$$n, n - d, n - 2d, \dots, n - xd, \dots$$

Pelo Princípio da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = n - q \cdot d$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < d$.

Se $d|n$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar.

Se, por outro lado, d não divide n então $r \neq d$ e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > d$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + d$.

Consequentemente, sendo $r = c + d = n - q \cdot d$, teríamos $c = n - (q+1) \cdot d \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de ser r o menor elemento de S.

Portanto, temos que $n = d \cdot q + r$ com $r < d$, o que prova a existência de q e r.

Agora, vamos provar a unicidade.

Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de d, é pelo menos d . Logo, se $r = n - d \cdot q$ e $r' = n - d \cdot q'$, com $r < r' < d$, teríamos $r' - r \geq d$, o que acarretaria $r \geq r' + d \geq d$, absurdo. Portanto, $r = r'$.

Daí segue-se que $n - d \cdot q = n - d \cdot q'$, o que implica que $d \cdot q = d \cdot q'$ e, portanto $q = q'$.

■

Nas condições do teorema anterior, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Observe que o resto da divisão de b por a é zero se, e somente se, a divide b.

Definição 3.6.1 Seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os naturais a e b e são congruentes módulo m, denotamos por:

$$a \equiv b \mod m.$$

Exemplo 3.6.1 $26 \equiv 11 \mod 3$, já que os restos da divisão de 26 e de 11 por 3 são iguais a 2.

Observação: *Como o resto da divisão de qualquer número natural por 1 é sempre zero, temos que* $a \equiv b \mod 1$, *quaisquer que sejam* $a, b \in \mathbb{N}$. *Isto torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, consideraremos sempre* $m > 1$.

Da definição de congruência decorre que fixado $m \in \mathbb{N}$, temos uma relação de equivalência que será explicitada a seguir.

Proposição 3.6.1 Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem –se que:

(i) $a \equiv a \; mod \; m,$

(ii) se $a \equiv b \; mod \; m$, então $b \equiv a \; mod \; m,$

(iii) se $a \equiv b \; mod \; m$ e $b \equiv c \; mod \; m,$ então $a \equiv c \; mod \; m.$

Demonstração:

(i) De fato, a definição da divisão euclidiana garante a unicidade do resto da divisão de a por m.

(ii) Como $a \equiv b \; mod \; m$ então, por definição, $a = q \cdot m + r$ e $b = q' \cdot m + r$, ou seja, as divisões de a e b por m deixam o mesmo resto r. Logo $b \equiv a \; mod \; m$.

(iii) De fato, como $a \equiv b \; mod \; m$ então, por argumento análogo ao utilizado acima, temos $a = q \cdot m + r$ e $b = q' \cdot m + r$. Também $b \equiv c \; mod \; m$ por hipótese, assim, e $b = q' \cdot m + r$ e $c = q'' \cdot m + r$.

Como vemos, mais uma vez temos o mesmo resto r nas divisões de $a, b \; e \; c$ por m. Logo $a \equiv c \; mod \; m$.

■

Para fazer a verificação se dois números naturais são congruentes módulo $m,$ não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para posteriormente comparar os seus restos, basta apenas aplicar o seguinte resultado:

Proposição 3.6.2 Suponha que $a, b \in \mathbb{N}$ são tais que $b \geq a$. Tem-se que $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, $m | b - a$.

Demonstração: Sejam $a = m \cdot q + r,$ com $0 \leq r < m$ e $b = m \cdot q' + r',$ com $0 \leq r' < m,$ as divisões euclidianas de $a \; e \; b \; por \; m$, respectivamente. Assim,

$$b - a = \begin{cases} m(q' - q) + (r' - r), se \; r' \geq r \\ m(q' - q) - (r' - r), se \; r \geq r' \end{cases}$$

onde $r' - r < m$ ou $r - r' < m$. Como $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, $r = r'$, então $b - a = m \cdot (q' - q)$ o que é equivalente a dizer que $m | b - a$.

■

Quando a relação $a \equiv b \; mod \; m$ não for verdadeira, diremos que a e b não são congruentes, ou incongruentes, módulo m. . Escreveremos, neste caso,

$$a \not\equiv b \quad mod \; m.$$

Proposição 3.6.3 Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Se $a \equiv b \ mod\, m$ e $c \equiv d \ mod\, m$, então:

(i) $a + c \equiv b + d \ mod\, m$.

(ii) $a \cdot c \equiv b \cdot d \ mod\, m$

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \ mod\, m$ e $c \equiv d \ mod\, m$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $b \geq a$ e $d \geq c$. Logo, temos que $m|b - a \ e \ m|d - c$.

(i) Basta observar que $m|(b-a) + (d-c)$ e, portanto $m\,|(b+d) - (a+c)$, o que prova a parte (i).

(ii) Temos que $b \cdot d - a \cdot c = d(b-a) + a(d-c)$.

Como $m|(b-a)$, segue que $m|d(b-a)$. Analogamente, obtemos que $m|a(d-c)$. Logo, m divide $d(b-a) + a(d-c)$, ou seja, m divide $b.d - a.c$, o que prova a parte (ii).

Observação: a propriedade explicitada no item (ii) da proposição anterior pode ser generalizada, por indução, para r congruências: se $a_1 \equiv b_1 \ mod\, m$, $a_2 \equiv b_2 \ mod\, m$, $\cdots$, $a_r \equiv b_r \ mod\, m$, então $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_r \equiv b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_r \ mod\, m$. Em particular, se $a_1 = a_2 = \cdots = a_r$ e $b_1 = b_2 = \cdots = b_r$, então $a^r \equiv b^r \ mod\, m$.

3.7 Sistema de numeração decimal

O sistema decimal utiliza dez símbolos que são os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ e \ 9$ também chamados dígitos (do latim dedos) ou caracteres. Chama-se *base* de um sistema numérico ao número de dígitos que o sistema utiliza. Assim, o sistema numérico decimal tem a base 10. Ele também é posicional, pois na escrita de um número, cada algarismo usado, além do seu valor absoluto, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse valor relativo, sempre uma potência de dez, varia do seguinte modo: o algarismo da extrema direita tem peso um (10^0); o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez (10^1); o seguinte tem peso cem (10^2); o seguinte tem peso mil (10^3); etc.

Por exemplo, o número 2021, na base 10, é a representação de:

$$2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0.$$

O sistema de numeração decimal é baseado no seguinte teorema:

Teorema 3.7.1 Dados, $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_{1,\cdots}, c_n$ menores do que b**,** univocamente determinados, tais que

$$a = c_0 + c_1 \cdot b + c_2 \cdot b^2 + \cdots + c_n \cdot b^n.$$

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a. Se $a = 0$ ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a.

Pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana, existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tais que

$$a = b \cdot q + r, com\, r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_1, d_{2,}, d_3 \cdots d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo $j = 1, \cdots, n$, tais que

$$q = d_0 + d_1 \cdot b + d_2 \cdot b^2 + \cdots + d_{n'} \cdot b^{n'}.$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = b \cdot q + r = b(d_0 + d_1 \cdot b + d_2 \cdot b^2 + \cdots + d_{n'} \cdot b^{n'}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r, n = n' + 1\; e\; c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \cdots, n$.

A unicidade segue facilmente das unicidades acima estabelecidas.

■

A expressão dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b. Quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal, é ela que nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativa à base b.

Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$a = b \cdot q_0 + r_0, com\, r_0 < b.$$
$$q_0 = b \cdot q_1 + r_1, com\, r_1 < b.$$
$$q_1 = b \cdot q_2 + r_2, com\, r_2 < b.$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 \cdots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto,

$$q_{n-1} = b \cdot q_n + r_n,\; com\, r_n < b.$$

decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$ e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$. Concluindo que:

$$a = r_0 + r_1 \cdot b + \cdots + r_n \cdot b^n.$$

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos.

$$S = \{ s_0, s_1, \cdots s_{b-1}\},$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b - 1$. Um número natural a na base b se escreve da forma

$$x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1 x_{0,}$$

com $x_0, \cdots, x_n \in S, e\ n$ variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 \cdot b + \cdots + x_n \cdot b_n.$$

No sistema decimal, isto é, de base $b = 10$, usa-se

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Podemos então escrever o número 15704 da seguinte maneira

$$15704 = 4 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4$$

Visto o sistema de numeração decimal iniciaremos agora os critérios de divisibilidade. Observamos que um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples do que a própria divisão, ou seja, se a divisão for simples, é melhor efetuá-la. É por isso que nunca lembramos os critérios de divisibilidade por 7 e 13, enquanto dificilmente esquecemos os critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 com os quais convivemos durante a vida escolar.

Os critérios de divisibilidade, no sistema de numeração decimal, são os critérios que estabelecem em que condições o número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_0 + 10 \cdot a_1 + +100 \cdot a_2 + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^n \cdot a_n$ é um múltiplo inteiro de 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. em termos dos algarismos $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Para todos os critérios de divisibilidade contemplados no decorrer desse trabalho, consideraremos, sempre, que um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ pertencente ao sistema de numeração decimal, ou seja, N estará sempre escrito na base 10.

3.8 Critérios de divisibilidade

Para otimizar o tempo de cálculo durante o jogo, o critério de divisibilidade é uma ferramenta muito importante. Essa seção tratará de descrever as demonstrações dos critérios de divisibilidade mais utilizados pelos estudantes durantes as aulas em que foram desenvolvidas a metodologia do jogo matemático, são eles 2, 3, 4, 5, 6, 9 e 10.

Nos critérios apresentados abaixo, consideraremos sempre um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, com $N \neq 0$.

3.8.1 Critério de divisibilidade por 2

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 2 quando $a_0 = 0, 2, 4, 6 \; ou \; 8$, ou seja, N é divisível por 2 quando seu algarismo da unidade é 0, 2, 4, 6 ou 8.

De fato, dado um número $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, sua expansão decimal é dada por $N = a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^n \cdot a_n$.

Temos

$$10 \equiv 0 \; mod \; 2 \Rightarrow 10^i \equiv 0 \; mod \; 2 \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv 0 \; mod \; 2; i > 1.$$

Assim, temos que $N \equiv a_0 \; mod \; 2$.

Logo, N é divisível por 2 se, e somente se, a_0 é divisível por 2.

3.8.2 Critério de divisibilidade por 3

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 3 se a soma dos dígitos $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ é divisível por 3, ou seja, N é divisível por 3 se a soma de seus algarismos é divisível por 3.

De fato, temos

$$10 \equiv 1 \; mod \; 3 \Rightarrow 10^i \equiv 1 \; mod \; 3 \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv a_i \; mod \; 3; i \geq 1$$

Assim, se $N = a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^n \cdot a_n$, então:

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \; mod \; 3 .$$

Portanto, N é divisível por 3 se, e somente se, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ é divisível por 3.

3.8.3 Critério de divisibilidade por 4

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, com mais de dois algarismos, é divisível por 4 quando $a_1 a_0 = a_0 + 10 \cdot a_1$ é um múltiplo de 4, ou seja, N é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

De fato, temos

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^n \cdot a_n$$
$$= a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot (a_2 + \cdots + 10^{n-3} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_n)$$

Como $100 = 4 \cdot 25 \equiv 0 \; mod \; 4$, segue que

$$N = a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot (a_2 + \cdots + 10^{n-3} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_n)$$
$$\equiv a_0 + 10 \cdot a_1 + 0 \; mod \; 4.$$

Logo, $N \equiv a_0 + 10 \cdot a_1 + 0 \; mod \; 4$.

