UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOANILDO ALVES DA SILVA

UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)

JUAZEIRO DO NORTE
2022

JOANILDO ALVES DA SILVA

UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino

Coorientador: Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar

JUAZEIRO DO NORTE

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

S586a Silva, Joanildo Alves da.

Uma análise das questões de probabilidade e estatística na olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (OBMEP) / Joanildo Alves da Silva. – 2022.

142 f.: il. color. 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino.

Coorientação: : Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar.

1. Probabilidade. 2. Estatística. 3. OBMEP. 4. Base Nacional Comum Curricular. 5. Competências matemáticas. I. Título.

CDD 519.2

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

JOANILDO ALVES DA SILVA

UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 19 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
PAULO RENATO ALVES FIRMINO
Data: 14/09/2022 12:38:56-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino (Orientador)
CCT/UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
JUNIO MOREIRA DE ALENCAR
Data: 14/09/2022 14:33:28-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar (Coorientador)
CCT/IFCE

Documento assinado digitalmente
gov.br
FRANCISCO DE ASSIS BENJAMIM FILHO
Data: 14/09/2022 14:58:20-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho (Membro interno)
CCT/UFCA

Carina Brunehilde P. Silva

Prof. Ma. Carina Brunehilde Pinto da Silva (Membra externa)
CCT/UVA

Aos meus pais: João Cândido da Silva e Maria Alves Pessoa. À minha esposa Keila Maria Araújo Félix. Aos meus filhos: Sartry Araújo Silva, Stanley Araújo Silva e Warley Araújo Silva. À minha irmã Luzia Alves da Silva. Aos meus irmãos: Antonio Alves da Silva, Francisco Alves da Silva, Raimundo Alves da Silva e Luiz Fernando Alves da Silva.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por todo o apoio que sempre tiveram em minha formação acadêmica e em minha vida de modo geral.

À minha esposa, por estar sempre ao meu lado, incentivando para continuar meus estudos.

Aos meus filhos, por serem meus maiores motivos para continuar na jornada acadêmica e profissional.

À minha irmã e meus meus irmãos, por terem acreditado em mim.

Ao professor orientador Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino, pela sabedoria e companheirismo na orientação deste trabalho.

Ao professor coorientador Prof. Dr. Junio Moreira de Alencar, pelas valiosas contribuições.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), por ter concedido licença parcial para que eu pudesse frequentar as aulas.

À Universidade Federal do Cariri (UFCA), por dispor de profissionais e espaço sem os quais não seria possível a conclusão deste curso.

RESUMO

As condições inerentes ao mundo tecnológico contemporâneo têm demandado dos cidadãos cada vez mais conhecimento e capacidades de abstração e análise. Tudo isso eleva a importância da Educação Matemática em geral e, de forma mais especifica, da Educação Estatística. Esta última possibilita ao indivíduo tomar melhores decisões em situações que envolvem incerteza. Dentre os mecanismos acadêmicos adotados para o estímulo à educação matemática, destacam-se as Olimpíadas de Matemática. Elas tiveram sua origem na Hungria em 1894 e, no Brasil, em 1979. Em particular, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi criada em 2005 com o objetivo de estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. É um projeto nacional que tem como público-alvo os estudantes da educação básica, a partir do 6º ano do ensino fundamental. Em seu formato atual a OBMEP é voltada para escolas públicas e privadas brasileiras. De maneira a buscar evidências da importância atribuída à Educação Estatística nos exames da OBMEP, este trabalho busca analisar as questões voltadas à Probabilidade e Estatística. Embora já existam trabalhos com temática similar, estes não trazem o ensino de probabilidade e estatística sob a ótica das habilidades a serem desenvolvidas juntos aos estudantes e que constam na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a solução desses problemas, bem como não discutem um caminho sistemático de solução, a partir de definições, axiomas e teoremas. As questões analisadas foram as das provas de 1ª e 2ª etapas dos anos de 2005 a 2019, estabelecendo um paralelo com o conteúdo da educação básica necessário para que o estudante resolva a questão em pauta. As contribuições em relação à literatura existente são, então: (i) o destaque à perspectiva trazida pela BNCC (no que diz respeito às habilidades relacionadas a Probabilidade e Estatística), (ii) um tratamento analítico (a partir da frequência com que cada uma delas é exigida na OBMEP) e (iii) sistemático (a partir da discussão de um caminho genérico de desenvolvimento de soluções), permitindo vislumbrar pontos de melhoria. A metodologia baseou-se em pesquisas bibliográfica e documental, de caráter qualitativo e quantitativo, com estudo descritivo.

Palavras-chave: Probabilidade. Estatística. OBMEP. Base Nacional Comum Curricular. Compentências Matemáticas.

ABSTRACT

The conditions inherent to the contemporary technological world have demanded from citizens more and more knowledge and capacities for abstraction and analysis. All this raises the importance of Mathematics Education in general and, more specifically, of Statistics Education. The latter enables the individual to make better decisions in situations involving uncertainty. Among the academic mechanisms adopted to encourage mathematics education, the Mathematics Olympiads stand out. They originated in Hungary in 1894 and in Brazil in 1979. In particular, the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP) was created in 2005 with the aim of encouraging the study of mathematics and identifying talents in the area. It is a national project whose target audience is basic education students, from the 6th year of elementary school onwards. In its current format, OBMEP is aimed at Brazilian public and private schools. In order to seek evidence of the importance attributed to Statistical Education in the OBMEP exams, this work seeks to analyze issues related to Probability and Statistics. Although there are already works with a similar theme, they do not bring the teaching of probability and statistics from the perspective of the skills to be developed together with the students and that are included in the National Common Curricular Base (BNCC) for the solution of these problems, as well as they do not discuss a systematic way of solution, based on definitions, axioms and theorems. The questions analyzed were those of the 1st and 2nd stage tests from 2005 to 2019, establishing a parallel with the basic education content necessary for the student to solve the issue at hand. The contributions in relation to the existing literature are then: (i) the emphasis on the perspective brought by the BNCC (with regard to skills related to Probability and Statistics), (ii) an analytical treatment (from the frequency with which each of them is required in the OBMEP) and (iii) systematic (from the discussion of a generic way of developing solutions), allowing to glimpse points of improvement. The methodology was based on bibliographic and documentary research, of a qualitative and quantitative nature, with a descriptive study.

Keywords: Probability. Statistic. OBMEP. National Common Curriculum Base. Mathematical Competencies.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Lista de Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GMT	Tempo Universal Coordenado
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MCTIC	Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
OBA	Olimpíada Brasileira de Astronomia
OBB	Olimpíada Brasileira de Biologia
OBF	Olimpíada Brasileira de Física
OBI	Olimpíada Brasileira de Informática
OBL	Olimpíada Brasileira de Linguística
OBHB	Olimpíada Brasileira de História do Brasil
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBN	Olimpíada Brasileira de Neurociência
OBQ	Olimpíada Brasileira de Química
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A Matemática cada vez mais está ligada aos diversos processos evolutivos científicos, tecnológicos e sociais da humanidade. Por conta disso, é de fundamental importância destacar o seu papel no cotidiano, expressando sua relevância, de modo a explicitar suas possibilidades em meio aos padrões de organização dos assuntos inerentes à realidade dos diversos grupos sociais. Dessa forma, a evolução do conhecimento a respeito da Matemática se dá à medida que a ciência e a própria história da humanidade se desenvolvem, e por isso seu ensino é cada vez mais discutido pelos pesquisadores em Educação Matemática (SKOVSMOSE, 2001).

O ensino da Matemática na educação básica passa por um processo de transformação em sua concepção metodológica e mudança drástica em sua identidade para se apresentar na escola moderna (PONTES, 2018). A Educação Matemática assume, portanto, um papel de inserção e incorporação da Matemática ao ambiente, ou seja, possibilita ao estudante apreciar o conhecimento moderno, vinculado a outros campos científicos e tecnológicos. Colocando-se como forma de constituir o conhecimento matemático e suas formas de aprendizagem (D'AMBROSIO, 2008).

Esta forma de olhar para o ensino da matemática é necessária para se adaptar aos avanços tecnológicos do mundo moderno no qual estamos inseridos. É necessário que o aprendiz desenvolva suas competências para compreender e transformar a realidade e a matemática é a porta de entrada para este desenvolvimento intelectual (PONTES, 2018). O estudo desta área do conhecimento nos dias atuais apresenta diversas ramificações, dentre elas, a Probabilidade e a Estatística. A Probabilidade é a parte da matemática que mede a incerteza da ocorrência de um fenômeno sob determinadas condições. Correia (2003, p. 65) afirma que "a Probabilidade expressa por meio de valores numéricos as possibilidades da ocorrência dos resultados de um fenômeno". A Estatística, por sua vez, se ocupa em coletar, organizar, analisar e registrar informações de um determinado grupo (BAYER et al., 2005). De acordo com Reis et al. (2015, p. 23), "a Estatística fornece aos decisores instrumentos para que possam responder a problemas e tomar decisões com alguma confiança, mesmo quando a quantidade de informação disponível é pequena e as situações futuras são de elevada incerteza".

Desse modo, a Educação Estatística deve oportunizar que os estudantes possam adquirir conhecimentos que lhes deem condições para lidar com situações práticas de suas vidas, e assim, desenvolver formas particulares de pensar e raciocinar para resolver determinadas situações-problema do cotidiano (SILVA; LIMA; SÁ, 2019; BRASIL, 1997). Nessa perspectiva,

> [...] a Estatística possui um papel fundamental na Educação Básica: preparar o educando para o exercício da cidadania. Através dela, o educando desenvolve competências para a realização da leitura e a interpretação de dados nos meios de comunicação de forma correta, impedindo-o de cair em armadilhas, sabendo identificar dados estatísticos tendenciosos e proporcionando condições de posicionar-se de forma crítica perante os diversos assuntos presentes na sociedade (TRAINOTTI; GAYESKI; NUNES, 2018, p. 195).

Ainda nessa perspectiva, a Estatística apresenta-se como crucial na formação dos estudantes, uma vez que proporciona instrução indispensável para o exercício pleno da cidadania. Por meio de ferramentas Estatísticas é que se desenvolvem competências, que dão condições se posicionar de forma crítica perante os diversos assuntos presentes na sociedade, o que permite realização da leitura e a interpretação de dados de forma correta e evita que o cidadão seja lesado já que em muitas ocasiões informações Estatísticas tendenciosas estão presentes no cotidiano (TRAINOTTI; GAYESKI; NUNES, 2018).

O documento (BRASIL, 2006a) parte de uma reflexão sobre o ensino médio brasileiro a partir de uma contextualização diante de propostas para a reforma deste nível de ensino e apresenta várias diretrizes para a condução dos componentes curriculares que pode auxiliar os docentes nas tomadas de decisão relacionadas à elaboração dos seus planos de curso e planejamento de suas aulas. Com relação à Estatística e à Probabilidade, este documento apresenta que:

> Os conteúdos do bloco Análise de dados e Probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das ideias de incerteza e de Probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico. Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação (BRASIL, 2006a, p. 78).

Assume-se então o desafio de estimular a Educação Estatística para estudantes desde a educação básica. Nesse sentido, destaca-se a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. A OBMEP é um projeto nacional realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação - MEC e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC direcionado, de acordo com IMPA (2021a, p. 1), "aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio, de escolas públicas municipais, estaduais e federais, e escolas privadas, bem como aos respectivos professores, escolas e secretarias de educação, todos localizados no território brasileiro". A OBMEP insere-se no campo das olimpíadas científicas, em particular as de Matemática. Essas competições tiveram sua origem, de acordo com (HUA-WEI, 2007), na Hungria em 1894. Já em 1959, foi realizada pela primeira vez na Romênia a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Em 1979, ocorreu a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) (ALMEIDA et al., 2022). Tais competições se destacam pelo seu papel desfiador e instigante. Por isso, fica evidente sua capacidade para revelar e aprimorar talentos matemáticos que podem contribuir para o desenvolvimento da Matemática e áreas afins, como a computação e a Engenharia (SILVA; FERNANDES; ARAÚJO, 2021).

Desse contexto, o presente trabalho buscou evidências da importância atribuída à Educação Estatística nos exames da OBMEP, com ênfase nas habilidades descritas pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC correspondentes a esses conceitos, destacando objetivos que os estudantes devem alcançar dentro de um conjunto de habilidades. Mais especificamente, busca-se analisar as questões presentes nas provas da OBMEP de 2005 a 2019. Para tanto, dentre as questões de Matemática, são identificadas as que estão diretamente relacionadas à temática de Estatística e Probabilidade e sua relação com os conteúdos estudados no ensino médio.

Nessa perspectiva, busca-se entender como os temas da educação básica devem ser abordados de modo que o estudante possua as ferramentas necessárias à resolução das questões de Estatística e Probabilidade tanto em atividades propostas em sala de aula, quanto nas provas desta olimpíada. A partir da análise da frequência com que ocorrem determinados conteúdos nas questões, busca-se inferir quais tópicos serão abordados em provas futuras. Por sua vez, busca-se enfatizar como temas de Estatística e Probabilidade podem contribuir para a apresentação de conteúdos da matemática mais abstratos e tornar o processo de aprendizagem da matemática mais atraente. Destaque-se que, embora outros trabalhos já tenham abordado essa temática, os mesmos não vinculam o ensino de Probabilidade e Estatística às habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular, assim como não trazem um caminho sistemático de solução de questões .

Vale destacar a importância desses temas para a pesquisa científica e produção do conhecimento (epistemologia), uma vez que

> Nas várias áreas profissionais e científicas, em particular na gestão das organizações e das empresas, a tomada de decisão é crucial e faz parte do dia a dia de qualquer decisor. As consequências dessas decisões são demasiado importantes para que possam basear-se apenas na intuição ou *feeling* momentâneos (REIS et al., 2015, p. 22).

Dessa concepção, veio a motivação para as pretensões aqui objetivadas, em especial, pelo fato de que "o Ensino de Estatística vem ganhando cada vez mais destaque nos currículos da educação básica. Essa importância dada à Estatística é reconhecida pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio" (FONTES et al., 2015, p. 475). Assim, o trabalho destaca a OBMEP como forma de fomentar essa necessidade, ao passo que destaca os problemas abordados na prova, que envolvem a Estatística e a Probabilidade, às habilidades descritas na BNCC. Embora seja possível, muitas vezes até fácil, distinguir as fronteiras e contextos ligados à Estatística e à Probabilidade, não se deve vê-las de forma separada (MOURA et al., 2018).

Por outro lado, destaque-se que são "as provas oficiais de larga escala – grupo que a OBMEP integra – um importante parâmetro norteador nas dimensões curriculares e de práticas de ensino" (SILVA; SOUSA, 2020, p. 119).

1.1 OBJETIVOS

Geral

Analisar a relevância dos temas que envolvem Probabilidade e Estatística nas provas da OBMEP junto à BNCC, bem como caminhos sistemáticos de solução de problemas.

Específicos

1. Pesquisar documentos e bibliografia que vinculem o ensino de Probabilidade e Estatística aos PCNs e à BNCC;

2. Elencar assuntos de Probabilidade Estatística que são explorados nas provas da OBMEP;

3. Analisar a frequência dos temas de Probabilidade e Estatística presentes na OBMEP;

4. Sugerir encaminhamento de solução sistemática para as questões da OBMEP, a partir dos fundamentos de Probabilidade e Estatística.

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O documento envolve mais seis capítulos. No Capítulo 2, são apresentados aspectos relacionados ao estudo da Probabilidade e da Estatística. Para isso destaca-se, entre outras coisas, o que dizem os PCNs e a BNCC. O Capítulo 3 traz um apanhado a respeito de Probabilidade e Estatística onde são apresentados alguns conceitos dessas áreas, entre eles tabelas e gráficos, medidas de tendência central e de dispersão e conceitos básicos. O Capítulo 4 introduz uma abordagem acerca das olimpíadas de Matemática, destacando a OBMEP no âmbito do seu regulamento. O Capítulo 5 traz os procedimentos metodológicos adotados para o alcance dos objetivos do trabalho. No Capítulo 6, apresentam-se questões da OBMEP nas quais são abordados os problemas de Probabilidade e Estatística. Nessa etapa, destacam-se quais os assuntos e as habilidades estabelecidas na BNCC estão relacionadas às questões em análise. Ao fim, o Capítulo 7 traz as Considerações Finais.

Capítulo 2

PENSAMENTO E ENSINO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

O ensino de probabilidade e estatística é visto cada vez mais como essencial para entender os acontecimentos cotidianos, uma vez que os meios de comunicação buscam, na medida do possível, usar os seus conceitos para conferir segurança ao que comunicam. Assim, o estudo dos conceitos de probabilidade e estatística contribui para que o educando exerça plenamente a sua cidadania (LOPES, 2008). Através da compreensão desses conceitos, o cidadão desenvolve competências. A BNCC define: “competência como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8). Essas dimensões estão relacionadas com a leitura e a interpretação de dados nos meios de comunicação de forma correta e segura, interpretando as informações e posicionando-se de forma crítica sobre os diversos assuntos presentes na sociedade (TRAINOTTI; GAYESKI; NUNES, 2018). Para o desenvolvimento desses conceitos, é imprescindível que sejam explorados junto ao estudante o letramento, o raciocínio e o pensamento estatístico. Para desenvolver o letramento estatístico é necessário que as pessoas tenham conhecimentos básicos dos termos e linguagens estatísticas além de ter alguma competência em matemática básica. Para Rumsey (2002), dentro do letramento estatístico têm-se dois resultados distintos:

> “Competência estatística” refere-se ao conhecimento básico subjacente ao raciocínio e “pensamento estatísticos”, e “cidadania estatística” refere-se ao objetivo final de desenvolver a capacidade de funcionar como uma pessoa educada na era da informação de hoje. A cidadania estatística pode muito bem exigir raciocínio e pensamento estatísticos de alta ordem” (RUMSEY, 2002, p. 3).

(RUMSEY, 2002, p. 3-4) destaca que para o desenvolvimento da competência estatística é necessário que o cidadão tenha:

- consciência de dados,

- uma compreensão de certos conceitos básicos de estatística e terminologia,
- conhecimento dos fundamentos da coleta de dados e geração de estatísticas descritivas,
- habilidades básicas de interpretação (a capacidade de descrever o que os resultados significam no contexto do problema), e
- habilidades básicas de comunicação (ser capaz de explicar os resultados para outra pessoa).

Garfield e Gal (1999, p. 1) definem o raciocínio estatístico como "a maneira como as pessoas raciocinam com ideias estatísticas e fazem senso de informação estatística". Os autores destacam, ainda que os currículos que são, atualmente, direcionados aos estudantes do ensino fundamental e médio favorecem a compreensão, por parte dos discentes, de conceitos como incerteza, variabilidade e informações estatísticas e isto faz com que os educandos tenham capacidade de participar de forma mais efetiva em uma sociedade cada vez mais carregada de informações. Para isso, o "raciocínio estatístico", é subdividido em: raciocínio sobre dados, raciocínio sobre a interpretação de dados, raciocínio sobre medidas estatísticas, raciocínio sobre a incerteza, raciocínio sobre amostras e raciocínio sobre associação.

O primeiro deles é o raciocínio sobre dados, que objetiva: "reconhecer e categorizar dados quantitativos ou qualitativos, discretos ou contínuos e saber como os tipos de dados remetem ao uso de determinados tipos de tabelas, gráficos ou medidas estatísticas" (GARFIELD; GAL, 1999, p. 5). Já o raciocínio sobre a interpretação de dados busca: "entender a maneira como um gráfico representa uma amostra, saber ler e interpretar um gráfico e saber como modificar um gráfico para representar melhor um conjunto de dados. Devem também reconhecer as características gerais de gráficos tais como forma, centro e variabilidade" (GARFIELD; GAL, 1999, p. 5).

Por outro lado, raciocínio sobre medidas estatísticas se ocupa em compreender os conceitos relacionados às medidas de dispersão e posição, bem como saber como utilizar esses conceitos nas mais diversas situações. Com relação ao raciocínio sobre a incerteza, os autores elencam a necessidade de se trabalhar com os estudantes as ideias relacionadas com a aleatoriedade levando à compreensão sobre o fato de que nem todos os resultados são igualmente prováveis. É necessário, ainda, "saber como determinar a probabilidade de diferentes eventos usando métodos apropriados (como o diagrama de árvores, simulação usando moedas ou um programa de computador)" (GARFIELD; GAL, 1999, p. 5).

O Raciocínio sobre amostras objetiva:

> saber como as amostras estão relacionadas com a população e o que pode ser inferido através destas, sabendo que uma amostra maior e bem escolhida representará melhor a população e que existem maneiras de selecionar amostras que podem torná-la não representativa de uma população, sendo cauteloso ao fazer inferências sobre amostras pequenas ou tendenciosas (GARFIELD; GAL, 1999, p. 5).

Por último, o Raciocínio sobre associação tem por objetivo: "saber como julgar e interpretar uma relação entre duas variáveis, sabendo como examinar e interpretar uma tabela de duas entradas, e saber que uma forte correlação[1] entre duas variáveis não significa que há uma causa de efeito entre elas" Garfield e Gal (1999, p. 5).

Com relação ao pensamento estatístico, Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013, p. 44) explicam que se trata da "capacidade de relacionar dados quantitativos com situações concretas, admitindo a presença da variabilidade e da incerteza". Para os autores, é necessário saber escolher adequadamente as ferramentas estatísticas, além de enxergar o processo de maneira global. Esses procedimentos tornam-se necessários para que seja possível explorar os dados indo além do que os textos prescrevem e questionar espontaneamente tais dados e seus resultados. Naturalmente, estudos de associação e variabilidade de variáveis qualitativas são também possíveis.

Para Chance (2002, p. 8), o desenvolvimento do pensamento estatístico pode ir além do que é ensinado na aula e leva o educando a questionar e investigar espontaneamente os problemas e dados envolvidos em um contexto específico. Entretanto, o pensamento estatístico não é algo que pode ser ensinado diretamente aos alunos; o autor acredita que se deve trabalhar a valorização de hábitos mentais que permitam desenvolver esse tipo de pensamento, como:

> - Consideração sobre a melhor forma de obter dados significativos e relevantes para responder a pergunta em questão;
> - Reflexão constante sobre as variáveis envolvidas e curiosidade por outras formas de examinar e pensar sobre os dados e o problema em questão;
> - Relação constante dos dados com o contexto do problema e interpretação das conclusões em termos não estatísticos;
> - Pensar além do livro e do que é apresentado em aula.
>
> (CHANCE, 2002, p. 8).

2.1 DOCUMENTOS NACIONAIS QUE TRATAM DO ENSINO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Para que os discentes compreendam os assuntos de probabilidade e estatística, sendo capazes de resolver situações-problema, é indispensável que este tópico seja abordado o mais cedo possível em sua formação. Nessa perspectiva, é imprescindível que os estudantes possam reconhecer e compreender a dimensão aleatória dos fenômenos naturais, econômicos e sociais; para que, assim, saibam analisá-los, interpretá-los e representá-los (PINTO; RODRIGUES, 2009).

Para que os processos de ensino e aprendizagem venham a ocorrer de forma orientada e embasada em objetivos, é necessário que exista uma legislação ou recomendações norteadoras. Nessa perspectiva, podem ser citados os documentos oficiais que dizem respeito ao direcionamento das ações a serem tomadas, destacando os assuntos e a forma como podem ser abordados em ambiente escolar e no cotidiano dos estudantes. Entre eles, devem ser frisados os Parâmetros

[1]"Relação de interdependência entre duas ou entre múltiplas variáveis". (CORRELAÇÃO, 2022)

Curriculares Nacionais - PCNs e a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Nessa seção, serão abordados tais documentos que orientam a educação brasileira, trazendo enfoque sobre a abordagem dada ao tópico de probabilidade e estatística. No documento (BRASIL, 2018), este tópico é apresentado relacionado ao desenvolvimento de habilidades que devem ser trabalhadas desde as primeiras séries do ensino fundamental. Estas habilidades se associam aos assuntos, sendo que uma habilidade pode se interligar a diferentes conteúdos.

De acordo com o Quadro A.1, apresentado no Anexo A, esses assuntos devem ser trabalhados desde o primeiro ano do ensino fundamental, quando são apresentados aos discentes a noção de acaso com o objetivo de desenvolver neles a habilidade de classificar eventos aleatórios, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”. Nesta etapa, devem ser apresentados aos estudantes tabelas e gráficos de colunas simples, feitas a partir de coleta e organização de informações que podem ser obtidas na própria sala de aula. Dessa forma, é esperado que o estudante venha desenvolver a habilidade de ler dados expressos em tabelas e gráficos de colunas simples. Além disso, é proposto que nessa série seja introduzido o conceito de coleta de dados, que deve partir da realização de uma pesquisa, sendo suficiente, nesta etapa de ensino, a utilização de até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos.

O estudo de estatística e probabilidade avança em termos de complexidade ao longo do ensino fundamental e culmina no nono ano onde são apresentados aos estudantes, de acordo com o Quadro A.1, uma análise mais aprofundada da probabilidade de ocorrência de eventos aleatórios observando, neste caso, os eventos dependentes e os independentes. Com isso, pretende-se desenvolver a capacidade de reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. Nessa série, é proposto que se apresente a análise de gráficos divulgados pela mídia, observando elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação. Deve-se dar atenção, nesse caso, a elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, a erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

Com relação ao trabalho em análise de gráficos, de acordo com o documento, é possível desenvolver a leitura, a interpretação e a representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos.

Relacionado ao desenvolvimento de pesquisa, é mencionado que seja desenvolvido o planejamento e a execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório. Ao fim do ensino fundamental, é esperado que o estudante seja capaz de escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas, dispersão), com ou sem o uso de planilhas eletrônicas para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, além de planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

O Quadro A.2, exibido no Anexo A, apresenta as habilidades a serem desenvolvidas junto aos estudantes durante o ensino médio, como resolver e elaborar problemas em diferentes contextos que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Entre os documentos brasileiros que tratam da educação no país, destaca-se que (BRASIL, 2006b) aponta a Probabilidade e a Estatística como sendo um conjunto de ideias e procedimentos que se debruçam na aplicação de conceitos matemáticos em situações cotidianas da vida das pessoas, inclusive, e, na maioria das vezes, em outras áreas. A Probabilidade e a Estatística ainda podem ser vistas com uma forma de quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações (BRASIL, 2006b).

São inúmeras as situações nas quais se aplicam a Estatística. Entre elas pode-se citar, por exemplo, as pesquisas de intenção de voto em uma eleição, ou ainda, a possibilidade de êxito ou não no lançamento de um produto no mercado, antes da realização da eleição em si ou da fabricação desse produto. Para isso, recorre-se a pesquisas estatísticas, que envolvem amostras, levantamento de dados e análise das informações obtidas. Assim como na Estatística, na Probabilidade se acena com resultados possíveis ou prováveis, mas não exatos. Por exemplo, no lançamento de um dado, ao afirmar que o resultado 1 tem 1/6 de probabilidade não é possível garantir que em seis lançamentos deste dado ocorrerá o número 1 exatamente uma vez (BRASIL, 2006b).

Destaca-se ainda em (BRASIL, 2006b, p. 126) a importância da análise de dados em problemas sociais e econômicos "como nas estatísticas relacionadas à saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado" propondo, inclusive, que este tópico "constitua o terceiro eixo ou tema[2] estruturador do ensino", cujos objetos de estudo são conjuntos finitos de dados, abordados de forma quantitativa ou qualitativa, que originam procedimentos distintos daqueles trabalhados nos demais temas. Isso se dá, princialmente, devido a forma de se realizar as quantificações, que ocorrem a partir de processos de contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades. Tal tema é organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade (BRASIL, 2006b).

Tomando por base a organização apresentada, distribuem-se os conteúdos, juntamente com as habilidades a serem desenvolvidas, de cada unidade. Aqui, podemos destacar: Estatística, Contagem e Probabilidade. No que diz repeito à Estatística, ocorre a abordagem da descrição de dados; representações gráficas; e a análise de dados, por meio das chamadas medidas de tendência central e de dispersão: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão. Assim, seus objetivos se debruçam sob a descrição e representação de dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata; como também na leitura e interpretação de dados e informações de caráter estatístico, sendo elas abordadas em

[2]O Tema 1 é Álgebra: números e funções. O Tema 2 é Geometria e medidas.

diferentes linguagens e representações, seja na mídia ou em outros meios de comunicação; além da avaliação das médias e desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas; e na compreensão e emissão juízos acerca de dados de natureza social, econômica, política ou científica representados em notícias, propagandas, censos, pesquisas ou em outros meios (BRASIL, 2006b).

