



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Fabício José Oliveira Caliani

**Um Aplicativo de Celular como Alternativa Metodológica para o  
Ensino de Semelhança de Triângulos e Pirâmides**

São José do Rio Preto  
2021

Fabício José Oliveira Caliani

**Um Aplicativo de Celular como Alternativa Metodológica para o  
Ensino de Semelhança de Triângulos e Pirâmides**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rita de Cássia Pavan  
Lamas

São José do Rio Preto  
2021

C153a	<p>Caliani, Fabrício José Oliveira</p> <p>Um Aplicativo de Celular como Alternativa Metodológica para o Ensino de Semelhança de Triângulos e Pirâmides / Fabrício José Oliveira Caliani. -- São José do Rio Preto, 2021</p> <p>60 f.</p> <p>Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto</p> <p>Orientadora: Rita de Cássia Pavan Lamas</p> <p>1. Matemática. 2. Educação. 3. Aplicativo de celular. 4. Tecnologia. 5. Realidade aumentada. I. Título.</p>
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Fabício José Oliveira Caliani

**Um Aplicativo de Celular como Alternativa Metodológica para o  
Ensino de Semelhança de Triângulos e Pirâmides**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rita de Cássia Pavan Lamas  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto  
Orientador

Prof.<sup>o</sup> Dr.<sup>o</sup> Durval José Tonon  
Universidade Federal de Goiás

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Évelin Meneguesso Barbaresco  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
4 de março de 2021

Dedico este trabalho à minha esposa Graciela, ao meu filho Bento e enteado Rafael que ultrapassaram todos os obstáculos e dificuldades comigo. Sempre me apoiando, incentivando a não desistir e seguir firme até o fim.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma me incentivaram, apoiaram ou me ajudaram durante esses três anos de estudo.

À minha orientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rita de Cássia Pavan Lamas, por todo o carinho, paciência e apoio. A ela toda minha admiração.

A UNESP/Ibilce, a Universidade que aprendi a admirar ainda mais como aluno.

À Deus, por estar sempre me mostrando os caminhos a percorrer.

Ao meu amigo e colega de profissão Fernando Scannavino por me incentivar a ingressar no mestrado, sendo que não imaginaria que realmente chegaria ao fim.

Aos amigos da turma do PROFMAT/2018, Amarílis, Edvaldo e Vanessa, que foram os principais responsáveis por toda a trajetória que percorri até hoje.

Aos meus pais Atemiro e Mariangela por sempre me fazer acreditar.

Aos meus irmãos Fábio e Maísa pelo apoio e crédito na minha capacidade.

Aos amigos, parceiros e programadores Gabriel e Pedro. Obrigado por acreditar no sonho de construir um aplicativo em Realidade Aumentada.

Ao meu cunhado Evandro por financiar a construção do aplicativo.

## RESUMO

Em decorrência do avanço da tecnologia e do crescente acesso a elas, pela maior disponibilidade de computadores, celulares e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação e de atuação social. Com isso, a tecnologia nas escolas é uma alternativa para promover a aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes. Esse trabalho apresenta um aplicativo para celulares intitulado “Educação Estendida”, de realidade aumentada, para auxiliar no ensino de matemática e outras áreas. Em particular, é proposta uma sequência metodológica para o ensino de Semelhança de Triângulos e Introdução a Pirâmides, além de apresentar aspectos históricos relacionados às pirâmides, visando a sua aplicação no 9º ano do Ensino Fundamental. O objetivo é despertar maior interesse e compreensão dos alunos nos conteúdos de matemática, de forma que eles sejam os protagonistas de seu conhecimento. O aplicativo pode ser baixado na loja de aplicativos.

**Palavras-chave:** Aplicativo de Celular. Semelhança de Triângulo. Pirâmide. Tecnologia. Realidade Aumentada.

## ABSTRACT

As a result of the advancement of technology and the growing access to it, and due to the greater availability of computers, cell phones and the like, students are dynamically inserted in this culture, getting directly involved in new forms of social interaction and activities. With this scenario in mind, technology in schools is an alternative to promote learning, interaction and the sharing of meanings between teachers and students. This work presents an augmented reality application for cell phones entitled "Educação Estendida", to help in the teaching of mathematics and other areas. In particular, a methodological sequence is proposed for the teaching of Triangle Similarity and Introduction to Pyramids, besides presenting historical aspects related to the pyramids, aiming at its application in the 9th grade of Elementary School. The objective is to arouse students' greater interest and understanding of different contents of mathematics, so that they are the protagonists of their knowledge. The application can be downloaded at the application store.

**Keywords:** Cell Phone Application. Triangle Similarity. Pyramid. Technology. Augmented Reality.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pontos de uma reta.....	13
Figura 2 – Ponto entre outros dois pontos.....	13
Figura 3 – Segmento de reta.....	15
Figura 4 – Semirreta.....	15
Figura 5 – Ponto médio.....	16
Figura 6 – Ângulo.....	16
Figura 7 – Postulado da construção do ângulo.....	17
Figura 8 – Postulado da adição de ângulos.....	18
Figura 9 – Par linear.....	18
Figura 10 – Ângulo reto.....	19
Figura 11 – Ângulos opostos pelo vértice.....	19
Figura 12 – Polígono convexo e não convexo.....	20
Figura 13 – Triângulos congruentes.....	21
Figura 14 – 1º Caso de congruência.....	21
Figura 15 – Triângulo isósceles.....	22
Figura 16 – 2º Caso de congruência.....	22
Figura 17 – 3º Caso de congruência.....	23
Figura 18 – 3º Caso de congruência.....	24
Figura 19 – 3º Caso de congruência.....	24
Figura 20 – Mediatriz.....	25
Figura 21 – Mediatriz.....	25
Figura 22 – Ângulo externo.....	26
Figura 23 – Teorema do ângulo externo.....	26
Figura 24 – Ângulo agudo.....	27
Figura 25 – Retas paralelas.....	28
Figura 26 – Ângulos alternos internos.....	29
Figura 27 – Ângulos alternos internos.....	29
Figura 28 – Ângulos alternos internos nas paralelas.....	30
Figura 29 – Ângulos internos de um triângulo.....	31
Figura 30 – Ângulos correspondentes.....	31
Figura 31 – Ângulos correspondentes.....	32
Figura 32 – Altura de triângulo.....	32
Figura 33 – Quadriláteros com diagonais.....	33

Figura 34 – Paralelogramo.....	34
Figura 35 – Propriedades no paralelogramo.....	34
Figura 36 – Paralelas e transversais.....	35
Figura 37 – Paralelas e transversais.....	36
Figura 38 – Triângulo ABC e reta paralela.....	37
Figura 39 – Retas paralelas a $\overline{BC}$ .....	37
Figura 40 – Teorema Fundamental da Proporcionalidade.....	38
Figura 41 – Lados proporcionais no triângulo ABC.....	39
Figura 42 – Semelhança de triângulos.....	40
Figura 43 – Semelhança A.A.A.....	41
Figura 44 – Triângulos ABC e DEF.....	42
Figura 45 – Reta perpendicular ao plano.....	43
Figura 46 – Reta perpendicular ao plano.....	43
Figura 47 – Reta perpendicular ao plano.....	43
Figura 48 – Reta perpendicular ao plano.....	44
Figura 49 – Distância de ponto ao plano.....	45
Figura 50 – Pirâmide.....	45
Figura 51 – Play Store.....	47
Figura 52 – Ativador.....	48
Figura 53 – Ícone do aplicativo.....	48
Figura 54 – Tela inicial do aplicativo.....	48
Figura 55 – Imagem inicial da pirâmide do aplicativo.....	49
Figura 56 – Altura real da pirâmide.....	49
Figura 57 – Altura real da pirâmide em 2D.....	50
Figura 58 – Localização da pirâmide no mapa.....	51
Figura 59 – História da pirâmide.....	51
Figura 60 – Pirâmide Quadrangular.....	52
Figura 61 – Secção e planificação.....	52
Figura 62 – Esquema do Teorema de Tales.....	54
Figura 63 – Medição da altura da pirâmide.....	55
Figura 64 – Medição da aresta da base.....	55
Figura 65 – Triângulo da secção real.....	57
Figura 66 – Triângulo da secção modelo.....	57
Figura 67 – Triângulo da secção modelo sobreposto a secção real.....	58

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Retas e ângulos</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Congruência de triângulos</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Semelhança de triângulos</b>	<b>33</b>
<b>2.4</b>	<b>Pirâmides</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Apresentação do aplicativo</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Descrição das atividades</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Entre as competências específicas para o ensino de matemática a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL,2018, p.267) sugere:

- “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.”
- “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.”

Nesse trabalho o objetivo é apresentar uma proposta de atividades com o uso da tecnologia de ponta, através de um aplicativo de celular nomeado Educação Estendida. Aspectos históricos da matemática são também abordados em situações problemas visando motivar os alunos. As novas tecnologias devem ser inseridas cada vez mais em nossas escolas de uma forma a auxiliar a aprendizagem, buscando não só o interesse do aluno como um meio complementar da aprendizagem.

A grande dificuldade em ensinar matemática é fazer aulas que tenham um grande interesse pela maioria dos alunos. Pensando nisso essa sugestão de atividade foi desenvolvida usando um pequeno auxiliar que nossos alunos não se separam por nada, seus celulares. Sempre pensei em utilizar novas metodologias associadas a tecnologia sem que precisasse de um grande aparato tecnológico. O aplicativo em realidade aumentada apresentado é inédito e foi proposto para ser utilizado em sala de aula por professores e alunos. Em particular, as atividades foram propostas no capítulo 3, direcionadas para o 9º ano do Ensino Fundamental. No entanto, podem ser adaptadas para outros anos, inclusive Ensino Médio.

A partir de situações problemas propostas para os alunos seguem as outras atividades, que farão o próprio aluno argumentar e desenvolver o conceito que se quer introduzir. O aluno será o protagonista da aprendizagem.

No capítulo 2 será apresentada a fundamentação teórica, em particular, os conceitos para a introdução do conceito de semelhança de triângulos e pirâmide.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo serão apresentados os referenciais teóricos baseados em Rezende e Queiroz (2008), Barbosa (1985), Dolce e Pompeo (2002) utilizados para a realização desse trabalho, abordando assuntos de retas, ângulos, congruência, semelhança de triângulos e pirâmides relacionados as atividades propostas.

### 2.1 Retas e ângulos

**Postulado 2.1.1.** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

**Definição 2.1.2.** Duas retas de um plano são paralelas se não se interseccionam, isto é, se nenhum ponto pertence a ambas as retas. Duas retas distintas que se interseccionam são chamadas concorrentes.

**Observação.** Quando uma reta  $r$  for paralela a uma reta  $s$ , esse fato será denotado por  $r \parallel s$ .

**Teorema 2.1.3.** Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.

**Demonstração.** Consideremos  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes num ponto  $P$ . Seja  $Q$  um outro ponto que também esteja em ambas as retas. Obtemos, pelo Postulado 2.1.1, a reta  $r$  como sendo a reta determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$ , e a reta  $s$  também como sendo a reta determinada por  $P$  e  $Q$ . Pela unicidade apresentada neste postulado,  $r$  e  $s$  seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese de serem retas concorrentes. Logo  $P$  é único.

**Postulado 2.1.4. (Postulado da Distância)** A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes .

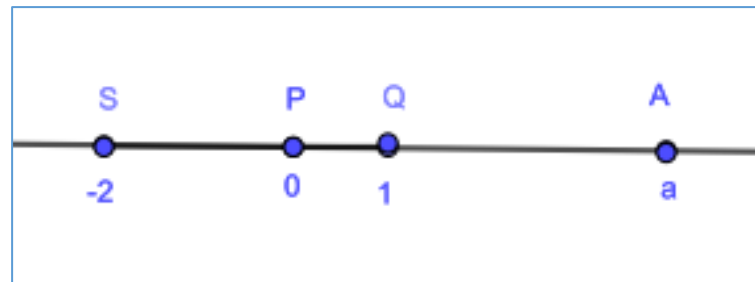
Este número obtido através do postulado acima é chamado distância entre os dois pontos, e os pontos são ditos coincidentes se forem o mesmo ponto.

Denotamos por  $PQ$  a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ .

**Postulado 2.1.5. (Postulado da Régua)** Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que

- (1) cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real,
- (2) cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta, e
- (3) a distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.

Figura 1 – Pontos de uma reta.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

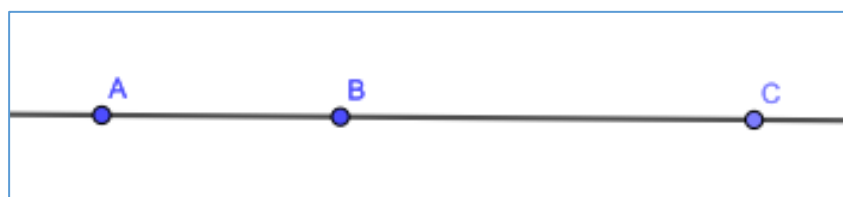
Na figura foi estabelecido que o número real -2 está em correspondência com o ponto S, o 0 (zero) com o ponto P, ...

Observamos que este postulado nos dá a ideia de "continuidade" da reta. É chamado postulado da régua porque nos permite, através de uma "régua infinita" colocada sobre uma reta, medir a distância entre dois pontos quaisquer da reta.

Uma correspondência do tipo descrito no postulado acima é chamada um sistema de coordenadas para a reta. O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado coordenada do ponto. Assim, se temos dois pontos A e B cujas coordenadas são a e b respectivamente, a distância entre os pontos A e B é dada por  $AB = |a - b|$ .

**Definição 2.1.6.** Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se  $AB + BC = AC$ , dizemos que B está entre A e C, o que denotamos por A - B - C.

Figura 2 – Ponto entre outros dois pontos.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Observe que se temos  $A - B - C$  então temos também  $C - B - A$ .

O próximo teorema depende essencialmente do Postulado da Régua. Para utilizá-lo aqui, precisamos da relação "estar entre" para números reais, que é definida do seguinte modo: se  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números reais, dizemos que  $y$  está entre  $x$  e  $z$  se  $x < y < z$  ou  $z < y < x$ . Ambos os casos são denotados por  $x - y - z$ .

**Teorema 2.1.7.** Sejam dados uma reta e três pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$  pertencentes a ela, com

coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Se  $x - y - z$ , então  $A - B - C$ .

**Demonstração.** Se  $x < y < z$ , então  $AB = |y - x| = y - x$ ;  $BC = |z - y| = z - y$ ; e  $AC = |z - x| = z - x$ . Logo temos  $AB + BC = (y - x) + (z - y) = z - x = AC$ . Logo temos  $A - B - C$ . Se  $z < y < x$ , procedendo analogamente obtemos  $C - B - A$ .

**Teorema 2.1.8.** Dados três pontos distintos pertencentes à mesma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

**Demonstração.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos colineares distintos. Vamos mostrar inicialmente que um deles está entre os outros dois.

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Por propriedades de números reais, apenas um, entre os números  $x$ ,  $y$  e  $z$ , está entre os outros dois. Pelo teorema anterior obtemos que o correspondente ponto  $A$ ,  $B$  ou  $C$  está entre os outros dois.