Portanto, N é divisível por 4 se, e somente se, $a_1 a_0$ é divisível por 4.

3.8.4 Critério de divisibilidade por 5

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 5 quando $a_0 = 0 \; ou \; 5$, ou seja, é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.

De fato, temos

$$10 \equiv 0 \; mod \; 5 \Rightarrow 10^i \equiv 0 \; mod \; 5 \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv 0 \; mod \; 5; i \geq 1$$

Assim, dado um número $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, temos que

$$N \equiv a_0 \; mod \; 5.$$

Logo, N é divisível por 5 se, e somente se, a_0 é divisível por 5, ou seja, $a_0 = 0 \; ou \; 5$.

3.8.5 Critério de divisibilidade por 6

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 6 quando $a_0 = 0, 2, 4, 6 \; ou \; 8$ e a soma dos dígitos $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ é divisível por 3, ou seja, N é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3.

De fato, se N for divisível por 6, então N também será divisível por 2 e por 3, pois 6 é divisível por 2 e 3 e vale a propriedade transitiva para a relação “divisor de”. Quanto à recíproca, se N for divisível por 2 e por 3, segue que N também será divisível por 6, uma vez que $6 = 2 \cdot 3$ e os números 2 e 3 são primos entre si*.

3.8.6 Critério de divisibilidade por 9

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 9 se a soma dos dígitos $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ é divisível por 9, ou seja, é divisível por 9 se a soma de seus algarismos é divisível por 9.

De fato,

$$10 \equiv 1 \; mod \; 9 \Rightarrow 10^i \equiv 1 \; mod \; 9 \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv a_i \; mod \; 9; i \geq 1$$

Isto mostra que, se $N = a_0 + 10 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + \cdots + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^n \cdot a_n$, então:

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \; mod \; 9 \, .$$

Portanto, N é divisível por 9 se, e somente se, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ é divisível por 9.

3.8.7 Critério de divisibilidade por 10

Um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 10 quando $a_0 = 0$, ou seja, N é divisível por 10 quando termina em 0.

De fato, temos

$$10 \equiv 0 \; mod \; 10 \Rightarrow 10^i \equiv 0 \; mod \; 10 \Rightarrow a_i \cdot 10^i \equiv 0 \; mod \; 10; i \geq 1$$

Assim, dado um número $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, temos que

$$N \equiv a_0 \; mod \; 10.$$

Logo, N é divisível por 10 se, e somente se, a_0 é divisível por 10 (ou seja, $a_0 = 0$).

Investigação de regularidades também está contemplada nas habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos nessa etapa de sua escolarização. A compreensão de divisibilidade será útil para que os estudantes possam resolver problemas diversos, sendo uma habilidade presente na BNCC que consiste em classificar números naturais em primos e compostos,

* Lembramos que dois números naturais são primos entre si se o único divisor comum de ambos é 1. O resultado utilizado aqui foi o seguinte: "se a e b são divisores de $c \neq 0$, e a e b são primos entre si, então $(a \cdot b) \mid c$" (DOMINGUES, 1991, Corolário 3 da seção 6 do Capítulo II, p.47).

estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3,4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

3.9 Números primos

Trataremos agora de um dos conceitos mais importantes de toda a matemática, mas que com o desenrolar do jogo o conceito se constrói naturalmente e o aluno percebe que existem alguns números especiais, e são eles os primos.

Definição 3.9.1 Um número natural maior do que 1 que só é divisível por 1 e por si próprio é chamado de **número primo**.

Exemplo 3.9.1 13 é primo, pois os únicos divisores positivos de 13 são 1 e 13. Já o número 8 não é primo, pois ele possui divisores diferentes de 1 e 8, como por exemplo, o número 2.

Definição 3.9.2 Quando um número natural maior do que 1 não é primo, ele é chamado de **composto**. Em outras palavras, podemos definir um número composto como produto de dois números, ambos diferentes de 1.

Exemplo 3.9.2 O número 12 é composto, pois $2 \cdot 6 = 12$. Ainda, como $2 \cdot 3 = 6$, temos $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Assim, vemos que o número 12 foi decomposto em fatores primos, esse resultado vale para qualquer número natural maior do que 1 e é o que garante o teorema 2.9.1:

Observação: dados dois números primos p e q, se $p \mid q$, então $p = q$. De fato, como $p \mid q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

Teorema 3.9.1 ***(Teorema Fundamental da Aritmética)*** Todo número natural n maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração: Usaremos a segunda forma do Princípio de Indução.

Se $n = 2$, o teorema é obviamente verificado.

Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor que n e provaremos que vale para n. Se n é primo nada temos a demonstrar. Suponhamos, então, que n seja composto.

Logo, existem números naturais $n_1\ e\ n_2$ tais que $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, p_2, \cdots, p_r\ e\ q_1, q_2, \cdots, q_s$ tais que $n_1 = p_1p_2 \cdots p_r\ e\ n_2 = q_1q_2 \cdots q_s$.

Portanto, $n = p_1p_2 \cdots p_r\, q_1q_2 \cdots q_s$

Vamos agora provar a unicidade da escrita.

Suponha que $n = p_1p_2 \cdots p_r = q_1q_2 \cdots q_s$, onde os p_i e os q_j são primos. Como $p|q_1q_2 \cdots q_s$, temos que $p_1 = p_j$ para algum $j = 1, .., s**$, que, após reordenamento de $q_1q_2 \cdots q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares.

■

Os números primos menores que 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Os números primos que aparecem no tabuleiro do jogo são os seguintes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Um método muito usado na sala de aula, por alunos e professores, para descobrir os números primos é o Crivo de Eratóstenes, esse é um método muito antigo que serve para se obter de modo sistemático números primos. O nome foi dado em homenagem ao matemático grego Eratóstenes. A palavra crivo significa peneira e o método consiste em peneirar os números naturais em um intervalo $[2, n]$, jogando fora os números que não são primos. O método é baseado na proposição a seguir.

** O resultado utilizado aqui foi o seguinte: "se $p, p_1, \cdots, p_r$ são números primos e se $p \mid p_1 \cdots p_r$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \cdots, r$" (HEFEZ, 2011, Corolário da Proposição 7.1.1, p.83).

Proposição 3.9.1 Se um número natural $a > 1$ é composto, então ele é múltiplo de algum número primo p tal que $p^2 \leq a$. Equivalentemente, é primo todo número a que não é múltiplo de nenhum número primo p tal que $p^2 \leq a$.

Demonstração: Se a é composto e p é o menor número primo do qual a é múltiplo, então $a = p \times b$, onde p e b são menores do que a.

De todo modo, sendo b primo ou composto, ele será múltiplo de um número primo q. Como a é múltiplo de b e b é múltiplo de q, pela proposição 2.5.2(i), temos que a é também múltiplo de q e sendo p o menor primo do qual a é múltiplo, temos $p \leq q$. Logo, $p^2 \leq p \times q \leq p \times b = a$.

■

Exemplo 3.9.3 (adaptado do Caderno do aluno – São Paulo Faz Escola – Volume 1 – página 26 e 27 – 2017)**:**

Agora você vai usar um método para descobrir todos os números primos existentes entre 1 e 100. Esse método foi inventado por um filósofo grego chamado Eratóstenes (século III a.C.), que foi o chefe da maior biblioteca da Antiguidade, localizada na cidade de Alexandria.

Etapas:

a) Preencha a Tabela 1 com os 100 primeiros números naturais a partir do 1, em ordem crescente, alinhando as dezenas por colunas.

b) Risque o número 1, pois ele não é primo.

c) Risque da tabela todos os múltiplos de 2, maiores que 2. Em seguida, os múltiplos de 3, maiores que 3. Como o 4 já estará riscado, risque em seguida os múltiplos de 5 maiores que 5. E assim por diante, até completar a tabela.

d) Anote na Tabela 2 os números que ficaram sem riscar. Eles são os 25 números primos menores que 100.

Figura 3 – Tabela para enumerar e utilizar como Crivo de Eratóstenes.

Imagens: Caderno do aluno – vol 1 – 6º ano - 2017

Figura 4 – Tabela para registrar os 25 números primos menores que 100.

Imagens: Caderno do aluno – vol 1 – 6º ano - 2017

É essencial que justifiquemos os procedimentos utilizados na solução de problemas e analisemos as relações observadas para que os estudantes tenham consciência de suas aprendizagens. Assim eles se apropriarão de uma habilidade essencial, que é a de resolver e elaborar situações-problema que envolva as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.

No Capítulo 3 daremos ênfase em uma sequência didática para a utilização do jogo na sala de aula, já dito antes, como mais uma estratégia para o ensino dos objetos de conhecimentos matemáticos.

4. ORGANIZANDO O TRABALHO NA SALA DE AULA

Introduzir o uso de jogos como metodologia no ensino de matemática “é a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la”. (BORIN, 2002, p. 9).

Neste capítulo abordaremos uma proposta de uso do jogo “Brincando com múltiplos e divisores” em sala de aula como recurso didático para o ensino dos objetos de conhecimentos matemáticos com o objetivo de propiciar situações motivadoras, desafiadoras e interessantes de ensino, nas quais os alunos devem interagir com o objeto de estudo e, acima de tudo, construir significativamente o conhecimento e chegar às abstrações mais complexas.

Segundo Brito (2001, p. 43), “O objetivo dos professores de matemática deverá ser o de ajudar as pessoas a entender a matemática e encorajá-las a acreditar que é natural e agradável continuar a usar e aprender matemática como uma parte sensível, natural e agradável [...]”.

Mas devemos tomar muito cuidado para que o jogo tenha um propósito matemático de ajudar enquanto ferramenta de obtenção de habilidades dessa área de conhecimento, fazendo com que ele favoreça a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de competências e habilidades, como afirma Smole:

> O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE, 2007, p. 9)

Detalharemos as ações a serem aplicadas com o intuito de facilitar e auxiliar o professor durante a execução dessas ações, fazendo com que ele tenha um apoio nas tarefas de planejamento de mediação do jogo como recurso didático, bem como no desenvolvimento da ludicidade inerente ao jogo, além de todo o seu potencial educativo. Para isso, será preciso o planejamento de uma sequência didática efetiva para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

> Queremos salientar que a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. (BORIN, 2002, p. 8).

Durante a execução do jogo, surge uma série de situações-problema que, com o apoio da metodologia de resolução de problemas na qual Polya (1986) diz que, para se resolver um problema, devemos passar por quatro etapas, que são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Ou seja, primeiro precisamos compreender o problema para, depois, encontrar conexões entre os dados, pensar em um plano de como resolvê-lo, considerando se em algum momento já se deparou com um problema correlato, para depois executá-lo e finalmente validar a resposta obtida. Propiciando assim uma estratégia para que se adquira um conhecimento mais efetivo e concreto a respeito das habilidades e competências contidas no Currículo Paulista e na BNCC.

Inicialmente deve-se apresentar aos estudantes todos os materiais do jogo: tabuleiro, dados, tabelas e regras. Esse último deve ser o primeiro a ser desenvolvido: precisa ficar muito claro o que pode e o que não pode ser feito durante o jogo – várias perguntas costumam surgir neste momento. Uma dúvida muito comum que apareceu na maioria das vezes em que o jogo é aplicado foi: “se meu oponente marcar um número errado, que não é nem múltiplo e nem divisor, e eu não notar, o que acontece?”. Nesse caso, o professor deve acordar com a classe quais as providências devem ser tomadas, uma vez que isso não fica explícito na regra.