Já para Contagem, são trabalhados o princípio multiplicativo, problemas de contagem e o raciocínio combinatório. Assim, seus objetivos se debruçam sob a adequação de organização de números e informações, na simplificação de cálculos, em problemas da vida real com grande quantidade de dados ou de eventos; também na identificação de padrões e regularidades como forma de estabelecer regras e propriedades em situações que necessitem dos processos de contagem; na identificação de dados e relações inseridos em em situações-problema cuja solução se dá pele raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (BRASIL, 2006b).

Por último, em Probabilidade são trabalhados conteúdos e habilidades que dizem respeito ao estudo de possibilidades no cálculo de probabilidades. Assim, os objetivos para essa unidade se ocupa no reconhecimento do caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, bem como do significado e da importância conceito de probabilidade na perspectiva de prever resultados; na quantificação e previsões em situações aplicadas em diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana utilizando o pensamento probabilístico; na identificação em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que utilizam os conceitos de estatística e probabilidade (BRASIL, 2006b).

Pensando em uma organização para apresentação desses conteúdos no Ensino Médio, (BRASIL, 2006b, p. 128) apresenta a seguinte divisão: "Para o 1º ano, Estatística: descrição de dados; representações gráficas. Para o 2º ano, Estatística: análise de dados. Para o 3º ano, Probabilidade". Ainda de acordo com este documento, ressalta-se que "a forma e a sequencia de distribuição dos temas nas três séries do ensino médio traz em si um projeto de formação dos alunos" (BRASIL, 2006b, p. 128). Ou seja, cabe à instituição de ensino decidir o melhor modo de organizar os conteúdos. Uma forma de organização poderia ser:

> [...] em todas as disciplinas da área, os temas de estudo da primeira série deveriam tratar do entorno das informações que cercam os alunos, numa visão contextualizada, colocando-os em contato com as primeiras ideias e procedimentos básicos para ler e interpretar situações simples. Na segunda série, já poderia haver uma mudança significativa no sentido de que cada disciplina mostrasse sua dimensão enquanto Ciência, com suas formas características de pensar e modelar fatos e fenômenos. A terceira série ampliaria os aprendizados das séries anteriores com temas mais abrangentes que permitissem ao aluno observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos, aprofundando sua compreensão sobre o que significa pensar em Matemática e utilizar os conhecimentos adquiridos para análise e intervenção na realidade.
> (BRASIL, 2006b, p. 128)

Percebe-se, portanto, a importância dada ao projeto que a instituição pretende desenvolver junto a seus estudantes. No entanto, no documento (BRASIL, 2006b, p. 128) existe a seguinte proposta de desenvolvimento das unidades deste tema: 1º ano: Estatística: descrição de dados;

representações gráficas; 2º ano: Estatística: análise de dados e Contagem; 3º ano: Probabilidade.

Cabe ao docente, juntamente com a comunidade escolar, elaborar o projeto de ensino a ser aplicado em sala de aula. Deve-se vislumbrar as mais diversas possibilidades em cada turma, visto que cada uma apresenta especificidades com relação ao aprendizado dos conteúdos.

Capítulo 3

APANHADO SOBRE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Fazendo uma contextualização histórica do uso da estatística, Memória (2004) apresenta que desde a antiguidade, os governos fazem uso de registros de informações sobre a população existente em seus territórios e correspondentes riquezas para fins, principalmente, militares. O texto apresenta ainda que Confúcio obteve levantamentos feitos pela china que datam de mais de 2000 anos antes de Cristo. Ainda de acordo com Memória (2004) no antigo Egito, conforme revelam pesquisas arqueológicas, os faraós fizeram uso de um sistemático uso de informações de caráter estatístico. Outras civilizações pré-colombianas os maias, astecas e incas também apresentam indícios do tipo.

Outro fato histórico que remete à estatística é o conhecido o recenseamento dos judeus, ordenado pelo Imperador Augusto. Já nos balancetes do império romano, o inventário das posses de Carlos Magno, o *Doomsday Book*, registro que Guilherme, o Conquistador, invasor normando da Inglaterra, no século XI, ordenou fazer levantamento das propriedades rurais dos conquistados anglo-saxões, afim de ter ciência de suas riquezas. Estes são alguns exemplos que datam antes da emergência da estatística descritiva no século XVI, na Itália. Tais práticas continuam nos tempos modernos, por meio dos recenseamentos. No Brasil, destaque-se o censo que se efetua a cada 10 anos, pelo IBGE[1], órgão também responsável por estatísticas (dados estatísticos) oficiais (MEMÓRIA, 2004).

Denota-se daí a importância da estatística desde épocas remotas aos dias atuais, sendo o seu entendimento indispensável para compreender o mundo contemporâneo. Para aprofundamento do estudo da estatística, segundo Guedes et al. (2005, p. 1), “a Estatística subdivide-se em três áreas: descritiva, probabilística e inferencial. A estatística descritiva, como o próprio nome já diz, se preocupa em descrever os dados. A estatística inferencial, fundamentada na teoria das probabilidades, se preocupa com a análise destes dados e sua interpretação”. Para Correia (2003, p. 9), a probabilidade envolve “modelos matemáticos que explicam os fenômenos estudados

[1]Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

pela Estatística em condições normais de experimentação". Ainda com relação à probabilidade, (BAYER et al., 2005, p. 4-5) afirmam que devido ao fato da probabilidade ter começado como uma ciência empírica e, depois, se desenvolveu associada à matemática, torna-se difícil saber sua origem. Sendo assim, torna-se difícil determinar a passagem do empirismo para o formalismo matemático. Os autores afirmam, ainda, que todos os livros concordam que os "criadores" da probabilidade foram Pascal e Fermat.

3.1 CONCEITOS DE ESTATÍSTICA

Nessa seção serão abordadas algumas definições relacionadas com o estudo da estatística voltadas ao ensino médio. As definições dos conceitos aqui expostos foram feitas com base nas obras de Morettin e Bussab (2017) e Carvalho et al. (2004).

Definição 3.1.1 (**População**). *É o conjunto de todos os elementos que, uma vez investigados, podem oferecer as informações necessárias para um determinado estudo.*

Definição 3.1.2 (**Amostra**). *É uma parcela ou subconjunto da população.*

A escolha de uma amostra depende do que se pretende estudar a respeito da respectiva população, levando em conta que busca-se uma amostra representativa de tal população. Os indivíduos que compõem a amostra devem ser selecionados de acordo com um plano amostral.

3.1.1 Planos amostrais

De modo geral, os planos amostrais podem ser probabilísticos ou não.

Planos amostrais probabilísticos: nesse tipo de amostragem, utiliza-se métodos estatísticos, para selecionar um pequeno grupo de indivíduos que representarão uma grande população. Nessa seleção, é necessário que se garanta a aleatoriedade e que seja assegurado que todos os indivíduos da população tenham a mesma probabilidade de serem selecionados (MAROTTI et al., 2008, p. 188). Dentre os tipos amostragem probabilística, destacam-se:

- **Amostragem aleatória simples:** para realizar esse tipo de amostra, recorre-se a procedimentos aleatórios, que no caso de população finita pode ser feito a partir de sorteio de cartão com identificação de elementos da população. Se a população for muito grande, pode-se numerar seus elementos e usar uma tabela de números pseudo-aleatórios ou mesmo *software* geradores de números pseudo-aleatórios para realizar o sorteio. Nessa amostragem, assegura-se que cada elemento da população tem a mesma probabilidade de compor a amostra. Dependendo do objetivo do estudo, essa amostra pode ser com ou sem reposição. Nos sorteios com reposição, o mesmo elemento da população pode ser amostrado por mais de uma vez.

- **Amostragem proporcional estratificada:** usada quando a população pode ser dividida em subpopulações com características e proporção significativamente diferentes, de acordo com alguma variável sabidamente relevante. Após essa subdivisão, realiza-se o procedimento de sorteio dos elementos de cada subgrupo, através da amostragem aleatória simples, por exemplo.

Planos amostrais não probabilísticos: nesse tipo de plano amostral, os indivíduos são selecionados através de critérios subjetivos do pesquisador e, portanto, não faz uso de formas aleatórias de seleção. Neste plano amostral, não é impossível a aplicação de formas estatísticas para cálculo (MAROTTI et al., 2008, p. 188).

Além do desenho do plano amostral, a elaboração de bons instrumentos de coleta é também fundamental em estudos estatísticos. Na essência desse tema, encontra-se o entendimento sobre os tipos de variáveis.

3.1.2 Tipos de variáveis

Definição 3.1.3 (Variável). *É uma característica de interesse, passível de observação, que se pretende investigar com a pesquisa. Chama-se variável por poder variar de um indivíduo para outro.*

Os tipos de variáveis podem ser divididos em dois grupos, o das qualitativas e o das quantitativas. As variáveis qualitativas são as que consistem em atributos naturalmente não-numéricos, como categorias ou qualidades, usualmente envolvendo textos como possíveis resultados. Exemplos são o município de residência, estado civil, sexo, grau de instrução, classe social de uma pessoa; marca de um dado produto, espécie de um dado mamífero, fabricante de um dado automóvel e mesmo a opinião livre de uma pessoa sobre um dado tema. As variáveis qualitativas podem ser nominais ou ordinais.

As variáveis qualitativas nominais envolvem alternativas de resultados que não são sequer ordenáveis. Dos exemplos citados há pouco, o município de residência, estado civil, sexo de uma pessoa; marca de um dado produto, espécie de um dado mamífero, fabricante de um dado automóvel e mesmo a opinião livre de uma pessoa sobre um dado tema, são todas variáveis qualitativas nominais.

Por sua vez, em se tratando das variáveis qualitativas ordinais, é possível estabelecer uma ordem aos seus possíveis resultados. Dos exemplos citados anteriormente, grau de instrução e classe social são ordinais. De fato, pode-se dizer que uma pessoa cujo grau de instrução é ‘Nível médio completo’ possui formação acadêmica acima de outra cujo grau de instrução é ‘Fundamental incompleto’.

Já as variáveis quantitativas são aquelas de natureza numérica, envolvendo quantidades como possíveis resultados. Em problemas práticos, essas quantidades usualmente refletem processos de contagem ou de mensuração. Alguns exemplos são a idade, estatura, o peso, salário, número de filhos de um indivíduo, o número de itens defeituosos de um lote ou mesmo o número de contaminados pela Covid-19 em um dia. Nesse grupo, destacam-se as variáveis discretas e as contínuas.

Nas variáveis discretas, os possíveis valores formam um conjunto finito ou enumerável de números, geralmente obtidos por processo de contagem. Dos exemplos acima, o número de filhos de um indivíduo, o número de itens defeituosos de um lote ou mesmo o número de contaminados pela Covid-19 em um dia, são todas discretas.

Por outro lado, nas variáveis quantitativas contínuas, os possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais e são obtidos, geralmente, por processos de mensuração. Dos exemplos anteriores, a idade, estatura, o peso e o salário de um indivíduo são contínuas.

Na Educação Estatística, uma vez entendidos os conceitos de tipos de variáveis e amostragem, é possível trabalhar a elaboração de instrumentos de coleta de dados, sua aplicação e, por fim, iniciar estudos descritivos. Os conteúdos basilares da Estatística Descritiva são a construção de tabelas, gráficos e medidas que permitam sintetizar o conjunto de dados brutos original.

3.1.3 Estatística descritiva

O primeiro passo para a geração de sínteses nos estudos descritivos é, em geral, realizar processos de agrupamento e contagem de resultados da amostra em mãos. A cada grupo de resultados de interesse, pode-se dar o nome de evento:

Definição 3.1.4 (Evento). *Subconjunto de interesse, dentre os possíveis resultados da(s) variável(is) sob estudo.*

Por ilustração, tome o seguinte problema.

Exemplo 3.1.1. *Sejam X e Y as variáveis sob estudo, respectivamente representando as notas finais de um estudante qualquer em dadas disciplinas, digamos A e B. Considere que tais notas podem ser qualquer valor entre 0 e 10, inclusive. Considere ainda que a nota mínima para aprovação regular em cada disciplina seja 7. Pergunta-se:*

1. *Qual evento representa a aprovação na disciplina A?*
2. *Qual evento representa a aprovação em ambas A e B?*

Solução: Do Exemplo 3.1.1, tem-se matematicamente que $X \in [0, 10]$ e $Y \in [0, 10]$. Então, o evento de interesse de que trata o Item (1) é $E_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \in [7, 10]\}$, ou mesmo, recorrendo a outra simbologia atrelada à apresentação de X, $E_1 = \{X \geq 7\}$. Sobre o Item (2), para aprovação em ambas as disciplinas, pede-se o evento $E_2 = \{X \geq 7 \cap Y \geq 7\}$. De fato, será sobre os eventos que ocorrerão muitos dos exercícios de estatística descritiva e, também, probabilidade. Pode-se, por exemplo, desejar contabilizar o número de aprovados em ambas as disciplinas em uma turma de 100 matriculados (isto é, quantas vezes ocorreu E_2 dentre 100 estudantes) ou mesmo qual foi a proporção de aprovados da turma. Tratam-se de quantidades que correspondem a frequências.

Definição 3.1.5 (Frequência). *Número de ocorrências, na amostra, de um evento de interesse.*

Os tipos de frequência mais elementares são a absoluta e a relativa. Nesse sentido, seja E dado evento de interesse atrelado a dadas variáveis sob estudo. Então, a frequência absoluta de E, diga-se $f_a(E)$, trata-se do número de vezes em que E ocorreu no conjunto de dados. Por sua vez, a frequência relativa de E, diga-se $f_r(E)$, é dada pela Equação (3.1),

$$f_r(E) = \frac{f_a(E)}{n}, \tag{3.1}$$

em que n equivale ao tamanho da amostra (número total de observações) em análise. Se, para o Exemplo 3.1.1, E_2 ocorreu por 85 vezes, dentre 100 estudantes, tem-se $n = 100$, $f_a(E_2) = 85$ e $f_r(E_2) = 85/100 = 85\%$.

Logo, em entrelace com os conteúdos da educação básica, frequências tratam de funções, que tem como domínio o conjunto de possíveis resultados do espaço amostral sob estudo. Essas funções operam sobre conjuntos, com as particularidades de que f_a envolve contagem e f_r também contempla frações. Sobre os conjuntos mencionados, note-se que eventos podem envolver elementos de álgebra de conjuntos, outro tema desafiador em termos de ensino.

A partir da frequência obtida por evento de interesse, pode-se construir a distribuição de frequências das variáveis.

Definição 3.1.6 (Distribuição de Frequências). *Tabela que informa cada evento de interesse sobre os dados observados e sua respectiva frequência.*

Essa tabela é especialmente útil quando busca-se resumir e visualizar um conjunto de dados sem precisar levar em conta os valores individuais da amostra. Seguindo com o Exemplo 3.1.1, considere que a amostra original de dados se dê tal como na Tabela 3.1, em que envolvem-se ($n =$)10 estudantes. Nesse caso, sete alunos conseguiram aprovação em A, enquanto que seis conseguiram aprovação em ambas, A e B. Pensando na Equação (3.1), tem-se então $f_a(E_2) = 6$ e $f_r(E_2) = 6/10$.

Tabela 3.1: Amostra de notas de 10 discentes em duas disciplinas, a partir do contexto do Exemplo 3.1.1.

índice (i)	1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	**8**	**9**	**10**
nota na disciplina A (x_i)	6	9	8	6	7	6	8	8	7	7
nota na disciplina B (y_i)	7	9	7	5	6	6	8	8	7	8

Fonte: Simulado pelo autor, 2021.

Cada coluna indexada traz a nota do estudante em duas disciplinas (x_i e y_i). Em negrito encontram-se os índices dos estudantes com nota igual ou superior a 7 na disciplina A. Em cinza, encontram-se as células dos índices dos estudantes com nota igual ou superior a 7 em ambas as disciplinas (A e B)

Vale ainda destacar que subjacente aos eventos E_1 e E_2 há um estudo univariado [2] e bivariado [3], respectivamente. Existem encaminhamentos que simplificam a apresentação univariada e bivariada de tabelas de distribuições de frequências, como abordado a seguir.

3.1.4 Tabelas

Uma tabela pode ser definida como a organização de dados dispostos em colunas e linhas onde é possível fazer uma leitura rápida e fácil da informação que se deseja transmitir. As principais tabelas estudadas na educação básica são as que representam distribuições de frequência univariadas e bivariadas. Uma tabela deve conter as seguintes informações:

- Título: contém a descrição das variáveis de interesse e o seu contexto.
- Cabeçalho: é a parte superior da tabela onde especifica-se o conteúdo das colunas. Pode ainda ocorrer de se trabalhar com a primeira coluna (ao invés da primeira linha) indicando os conteúdos das linhas.
- Coluna Indicadora: geralmente é a primeira coluna, onde especifica-se o conteúdo das linhas. Da mesma forma, pode-se ter uma Linha Indicadora, ao invés de uma coluna.
- Corpo da tabela: trata-se do conjunto de colunas e linhas onde estão dispostas as informações sobre a(s) variável(is) em estudo.
- Fonte: Indicação da entidade responsável pelo fornecimento dos dados ou pela sua elaboração.

Em se tratando de uma distribuição de frequências univariada, ela pode ser resumida em uma tabela com quatro colunas, uma indicando o índice de cada evento atrelado aos dados, outra informando o evento em si e as outras informando as respectivas frequências de ocorrências absoluta e relativa. Tomando como problema o caso do Exemplo 3.1.1 e a amostra apresentada na Tabela 3.1, pode-se chegar à distribuição de frequências para as notas na disciplina A sugerida na Tabela 3.2. A distribuição de frequências permite ao leitor rapidamente descrever que as notas variaram entre 6 e 9 (segunda coluna) e que apenas uma pessoa tirou nota acima de 8 (terceira coluna), de fato, apenas 10% dos estudantes (quarta coluna). Note-se que são envolvidos agora quatro eventos, de acordo com o que foi amostrado ($A_1 = \{X = 6\}$, $A_2 = \{X = 7\}$, $A_3 = \{X = 8\}$ e $A_4 = \{X = 9\}$). É comum que os eventos envolvidos nas distribuições de frequência mais simples sejam disjuntos entre si, ou seja, que a interseção entre pares de eventos

[2] De acordo com (NETO et al., 2015), trata-se do ramo da estatística que olha as variáveis de maneira isolada.

[3] Para (FERNANDES; GEA; CORREIA, 2019), no estudo de dados bivariados responde-se a duas problemáticas fundamentais.

leve ao conjunto vazio ($A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\, i < j = 2, 3, \dots k$), em que k representa o número de eventos envolvidos ($k = 4$ no exercício).

Tabela 3.2: Distribuições de frequência da amostra de notas de 10 discentes na disciplina A (Tabela 3.1).

Índice (i)	Nota na disciplina A (A_i)	Frequência absoluta $f_a(A_i)$	Frequência relativa $f_r(A_i) = f_a(A_i)/n$
1	6	3	0,3
2	7	3	0,3
3	8	3	0,3
4	9	1	0,1
Total		10	1

Fonte: O autor, 2021.

Para os casos bivariados, é usual que a primeira linha informe eventos sobre uma variável e que a primeira coluna informe sobre eventos de outra. No centro dessa tabela, informa-se as frequências de ocorrência conjunta entre pares de eventos. A Tabela 3.3 traz a distribuição de frequências absolutas bivariada dos dados sugeridos na Tabela 3.1. Pode-se descrever que dois estudantes obtiveram simultaneamente uma nota equivalente a 8 em A e B. Em linguagem matemática, $f_a(AB_8) = 2$, em que envolve-se o evento $AB_8 = X = 8 \cap Y = 8 = \{A_3 \cap B_4\}$. Note-se que nas últimas coluna e linha da distribuição, são também apresentadas as distribuições univariadas, para as notas em A e B respectivamente. O procedimento para a distribuição bivariada de frequências relativas é similar.

Tabela 3.3: Distribuição de frequências bivariada da amostra de notas de 10 discentes nas disciplinas A e B (Tabela 3.1), a partir do contexto do Exemplo 3.1.1.

Nota em A (A_i)	Nota em B (B_j)					Total
	5	6	7	8	9	
6	1	1	1	0	0	3
7	0	1	1	1	0	3
8	0	0	1	2	0	3
9	0	0	0	0	1	1
Total	1	2	3	3	1	10

Fonte: O autor, 2021.

Dos zeros mais presentes nos cantos superior direito e inferior esquerdo da distribuição apresentada na Tabela 3.3, pode-se descrever a aparente associação entre as notas em A e B; quanto maior a nota de um discente em A maior tende a ser sua nota em B e vice-versa. Este tipo de análise pode ser melhor realizado a partir de gráficos. De fato, muitos são os gráficos dedicados a ilustrar distribuições de frequência, como resumido a seguir.

3.1.5 Gráficos

Para Morettin e Bussab (2017, p. 27) “a representação gráfica da distribuição de uma variável tem a vantagem de, rápida e concisamente, informar sobre sua variabilidade”. Existem vários tipos de gráficos e escolher o mais apropriado para representar o resultado de um determinado estudo é muito importante. Dependendo do que se deseja apresentar, há um gráfico mais apropriado. Os principais gráficos estudados na educação básica são os de barras, os de linhas e os de setores. Estes gráficos representam comparativos entre quantidades, em alguns casos, em termos absolutos, outras vezes em termos relativos.

De modo geral, os gráficos, assim como as tabelas, devem apresentar informações suficientes para que o leitor possa interpretar corretamente o que se deseja transmitir. Um gráfico deve conter:

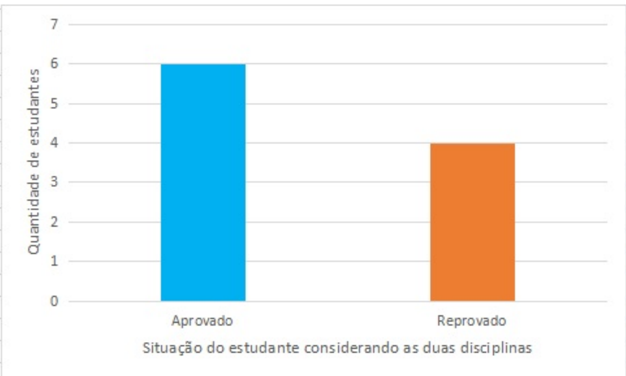
- Título: contém a descrição das variáveis sob estudo e seu contexto.
- Legenda: é usada para identificar as informações apresentadas no gráfico.
- Fonte: Indicação da entidade responsável pelo fornecimento dos dados ou pela sua elaboração.

Para as variáveis qualitativas, os gráficos mais utilizados são os de barras e os de setores.

Gráficos de barras: são construídos a partir de retângulos ou barras em que uma das dimensões são proporcionais às respectivas frequências. Essas barras são dispostas paralelamente umas às outras, horizontal ou verticalmente.

Com base nos dados da Tabela 3.1 pode-se criar o gráfico de barras apresentado na Figura 3.1.

Figura 3.1: Situação dos estudantes considerando o contexto do Exemplo 3.1.1 e a Tabela 3.1



Fonte: O autor, 2022.

Gráficos de setores: consistem em um círculo de raio arbitrário representando o todo, dividido em setores, que correspondem às partes de maneira proporcional às frequências.

Ainda com base nos dados da Tabela 3.1, pode-se verificar a aprovação ou reprovação de cada discente nas duas disciplinas e representar o resultado na forma de gráfico de setores, como na Figura 3.3.

Figura 3.2: Aprovação ou reprovação de 10 discentes em duas disciplinas, a partir do contexto do Exemplo 3.1.1

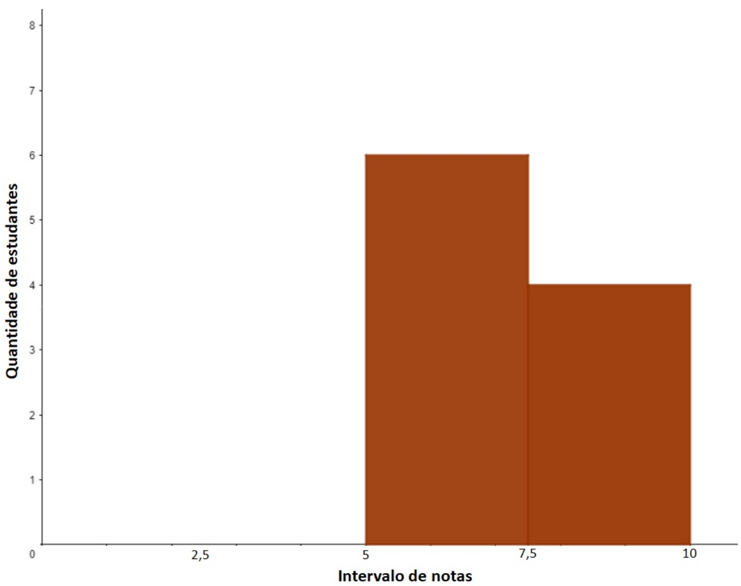
Fonte: O autor, 2022.

Para as variáveis quantitativas, além dos gráficos listados acima, pode-se ter o histograma.

Histograma: é um gráfico de barras contíguas, geralmente utilizado para representar variáveis quantitativas cujos resultados são em geral únicos. As barras têm altura proporcional à frequência do intervalo de classe sob questão. .

Com base no Exemplo 3.1.1 e na Tabela 3.1 pode-se construir o histograma representado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Notas obtidas pelos estudantes na disciplina B considerando o contexto da Tabela 3.1



Fonte: O autor, 2022.

Além destes, os principais gráficos utilizados para representar os dados coletados são os gráficos de colunas ou de barras múltiplas, gráficos pictóricos, onde as ideias e objetivos são transmitidos através de desenhos, e o gráfico de linhas.

A representação de dados por meio de tabelas e gráficos são extremamente uteis e informativas uma vez que proporcionam uma leitura rápida e direta do que se deseja transmitir. É ainda possível, a partir de poucos números, descrever a variabilidade dos dados. Daí a importância de medidas de tendência central e dispersão, introduzidas a seguir.

3.1.6 Medidas de tendência central

A principal característica das medidas de tendência central é representação de um conjunto de dados através de um único ou poucos valores. As principais medidas de tendência central estudadas na educação básica são: a média aritmética, a mediana e a moda.

Definição 3.1.7 (Média Aritmética Simples). *Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de n valores da variável de interesse. Calcula-se a média aritmética simples de x somando todos os valores, $x_i($ com $i = 1, 2, \ldots, n)$, e dividindo o resultado por n. A média aritmética simples é usualmente representada por $\overline{x}$:*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3.2}$$

Exemplo 3.1.2. *Deseja-se calcular a média aritmética simples das notas na disciplina A no contexto da Tabela 3.1.*

Solução: Denotando a média aritmética simples por $\overline{x}$, tem-se:

$$\overline{x} = \frac{6+9+8+6+7+6+8+8+7+7}{10} = 7,2 \text{ pontos.}$$

Definição 3.1.8 (Média Aritmética Ponderada). *É utilizada nos casos cujos valores variam em grau de importância ou são dispostos em uma distribuição de frequências. Considere $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os k valores da variável x com respectivas frequências (absolutas ou relativas) $f_1, f_2, \ldots, f_k$, respectivamente. Calcula-se a média aritmética ponderada por:*

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \tag{3.3}$$

Exemplo 3.1.3. *Considerando que a média de uma determinada disciplina será dada a partir de três notas onde a nota 1 tem peso 1, a nota 2 tem peso 2 e a nota 3 tem peso 3. Considerando que um estudante tem as notas apresentadas na Tabela 3.4. Determine a média ponderada das notas obtidas pelo estudante.*

Tabela 3.4: Notas obtidas pelo estudante.

Peso	Nota
1	6
2	7
3	8

Fonte: O autor, 2021.

A média é dada por $\overline{x} = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \dfrac{6 \times 1 + 7 \times 2 + 8 \times 3}{1 + 2 + 3} = 7,33$ *pontos.*

Definição 3.1.9 (Mediana). *Dispostos os n valores em ordem crescente ou decrescente, a mediana de um conjunto de dados é a medida do centro (para n ímpar) ou a media aritmética simples dos dois valores centrais (para n par). Ou seja, considere as n observações de uma variável, organizadas na sequência $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ ou na forma $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. Define-se a mediana, representada por Md, como sendo:*

$$Md = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, \text{ se } n \text{ for ímpar} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, \text{ se } n \text{ for par} \end{cases} \tag{3.4}$$

Exemplo 3.1.4. *No conjunto $A = \{1, 2, 5, 7, 9, 12, 15\}$ a mediana é 7. No conjunto $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$, a mediana é $\dfrac{3+5}{2} = 4$.*

Definição 3.1.10 (Moda). *É o valor que ocorre com mais frequência em um conjunto de dados.*

Com relação à moda, pode-se ter:

- Se um conjunto tem apenas um valor com maior frequência, esse conjunto é chamado de unimodal.