Agora vamos mostrar a unicidade, isto é, considerando que um dos pontos, por exemplo  $B$ , está entre os pontos  $A$  e  $C$ , vamos mostrar que não podemos ter que  $A$  está entre  $B$  e  $C$  e nem que  $C$  está entre  $A$  e  $B$ .

De fato, se  $A$  estivesse entre  $B$  e  $C$ , teríamos  $BA + AC = BC$ . Como por hipótese  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , temos  $AB + BC = AC$ . De ambos resulta  $2AB = 0$ , o que é impossível, visto que  $A$  e  $B$  são pontos distintos. Analogamente, demonstramos que  $C$  não pode estar entre  $A$  e  $B$ .

Observe que a recíproca do Teorema 1.5 também é verdadeira: sob as condições deste teorema, se  $A - B - C$  então  $x - y - z$ .

**Teorema 2.1.9.** Se  $A$  e  $B$  são pontos distintos quaisquer, então

(1) existe um ponto  $C$  tal que  $A - B - C$ ;

- (2) existe um ponto  $C'$  tal que  $C' - A - B$ ;  
 (3) existe um ponto  $D$  tal que  $A - D - B$ .

**Demonstração.** Sejam  $x$  e  $y$  as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Suponhamos  $x < y$ . Tomamos o ponto  $C$  com coordenada  $y + 1$ , o ponto  $C'$  com coordenada  $x - 1$  e o ponto  $D$  com coordenada  $\frac{x+y}{2}$ , e as situações (1), (2) e (3) acima são facilmente verificadas. Para o caso  $y < x$ , o procedimento é análogo.

Podemos então, neste contexto, passar a denotar por  $\overleftrightarrow{PQ}$  a reta determinada pelos pontos  $P$  e  $Q$ , o que lemos reta  $PQ$ .

**Definições 2.1.10.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos.

- a) O segmento de reta  $AB$ , ou simplesmente segmento  $AB$ , o qual é denotado por  $\overline{AB}$ , é definido como sendo o conjunto dos pontos  $A$  e  $B$ , e dos pontos  $X$  tais que  $A - X - B$ . Os pontos  $A$  e  $B$  são denominados extremidades do segmento  $AB$ .

Figura 3 – Segmento de reta.

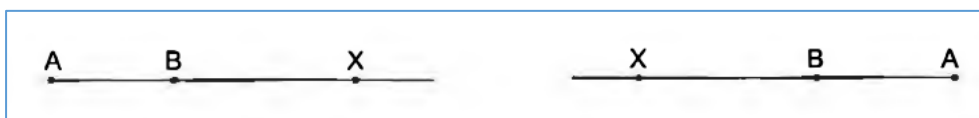


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

- b) A medida ou comprimento de um segmento  $AB$  é definida como a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  e, como tal, é denotada por  $AB$ .

- c) A semirreta de origem  $A$  contendo o ponto  $B$ , a qual é denotada por  $\overrightarrow{AB}$ , é definida como a união dos pontos do segmento  $AB$  com o conjunto dos pontos  $X$  tais que  $A - B - X$ . O ponto  $A$  é denominado origem da semirreta.

Figura 4 – Semirreta.



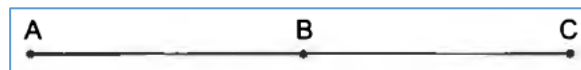
Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Se  $A$  está entre  $B$  e  $C$  então  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são chamadas semirretas opostas.

**Definição 2.1.11.** Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados segmentos congruentes.

**Definição 2.1.12.** Um ponto  $B$  é ponto médio de um segmento  $AC$  se  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , e  $AB = BC$ .

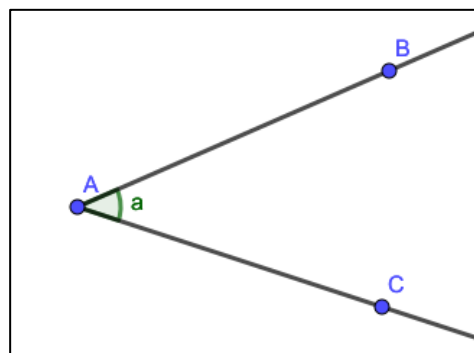
Figura 5 – Ponto médio.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Definição 2.1.13.** Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas  $AB$  e  $AC$  então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto  $A$  é chamado vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo  $BAC$  ou ângulo  $CAB$  e representado por  $B\hat{A}C$  ou  $C\hat{A}B$ , respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo  $A$  e representado por  $\hat{A}$  ou  $\hat{a}$ .

Figura 6 – Ângulo.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Observação.** Na definição acima, ângulo é simplesmente um conjunto que é a união de duas semirretas de mesma origem não contidas na mesma reta. Esta definição é adequada para quase todo o desenvolvimento da Geometria Euclidiana. O conceito de ângulos orientados, ângulos nos quais são destacados o lado inicial e o lado final podem ser encontrados em Rezende e Queiroz (2008). Nesse caso, os lados inicial e final podem ser coincidentes, definindo um ângulo de medida zero,

ou opostos, definindo um ângulo de medida  $180^\circ$ . Ângulos orientados, ou, mais geralmente ângulos cuja medida é um número real qualquer, são usados também na trigonometria.

**Definições 2.1.14.** Dizemos que o ponto  $P$  está no interior do ângulo  $BAC$  ou é ponto interior do ângulo  $BAC$  se os pontos  $P$  e  $B$  estão no mesmo lado da reta  $AC$  e os pontos  $P$  e  $C$  estão no mesmo lado da reta  $AB$ . O interior do ângulo  $BAC$  é o conjunto de todos os seus pontos interiores.

**Postulado 2.1.15. (Postulado da Medida de Ângulo)** A cada ângulo  $BAC$  corresponde um número real entre 0 e 180.

**Definições 2.1.16.**

(a) O número correspondente ao Postulado 2.1.15 é chamado medida do ângulo, o que é denotado por  $m\hat{BAC}$ .

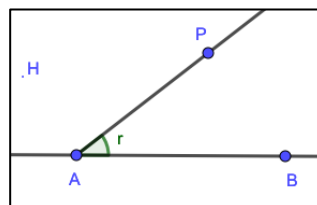
(b) Ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos congruentes.

Se  $\hat{BAC}$  e  $\hat{PQR}$  são congruentes, isto é denotado por  $\hat{BAC} \cong \hat{PQR}$ .

**Observação.** A notação  $m\hat{BAC}$  ou  $\hat{A}$  (Figura 6) representa a medida em graus do ângulo  $BAC$ , isto é, o número de graus do ângulo.

**Postulado 2.1.17. (Postulado da Construção do Ângulo)** Seja  $\overrightarrow{AB}$  uma semirreta contida na reta origem de um semiplano  $H$  (Figura 7). Para cada número  $r$  entre 0 a 180 existe exatamente uma semirreta  $AP$  com  $P$  em  $H$ , tal que  $m\hat{PAB} = r$ .

Figura 7 – Postulado da construção do ângulo.

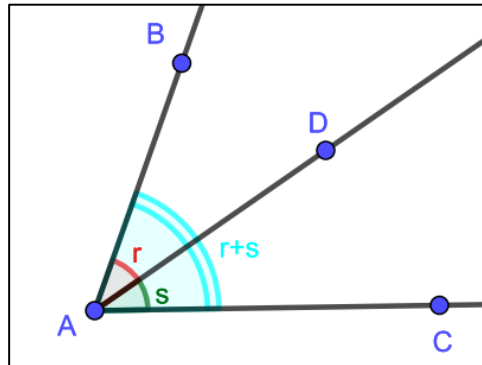


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Postulado 2.1.18. (Postulado da Adição de Ângulos)** Se  $D$  é um ponto interior de  $\hat{BAC}$ , então  $m\hat{BAC} = m\hat{BAD} + m\hat{DAC}$ .

Na figura 8,  $r$  denota a medida do ângulo  $BAD$ ,  $s$  denota a medida do ângulo  $DAC$  e  $r + s$ , denota a medida do ângulo  $BAC$ .

Figura 8 - Postulado da adição de ângulos.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

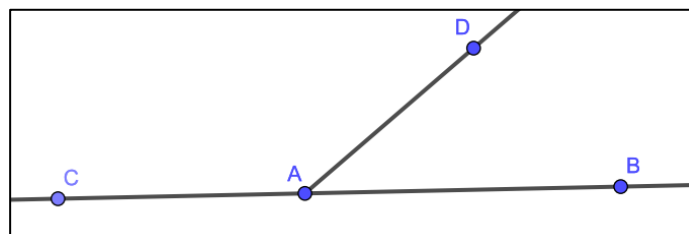
**Definição 2.1.19.** Se a soma das medidas de dois ângulos é  $180^\circ$ , então dizemos que os ângulos são suplementares e que cada um é o suplemento do outro.

**Definição 2.1.20.** Se a soma das medidas de dois ângulos é  $90^\circ$ , então os ângulos são chamados complementares, e cada um é o complemento do outro.

**Definição 2.1.21.** Um ângulo com medida menor que  $90^\circ$  é chamado ângulo agudo, e um ângulo com medida maior que  $90^\circ$  é chamado ângulo obtuso.

**Definição 2.1.22.** Se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são semirretas opostas e  $\overrightarrow{AD}$  é uma outra semirreta, então  $B\hat{A}D$  e  $D\hat{A}C$  formam um par linear.

Figura 9 – Par linear.

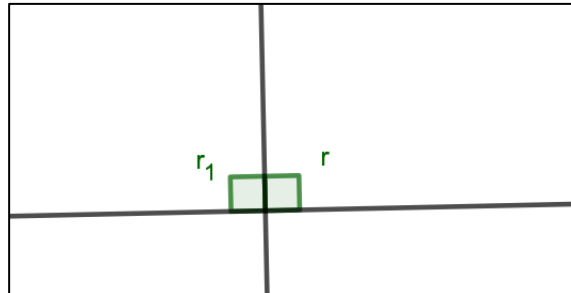


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Postulado 2.1.23. (Postulado do Suplemento)** Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares.

**Definição 2.1.24.** Se dois ângulos de um par linear são congruentes, então cada um é um ângulo reto.

Figura 10 – Ângulo reto.



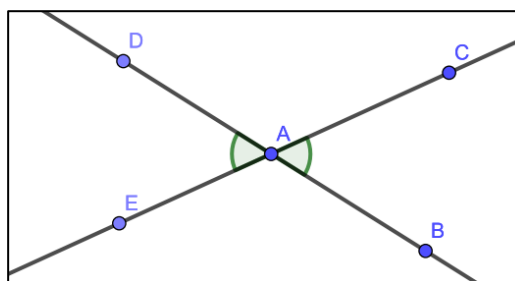
Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Observe que pelo Postulado 2.1.23 temos que um ângulo reto é um ângulo de medida  $90^\circ$ . Portanto, um ângulo é reto se e somente se sua medida é  $90^\circ$ .

**Definição 2.1.25.** Dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semirreta, ou um segmento, são perpendiculares se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta  $r$  é perpendicular a uma reta  $s$ , isso será denotado por  $r \perp s$ .

**Definição 2.1.26.** Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro (Figura 11).

Figura 11 - Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Teorema 2.1.27.** Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

**Demonstração.** Consideremos os ângulos opostos pelo vértice  $B\hat{A}C$  e  $D\hat{A}E$  tais que  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AD}$  sejam dois pares de semirretas opostas. Então, pelo Postulado 2.1.23,  $B\hat{A}C$  e  $C\hat{A}D$ , e  $C\hat{A}D$  e  $D\hat{A}E$  são pares de ângulos suplementares. Assim  $B\hat{A}C$  e  $E\hat{A}D$  têm o mesmo suplemento. Portanto  $mC\hat{A}B = mD\hat{A}E$ .

**Definição 2.1.28.** Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n \geq 3$ , uma seqüência de  $n$  pontos distintos tais que os segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  e  $\overline{A_nA_1}$  têm as seguintes propriedades:

- (a) nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.
- (b) nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

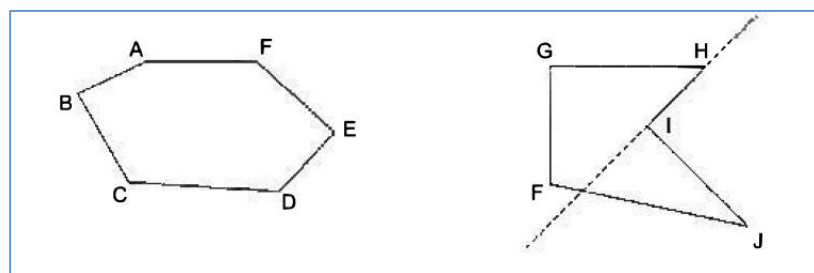
A união dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  e  $\overline{A_nA_1}$  é chamada polígono, o qual denotamos por polígono  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são chamados vértices do polígono e os segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  e  $\overline{A_nA_1}$  são seus lados.

**Definição 2.1.29.** Um polígono é dito convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

Assim é convexo o polígono  $ABCDEF$  abaixo e não é convexo o polígono  $FGHIJ$ .

Figura 12 – Polígono convexo e não convexo.



Fonte: Rezende, 2008, p. 26.

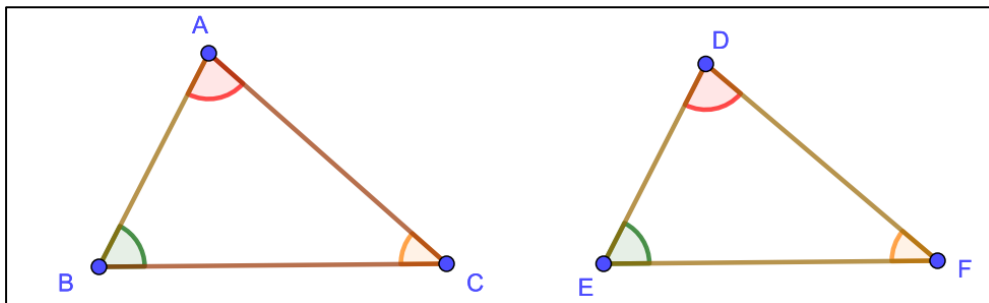
Cada polígono é denominado de acordo com seu número de lados. Dessa forma, um polígono de 3 lados é chamado triângulo; um de 4 lados, quadrilátero; um de 5 lados, pentágono, um de seis lados, hexágono e, assim, um de  $n$  lados é chamado  $n$ -ângono.

Um polígono regular é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois congruentes e seus ângulos dois a dois congruentes.