Após a apresentação do jogo, por onde começar? O professor deve ensinar os conceitos matemáticos presentes no jogo ou deixar os alunos jogarem sem um pré-conhecimento desses conceitos?

Se o jogo é para estimular a curiosidade e despertar no aluno o interesse pelo conhecimento, ele deve ser introduzido como um jogo comum, apenas como mais um jogo de tabuleiro, fazendo com que o aluno perceba as regularidades existentes nele e a necessidade de estudar o porquê das jogadas. Segundo Borin: “[...] o intuito era utilizar os jogos como se fossem problemas a serem resolvidos e, à medida que fossem jogando, eles perceberiam a Matemática que estava presente nesse processo” (BORIN, 2002, p. 3).

Mas pode-se usar o jogo para a fixação do objeto de conhecimento que já foi estudado, como dito anteriormente nesse trabalho.

Trataremos aqui de apresentar uma proposta mais interessante e prazerosa que a de usar o jogo para fixação do objeto de conhecimento, uma proposta que faça despertar, simultaneamente, o interesse e o raciocínio dos alunos nas aulas de matemática.

4.1 Planejando as atividades

O planejamento das aulas é uma atividade inerente ao trabalho do professor, o qual exige um trabalho de reflexão sobre o ensino e aprendizagem. Esse planejamento é imprescindível, afinal, quando os professores escolhem apenas as atividades que acham propícias para aquele momento específico, acabam se perdendo em relação aos objetivos da aula na qual se propõem a usá-las.

Segundo Vasconcellos (2000), do ponto de vista educacional, o planejamento é um ato político-pedagógico porque revela intenções. Para ele:

> Planejar é elaborar o plano de intervenção na realidade, aliando às exigências de intencionalidade de colocação em ação, é um processo mental, de reflexão, de decisão, por sua vez, não uma reflexão qualquer, mas grávida de intenções na realidade (VASCONCELLOS, 200, p. 43).

Complementando esse pensamento, Araújo (2008) diz que:

> Ela [a aula] é feita de prévias e planejadas escolhas de caminhos, que são diversos do ponto de vista dos métodos e técnicas de ensino; [...] também se constrói, em sua operacionalização, por percalços, que implicam correções de rota na ordem didática, bem como mudanças de rumo; [...] está sujeita a improvisos, porque não foram previstos, mas não pode constituir-se por improvisações. (ARAÚJO, 2008, p. 60-62).

Assim, iniciaremos a discussão sobre o trabalho em sala de aula com a apresentação de uma sequência didática, ou melhor, de um modelo de uma sequência, pois cada professor deverá adequá-la ou mesmo refazê-la para atender aos seus propósitos e à necessidade de cada turma.

A sequência didática

- Área do conhecimento:

Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

- Disciplina:

Matemática

- N.º de aulas:

10 tempos

- Objetos do conhecimento:

Múltiplos e divisores de números naturais; Divisibilidade; Números primos e compostos e Critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5 e 6.

- Justificativa:

O conteúdo abordado traz para o aluno uma linguagem de representação dos números conhecida, porém explorada de maneira pouco significativa. Trabalhando as habilidades num formato diferente, procuramos consolidar e ampliar o conhecimento dos alunos sobre divisores e múltiplos de números naturais, considerando as dificuldades encontradas por eles na realização dessa operação básica e necessária à resolução de inúmeras situações do cotidiano. Além disso, tal conhecimento é base para conhecimentos mais complexos e é usado como ferramenta na Matemática e em outras ciências. Como um conhecimento matemático básico, a aprendizagem vai possibilitar ao aluno desenvolver habilidades e competências para que seja capaz de aplicar tal conhecimento em atividades futuras, estruturando o pensamento e o raciocínio dedutivo.

- Competências:

Compreender a Matemática como ciência autônoma que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo;

Solucionar situações-problema por meio da identificação de informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-las;

Compreender o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico, utilizando esses conhecimentos para o exercício da cidadania.

- Habilidades:

Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora;

Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000;

Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.

- Objetivos:

Desenvolver o raciocínio lógico; compreender o conceito de múltiplos e divisores; resolver situações-problema a partir do conhecimento dessas habilidades descritas.

- Público-alvo:

Alunos de 6º ano do Ensino Fundamental, na faixa etária de 10 a 13 anos.

- Recursos:

Avaliação diagnóstica inicial;
Jogo “Brincando com múltiplos e divisores”;
Tabela para registro;
Problemas propostos a partir do jogo;
Avaliação diagnóstica final.

4.2 As atividades

Atividade 1: Avaliação diagnóstica inicial
(tempo: 1 aula)

A primeira premissa que devemos ter em mente é que tudo necessita de um registro. Precisamos saber qual é o grau de conhecimento das habilidades por parte do aluno, em termos de conhecimento matemático, e onde ele chegará depois de passar por todas as etapas do aprendizado através do jogo. Daí a necessidade de uma avaliação diagnóstica inicial, contendo o objeto de conhecimento que queremos que seja adquirido.

Figura 5 – Modelo de avaliação diagnóstica inicial.

Avaliação diagnostica de matemática – 6° ano	
Nome:	**N.:**
Habilidades:	Questões
(EF06MA06) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.	01 02 03
(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3,4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.	04

Questão 01 (Questão 2 da AAP do 6° ano, 2ª edição, 2012).

Marcos comprou 6 caixas de bombons por 84 reais na loja "Docinho". Quanto ele pagaria se tivesse comprado 9 caixas desse mesmo bombom?

Questão 02 (Questão 4 da AAP do 6° ano, 2ª edição, 2012).

No mercado havia a seguinte oferta: "Leve 3 caixas de chocolate e pague R$ 15,00". Helena levou 12 caixas desse chocolate, quanto ela pagou?

Questão 03 (Adaptado da Questão 4 da AAP do 6° ano, 5ª edição, 2013).

Os médicos afirmam que para manter a boa saúde uma pessoa deve beber, em média, 6 litros de água em 4 dias. Seguindo essas orientações, o consumo médio de água que uma pessoa deve consumir em 24 dias deverá ser de quantos litros?

Questão 04 (Adaptada da Questão 2 da AAP do 6º ano, 7ª edição, 2014).

O Crivo de Eratóstenes trata-se de um método destinado a identificar os números que não são compostos por outros, ou seja, os primos. Esse método foi inventado pelo filósofo grego chamado Eratóstenes (século III a.C.), que foi o chefe da maior biblioteca da Antiguidade, localizada na cidade de Alexandria.
Com base no Crivo abaixo, quantos números primos existem entre 20 e 40?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: avaliação desenvolvida pela autora, questões retiradas de AAP

Os problemas propostos foram retirados das Avaliações da Aprendizagem em Processo do Estado de São Paulo, 6º ano, 2ª edição (2012), 5ª edição (2013) e 7ª edição (2014), com o objetivo de avaliar a compreensão dos diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade) e o desenvolvimento do conceito de números primos.

As seguintes questões compuseram a avaliação diagnóstica inicial:

QUESTÃO 1: Marcos comprou 6 caixas de bombons por 84 reais na loja “Docinho”. Quanto que ele pagaria se tivesse comprado 9 caixas desse mesmo bombom?

QUESTÃO 2: No mercado havia a seguinte oferta: “Leve 3 caixas de chocolate e pague R$ 15,00”. Helena levou 12 caixas desse chocolate, quanto ela pagou?

QUESTÃO 3: Os médicos afirmam que, para manter a boa saúde, uma pessoa deve beber, em média, 6 litros de água em 4 dias. Seguindo essas orientações, o consumo médio de água que uma pessoa deve consumir em 24 dias deverá ser de quantos litros?

QUESTÃO 4: O Crivo de Eratóstenes é um método destinado a identificar os números que não são compostos por outros, ou seja, os primos. Esse método foi inventado pelo filósofo grego chamado Eratóstenes (século III a.C.), que foi o chefe da maior biblioteca da Antiguidade, localizada na cidade de Alexandria.

Com base no Crivo abaixo, quantos números primos existem entre 20 e 40?

Ao realizar essa atividade com os alunos, é preciso analisar todas as respostas, principalmente aquelas que não contêm uma solução correta ou convencional, sem ofender ou constranger os alunos. Segundo Souza (apud Davis e Espósito, 1991), que pesquisou sobre os erros cometidos pelos alunos em atividades de Matemática, separam-se os erros em duas categorias: construtivos e não construtivos. Construtivos são os que se caracterizam como processos de mudança, sendo possível identificar a passagem de uma para outra etapa de desenvolvimento. Os chamados não construtivos, por sua vez, diferenciam-se dos demais por estarem relacionados com a construção do conhecimento, pois indicam que o aluno já possui a estrutura do pensamento necessária à solução da tarefa e já compreendeu e sabe como chegar à resposta correta, mas erra por distração ou por falta de fixação de algum procedimento.

No caso do erro construtivo, “o aluno evitou esforços e errou porque não conseguiu entender o problema ou, na ânsia de acertar criou uma regra própria ou uma generalidade, revelando que construiu hipóteses” (Souza, 1991). Já no erro não construtivo, na maior parte das vezes, o aluno compreende o conteúdo, sabe o que está fazendo, mas, por alguma distração, comete algum erro de cálculo. Para essa distinção ocorrer, faz-se necessária uma análise profunda do erro, questionando o aluno sobre os passos que seguiu e sobre como chegou àquele resultado. É importante que eles estejam conscientes sobre aquilo com que estão trabalhando e saibam justificar os resultados obtidos.

Depois da realização da avaliação, o professor deve corrigi-la, mas ainda não deve compartilhar essa correção com os alunos, o que deverá ser feito somente no final do ciclo de atividades, quando uma avaliação similar será usada como avaliação diagnóstica final. Só assim conseguirá saber se a estratégia de ensino da matemática através do jogo atingiu seu objetivo, que é o de ensinar de maneira eficaz e prazerosa, de modo a construir um conhecimento efetivo e leve.

Atividade 2: A tabela de registros das jogadas

(tempo: 2 aulas)

Uma parte fundamental do jogo é o registro das jogadas, e um posterior estudo desse registro pelos alunos é fundamental para o desenvolvimento da competência que se pretende trabalhar. Precisamos ficar atentos aos alunos no momento do registro para verificar se há uma alternância entre os alunos da dupla, se há colaboração entre eles e, principalmente, se os cálculos efetuados estão corretos.

Para iniciar esta atividade, é preciso instruir o aluno sobre como se deve fazer tal registo, para isso usaremos a tabela a seguir.

Figura 6 – Tabela de registros das jogadas.

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								
5ª								
6ª								
7ª								
8ª								
9ª								

Fonte: https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos/4-cejta/jogos---regras/

A primeira rodada será composta pelas duas primeiras linhas da tabela, onde se lê 1ª. A primeira equipe a jogar é a de cor vermelha, a qual deverá jogar o dado, verificar a face que cairá voltada para cima e anotar o número correspondente na coluna “número do dado” para, em seguida, escolher um número do tabuleiro que for múltiplo do número retirado no dado, conforme o que convier para a equipe, anotando-o na coluna “múltiplo escolhido”, como ilustra o exemplo abaixo:

Figura 7 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros.

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª	3	39						

Fonte: Elaborado pela autora.

Na sequência, a outra equipe marcará, com seus marcadores, no tabuleiro, os múltiplos e divisores do número escolhido pela equipe oponente e os anotará nas respectivas colunas “divisores marcados” e “múltiplos marcados”, desta forma:

Figura 8 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros.

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª	3	39					3,13	-----

Fonte: Elaborado pela autora.