  Exemplo 3.1.5. *Um empresa realiza uma pesquisa com seus funcionários para saber o número de filhos que cada um possui. A partir dos dados coletados, organiza a Tabela 3.5:*

Tabela 3.5: Número de filhos por funcionário.

Nº de filhos	frequência
0	4
1	5
2	7
3	3
4	2
5	1

Fonte: O autor, 2021.

Nesse exemplo, a moda é 2 filhos.

- Se um conjunto tem dois valores com a maior frequência, cada um é uma moda, e o conjunto é chamado de bimodal.

  Exemplo 3.1.6. *Considere* $A = \{1, 2, 2, 5, 6, 7, 7, 9\}$. *Aqui, há duas modas, os valores 2 e 7.*

- Se mais de dois valores ocorrem com a maior frequência, o conjunto é chamado multimodal.

  Exemplo 3.1.7. *Considere* $B = \{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9\}$. *Aqui, há três modas, os valores 2, 6 e 7.*

- Se nenhum valor apresenta maior frequência, diz-se que não há moda.

  Exemplo 3.1.8. $C = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$.

Para variáveis quantitativas, em especial as contínuas, é comum a necessidade de trabalhar com eventos que agreguem valores particulares, para então eleger aquele que seria o mais frequente. Nesse sentido, pode-se calcular a moda de várias formas. Apresentam-se aqui, três delas.

Os dados apresentados na Tabela 3.6 foram obtidos de (BRASIL, 2022) e referem-se à população do município de Iguatu, Ceará, registrado durante a realização do Censo Demográfico de 2010. Para entender os dados da tabela apresentada, usa-se a simbologia $a \vdash b$ para representar intervalo de valores maiores ou iguais a a e menores que b.

Exemplo 3.1.9. *A Tabela 3.6 apresenta a população residente no município de Iguatu, estado do Ceará, organizado por faixa etária em anos.*

Tabela 3.6: População residente no município de Iguatu, estado do Ceará, organizada por faixa etária, em anos.

Idade em anos	frequência
$0 \vdash 10$	14575
$10 \vdash 20$	16907
$20 \vdash 30$	17680
$30 \vdash 40$	14225
$40 \vdash 50$	12160
$50 \vdash 60$	8592
$60 \vdash 70$	6288
70 ou mais	6043

Fonte: (BRASIL, 2022).

Com base nesses dados, pode-se calcular:

- **Moda bruta**

  É o ponto médio da classe de maior frequência.

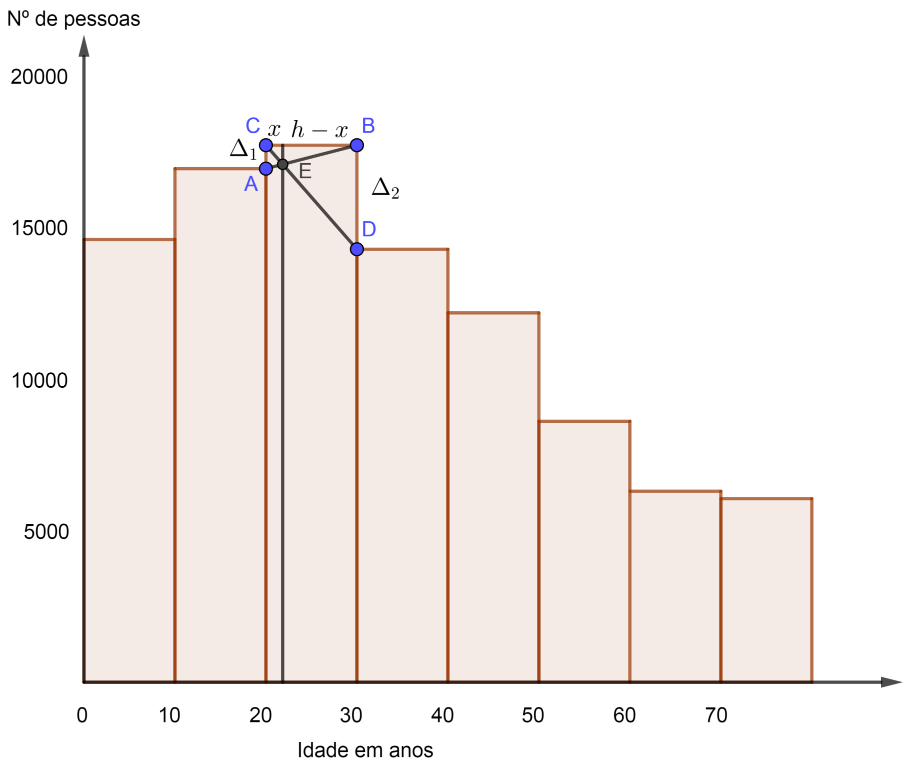
  Como a classe de maior frequência é $20 \vdash 30$ obtém-se como moda bruta $\dfrac{20+30}{2} = 25$ anos.

Para (ZAT, 2015), a moda de Czuber e a de King foram desenvolvidas no intuito de de obter a moda com mais exatidão quando se tem dados agrupados em classes de frequências. Essas modas são apresentadas a seguir:

- **Moda de Czuber**

  Leva em conta a influência das classes adjacentes à modal e a própria frequência modal. Para a construção do histograma da Figura 3.4, fez-se uso dos dados da Tabela 3.6.

Figura 3.4: Moda de Czuber para dos dados da Tabela 3.6.



Fonte: O autor, 2021.

No retângulo formado pela classe modal, fazendo:

$\overline{AC} = \Delta_1$ - Diferença entre a frequência da classe modal e a frequência imediatamente anterior à classe modal.

$\overline{BD} = \Delta_2$ - Diferença entre a frequência da classe modal e a frequência imediatamente posterior à classe modal.

h - Comprimento da classe modal.

E - intersecção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

x - altura do triângulo ΔACE relativa à base $\overline{AC}$.

$h - x$ - altura do triângulo ΔBDE relativa à base $\overline{BD}$.

Tem-se que os triângulos ΔACE e ΔBDE são semelhantes.

Por semelhança de triângulos, obtém-se:

$$\frac{x}{h-x} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

Dessa forma:

$$x \times \Delta_2 = (h - x) \times \Delta_1$$

$$x \times \Delta_2 = h \times \Delta_1 - x \times \Delta_1$$

$$x \times \Delta_2 + x \times \Delta_1 = h \times \Delta_1$$

$$x \times (\Delta_2 + \Delta_1) = h \times \Delta_1$$

$$x = h \times \frac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1}.$$

Como $\Delta_1 = f_{modal} - f_{ant}$ e $\Delta_2 = f_{modal} - f_{post}$, onde:

f_{modal} é a frequência da classe modal.

f_{ant} é a frequência da classe imediatamente anterior à classe modal.

f_{post} é a frequência imediatamente posterior à classe modal.

Segue:

$$x = h \times \frac{f_{modal} - f_{ant}}{f_{modal} - f_{post} + f_{modal} - f_{ant}}$$

$$x = h \times \frac{f_{modal} - f_{ant}}{2 \times f_{modal} - (f_{ant} + f_{post})}$$

A moda de Czuber é dada pelo limite inferior da classe modal somada ao x calculado anteriormente. A fórmula para cálculo da moda de Czuber é:

$$Mo_{Czuber} = l_i + \left[h \times \left(\frac{f_{modal} - f_{ant}}{2 \times f_{modal} - (f_{ant} + f_{post})}\right)\right] \tag{3.5}$$

Onde:

l_i é o limite inferior da classe modal.

h é o comprimento da classe modal.

f_{modal} é a frequência da classe modal.

f_{ant} é a frequência da classe imediatamente anterior à classe modal.

f_{post} é a frequência da classe imediatamente posterior à classe modal.

Para o exemplo acima:

$l_i = 20$

$h = 10$

$f_{modal} = 17680$

$f_{ant} = 16907$

$f_{post} = 14225$

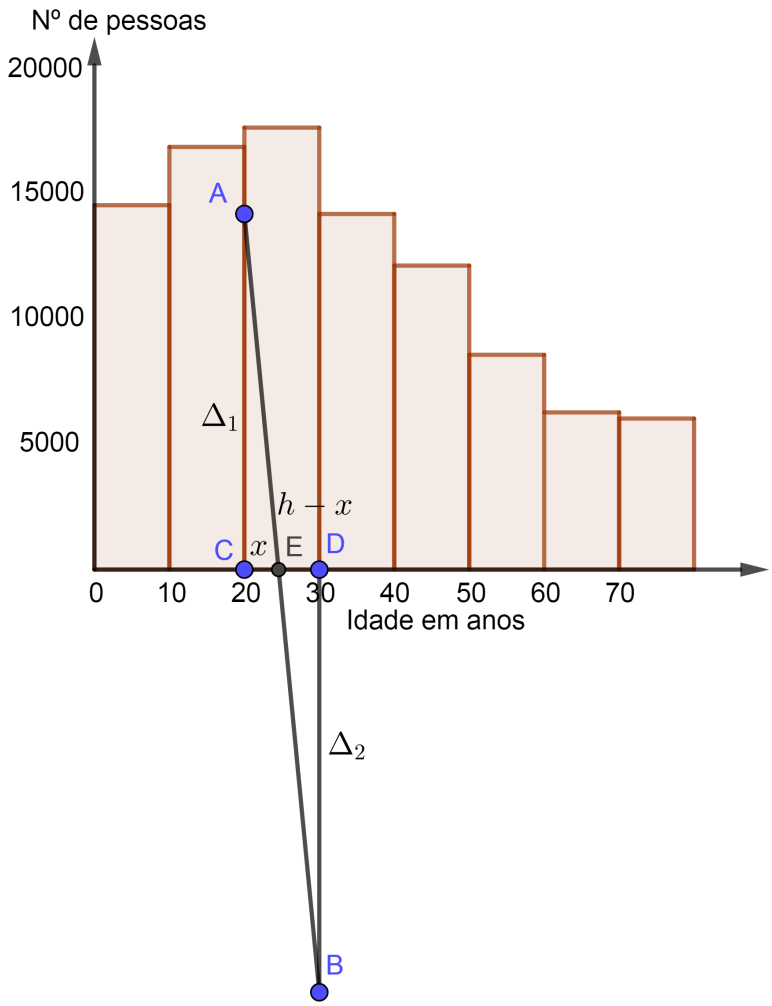
Substituindo na fórmula e fazendo o cálculo encontra-se:

$Mo_{Czuber} = 20 + \left[10 \times \left(\frac{17680 - 16907}{2 \times 17680 - (14225 + 16907)}\right)\right] = 21,83$ anos.

- **Moda de King**

  Para o cálculo da moda de King, leva-se em conta a influência das classes adjacentes à classe modal a partir do histograma formado pelas informações apresentadas. Para a construção do histograma representado pela Figura 3.5 usou-se os dados da Tabela 3.6.

Figura 3.5: Moda de King para os dados da Tabela 3.6.



Fonte: O autor, 2021.

No retângulo formado pela classe modal, fazendo:

$\overline{AC} = \Delta_1$ - Frequência imediatamente posterior à classe modal.

$\overline{BD} = \Delta_2$ - Frequência imediatamente anterior à classe modal.

h - comprimento da classe modal.

E - intersecção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

$\overline{CE} = x$ - altura do triângulo ΔACE relativa à base $\overline{AC}$.

$\overline{DE} = h - x$ - altura do triângulo ΔBDE relativa à base $\overline{BD}$.

Tem-se que os triângulos ΔACE e ΔBDE são semelhantes.

Por semelhança de triângulos obtém-se:

$\dfrac{x}{h-x} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$

Dessa forma:

$x \times \Delta_2 = (h - x) \times \Delta_1$

$x \times \Delta_2 = h \times \Delta_1 - x \times \Delta_1$

$x \times \Delta_2 + x \times \Delta_1 = h \times \Delta_1$

$x \times (\Delta_2 + \Delta_1) = h \times \Delta_1$

$x = h \times \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1}$

A moda de King é dada pelo limite inferior da classe modal somada ao x calculado anteriormente. A fórmula para cálculo da moda de King é:

$$Mo_{King} = l_i + \left[h \times \left(\frac{f_{post}}{f_{ant} + f_{post}}\right)\right] \tag{3.6}$$

Onde:

l_i é o limite inferior da classe modal.

h é o comprimento da classe modal.

f_{ant} é a frequência da classe imediatamente anterior à classe modal.

f_{post} é a frequência da classe imediatamente posterior à classe modal.

Para o exemplo acima:

$l_i = 20$

$h = 10$

$f_{ant} = 16907$

$f_{post} = 14225$

Substituindo na fórmula e fazendo o cálculo encontra-se:

$Mo_{King} = 20 + \left[10 \times \left(\dfrac{14225}{14225 + 16907}\right)\right] = 24,57$ anos.

3.1.7 Medidas de dispersão

Com a finalidade de avaliar o quão dispersos estão os valores da variável amostrada, adota-se as medidas de dispersão. Na educação básica, os principais conceitos relacionados à dispersão são: a amplitude, a variância, o desvio padrão, o desvio absoluto médio e o coeficiente de variação. Destas, a mais utilizada é o desvio padrão. Já o coeficiente de variação, é possível comparar a dispersão entre variáveis de natureza distinta.

Definição 3.1.11 (Amplitude)**.** *É a diferença entre o maior e o menor valor registrado para a variável:*

$$Amplitude(x) = \textit{Máximo}(x) - \textit{Mínimo}(x) \tag{3.7}$$

A Amplitude mostra a dispersão dos valores de um conjunto de dados. Valores muito dispersos resultam em Amplitude de número alto. Se a Amplitude for um número baixo, então, os valores quem compõem a série estão próximos uns dos outros. A unidade de medida da variável é importante na interpretação da amplitude. Por exemplo, uma amplitude de R$ 10,00 pode indicar que dado grupo de pessoas tem rendimento homogêneo, enquanto que uma amplitude de 10^oC pode indicar elevada variação de temperatura.

Exemplo 3.1.10. *A Tabela 3.7 apresenta a cotação do IBOVESPA*[4] *de 7 a 11 de junho de 2021 na abertura do mercado.*

Tabela 3.7: Cotação do IBOVESPA de 7 a 11 de junho de 2021.

Data	Cotação (abertura)
07/06/2021	130125
08/06/2021	130776
09/06/2021	129800
10/06/2021	129911
11/06/2021	130076

Fonte: (INFOMONEY, 2021)

Neste exemplo, a Amplitude é:
$Amplitude(x) = 130776 - 129800 = 976$ *pontos.*

A amplitude depende da dispersão dos dados, ou seja, em uma distribuição com maior dispersão, a amplitude de variação tende a ser maior. Por outro lado, deve-se ressaltar que a medida em questão não leva em consideração os valores intermediários da distribuição, o que faz com que os mesmos não influenciem seu resultado final. Tal fato se caracteriza como uma desvantagem, já que as medidas de dispersão deveriam levar em conta todas as observações e não somente os valores máximo e mínimo de um conjunto de dados (BASTOS; DUQUIA, 2007). O desvio absoluto médio, por exemplo, preenche essa lacuna.

[4] Índice da Bolsa de Valores de São Paulo.

Definição 3.1.12 (Desvio Absoluto Médio). *É a média aritmética dos desvios em módulo. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores assumidos por uma variável x e $\overline{x}$ a média aritmética desses valores.*

Calcula-se o desvio absoluto médio, representado por DM, por:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}(UM), \tag{3.8}$$

em que a unidade de medida da variável de interesse é genericamente representada por *UM*.

Exemplo 3.1.11. *Com base nos dados da Tabela 3.8:*

$$DM = \frac{|-13| + |638| + |-338| + |-227| + |-62|}{5} = 255,6 \textit{ pontos.}$$

Quanto maior o Desvio Absoluto Médio, maior a dispersão de nossos dados em relação à média aritmética simples.

Definição 3.1.13 (Variância). *É uma aproximação da média aritmética dos quadrados dos desvios de cada elemento em relação à média aritmética simples dos dados.*

Quando é possível conhecer os dados sobre uma variável relacionada a uma população com N elementos, digamos $x_i, i = \{1, 2, \ldots, N\}$, a variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}(UM)^2. \tag{3.9}$$

Nos casos onde a população não pode ser totalmente conhecida e tem-se apenas uma amostra dos dados de interesse, digam-se $x_i, i = \{1, 2, \ldots, n\}$, a variância por:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}(UM)^2. \tag{3.10}$$

Se os dados apresentam valores próximos da média, o cálculo da variância resulta em um número baixo. Se o cálculo da variância apresentar um valor alto, significa que os valores da série estão distantes da média.

Exemplo 3.1.12. *Com os dados da Tabela 3.7, constrói-se a Tabela 3.8.*

Tabela 3.8: Cotação do IBOVESPA de 7 a 11 de junho de 2021.

Data	Cotação (abertura)	$x_i - \overline{x}$
07/06/2021	130125	-13
08/06/2021	130776	638
09/06/2021	129800	-338
10/06/2021	129911	-227
11/06/2021	130076	-62

Fonte: (INFOMONEY, 2021)

Calcula-se a Variância por:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$
$$s^2 = \frac{(-13)^2 + (638)^2 + (-338)^2 + (-227)^2 + (-62)^2}{5-1} = 144207,3\,\textit{pontos}^2$$

A desvantagem da variância é o fato do resultado ser apresentado na unidade de medida dos dados elevada ao quadrado. Um exemplo disso é a variância da altura em metros de indivíduos incluídos em certo estudo que será expressa em metros quadrados. Por conta disso, confere maior complexidade de interpretação à medida e, como forma de contornar o problema e retornar para a escala original, é calculada a sua raiz quadrada, que recebe o nome de desvio padrão (BASTOS; DUQUIA, 2007; CORREIA, 2003).

Definição 3.1.14 (Desvio Padrão)**.** *É a raiz quadrada da variância.*

O desvio padrão amostral é dado por:

$$s = \sqrt{s^2} \tag{3.11}$$

Como seu cálculo depende de como a variância é calculada, pode-se ter desvio padrão populacional ou desvio padrão amostral.

Exemplo 3.1.13. *No Exemplo 3.1.12, o desvio padrão é:*
$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{144207,3} = 379,75$ *pontos.*
Trata-se de desvio padrão amostral.

Como a variância é calculada levando em conta os quadrados dos desvios de cada elemento em relação a média aritmética simples dos dados, este valor não permite comparação com a unidade que se está trabalhando. A importância do desvio padrão se dá porque após o cálculo da raiz quadrada da variância, o valor obtido encontra-se na mesma unidade dos valores das variáveis estudadas, facilitando a análise. Por conta disso, o desvio padrão é mais recomendado que a variância quando o objetivo é medir a variação entre os valores de um conjunto de dados. Assim, valores muito próximos resultam em um desvio padrão pequeno e valores mais espalhados resultam num desvio padrão maior (CORREIA, 2003). A maior vantagem desta medida de dispersão é que ela é um dos parâmetros da função de densidade de probabilidades Normal ou Gaussiana. Nesta, analisa-se a distância da média em relação ao desvio padrão; tal informação é importante quando do cálculo de intervalos de confiança e do estabelecimento de inferências (BASTOS; DUQUIA, 2007).

Definição 3.1.15 (Coeficiente de Variação)**.** *É a variabilidade dos dados em relação à média.*

Calcula-se o Coeficiente de Variação (CV) por:

$$CV = 100 \times \frac{s}{\overline{x}}\% \tag{3.12}$$

Como se trata de uma medida adimensional, pode-se utilizá-la para comparar a dispersão de variáveis de naturezas distintas.

Exemplo 3.1.14. *Para a Tabela 3.7 calcula-se:*

$$CV = 100 \times \frac{s}{\overline{x}}\% = 100 \times \frac{379,75}{130137,6} = 0,292\%.$$

O coeficiente de variação facilita avaliar a dispersão de uma variável, uma vez que não possui unidade de medida; o que possibilita comparar a dispersão entre variáveis, mesmo que tenham sido mensuradas em escalas de medida diferentes e possuam médias distintas. Por exemplo, é possível comparar, diretamente e sem o recurso de transformações, a variabilidade em uma distribuição de alturas medidas em metros com pesos em gramas. Apesar disso, é pouco utilizado e cede lugar na maioria das vezes ao desvio-padrão e à variância (BASTOS; DUQUIA, 2007).

A seguir, conceitos sobre probabilidade são introduzidos, a partir de um breve apanhado histórico e da análise combinatória.

3.2 PROBABILIDADE

De Iezzi et al. (2010), tem-se que o estudo da teoria da probabilidade tem sua origem nos registros do italiano Gerolamo Cardano (1501 – 1576) sobre jogos de azar. Desse documento, percebe-se que esse estudo ganhou mais força através de trocas de cartas entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), onde discutiam problemas sobre jogos. Shafer (1996) destaca que, entre 1684 a 1689, Jacob Bernoulli elaborou uma estratégia para aplicar a matemática dos jogos de azar ao domínio da probabilidade. Essa estratégia teria vindo a público em agosto de 1705, oito anos após a morte de Jacob aos 50 anos, quando sua obra-prima, *Ars Conjectandi*, foi publicada. Este trabalho tem muitos dados que ainda são de máxima utilidade na teoria da probabilidade e em suas aplicações para seguros e estatísticas, e para o estudo matemático de heranças.

O cálculo de probabilidades é um dos conteúdos mais abstratos da Educação Estatística a ser abordada na educação básica. Primeiramente, conceitos sobre análise combinatória são introduzidos com a finalidade de dar suporte ao cálculo de probabilidade.

3.2.1 Combinatória

Esta seção diz respeito a conceitos básicos de combinatória. Para a construção desta parte foram usadas as bibliografias Lima et al. (2006) e Morgado e Carvalho (2011).

Axioma 3.2.1 (Princípio Fundamental da Contagem - PFC)**.** *Seja* $\boldsymbol{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$ *o conjunto de* k *decisões. Se* D_i *pode ser tomada de* x_i *modos,* $i = 1, \ldots, k$*, então o número* M *de modos de tomar sucessivamente as decisões em* $\boldsymbol{D}$ *é dado por*

$$M = x_1 \times \ldots \times x_k. \tag{3.13}$$

Vale destacar que, como M envolve apenas operações aritméticas de produto, a ordem dos termos não afeta o resultado.

Exemplo 3.2.1. *(LIMA et al., 2006, p. 85) Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?*

Solução: Basta imaginar cada listra da bandeira como espaço a ser preenchido. A decisão trata da cor correspondente. Assim, seja $D_i \equiv$ 'a cor da i-ésima listra da bandeira' e $x_i \equiv$ 'a quantidade de cores possíveis para a i-ésima listra da bandeira' (isto é, o conjunto de alternativas para D_i), $i = 1, 2, 3$. Quanto menor o índice i, mais acima da bandeira estará a listra. Logo, seguindo o enunciado, tem-se que

- ✓ $x_1 = 3$: considerando que a primeira das listras deve estar na borda superior da bandeira, esta pode ser colorida de 3 modos já que se tem três cores a disposição.
- ✓ $x_2 = 2$: para a segunda listra, restam 2 possibilidades de colorir, já que não se pode utilizar a mesma cor da listra adjacente, a primeira.
- ✓ $x_3 = 2$: para a terceira listra, restam 2 possibilidades de colorir, já que não se pode utilizar a mesma cor da listra adjacente, a segunda.
- ✓ $x_4 = 2$: para a quarta listra, restam 2 possibilidades de colorir, já que não se pode utilizar a mesma cor da listra adjacente, a terceira.
- ✓ $x_5 = 2$: para a quinta listra, restam 2 possibilidades de colorir, já que não se pode utilizar a mesma cor da listra adjacente, a quarta.
- ✓ $x_6 = 2$: para a sexta listra, restam 2 possibilidades de colorir, já que não se pode utilizar a mesma cor da listra adjacente, a quinta.
- ✓ $x_7 = 2$: para a sétima listra, restam 2 possibilidades de colorir, já que não se pode utilizar a mesma cor da listra adjacente, a sexta.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, Axioma 3.2.1, o número M de modos de colorir a bandeira é:

$$M = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 192.$$

Exemplo 3.2.2. *(LIMA et al., 2006, p. 85) Quantos são os números de três dígitos distintos?*

Solução: Basta imaginar cada algarismo como sendo uma faixa da bandeira a ser colorida, conforme feito no Exemplo 3.2.1. Assim, seja $D_i \equiv$ 'o i-ésimo dígito do número' e $x_i \equiv$ 'a quantidade de alternativas possíveis ao i-ésimo dígito' (isto é, o conjunto de alternativas para D_i), $i = 1, 2, 3$. Destaque-se que, na base 10, há os dígitos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Logo, seguindo o enunciado, tem-se que

✓ $x_1 = 9$: para o primeiro algarismo, há 9 possibilidades, já que não pode ser 0 (que levaria a um número natural com apenas dois dígitos).

✓ $x_2 = 9$: como os algarismos devem ser distintos e um deles já ocupou a posição anterior, há 9 algarismos possíveis para a 2ª posição (o 0 já é possível).

✓ $x_3 = 8$: pelo fato dos algarismos deverem ser distintos e dois deles já terem ocupado as posições anteriores, restam 8 possibilidades para o terceiro dígito.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, Axioma 3.2.1, o número M de números de 3 algarismos distintos é:

$$M = 9 \times 9 \times 8 = 648.$$

Definição 3.2.1 (Fatorial)**.** *A expressão* $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ *recebe o nome de fatorial de um número natural* n*. O mesmo consiste no produtório de todos os naturais menores ou iguais ao número* n*. Assume-se que* $0! = 1! = 1$.

Definição 3.2.2 (Permutação Simples)**.** *Sejam* n *objetos distintos* ***O*** *=* $\{o_1, o_2, \ldots o_n\}$*. O número de modos distintos de ordenar estes* n *objetos é dado por:*

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!\,. \tag{3.14}$$

Cada uma das ordenações desses n objetos distintos é chamada de permutação simples e o total dessas permutações é representado por P_n e $P_n = n!$.

Exemplo 3.2.3. *Lima et al. (2006, p. 94) Quantos são os anagramas*[5] *da palavra "calor"?(Adaptada de*

Solução: Basta notar que deve-se ordenar 5 objetos distintos, **O** $= \{C, A, L, O, R\}$, em $n = 5$ posições distintas. Logo, tem-se um problema de permutação simples. Assim, pela Definição 3.2.2,

$$P_n = P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ anagramas.}$$

Definição 3.2.3 (Permutação com repetição)**.** *Sejam* n *objetos,* ***O*** *=* $\{o_1, o_2, \ldots o_n\}$*, dos quais* o_i *se repete* α_i *vezes,* $i = 1, 2, \ldots, n$*. O número de modos distintos de ordenar estes* n *objetos é dado por*

$$P_n^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{n!}{\alpha_1! \times \alpha_2! \times \ldots \times \alpha_n!}. \tag{3.15}$$

Exemplo 3.2.4. *(LIMA et al., 2006, p. 101) Quantos são os anagramas da palavra "ESTRELADA"?*

Solução: Basta notar que deve-se ordenar 9 objetos em 9 posições distintas, dos quais a letra E aparece duas vez, a letra S aparece uma vez, a letra T aparece uma vez, a letra R aparece uma

[5] Segundo (ANAGRAMA, 2022), trata-se da "palavra formada pela alteração da ordem ou pela transposição das letras de outra: alterando a ordem de Roma temos um anagrama, a palavra amor".

vez, a letra L aparece uma vez, a letra A aparece duas vezes e a letra D aparece uma vez. O que consiste em um problema de permutação com repetição. Pela Definição 3.2.3, temos

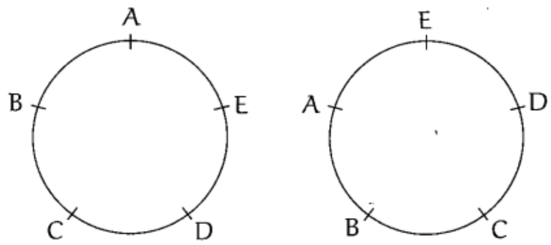
$$P_9^{2,1,1,1.1,2,1} = \frac{9!}{2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 2! \times 1!} = \frac{362880}{4} = 90720 \text{ anagramas.}$$

Exemplo 3.2.5. *(LIMA et al., 2006, p. 97) De quantos modos* 5 *crianças podem formar uma roda de ciranda?*

Solução: Perceba que se temos 5 crianças, basta escolher uma ordem para elas, pela Definição 3.2.2, isso pode ser feito de $5! = 120$ modos.

Entretanto, as rodas $ABCDE$ e $EABCD$ são iguais, uma vez que dependem apenas da posição relativa das crianças entre si, se a roda $ABCDE$ for "virada" na roda se torna a roda $EABCD$, conforme a Figura 3.6.

Figura 3.6: Contexto do Exemplo 3.2.5



Fonte: (LIMA et al., 2006).