## 2.2 Congruência de triângulos

**Definição 2.2.1.** Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$ ,  $\hat{C} \cong \hat{F}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ , dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

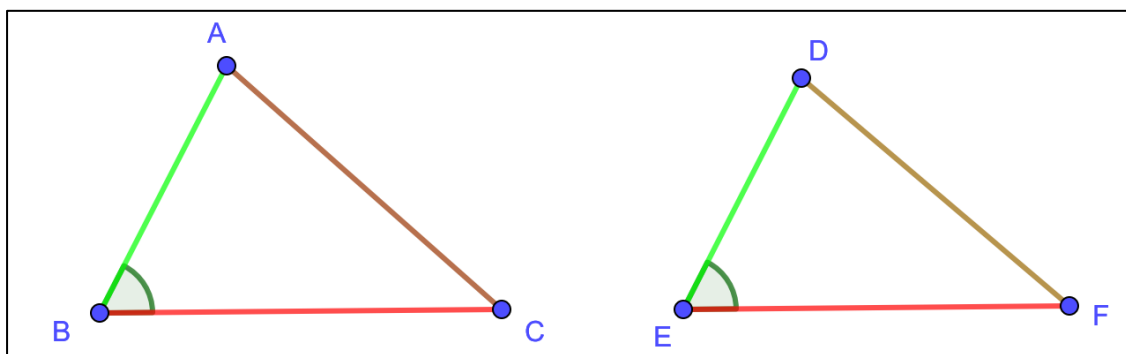
Figura 13 – Triângulos congruentes.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Postulado 2.2.2. (1º Caso de Congruência de Triângulos ou Caso L.A.L.)** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  então  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

Figura 14 – 1º Caso de congruência.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

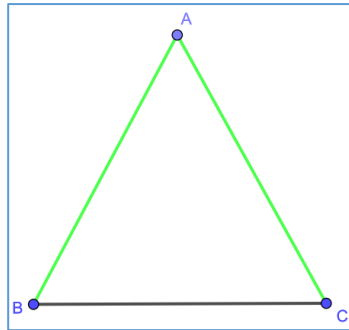
**Teorema 2.2.3. (Teorema do Triângulo Isósceles)** Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

**Demonstração.** Consideremos o triângulo isósceles  $ABC$  com base  $\overline{BC}$  (Figura 16).

Queremos provar que  $\hat{B} \cong \hat{C}$ . Para isso, consideremos a correspondência que leva o triângulo  $ABC$  nele mesmo de modo que  $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C$  e  $C \leftrightarrow B$ .

Por hipótese obtemos  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{AB}$  e, como  $\hat{A} \cong \hat{A}$ , segue, pelo caso L.A.L de congruência de triângulos, que  $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ . Como consequência temos  $\hat{B} \cong \hat{C}$ .

Figura 15 – Triângulo isósceles.

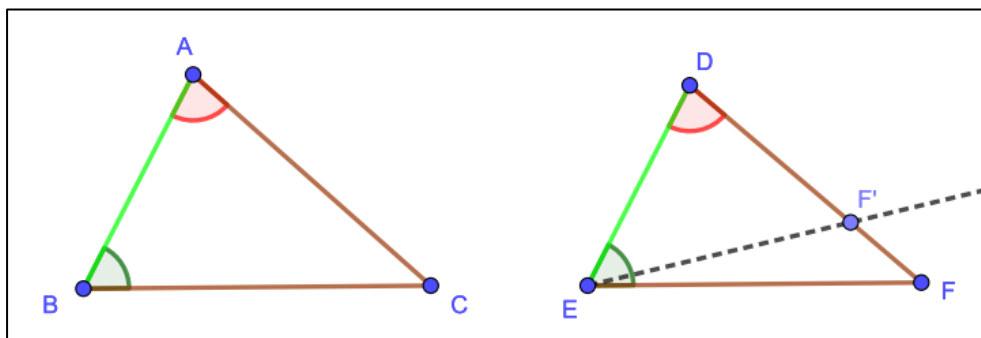


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Teorema 2.2.4. (2º Caso de Congruência de Triângulo ou Caso A.L.A.)** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}, \overline{AB} \cong \overline{DE}$  e  $\hat{B} \cong \hat{E}$ , então os triângulos são congruentes.

**Demonstração.** Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , satisfazendo as hipóteses do teorema (Figura 17).

Figura 16 – 2º Caso de congruência.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Seja  $F'$  um ponto da semirreta  $DF$  tal que  $DF' = AC$ .

Comparemos os triângulos  $ABC$  e  $DEF'$ .

Como  $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \hat{A} \cong \hat{D}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{DF'}$ , segue que eles são congruentes, pelo Postulado 2.2.2. Portanto,  $\hat{B} \cong \hat{E}$ .

Deste fato e da hipótese, segue que  $D\hat{E}F \cong D\hat{E}F'$ . Pelo Postulado 2.1.13,  $\overrightarrow{EF}$  e  $\overrightarrow{EF'}$  coincidem.

Portanto,  $F$  e  $F'$  são o mesmo ponto e temos  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

**Teorema 2.2.5. (3º Caso de Congruência de Triângulos ou Caso L.L.L.)** Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes, então são triângulos congruentes.

**Demonstração.** Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tais que  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ . (Figura 17)

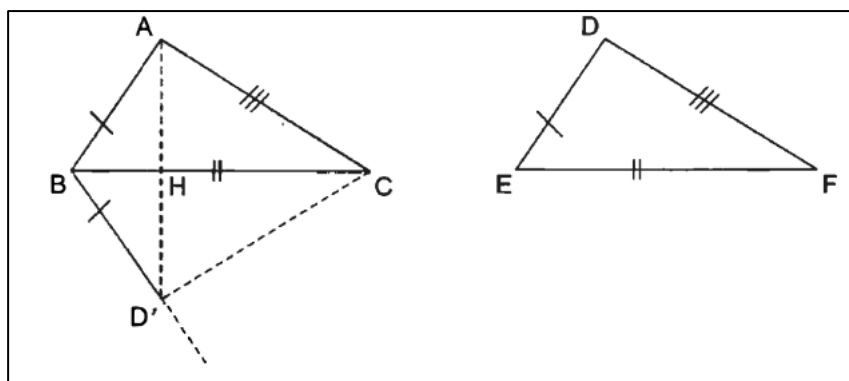
No semiplano determinado por  $\overrightarrow{BC}$  e que não contém o ponto  $A$ , consideremos uma semirreta de origem  $B$  formando com  $\overrightarrow{BC}$  um ângulo congruente ao  $D\hat{E}F$ . Escolhamos sobre ela um ponto  $D'$  tal que  $BD' = DE$ . Pelo caso L.A.L., obtemos  $\Delta D'BC \cong \Delta DEF$ .

Vamos mostrar agora que  $\Delta ABC \cong \Delta D'BC$ .

Seja  $H$  o ponto em que  $\overline{AD'}$  corta  $\overline{BC}$ .

Vamos supor primeiro que  $H$  está entre  $B$  e  $C$  (Figura 17).

Figura 17 – 3º Caso de congruência.



Fonte: Rezende, 2008, p. 35.

Pelo Teorema 2.2.3 aplicado aos triângulos  $BD'A$  e  $CAD'$  respectivamente, obtemos  $B\hat{A}D' \cong B\hat{D}'A$  e  $C\hat{A}D' \cong C\hat{D}'A$ .

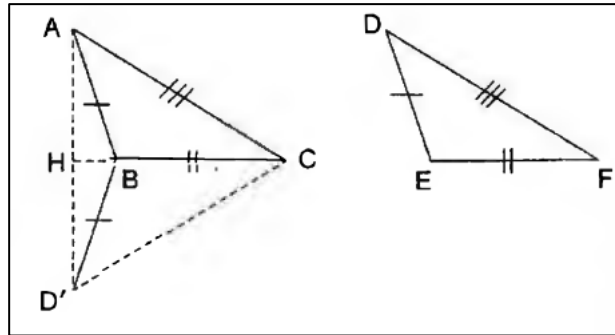
Utilizando o Postulado 2.1.14, obtemos

$$m\hat{B}AC = m\hat{B}AD' + m\hat{D}'AC = m\hat{B}D'A + m\hat{A}D'C = m\hat{B}D'C.$$

Daí, pelo caso L.A.L, segue que  $\Delta ABC \cong \Delta D'BC$ .

No caso em que  $B$  está entre  $H$  e  $C$  como na Figura 18 que segue, ou ainda, no caso em que  $C$  está entre  $B$  e  $H$ , é demonstrado analogamente que  $\Delta D'BC \cong \Delta DEF$  e que  $\Delta ABC \cong \Delta D'BC$ .

Figura 18 – 3º Caso de congruência.

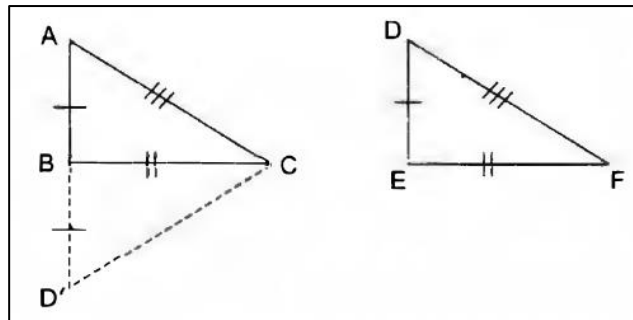


Fonte: Rezende, 2008, p. 36.

Em ambos os casos, por transitividade, obtemos  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

Analisemos agora o caso em que  $H=B$ , isto é,  $A, B$  e  $D'$  são colineares (Figura 19).

Figura 19 – 3º Caso de congruência.



Fonte: Rezende, 2008, p. 36.

Neste caso,  $\hat{A} \cong \hat{D}'$ , pelo Teorema 2.2.3, e, por transitividade,  $\hat{A} \cong \hat{D}$ . Novamente, pelo caso L.A.L, obtemos  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .

Os outros dois casos,  $H=C$  ou  $B-C-H$ , são exatamente análogos aos casos anteriores.

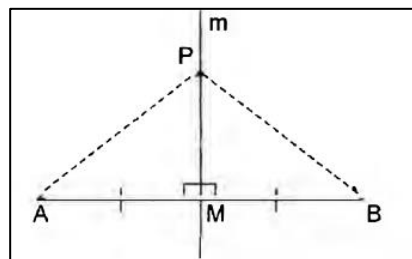
**Definição 2.2.6.** A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio.

Todo segmento tem exatamente um ponto médio, e pelo ponto médio passa exatamente uma reta perpendicular. Assim, a mediatriz é única.

**Teorema 2.2.7.** A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

**Demonstração.** Seja  $\overline{AB}$  um segmento com ponto médio  $M$ . Seja  $m$  a mediatriz de  $\overline{AB}$  e seja  $P$  um ponto pertencente a  $m$ .

Figura 20 – Mediatriz.



Fonte: Rezende, 2008, p. 37.

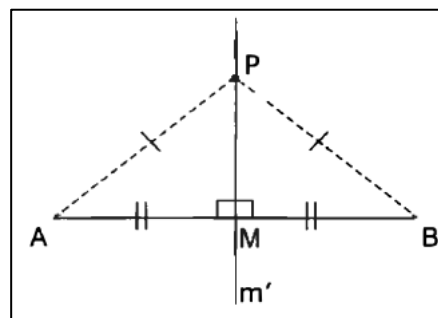
Se  $P$  está em  $\overline{AB}$ , então  $P = M$  e portanto  $PA = PB$ , pela definição de ponto médio.

Se  $P$  não está no  $\overline{AB}$ , então considerando os triângulos  $PMA$  e  $PMB$  temos  $PM = PM$ ,  $MA = MB$  e  $\widehat{PMA} = \widehat{PMB}$  pela hipótese. Pelo Postulado L.A.L de congruência, temos  $\triangle PMA \cong \triangle PMB$ . Portanto,  $PA = PB$ . Nos dois casos obtemos que  $P$  é equidistante dos pontos  $A$  e  $B$ .

Agora, seja  $P$  um ponto equidistante dos pontos  $A$  e  $B$ . Se  $P$  está em  $\overline{AB}$ , então  $P$  coincide com o ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$ , e portanto,  $P$  está em  $m$ .

Consideremos agora o caso em que  $P$  não pertence a  $\overline{AB}$ .

Figura 21 – Mediatriz.

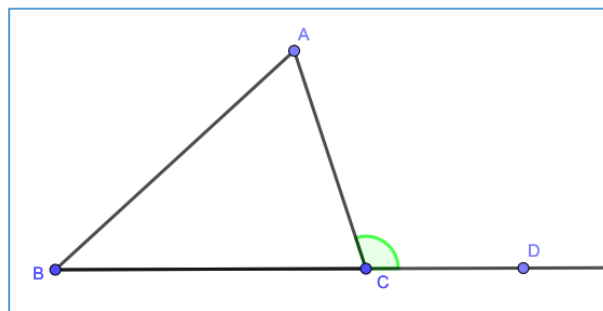


Fonte: Rezende, 2008, p. 38.

Seja  $m' = \overleftrightarrow{PM}$ . Como  $PM = PM$ ,  $MA = MB$  e  $PA = PB$ , pelo caso L.L.L. de congruência, temos  $\triangle PMA \cong \triangle PMB$ . Portanto,  $m\widehat{PMA} = m\widehat{PMB} = 90^\circ$  pela Definição 2.1.24, e, pela Definição 2.1.25,  $m'$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ . Pela unicidade da mediatriz temos  $m = m'$  e, portanto,  $P$  está em  $m$ .

**Definição 2.2.8.** Se  $C$  está entre  $B$  e  $D$  então  $\widehat{ACD}$  é um ângulo externo do triângulo  $ABC$ .

Figura 22 – Ângulo externo.



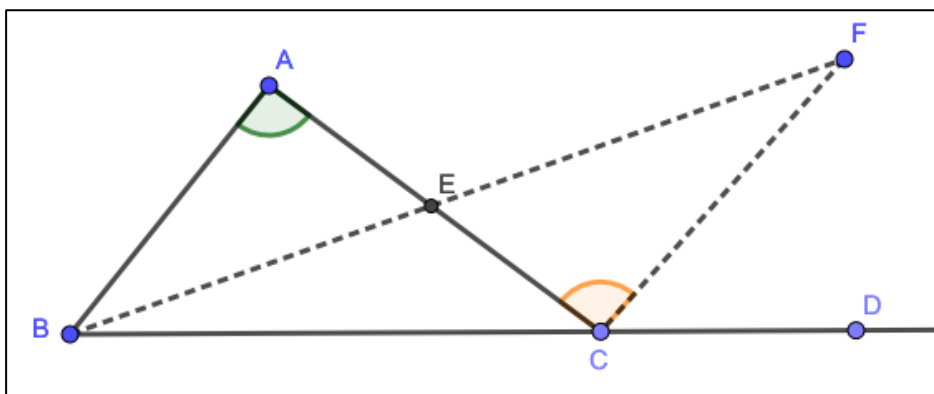
Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Neste caso, os ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  são os ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo  $\widehat{ACD}$ .

**Teorema 2.2.9. (Teorema do Ângulo Externo)** Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.

**Demonstração.** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer.

Figura 23 – Teorema do Ângulo Externo.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Seja  $D$  um ponto tal que  $C$  está entre  $B$  e  $D$ ; vamos demonstrar que  $\hat{A} < \hat{C}$  e  $\hat{A} < \hat{D}$ .

Seja  $E$  o ponto médio de  $\overline{AC}$  e seja  $F$  o ponto da semirreta oposta a  $\overline{EB}$  tal que  $EF = EB$ .