Continuando a primeira rodada, que ainda não foi finalizada, a equipe verde deverá jogar o dado e escolher um múltiplo do número sorteado no dado.

Figura 9 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros.

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª	3	39					3,13	-----
					2	48		

Fonte: Elaborado pela autora.

E finalmente, para encerrar a primeira rodada, a equipe vermelha deverá marcar, com seus marcadores, no tabuleiro, os múltiplos e divisores do número escolhido pela equipe oponente e anotá-los nas respectivas colunas "divisores marcados" e "múltiplos marcados".

Figura 10 – Exemplo de preenchimento da tabela de registros.

Rodada	Equipe Vermelha				Equipe Verde			
	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados	Número dado	Múltiplo escolhido	Divisores marcados	Múltiplos marcados
1ª	3	39					3,13	-----
			2,4,6,8, 12,16,24	-----	2	48		

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim será finalizada a primeira rodada. O professor poderá orientar os alunos a calcular previamente quantos pontos fizeram por rodada. No exemplo acima, a equipe vermelha marcou 111 pontos, pois fez 39 pontos com o múltiplo escolhido e 72 dos divisores marcados. Já a equipe verde obteve 64 pontos, 16 dos divisores marcados e 48 do múltiplo escolhido.

E é dessa forma que deverá ser feito o registro até o final da partida.

Atividade 3: A hora do jogo

(tempo: 6 aulas)

O professor deverá neste momento, discutir as regras do jogo garantindo que se esclareçam todas as dúvidas – essa construção deverá ser feita de maneira coletiva. Acordos deverão ser feitos para que se tenha respeito tanto pelas regras quanto uns pelos outros.

Uma dinâmica a se fazer depois de esclarecidas as regras e dúvidas, será a de conhecer o jogo em si e saber como jogá-lo, para isso o professor poderá desenhar o tabuleiro na lousa ou projetá-lo, o importante é que todos o visualizem. Dividir a sala em duas equipes e, nesse momento, o professor será o mediador da partida. O jogo, então, iniciará: cada equipe escolherá um representante para tirar par ou ímpar para ver qual será a equipe a começar (equipe vermelha). Isso feito, a equipe vermelha jogará o dado e escolherá um múltiplo do número tirado para marcar com sua peça, e a partida se desenrolará. E é aqui que o professor terá um papel fundamental, que é o de questionar. Fazer as perguntas certas no momento certo é fundamental para fazer o aluno pensar e chegar a uma conclusão de melhores jogadas, o que é um papel bem difícil, pois não se deve dar resposta, e sim questionar para que o aluno chegue por si próprio a uma conclusão eficaz para o problema. "Essa problematização no ato do jogo favorece sua percepção das aprendizagens, das dúvidas, das confusões, do envolvimento dos alunos na própria ação de jogar" (SMOLE, 2007, p. 20). É possível prever algumas jogadas e planejar alguns questionamentos que poderão ser feitos na problematização do jogo. Sugerimos algumas questões:

– Qual é o melhor número para sair no dado?

– O número que a equipe marcou foi uma boa escolha?

– Quais números vocês consideram que sejam bons para a escolha? E por quê?

– Quais números não conseguirão escolher, se o número que sair no dado for diferente de um?

- O que acontece com a equipe que marcar o número 2?

Depois de feitos todos os questionamentos e sanadas as dúvidas, estaremos preparados para iniciar o jogo, a brincadeira, em si. Tudo tem de ser planejado com muito cuidado para que a situação favoreça a aprendizagem e para que não ocorram contratempos, como: falta de material ou ainda a exclusão de algum aluno. Aconselhamos ao professor definir previamente os pares que jogarão juntos, sempre colocando alunos que têm conhecimentos bem diferentes juntos, sempre pensando na diversidade.

Um exemplo: o aluno A e o aluno C já dominam as habilidades que foram verificadas na avaliação diagnóstica inicial, então esses dois alunos não deverão formar uma dupla um com o outro. É importante lembrar que, nesse momento, não estamos pensando em disputa, e sim em cooperação, por isso o aluno A ou o Aluno C deverá fazer dupla com o Aluno B, que é aquele que ainda não se apropriou das habilidades que foram descritas na avaliação e que serão assimiladas durante todo o trajeto das aulas por meio do aprendizado adquirido através do jogo.

Outro problema ocorre quando faltam ou sobram alunos, ou seja, em turmas de número não múltiplo de quatro, pois cada mesa de jogo deverá conter duas duplas. Nesse caso, uma alternativa muito interessante é a de usar um aluno como fiscal da partida.

Por exemplo: uma turma contém vinte e dois alunos, com eles conseguiremos fazer onze duplas, mas apenas cinco mesas de jogo, assim uma dupla ficará de fora. Essa dupla pode auxiliar o professor a fiscalizar se as regras estão sendo aplicadas corretamente e, assim, praticar o jogo mesmo não jogando. Quando todas as duplas terminarem o jogo, sugere-se fazer um revezamento de duplas que trabalharão de fiscais, assim todos aprenderão com essa experiência. Mas essa é apenas uma ideia para solucionar um problema, muitos outros surgirão e, para isto, o professor tem de se preparar, para não ser surpreendido.

O local onde o jogo será trabalhado deverá estar previamente arrumado, de modo a assegurar um clima de uma aula prazerosa e legal, onde a liberdade para os alunos expressarem seus pensamentos e sentimentos seja parte do jogo. Além disso, as mesas já deverão estar arrumadas com o tabuleiro e todo o material necessário para o jogo, e as cadeiras, colocadas em pontos estratégicos para que as duplas consigam trabalhar de uma forma eficaz e ter fácil acesso a tudo de que precisarão naquele momento.

É primordial que o professor acompanhe os alunos jogando para intervenções pontuais e questionamentos oportunos que favoreçam a aprendizagem, conforme a perspectiva da resolução de problemas.

Atividade 4: Analisando os números do tabuleiro

(tempo: 2 aulas)

Trabalhando com cada número do tabuleiro, fazendo uma análise dos múltiplos e divisores de cada um dos números presentes no jogo e, também, da necessidade de saber qual número deverá sair no dado para que o número analisado possa ser escolhido. Para tal atividade, que deverá ser desenvolvida na sala em duplas, é necessária uma tabela para registro das conclusões descobertas pela dupla.

Figura 11 – Tabela para análise dos números do tabuleiro.

Número no tabuleiro	Dado	Múltiplos	Divisores	Número no tabuleiro	Dado	Múltiplos	Divisores
2				27			
3				28			
4				29			
5				30			
6				31			
7				32			
8				33			
9				34			
10				35			
11				36			
12				37			
13				38			
14				39			
15				40			
16				41			
17				42			
18				43			
19				44			
20				45			
21				46			
22				47			
23				48			
24				49			
25				50			
26							

Fonte: Elaborado pela autora.

O professor deverá instruir os alunos fazendo-os pensar, utilizando, para isso, a metodologia de resolução de problemas, ou seja, questionando o aluno. Deverá perguntar à turma quais números deveriam sair no dado para que pudessem marcar o número dois, o número três e assim por diante. Caberá ao docente instigar, indagar e, depois de todo esse processo, observar se a maioria deles conseguiu encontrar a solução e a quais conclusões chegaram, bem como diagnosticar qual aluno que não conseguiu entender o que foi proposto e tentar técnicas diferentes, como, por exemplo, usar divisões com feijões ou com as unidades do material dourado.

Vamos imaginar que um aluno esteja analisando o número quatorze, assim ele deverá separar quatorze feijões e primeiro fazer montinhos com um feijão; se não sobrar nenhum feijão, significa que o número um divide o quatorze, ou seja, quatorze é múltiplo de um. Como podemos verificar na imagem a seguir.

Figura 12 – Divisões com feijões.

Fonte: Elaborado pela autora.

Concluindo: se sair o número um no dado, será possível marcar o quatorze. Seguindo a mesma linha de raciocínio, o aluno deverá agora fazer montinhos com dois feijões; se não sobrar nenhum feijão, significa que o número dois divide o quatorze, ou seja, quatorze é múltiplo de dois, e ainda o professor pode questioná-lo nesse momento, perguntando-lhe quantos montinhos foram feitos e fazendo o aluno verificar se o número de montinhos, que no caso será sete, também é divisor de quatorze.

Agora observe:

Figura 13 – Divisões com feijões.

Fonte: Elaborado pela autora.

Seguindo o raciocínio, pediremos ao aluno para verificar se quatorze é múltiplo de três, e ele logo perceberá que, fazendo os montinhos com três feijões, sobrarão dois e que, portanto, quatorze não é múltiplo de três, ou seja, três não divide quatorze. Continuando nesse pensamento, o aluno verificará a regularidade e conseguirá finalizar a atividade até o número cinquenta, mas no seu pensamento estará bem construída a ideia de múltiplo e divisor.

Há inúmeras possibilidades de trabalho com material concreto que não serão relatadas neste trabalho, pois não é o nosso foco. O material concreto que focamos aqui é o próprio jogo.

Atividade 5: Problematização do jogo

(tempo: 2 aulas)

A respeito das possibilidades de exploração a serem feitas após o jogo, Smole sugere que sejam escolhidas "possíveis jogadas para os alunos analisarem, criadas perguntas que lhes permitam pensar em aspectos do jogo que podem ser aprofundados, simular situações nas quais analisem algumas jogadas possíveis [...]". (SMOLE, 2007, p. 20).

Ao trabalhar o jogo como recurso didático para o ensino das habilidades matemáticas, alcançaremos algo muito além dos objetivos iniciais do jogo, pois será explorado todo o seu potencial, promovendo a consolidação e o aprofundamento de aprendizagens por meio de problemas que desenvolverão o pensamento crítico daqueles que jogarem.

Agora veremos as propostas de problematização que podem ser trabalhadas a fim de sistematizar as aprendizagens adquiridas através do jogo, a partir de questões apoiadas no desenvolvimento teórico apresentado no Capítulo 2 deste trabalho.

Sugerimos que o professor coloque os alunos para trabalhar em duplas, como é feito no jogo, mas não precisam ser necessariamente as mesmas duplas do jogo, pois assim a socialização das aprendizagens se torna maior.

Figura 14 – Situação problema a partir do jogo.

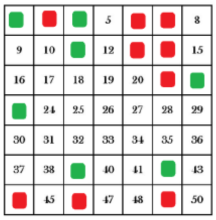
Situações problema a partir do jogo BRINCANDO COM MÚLTIPLOS E DIVISORES – 6º ano

Nome:	**N.:**

Questão 01

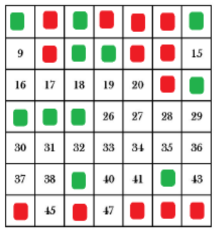
Imagine que sua equipe é a primeira a jogar e no lançamento do dado sai o número 1. Qual é a melhor escolha nesse caso, o número 47 ou o número 49? Por quê?

Questão 02



Imagine que você é o 2º jogador, peças verdes, e é a sua vez de jogar, você lança o dado e cai no número 3. Qual é a melhor escolha nesta situação?

Questão 03



Na situação ao lado, na sua vez de jogar, a dupla Dina e Mica tirou 2 no dado e escolheu o número 40 para sua dupla oponente marcar os múltiplos e divisores. Essa foi a melhor escolha que a dupla Dina e Mica poderiam fazer? Se não, qual a melhor escolha?

Questão 04

A dupla João e Maria está num impasse, João quer marcar o número 39, pois diz que é um bom número por ser um número primo e Maria diz que 39 não é primo. Quem está certo(a)?