Perceba ainda que cada roda pode ser "virada"de 5 modos. Assim, na contagem de 120 rodas cada roda foi contada 5 vezes. Portanto, o número de modos distintos de 5 crianças formarem uma roda de ciranda é dado por:

$$\frac{120}{5} = 24.$$

De modo geral, temos a Definição 3.2.4, a seguir:

Definição 3.2.4 (Permutação Circular)**.** *Sejam n objetos distintos $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. O número de modos distintos de ordenar estes n objetos em círculo, ou seja, o total de permutações circulares desses n objetos, representado por PC_n, é dado por:*

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \times (n-1)!}{n} = (n-1)!\,. \tag{3.16}$$

Definição 3.2.5 (Arranjo Simples)**.** *Considere a tarefa de escolher p objetos dentre n objetos distintos, sendo que a ordem dos objetos interfere na contagem. Para realizar tal tarefa usa-se a expressão*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, 0 \leq p \leq n. \tag{3.17}$$

De modo equivalente:

$$A_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1), 0 \leq p \leq n. \tag{3.18}$$

Lê-se A_n^p *como o 'arranjo de* n *(elementos tomados)* p *a* p*'.*

Exemplo 3.2.6. *(Adaptado de Hazzan (2013, p. 26)) Quantas senhas com* 4 *dígitos distintos podem ser formadas usando os algarismos do conjunto* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*?*

Solução: Perceba que a ordem com que se escolhe os números interfere no resultado. Por exemplo, a senha 1234 é diferente da senha 2134. Desse modo, tem-se um caso de arranjo simples. Pela Definição 3.2.5, a quantidade de senhas é:

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Definição 3.2.6 (Combinação Simples)**.** *Considere a tarefa de escolher* p *objetos dentre* n *objetos distintos, sendo que a ordem dos objetos não interfere na contagem. Para realizar tal tarefa, usa-se a expressão*

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}, 0 \leq p \leq n. \tag{3.19}$$

De modo equivalente:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1}, 0 \leq p \leq n. \tag{3.20}$$

Exemplo 3.2.7. *(Adaptado de Lima et al. (2006, p. 95)) Quantas saladas contendo exatamente* 6 *tipos de fruta podem ser feitas se há* 10 *opções de tipos de fruta?*

Solução: Perceba que a ordem com que se escolhe os tipos de fruta não interfere no resultado. Por exemplo, Manga-Banana-Uva-Caju é o mesmo que Caju-Banana-Uva-Manga. Desse modo, tem-se um caso de combinação simples. Basta considerar a Definição 3.2.6:

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = 210 \text{ saladas.}$$

Exemplo 3.2.8. *(Adaptado de Morgado e Carvalho (2011, p. 126)) De quantos modos pode-se escolher* 5 *pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de* 3 *homens e* 4 *mulheres?*

Solução: Como, ao todo, temos 4 mulheres e devem ser escolhidas pelo menos 2, a escolha de 5 pessoas pode se dar sob os seguintes casos:

i. 2 mulheres e 3 homens;

ii. 3 mulheres e 2 homens;

iii. 4 mulheres e 1 homem.

Pela Definição 3.2.6, teremos para:

i. $C_4^2 \times C_3^3 = \dfrac{4!}{2! \times 2!} \times \dfrac{3!}{3! \times 0!} = 6 \times 1 = 6;$

ii. $C_4^3 \times C_3^2 = \dfrac{4!}{3! \times 1!} \times \dfrac{3!}{2! \times 1!} = 4 \times 3 = 12;$

iii. $C_4^4 \times C_3^1 = \dfrac{4!}{4! \times 0!} \times \dfrac{3!}{1! \times 2!} = 1 \times 3 = 3.$

Portanto, o total de modos de escolher 5 pessoas, sendo pelo menos duas delas mulheres, é:

$$C_4^2 \times C_3^3 + C_4^3 \times C_3^2 + C_4^4 \times C_3^1 = 6 + 12 + 3 = 21.$$

Na seção a seguir, são apresentados alguns conceitos e definições em probabilidade e em estatística. As principais referências adotadas foram Casella e Berger (2002) e Morettin e Bussab (2017).

3.2.2 Conceitos e definições em Probabilidade

Nesta seção, serão apresentadas algumas definições importantes da teoria da probabilidade.

Definição 3.2.7 (Experimento Aleatório). *Consiste em um experimento realizado sob as mesmas circunstâncias, em que os resultados produzidos são incertos (e independentes entre si).*

Definição 3.2.8 (Espaço Amostral). *Corresponde ao conjunto, diga-se Ω, de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.*

Exemplo 3.2.9. *Uma moeda será lançada uma única vez e será observada a face que cai voltada para cima.*

O espaço amostral associado ao experimento aleatório realizado no Exemplo 3.2.9 pode ser dado por $\Omega_{3.2.9} = \{cara, coroa\}$. Assim, embora não seja possível prever certamente qual será o resultado do experimento, é possível ao menos destacar seus possíveis resultados, através de $\Omega_{3.2.9}$. Note-se assim que eventos como 'a moeda não cair à superfície' ou 'a moeda ficar em pé ao cair na superfície' não são considerados pelo analista, uma vez que envolvem circunstâncias bastante implausíveis.

Assim como o conceito de evento foi fundamental para estudos descritivos, ele também o é para o cálculo de probabilidades. Nesse segundo contexto, diante de Ω, tem-se que

Definição 3.2.9 (Evento). *Subconjunto de interesse, dentre os elementos de Ω.*

Note-se a similaridade do conceito de evento, quando se trata de variáveis (Definição 3.1.4) ou de espaços amostrais (Definição 3.2.9). De fato, pode-se entender cada variável sob estudo como sendo um experimento particular, com seu próprio conjunto de possíveis resultados (ou espaço amostral), promovendo a confluência entre as Definições 3.1.4 e 3.2.9. Como ilustração, recorrendo ao Exemplo 3.1.1, em que $X \equiv$ 'nota final de um estudante qualquer na disciplina A' e $Y \equiv$ 'nota final de um estudante qualquer na disciplina B', pode-se ter $\Omega_X = \{x \in \mathbb{R}\,|x \in [0, 10]\}$. Em outros termos, a nota (X) de um estudante assume valores entre 0 e 10. Aqui, pode-se então considerar o evento $E_1 \equiv$ 'obter aprovação regular', similar àquele apresentado ao abordar o Exemplo 3.1.1 (Quesito 1), $E_1 = \{x \in \Omega_X\,|x \geq 7\}$. No mesmo sentido, pode-se ter o espaço amostral agora dedicado a ambas as variáveis (Exemplo 3.1.1, Quesito 2), X e Y, $\Omega_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,|(x \in [0, 10]) \cap (y \in [0, 10])\}$ e considerar o evento $E_2 \equiv$ 'obter aprovação em ambas as disciplinas', $E_2 = \{(x, y) \in \Omega_{XY}\,|(x \geq 7) \cap (y \geq 7)\}$.

Outro conceito importante é o de eventos complementares:

Definição 3.2.10 (Evento Complementar). *Dado um evento A de um espaço amostral Ω, seu evento complementar, diga-se A^c, é o subconjunto dos elementos de Ω que não pertencem a A. Em símbolo, adota-se aqui $A^c = \Omega\backslash A$.*

Em termos gerais, para dois conjuntos, A e B, a operação $A\backslash B$ representa o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não a B. Ou seja $A\backslash B = \{x \in A|x \notin B\}$. O problema a seguir envolve eventos complementares.

Exemplo 3.2.10. *Lança-se um dado uma única vez e observa-se a face voltada para cima.*

1. *Qual é o espaço amostral desse experimento?*
2. *Considere o evento $A = \{3\}$. Qual é o seu evento complementar?*
3. *Qual é o evento complementar ao espaço amostral?*

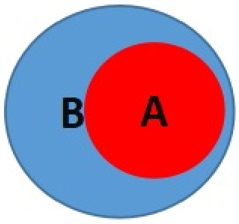
Para o Quesito 1, do Exemplo 3.2.10, tem-se como espaço amostral $\Omega_{3.2.10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Então, para o Quesito 2, tem-se que $A^c = \Omega_{3.2.10}\backslash A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$. Logo, A^c são todos os resultados de $\Omega_{3.2.10}$ com exceção do evento $\{3\}$. Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se concluir que, respondendo ao Quesito 3, $\Omega^c_{3.2.10} = \Omega_{3.2.10}\backslash\Omega_{3.2.10} = \{\} = \varnothing$.

Pode também ocorrer de um evento resultar da álgebra de conjuntos envolvendo outros eventos, através da união ou interseção:

Definição 3.2.11 (União e interseção de eventos). *Seja $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_k)$ um conjunto de k eventos atrelados a dado espaço amostral Ω. A **união** entre os eventos de $\boldsymbol{E}$, diga-se $E_{uni} = E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_k$, envolve cada um dos elementos presentes em ao menos um dos conjuntos de $\boldsymbol{E}$. Por sua vez, a **interseção** entre os eventos de $\boldsymbol{E}$, diga-se $E_{int} = E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_k$, envolve apenas os elementos presentes em todos os conjuntos de $\boldsymbol{E}$, sem exceção.*

Dos conceitos apresentados até aqui, vale destacar que, para qualquer evento E_i de Ω, tem-se que $E_i \cap E_i^c = \{\}$ e que $E_i \cup E_i^c = \Omega$. Da interseção, conclui-se que é impossível ocorrer um evento e o seu complementar. Da união, conclui-se que o espaço amostral pode ser separado em elementos que favorecem ou não favorecem a ocorrência de E_i. De fato, agregando o que foi visto anteriormente, sobre evento complementar (Definição 3.2.10), tem-se que se $E_i \cup E_i^c = \Omega$, então $E_i^c = \Omega \backslash E_i$. Em linguagem natural, a interseção entre eventos pode ser traduzida em um 'e', enquanto que a união em um 'ou'. Logo, voltando ao Exemplo 3.2.10, considera-se o evento $B \equiv$ 'sair número ímpar', isto é, $B = \{1, 3, 5\}$, tem-se que ocorre A e B se ocorrer $E_{int} = A \cap B = \{3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$. O evento E_{int} representa tudo o que existe em comum entre A e B. Por sua vez, ocorrem A ou B se ocorrem $E_{uni} = A \cup B = \{3\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$. Note-se que, como $A \subset B$, então $A \cap B = A$ enquanto que $A \cup B = B$, conforme o diagrama da Figura 3.7.

Figura 3.7: Ilustração da situação em que $A \subset B$.



Fonte: O autor, 2022.

Por sua vez, cada elemento do espaço amostral pode ser considerado como um ponto amostral ou mesmo evento elementar:

Definição 3.2.12 (Evento elementar). *Trata-se de evento do espaço amostral que não pode ser decomposto em eventos menores.*

A interseção entre eventos elementares sempre levará ao conjunto vazio, bem como a sua união sempre levará ao próprio espaço amostral. Trata-se da versão mais sofisticada de uma partição do espaço amostral sob estudo.

Definição 3.2.13 (Partição do espaço amostral). *Trata-se de um conjunto de eventos de Ω, cuja interseção entre pares de eventos leva ao conjunto vazio e a união de todos os eventos leva a Ω.*

Retomando Ω_X apresentado anteriormente, sobre a nota (X) de dado estudante em uma disciplina (Exemplo 3.1.1), pode-se definir a partição $\Omega_{PX} = \{E_1, E_1^c\}$, em que E_1^c implica a não-ocorrência de E_1. Logo, Ω_{PX} envolve os estudantes aprovados e não aprovados, como função da nota.

Quando o espaço amostral é um conjunto finito, é possível explorar conteúdos como análise combinatória, como princípio multiplicativo, arranjo e combinação, vistos no Ensino Médio, e assim, calcular o número de eventos possíveis, a partir dos eventos elementares. Como ilustração, do Exemplo 3.2.9, sabe-se que existem 4 eventos atrelados a $\Omega_{3.2.9}$, $M_1 = cara$, $M_2 = coroa$, $M_3 = cara \cap coroa$ e $M_4 = cara^c \cap coroa^c$. De fato, esses 4 eventos refletem a sequência de ocorrências ou não ocorrências a partir de cada um dos eventos elementares de

$\Omega_{3.2.9}$. Note que $M_1 = cara = cara \cap coroa^c$ (se ocorre $cara$, naturalmente não ocorre $coroa$), bem como $M_2 = coroa = cara^c \cap coroa$ (se não ocorre $cara$, naturalmente ocorre $coroa$). Já os eventos $M_3 = cara \cap coroa$ e $M_4 = cara^c \cap coroa^c$ representam uma situação impossível, uma vez que implica a ocorrência e a não ocorrência de todos os eventos elementares, respectivamente. Assim, M_3 e M_4 tratam do conjunto vazio, isto é, do evento impossível de ocorrer e podem ser denotado por $M_3 = M_4 = \varnothing$.

Exemplo 3.2.11. *No lançamento de duas moedas, deseja-se observar a face voltada para cima. Um dos eventos elementares pode ser $E =$ "cara na primeira moeda".*

Considere agora outro experimento:

Exemplo 3.2.12. *Lança-se um dado uma única vez e observa-se a face voltada para cima.*

Nesse caso, tem-se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considerando subconjuntos que envolvem a combinação de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 elementos, além do conjunto vazio ($\varnothing$), há 64 eventos possíveis. Alguns desses eventos são: o conjunto vazio, $\varnothing$, que contempla eventos impossíveis de ocorrerem (a face voltada para cima apresentar o número 7, por exemplo); $A = \{1, 3, 5\}$, que reflete os números ímpares do jogo; $B = \{4, 5, 6\}$, que apresenta resultados maiores que 3, e assim por diante. Esses conteúdos podem ser trabalhados em bases axiomáticas, objetivando o cálculo de probabilidades, como visto a seguir.

3.2.3 Axiomas em probabilidade

O cálculo de probabilidades tem sua fundamentação em alguns poucos axiomas que permitem o desenvolvimento de alguma intuição, apesar de se tratar de tema tão abstrato. As bases da teoria axiomática de probabilidade moderna se devem ao russo Andrei Kolmogorov, com uma publicação de 1933 (BAYER et al., 2005, p. 8). Tratam-se de três axiomas. Nesse sentido, seja $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_k)$ um conjunto de k eventos atrelados a dado espaço amostral Ω. Logo, a probabilidade tem como argumento um evento, diga-se $P(E_i)$, e deve satisfazer os seguintes axiomas:

Axioma 3.2.2. $0 \leq P(E_i) \leq 1$*;*

Axioma 3.2.3. $P(\Omega) = 1$*;*

Axioma 3.2.4. *Se* $E_i \cap E_j = \varnothing$*,* $i < j = 2, 3, \ldots, k$*, então* $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$*.*

Os axiomas de Kolmogorov tornaram a teoria da probabilidade uma parte autônoma dentro da Matemática e possibilitaram grande avanço científico nesta área, especialmente do ponto de vista teórico (BAYER et al., 2005, p. 8). Os autores destacam ainda que, apesar de ser uma forma diferente de encarar a Probabilidade, não existe incompatibilidade entre as ideias de Kolmogorov e os conceitos clássico e frequentista. Tais abordagens são introduzidas a seguir.

3.2.4 Abordagem clássica para a probabilidade

Definição 3.2.14 (Abordagem clássica para o cálculo de Probabilidades). *Considere o espaço amostral finito, com k eventos elementares, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_k\}$ de um experimento aleatório. Na abordagem clássica, tais eventos elementares são considerados equiprováveis, isto é, $P(\omega_i) = 1/k$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$. Assim, para qualquer evento E atrelado a Ω, tem-se que*

$$P(E) = \frac{f_\Omega(E)}{f_\Omega(\Omega)} = \frac{f_\Omega(E)}{k}, \tag{3.21}$$

em que $f_\Omega(Y)$ é a quantidade de eventos favoráveis a Y, dentre os k possíveis.

Vale destacar a similaridade entre $f_\Omega(E)$ e a frequência relativa ($f_a(E)$ da Equação 3.1). A função $f_\Omega(E)$ trata-se da quantidade de eventos favoráveis a E, dentre os $f_\Omega(\Omega) = k$ possíveis de Ω. Ressalte-se que, de fato, $f_\Omega(\Omega)$ informa a cardinalidade do espaço amostral Ω. Logo, uma vez definido o espaço amostral, pode-se aplicar a abordagem clássica de imediato, sem necessidade de experimentação, algo fundamental para o cálculo de $f_a(E)$ (já que envolve uma amostra de observações). Para ilustrar a abordagem, considere o Exemplo 3.2.10, sobre um único lançamento de um dado, em que se estuda, no Quesito 2, o evento $A \equiv$ 'dar a face 3', isto é, $A = \{3\}$. Como o espaço amostral é dado por $\Omega_{3.2.10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, infere-se, da abordagem clássica que a probabilidade de ocorrer A é $P(A) = \frac{f_{\Omega_{3.2.10}}(A)}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Por sua vez, deseja-se calcular a probabilidade de ocorrer $B \equiv$'dar valor maior que 3', ou seja $B = \{4, 5, 6\}$, tem-se $P(B) = \frac{f_{\Omega_{3.2.10}}(B)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Destaque-se que $f_{\Omega_{3.2.10}}(B) = 3$, já que há três casos favoráveis a B dentre os seis possíveis de $\Omega_{3.2.10}$.

Apesar de a definição clássica de probabilidade ('o quociente do número de casos favoráveis a um evento sobre o número de casos possíveis') ser atribuída a Laplace, de acordo com (CARVALHO et al., 2004, p. 119) "(essa) foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576)" .

Por outro lado, seguindo precisamente o raciocínio da frequência relativa, pode-se também recorrer à abordagem frequentista de probabilidade, apresentada a seguir.

3.2.5 Abordagem frequentista para a probabilidade

Além da definição clássica, existe outra definição de probabilidade que é a frequentista (baseada na Equação (3.1)). De acordo com (SILVA, 2002),

> O suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) inicia a visão frequentista de probabilidade em sua obra *Ars Conjectandi* (1713), na qual aproxima a probabilidade de um evento pela frequência relativa observada quando a experiência é repetida um número muito grande de vezes. Desse modo, Bernoulli propõe um teorema (Lei dos Grandes Números ou Teorema de Bernoulli) no qual a probabilidade de um evento ocorrer tende a um valor constante quando o número de ensaios desse evento tende para o infinito.

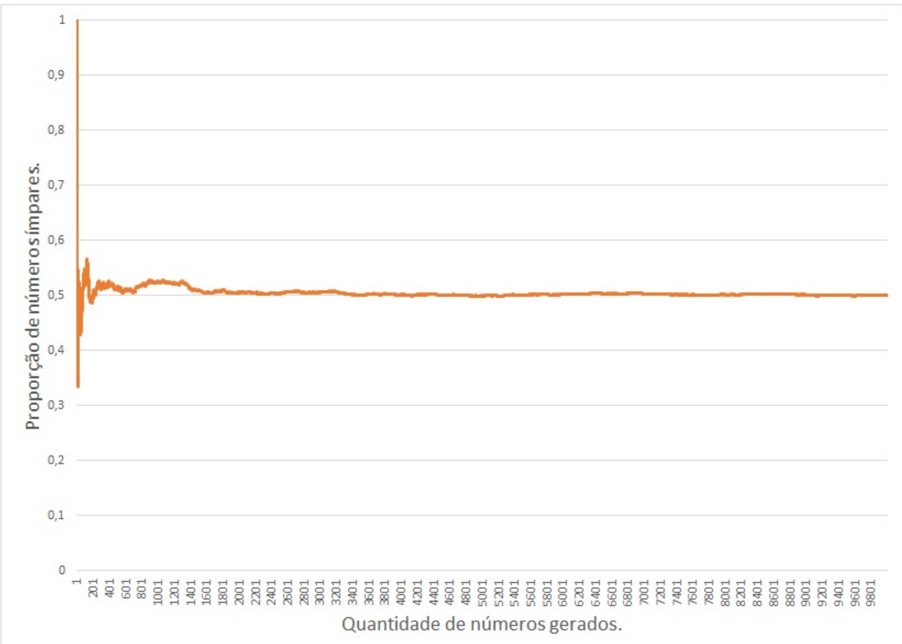
Tal abordagem é também chamada de **Probabilidade Frequencial** (OBMEP, 2021) e, matematicamente, envolve o conceito de limite:

Definição 3.2.15 (Conceito Frequentista de Probabilidade)**.** *Seja E um evento do espaço amostral Ω associado a um experimento aleatório. Considere que esse experimento seja repetido por n vezes e que $f_r(E)$ representa a frequência relativa de ocorrências do evento E, tal como definido na Equação* (3.1)*. Matematicamente, a probabilidade de E é definida como o limite de $f_r(E)$ quando n tende ao infinito:*

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} f_r(E). \tag{3.22}$$

Logo, em termos práticos, tem-se n finito e apenas uma aproximação para a probabilidade $P(E)$ a partir de $f_r(E)$. Para exemplificar, apresenta-se a seguir a Figura 3.8, construída a partir de uma planilha eletrônica onde foram gerados dez mil números pseudo-aleatórios inteiros entre 1 e 10000, e calculada a proporção de números ímpares com relação ao total de números gerados. O cálculo foi atualizado a cada novo número gerado. Nota-se que à medida que mais números são gerados, a proporção de números ímpares se aproxima de 0,5, que representa a probabilidade do evento (número ímpar) ocorrer. Nessa simulação, pode-se discutir a relação entre a abordagem clássica e frequentista de probabilidade. Sem realizar qualquer experimento, baseando-se na abordagem clássica, pode-se considerar que, em termos de paridade de um número inteiro qualquer entre 1 e 10.000, há ($k =$)10.000 possíveis resultados: $\Omega_{1-10.000} = \{1, 2, \ldots, 10.000\}$. Considerando o evento $I \equiv$ 'sair número ímpar', tem-se que $P(I) = 5.000/10.000 = 1/2$, já que há ($f_{\Omega_{1-10.000}} =$)5.000 casos favoráveis a I dentre os 10.000 possíveis.

Figura 3.8: Proporção de números ímpares versus quantidade de números pseudo-aleatórios inteiros gerados, entre 1 e 10000



Fonte: O autor, 2021.

Apesar da abordagem clássica simplificar bastante a inferência sobre a probabilidade de ocorrência de dado evento, em muitas situações da vida real, não é razoável assumir equiprobabilidade entre os eventos elementares do espaço amostral, o que motivou a criação da abordagem frequentista e aproximou os conteúdos de probabilidade daqueles da estatística descritiva. Como ilustração, retomando o Exemplo 3.1.1, em que X representa a nota de um estudante na disciplina A, assuma por um momento que tal nota é um número inteiro entre 0 e 10, apenas para fins de simplificação. Assim, ter-se-ia $\Omega_X = \{x \in \mathbb{Z} | x \in [0, 10]\}$. Pela abordagem clássica, supõe-se que cada nota tem probabilidade de 1/11 de ocorrer. Para dar a merecida ênfase, a probabilidade de um estudante tirar 0 seria a mesma de tirar 10 ou mesmo 5. Assim, sobre o evento $E_1 \equiv$ 'obter aprovação regular', ter-se-ia a probabilidade $P(E_1) = P(X \geq 7) = 4/11$. Contudo, em situações da vida real, não espera-se que ocorra equiprobabilidade entre as notas. De fato, da distribuição de frequências dos dados que dão sequência ao Exemplo 3.1.1, Tabela 3.2, ter-se-ia, via abordagem frequentista, a aproximação $P(X \geq 7) = 7/10$. Vale ressaltar que o conceito frequentista é mais abrangente do que o conceito clássico de probabilidade, pois se aplica, mesmo quando o espaço amostral não é finito uniforme (PINHEIRO et al., 2011), ou mesmo plenamente conhecido.

Em outro caso, considere o seguinte problema.

Exemplo 3.2.13. *Considere um experimento aleatório que consiste em laçar um dado, cujas faces são numeradas de 1 a 6. Tal experimento foi repetido por 50 vezes, tendo os resultados abaixo.*

1	*3*	*4*	*6*	*4*	*2*	*3*	*5*	*6*	*4*
3	*2*	*3*	*4*	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*	*4*
1	*3*	*3*	*6*	*3*	*2*	*5*	*4*	*4*	*1*
6	*4*	*2*	*5*	*2*	*6*	*3*	*1*	*5*	*5*
5	*6*	*5*	*1*	*6*	*2*	*3*	*5*	*3*	*2*

Determine a probabilidade de:
a) *sair a face com o número 5 em um lançamento deste dado.*
b) *sair uma face cujo número é par, em um lançamento deste dado.*

Solução: A Tabela 3.9 traz as distribuições de frequência correspondentes aos dados simulados. Sobre os quesitos,

a) Seja $E = \{5\}$, isto é, o evento associado a dar a face 5. Como a frequência relativa de E foi 0,16, aproxima-se $P(E)$ pela frequência relativa

$$P(E) \approxeq 0,16.$$

b) Seja $F = \{2, 4, 6\}$, isto é, o evento associado à face cujo número é par. Como há três números pares e suas frequências relativas somam 0,48, tem-se que

$$P(F) \approxeq 0,48.$$

Tabela 3.9: Amostra simulada para o experimento de registrar o resultado do lançamento de um dado por 50 vezes

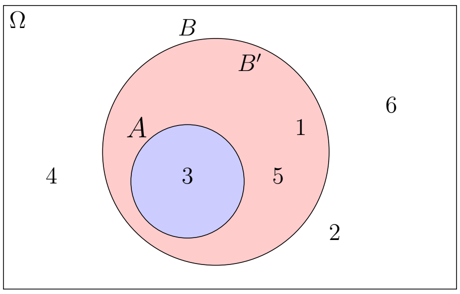
resultado do lançamento do dado (E_i)	$f_a(E_i)$	$f_r(E_i)$
1	8	0,16
2	9	0,18
3	10	0,2
4	8	0,16
5	8	0,16
6	7	0,14
Total	50	1

Fonte: Simulado pelo, 2021.

3.2.6 Regra da adição

As operações de álgebra de conjuntos desencadeadas pelas regras da união e interseção (Definição 3.2.11) são a porta de entrada para propriedades importantes do cálculo de probabilidades, levando à inúmeras aplicações no mundo real. Retomando a união entre os eventos $A = \{3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$, do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (sobre o Exemplo 3.2.10), pode-se ver que $A \cup B = A \cup B'$, em que $B' = B \backslash (A \cap B)$. Na união entre A e B', exclui-se em B' aquilo já contemplado em A; logo, embora A e B possam não ser disjuntos, A e B' o são, permitindo o uso do Axioma 3.2.4 de Kolmogorov e chegar a $P(A \cup B) = P(A \cup B') = P(A) + P(B')$, conforme a Figura 3.9.

Figura 3.9: Diagrama ilustrativo para a Regra da Adição



Fonte: O autor, 2022.

No exemplo anterior, tem-se que $B' = B \backslash (A \cap B) = \{1, 3, 5\} \backslash \{3\} = \{1, 5\}$. Vale destacar que em B', subtrai-se de B tudo aquilo em comum com A. Probabilisticamente, tem-se realmente $P(B') = P(B) - P(A \cap B)$. Ao final, tem-se $P(A \cup B) = P(A \cup B') = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(\{3\}) + P(\{1, 3, 5\}) - P(\{3\}) = 1/6 + 3/6 - 1/6 = 3/6$, considerando a abordagem clássica. Esse é o raciocínio subjacente ao cálculo da probabilidade da união entre eventos:

Teorema 3.2.1 (Regra da adição)**.** *Seja* $\boldsymbol{E} = (E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_k)$ *um conjunto de* k *eventos de interesse obtidos do espaço amostral* Ω*. A regra da adição implica na probabilidade da união entre os eventos de* $\boldsymbol{E}$*:*

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \quad \ldots \quad E_k) &= \\
= P(E_1) + P[E_2 \backslash (E_1 \cap E_2)] \quad &+ \quad P\{E_3 \backslash [(E_1 \cup E_2) \cap E_3]\} + \cdots \\
\cdots + P\{E_k \backslash [(E_1 \cup \quad \ldots \quad &\cup E_{k-1}) \cap E_k]\} \\
= \sum_{i=1}^{k} P(E_i) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} P(E_i \cap E_j) \quad &+ \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \sum_{l=j+1}^{k} P(E_i \cap E_j \cap E_l) - \cdots \\
\cdots + (-1)^{(k-1)} P(E_1 \cap \quad \ldots \quad &\cap E_k). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Vale destacar que, quando se tratam de eventos disjuntos entre si, a regra da adição leva ao mesmo resultado do Axioma 3.2.4 de Kolmogorov. De fato, diante de disjunções, $E_i \backslash [(E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1}) \cap E_i] = E_i$, já que $(E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1}) \cap E_i = \{\}$. Assim, todas as probabilidades envolvendo interseções ao final da Equação (3.23) equivalem a zero.