Temos  $\triangle BEA \cong \triangle FEC$  pelo Postulado 2.2.2, já que  $\overline{AE} \cong \overline{CE}$  e  $\overline{BE} \cong \overline{FE}$  por construção e  $\hat{B}EA \cong \hat{F}EC$ , pois são ângulos opostos pelo vértice.

Portanto,  $\hat{A} \cong \hat{C}$ .

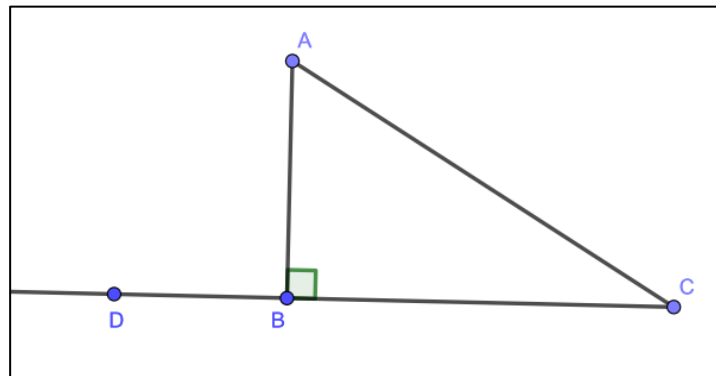
Disso, e verificando que o ponto  $F$  é ponto interior ao ângulo  $ACD$ , pelo Postulado 2.1.18 aplicado aos ângulos  $\hat{ACD}$ ,  $\hat{ACF}$  e  $\hat{FCD}$ , obtemos  $\hat{ACD} > \hat{A}$ .

Analogamente mostramos que  $\hat{ACD} > \hat{D}$ .

**Corolário 2.2.10.** Se um triângulo tem um ângulo reto, então os seus outros dois ângulos são agudos.

**Demonstração.** Consideremos o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $B$ , e o ponto  $D$  com  $B$  entre  $C$  e  $D$ . Observamos que  $\hat{D}BA$  e  $\hat{ABC}$  formam um par linear, portanto ambos são ângulos retos.

Figura 24 – Ângulo agudo.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

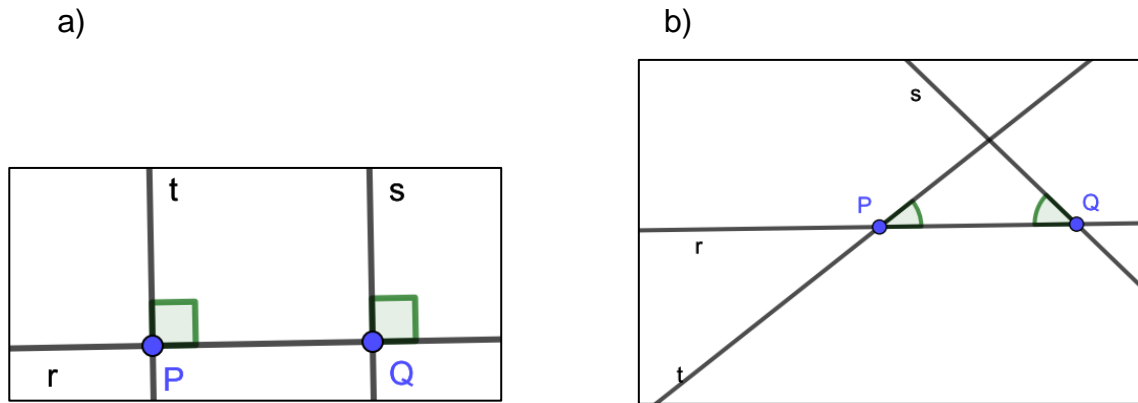
Pelo Teorema 2.2.9,  $m\hat{A}BD > m\hat{C}$ , e portanto  $m\hat{BCA} < 90^\circ$ .

De maneira análoga, podemos mostrar que  $m\hat{BAC} < 90^\circ$ .

**Teorema 2.2.11.** Duas retas distintas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas.

**Demonstração.** Sejam  $s$  e  $t$  retas distintas perpendiculares a uma mesma reta  $r$  (Figura 25(a)).

Figura 25 – Retas paralelas.



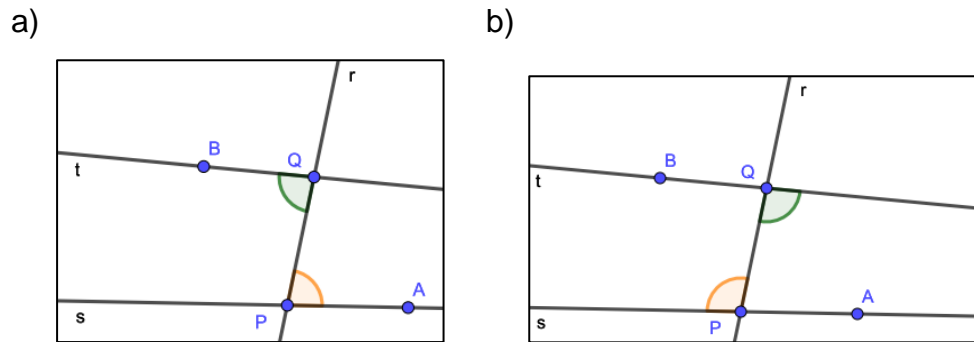
Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Se  $t$  e  $s$  não fossem paralelas (Figura 25(b)),  $r$ ,  $s$  e  $t$  determinariam um triângulo com dois ângulos retos, o que é um absurdo, pois contradiz o Corolário 2.2.10.

**Definição 2.2.12.** Uma reta transversal a duas retas é uma reta que intersecciona essas duas retas em dois pontos distintos. Neste caso, dizemos que as duas retas são cortadas pela transversal.

**Definição 2.2.13.** Seja  $r$  uma transversal às retas  $s$  e  $t$ , interseccionando-as nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Sejam  $A$  um ponto de  $s$  e  $B$  um ponto de  $t$ , tais que  $A$  e  $B$  estejam em lados opostos de  $r$ . Os ângulos  $\widehat{APQ}$  e  $\widehat{BQP}$  são chamados ângulos alternos internos formados por  $s$ ,  $t$  e a transversal  $r$  (Figura 26(a)), assim como os seus suplementares (Figura 26(b)).

Figura 26 – Ângulos alternos internos.



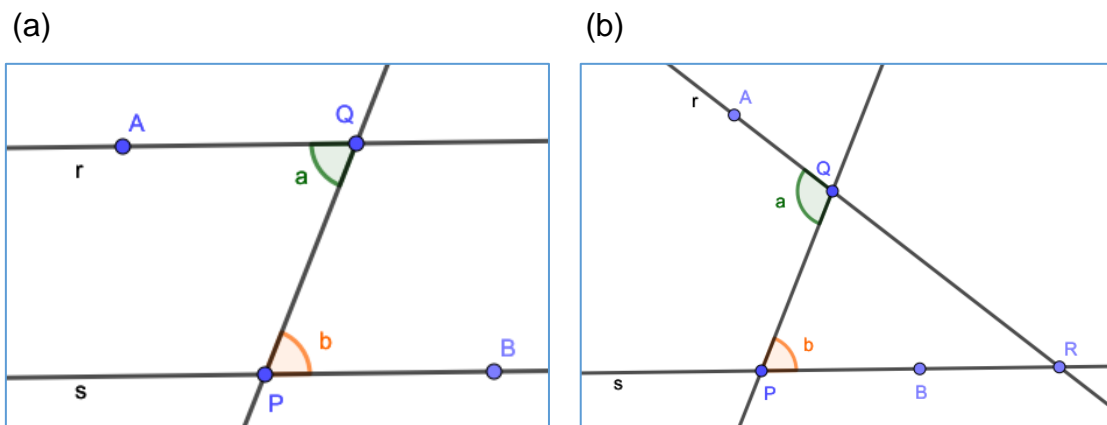
Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Teorema 2.2.14.** Se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.

**Demonstração.** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas cortadas por uma transversal nos pontos  $P$  e  $Q$  respectivamente. Na figura 27 (a) e (b),  $a$  denota a medida do ângulo  $PQA$  e  $b$  denota a medida do ângulo  $BPQ$ .

Sejam  $a$  e  $b$  os ângulos alternos internos congruentes.

Figura 27 – Ângulos alternos internos.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Se  $r$  e  $s$  se interseccionam em algum ponto  $R$ , como na Figura 27(b), elas formam um triângulo  $RQP$  do qual  $a$  é um ângulo externo, sendo  $b$  um ângulo interno não adjacente a ele.

Pelo Teorema 2.2.9 temos  $a > b$ , o que contradiz nossa hipótese.

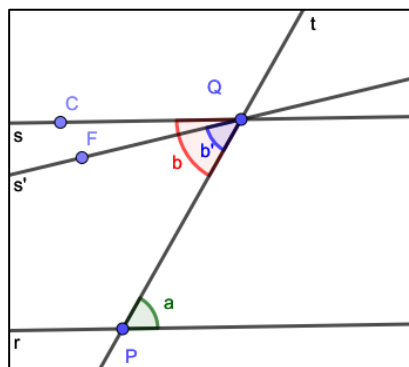
Logo,  $r$  e  $s$  são paralelas.

**Postulado 2.2.15. (Postulado das Paralelas)** Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.

**Teorema 2.2.16.** Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

**Demonstração.** Consideremos as retas paralelas  $r$  e  $s$ , e uma transversal  $t$  que as corta nos pontos  $P$  e  $Q$  respectivamente.

Figura 28 – Ângulos alternos internos nas paralelas.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Na Figura 28,  $a$  denota a medida do ângulo  $APQ$ ,  $b$  denota a medida do ângulo  $CQP$  e  $b'$  denota a medida do ângulo  $FQP$ .

Suponhamos que os ângulos alternos internos  $a$  e  $b$  não sejam congruentes.

Seja  $s'$  uma reta que passa por  $Q$  formando com  $r$  e  $t$  os ângulos alternos internos  $a$  e  $b'$  congruentes.

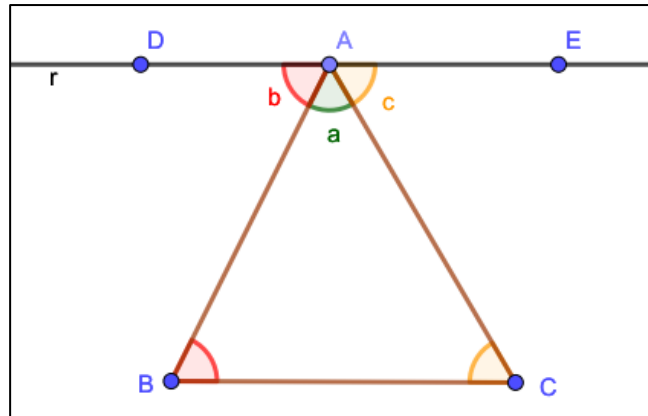
Pelo Teorema 2.2.14, a reta  $s'$  é paralela a reta  $r$ . Disso e da hipótese temos, pois, passando por  $Q$ , duas retas  $s$  e  $s'$ , ambas paralelas à reta  $r$ .

Isto contradiz o Postulado 2.1.19. Logo  $a = b$ .

**Teorema 2.2.17.** A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ .

**Demonstração.** Dado o  $\triangle ABC$ , seja  $r$  a reta paralela ao lado  $\overline{BC}$  e passando pelo vértice  $A$ . Na Figura 29,  $a$  denota a medida do ângulo  $BAC$ ,  $b$  denota a medida do ângulo  $BAD$  e  $c$  denota a medida do ângulo  $CAE$ . Consideremos os ângulos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , como aparecem na figura.

Figura 29 – Ângulos internos de um triângulo.



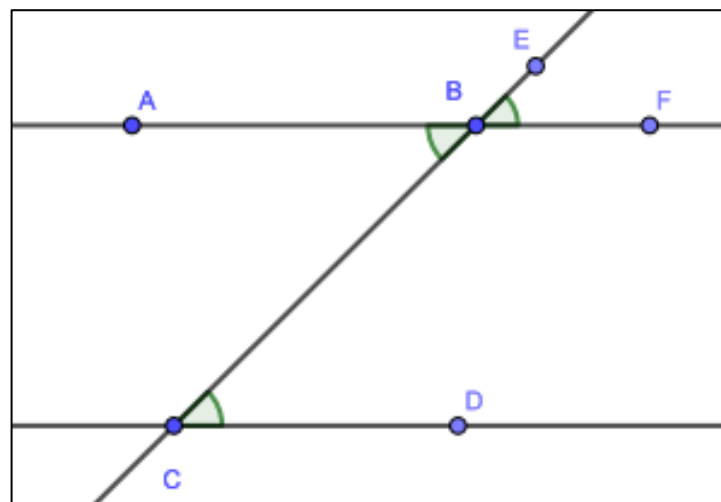
Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Utilizando os Postulados da Adição de Ângulos e do Suplemento chegamos a:  $a + b + c = 180^\circ$ .

Como  $\overrightarrow{AB}$  é transversal a  $\overrightarrow{BC}$  e a  $r$ , temos, pelo Teorema 2.2.16, que  $b \cong \widehat{ABC}$ . Analogamente, mostramos que  $c \cong \widehat{ACB}$ . Logo  $m\widehat{BAC} + m\widehat{ABC} + m\widehat{BCA} = 180^\circ$ .

**Definição 2.2.18.** Sejam  $DCB$  e  $ABC$  ângulos alternos internos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Se  $EBF$  é tal que  $ABC$  e  $EBF$  são ângulos opostos pelo vértice, então  $DCB$  e  $EBF$  são ditos ângulos correspondentes.

Figura 30 – Ângulos correspondentes.

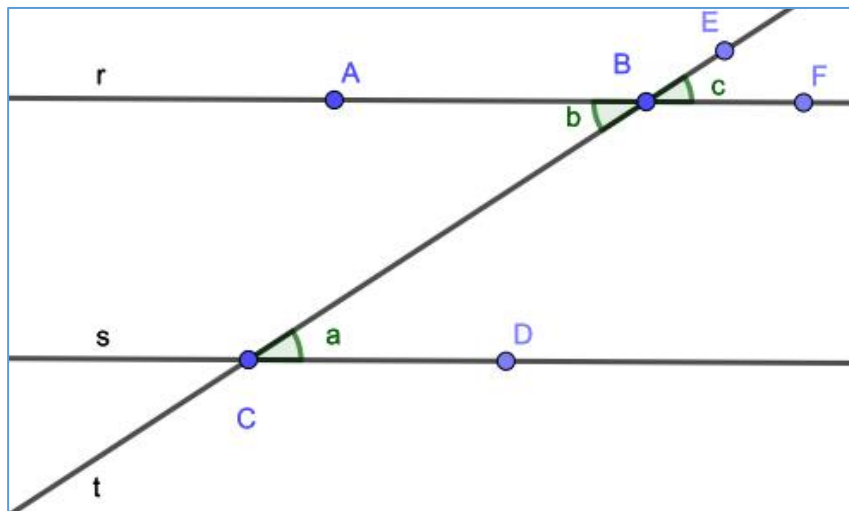


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Teorema 2.2.19.** Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes.