Questão 05

Quando se lança o dado a dupla que está jogando torce para sair o número 1, enquanto que a dupla oponente espera que o número seja 4. Por que tirar o número 1 é melhor que tirar o número 4?

Fonte: Elaborado pela autora

A seguir, os enunciados dos problemas propostos:

Questão 01 - Imagine que sua equipe é a primeira a jogar e no lançamento do dado sai o número 1. Qual é a melhor escolha nesse caso, o número 47 ou o número 49? Por quê?

Questão 02 - Imagine que você é o 2º jogador, peças verdes, e é a sua vez de jogar. Você lança o dado e cai no número 3. Qual é a melhor escolha nessa situação?

Questão 03 - Na situação ao lado, na sua vez de jogar, a dupla Dina e Mica tirou 2 no dado e escolheu o número 40 para sua dupla oponente marcar os múltiplos e divisores. Essa foi a melhor escolha que Dina e Mica poderiam fazer? Se não, qual seria a melhor escolha?

Questão 04 - A dupla João e Maria está num impasse, João quer marcar o número 39, pois diz que é um bom número por ser um número primo, e Maria diz que 39 não é primo. Quem está certo(a)?

Questão 05 - Quando se lança o dado a dupla que está jogando torce para sair o número 1, enquanto que a dupla oponente espera que o número seja 4. Por que tirar o número 1 é melhor que tirar o número 4?

Após a aplicação da atividade, o professor deverá analisar cada resposta e fazer uma correção coletiva na lousa para que todos tenham a oportunidade de compartilhar ideias e soluções.

Atividade 6: Avaliação diagnóstica final

(tempo: 1 aula)

Pretendemos com essa atividade mensurar não o aluno, mas sim a eficiência do jogo para a compreensão da matemática, para que o professor se sinta seguro de que esse caminho é eficiente e adote com mais frequência esse recurso em suas aulas.

Segue, na Figura 9, a Avaliação diagnóstica final, que, como dito anteriormente, será para verificar as mesmas habilidades da Avaliação diagnóstica inicial.

Figura 15 – Modelo de avaliação diagnóstica final.

Avaliação diagnostica de matemática – 6º ano

Nome:	**N.:**
Habilidades:	Questões
(EF06MA06) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.	01 02 03
(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3,4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.	04

Questão 01

Ana Julia gosta muito de fazer brigadeiro, assim ela resolveu vendê-los para ajudar sua mãe com as despesas da casa. Ela vende 4 brigadeiros por 12 reais. Quanto ela deverá cobrar por 32 brigadeiros?

Questão 02

No mercado havia a seguinte oferta: "Leve 8 maças e pague R$ 9,00". Catarina resolveu fazer uma geleia de maça e segundo a receita, ela precisará de 48 maçãs, quanto ela pagará?

Questão 03

Para a organização de uma festa de aniversário foram convidadas duas famílias (Pereira e Silva). A família Pereira virá com 24 convidados e a família Silva terá 60 convidados. A pessoa que for arrumar as mesas para os convidados precisa seguir as seguintes instruções:

- Não colocar Pereiras e Silvas juntos, ou seja, se em uma mesa tiver um Pereira , todos os outro lugares da mesa deverão ser ocupados por pessoal da família Pereira, e o mesmo acontece para a família Silva.
- Todas as mesas deverão ter o mesmo número de pessoas.
- A festa deverá ter no máximo, 10 mesas.

Quantas pessoas serão colocadas em cada mesa?

Questão 04

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50

No tabuleiro do jogo "Brincando com múltiplos e divisores" existem números primos? Quais são eles?

Fonte: Elaboração da autora

A seguir, os enunciados dos problemas propostos (elaborados pela autora):

Questão 1: Ana Julia gosta muito de fazer brigadeiro, assim ela resolveu vendê-los para ajudar sua mãe com as despesas da casa. Ela vende 4 brigadeiros por 12 reais. Quanto ela deverá cobrar por 32 brigadeiros?

Questão 2: No mercado havia a seguinte oferta: "Leve 8 maçãs e pague R$ 9,00". Catarina resolveu fazer uma geleia de maçã e, segundo a receita, ela precisará de 48 maçãs. Quanto ela pagará?

Questão 3: Para a organização de uma festa de aniversário foram convidadas duas famílias (Pereira e Silva). A família Pereira virá com 24 convidados e a família Silva terá 60 convidados. A pessoa que for arrumar as mesas para os convidados precisa seguir as seguintes instruções:

- Não colocar Pereiras e Silvas juntas, ou seja, se em uma mesa tiver um Pereira, todos os outros lugares da mesa deverão ser ocupados por pessoas da família Pereira, e o mesmo acontece para a família Silva.
- Todas as mesas deverão ter o mesmo número de pessoas.
- A festa deverá ter, no máximo, 10 mesas.

Quantas pessoas serão colocadas em cada mesa?

Questão 4: No tabuleiro do jogo "Brincando com múltiplos e divisores", existem números primos? Quais são eles?

Durante a realização deste trabalho, como já sugerido na primeira atividade, tivemos como parâmetro a avaliação diagnóstica inicial e, com o desenrolar das aulas, durante todo o tempo, realizamos uma avaliação contínua, realizada pela observação dos grupos nos momentos de jogo e pelos questionamentos feitos na problematização do jogo.

A avaliação que propomos aqui é uma ação constante, conforme nos apresenta Smole (2007):

> Ainda que possa parecer uma contradição, para nós o jogo nas aulas de matemática é uma atividade séria, que exige planejamento cuidadoso, avaliação constante das ações didáticas e das aprendizagens dos alunos. Nossos estudos mostram que, se bem aproveitadas as situações de jogo, todos ganham. Ganha o professor porque tem uma possibilidade de propor

> formas diferenciadas de os alunos aprenderem, permitindo um maior envolvimento de todos e criando naturalmente uma situação de atendimento à diversidade de aprendizagem, uma vez que cada jogador é que controla seu ritmo, seu tempo de pensar e aprender. Ganha o aluno porque fica envolvido por uma atividade complexa que permite a ele, ao mesmo tempo em que constrói noções e conceitos matemáticos, desenvolver muitas outras habilidades que serão úteis por toda a vida e para aprender não apenas matemática. (SMOLE, 2007, p. 22)

No próximo capítulo, trataremos de detalhar a experiência da autora ao executar essa sequência de atividades descrita no capítulo findado a fim de comprovar a eficácia da proposta de utilização de jogos para o ensino de matemática.

5. COLOCANDO A MÃO NA MASSA

A grande maioria dos professores com os quais a autora trabalha ou trabalhou diz sempre que: “o papel aceita tudo, quero ver na hora de colocar em prática”. Por isso, tudo que foi escrito no capítulo anterior entrou em prática na sala de aula desde 2017 quando através da Professora Doutora Aparecida Francisco da Silva, conhecemos o CEJTA (Campeonato Escolar de Jogos de Tabuleiros), desenvolvido por uma equipe de professores na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Unesp – Campus de São José do Rio Preto. Jogos de tabuleiro encantavam a autora desde a infância, quando um jogo de lógica fazia brilhar o olhar de uma criança e uma boneca não surtia o mesmo efeito. Sempre intrigaram a autora aquelas estratégias do War[***], o rolar dos dados, as probabilidades de ganhar ou perder uma batalha.

Quando a autora conheceu um campeonato que unia duas paixões: matemática e jogos de tabuleiro, tratou logo de inclui-los na rotina da sala de aula, por consequência, na rotina dos estudantes. Com o passar do tempo acompanhamos uma melhora significativa nas habilidades matemáticas desenvolvidas pelos estudantes. Como comprovado no SARESP (sistema de avaliação do rendimento escolar de São Paulo), através do IDESP (índice de desenvolvimento da educação do estado de São Paulo), fica clara a evolução da escola na qual foi trabalhado o projeto. Veja:

[***] War é um jogo de tabuleiro de guerra e estratégia, lançado no Brasil pela empresa Grow em 1971.

Figura 16 – Resultado IDESP 2017 e 2018

IDESP

PROGRAMA DE QUALIDADE DA ESCOLA

IDESP 2017 - INDICADORES DA ESCOLA

	INDICADORES DE DESEMPENHO		INDICADOR DE DESEMPENHO	INDICADOR DE FLUXO	IDESP 2017
	LÍNGUA PORTUGUESA	MATEMÁTICA			
5º ANO EF					
9º ANO EF	2,8333	2,8333	2,83	0,9716	2,75
3ª SÉRIE EM					

IDESP 2018 - INDICADORES DA ESCOLA

	INDICADORES DE DESEMPENHO		INDICADOR DE DESEMPENHO	INDICADOR DE FLUXO	IDESP 2018
	LÍNGUA PORTUGUESA	MATEMÁTICA			
5º ANO EF					
9º ANO EF	4,2667	4,0587	4,16	0,9929	4,13
3ª SÉRIE EM					

Fonte: http://idesp.edunet.sp.gov.br/boletim_escola2017.asp?ano=2017

É nítida a evolução no desempenho da escola como um todo, o indicador de desempenho de matemática no ano de 2017 era de 2,8 aproximadamente, ano em que começamos a desenvolver o projeto, e no ano seguinte, após dois anos de trabalho em sala de aula com jogos, o indicador de desempenho de matemática chegou a 4,0 aproximadamente, ou seja, um crescimento de 43%. É claro que o mérito não é apenas dessa estratégia com jogos, mas foi um importante impulso para que os estudantes perdessem o medo da matemática e começassem a entender que ela é uma grande aliada.

Convidamos nesse momento a Professora Doutora Aparecida Francisco para apresentar um pouco da sua história a respeito do trabalho que desenvolve com jogos no ensino de matemática que foi um dos principais fatores que inspiraram a autora deste trabalho a escolher tal tema:

"Foi buscando alternativas para trabalhar matemática de forma séria e ao mesmo tempo interessante para crianças e adolescentes, que, juntamente com a professora Helia Kodama, nos deparamos com os jogos como recurso didático, nos Parâmetros Curriculares Nacionais. De 1998, até o presente, nunca mais deixei de atualizar a bibliografia e andei por caminhos bastante interessantes. Primeiro foram parcerias importantes com a COOPEC -CECAS (cooperativa de ensino) e a EE Otacílio Alves de Almeida (escola pública) com atividades semanais com

jogos variados, muitos que não conhecíamos, em princípio nem as regras. Muitos alunos participando, bolsistas e professores parceiros de projeto do Núcleo de Ensino da UNESP ou do programa Ciência na UNESP, discutindo matemática a partir dos jogos. Reuniões semanais de formação, mostras em escolas da cidade e da região. Nesse período, a cada ano, formávamos grupos de alunos dos cursos de matemática para discutir potencialidade de um jogo específico para ser utilizado em sala de aula para trabalhar algum conteúdo e desenvolver habilidades importantes para a cidadania. E sempre a pergunta: Como estimular mais professores a fazer uso deste importante recurso pedagógico? Como preparar os professores para um uso consciente que ultrapasse a brincadeira em sala de aula ou a "matemática de brincadeira", como muitos se referiam? Muitos foram os cursos e materiais elaborados entre os quais não podemos deixar de citar a participação no CNMACC em 2003 e nas Bienais da SBM em 2004 e 2006, contando com a parceria da professora Ermínia.

E o CEJTA - Campeonato Escolar de Jogos de Tabuleiro?