Teorema 3.2.2. *Sejam* E_1 *e* E_2 *eventos, tem-se:*

1. $P(E_i^C) = 1 - P(E_i), i = 1, 2.$

   Demonstração: $1 = P(\Omega) = P(E_i \cup E_i^C) = P(E_i) + P(E_i^C)$*. Daí* $P(E_i^C) = 1 - P(E_i)$*.*

2. $P(\varnothing) = 0.$

   Demonstração: $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$ *pois* Ω *e* $\varnothing$ *são mutuamente excludentes. Daí* $P(\varnothing) = 0$*.*

3. $P(E_1 \backslash E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2).$

   Demonstração: $P(E_1) = P[(E_1 \backslash E_2) \cup (E_1 \cap E_2)] = P(E_1 \backslash E_2) + P(E_1 \cap E_2)$ *pois* $(E_1 \backslash E_2)$ *e* $(E_1 \cap E_2)$ *são mutuamente excludentes. Daí* $P(E_1 \backslash E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$*.*

4. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$

   Demonstração: $P(E_1 \cup E_2) = P[(E_1 \backslash E_2) \cup E_2] = P(E_1 \backslash E_2) + P(E_2)$ *pois* $(E_1 \backslash E_2)$ *e* (E_2) *são mutuamente excludentes. Como* $P(E_1 \backslash E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$ *tem-se* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$*.*

5. *Se* $E_1 \supset E_2$ *então* $P(E_1) \geq P(E_2)$*.*

   Demonstração: *Como* $P(E_1 \backslash E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$*. Se* $E_1 \supset E_2$ *resulta que* $P(E_1 \backslash E_2) = P(E_1) - P(E_2)$*. Como* $P(E_1 \backslash E_2) \geq 0$ *tem-se que* $P(E_1) \geq P(E_2)$*.*

Além do cálculo da probabilidade da união entre eventos, a probabilidade da interseção é particularmente relevante. Ela é, inclusive, parte componente da probabilidade da união (como pode ser visto na Equação 3.23). Mais detalhes são trazidos a seguir.

3.2.7 Regra do produto

Em problemas do mundo real, é comum o uso do cálculo de probabilidades para medir relações de dependência entre eventos. Na prática, a dependência entre eventos tende a envolver algum grau de incerteza e é este grau que pode ser refletido através de probabilidades. Daí a ideia de associações probabilísticas entre eventos. Na saúde pública, por exemplo, pode-se concluir que há uma associação probabilística entre os eventos $V \equiv$ 'tomar dada vacina contra o Covid-19' e $O \equiv$ 'ser levado a óbito pelo Covid-19'. Sabe-se que quem toma a vacina (a ocorrência de V) reduz a probabilidade de óbito (a ocorrência de O). Contudo, sabe-se também que é ainda possível que um vacinado venha a ser levado a óbito pelo vírus. Matematicamente, adota-se a simbologia $P(O|V)$ para representar a **probabilidade condicional** de ocorrer O dado que ocorreu V. Em termos gerais, o que vem após a barra vertical, no argumento da probabilidade condicional, é considerado como fato, isto é, um evento já ocorrido certamente. Trata-se de uma reconfiguração do próprio espaço amostral, que agora coincide com V. Nesse sentido, como sequência do estudo da relação probabilística entre V e O, tem-se que $P(O|V) < P(O|V^c)$, isto é, a probabilidade de o vírus levar a óbito será menor entre vacinados do que entre não vacinados. Vale destacar que a abordagem probabilística aqui apresentada dá margem para a medida de dependência entre V e O. Em uma relação determinística, isto é, caso houvesse a certeza de que a vacina previne o óbito pelo vírus, ter-se-ia a probabilidade $P(O|V) = 0$. Diante de incerteza, tem-se $P(O|V) > 0$.

O conceito de probabilidade condicional é fundamental para o cálculo da probabilidade de interseção entre eventos:

Teorema 3.2.3 (Regra do produto)**.** *Seja* $\boldsymbol{E} = (E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_k)$ *um conjunto de* k *eventos de interesse obtidos do espaço amostral* Ω*. A regra do produto implica a probabilidade da interseção entre os eventos de* $\boldsymbol{E}$*:*

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_k) = P(E_1) \times P(E_2|E_1) \times P[E_3|(E_1 \cap E_2)] \times \ldots \times P[E_k|(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1})]. \tag{3.24}$$

Logo, a regra do produto destrincha a probabilidade de ocorrência de uma sequência de interseções em um produto de probabilidades condicionais. À medida que o índice do evento nessa sequência cresce, especifica-se cada vez mais o termo condicionante da probabilidade correspondente, em função de eventos de índices passados. De fato, note-se que $P(E_1) = P(E_1|\Omega)$. A condição explicitada por '$|\Omega$' é a mais ampla possível, isto é, contempla-se todo o espaço amostral e, por isso, pode-se adotar a versão simplificada $P(E_1)$. Por sua vez, $P(E_2|E_1) = P[E_2|(\Omega \cap E_1)]$. Como $\Omega \cap E_1 = E_1$, chega-se à parcela presente na Equação (3.24). As demais parcelas da regra do produto se dão de maneira semelhante. Do exemplo sobre o Covid-19, tem-se então que $P(V \cap O) = P(V) \times P(O|V)$.

Retomando a união entre os eventos $A = \{3\}$ e $B \equiv$ 'sair número ímpar' ($B = \{1, 3, 5\}$), do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (sobre o Exemplo 3.2.10), tem-se que $P(A \cup B) =$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, em que, pela regra do produto, tem-se que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$. Note-se que $P(B|A) = P(B|\{3\}) = 1$; isto é, se ocorre $\{3\}$ então certamente ocorre B (sair número ímpar). Por sua vez, via abordagem clássica da probabilidade, $P(A) = 1/6$. Assim, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = (1/6) \times 1 = 1/6$.

Assim como a regra do produto permite abordar a dependência entre eventos, ela também envolve situações de independência, como visto a seguir.

Eventos independentes: assim como a disjunção simplifica a regra da adição (Teorema 3.2.1), a **independência** simplifica a regra do produto (Teorema 3.2.3). Diz-se que dois eventos, A e B, são independentes quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro. Probabilisticamente, tem-se, por exemplo que $P(B|A) = P(B)$. Em outros termos, saber que ocorreu A não altera a probabilidade de ocorrer B. Diz-se então que B ocorre independentemente de A ocorrer. Considerando o caso dos eventos $A = \{3\}$ e $B \equiv$ 'sair número ímpar' ($B = \{1, 3, 5\}$), do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (sobre o Exemplo 3.2.10), não é correto afirmar que A e B são independentes, já que $P(B|A) = 1 \neq P(B) = 3/6$. Já do exemplo sobre o Covid-19, caso determinada vacina seja, de fato, um placebo, tem-se então que $P(O|V) = P(O)$. Em se tratando de um conjunto de k eventos independentes entre si, $\mathbf{E} = (E_1, \ldots, E_k)$, a regra do produto é reduzida a:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \quad \ldots \quad \cap E_k) &= \\ = P(E_1) \times P(E_2|E_1) \times P[E_3|(E_1 \cap E_2)] \times \quad \ldots \quad &\times P[E_k|(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1})] \\ = P(E_1) \times P(E_2) \times \quad \ldots \quad &\times P(E_k). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Uma das principais aplicações da regra do produto ocorre em estudos diagnósticos, através da regra de Bayes. Esse conteúdo é introduzido a seguir.

Teorema de Bayes: o cálculo de probabilidades permite abordar de maneira objetiva e fundamentada problemas que envolvem relações incertas de causa e efeito entre eventos. Em poucas palavras, pode-se atualizar o nível de incerteza de uma pessoa sobre dado evento, diga-se E_i, a partir do conhecimento sobre uma determinada evidência, diga-se ε. Pode-se, por exemplo, inferir se ocorre $E_i \equiv$ 'dado estudante domina determinado conteúdo', diante da evidência $\varepsilon \equiv$ 'estudante obtém boa nota em uma avaliação'. Pode-se ainda inferir sobre $E_i \equiv$ 'dado paciente está com determinada enfermidade' diante da evidência $\varepsilon \equiv$ 'paciente apresenta dado sintoma'. Nesses exercícios, busca-se pela probabilidade condicional $P(E_i|\varepsilon)$.

Da regra do produto e devido à propriedade de simetria da operação de interseção, tem-se que

$$P(E_i \cap \varepsilon) = P(E_i) \times P(\varepsilon|E_i) = P(\varepsilon) \times P(E_i|\varepsilon) = P(\varepsilon \cap E_i). \tag{3.26}$$

Dessas igualdades, deriva a probabilidade condicional resumida no Teorema de Bayes:

Teorema 3.2.4 (Teorema de Bayes). *Seja* $\mathbf{E} = (E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_k)$ *uma partição de* k *eventos do espaço amostral* Ω. *Seja* ε *um evento de* Ω. *O Teorema de Bayes afirma que a probabilidade* *condicional é dada por:*

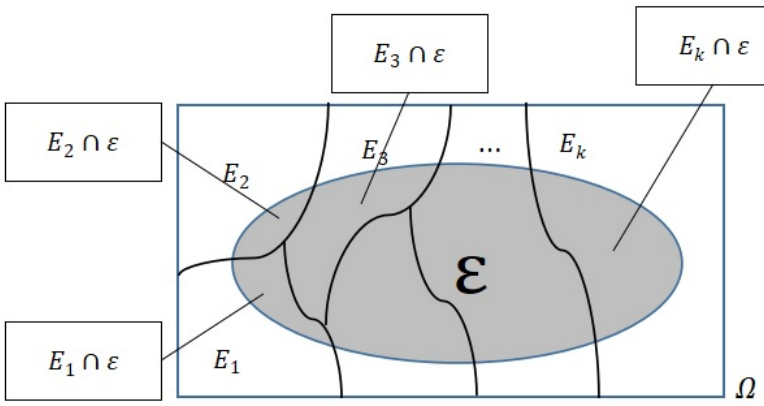
$$P(E_i|\varepsilon) = \frac{P(E_i \cap \varepsilon)}{P(\varepsilon)} = \frac{P(E_i) \times P(\varepsilon|E_i)}{P(\varepsilon)}. \tag{3.27}$$

Como, para o Teorema de Bayes, estuda-se uma partição de Ω, $\boldsymbol{E}$, o evento ε pode também ser particionado ao longo dos elementos de $\boldsymbol{E}$, levando a:

$$P(\varepsilon) = P[(E_1 \cap \varepsilon) \cup \ldots \cup (E_i \cap \varepsilon) \cup \ldots \cup (E_k \cap \varepsilon)] = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \times P(\varepsilon|E_i), \tag{3.28}$$

também conhecida como lei da probabilidade total (ver Figura 3.10) . Logo, o problema de inferência fica plenamente definido a partir das denominadas probabilidades a priori - $P(E_i)$ e de verossimilhança - $P(\varepsilon|E_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Figura 3.10: Diagrama de Venn ilustrando o teorema da probabilidade total.



Fonte: O autor, 2022.

Capítulo 4

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Nos dias atuais existem várias competições estudantis relacionadas às mais diversas disciplinas, como a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), a Olimpíada Brasileira de Física (OBF), a Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA), a Olimpíada Brasileira de Química (OBQ), a Olimpíada Brasileira de Informática (OBI), a Olimpíada Brasileira de História do Brasil (OBHB), a Olimpíada Brasileira de Biologia (OBB), a Olimpíada Brasileira de Linguística (OBL), a Olimpíada Brasileira de Neurociência (OBN), e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), entre outras.

Trazendo uma perspectiva histórica relacionada às olimpíadas de matemática, Maciel e Basso (2009) informa que as competições matemáticas datam desde o século XVI, sob a forma de famosos desafios aos quais os matemáticos mais ilustres da época empenhavam suas reputações, inclusive, razoáveis quantias em dinheiro e, até mesmo, suas cátedras em importantes universidades italianas. Nessa época, os grandes matemáticos se dedicavam a solucionar problemas que serviriam de "armas" poderosas em futuras competições de habilidade matemática.

Assim, quanto mais evidente a notoriedade, mais era permitido que detivesse uma cátedra numa universidade, como também reconhecimento público, prestígio e condição econômica privilegiada. Tais atribuições despertava o interesse de matemáticos mais jovens, ainda anônimos, que buscavam notoriedade, o que fazia com que buscassem vencer desafios públicos contra matemáticos respeitados e experientes. Nessas competições, era comum se propor um conjunto de trinta problemas aos competidores, sendo que aquele que solucionasse a maior quantidade de problemas era considerado o vencedor (MACIEL; BASSO, 2009).

A primeira competição, organizada, de matemática do mundo foi, segundo Hua-wei (2007), a Competição Húngara de Matemática, em 1894. Pode-se afirmar que esta competição deu origem ao que se conhece hoje como "Olimpíada de Matemática", devido à maneira como foi estruturada. Em 1934, de acordo com Zhou e Liu (2009, p. 331), "a antiga União Soviética organizou a competição de matemática do ensino médio em Lenigrado e, a partir de 1935, o *All Union Mathematics Competition* foi realizado em Moscou".

Em 1959, foi realizada a primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO[1]) em Brasov, Romênia, que contou com a participação de 7 países. Em 2020, a 61ª edição desta olimpíada estava prevista para ocorrer em São Petersburgo, na Rússia, com a participação de 105 países. No entanto, devido à pandemia da COVID-19[2], este evento foi realizado de forma completamente virtual.

A Tabela 4.1 apresenta a quantidade de vitórias obtidas nas edições da IMO por cada país participante desde a primeira edição até o ano de 2020.

Tabela 4.1: Quantidade de vitórias na IMO por país.

País	Quantidade de vitórias
República Popular da China	21
União das repúblicas Socialistas Soviéticas	14
Estados Unidos da América	8
Hungria	6
Romênia	5
Alemanha	2
República da Coreia	2
Federação Russa	2
Bulgária	1
Checoslováquia	1
República Democrática Alemã	1
República Islâmica do Irã	1

Fonte: IMO, 2020.

A República Popular da China foi o país que obteve maior quantidade de vitórias, sendo a atual campeã dessa olimpíada.

O Brasil participa desta competição desde 1979, tendo sediado a mesma em 2017 e, até o momento, já conquistou 11 medalhas de ouro, 50 medalhas de prata, 81 medalhas de bronze e 33 menções honrosas. A Tabela A.1 do Anexo A presenta um resumo dos resultados de sua participação mostrando a colocação em que o país ficou em cada edição, a quantidade de países participantes e na última coluna, a posição relativa obtida pela fórmula:

$$PoR = \frac{\text{Posição do Brasil}}{\text{Total de países participantes}} \times 100\%. \tag{4.1}$$

A Equação 4.1 permite visualizar em que estrato de excelência o Brasil se encontra, dentre os países participantes. Quanto menor PoR, mais seleto é o grupo em que o Brasil se encontra. De acordo com a Tabela A.1, no primeiro ano de participação, o Brasil ficou em 22º lugar de um total de 23 países. Assim, ele estaria no grupo dos 95,65% mais qualificados

[1] *International Mathematical Olympiad.*

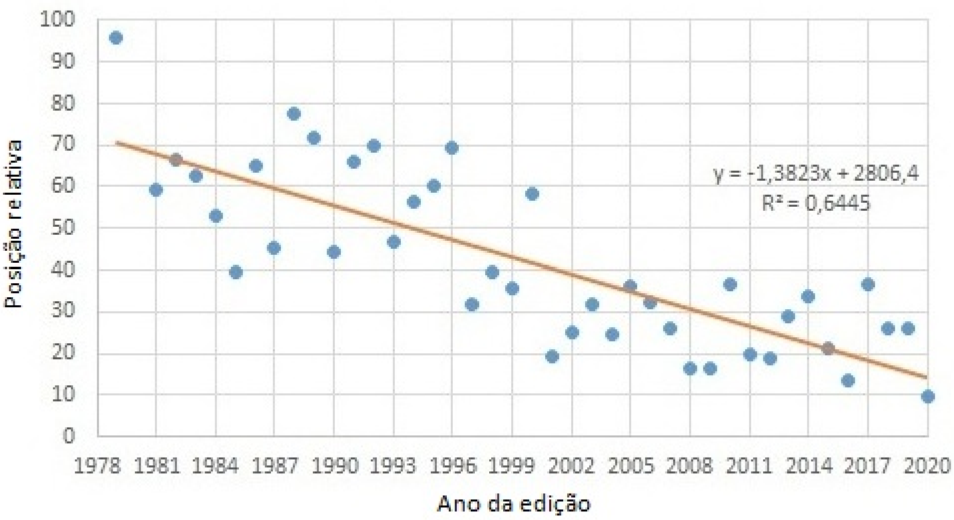
[2] Segundo site do Ministério da Saúde, é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2.

nos jogos. O ano em que o Brasil figurou na melhor colocação considerando o total de países participantes foi em 2020, quando ocupou a 10ª colocação diante de 105 países. Assim, o país ficou entre os $(PoR =)9,52\%$ mais qualificados.

Com a finalidade de observar melhor a posição relativa do Brasil nas edições da IMO, apresenta-se a Figura 4.1 com os dados da última coluna da Tabela A.1 do Anexo A.

A Figura 4.1 permite visualizar a tendência da curva de evolução relativa do Brasil ao longo dos jogos. Da curva linear ajustada, capaz de explicar mais de 64% da variabilidade do ranque brasileiro, estima-se que o país poderia ocupar a 1ª colocação entre 2030 e 2031. Essa quantidade é também conhecida como coeficiente de determinação, R^2. De acordo com Minitab (2019, n.p.), "o R^2 é uma medida estatística de quão próximos os dados estão da linha de regressão ajustada".

Figura 4.1: Posição relativa do Brasil na Olimpíada Internacional de Matemática



Fonte: IMO, 2020.

4.1 A OBMEP

No Brasil, podem ser verificadas algumas iniciativas com relação à criação de olimpíadas de matemática. Dentre estas, pode-se destacar que, de acordo com VIANA, CALDAS et al. (2013, p. 328), em 1977 foi criada a Olimpíada Paulista de Matemática e que em 1979 a Sociedade Brasileira de Matemática realizou a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). A primeira edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi realizada em 2005 e é considerada, de acordo com IMPA (2018), a maior competição escolar do mundo.

A OBMEP é um projeto nacional realizado, de acordo com IMPA (2021a, p. 1), pela "Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, promovida com recursos oriundos do contrato de gestão firmado pelo IMPA com o Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações - MCTI e com o Ministério da Educação (MEC)". De acordo com o regulamento, trata-se de uma ação exclusivamente cultural e recreativa. A participação nesta olimpíada é voluntária e desvinculada à aquisição de qualquer bem, serviço ou direito.

A competição "é dirigida aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio, de escolas públicas municipais, estaduais e federais e escolas privadas, bem como aos respectivos professores, escolas e secretarias de educação, todos localizados no território brasileiro" IMPA (2021a, p. 1). Ainda de acordo com o regulamento da OBMEP, esta tem como objetivos:

> 1.4.1 Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
>
> 1.4.2 Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
>
> 1.4.3 Promover a difusão da cultura matemática.
>
> 1.4.4 Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
>
> 1.4.5 Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo com a sua valorização profissional.
>
> 1.4.6 Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
>
> 1.4.7 Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.
> (IMPA, 2021a, p. 1-2).

As provas da OBMEP, de acordo com IMPA (2021a), são elaboradas a partir de conteúdos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e são organizadas em três níveis: Nível 1: direcionada a alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, Nível 2: para alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e Nível 3: voltado para alunos do Ensino Médio. A olimpíada é composta de duas fases. Na primeira fase, todos os discentes inscritos pelas escolas participam resolvendo uma prova objetiva de 20 questões valendo 1 ponto cada questão. A escola é responsável pela execução desta etapa e a pontuação obtida pelos estudantes não acumula para a segunda fase. A escola deve fixar previamente critérios de desempate a serem aplicados, se necessário, de modo a não exceder sua cota em cada nível. Após a aplicação e correção das provas, os participantes serão classificados em ordem decrescente das notas obtidas. As escolas são divididas em 5 grupos de acordo com o número de inscritos para a Primeira Fase e a quantidade de vagas para a Segunda Fase está descrita nas Tabelas A.2, A.3 e A.4, do Anexo A.

Ainda de acordo com (IMPA, 2021a), a Segunda Fase é realizada pelo IMPA. Trata-se de uma prova discursiva de 6 questões a ser aplicada em centros de aplicação organizados nos espaços cedidos pelas escolas participantes em todo o território nacional. Nesta fase, as provas são corrigidas em duas etapas, sendo uma regional e outra, nacional. Na etapa regional, todas as provas são corrigidas, enquanto na fase nacional, corrige-se provas correspondentes ao dobro do total de medalhas a serem distribuídas. Cabe destacar, ainda, que essas correções são realizadas por, pelo menos, uma vez por corretores diferentes e a premiação dos participantes é dada baseando-se, exclusivamente, nas notas obtidas nesta fase.

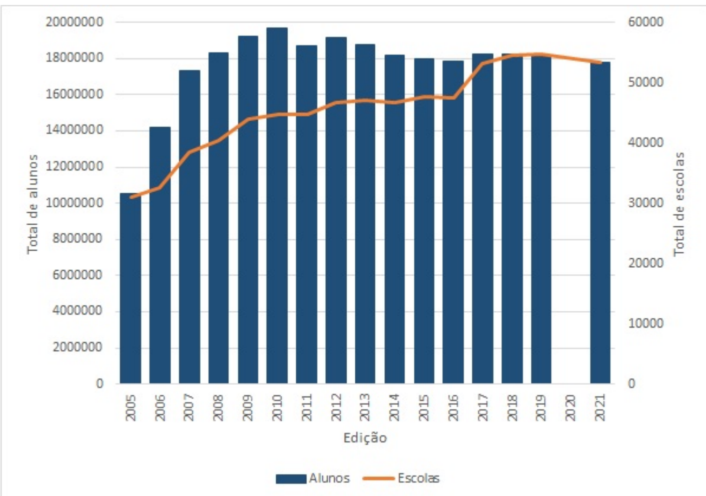
Na 16ª edição, foram concedidas aos alunos participantes, de escolas seletivas e não seletivas, “500 (quinhentas) medalhas de ouro, 1.500 (um mil e quinhentas) medalhas de prata, 4.500 (quatro mil e quinhentas) medalhas de bronze, e até 46.200 (quarenta e seis mil e duzentos) Certificados de Menção Honrosa” (IMPA, 2021a, p. 21). Os critérios para distribuição dessa premiação estão disponíveis no Item 6 do regulamento e a distribuição dos prêmios será organizada conforme Tabelas A.5, A.6 e A.7, do anexo A. Além da premiação concedida aos estudantes e professores, o Item 6 do regulamento prevê premiação para escolas e Secretarias Municipais de Educação.

Aos medalhistas da 16ª OBMEP, será oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). Aos oriundos de escola pública, a participação no PIC inclui o recebimento de uma bolsa de Iniciação Científica Jr. do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Aos provenientes de escolas privadas, a participação será como ouvinte.

A relevância e o alcance desta competição é representada por números disponíveis no site da OBMEP, onde observa-se que na primeira edição realizada em 2005, 10.520.831 alunos de 31.031 escolas brasileiras participaram da olimpíada. Naquele ano, a OBMEP foi realizada em 93,5% dos municípios brasileiros. Na 16ª edição, realizada em 2021, 17.774.636 alunos de 53.374 escolas estavam inscritos para participar desta olimpíada. Sendo assim, a OBMEP esteve presente em 99,84% dos municípios brasileiros.

A Figura 4.2 apresenta o total de estudantes e de escolas participantes em cada edição da olimpíada. A elevação no número de escolas participantes a partir da 13ª edição, realizada em 2017, ocorre devido ao fato desta competição ter incluído as escolas privadas a partir daquele ano.

Figura 4.2: Quantidade de estudantes e de escolas participantes na OBMEP



Fonte: OBMEP, 2021.

Vale destacar que no site da OBMEP encontram-se informações a respeito de vários programas vinculados à mesma, como: Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), Portal da OBMEP, OBMEP Nível A, Banco de Questões e Provas Antigas, Portal Clubes de Matemática, POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo, PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado, Programa OBMEP na Escola.

Além da premiação que o programa oferece, existe a oportunidade dos discentes medalhistas ingressarem em cursos superiores por meio da oferta de vagas olímpicas que foram criadas por algumas universidades com o intuito de promover a inclusão social e diversificar as formas de acesso ao ensino superior. Para concorrer a essas vagas, o candidato deve ler o edital da instituição e observar os critérios para ingresso. De modo geral, o processo seletivo é feito com base na análise das conquistas estudantis em competições de conhecimento. O histórico escolar, geralmente, é levado em conta na composição da nota do candidato.

Como exemplo, (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 2019) ofereceu 113 vagas para matrícula em seus cursos de graduação exclusivamente para o 1º semestre de 2020. Neste edital, pode-se ver que para cada curso, são aceitas participação e premiação em olimpíadas específicas e que a pontuação em olimpíadas internacionais vale mais do que a nas olimpíadas nacionais. A Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) é outro exemplo de oportunidade de ingresso em cursos superiores para alunos medalhistas em olimpíadas. De acordo com (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, 2020), houve a oferta de 116 vagas em seu Edital Olimpíadas de Conhecimento e Competições Científicas ou Modalidades Similares, para ingresso nos cursos de graduação em 2021. Existe previsão de vagas para 2022 cujas inscrições iniciarão em 16 de novembro de 2021. De acordo com (IMPA, 2021b, n.p.), com a esta modalidade de ingresso, “a UNICAMP recebeu 467 inscrições de candidatos que tiveram resultados exemplares em olimpíadas de conhecimento, e 97 deles são medalhistas da OBMEP”. Por sua vez, a Universidade Estadual Paulista (UNESP) ofereceu 195 vagas em vários cursos de graduação por meio do edital de vagas de Olimpíadas Científicas UNESP 2021. Ver detalhes em (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, 2020). Por fim, a Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), por meio do (UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ, 2021), ofereceu 72 vagas para ingresso no primeiro semestre de 2021 em vários cursos de graduação; e (INSTITUTO FEDERAL DO SUL DE MINAS GERAIS, 2020) ofereceu 70 vagas para ingresso em cursos superiores no primeiro semestre de 2021. Não foram encontrados, durante a elaboração deste trabalho, editais de vagas olímpicas no estado do Ceará.

Capítulo 5

PERCURSO METODOLÓGICO

A presente pesquisa iniciou-se por uma revisão de literatura, na qual foram buscadas publicações relacionadas à temática de probabilidade e estatística nas provas da OBMEP . Foram adotados como descritores para buscas de publicações em português os termos “probabilidade”, “estatística” e “OBMEP”. Foi também realizada uma pesquisa documental, nas provas da OBMEP, com o propósito de listar as questões que envolvem conhecimentos de probabilidade e estatística. Nesse sentido, buscou-se realizar a resolução de cada questão encontrada, fazendo correlação com o conteúdo de probabilidade ou de estatística necessário para a sua resolução além da habilidade constante nos Quadros A.1 e A.2, do Anexo A. Assim, foram consultados documentos, livros, artigos, manuais e provas da OBMEP. Tais pesquisas recorreram a portais reconhecidos no meio acadêmico, como o Portal de Catálogo da Capes de Teses e Dissertações, bem como em buscadores gerais como o Google e Google Acadêmico.

A revisão de literatura tem o importante papel de fazer uma triagem em relação ao que já se escreveu ou foi publicado a respeito de uma certa temática para assim, entender quais as lacunas e quais informações servirão de alicerce para uma pesquisa. Define-se, então, os autores e as fontes mais importantes para a construção do texto (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Quanto à abordagem, trata-se de uma pesquisa predominantemente documental, uma vez que seus resultados se baseiam, principalmente, em fontes primárias, em especial, nos exames da OBMEP. No que diz respeito à pesquisa documental, (PESQUISA. . . , , p. 57) informa que essa pesquisa se baseia em

> [...] documentos que não sofreram tratamento analítico, ou seja, que não foram analisados ou sistematizados. O desafio a esta técnica de pesquisa é a capacidade que o pesquisador tem de selecionar, tratar e interpretar a informação, visando compreender a interação com sua fonte. Quando isso acontece há um incremento de detalhes à pesquisa e os dados coletados tornam-se mais significativos.