**Demonstração.** Consideremos as retas  $r$  e  $s$  paralelas e cortadas pela transversal  $t$  nos pontos  $B$  e  $C$ , respectivamente (Figura 31). Na Figura 31,  $a$  denota a medida do ângulo  $BCD$ ,  $b$  denota a medida do ângulo  $ABC$  e  $c$  denota a medida do ângulo  $EBF$ . Consideremos os ângulos alternos internos  $a$  e  $b$ , logo são congruentes pelo Teorema 2.2.16. Consideremos também os ângulos opostos pelo vértice  $b$  e  $c$ , logo são congruentes pelo Teorema 2.1.27.

Figura 31 – Ângulos correspondentes.

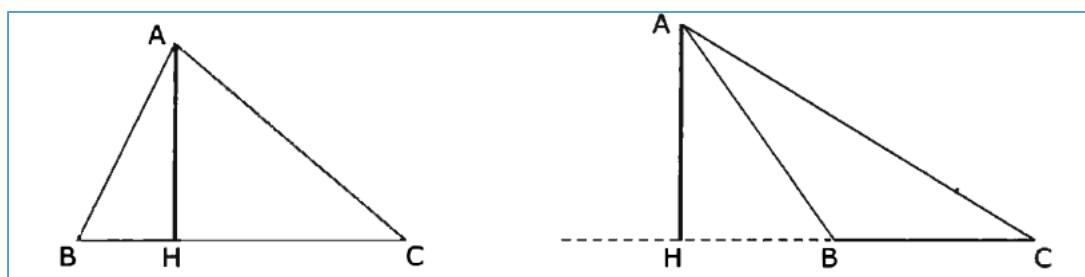


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Como  $a$  é congruente a  $b$  e  $b$  é congruente a  $c$ , logo  $a$  e  $c$  são congruentes.

**Definição 2.2.20.** Uma altura de um triângulo é o segmento perpendicular que une um vértice do triângulo à reta que contém o lado oposto a esse vértice.

Figura 32 – Altura de triângulo.



Fonte: Rezende, 2008, p. 46.

Na Figura 32, denotamos por  $\overline{AH}$  a altura desde  $A$  a  $\overline{BC}$ , ou altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Nem sempre a altura relativa a um lado de um triângulo encontra esse lado, mas, sempre encontra a reta suporte desse lado (Figura 32).

### 2.3 Semelhança de triângulos

Antes da apresentação de Semelhança de Triângulos, falaremos sobre alguns assuntos necessários para as demonstrações.

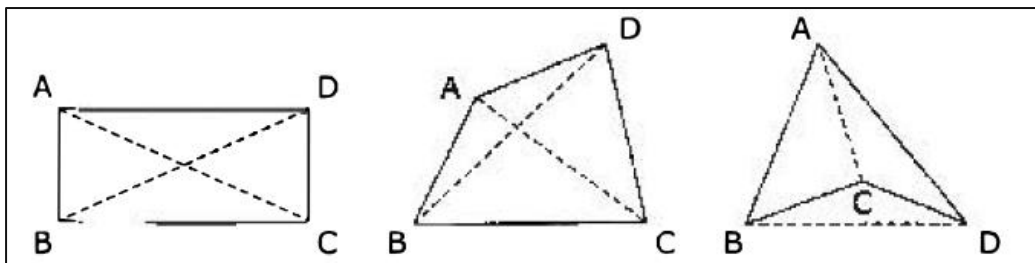
**Definição 2.3.1.** Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Lados opostos de um quadrilátero são dois de seus lados que não se interseccionam.

Dois lados são consecutivos se têm um vértice comum.

Uma diagonal é um segmento que une dois vértices não consecutivos.

Figura 33 – Quadriláteros com diagonais.



Fonte: Rezende, 2008, p. 60.

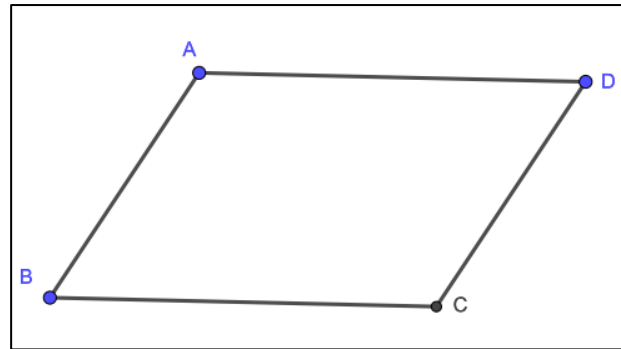
Nos quadriláteros  $ABCD$  (Figura 33),  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são lados opostos, também o são os lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$ .

Os lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{CD}$  ou  $\overline{AD}$  e  $\overline{AB}$ , por exemplo, são lados consecutivos, e  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  são diagonais.

Consideremos um quadrilátero convexo. Nele, dois ângulos são opostos se não têm um lado comum, caso contrário, são chamados ângulos consecutivos.

**Definição 2.3.2.** Um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos (Figura 34).

Figura 34 – Paralelogramo.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Teorema 2.3.3.** Em um paralelogramo valem as seguintes propriedades:

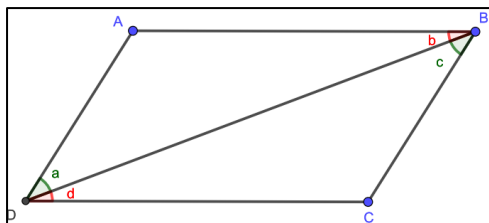
- Dois ângulos opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.
- Dois lados opostos quaisquer em um paralelogramo são congruentes.

**Demonstração.** Considere um paralelogramo  $ABCD$ . Pela definição temos que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Na Figura 35(a),  $a$  denota a medida do ângulo  $ADB$ ,  $b$  denota a medida do ângulo  $ABD$ ,  $c$  denota a medida do ângulo  $CBD$  e  $d$  denota a medida do ângulo  $BDC$ . Na figura 35(b),  $e$  denota a medida do ângulo  $BAC$ ,  $f$  denota a medida do ângulo  $CAD$ ,  $g$  denota a medida do ângulo  $ACD$  e  $h$  denota a medida do ângulo  $ACB$ .

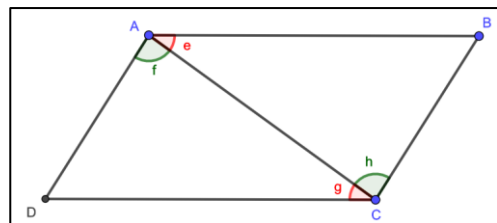
a)  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  temos  $\overline{BD}$  como transversal (Figura 35(a)). Portanto, os ângulos  $b = d$  pelo Teorema 2.2.16, pois são alternos internos. Analogamente,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  e  $\overline{BD}$  como transversal. Portanto,  $a = c$ . Logo, pelo Postulado 2.1.18,  $a + d = b + c$ . Analogamente,  $e + f = g + h$  (Figura 35(b)). Portanto, dois ângulos opostos quaisquer de um paralelogramo são congruentes.

Figura 35 – Propriedades no paralelogramo.

(a)



(b)



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

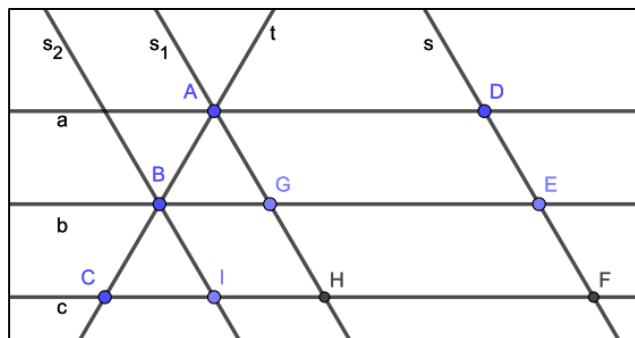
b) Pela demonstração do item a) temos que  $a = c$  e  $b = d$ , pois são alternos internos. Ainda,  $\overline{BD}$  é comum aos triângulos  $ABD$  e  $CDB$ . Logo, pelo Teorema 2.2.4, o  $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ . Assim,  $AB = CD$  e  $AD = BC$ . Portanto, dois lados opostos quaisquer de um paralelogramo são congruentes.

**Teorema 2.3.4.** Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes sobre uma transversal, então determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

**Demonstração.** Consideremos uma transversal  $t$  interseccionando as retas paralelas  $a$ ,  $b$  e  $c$  nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, com  $AB = BC$ . Seja  $s$  uma outra transversal interseccionando estas retas nos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Vamos mostrar que  $DE = EF$ .

Demonstraremos primeiro o teorema no caso em que  $s$  e  $t$  não são paralelas e  $A \neq D$  (Figura 36).

Figura 36 – Paralelas e transversais.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Seja  $s_1$  a reta paralela a  $s$  que passa por  $A$ , e que intersecciona  $b$  e  $c$  em  $G$  e  $H$ , respectivamente; e seja  $s_2$  a reta paralela a  $s$  que passa por  $B$ , e que intersecciona a reta  $c$  em  $I$ . Temos assim formados os paralelogramos  $AGED$  e  $BIFE$ , e disso decorre

$$\overline{AG} \cong \overline{DE} \text{ e } \overline{BI} \cong \overline{EF}. \quad (1)$$

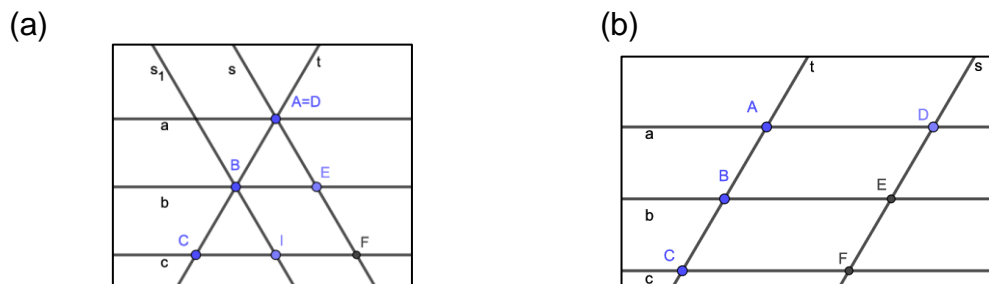
Pelo Teorema 2.2.4, de congruência, temos que  $\Delta ABG \cong \Delta BCI$  pois  $AB = BC$ , por hipótese;  $\hat{A} \cong \hat{C}$  e  $\hat{B} \cong \hat{B}$ , ambos pelo Teorema 2.2.18. Portanto,  $AG = BI$ .

Substituindo em (1) obtemos  $DE = EF$ .

Vamos considerar o caso em que as transversais se interseccionam em um ponto  $A$  da reta  $a$  (Figura 37(a)). Seja  $s_1$  a reta que passa por  $B$ , paralela a  $s$  e que intersecciona  $c$  em  $I$ . Temos que  $\triangle ABE \cong \triangle BCI$  (pelo Teorema 2.2.4 de congruência) e portanto,  $AE = BI$ . Como  $BIFE$  é um paralelogramo, temos  $BI = EF$ . Portanto,  $AE = EF$ , isto é,  $DE = EF$ .

No caso em que as duas transversais  $s$  e  $t$  são paralelas, como na Figura 37 (b), os resultados decorrem imediatamente das propriedades dos paralelogramos.

Figura 37 - Paralelas e transversais.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

**Corolário 2.3.5.** Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

**Lema 2.3.6.** Dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$ , temos  $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$  onde  $n$  e  $m$  são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento  $c$  tal que  $AB = nc$  e  $CD = mc$ .

**Demonstração.** Sejam dados os segmentos  $AB$  e  $CD$  e os números positivos  $n$  e  $m$  tais que  $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$ . Sejam  $P_0 = A, P_1, \dots, P_n = B$ ,  $n+1$  pontos em  $\overline{AB}$ , tais que  $\overline{P_0P_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \dots \cong \overline{P_{n-1}P_n}$ . Seja  $c$  o comprimento de tais segmentos.

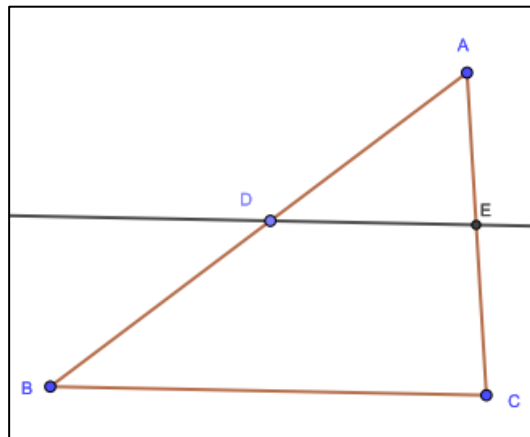
Então,  $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc}$ . Como, por construção,  $AB = nc$ , segue que  $CD = mc$ .

A recíproca é imediata.

**Teorema 2.3.7. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)** Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

**Demonstração.** Consideremos o triângulo  $ABC$  (Figura 39). Seja  $r$  uma reta paralela ao lado  $\overline{BC}$  a qual intersecciona os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, nos pontos  $D$  e  $E$ . Vamos mostrar que  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ .

Figura 38 – Triângulo  $ABC$  e reta paralela

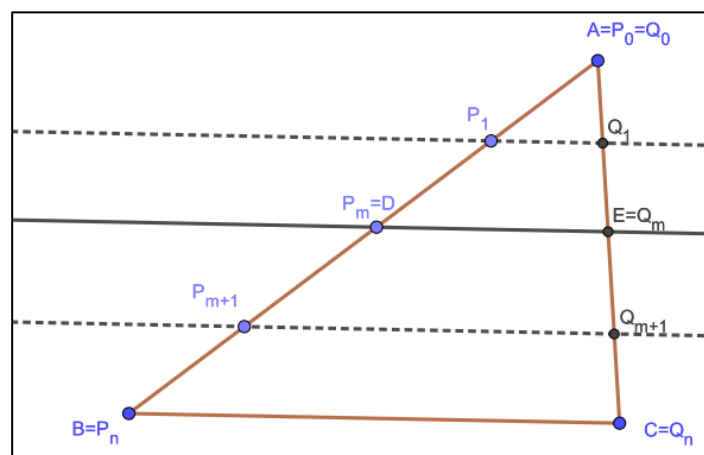


Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Iniciamos considerando o caso em que  $\frac{AB}{AD}$  é um número racional, isto é  $\frac{AB}{AD} = \frac{n}{m}$  com  $m$  e  $n$  números inteiros positivos. Pelo Lema 2.3.6, existe um segmento de comprimento  $c$  tal que  $AD = mc$  e  $AB = nc$ , e ainda com  $m < n$  pois  $AD < AB$ .

Consideremos então em  $\overline{AB}$  os pontos  $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n$ , com  $P_0 = A$ ,  $P_m = D$  e  $P_n = B$  tais que  $P_i P_{i+1} = c$ , com  $i = 0, \dots, m, \dots, n - 1$  (Figura 40).

Figura 39 – Retas paralelas a  $\overline{BC}$ .



Fonte: elaborado pelo professor/autor.