Já no início do trabalho com jogos, professora Helia e eu vínhamos observando o campeonato português de jogos e pensando em como implementar um campeonato aqui. Helia se aposentou, eu também e eis que no trabalho voluntário junto ao departamento, apareceu a oportunidade de fortalecer parcerias importantes com Diretorias de Ensino. Como ocorreu? Daquele grupo inicial de alunos de graduação da UNESP e professores parceiros em outros projetos nasceu o apoio à ideia de um Campeonato Escolar de Jogos de Tabuleiro - CEJTA. Como foi estruturado? A UNESP se responsabiliza por organizar texto de apoio a formação dos formadores nas diretorias e cada diretoria se responsabilizaria por envolver os professores e alunos. Claro que sem apoio do departamento, do qual para não errar, citaremos apenas os mais envolvidos na formação dos professores, professoras Flávia, Évelin e Ermínia e funcionários do Departamento de Matemática, além, é claro da chefia e coordenação de curso e colaboração dos alunos de graduação, não poderíamos realizar um evento de tão grande porte.

Resumindo: partindo do trabalho em sala de aula com alunos e professores e pautados na bibliografia existente, nos anos de 1998 em diante, pudemos perceber a riqueza de oportunidade de tratar de tópicos e desenvolver habilidades importantes na formação dos alunos da escola básica quando utilizamos os jogos na perspectiva da metodologia de resolução de problemas. Da pesquisa com jogos e estabelecimento de regras que permitem trabalho que levam à formação dos conceitos lá se vão mais de vinte anos de um trabalho que não termina, pois há sempre possibilidade de melhorar. O CEJTA é apenas um mote para aproximar professores da formação e encorajá-los a utilizar plenamente os jogos em *suas salas de aulas com todos os alunos. Os relatos de resultados são incríveis e nos motivam a continuar.*

Pelo descrito, nos sentimos honradas com a oportunidade de apresentar nesse importante trabalho, uma palavra sobre nosso trabalho. Temos a certeza que sem a participação de professores interessados e competentes como a professora Priscila, autora deste trabalho e de sua orientadora, não nos manteríamos nos atualizando e em busca de melhoria para a sala de aula com a participação de todos os alunos.

Em tempo, professora Hélia é nossa querida e dedicada companheira de trabalho Helia Matiko Yano Kodama, professora Erminia, também super parceira desde tempos remotos, aposentada da UNESP é Erminia de Lourdes Campelo Fanti.

Flávia é nossa querida ex-aluna e parceira muito ativa, orientadora deste trabalho e Évelin é nossa não menos querida ex-aluna e parceira de todas as horas nas atividades do Laboratório de Matemática.” [****]

Relataremos agora com todos os respectivos registros como ocorreu o trabalho em sala de aula no decorrer desses três anos, seguindo os passos relatados no capítulo 3. O trabalho foi desenvolvido em uma Escola Estadual do Estado de São Paulo de Ensino Fundamental, a escola como um todo participou em suas aulas dessa metodologia do ensino de matemática, cada turma com um jogo adequado para suas necessidades conforme as habilidades de cada ano, mas como esse trabalho é sobre um jogo específico, nos restringiremos a mostrar aqui as evidências apenas de duas turmas de estudantes do sexto ano, durante os anos de 2017 e 2018.

A primeira atividade, Avaliação Diagnóstica Inicial, foi realizada em uma aula como o previsto, foi iniciada uma conversa com a turma deixando-os a vontade para fazer a avaliação com muita calma e aconselhando-os a lerem com bastante cuidado e quantas vezes fossem necessárias às questões, para que o desempenho não ficasse comprometido e ainda foi pedido para que anotassem todo o raciocínio usado na resolução das questões, utilizando até mesmo de desenhos para eventuais explicações. Segue abaixo fotos e comentários de algumas questões resolvidas.

[****] Texto enviado pela professora Doutora Aparecida Francisco por whatsapp no dia 19 de novembro de 2020 para a autora.

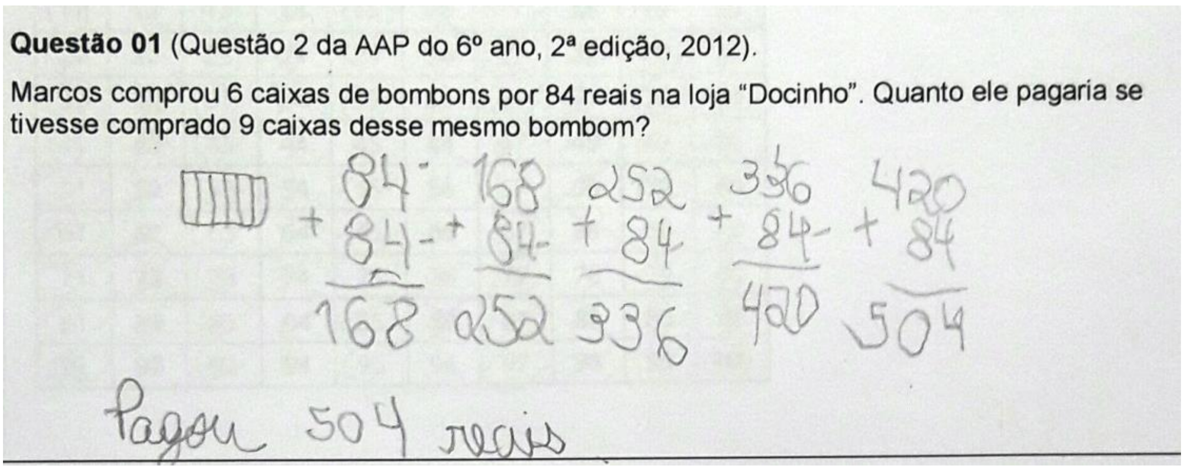
Figura 17 – Aplicação da avaliação.

Fonte: Elaboração da autora

Os estudantes fizeram a avaliação com muito empenho, depois de iniciada a avaliação o professor presente, no caso a autora deste trabalho, não interferiu em momento algum, pois como o nome mesmo diz, é uma avaliação diagnóstica na qual o aluno tem de mostrar o que realmente consegue fazer com os problemas propostos.

Analisaremos a seguir algumas respostas dadas pelos estudantes.

Figura 18 – Resolução incorreta da questão 1 da diagnóstica inicial.



Questão 01 (Questão 2 da AAP do 6º ano, 2ª edição, 2012).

Marcos comprou 6 caixas de bombons por 84 reais na loja "Docinho". Quanto ele pagaria se tivesse comprado 9 caixas desse mesmo bombom?

$84 + 84 = 168$, $168 + 84 = 252$, $252 + 84 = 336$, $336 + 84 = 420$, $420 + 84 = 504$

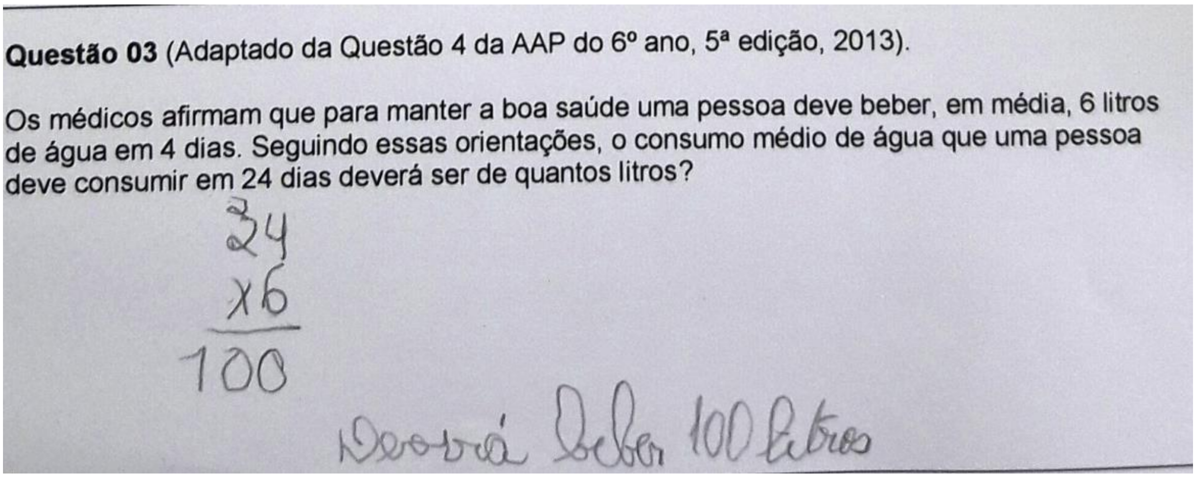
Pagou 504 reais

Fonte: Elaboração da autora

Nessa questão nota-se que o estudante soube efetuar o algoritmo da adição, mas não interpreta o problema, ou seja, não entende o que se pede para calcular. Então usa um dos números dados na questão para fazer uma conta da qual ele tem conhecimento. É o caso do erro construtivo, onde o estudante evitou esforços e errou porque não conseguiu entender.

Vale ressaltar que a correção da Avaliação Diagnóstica Inicial deve ser feita depois de aplicado todas as atividades, ou seja, deve ser feita no final juntamente com a correção da Avaliação Diagnóstica Final. Para que possa comparar a evolução do estudante consigo mesmo, por menor que seja essa evolução ela deve ser considerada como um êxito para estudante e professor.

Figura 19 – Resolução incorreta da questão 3 da diagnóstica inicial


Questão 03 (Adaptado da Questão 4 da AAP do 6º ano, 5ª edição, 2013).

Os médicos afirmam que para manter a boa saúde uma pessoa deve beber, em média, 6 litros de água em 4 dias. Seguindo essas orientações, o consumo médio de água que uma pessoa deve consumir em 24 dias deverá ser de quantos litros?

3
24
x6
100

Deverá Beber 100 litros

Fonte: Elaboração da autora

O erro nessa questão é bem marcante, pois o estudante parece entender que o problema trata de uma multiplicação, mas não compreende que os seis litros de água devem ser tomados em quatro dias, no seu entendimento pelo algoritmo mostrado, ele efetua 6 x 24, dando a intender que os seis litros terão que serem tomados em um dia e ele chega até a montar esse algoritmo, mas não o efetua corretamente.

Nos dois casos é bem claro que o processo de divisão e de multiplicação não está construído e desta forma aconteceu com aproximadamente 40% dos estudantes dessas turmas. Eles não tinham construído o conceito de múltiplos e divisores. O que era uma defasagem muito significativa para uma turma de sexto ano do ensino fundamental ciclo II.

Como sequência, depois da avaliação diagnóstica inicial, foi explicado o funcionamento da tabela de registro para a turma, os alunos se dividiram em duplas e o professor ensinou-os como deveriam ser marcados os números na tabela, que deveriam ser utilizados durante o jogo e já na próxima aula os estudantes começaram a jogar.

Figura 20 – Alunos jogando.

Fonte: Elaboração da autora

Durante o jogo o professor observava e fazia interferências que julgasse necessárias, ele de forma alguma dava a resposta certa aos estudantes, pois o neste momento ele era apenas um mediador do processo de construção do saber pelo estudante, poderia, se necessário, fazer questionamentos que levem os estudantes a refletir sobre suas hipóteses.