Quanto ao objetivo, a pesquisa é descritiva, sendo que se busca estudar a presença e a natureza de questões de estatística e probabilidade nas provas da OBMEP em suas duas fases, bem como quais habilidades descritas na BNCC estão relacionadas aos conhecimentos necessários para resolver essas questões. Nessa perspectiva, a pesquisa descritiva se ocupa em registrar e analisar os fenômenos sem interferir neles. Além disso, busca descrever as características de um determinado fenômeno e as relações existentes entre as variáveis, examinando os padrões e a frequência com os mesmos ocorrem (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Além disso, este trabalho possui uma abordagem predominantemente quali-quantitativa, já que se utiliza de fontes primárias para averiguar hipóteses no que se refere à incidência dos conteúdos e habilidades relacionados à probabilidade e estatística nas provas da OBMEP nas suas duas fases de aplicação, atrelando-se à análise de conteúdo subjacente. De acordo com (FONSECA, 2002, p. 20):

> Diferentemente da pesquisa qualitativa, os resultados da pesquisa quantitativa podem ser quantificados. Como as amostras geralmente são grandes e consideradas representativas da população, os resultados são tomados como se constituíssem um retrato real de toda a população alvo da pesquisa. A pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente.

De fato, vale ressaltar que "os métodos qualitativos e quantitativos não se excluem, e contribuem para o entendimento e a quantificação dos aspectos lógicos e essenciais de um fato ou fenômeno estudado" (PROETTI, 2018, p. 2).

Para a análise dos dados, foram utilizadas ferramentas estatísticas como tabelas de frequências e gráficos criados a partir de planilhas eletrônicas como Excel e o WPS Office. Além disso, foram explorados os procedimentos da estatísticas descritiva como distribuição de frequências absolutas e relativas; medidas de posição: média, moda e mediana; e dispersão, no caso, desvio padrão, variância e coeficiente de variação linear.

Dessa forma, primeiramente foram levantados em documentos oficiais, em particular, a BNCC e os PCNs, o que deve ser abordado no ensino de Probabilidade e Estatística, estabelecendo através desses documentos o direcionamento adequado. Para isso, foi feito um levantamento de literatura, elencando as principais atribuições desses documentos.

Em seguida, por meio de uma revisão de literatura foi apresentado um apanhado de assuntos de Probabilidade e Estatística explorados nas provas da OBMEP. Nesta etapa, tais temas são tidos como pré-requisitos e servem de base para a solução dos problemas ora apresentados neste trabalho.

Depois foram destacadas, por meio de um levantamento bibliográfico, as olimpíadas estudantis, por exemplo, a OBMEP e OBM como forma de motivação e desafio aos estudantes, inclusive os de Matemática. Nessa fase é feita uma retrospectiva histórica no que diz respeito a estas competições, como o ano de surgimento, país de origem e o quantitativo de participantes nessas competições, inclusive na OBMEP.

A seguir, foi feita uma triagem no tocante aos assuntos que envolvem Probabilidade e Estatística, sendo feita a comparação e o quantitativo de dessas questões nas duas fases da

OBMEP, ao passo que é feita a vinculação com as habilidades da BNCC. Para isso, foram utilizadas ferramentas estatísticas como a distribuição de frequências e medias de tendência central.

Por fim, são apresentados os resultados desta pesquisa e alguns problemas que envolvem Probabilidade e Estatística, bem como suas respectivas soluções, fazendo um paralelo com os assuntos abordados no Capítulo 3 e as habilidades estabelecidas na BNCC, conforme o Anexo A, Quadros A.1 e A.2.

Capítulo 6

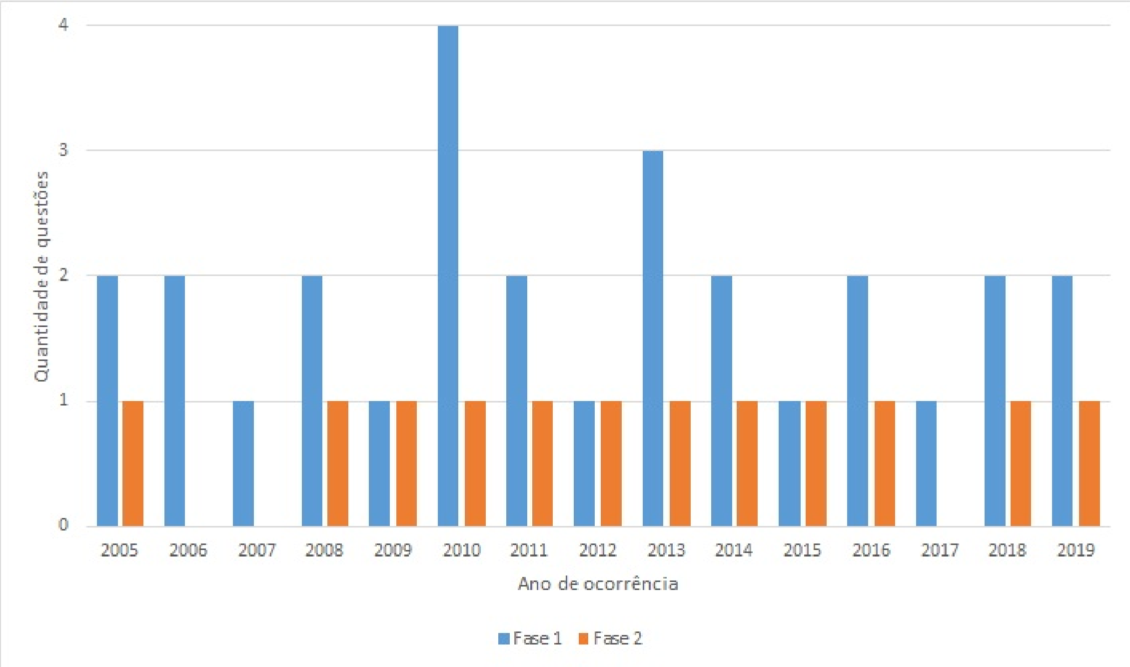
QUESTÕES DE ESTATÍSTICA OU PROBABILIDADE NA OBMEP

A partir das questões da OBMEP, analisadas desde 2005 até 2019 foi possível identificar aquelas que contemplam conteúdos de estatística e probabilidade. Foram analisadas somente as questões do Nível 3, destinadas aos estudantes do ensino médio. Entre outros motivos, destaca-se que, nos dias atuais, é possível ingressar em um curso superior com as medalhas obtidas nesta competição estudantil através de edital de medalhas olímpicas, como visto anteriormente.

6.1 INFORMAÇÕES GERAIS

Foram analisadas 300 questões da primeira fase e 90 da segunda buscando identificar, dentre estas, as que estão relacionadas aos conteúdos de estatística e probabilidade. O resultado encontra-se na Figura 6.1, a seguir. A distribuição das questões de estatística e probabilidade nas edições observadas apresentou, para a Fase 1, média 1,87, sendo que na maioria delas, houve duas questões. Para a Fase 2, com exceção dos anos 2006, 2007 e 2017, houve uma questão envolvendo os conhecimentos relacionados à estatística ou à probabilidade. Vale destacar que na Fase 2, as questões são dissertativas e envolvem mais de um questionamento. A baixa frequência de questões sobre probabilidade ou estatística pode também indicar algum desequilíbrio entre temas mais aplicados e aqueles mais teóricos, entre os elaboradores da prova, sugerindo um formato de exame mais divergente em relação ao ENEM, porta de entrada para inúmeras instituições de ensino superior no Brasil.

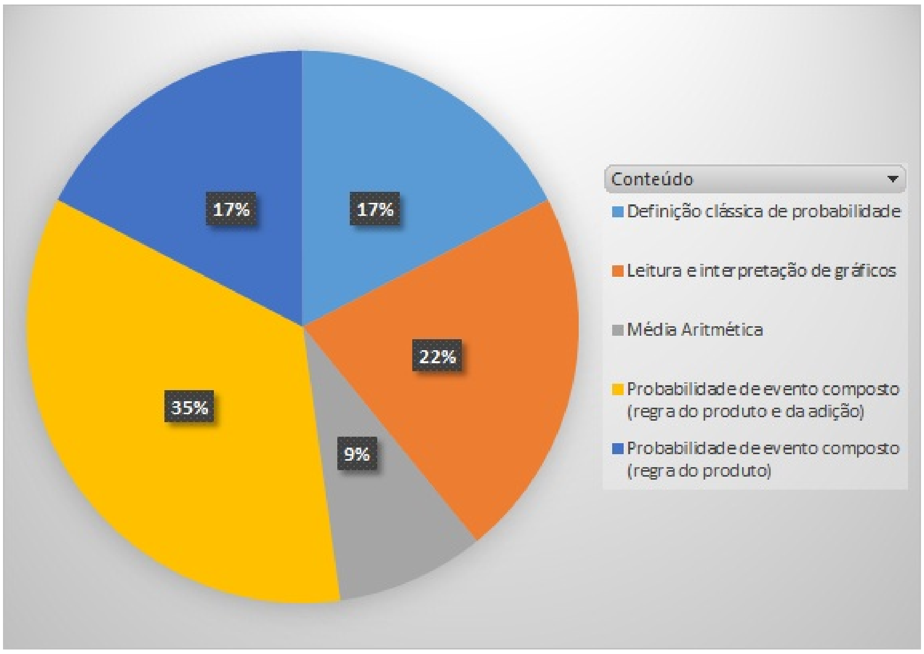
Figura 6.1: Quantidade de questões de estatística e probabilidade nas edições da OBMEP, por ano e fase



Fonte: OBMEP, 2021.

Fazendo a resolução das questões propostas em cada fase, expostas a seguir (Seção 6.2), percebe-se que estas abordaram os conteúdos listados na Figura 6.2. Pela figura, observa-se que 17% das questões analisadas podem ser resolvidas utilizando a Definição 3.2.14, sobre a abordagem clássica da probabilidade, que diz respeito às habilidades EF06MA30 e EF07MA34 da BNCC. Esta definição é utilizada como base, para resolver várias outras questões que envolvem a probabilidade de eventos compostos. Com relação às questões que envolvem este conteúdo, observou-se que em 17% delas fez-se uso da regra do produto (Teorema 3.2.3) diretamente e que em 35%, além da regra do produto, foi necessário utilizar a regra da adição 3.2.1, habilidades EF08MA22 e EM13MAT310. Destaque-se, ainda, que em 35% das questões, além da regra do produto, fez-se uso do Axioma 3.2.4 de Kolmogorov, após dividir o problema original em eventos com intersecção vazia. Em 22% das questões analisadas, fez-se uso de leitura e interpretação de gráficos, habilidades EF06MA31 e EF06MA32. 60% dessas questões foram resolvidas apenas observando as informações contidas nelas, sem necessidade de cálculo, e, em 40%, foi necessário efetuar cálculo de porcentagem, habilidade EF06MA30, também abordada nos conteúdos de frequência relativa (Equação 3.1).

Figura 6.2: Conteúdos de Probabilidade e Estatística abordados nas questões da OBMEP



Fonte: OBMEP, 2021.

A definição do tipo de conteúdo utilizado para resolver a questão depende da tomada de decisão para fazê-lo. As questões que foram resolvidas com média aritmética simples (Definição 3.1.7) correspondem a 9% do total, habilidades EF07MA35, EF08MA25 e EM13MAT316.

Na seção a seguir, atenção especial é dedicada a cada questão da OBMEP que envolve conteúdos de probabilidade ou estatística para a solução adequada.

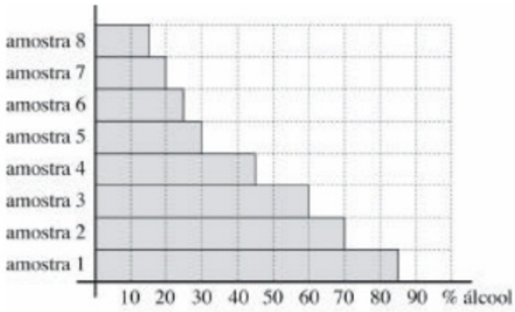
6.2 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NAS PROVAS DA OBMEP

Essa seção aborda as questões da OBMEP que envolvem conteúdos de probabilidade ou estatística. As questões aqui apresentadas foram obtidas em (IMPA, 2022). Neste site existem soluções para as questões aqui listadas. Sendo assim, procurou-se apresentar, neste trabalho, uma solução diferente da apresentada na OBMEP ou detalhar com mais texto explorando o passo a passo da mesma resposta apresentada no site. Tratam-se de 40 questões.

1. **(OBMEP-2005) Nível 3 - Fase 1 - Questão 4**

   Para testar a qualidade de um combustível composto apenas de gasolina e álcool, uma empresa recolheu oito amostras em vários postos de gasolina. Para cada amostra, foi determinado o percentual de álcool e o resultado é mostrado no gráfico abaixo. Em quantas dessas amostras o percentual de álcool é maior que o percentual de gasolina?

   (A) 1
   (B) 2
   (C) 3
   (D) 4
   (E) 5



   Solução:

   Para a resolução desta questão é suficiente observar, no gráfico, as amostras cuja barra horizontal ultrapassa a marca de 50%, que são as amostras 1, 2 e 3. Logo, a alternativa **(C)** traz a resposta correta.

   ■

   Vale destacar a abordagem construída a partir do domínio do estudante sobre o tema de proporção, bem como da capacidade de leitura sobre gráficos de barras, também necessário para descrever distribuições de frequências. Tais conceitos dizem respeitos às habilidades EF06MA31, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

2. **(OBMEP-2005) Nível 3 - Fase 1 - Questão 19**

   Brasil e Argentina participam de um campeonato internacional de futebol no qual competem oito seleções. Na primeira rodada serão realizadas quatro partidas, nas quais os adversários são escolhidos por sorteio. Qual é a probabilidade de Brasil e Argentina se enfrentarem na primeira rodada?
   (A) 1/8
   (B) 1/7
   (C) 1/6
   (D) 1/5
   (E) 1/4

   Solução: Considerando o espaço amostral de adversários do Brasil, tem-se:

$$\Omega = \{\text{Argentina}, \text{País}_2, \text{País}_3, \text{País}_4, \text{País}_5, \text{País}_6, \text{País}_7\}.$$

Assumindo a abordagem clássica de probabilidade (Definição 3.2.14), todos os países em Ω têm a mesma probabilidade de serem escolhidos para enfrentar o Brasil. Logo, fixado o Brasil no sorteio, tem-se $f_\Omega(\Omega) = 7$. Considerando o evento de interesse $E \equiv$ 'sortear a Argentina como adversário do Brasil', tem-se que $f_\Omega(E) = 1$, já que há apenas um elemento de Ω que favorece E. Assim, a probabilidade de Brasil enfrentar a Argentina na primeira rodada é:

$$P(E) = \frac{f_\Omega(E)}{f_\Omega(\Omega)} = \frac{1}{7}.$$

Dessa forma, a alternativa **(B)** traz o resultado correto.

■

Neste problema é evidente a importância do domínio da abordagem clássica de probabilidade, em particular, entender o que é um espaço amostral e qual o significado de dois ou mais eventos serem equiprováveis. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30 e EF07MA34 da BNCC.

Outra forma de ver a questão é a seguinte:

Pela Definição 3.2.6 cada partida pode ser formada de 28 maneiras diferentes que equivale a

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times (8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 28.$$

Dos quais, em um deles, Brasil e Argentina se enfrentam. Sendo assim, para cada jogo, a probabilidade de Brasil enfrentar a Argentina é de $\frac{1}{28}$.

Como ocorrem 4 jogos na primeira rodada, temos que na primeira rodada, a probabilidade de Brasil enfrentar a Argentina é:

$$4 \times \frac{1}{28} = \frac{1}{7}.$$

■

Neste caso é importante desenvolver o conceito de combinação simples abordado no Ensino Médio, o que permite expressar o conjunto de todas as possibilidades de ocorrer um confronto entre Brasil e Argentina, por exemplo. Assim, remete-se ao conceito de probabilidade a partir da distribuição binomial. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT311 da BNCC.

3. **(OBMEP-2005) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

   Em um jogo, cada participante recebe um cartão com 4 números distintos de 1 a 20, dispostos em duas linhas e duas colunas. Os números são sucessivamente sorteados de uma caixa que contém 20 bolas idênticas, que foram numeradas de 1 a 20. Ganha o participante cujo cartão for o primeiro a ter sorteados dois números de uma linha ou dois números de uma coluna.

(A) Os cartões $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \\ \hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline\end{array}$ são **equivalentes**, porque se um deles ganha o jogo então o outro ganha também. Descreva todos os cartões equivalentes ao cartão $\begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 2 \\ \hline 9 & 4 \\ \hline\end{array}$.

Solução: Pode-se resolver este item fixando, por exemplo, o número 7 em um dos quatro quadrados e rotacionando os demais, mantendo os pares de números formados no primeiro cartão que são (7,2), (7,9), (2,4) e (9,4).

Para o número 7 no canto superior esquerdo, além do original, existe $\begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 9 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}$.

Para o número 7 no canto inferior esquerdo, as possibilidades são: $\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 4 \\ \hline 7 & 2 \\ \hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 7 & 9 \\ \hline\end{array}$

Para o número 7 no canto superior direito, as possibilidades são: $\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 7 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 7 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline\end{array}$

Para o número 7 no canto inferior direito, as possibilidades são: $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 9 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 9 & 7 \\ \hline\end{array}$

■

Vale destacar o domínio de conteúdos como contagem e permutação, também trabalhados no cálculo de probabilidades. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT311 da BNCC.

(B) Qual é a probabilidade de que o cartão $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \\ \hline\end{array}$ ganhe logo na segunda bola sorteada?

Solução: Para que o cartão ganhe na segunda bola sorteada, é necessário que a primeira bola sorteada seja um dos quatro números do cartão e que a segunda seja um dos números que aparecem na mesma linha ou coluna do primeiro.

Para que o primeiro evento ocorra, a bola sorteada dentre as 20 deve apresentar um dos 4 números do cartão.
A probabilidade é $\dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$.
Para que o segundo evento ocorra, o número da segunda bola deve ser um dos dois números que estão na linha ou na coluna do primeiro. Como restam 19 a serem sorteadas, a probabilidade disto ocorrer é $\dfrac{2}{19}$.
Logo, a probabilidade de que o cartão ganhe logo na segunda bola sorteada é:

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{19} = \frac{2}{95}.$$

■

Outra forma de pensar sobre o problema seria:

O casamento entre os conteúdos de contagem e probabilidade clássica são necessários para a solução desse quesito. Considere o evento de interesse $E \equiv$ 'O cartão em destaque vence o jogo já no 2º número sorteado'. Para simplificar a abordagem, considere ainda os eventos $a_i \equiv$ 'sorteia-se o número 1 na i^a extração', $b_i \equiv$ 'sorteia-se o número 5 na i^a extração', $c_i \equiv$ 'sorteia-se o número 12 na i^a extração' e $d_i \equiv$ 'sorteia-se o número 3 na i^a extração', com $i = 1, 2$. Considere ainda que os números na caixa são equiprováveis e que os sorteios são sem reposição. Logo, ocorre E se ocorrem 'a_1 e b_2' ou 'b_1 e a_2' ou 'a_1 e c_2' ou 'c_1 e a_2' e assim por diante. Vale destacar que explicita-se o fato de que 'a_1 e b_2' é um resultado fundamentalmente diferente de 'b_1 e a_2', mas que levam a ocorrer E. Probabilisticamente, tem-se a probabilidade da união entre interseções

$$P(E) = P\{[(a_1 \cap b_2) \cup (b_1 \cap a_2)] \cup [(a_1 \cap c_2) \cup (c_1 \cap a_2)] \cup$$

$$[(c_1 \cap d_2) \cup (d_1 \cap c_2)] \cup [(d_1 \cap b_2) \cup (b_1 \cap d_2)]\}.$$

Vale notar que trata-se aqui da probabilidade da união entre eventos disjuntos. Por exemplo, é impossível ocorrer $(a_1 \cap b_2)$ e, ao mesmo tempo, $(b_1 \cap a_2)$. Então, pelo Axioma 3.2.4, tem-se que

$$P(E) = P(a_1 \cap b_2) + P(b_1 \cap a_2) + P(a_1 \cap c_2) + P(c_1 \cap a_2) +$$

$$P(c_1 \cap d_2) + P(d_1 \cap c_2) + P(d_1 \cap b_2) + P(b_1 \cap d_2).$$

Agora, recorrendo à regra do produto (Teorema 3.2.3), tem-se que, por exemplo,

$$P(a_1 \cap b_2) = P(a_1) \times P(b_2|a_1).$$

Devido à equiprobabilidade subjacente à abordagem clássica da probabilidade (Definição 3.2.14), tem-se que $p(a_1) = 1/20$, isto é, há um caso favorável a ocorrer $\{1\}$ dentre os 20 números possíveis. Por sua vez, devido ao sorteio ser sem reposição, tem-se que

$$P(b_2|a_1) = 1/19,$$

isto é, dado que ocorreu a_1 ($\{1\}$ no primeiro sorteio), restam 19 números, dos quais apenas um favorece b_2 ($\{5\}$ no primeiro sorteio). Isso conduz a

$$P(a_1 \cap b_2) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{19}.$$

É fácil perceber que $P(a_1 \cap b_2) = P(b_1 \cap a_2) = P(a_1 \cap c_2) = \cdots = P(b_1 \cap d_2)$. Logo, envolvem-se 8 interseções, com probabilidade de ocorrência igual a $\frac{1}{20} \times \frac{1}{19}$, levando ao final a

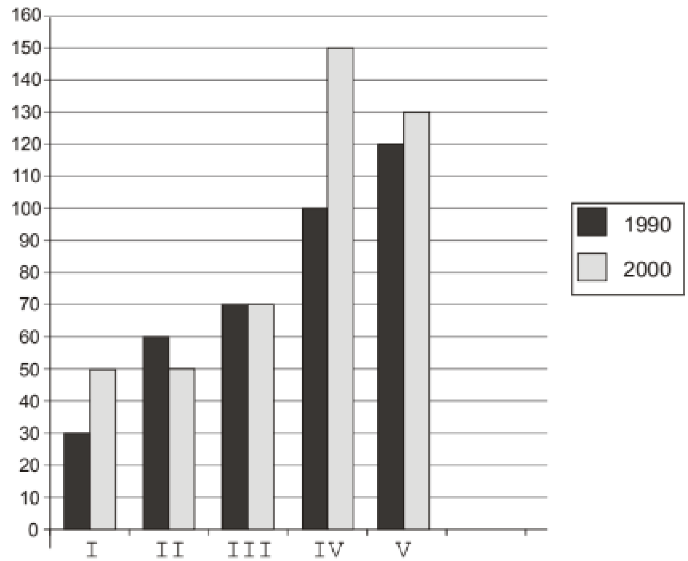
$$P(E) = 8 \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{19} = \frac{2}{95}.$$

■

Neste problema é evidente a importância do domínio da abordagem clássica de probabilidade, em particular, entender que é um espaço amostral e qual o significado de dois ou mais eventos serem equiprováveis. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30 e EF07MA34 da BNCC.

4. **(OBMEP-2006) Nível 3 - Fase 1 - Questão 6**

No gráfico estão representadas as populações das cidades I, II, III, IV e V em 1990 e 2000, em milhares de habitantes. Por exemplo, em 1990 a população da cidade II era de 60 000 habitantes e em 2000 a cidade IV tinha 150 000 habitantes.



Qual cidade teve o maior aumento percentual de população de 1990 a 2000?

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

(E) V

Solução: Pela observação do gráfico, percebe-se que a cidade II apresentou decrescimento populacional de 1990 para 2000 e que na cidade III não houve alteração no total de habitantes.

Resta comparar o crescimento populacional das cidades I, IV e V.

Na cidade I, o aumento populacional foi de 20000 $(50000 - 30000)$ habitantes. Isso representa um aumento percentual de $\dfrac{20000}{30000} \approx 67\%$.

Na cidade IV, o aumento populacional foi de 50000 $(150000 - 100000)$ habitantes. Isso representa um aumento percentual de $\dfrac{50000}{100000} = 50\%$.

Na cidade V, o aumento populacional foi de 10000 $(130000 - 120000)$ habitantes. Isso representa um aumento percentual de $\dfrac{10000}{120000} \approx 8,3\%$.

Logo, o maior aumento percentual ocorreu na cidade I e a alternativa **(A)** apresenta a resposta correta.

■

Nessa questão é importante que se tenha o domínio de distribuição de frequências relativas bivariadas, representadas em gráficos de colunas, além de chamar a atenção para proporção estabelecida entre elas em cada um dos cinco períodos. Tais conceitos dizem respeitos às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

5. **(OBMEP-2006) Nível 3 - Fase 1 - Questão 16**

   Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Dela são retiradas ao acaso duas bolas. Qual a probabilidade de que o maior número assim escolhido seja o 4?

   (A) $\dfrac{1}{10}$

   (B) $\dfrac{1}{5}$

   (C) $\dfrac{3}{10}$

   (D) $\dfrac{2}{5}$

   (E) $\dfrac{1}{2}$

   Solução: Existem duas formas de ocorrer de o maior número assim escolhido ser o 4:

   - O primeiro número sorteado ser menor que 4 com probabilidade de $\dfrac{3}{5}$ (existem 3 números favoráveis de um total de 5) e o segundo número sorteado ser 4, com probabilidade $\dfrac{1}{4}$ (existe um número favorável de um total de 4, pois um dos números já foi retirado). Perceba que estes eventos são independentes. Pelo Teorema 3.2.3 e, pela Equação 3.25, o resultado é:

   $$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

   - O primeiro número sorteado ser 4, com probabilidade $\dfrac{1}{5}$ (existe um número favorável de um total de 5) e o segundo número sorteado ser um número menor que 4 com probabilidade de $\frac{3}{4}$ (existem 3 números favoráveis de um total de 4 pois um dos números já foi sorteado). Perceba que estes eventos são independentes. Pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, o resultado é:

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}.$$

Dessa forma, a probabilidade de que o maior número assim escolhido seja o 4 é:

$$\frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

A alternativa **(C)** apresenta a resposta correta.

■

Agora, recorrendo sistematicamente à abordagem clássica de probabilidade (Definição 3.2.14), às regras da adição (Teorema 3.2.1), do produto (Teorema 3.2.3) e aos métodos de contagem, considere o evento $X_i \equiv$ 'o número da i^a bola extraída', com $i = 1, 2$. O evento de interesse é dado por

$$E = (X_1 = 4 \cap X_2 < 4) \cup (X_1 < 4 \cap X_2 = 4).$$

Assim, se ocorre E, ocorre de o maior número escolhido dentre os dois ser 4. Pela regra da adição, simplificada pelo Axioma 3.2.4 de Kolmogorov, tem-se

$$P(E) = P(X_1 = 4 \cap X_2 < 4) + P(X_1 < 4 \cap X_2 = 4) = 2 \times P(X_1 = 4 \cap X_2 < 4).$$

Essa última igualdade decorre da propriedade de simetria, presente na operação da interseção entre eventos ($A \cap B = B \cap A$). Pela regra do produto, tem-se

$$P(X_1 = 4 \cap X_2 < 4) = P(X_1 = 4) \times P(X_2 < 4 | X_1 = 4).$$

Devido à equiprobabilidade subjacente à abordagem clássica da probabilidade, tem-se que $P(X_1 = 4) = 1/5$ (das 5 bolas na caixa para a primeira extração, uma favorece o resultado $\{X_1 = 4\}$). Por sua vez, tem-se $P(X_2 < 4 | X_1 = 4) = 3/4$ (das 4 bolas na caixa para a segunda extração, dado que na primeira saiu o número 4, três favorecem o resultado $\{X_2 < 4\}$). Assim,

$$P(X_1 = 4 \cap X_2 < 4) = P(X_1 = 4) \times P(X_2 < 4 | X_1 = 4) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}.$$

Tem-se, ao final, que $P(E) = 2 \times \frac{3}{20} = \frac{3}{10}$.

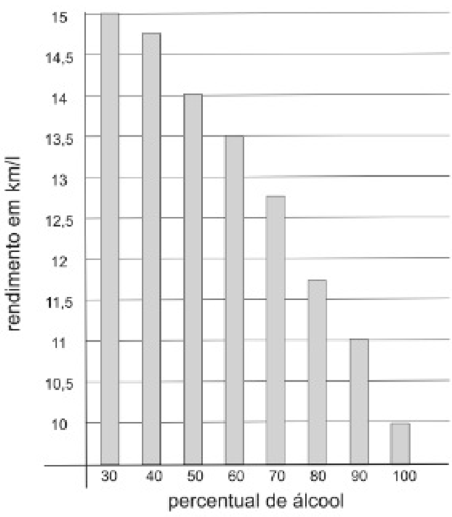
■

Neste problema é evidente a importância do domínio da abordagem clássica de probabilidade, em particular, entender o que é um espaço amostral e qual o significado de dois ou mais eventos serem equiprováveis. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30 e EF07MA34 da BNCC.