Das desigualdades (2) e (4),

$$\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m} < \frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\left| \frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} \right| < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

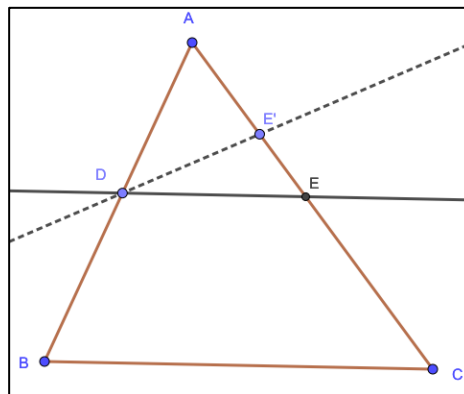
Como essa desigualdade vale para qualquer número inteiro positivo  $m$ , temos

$$\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} = 0, \text{ ou seja, } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

**Teorema 2.3.8.** Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

**Demonstração.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Consideremos a reta  $DE$  onde  $D$  é um ponto entre  $A$  e  $B$ , e  $E$  é um ponto entre  $A$  e  $C$  com  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ .

Figura 41 – Lados proporcionais no triângulo  $ABC$ .



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Seja  $\overleftrightarrow{DE'}$  a reta passando por  $D$ , paralela à  $\overleftrightarrow{BC}$  e interseccionando  $\overleftrightarrow{AC}$  no ponto  $E'$ . Pelo Teorema 2.3.7 temos  $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE'}$  e, portanto,  $AE' = AC \frac{AD}{AB}$ . Mas, por hipótese, temos  $AE = AC \frac{AD}{AB}$ .

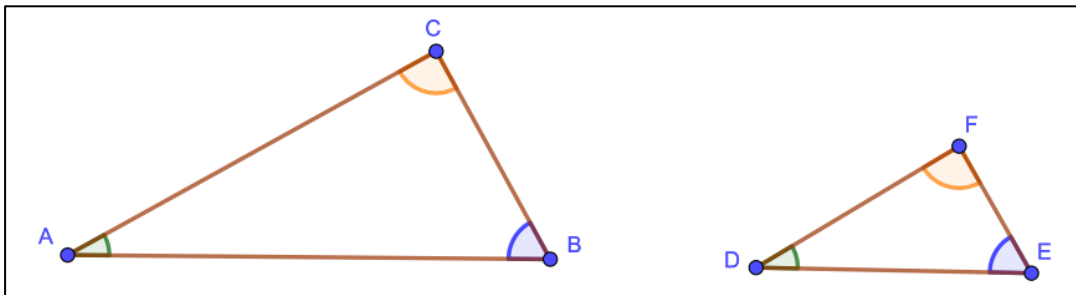
Portanto,  $AE' = AE$ . Logo,  $E = E'$ , e  $\overleftrightarrow{DE}$  é paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$ .

Agora iremos apresentar a teoria que usaremos nas atividades sugeridas com os alunos.

**Definição 2.3.9.** Seja  $S$  uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência  $S$  é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.

Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  como na Figura 42.

Figura 42 – Semelhança de triângulos.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Escrevemos  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  para denotar que o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $DEF$ , com a correspondência que leva  $A$  em  $D$ ,  $B$  em  $E$  e  $C$  em  $F$ .

Dessa maneira, se  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  temos  $m\hat{A} = m\hat{D}$ ,  $m\hat{B} = m\hat{E}$ ,  $m\hat{C} = m\hat{F}$  e

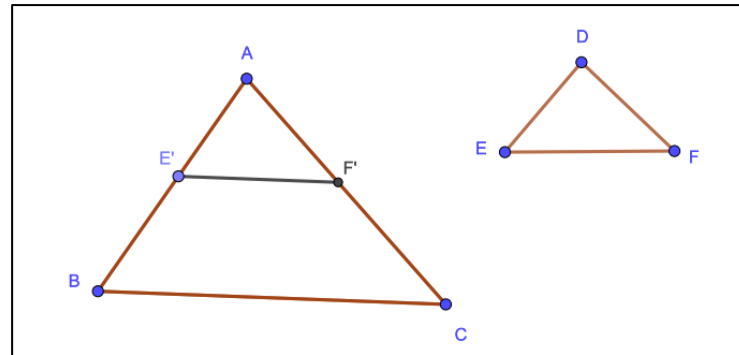
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade ou razão de semelhança entre os dois triângulos.

**Teorema 2.3.10. (O Teorema de Semelhança A.A.A.)** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

**Demonstração.** Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  satisfazendo as hipóteses do teorema.

Figura 43 - Semelhança A.A.A..



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Consideremos  $E'$  e  $F'$  pontos de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, tais que  $AE' = DE$  e  $AF' = DF$ . Pelo Postulado 2.2.2, temos que  $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$ .

Portanto, pela hipótese,  $\widehat{AE'F'} \cong \widehat{D}$ . Assim,  $\overline{E'F'}$  e  $\overline{BC}$  são paralelas ou coincidem. Se coincidem, então, pelo caso de congruência A.L.A., temos  $\triangle AE'F' \cong \triangle ABC$ , e, portanto, os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes. Daí os ângulos correspondentes são congruentes e  $AB = DE$ ,  $AC = DF$  e  $BC = EF$ , ou seja,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = 1.$$

Logo,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Se  $\overline{E'F'}$  e  $\overline{BC}$  são paralelas, então pelo Teorema 2.3.7, temos  $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$ . Como  $AE' = DE$  e  $AF' = DF$ , temos  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ .

Considerando um ponto  $G'$  entre  $B$  e  $C$  tal que  $G'C = EF$  e argumentando de modo análogo ao que foi feito anteriormente, concluímos que  $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ . Assim,  $\frac{AB}{DE} =$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

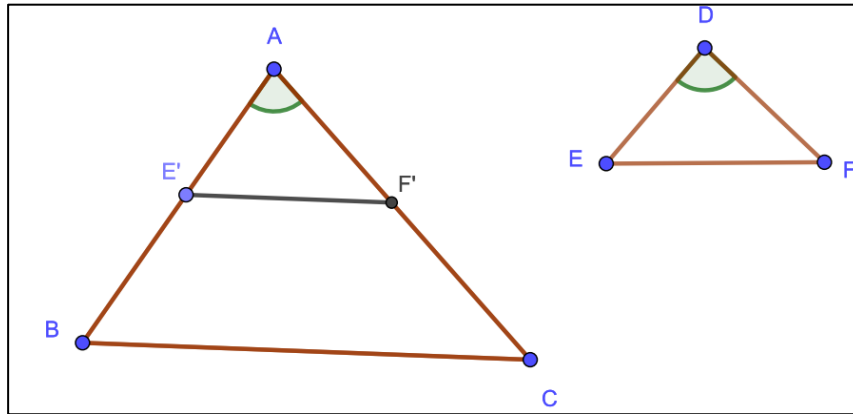
Logo,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

**Corolário 2.3.11.** Seja  $S$  uma correspondência entre os vértices de dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência  $S$  é uma semelhança.

**Teorema 2.3.12. (O Teorema de Semelhança L.A.L.)** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\widehat{A} \cong \widehat{D}$  e  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

**Demonstração.** Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  satisfazendo as hipóteses do teorema.

Figura 44 – Triângulos  $ABC$  e  $DEF$ .



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Consideremos  $E'$  e  $F'$  pontos de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente, tais que  $AE' = DE$  e  $AF' = DF$ . Temos  $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$ .

Portanto, pelo Teorema 2.3.8, obtemos que  $\overleftrightarrow{E'F'}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$  são paralelas. Assim, pelo Teorema 2.2.19, temos  $\hat{B} \cong \widehat{AE'F'}$  e  $\hat{C} \cong \widehat{AF'E'}$ .

Mas, pelo Postulado 2.2.2. de congruência de triângulos, os triângulos  $AE'F'$  e  $DEF$  são congruentes. Portanto, temos  $\widehat{AE'F'} \cong \hat{E}$  e  $\widehat{AF'E'} \cong \hat{F}$ .

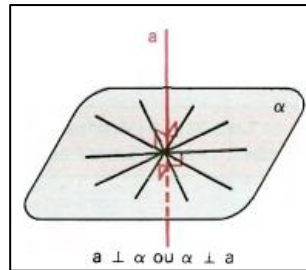
Logo,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ . Pelo Corolário 2.3.11 temos  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

## 2.4 Pirâmide

Temos aqui outra parte muito importante para a realização das atividades propostas com o app. Sendo que a imagem em realidade aumentada que vemos é de uma pirâmide

**Definição 2.4.1.** Dizemos que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo seu ponto de interseção com ele (Figura 45).

Figura 45 – Reta perpendicular ao plano.

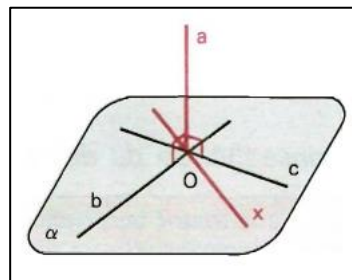


Fonte: Dolce, 2002, p. 35.

**Teorema 2.4.2.** Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

**Demonstração.** Sejam  $\alpha$  um plano,  $a$ ,  $b$  e  $c$  três retas, sendo  $a \perp b$ ,  $a \perp c$ ,  $b \cap c = \{O\}$ ,  $b \subset \alpha$  e  $c \subset \alpha$ . Para provarmos que  $a \perp \alpha$ , devemos provar que  $a$  é perpendicular a todas as retas de  $\alpha$  que passam por  $O$ . Para isso, basta provarmos que  $a$  é perpendicular a uma reta  $x$  genérica de  $\alpha$ , que passa por  $O$ .

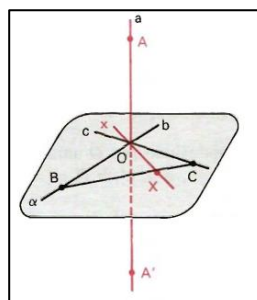
Figura 46 - Reta perpendicular ao plano.



Fonte: Dolce, 2002, p. 36.

Tomemos na reta  $a$  dois pontos  $A$  e  $A'$ , simétricos em relação a  $O$ :  $AO = A'O$  (Figura 47).

Figura 47 - Reta perpendicular ao plano.



Fonte: Dolce, 2002, p. 37.

Tomemos ainda um ponto  $B \in b$  e um ponto  $C \in c$ , tais que  $\overline{BC}$  intercepta  $x$  num ponto  $X$  (basta que  $B$  e  $C$  estejam em semiplanos opostos em relação a  $x$ ).

Notemos que, nessas condições,  $b$  e  $c$  são mediatrizes de  $\overline{AA'}$ . Pelo Teorema 2.2.7 da mediatriz,  $AB = A'B$  e  $AC = A'C$ .

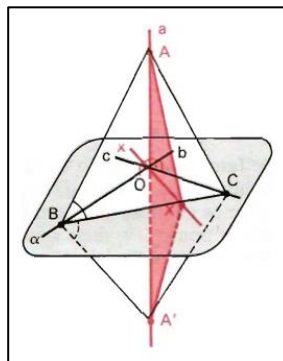
Notemos ainda que, para chegarmos à tese, basta provarmos que  $x$  é mediatriz de  $\overline{AA'}$ .

Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $A'BC$ . Temos:

$(AB = A'B, AC = A'C, \overline{BC}$  comum)  $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'BC \Rightarrow \widehat{ABC} \cong \widehat{A'BC} \Rightarrow \widehat{ABX} \cong \widehat{A'BX}$

$(AB = A'B, \widehat{ABX} \cong \widehat{A'BX}, \overline{BX}$  comum)  $\Rightarrow \Delta ABX \cong \Delta A'BX \Rightarrow XA = XA'$ .

Figura 48 - Reta perpendicular ao plano.

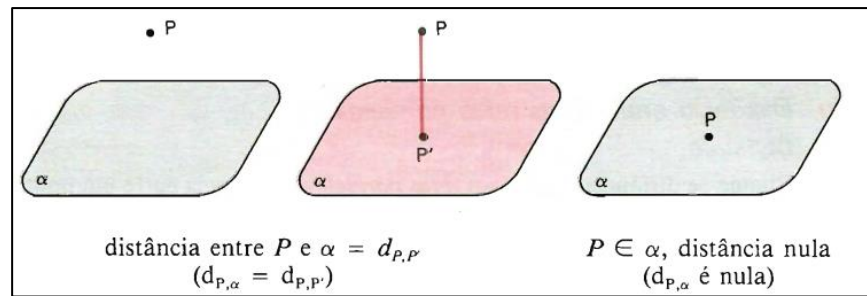


Fonte: Dolce, 2002, p. 37.

$XA = XA' \Rightarrow$  a reta  $x$  é mediatriz de  $\overline{AA'}$   $\Rightarrow x \perp a \Rightarrow a \perp x$  e  $x$  genérica,  $x \subset \alpha, O \in x \Rightarrow a \perp \alpha$ .

**Definição 2.4.3.** Chama-se distância entre um ponto e um plano à distância entre esse ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto (Figura 49).

Figura 49 – Distância de ponto ao plano.



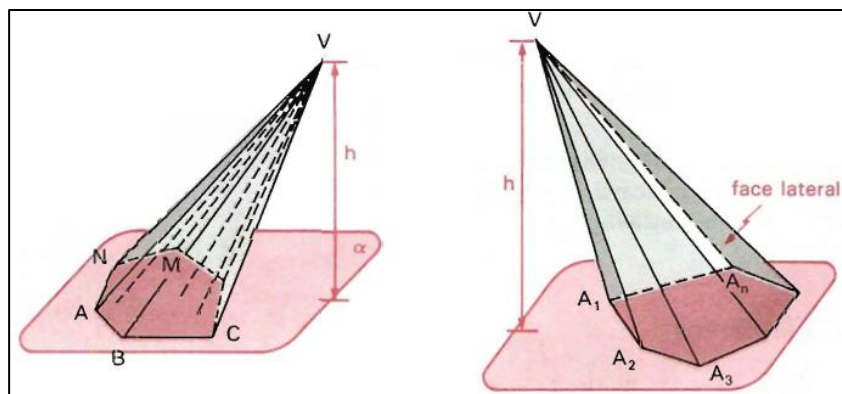
Fonte: Dolce, 2002, p. 60.

A distância entre um ponto  $P$  e um plano  $\alpha$  é a medida do segmento de reta  $\overline{PP'}$ , perpendicular ao plano, com uma extremidade no ponto  $P$  e a outra em  $P'$  no plano  $\alpha$  ou qualquer segmento congruente a  $\overline{PP'}$ . A medida do segmento  $\overline{PP'}$  (ou qualquer segmento congruente a ele) é indicado para ser a distância entre  $P$  e  $\alpha$ , porque de todos os segmentos com uma extremidade em  $P$  e outra em  $\alpha$ ,  $\overline{PP'}$  é o menor. Logo, a distância entre  $P$  e o plano  $\alpha$  é a menor das distâncias entre o ponto  $P$  e os pontos de  $\alpha$ .

**Definição 2.4.4.** Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa)  $A_1A_2A_3\dots A_n$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se pirâmide (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do polígono.

O ponto  $V$  é chamado vértice da pirâmide e o polígono  $A_1A_2A_3\dots A_n$ , a sua base.