E assim se observou durante essas seis aulas que os estudantes seguiam uma ordem relatada por Borin (2002), que diz:

> Os alunos inicialmente partiam para uma experimentação ou tentativa para conhecer o que iriam defrontar, sem muita ordem ou direção. Após esse primeiro momento,

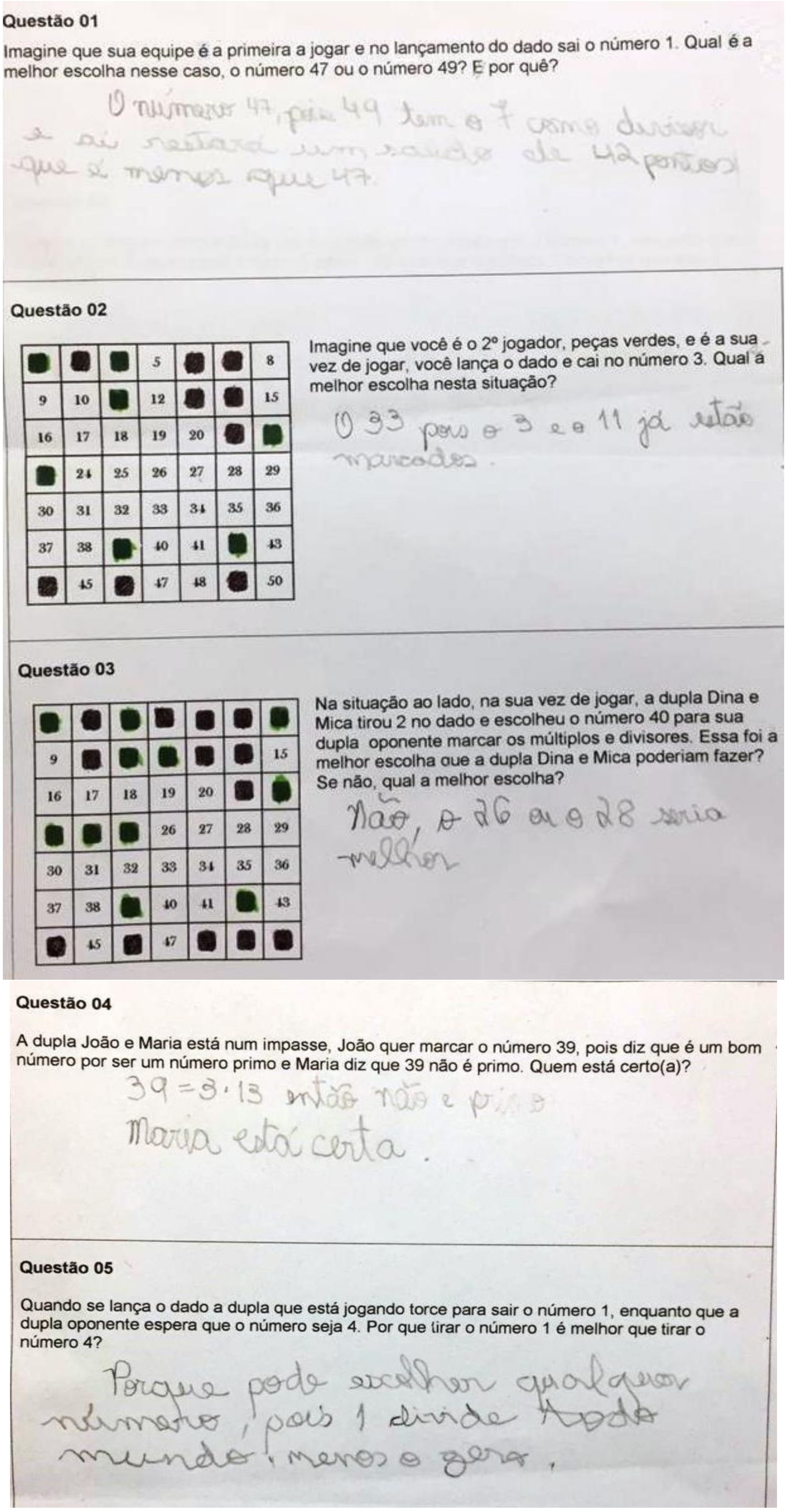
> começavam a levantar os dados que poderiam influenciar ou alterar as jogadas que iriam fazer. Para isso, tinham que ler as regras com mais atenção(...)discutiam entre si o que tinham entendido e estabeleciam a meta que deveriam alcançar para serem vencedores e, só depois disso, começavam a construir hipóteses que os fizessem chegar à solução. (BORIN, 2002, p.1)

A primeira descoberta que os estudantes faziam quanto começavam a jogar era a de que no tabuleiro não havia múltiplos de números maiores que vinte e cinco, assim, se eles escolhessem um número com essa característica, o seu oponente só teria divisores para marcar no tabuleiro, o que lhes traziam uma grande vantagem. Já a segunda era de que havia números que eles chamavam de especiais, que eram os números maiores que vinte e cinco e que não tinham divisores. Surgia nesse momento a descoberta dos números primos, que até então os alunos chamam de números especiais e achavam que só existiam números especiais maiores que vinte e cinco.

Após essa etapa de jogar, os alunos tiveram que analisar a tabela que continha todos os números do tabuleiro e analisá-los um a um, qual número deveria sair no dado para poder escolher aquele determinado número, e depois de escolhido, quais opções de múltiplos e divisores do número escolhido. Nesta atividade as duplas puderam compartilhar e pensar sobre mais estratégias que poderiam ser usadas durante o jogo.

Logo após essa atividade os estudantes, individualmente, resolveram uma lista de situações de aprendizagem a respeito do jogo, e aqui fica registrado o desempenho de um estudante que estava com muita dificuldade no início do trabalho com jogo e nesta atividade surpreendeu com as seguintes respostas:

Figura 21 – Resolução da situação problema a partir do jogo.



Questão 01

Imagine que sua equipe é a primeira a jogar e no lançamento do dado sai o número 1. Qual é a melhor escolha nesse caso, o número 47 ou o número 49? E por quê?

O número 47, pois 49 tem o 7 como divisor e aí restará um saldo de 42 pontos que é menos que 47.

Questão 02

■	■	■	5	■	■	8
9	10	■	12	■	■	15
16	17	18	19	20	■	■
■	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	■	40	41	■	43
■	45	■	47	48	■	50

Imagine que você é o 2º jogador, peças verdes, e é a sua vez de jogar, você lança o dado e cai no número 3. Qual a melhor escolha nesta situação?

O 33 pois o 3 e o 11 já estão marcados.

Questão 03

■	■	■	■	■	■	■
9	■	■	■	■	■	15
16	17	18	19	20	■	■
■	■	■	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	■	40	41	■	43
■	45	■	47	■	■	■

Na situação ao lado, na sua vez de jogar, a dupla Dina e Mica tirou 2 no dado e escolheu o número 40 para sua dupla oponente marcar os múltiplos e divisores. Essa foi a melhor escolha que a dupla Dina e Mica poderiam fazer? Se não, qual a melhor escolha?

Não, o 26 ou o 28 seria melhor

Questão 04

A dupla João e Maria está num impasse, João quer marcar o número 39, pois diz que é um bom número por ser um número primo e Maria diz que 39 não é primo. Quem está certo(a)?

39 = 3 · 13 então não é primo

Maria está certa.

Questão 05

Quando se lança o dado a dupla que está jogando torce para sair o número 1, enquanto que a dupla oponente espera que o número seja 4. Por que tirar o número 1 é melhor que tirar o número 4?

Porque pode escolher qualquer número, pois 1 divide todo mundo, menos o zero.

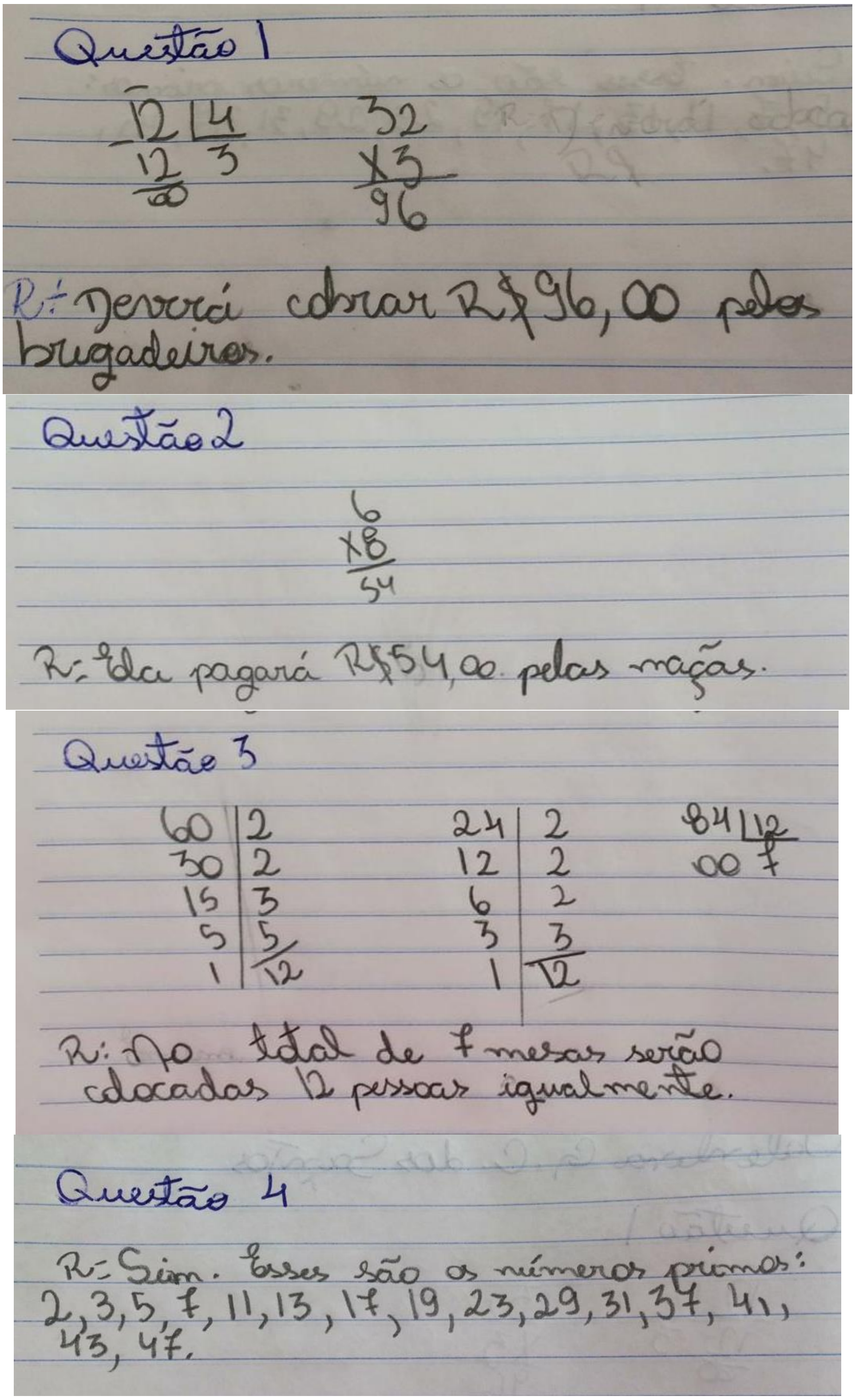
Fonte: Elaboração da autora

Notamos que o estudante conseguiu unir os conhecimentos que trouxe do 5º ano, já que antes do desenvolvimento do jogo não havíamos falado sobre o conteúdo matemático em si, e uni-los as situações vivenciadas durante todo o processo de aprendizagem com a utilização de jogo matemático. Conseguindo efetuar os cálculos, utilizando dos algoritmos, e compreender cada situação vivida no jogo e construir respostas coerentes.

Agora só restava aplicar a avaliação final e analisar se o desempenho geral da turma melhorou em relação à avaliação inicial. As avaliações como já visto, eram composta por duas habilidades essenciais do Currículo Paulista, que estão contidas na BNCC, são elas: Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores e Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3,4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

Podemos afirmar com base no desempenho da classe que a melhora foi significativa, a exemplo das imagens a seguir:

Figura 22 – Resolução da avaliação diagnóstica final.