6. **(OBMEP-2007) Nível 3 - Fase 1 - Questão 16**

   O gráfico mostra a relação entre o percentual de álcool misturado com gasolina e o rendimento do carro de Cristina, em quilômetros por litro. Cristina começou uma viagem com o tanque de 50 litros cheio de uma mistura com 30% de álcool. Depois de andar 300 km ela parou em um posto, onde completou o tanque com álcool puro, e continuou a viagem sem abastecer até chegar ao seu destino, com o tanque praticamente vazio. Aproximadamente quantos quilômetros ela percorreu em toda a viagem?

   (A) 800
   (B) 900
   (C) 975
   (D) 1050
   (E) 1125



Solução: Pela leitura do gráfico, observa-se que com uma mistura contendo 30% de álcool o carro de Cristina faz 15 km/l. Como na primeira etapa da viagem foram percorridos 300 km, ela gastou $\frac{300}{15} = 20$ litros de combustível, restando 30 litros com 30% de álcool. Ou seja, restaram $\frac{30}{100} \times 30 = 9$ litros de álcool e 21 litros de gasolina.

Ao abastecer 20 litros de álcool puro, o combustível passa a ter 29 litros de álcool e 21 litros de gasolina. Isso significa que a porcentagem de álcool é $\frac{29}{50} = 58\%$, que é aproximadamente 60%.

Pelo gráfico apresentado, com este percentual, o carro de Cristina rende, aproximadamente 13,5 km/l.

Como ela chegou ao destino com o tanque praticamente vazio, ela percorreu, aproximadamente, $13,5 \times 50 = 675$ quilômetros.

Logo, a viagem de Cristina foi de, aproximadamente, $300 + 675 = 975$ quilômetros. A alternativa **(C)** mostra a resposta correta.

■

Esse problema explora a representação de uma variável em um gráfico de colunas, sendo evidenciada a frequência relativa de álcool, estabelecida entre as colunas em ordem decrescente. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

7. **(OBMEP-2008) Nível 3 - Fase 1 - Questão 10**

   Pedrinho preencheu a tabela com números inteiros de forma que em cada linha, coluna ou diagonal, o número do meio é a média aritmética dos outros dois. Qual é a soma dos números que apareceram nas casas em cinza?

   (A) 16
   (B) 17
   (C) 18
   (D) 19
   (E) 20

	7	
9		
		20

Solução: Inicialmente, preenche-se a primeira linha com x no canto superior direito e y no canto superior esquerdo. Preenche-se a segunda linha com z no centro e w no lado esquerdo e na última linha coloca-se s no canto inferior esquerdo e t no centro. Como mostra o quadro abaixo.

x	7	y
9	z	w
s	t	20

Daí, calculando a média aritmética, Definição 3.1.7, como informa o problema, tem-se:

- $7 = \dfrac{x+y}{2}$ e, assim, $y = 14 - x$
- $9 = \dfrac{x+s}{2}$ e, assim, $s = 18 - x$
- $z = \dfrac{s+y}{2} = \dfrac{(18-x)+(14-x)}{2} = 16 - x$
- $z = \dfrac{x+20}{2}$ e, assim, $16 - x = \dfrac{x+20}{2}$.

Logo $32 - 2x = x + 20$. Assim, $-3x = -12$ e $x = 4$.

Retornando aos resultados anteriores, segue:

- $y = 14 - x = 14 - 4 = 10$
- $s = 18 - x = 18 - 4 = 14$
- $z = 16 - x = 16 - 4 = 12$

Calculando o valor de w tem-se:

$$z = \frac{9+w}{2} \text{ e } w = 2z - 9 = 2 \times 12 - 9 = 15.$$

Pode-se responder a questão com estes valores, mas pode-se calcular o valor de t por:

$$t = \frac{s+20}{2} = \frac{14+20}{2} = 17.$$

Assim, preenche-se o quadro.

4	7	10
9	12	15
14	17	20

A solução da questão é dada por $4 + 15 = 19$ e a alternativa **(D)** traz a resposta correta.

■

Essa questão explora a observação e interpretação de informações implícitas e explicitas em tabelas, bem como o conceito de média aritmética. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA35, EF08MA25, EF08MA27 e EM13MAT316 da BNCC.

8. **(OBMEP-2008) Nível 3 - Fase 1 - Questão 20**

Em um jogo, Pedro lança uma moeda para decidir quantas casas avançar. Quando sai cara, ele avança uma casa; quando sai coroa, ele avança duas casas. O jogo acaba quando Pedro alcança ou ultrapassa a última casa. Faltam três casas para Pedro terminar o jogo. Qual é a probabilidade de que ele tire coroa em sua última jogada?

(A) $\frac{7}{8}$

(B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{5}{8}$

(E) $\frac{3}{4}$

Perceba que os eventos "sair cara" ou "sair coroa", a cada lançamento, são equiprováveis e independentes, assim pela Definição 3.2.14, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, Pedro pode terminar o jogo de cinco maneiras diferentes:

(a) cara, cara, cara - com probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

(b) cara, cara, coroa - com probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

(c) cara, coroa - com probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

(d) coroa, cara - com probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

(e) coroa, coroa - com probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ele termina com coroa nas alternativas 2, 3 e 5.

Como as alternativas acima são mutuamente exclusivas, pelo Teorema 3.2.1 e, pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de sua última jogada ser coroa é:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

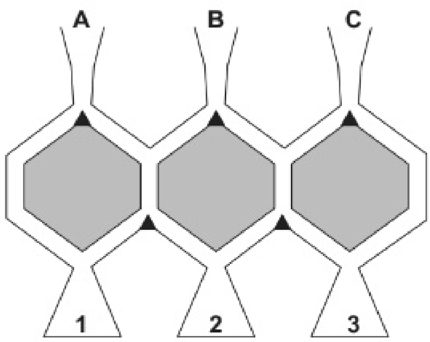
A alternativa correta é **(D)**.

■

Nesse problema é explorada a ideia de eventos independentes, em seguida, o conceito de probabilidade envolvendo eventos mutuamente exclusivos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

9. **(OBMEP-2008) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas A, B ou C e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou 3. Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.



(a) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?

Solução: Para a bolinha colocada em C, há duas possibilidades: ela pode cair na caixa 2 ou na caixa 3. A bolinha colocada em B poderá parar em qualquer das caixas.

■

(b) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?

Solução: Para que a bolinha colocada em A termine na caixa 2 é necessário que ela vá para a esquerda tanto na primeira quanto na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em todas as bifurcações, a probabilidade do evento ocorrer é:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Para a bolinha colocada em B há dois caminhos:

- esquerda, direita - probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- direita, esquerda - probabilidade $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de um deles ocorrer é:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

■

(c) Se colocarmos uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez), qual é a probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa?

Solução: Existem três resultados possíveis:

- A bolinha A cai na caixa 1, a bolinha B cai na caixa 2 e a bolinha C cai na caixa 3. Probabilidade:
$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}.$$
- A bolinha A cai na caixa 1, a bolinha C cai na caixa 2 e a bolinha B cai na caixa 3. Probabilidade
$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}.$$
- A bolinha A cai na caixa 2, a bolinha B cai na caixa 1 e a bolinha C cai na caixa 3. Probabilidade:
$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}.$$

Como os eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é:

$$\frac{9}{32} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}.$$

■

Nesse problema, é explorado o conceito de probabilidade condicional, conceito também explorado na Educação Básica, no Ensino Médio. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

10. **(OBMEP-2009) Nível 3 - Fase 1 - Questão 15**

Luciana tem três canetas pretas e três vermelhas. Ontem ela pegou, ao acaso, uma dessas canetas e colocou-a na bolsa. Hoje ela colocou uma caneta preta na bolsa. Se ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, qual a probabilidade de essa caneta ser preta?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{4}{7}$

Solução: Como a caneta colocada na bolsa no segundo dia é preta, basta verificar as possibilidades para a caneta colocada na bolsa no primeiro dia. Existem duas possibilidades para as cores das canetas na bolsa de Juliana:

- No primeiro dia, ela colocou uma caneta preta na bolsa, com probabilidade de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. A probabilidade de ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, e essa caneta ser preta é $\frac{2}{2} = 1$. Logo, a probabilidade para este caso é:

$$\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

- No primeiro dia, ela colocou uma caneta vermelha na bolsa, com probabilidade de $\frac{1}{2}$. A probabilidade de ela retirar uma dessas duas canetas da bolsa, sem olhar, e essa caneta ser preta é $\frac{1}{2}$. Logo, a probabilidade para este caso é:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de Juliana tirar uma caneta preta da bolsa é:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

■

Nessa questão explora-se o cálculo de probabilidade envolvendo eventos mutuamente exclusivos, uma vez que os eventos são disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

11. **(OBMEP-2009) Nível 3 - Fase 2 - Questão 4**

Quatro times, entre os quais o Quixajuba, disputam um torneio de vôlei em que:
• cada time joga contra cada um dos outros uma única vez;
• qualquer partida termina com a vitória de um dos times;
• em qualquer partida os times têm a mesma probabilidade de ganhar;
• ao final do torneio, os times são classificados em ordem pelo número de vitórias.
(a) É possível que, ao final do torneio, todos os times tenham o mesmo número de vitórias? Por quê?

Solução: Supondo que o nome dos times seja: Quixajuba, Equipe1, Equipe2 e Equipe3. O total de partidas a serem realizadas está representada na tabela abaixo:

Partida	Time 1	Time 2
1	Quixajuba	Equipe1
2	Quixajuba	Equipe2
3	Quixajuba	Equipe3
4	Equipe1	Equipe2
5	Equipe1	Equipe3
6	Equipe2	Equipe3

Como existem 6 partidas possíveis e existem quatro times, o torneio não pode acabar com os quatro times tendo o mesmo número de vitórias, pois 6 não é divisível por 4.

■

(b) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com o Quixajuba isolado em primeiro lugar?

Solução: Para que isso ocorra, é necessário que Quixajuba ganhe todas as partidas que disputar, pois:

- não ganhar partida: perde o torneio.
- se ganhar apenas uma partida, restarão 5 vitórias para serem dividas entre 3 equipes e pelo menos uma dessas terá duas vitórias: perderá o torneio.
- se ganhar duas partidas, restarão 4 vitórias para serem dividas entre 3 equipes e pelo menos uma dessas terá duas vitórias: poderá vencer o torneio, mas não ficará isolado em primeiro lugar.

Sendo assim, para os jogos disputados por Quixajuba, só há um resultado favorável (vitória) e para os demais jogos, pode haver dois resultados. Pelo PFC, Axioma 3.2.1, o número de resultados favoráveis é:

$$1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Pelo PFC, Axioma 3.2.1, o número de resultados possíveis é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64.$$

Logo, pela Definição 3.2.14, a probabilidade de o Quixajuba ser o campeão isolado é:

$$\frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

■

(c) Qual é a probabilidade de que o torneio termine com três times empatados em primeiro lugar?

Solução: Para que isso ocorra é necessário que um dos times perca todas as partidas que disputar restando 6 vitórias para serem divididas pelos outros 3 times.

Suponha que Quixajuba perca todas as partidas. Para que as demais equipes fiquem empatadas há duas possibilidades:

(a) Equipe1 ganha da Equipe2, Equipe2 ganha da Equipe3 e Equipe3 ganha da Equipe1.

(b) Equipe1 ganha da Equipe3, Equipe2 ganha da Equipe1 e Equipe3 ganha da Equipe2.

Como qualquer uma das equipes pode ser a que perde as partidas que disputa, tem-se $4 \times 2 = 8$ possibilidades.

Pelo PFC, Axioma 3.2.1, O número de resultados possíveis é:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64.$$

Logo, a probabilidade de que três times dividam a liderança é:

$$\frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

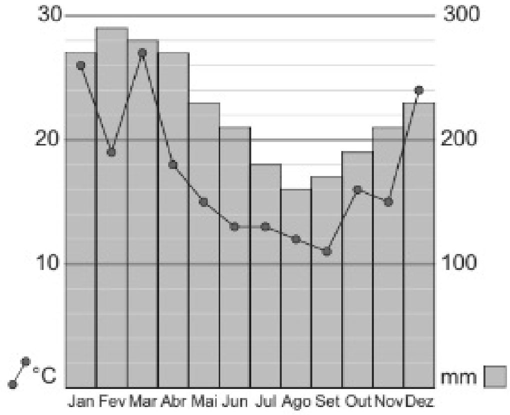
■

Este problema traz a necessidade de se conhecer técnicas de contagem como o princípio fundamental da contagem ou arranjo simples, para, em seguida, aplicar o conceito de probabilidade. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT311 da BNCC.

12. **(OBMEP-2010) Nível 3 - Fase 1 - Questão 5**

O gráfico mostra a temperatura média e a precipitação de chuva em Quixajuba em cada um dos meses de 2009. Qual das afirmativas abaixo está correta?

(A) O mês mais chuvoso foi também o mais quente.
(B) O mês menos chuvoso foi também o mais frio.
(C) De outubro para novembro aumentaram tanto a precipitação quanto a temperatura.
(D) Os dois meses mais quentes foram também os de maior precipitação.
(E) Os dois meses mais frios foram também os de menor precipitação.



Solução: Para resolver essa questão, pode-se verificar a veracidade de cada alternativa. Assim:

(A) O mês mais chuvoso foi fevereiro e o mais quente foi março. A alternativa é falsa.
(B) O mês menos chuvoso foi agosto e o mais frio setembro. A alternativa é falsa.
(C) De outubro para novembro, a precipitação aumentou e a temperatura caiu. A alternativa é falsa.
(D) Os dois meses mais quentes foram janeiro e março e os de maior precipitação, fevereiro e março. A alternativa é falsa.
(E) Os dois meses mais frios foram agosto e setembro, e os de menor precipitação foram agosto e setembro. A alternativa é verdadeira.

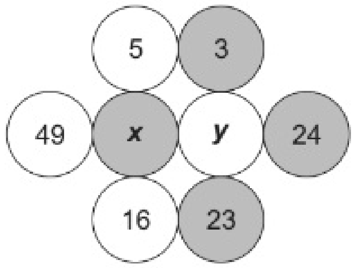
■

Nessa questão, foi explorado o tratamento de informação em gráficos de linhas e colunas, nos quais se analisa a relação entre duas variáveis, temperatura e precipitação, bem como as respectivas frequências em cada cada período. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

13. **(OBMEP-2010) Nível 3 - Fase 1 - Questão 7**

Na figura, x é a média aritmética dos números que estão nos quatro círculos claros e y é a média aritmética dos números que estão nos quatro círculos escuros. Qual é o valor de $x - y$?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4



Solução: De acordo com o enunciado, pela Definição 3.1.7, temos,:

$$\text{I} \quad x = \frac{16+49+5+y}{4} = \frac{70+y}{4}$$
$$\text{II} \quad y = \frac{23+24+3+x}{4} = \frac{50+x}{4} \Rightarrow x = 4y - 50$$

Substituindo II em I:

$$4y - 50 = \frac{70+y}{4}$$
$$16y - 200 = 70 + y$$
$$16y - y = 70 + 200$$
$$15y = 270$$
$$y = \frac{270}{15}$$
$$y = 18.$$

Substituindo o resultado de y em I:

$$x = \frac{70+18}{4} = 22.$$

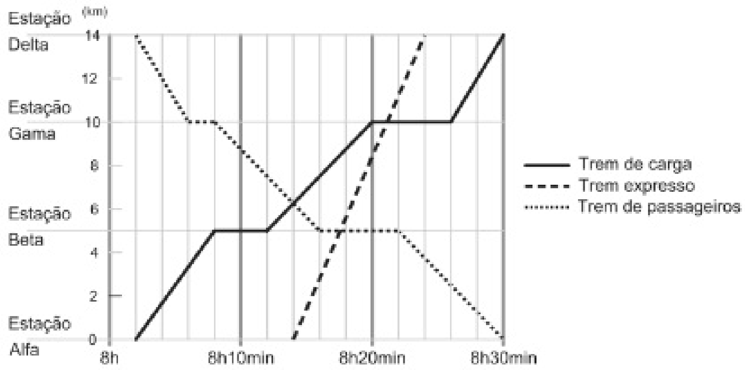
Logo $x - y = 22 - 18 = 4$, e a alternativa **(E)** apresenta a resposta correta.

■

Nesse problema, explora-se o conceito de média aritmética simples. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA35, EF08MA25, EF08MA27, e EM13MAT316 da BNCC.

14. **(OBMEP-2010) Nível 3 - Fase 1 - Questão 9**

O gráfico mostra a operação de três trens na cidade de Quixajuba de 8h às 8h30min. O eixo horizontal mostra o horário e o eixo vertical mostra a distância a partir da Estação Alfa. Qual das alternativas é correta?



(A) O trem de passageiros leva 6 minutos para ir da Estação Beta à Estação Alfa.
(B) O trem expresso para na Estação Beta.
(C) Entre as Estações Alfa e Beta, o trem de carga é mais rápido que o trem expresso.
(D) O trem expresso ultrapassa o trem de carga quando este último está parado.
(E) O trem de passageiros para 10 minutos na Estação Beta.

Solução: Para resolver a questão, pode-se examinar a veracidade de cada alternativa. Assim:

(A) O percurso do trem de passageiros para ir da Estação Beta à Estação Alfa leva $8h30min - 8h22min = 8$ minutos. A alternativa é falsa.
(B) O trem expresso não para entre as estações Alfa e Delta. A alternativa é falsa.
(C) O trem de carga faz o percurso entre as estações Alfa e Beta em $8h08min - 8h02min = 6$ minutos, enquanto o trem expresso o faz em $8h18min - 8h14min = 4$ minutos. A alternativa é falsa.
(D) O trem de carga fica parado, na estação Gama das $8h20min$ às $8h26min$. O trem expresso passa pela estação Gama neste intervalo de tempo, ultrapassando o trem de carga. A alternativa é verdadeira.
(E) O trem de passageiros para na Estação Beta por $8h22min - 8h16min = 6$ minutos. A alternativa é falsa.

■

Neste problema é destacada a exploração multivariada, na qual são dispostas as operações de três trens em um intervalo de tempo, conceito de variável contínua. Além disso, destaca-se o tratamento da informação em um gráfico. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

15. **(OBMEP-2010) Nível 3 - Fase 1 - Questão 14**

Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par?

(A) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{5}{9}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

Solução: Existem duas possibilidades para que a soma dos números sorteados como pede a questão ser par:

- Os dois números sorteados são pares. Neste caso, os dois eventos são independentes, e são equiprováveis, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, a probabilidade será:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

- Os dois números sorteados são ímpares. Do mesmo modo, neste caso, os dois eventos são independentes, e são equiprováveis, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, a probabilidade será:

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1, a probabilidade da soma dos números dos cartões escolhidos ser par é:

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

A alternativa **(B)** apresenta a resposta correta.

■

Nesse problema, explora-se o conceito de probabilidade de eventos independentes, bem como o de probabilidade de eventos disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

16. **(OBMEP-2010) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isso, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro.

(a) Qual é a probabilidade de André ganhar o livro?

Solução: André ganhará o livro se retirar a bola preta da caixa. Como ele é o primeiro a retirar a bola da caixa e existem 4 bolas das quais apenas 1 é preta, a probabilidade é de $\frac{1}{4}$.

■

(b) Qual é a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Solução: Para que Dalva ganhe o livro é necessário que André, Bianca e Carlos retirem bolas brancas, restando apenas a bola preta para Dalva.

A probabilidade é de:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

■

Observação:

Para que Bianca ganhe o livro, André terá que retirar uma bola branca e Bianca retirar a bola preta. Probabilidade:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

Para que Carlos ganhe o livro, André e Bianca terão que retirar uma bola branca e Carlos retirar a bola preta. Probabilidade:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Todos apresentam chaces iguais de ganhar o livro.

Para sortear outro livro, André sugeriu usar duas bolas pretas e seis brancas. Como antes, o primeiro que tirasse uma bola preta ganharia o livro; se as primeiras quatro bolas fossem brancas, eles continuariam a retirar bolas na mesma ordem. Nesse sorteio:

(a) Qual é a probabilidade de André ganhar o livro?

Solução: Existem duas possibilidades para que André ganhe o livro:

- Ele pode retirar uma bola preta logo na primeira rodada com probabilidade de $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
- André, Bianca, Carlos e Dalva retiram bolas brancas na primeira rodada e André retira uma bola preta na segunda rodada. A probabilidade é de

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{28}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade é de:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{28} = \frac{5}{14}.$$

■

(b) Qual é a probabilidade de Dalva ganhar o livro?

Solução: Só existe uma maneira de Dalva ganhar o livro, que é durante a primeira rodada. André, Bianca e Carlos retiram bolas brancas e Dalva retira uma bola preta. Se os quatro retirarem bolas brancas na primeira rodada, restarão duas bolas pretas de um total de quatro bolas. Assim, uma delas será sorteada antes de chegar a vez de Dalva na segunda rodada. Dessa forma, a probabilidade é de:

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{7} = \frac{2}{14}.$$

■

Observação:

Existem duas possibilidades para que Bianca ganhe o livro:

- Durante a primeira rodada, André retira uma bola branca e, em seguida, Bianca retira uma bola preta. Probabilidade:

$$\frac{6}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{14}.$$

- André, Bianca, Carlos e Dalva retiram bolas brancas na primeira rodada. Durante a segunda rodada, André retira uma bola branca e, em sequência, Bianca retira uma bola preta. A probabilidade é de:

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{14}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade é de:

$$\frac{3}{14} + \frac{1}{14} = \frac{4}{14}.$$

Existem duas possibilidades para que Carlos ganhe o livro:

- Durante a primeira rodada, André e Bianca retiram bolas brancas e, em seguida, Carlos retira uma bola preta. Probabilidade:

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{28}.$$

- André, Bianca, Carlos e Dalva retiram bolas brancas na primeira rodada. Durante a segunda rodada, André e Bianca retiram bolas brancas e em sequência Carlos retira uma bola preta. A probabilidade é de:

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{28}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade é de:

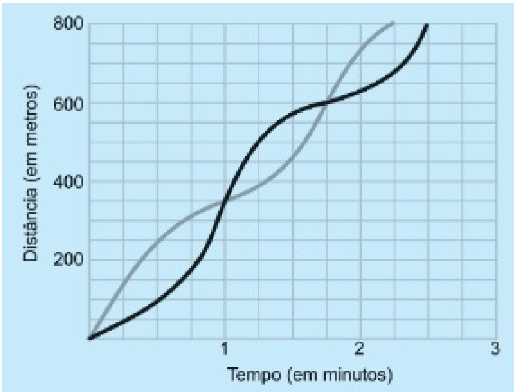
$$\frac{5}{28} + \frac{1}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}.$$

Como $\frac{5}{14} > \frac{4}{14} > \frac{3}{14} > \frac{2}{14}$, André é o que tem mais chance de ganhar o livro.

17. **(OBMEP-2011) Nível 3 - Fase 1 - Questão 3**

A tartaruga e o coelho disputa uma corrida de 800 metros e o coelho ganhou. Os gráficos representam a relação entre a distância percorrida e o tempo para cada um deles. Pode-se afirmar que

(A) durante o primeiro minuto e meio, a tartaruga ficou sempre na frente do coelho.
(B) a tartaruga ficou atrás do coelho por pelo menos dois minutos.
(C) o coelho terminou a corrida em dois minutos e meio.
(D) a tartaruga ficou à frente do coelho por pelo menos 30 segundos.
(E) o coelho cruzou a linha de chegada 50 metros à frente da tartaruga.



Solução: Como o enunciado informa que o coelho ganhou a corrida e o gráfico mais claro atinge 800 m antes do gráfico mais escuro, o gráfico mais claro apresenta o movimento do coelho e o gráfico mais escuro apresenta o movimento da tartaruga. Com base nisso, analisa-se a veracidade de cada alternativa.

(A) Entre o início da corrida e o primeiro minuto, o coelho ficou à frente da tartaruga. A alternativa é falsa.
(B) a tartaruga ficou atrás do coelho entre o início da corrida e o primeiro minuto e, entre $1min45s$ e $2min30s$, totalizando $1min45s$. A alternativa é falsa.
(C) o coelho terminou a corrida em $2min15s$. A alternativa é falsa.
(D) a tartaruga ficou à frente do coelho entre $1min$ e $1min45s$, totalizando $45s$. A alternativa é verdadeira.
(E) quando o coelho cruzou a linha de chegada, a tartaruga estava entre $650m$ e $700m$. Portanto, apresentava mais de $100m$ de vantagem. A alternativa é falsa.

■

Neste exercício, é explorado o tratamento de informação em um gráfico de linhas, além do conceito de distribuição de frequências bivariada. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

18. **(OBMEP-2011) Nível 3 - Fase 1 - Questão 12**

Três amigas possuem, cada uma, três blusas: uma amarela, uma branca e uma preta. Se cada amiga escolher ao acaso uma de suas blusas, qual é a probabilidade de que as cores das blusas escolhidas sejam todas diferentes?

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{2}{9}$

(D) $\frac{3}{8}$

(E) $\frac{3}{4}$

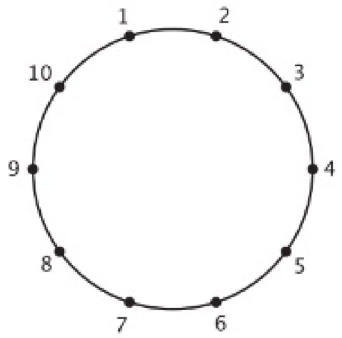
Solução: Pelo PFC, Axioma 3.2.1, as três amigas podem escolher as blusas de $3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras diferentes. Para que não haja repetição de cores, se uma delas já escolheu uma de suas 3 blusas, a segunda pessoa a escolher terá duas opções e a última delas terá apenas uma. Portanto, com a restrição de não repetir cor, pelo PFC, Axioma 3.2.1, elas podem escolher as blusas de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes. Logo, a probabilidade disso ocorrer é $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. A alternativa **(C)** apresenta a resposta correta.

■

Este problema explora o princípio fundamental da contagem, estudo no Ensino Médio, aplicado à abordagem clássica de probabilidade. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT311 da BNCC

19. **(OBMEP-2011) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

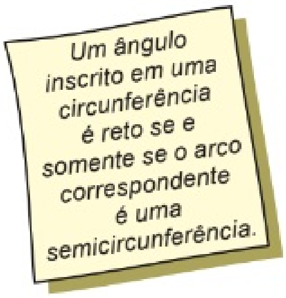


a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

Solução: Retira-se uma das bolas ao acaso. Das 9 bolas restantes, apenas uma delas estará diametralmente oposto à primeira que foi retirada. Dessa forma, pela Definição 3.2.14, a probabilidade é de $\frac{1}{9}$.

■

b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?



Solução:

Existem três casos a se considerar:

(a) Retira-se uma bola ao acaso. Ao retirar a segunda bola, esta é diametralmente oposta à primeira com probabilidade de $\frac{1}{9}$. Qualquer uma das demais bolas a serem retiradas forma com as duas primeiras um triângulo retângulo.

(b) Retira-se uma bola ao acaso. Ao retirar a segunda bola, esta não é diametralmente oposta à primeira, com probabilidade de $\frac{8}{9}$. A terceira bola sorteada é diametralmente oposta à primeira, com probabilidade de $\frac{1}{8}$. Assim, pelo Teorema 3.2.3 e pelas Equações 3.25 e 3.26, a probabilidade para este caso é de:

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{9}.$$

(c) Retira-se uma bola ao acaso. Ao retirar a segunda bola, esta não é diametralmente oposta à primeira, com probabilidade de $\frac{8}{9}$. A terceira bola sorteada é diametralmente oposta à segunda, com probabilidade de $\frac{1}{8}$. Assim, pelo Teorema 3.2.3 e pelas Equações 3.25 e 3.26, a probabilidade para este caso é de:

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{9}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de retirar três bolas e de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo é de:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

■

c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

Solução: Para que isto ocorra, é necessário que as três primeiras bolas sorteadas determinem um triângulo retângulo, com probabilidade de $\frac{1}{3}$. Para a retirada da quarta bola, há apenas uma dentre as 7 que forma com as três primeiras um retângulo. Assim, pelo Teorema 3.2.3 e pelas Equações 3.25 e 3.26 a probabilidade é de:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

■

Neste problema explora a ideia de permutação circular, estudada no Ensino Médio, aplicada à probabilidade de eventos independentes e/ou disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

20. **(OBMEP-2012) Nível 3 - Fase 1 - Questão 20**

Pedro vai participar de um programa de prêmios em que há uma urna contendo quatro bolas com valores diferentes e desconhecidos por ele, que serão sorteadas uma a uma até que ele decida ficar com uma delas. Ele observa o valor das duas primeiras bolas e as descarta. Se o valor da terceira bola sorteada for maior que os das duas primeiras, ele ficará com ela e, caso contrário, ficará com a bola que restou. Qual a probabilidade de Pedro ficar com a bola de maior valor?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{5}{12}$

(E) $\frac{1}{2}$

Solução: Considerando $Bola4 > Bola3 > Bola2 > Bola1$, existem três casos a se considerar:

(a) $Bola4$ é a terceira sorteada. Neste caso, Pedro ficará com ela. A probabilidade deste caso é:
$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) $Bola4$ não é retirada e $Bola3$ é a primeira a ser retirada. A probabilidade deste caso é
$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

(c) $Bola4$ não é retirada e $Bola3$ é a segunda a ser retirada. A probabilidade deste caso é
$$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de Pedro ficar com a bola de maior valor é:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

A alternativa **(D)** apresenta a resposta correta.