Figura 50 – Pirâmide.



Fonte: Dolce, 2002, p.186.

## Elementos

Uma pirâmide possui: 1 base (o polígono convexo  $A_1A_2A_3\dots A_n$ ),  $n$  faces laterais (triângulos),  $n + 1$  faces,  $n$  arestas laterais,  $2n$  arestas e  $n + 1$  vértices.

A altura de uma pirâmide é a distância  $h$  entre o seu vértice e o plano da base.

**Definição 2.4.5.** Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Chama-se apótema de uma pirâmide regular à altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.

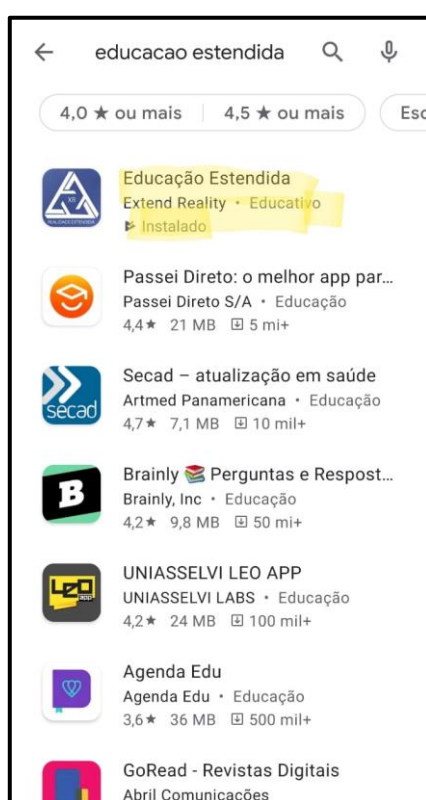
**Definição 2.4.6.** Secção é uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

**Observação.** A secção obtida ao interseccionar uma pirâmide quadrangular regular por um plano perpendicular a base contendo a altura da pirâmide é um triângulo isósceles.

### 3 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Neste capítulo contém a proposta de uma sequência de atividades para o ensino de Semelhança de Triângulos e Pirâmide, utilizando como ferramenta o aplicativo matemático de realidade aumentada Educação Estendida encontrado na Play Store (Figura 51). A sequência didática é composta de aspectos históricos da matemática, exercícios tradicionais e situações problemas.

Figura 51 – Play Store.



Fonte: print do celular do autor.

#### 3.1 Apresentação do aplicativo

O aplicativo (app) desenvolvido é um app de realidade aumentada, ou seja, quando funcionando ele traz a realidade aos olhos do usuário. Ele faz surgir objetos, ‘aparentemente reais”, se o ambiente é visto pelo celular. Ele pode ser obtido gratuitamente na Google Play (celulares android – Figura 51) e na Play Store (celulares ios). Seu nome é Educação Estendida (Figura 53).

O ícone ativador do app está na Figura 52. O ativador é como um alvo que faz o objeto surgir sobre ele. Depois de baixado no celular e colocado em

funcionamento (Figura 54) vamos trabalhar com a ferramenta Pirâmide, botão . Após abrir, a figura da pirâmide irá aparecer no ativador (Figura 55).



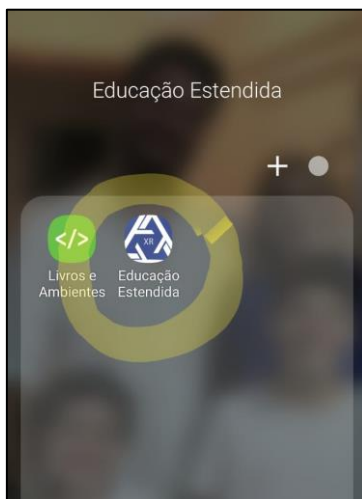
O aplicativo foi desenvolvido pelo autor Fabrício José Oliveira Caliani, com a função de desenvolvedor, programado por Gabriel Ferreira Abou Rejaili e Pedro Henrique Lima Cabral. O aplicativo foi desenvolvido durante o ano de 2020 e colocado a disposição para download no mês de dezembro.

Figura 52 – Ativador.



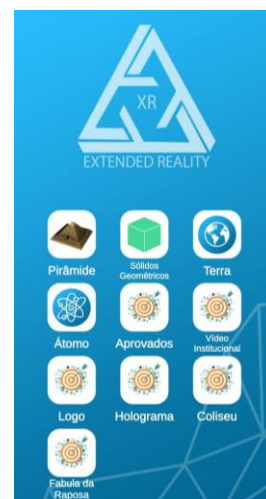
Fonte: arquivo pessoal do autor.

Figura 53 - Ícone do aplicativo.



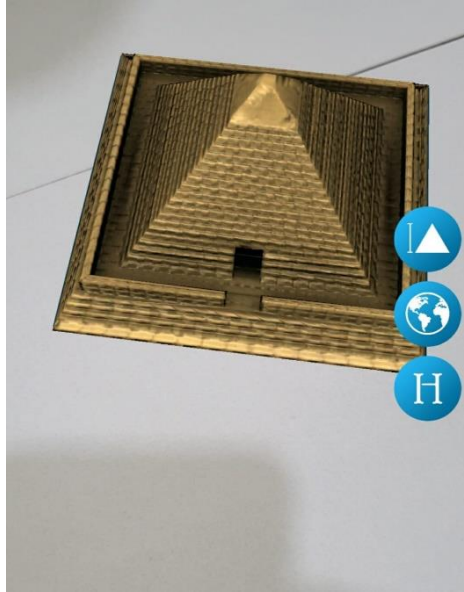
Fonte: print do celular do autor.

Figura 54 - Tela inicial do aplicativo.



Fonte: print do celular do autor.

Figura 55 - Imagem inicial da pirâmide do aplicativo.



Fonte: print do celular do autor.

Nas atividades propostas iremos utilizar a imagem inicial de uma pirâmide do Egito (Figura 55) e quatro interações que existem no app (Figuras 56, 57, 58 e 59).


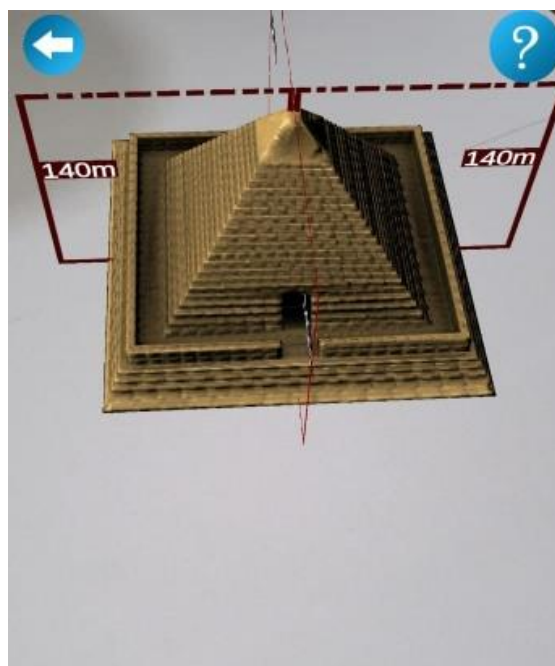
O primeiro botão do lado direito , quando clicado, aparece a medida da altura de uma pirâmide real, 140 metros (Figura 56).

Figura 56 - Altura real da pirâmide.



Fonte: print do celular do autor.


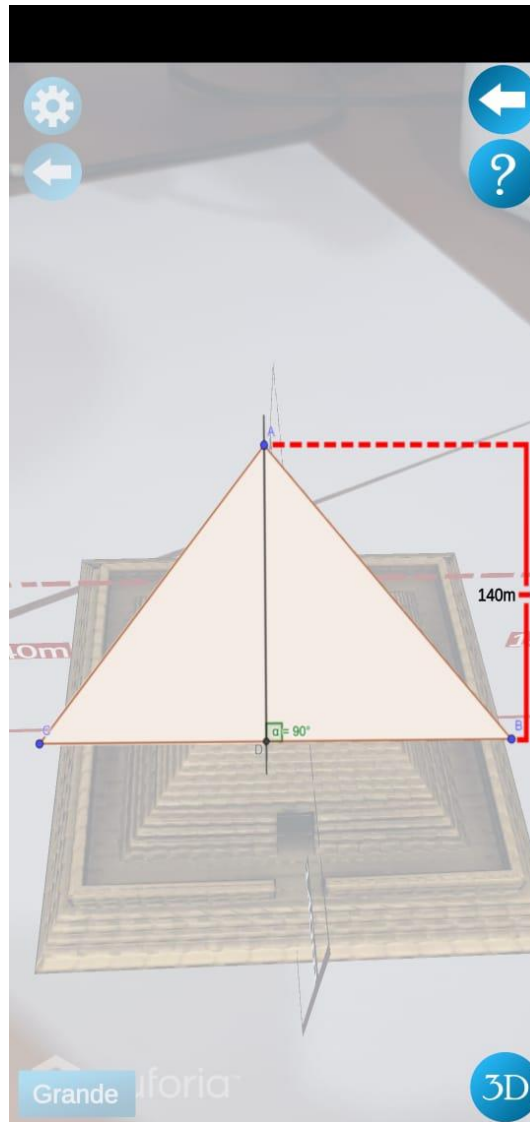
E quando se clica no botão  , localizado na parte inferior a direita, aparece a secção resultante da intersecção do plano perpendicular ao plano da base contendo a altura da pirâmide (Figura 57).

Figura 57 - Altura real da pirâmide em 2D.



Fonte: print do celular do autor.



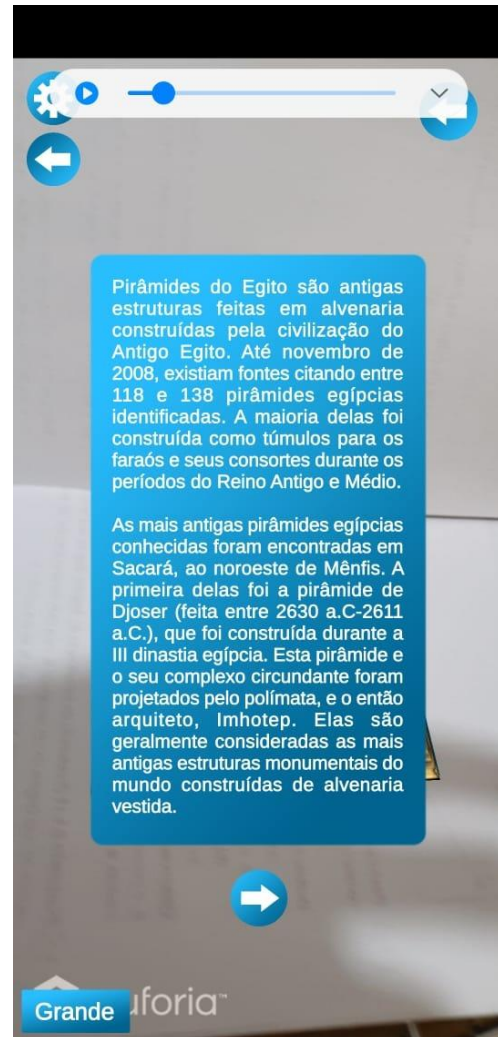
Na Figura 55 temos também mais dois botões  e  . Ao clicar no segundo aparece a posição da pirâmide no mapa do mundo (Figura 58) e no terceiro um pouco da história das Pirâmides (Figura 59).

Figura 58 – Localização da pirâmide no mapa. Figura 59 – História da pirâmide.




Fonte: print do celular do autor.



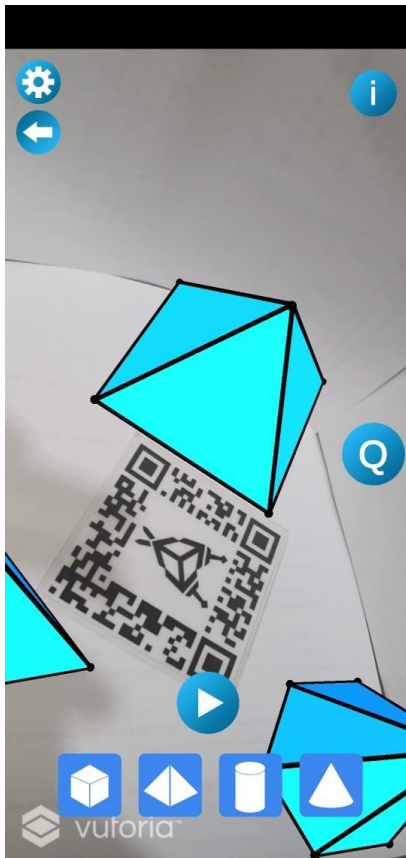
Fonte: print do celular do autor.



Outra ferramenta que iremos utilizar será [Sólidos Geométricos](#), segundo botão da Figura 54. Após abrir a ferramenta e focar no ativador, aparecerá a tela da Figura 60. Apertando com o dedo sobre a pirâmide de base quadrada, aparecerá na tela o botão . Esse botão faz com que a superfície da pirâmide planifique (Figura 61).

Interiormente na pirâmide podemos ver parte de uma secção em verde na Figura 61, que será usado nas atividades.

Figura 60 – Pirâmide quadrangular.



Fonte: print do celular do autor.

Figura 61 – Secção e planificação.



Fonte: print do celular do autor.

As atividades propostas serão apresentadas a seguir.

### 3.2 Descrição das atividades

A sequência de atividades envolvendo o aplicativo é proposta para o 9º ano do Ensino Fundamental a ser desenvolvida no mínimo em 3 aulas, que podem ser adaptadas para qualquer material didático conforme as escolas adotem. Fica livre, caso um professor queira utilizar em suas aulas, mudanças e adequações necessárias para a realidade de cada um.

O celular pode ser utilizado para auxiliar na aprendizagem, pode ser usado via aulas remotas, como vimos no decorrer do ano de 2020. No entanto, devido a pandemia o aplicativo não pode ser colocado em teste. A principal dificuldade para ter colocado em prática foi que nas escolas onde trabalho a carga horária de cada aula foi diminuída em 20%. E também os alunos tiveram uma certa dificuldade de

adaptação com o ensino remoto. Desta forma, optamos por não introduzir outra novidade aos alunos.

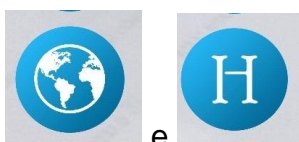
Segue a descrição, por aulas, das atividades sugeridas e de como o professor deve proceder para a utilização do aplicativo.

### 3.2.1 Aula 01

O professor deverá ter os ativadores impressos (Figura 52) previamente.

Ao iniciar a primeira aula é solicitado para os alunos entrarem nas respectivas lojas de aplicativos e baixar o aplicativo Educação Estendida (Figura 53). Caso a escola não possua rede wifi, fica a sugestão de pedir ao final da aula anterior para eles baixarem o app em casa. Deve ser distribuído um ativador por aluno.