Questão 1

12 |4
12 3
00

32
x3
96

R: Deverá cobrar R$ 96,00 pelos brigadeiros.

Questão 2

6
x8
54

R: Ela pagará R$ 54,00 pelas maçãs.

Questão 3

60 | 2
30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 | 12

24 | 2
12 | 2
6 | 2
3 | 3
1 | 12

84 |12
00 7

R: No total de 7 mesas serão colocadas 12 pessoas igualmente.

Questão 4

R: Sim. Esses são os números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Fonte: Elaboração da autora

Mas além do desempenho e da mudança de comportamento dos alunos em relação às aulas de matemática, o que mais motiva o professor a continuar esse trabalho é o depoimento daqueles alunos que passaram por essa experiência.

Quando perguntados sobre a importância dos jogos nas aulas de matemática relatam que o jogo é uma forma dinâmica e divertida, além de ajudar aqueles alunos que tem um pouco mais de dificuldades. Nas palavras de uma estudante “o jogo era uma maneira de se divertir e aprender ao mesmo tempo” (T.F.P. 2020) e outra estudante completa, “é importante para aqueles que têm um pouco mais de dificuldade, e os jogos facilitam a aprendizagem” (A.L.L. 2020).

Outra pergunta que os alunos responderam foi: _ O que você acha sobre o uso de jogos nas aulas de matemática? E as respostas são surpreendentes.

> “Eu acho o uso de jogos nas aulas de matemática ou em qualquer outra matéria uma ótima ideia, pois além de despertar o interesse nos alunos, eles estimulam o raciocínio lógico, analítico, viso espacial, coordenação motora, memória de trabalho e pensamento lateral, além de aprender mais sobre a matéria de uma forma divertida e dinâmica”. (P.R.R.O.2020)

Relata o estudante quando a pergunta lhe é feita, e seu colega diz:

> “Eu acho bem bacana, é um jeito de raciocínio diferente e por mais que você não saiba você acaba gostando e querendo jogar cada vez mais e com isso você aprende muito mais rápido, porque é uma coisa diferente do que a gente vê no dia a dia”. (R.C. 2020)

E são esses depoimentos e os resultados obtidos em avaliações internas e externas que nos fazem acreditar e comprovar que esse trabalho é válido.

6. O ELO ENTRE: MATEMÁTICA, JOGO, BNCC E O CURRÍCULO PAULISTA

Os Currículos de Matemática que são desenvolvidos se orientam em documentos oficiais que indicam as habilidades que os alunos devem desenvolver e os objetos de conhecimentos essenciais para seu desenvolvimento.

Nacionalmente o documento que norteia é a Base Nacional Comum Curricular, que é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica. Portanto, a BNCC orienta-se:

> pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (BNCC, 2018, p. 276).

E cita nas competências específicas de matemática para o ensino fundamental que o aluno deve, “desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BNCC, 2018, p. 267).

Já o estado de São Paulo, pautado na BNCC, desenvolveu o Currículo Paulista, o documento que norteia as habilidades trabalhadas no estado inteiro, unificando assim o ensino. Nele consta:

> Os jogos auxiliam na socialização dos estudantes, estimulam o trabalho em equipe, a busca da cooperação mútua, ou seja, estimulam a interação entre os pares. Da mesma maneira, como os jogos estabelecem regras que representam limites, isto concorre para que eles aprendam a respeitar as inúmeras soluções para uma mesma situação, além de questionar os seus erros e acertos. (CURRÍCULO PAULISTA, 2019, p.314).

E ainda completa “Outro recurso possível, é a utilização de jogos que ativem o cálculo mental, o cálculo estimado, o raciocínio e ampliem os desafios propostos para os estudantes, ao longo de toda escolarização”. (CURRÍCULO PAULISTA, 2019, p. 318)

Refletindo a respeito dessas orientações, decidimos trabalhar com o jogo “Brincando com múltiplos e divisores” como recurso didático para o ensino e a aprendizagem dos múltiplos e divisores de um número natural, que é uma habilidade presente nos documentos acima citados no sexto ano do ensino fundamental ciclo II, bem como os números primos e compostos.

Mostraremos agora como as habilidades desenvolvidas no jogo, durante todo o processo, são abordadas no Currículo Paulista de Matemática, desde o primeiro até o sexto ano do Ensino Fundamental, que é a etapa em que se desenvolveu todo esse trabalho.

- Primeiro ano do Ensino Fundamental: Construir fatos básicos da adição e da subtração e utilizá-los em procedimentos de cálculos mentais, escritos e para a resolução de problemas; explorar as ideias da multiplicação e da divisão de modo intuitivo.

- Segundo ano do Ensino Fundamental: Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito; resolver e elaborar situações problema de adição de parcelas iguais, por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável, levando a construção do significado da multiplicação.

- Terceiro ano do Ensino Fundamental: Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito para resolver problemas significativos envolvendo adição, subtração e multiplicação com números naturais; Construir, utilizar e desenvolver estratégias diversas para o cálculo das quatro operações.

- Quarto ano do Ensino Fundamental: Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais; utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.

- Quinto ano do Ensino Fundamental: Resolver e elaborar situações problema de multiplicação e divisão envolvendo números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

- Sexto ano do Ensino Fundamental: Solucionar e propor problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias pessoais, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora; Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000; Resolver e elaborar situações problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.

Como visto, é de suma importância todas as habilidades listadas, que na verdade são listadas como essenciais, e que estão presentes nas etapas das atividades com o jogo em sala, mostrando que ele proporciona ao estudante desenvolvê-las.

Notamos que no primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental a orientação é feita no sentido que sejam explorados alguns conceitos básicos das operações, destacando-se a adição e a subtração, já no terceiro, quarto e quinto ano o destaque vai para a utilização de cálculos de multiplicação e divisão, que são explorados por meio de estratégias pessoais, concluindo que os significados das operações já trabalhados no primeiro e segundo ano são consolidados e novas situações são propostas para a ampliação do conceito de cada uma das operações. Os recursos de cálculo são ampliados pelo fato de o estudante ter uma compreensão mais ampla do sistema de numeração decimal.

Analisando agora especificamente as habilidades propostas para o sexto ano do Ensino Fundamental, notamos que os conceitos de múltiplo e divisor são contemplados, bem como o conceito de números primos, e o Currículo Paulista é bem claro a respeito de que o conhecimento se faz através de uma construção coletiva, onde diz que o estudante deve ter a competência de “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (CURRÍCULO PAULISTA, 2019, p. 305).

E a utilização do jogo como mais uma estratégia desenvolve também, além de habilidades matemáticas, a competência específica:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (CURRÍCULO PAULISTA, 2019, p. 306).

Concluímos que o jogo como uma estratégia de ensino de matemática na sala de aula está amparado por documentos legais, que não só apoiam, mas que os defende como essenciais para a construção efetiva do conhecimento.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas considerações finais gostaríamos de contar uma breve história da autora desse trabalho , que aos 23 anos de idade, recém-formada, cheia de esperança no futuro da sua carreira como matemática, bate a porta de uma Universidade Pública, com seu diploma debaixo do braço e pede para um Professor Doutor para ser aluna ouvinte em sua disciplina do Mestrado e para sua surpresa, ou melhor, sua agonia, ele ao olhar o diploma, que é de uma faculdade particular na qual havia feito Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática, diz: _ É “isso” que você tem? E ela responde: _ Tenho muita vontade de aprender! Mas de nada adianta. A porta se fecha.

Passados mais de vinte anos ela consegue, por seu mérito, através de uma prova entrar no Mestrado em uma Universidade Pública e chega até aqui passando por todos os desafios de quem frequentou uma faculdade que pouco a ensinou, não sabia se quer o que era uma derivada, muito menos uma integral. Sabe aquela história que a mãe da gente fala: _ Você não é todo mundo! Sabe? Pois é, ela entendia bem o que significava, pois um dia um professor escreveu na lousa “o teorema 4.12 e 4.13 todo mundo já sabe”. Ela não sabia.

O PROFMAT veio a acrescentar muito na vida dela, professora há mais de 20 anos, hoje ela domina muito mais os conteúdos matemáticos e se sente muito mais segura em ministrar aulas.

E sobre o desenvolvimento desse trabalho, o seu maior desafio foi a pandemia, uma situação nunca vivida por nossa geração, uma loucura! Não podíamos fazer reuniões presenciais para discussões sobre ao tema, todos tivemos que aprender a trabalhar de forma remota, e todo o cronograma que já estava montado para a aplicação do trabalho durante o ano de 2020 caiu por terra e não conseguimos aplicar.

Foi preciso reinventar e buscar dados e documentos de anos anteriores para poder finalizar o trabalho, que no final ficou pronto, não como foram idealizados a princípio, mas, enfim, o material está aí para quem quiser utilizá-lo. E sinceramente esperamos que seja de grande utilidade para os professores.

Trabalhar com jogos na sala de aula não é uma tarefa fácil, requer tempo de preparação, tanto de material, quanto de estudo, porém é uma tarefa compensadora no final, pois os resultados como mostrado são válidos.

As escolas onde passamos e os estudantes que participaram do projeto, temos certeza de que jamais se esquecerão das práticas vividas e dos ensinamentos. Muitos que compartilharam as histórias vividas durante os anos que trabalhamos com a metodologia do jogo nas aulas de matemática, se emocionaram ao relatar e relembrar os momentos vividos.

Por fim agradecemos a quem dedicar um tempo a leitura desse material.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, J.C.S. ***Disposição da aula: os sujeitos entre a tecnia e a polis***. In: VEIGA, I. P.A. (Org.) Aula: gênese, dimensões, princípios e práticas. Campinas: Papirus, 2008. p. 45-72.

BORIN, J. ***Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática***. São Paulo, SP: IME-USP, 2004. 100 p.

*BRASIL****, Base Nacional Comum Curricular*** *(*BNCC). Educação é a **Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf/ . Acesso em 14 de agosto de 2020.

Brincando com múltiplos e divisores. Disponível em https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos/4-cejta/jogos---regras/6-ano---brincando-com-multiplos-e-divisores/ . Acesso em 06 de janeiro de 2020.

DAVIS, C; ESPÓSITO, Y.L. ***O Papel e a Função do Erro na Avaliação Escolar.*** Rev. Brás. Est. pedag. Brasília, 1991.

DOMINGUES, H. H. ***Fundamentos de Aritmética***. São Paulo: Atual Editora, 1991.

HEFEZ, A. ***Elementos de Aritmética***. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2011. 169 p.

HEFEZ, A. ***Aritmética***. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016. 298 p. (Coleção PROFMAT,08)

LIMA, E L, ***Números e funções reais.*** Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT,07)

PIRES, C M C, ***Números naturais e operações.*** São Paulo, SP: Ed melhoramentos ltda, 2013. 183p.

POLYA, G. ***A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.*** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

*SÃO PAULO****, Currículo Paulista***,. São Paulo: SEE, 2019. 318 p. Disponível em http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/curriculo_paulista_26_07_2019.pdf/ . Acesso em 06 de abril de 2020.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I. S. V. MILANI, E. ***Jogos de matemática de 6º a 9º ano***. Porto Alegre, RS: Artmed, 2007. 104 p.

VASCONCELLOS, C. S. ***Planejamento: projeto de ensino-aprendizagem e projeto políticopedagógico.*** 9 ed. São Paulo: Libertade, 2000.