Após a instalação, solicitar para que abram o app e selecionem a ferramenta Pirâmide (Figura 54). É interessante que o professor tenha baixado o app e manipulado ele anteriormente, para que possa ir mostrando para os alunos como funciona. Pedir para eles focarem o celular no ativador. Assim que isso acontecer, aparecerá a pirâmide (Figura 55). Dar uns dez minutos para que possam visualizar o objeto em realidade aumentada e fazerem as suas colocações. Após esse tempo,



sugira que eles apertem os botões e para visualizarem a parte histórica das pirâmides do Egito e sua localização.

Em seguida, propor a situação problema: Seria possível calcular a altura real de uma pirâmide do Egito sem ter nenhum objeto de medição especial para isso?

Aguardar todas as considerações dos alunos e ler a história, segundo Bongiovanni (2007, p. 94), de como Tales mediu uma pirâmide.

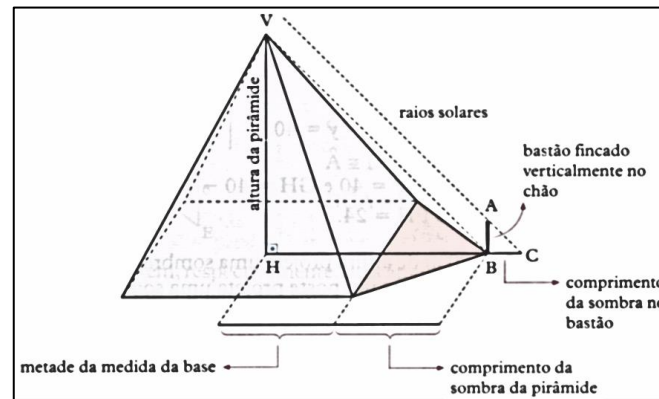
Em seus estudos, Tales observou que os raios solares que chegavam à Terra incidiam de forma inclinada e eram paralelos. Assim, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos e, partindo disso, foi possível achar a altura da pirâmide.

A explicação mais simples do método é a de que Tales fixou uma estaca perpendicularmente ao solo no ponto em que a sombra projetada da pirâmide acabava.

Com a ideia de que os raios de sol incidem inclinados e paralelos, Tales pôde notar uma semelhança nos triângulos formados pelos pontos imaginários VHB e ABC.

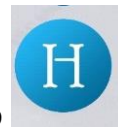
Como as medidas dos segmentos HB, AB e BC eram fáceis de medir, Tales conseguiu estimar uma altura de 158,8 metros para a Pirâmide de Quéops, tudo isso cerca de 600 antes da Era Comum.

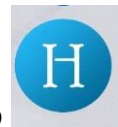
Figura 62 - Esquema do Teorema de Tales



Fonte: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-altura-da-piramide-de-queops-e-o-teorema-de-tales/>

Retomar então a situação problema. A resposta esperada é “sim”.



Propor que abram o app e apertem o botão  para eles relacionarem a História de Tales com a História das Pirâmides.

Introduzir a definição de Pirâmide (Definição 2.4.4) e seus elementos (face, vértice e aresta).

Encerrar a aula reforçando que com conhecimentos matemáticos é possível medir a altura real da pirâmide sem nenhuma tecnologia específica para esse fim.

### 3.2.2 Aula 02

Pedir para os alunos abrirem o app da pirâmide novamente (Figura 55). Agora



pedir que apertem o primeiro botão . Vai aparecer a altura de 140 metros (Figura 56).

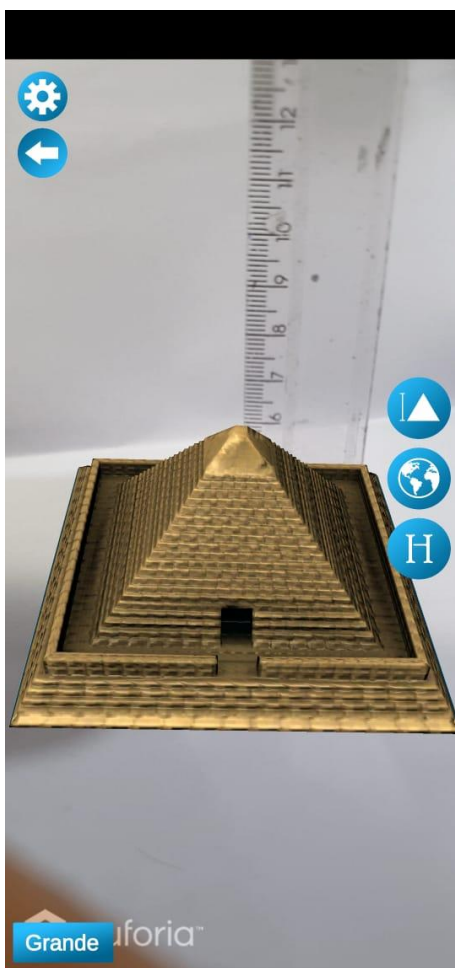
Comentar com eles que essa é a medida da Pirâmide de Quéops hoje.

Propor a seguinte situação problema:

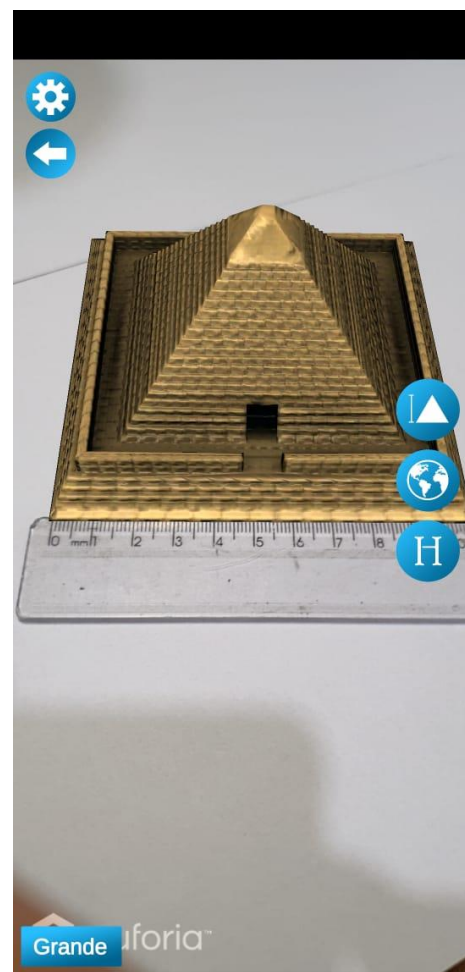
Sabendo a medida da altura original da pirâmide e tendo esse modelo de pirâmide que vocês veem com o aplicativo, é possível saber o valor aproximado da largura da base da pirâmide original?

Esperar todas as sugestões dos alunos. Uma sugestão esperada é: medir a altura, largura do modelo para compararmos com a altura e largura originais. Para isso poderão utilizar uma régua colocando no centro do ativador no app (Figura 63) e na base (Figura 64).

Figura 63 – Medição da altura da pirâmide. Figura 64 – Medição da aresta da base.



Fonte: print da tela do celular do autor.



Fonte: print da tela do celular do autor.


E como achar a aresta da base da pirâmide original?


Espera-se que o aluno pesquise no celular e responda que a aresta da base é algo em torno de 240 metros.

O objetivo neste momento não é aprofundar em assuntos matemáticos. O importante é a investigação, interação, vontade de descobrir e surpresa pelo resultado obtido.

### 3.2.3 Aula 03

Nessa aula devemos aprofundar os assuntos matemáticos envolvidos na atividade anterior. Sugerimos a seguinte sequência baseada em Dante e Viana (2019).

1. Introdução de Semelhança de Triângulos.
2. Dar o Teorema 2.3.10, Corolário 2.3.11 e Teorema 2.3.12.
3. Retomar a situação problema da aula 02.
4. Introduzir Pirâmide regular (Definição 2.4.5).
5. Pedir para abrir o app até o triângulo 2D e clicar no botão . Voltar na tela inicial do app (Figura 54) e escolher a ferramenta Sólidos

Geométricos . Selecionar a pirâmide de base quadrada e clicar no



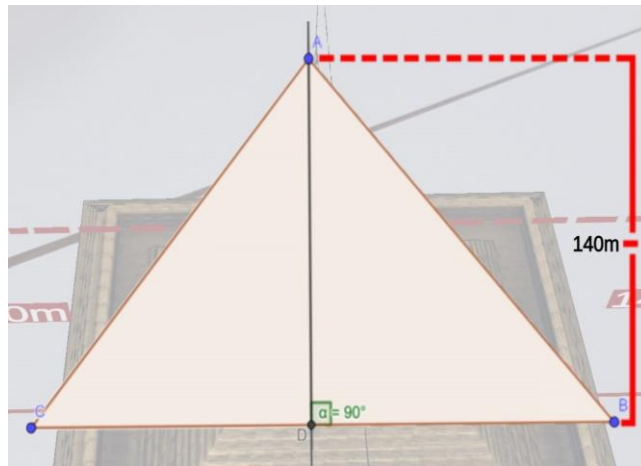
. Na Figura 61 os alunos poderão ver melhor de onde vem os triângulos semelhantes que podem utilizar para resolver o problema.

Obtidos os triângulos esperar para ver se algum aluno resolve a situação problema.

6. Exercícios de fixação.

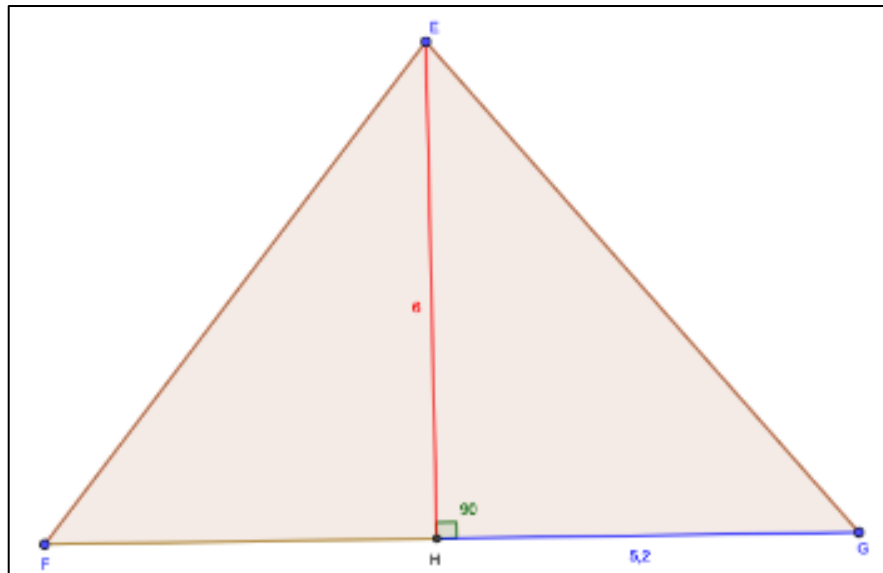
A solução esperada da situação problema é que o aluno perceba que os triângulos  $\triangle ADB \sim \triangle EHG$  (Figuras 67) são semelhantes pelo caso A.A., considerando que os ângulos  $\hat{B} \cong \hat{G}$  e  $\hat{D} \cong \hat{H}$ . Sendo os triângulos ABC e EGF isósceles temos que os pontos D é ponto médio do segmento BC e H é ponto médio do segmento FG.

Figura 65 – Triângulo da secção real.



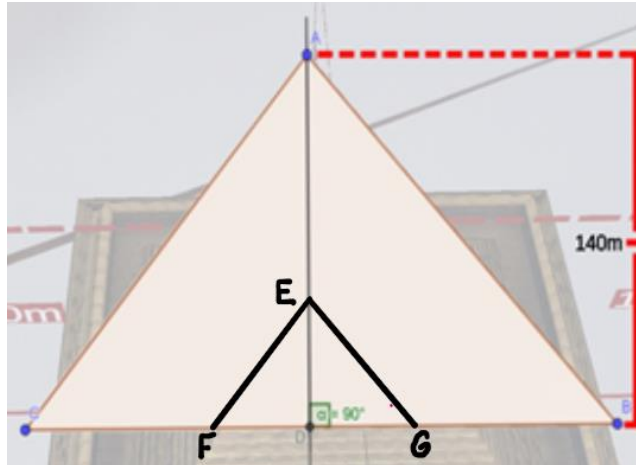
Fonte: print da tela do celular do autor.

Figura 66 – Triângulo da secção modelo.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

Figura 67 – Triângulo da secção modelo sobreposto a secção real.



Fonte: elaborado pelo professor/autor.

No triângulo  $ABC$ , temos altura  $AD = 140\text{ m}$ .

Com as medições como nas Figuras 63 e 64 podemos encontrar as medidas da base e da altura da pirâmide do app (Figura 66).

Temos no triângulo  $EFG$ , medida da altura  $EH = 6\text{ cm} = 0,06\text{ m}$  e  $HG = 5,2\text{ cm} = 0,052\text{ m}$ .

Logo, como os triângulos são semelhantes,  $\frac{AD}{EH} = \frac{DB}{HG} \cong 2333$ .

Portanto,  $\frac{DB}{HG} \cong 2333 \rightarrow DB \cong 2333 \cdot (0,052) \rightarrow DB \cong 121 \rightarrow BC = 2 \cdot DB \rightarrow BC \cong 242$ .

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma alternativa de metodologia de ensino de matemática baseada em um aplicativo de realidade aumentada, para ensinar os objetos de conhecimento semelhança de triângulos e pirâmides, para o nono ano do ensino fundamental.

O aplicativo pode ser utilizado ainda para introduzir outros sólidos geométricos, planificação de superfícies poliédricas e em outras áreas distintas da matemática. Baseado na sequência didática proposta neste trabalho caberá aos professores elaborar novos planos de aula para demais conteúdos.

As situações problemas e os aspectos históricos utilizados na sequência didática podem ser um caminho para despertar o interesse do aluno em sala de aula. Os alunos ficam impressionados com algumas datas que ocorreram as descobertas e com resultados obtidos. Segundo o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) a resolução de problemas pode ser associada à utilização das tecnologias, jogos ou materiais manipuláveis para tornar os estudantes ativos no processo de aprendizagem. No entanto, a forma de utilização da tecnologia deve ser apropriada para auxiliar na aprendizagem.

“[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.” (BRASIL, 2018, p. 276).

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM 1985.
- BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico**. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.5, p.94-106, UFSC: 2007.
- BRASIL, Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular, BNCC**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf)> Acesso em: 01 de set. de 2020.
- DANTE, L. R. e VIANA, F. **Teláris matemática 9º ano**. 3.ed. São Paulo: Ática, 2019.
- DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 2002.
- EVES, HOWARD. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004
- LINOWES, JONATHAN. **Unity Virtual Reality Projects**. 2.ed. Birmingham: Editora Packt, 2018.
- REZENDE, Eliane Q. F. e QUEIROZ, Maria L. B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Ed. da Unicamp, 2000.
- SÃO PAULO, Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE-SP. v.1, 2019. Disponível em: <<https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculo-paulista/wp-content/uploads/sites/7/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf>> Acesso em: 01 de set. de 2020.
- UNICAMP. **A altura da pirâmide de Quéops e o Teorema de Tales. Derivando a matemática**. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-altura-da-piramide-de-queops-e-o-teorema-de-tales/>>. Acesso em: 07 nov. de 2020