■

Nesta questão, basta aplicar a probabilidade de eventos independentes e/ou disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

21. **(OBMEP-2012) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9 e, em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9. Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número. Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma bola é sorteada da segunda caixa.

a) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa seja amarela?

Solução: Na segunda caixa há 10 bolas idênticas das quais 1 é amarela.

A probabilidade é de $\frac{1}{10}$.

■

b) Qual é a probabilidade de que as duas bolas sorteadas tenham o mesmo número?

Solução: Ao colocar a primeira bola sorteada na segunda caixa, nesta haverá 10 bolas idênticas das quais 2 apresentam o mesmo número (uma branca e outra amarela).
A probabilidade é de $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

■

c) Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha o número 1?

Solução: Há duas possibilidades:

(a) A primeira bola sorteada apresenta o número 1, neste caso, na segunda caixa haverá duas bolas com número 1. A probabilidade é

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{90}.$$

(b) A primeira bola sorteada apresenta o número diferente de 1, neste caso, na segunda caixa haverá uma bola com número 1. A probabilidade é

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{8}{90}.$$

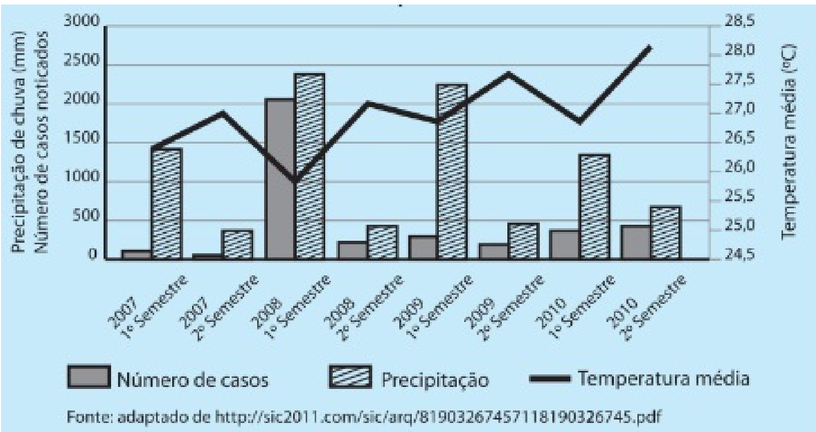
Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha o número 1 é $\frac{2}{90} + \frac{8}{90} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

■

Esta questão trata da aplicação do conceito de probabilidade de eventos independentes e/ou disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

22. **(OBMEP-2013) Nível 3 - Fase 1 - Questão 3**

O gráfico mostra o número de casos notificados de dengue, a precipitação de chuva e a temperatura média, por semestre, dos anos de 2007 a 2010 em uma cidade brasileira. Podemos afirmar que:



(A) O período de maior precipitação foi o de maior temperatura média e com o maior número de casos de dengue notificados.
(B) O período com menor número de casos de dengue notificados também foi o de maior temperatura média.
(C) O período de maior temperatura média foi também o de maior precipitação.
(D) O período de maior precipitação não foi o de maior temperatura média e teve o maior número de casos de dengue notificados.
(E) Quanto maior a precipitação em um período, maior o número de casos de dengue notificados.

Solução: Analisa-se a veracidade de cada alternativa:

(A) O período de maior precipitação foi o 1º semestre de 2018. Este período apresentou o maior número de casos de dengue notificados. Porém, o período de maior temperatura média foi o 2º semestre de 2010. A alternativa é falsa.
(B) O período com menor número de casos de dengue notificados foi o 2º semestre de 2007 e o de maior temperatura média foi o segundo semestre de 2010. A alternativa é falsa.
(C) O período de maior temperatura média foi o 2º semestre de 2010 e o de maior precipitação foi o 1º semestre de 2008. A alternativa é falsa.
(D) O período de maior precipitação foi o 1º semestre de 2008, o de maior temperatura média foi o 2º semestre de 2010 e o de maior número de casos de dengue notificados foi 1º semestre de 2008. A alternativa é verdadeira.
(E) Ao comparar o 1º semestre de 2007 com o 2º semestre de 2009, percebe-se que, no primeiro, a precipitação é maior do que no segundo, mas o seu número de casos de dengue é menor. A alternativa é falsa.

■

Neste exercício é explorada a análise de informações contidas em gráficos de linhas e colunas por meio de frequências multivariadas. Tais conceitos dizem respeito às habilidades

EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

23. **(OBMEP-2013) Nível 3 - Fase 1 - Questão 8**

Marcos fez cinco provas de Matemática. Suas notas, em ordem crescente, foram 75, 80, 84, 86 e 95. Ao digitar as notas de Marcos na ordem em que as provas foram realizadas, o professor notou que as médias das duas primeiras provas, das três primeiras, das quatro primeiras e das cinco provas eram números inteiros. Qual foi a nota que Marcos tirou na última prova?

(A) 75
(B) 80
(C) 84
(D) 86
(E) 95

Solução: O fato de a média aritmética das três primeiras notas ser um número inteiro, leva a destacar as notas cuja soma é um múltiplo de 3 como sendo as três primeiras notas. Essas notas são 80, 86 e 95. Destaca-se daí que 95 é a terceira nota pois a média das duas primeiras é um número inteiro. Como a média das quatro primeiras é um número inteiro, a quarta nota é 75. Logo Marcos tirou 84 na última nota. A alternativa **(C)** apresenta a resposta correta.

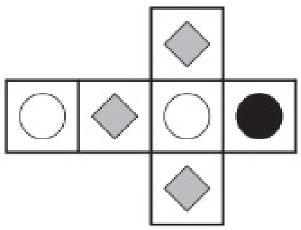
■

Este problema diz respeito ao conceito de média aritmética simples, na qual é dado o valor da média e quatro dos valores da sequência e pede-se o outro valor da sequência. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA35, EF08MA25, EF08MA27, e EM13MAT316 da BNCC.

24. **(OBMEP-2013) Nível 3 - Fase 1 - Questão 14**

Um dado foi construído usando a planificação da figura. Qual é a probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes?

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{11}{18}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{5}{6}$
(E) $\frac{31}{36}$



Solução: A probabilidade de obter um círculo preto em um lançamento é $\frac{1}{6}$, de obter um círculo branco é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e de obter um quadrado cinza é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Os mesmos dois símbolos distintos podem ser obtidos de duas maneiras diferentes em lançamentos consecutivos. Perceba que estes eventos são independentes, assim, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, a probabilidade de obter:

- um círculo branco e um círculo preto é:

$$2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

- um círculo branco e um quadrado cinza é:

$$2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

- um círculo preto e um quadrado cinza é:

$$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Como os eventos são disjuntos, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes é:

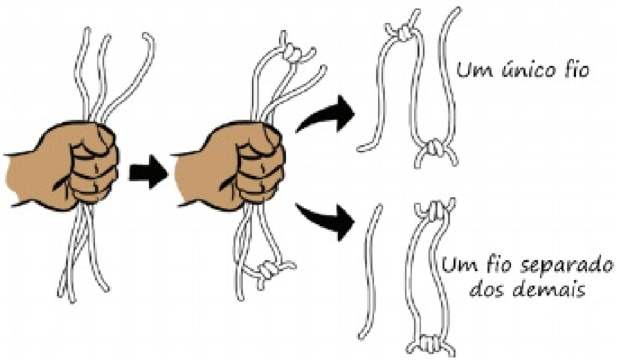
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{11}{18}.$$

■

Neste problema, é necessário o domínio do cálculo de probabilidade envolvendo eventos independentes. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

25. **(OBMEP-2013) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

    Homero segura um número ímpar de barbantes idênticos e pede para Sofia amarrar pares de pontas ao acaso, de cada lado de sua mão, até que sobre somente uma ponta de cada lado. A figura ilustra o procedimento para três barbantes.



a) Com três barbantes, qual é a probabilidade de que todos os barbantes fiquem unidos em um único fio?

Solução: Nomeando os fios por A, B e C, suas respectivas pontas do lado de cima por A_C, B_C e C_C e suas respectivas pontas do lado de baixo por A_B, B_B e C_B, deve-se escolher duas pontas para dar nó na parte de cima da mão que corresponde a escolher uma ponta para ficar solta, isto pode ser feito de 3 maneiras diferentes. O mesmo ocorre com a escolha da ponta do lado de baixo da mão. Sendo assim, existem $3 \times 3 = 9$ maneiras diferentes de dar nós em ambos os lados da mão.

Para que os barbantes estejam unidos em um único fio, pode-se escolher uma ponta de baixo para ficar solta e a ponta correspondente ao lado de cima terá duas possibilidades de dar nó dando continuidade ao fio. Sendo assim, há $2 \times 3 = 6$ possibilidades para que os barbantes estejam unidos em um único fio. Logo, a probabilidade de que os barbantes estejam unidos em um único fio é:

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

■

b) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais?

Solução: Após dar dois nós em um dos lados da mão, a ponta do barbante não usado apresenta, do outro lado da mão, cinco possibilidades de escolha, ficar solta ou unir-se a uma das quatro pontas. Assim, a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais é $\frac{1}{5}$ (ela deve ficar solta).

■

c) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que os barbantes fiquem unidos em um único fio?

Solução: Após dar dois nós em um dos lados da mão, a ponta do barbante não usado apresenta, do outro lado da mão, cinco possibilidades de escolha, ficar solta ou unir-se a uma das quatro pontas. Para dar continuidade ao barbante, ela deve unir-se a uma das quatro pontas. Isto ocorre com probabilidade de $\frac{4}{5}$.

A outra ponta do fio ao qual a ponta solta foi unida tem 3 possibilidades, a saber, ficar solta ou unir-se a uma das outras 2 pontas. Para formar um único fio, ela deve ser unida à outra ponta, o que acontece com probabilidade de $\frac{2}{3}$.

Assim, a probabilidade de que os barbantes fiquem unidos em um único fio, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.28, é:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

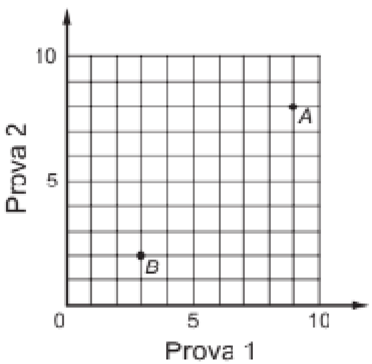
■

Para a solução deste problema é necessário recorrer, inicialmente, ao princípio fundamental da contagem, em seguida, aplicar a ideia clássica de probabilidade e, ao fim, a probabilidade envolvendo eventos independestes.Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

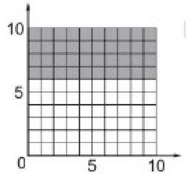
26. **(OBMEP-2014) Nível 3 - Fase 1 - Questão 9**

O professor Michel aplicou duas provas a seus alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado abaixo.

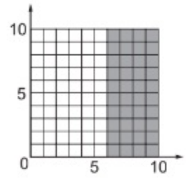
Por exemplo, o aluno A obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno B obteve notas 3 e 2. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Qual dos gráficos representa a região correspondente às notas de aprovação?



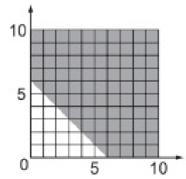
(A)



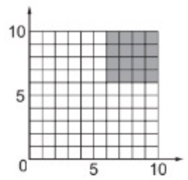
(B)



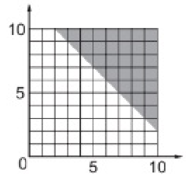
(C)



(D)



(E)



Solução:

O gráfico **A** representa notas de 0 a 10 na primeira prova e nota maior ou igual a 6 na segunda prova. Logo, para nota inferior a 6 na primeira prova, o estudante está reprovado. A alternativa é falsa.

O gráfico **B** representa nota maior ou igual a 6 na primeira prova e notas de 0 a 10 na segunda prova. Logo, para nota inferior a 6 na segunda prova, o estudante está reprovado. A alternativa é falsa.

O gráfico **C** contempla várias situações de reprovação, por exemplo, estudante que tira 5 na primeira prova e 3 na segunda prova. A alternativa é falsa.

O gráfico **D** apresenta situações em que o estudante está aprovado. No entanto, é possível obter aprovação em outras situações não contempladas pelo gráfico. por exemplo, tirar 9 na primeira prova e 3 na segunda prova. A alternativa é falsa.

O gráfico **E** apresenta situações em que o estudante consegue, no mínimo, nota 2 em uma das provas. Ao tirar 2 em uma das provas, tira 10 na outra prova.

Todas as demais situações de aprovação estão contemplas pelo gráfico **E**, pois a reta que liga o ponto que vai da nota 2 na primeira prova e nota 10 na segunda prova ao ponto nota 10 na primeira prova e nota 2 na segunda prova são as possíveis notas para obter média 6. A região cinza superior a essa reta representa média maior que 6. A alternativa é verdadeira.

■

Neste problema é explorado o conceito de média e análise de gráficos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EF07MA35, EF08MA25, EF08MA27, EM13MAT102, EM13MAT316, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

27. **(OBMEP-2014) Nível 3 - Fase 1 - Questão 19**

Dois dados têm suas faces pintadas de vermelho ou azul. Ao jogá-los, a probabilidade de observarmos duas faces superiores de mesma cor é 11/18. Se um deles tem cinco faces vermelhas e uma azul, quantas faces vermelhas tem o outro?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Solução: Seja $n(\Omega)$ o número de casos possíveis para o lançamento de dois dados. Como cada dado tem 6 faces, pelo PFC, Axioma 3.2.1, $\Omega = 6 \times 6 = 36$.

Como um dos dados tem cinco faces vermelhas e uma branca, pode-se supor que o outo dado tenha v faces vermelhas. Para que as faces tenham a mesma cor, elas devem ser todas vermelhas com $5 \times v$ possibilidades ou todas brancas, com $1 \times (6 - v)$ possibilidades. Logo, o número de casos favoráveis é $n(E) = 5v + 6 - v$. Como a probabilidade de observarmos duas faces superiores de mesma cor é $\frac{11}{18}$, segue, da Definição 3.2.15:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$\frac{11}{18} = \frac{5v + 6 - v}{36}$$

$$4v + 6 = 22$$

$$4v = 16$$

$$v = 4.$$

A alternativa **(D)** apresenta a resposta correta.

■

Este problema explora a ideia de contagem aplicada à abordagem frequentista de probabilidade. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT311 da BNCC.

28. **(OBMEP-2014) Nível 3 - Fase 2 - Questão 6**

Cada uma das cem pessoas de uma fila escolhe, ao acaso, um número de 1 a 20 e o escreve em um papel, mantendo esse número em segredo. Depois que todos escreveram, o primeiro da fila anuncia o seu número. Em seguida, o segundo da fila faz o mesmo, e assim sucessivamente. A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

a) O primeiro da fila não tem chance de ganhar o prêmio. Qual é a posição da próxima pessoa da fila que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio?

Solução: Supondo que todas as 20 primeiras pessoas escolham números diferentes, a 21ª pessoa ganhará o prêmio pois escolherá um número que um dos 20 anteriores escolheu. Sendo assim, a 22ª pessoa é a próxima pessoa da fila que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio.

■

b) Qual é a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio?

Solução: O terceiro da fila ganhará o prêmio se o segundo da fila não escolher um número igual ao que o primeiro escolheu e ele escolher um dos dois números escolhidos pelos anteriores. Pelo Teorema 3.2.4, a probabilidade é:

$$\frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{2}{20} = \frac{19}{200}.$$

■

c) Quem tem maior probabilidade de ganhar o prêmio: o sétimo da fila ou o oitavo? Justifique.

Solução: Seguindo o raciocínio anterior:

- A probabilidade do 7º ganhar é:

$$P_7 = \frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{6}{20}.$$

- A probabilidade do 8º ganhar é:

$$P_8 = \frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{14}{20} \times \frac{7}{20}.$$

Calculando a fração $\frac{P_7}{P_8}$, segue:

$$\frac{P_7}{P_8} = \frac{\frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{6}{20}}{\frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{14}{20} \times \frac{7}{20}}$$

$$\frac{P_7}{P_8} = \frac{6}{20} \times \frac{20}{14} \times \frac{20}{7}$$

$$\frac{P_7}{P_8} = \frac{120}{98} > 1.$$

Como $P_7 > P_8$, o sétimo da fila tem maior probabilidade de ganhar o prêmio.

■

d) Em que posição ou posições da fila é maior a probabilidade de ganhar o prêmio? Justifique.

Solução: Seja n a posição de uma pessoa na fila.

- A probabilidade da pessoa na posição n ganhar o prêmio é:

$$P_n = \frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \cdots \times \frac{20-(n-3)}{20} \times \frac{20-(n-2)}{20} \times \frac{n-1}{20}.$$

- A probabilidade da pessoa na posição $n+1$ ganhar é:
$P_{n+1} = \frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \cdots \times \frac{20-(n-3)}{20} \times \frac{20-(n-2)}{20} \times \frac{20-(n-1)}{20} \times \frac{n}{20}.$

Calculando a fração $\frac{P_n}{P_{n+1}}$, segue:

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{\frac{20}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \cdots \times \frac{20-(n-3)}{20} \times \frac{20-(n-2)}{20} \times \frac{n-1}{20}}{\frac{20}{20} \times \frac{19}{20}\frac{18}{20} \times \frac{17}{20} \times \frac{16}{20} \times \cdots \times \frac{20-(n-3)}{20} \times \frac{20-(n-2)}{20} \times \frac{20-(n-1)}{20} \times \frac{n}{20}}$$

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{n-1}{20} \times \frac{20}{20-(n-1)} \times \frac{20}{n}$$

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{20(n-1)}{20n-(n-1)n}$$

Analisando para qual n, $P_n > P_{n+1}$, ou seja, $\frac{P_n}{P_{n+1}} > 1$:

$\frac{20n-20}{21n-n^2} > 1 \Leftrightarrow 20n - 20 > 21n - n^2 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 > 0 \Leftrightarrow n > 5 \Leftrightarrow n \geq 6.$

Logo, $P_6 > P_7 > P_8 > \cdots > P_{21}$.

Para $P_n = P_{n+1}$, tem-se $n^2 - n - 20 = 0$, ou seja, $n = 5$. Dessa forma, $P_5 = P_6$.

Para $P_n < P_{n+1}$, tem-se $n^2 - n - 20 < 0$, ou seja, $n < 5$. Dessa forma, $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$.

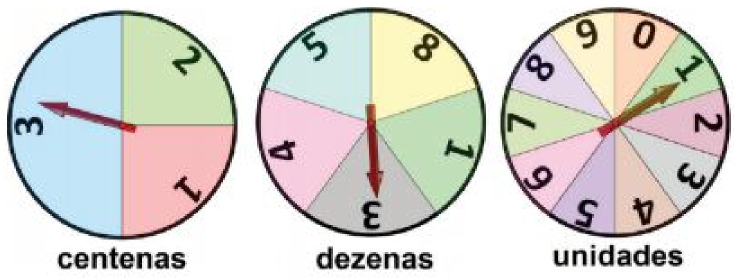
Sendo assim, a maior probabilidade do participante ganhar o prêmio ocorre nas posições 5 e 6.

■

Nesta questão é explorada a ideia de eventos independentes, em seguida, o conceito de probabilidade envolvendo eventos mutuamente exclusivos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF09MA20, EM13MAT312 e EM13MAT511 da BNCC.

29. **(OBMEP-2015) Nível 3 - Fase 1 - Questão 12**

Na figura, o círculo das centenas está dividido em três setores, um semicircular e outros dois de mesma área. Cada um dos outros dois círculos está dividido em setores de mesma área. As setas nesses círculos, quando giradas, param ao acaso em algum setor, determinando um número de três algarismos. Por exemplo, na figura, elas determinaram o número 331.



Qual é a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260?

(A) 45%
(B) 55%
(C) 60%
(D) 65%
(E) 70%

Solução: O número determinado pelas setas, após serem giradas, é maior do que 260 em duas situações:

- A seta do círculo das centenas para no setor marcado com 3, com probabilidade de $\frac{1}{2}$.
- A seta do círculo das centenas para no setor marcado com 2 e a do círculo das dezenas para no setor marcado com 8, com probabilidade de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$.

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que o número determinado pelas setas, após serem giradas, seja maior do que 260 é:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20} = 55\%.$$

A alternativa **(B)** apresenta a resposta correta.

∎

Neste problema, basta compreender o conceito de probabilidade envolvendo eventos disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

30. **(OBMEP-2015) Nível 3 - Fase 2 - Questão 6**

Para a primeira fase de um torneio internacional de futebol foram classificadas 3 equipes espanholas, 2 francesas, 1 alemã, 1 portuguesa e 1 italiana. Nessa fase, serão realizadas quatro partidas, com os confrontos definidos por sorteio. Em seguida, duas semifinais serão realizadas com as quatro equipes vencedoras da primeira fase, também com os confrontos definidos por sorteio. As duas equipes vencedoras jogarão a partida final.

a) Qual é a probabilidade de que, na primeira fase, as duas equipes francesas se enfrentem?

Solução: Fixando uma das equipes francesas no sorteio, existem 7 possíveis adversárias para esta das quais apenas 1 é a outra equipe francesa. Logo, a probabilidade é $\frac{1}{7}$.

■

b) Qual é a probabilidade de ocorrer, na primeira fase, um confronto entre duas equipes espanholas?

Solução: Nomeando as equipes espanholas por Esp_1, Esp_2 e Esp_3 ocorrem as seguintes possibilidades para confronto entre as equipes: $Esp_1 \times Esp_2$, $Esp_1 \times Esp_3$ e $Esp_2 \times Esp_3$. Cada possibilidade de confronto ocorre com probabilidade de $\frac{1}{7}$ pois, fixado Esp_1, há $\frac{1}{7}$ de probabilidade para que o adversário seja Esp_2 e o mesmo para que o adversário seja Esp_3. Fixado Esp_2, há $\frac{1}{7}$ de probabilidade para que o adversário seja Esp_3. Os demais casos já estão contados, pois $Esp_1 \times Esp_2$ é o mesmo que $Esp_2 \times Esp_1$.

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e, pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de ocorrer, na primeira fase, um confronto entre duas equipes espanholas é:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}.$$

■

c) Admitindo que em cada confronto do torneio as equipes têm, todas, iguais probabilidades de ganhar, qual é a probabilidade de que a final seja realizada entre duas equipes de um mesmo país?

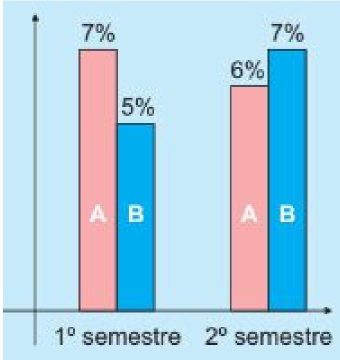
Solução: Pela Definição 3.2.6 existem $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8\times 7\times 6!}{2\times 1\times 6!} = 28$ possibilidades para o par de equipes que se enfrentarão na final, dos quais 1 ocorre entre as equipes francesas e 3 entre equipes espanholas. Logo, a probabilidade de que a final seja realizada entre duas equipes de um mesmo país é $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$.

■

Neste problema, é explorada a distribuição binomial no cálculo de probabilidades, bem como o conceito de eventos disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF08MA22, EF09MA20, EM13MAT310 e EM13MAT511 da BNCC.

31. **(OBMEP-2016) Nível 3 - Fase 1 - Questão 4**

O gráfico representa o percentual de aumento do preço de dois produtos, A e B, em uma mercearia no primeiro e no segundo semestres do ano passado. As afirmativas abaixo referem-se ao período completo do ano passado. Qual delas é a correta?



(A) O aumento percentual do preço de B foi maior do que o de A.
(B) O aumento percentual dos preços dos dois produtos foi o mesmo.
(C) O aumento percentual do preço de A foi de exatamente 13%.
(D) O preço de A diminuiu e o de B aumentou.
(E) O aumento percentual do preço de B foi maior do que 12%.

Solução: Pelo gráfico apresentado, observa-se que o produto **A** apresentou aumento de 7% no primeiro semestre e de 6% no segundo semestre. Totalizando $(1+0,07)\times(1+0,06) = 1,1342$. Ou seja, o aumento percentual do produto **A** foi de 13,42%.

Para o produto **B**, houve aumento de 5% no primeiro semestre e de 7% no segundo semestre. Totalizando $(1+0,05)\times(1+0,07) = 1,1235$. Ou seja, o aumento percentual do produto **A** foi de 12,35%.

A alternativa **(E)** apresenta a resposta correta.

■

Este problema explora a análise de gráficos de colunas com frequências bivariadas. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

32. **(OBMEP-2016) Nível 3 - Fase 1 - Questão 16**

A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio com as bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?

(A) $\frac{1}{10}$.

(B) $\frac{2}{19}$.

(C) $\frac{19}{200}$.

(D) $\dfrac{39}{380}$.

(E) $\dfrac{37}{342}$.

Solução: João será um dos sorteados em uma das situações a seguir:

- A bola que caiu e se perdeu não é a de João e a segunda bola sorteada é a dele. Com probabilidade de:
$$\frac{19}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{20}.$$
- A bola que caiu e se perdeu não é a de João, a segunda bola sorteada também não é a dele e a terceira bola sorteada é a de João. Com probabilidade de:
$$\frac{19}{20} \times \frac{18}{19} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{20}.$$

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados é:
$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

A alternativa **(A)** apresenta a resposta correta.

■

Este problema explora o conceito de probabilidade envolvendo eventos disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

33. **(OBMEP-2016) Nível 3 - Fase 2 - Questão 6**

Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa. Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.

a) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1?

Solução: Para que o 1 seja o menor número observado, basta que ele seja sorteado, o que pode ocorrer em um dos casos a seguir:

(a) A bola com o número 1 é a primeira a ser retirada. Probabilidade $\dfrac{1}{6}$.

(b) A bola com o número 1 é a segunda a ser retirada. Probabilidade $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{6}$.

(c) A bola com o número 1 é a terceira a ser retirada. Probabilidade $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.

(d) A bola com o número 1 é a quarta a ser retirada. Probabilidade $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que o menor número observado seja 1 é:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

■

b) Qual é a probabilidade de que o maior número observado seja 5?

Solução: Para que o número 5 seja o maior observado é necessário que ele seja sorteado e que o número 6 não seja.

O número 5 pode ser qualquer uma das 4 bolas sorteadas. Assim, a probabilidade de que o 5 seja uma das bolas observadas é $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$, restando as bolas com os números 1, 2, 3 e 4 para serem as outras três sorteadas. Logo, a probabilidade de que o maior número observado seja 5 é:

$$\frac{4}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}.$$

■

c) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1 e o maior seja 5?

Solução: Para que isto ocorra, é necessário que os números 1 e 5 sejam sorteados e que 6 não seja.

Sendo assim, o número 1 tem quatro possibilidades para ser sorteado. Logo, a probabilidade de se observar o número 1 é $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. Para que se observe o número 5, há três possibilidades e a probabilidade para que isto ocorra é $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Falta sortear dois números dentre 2, 3 e 4.

A probabilidade de que o menor número observado seja 1 e o maior seja 5 é:

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}.$$

■

d) Qual é a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola?

Isso ocorre de uma das formas:

(a) O primeiro número é o 1 e o quarto é o número 4. Probabilidade $\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{360}$.

(b) O primeiro número é o 1 e o quarto é o número 5. Probabilidade $\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{360}$.

(c) O primeiro número é o 1 e o quarto é o número 6. Probabilidade $\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{360}$.

(d) O primeiro número é o 2 e o quarto é o número 5. Probabilidade $\frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{360}$.

(e) O primeiro número é o 2 e o quarto é o número 6. Probabilidade $\frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{360}$.

(f) O primeiro número é o 3 e o quarto é o número 6. Probabilidade $\frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{360}$.

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola é:

$$\frac{2}{360} + \frac{6}{360} + \frac{12}{360} + \frac{2}{360} + \frac{6}{360} + \frac{2}{360} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}.$$

■

34. **(OBMEP-2017) Nível 3 - Fase 1 - Questão 19**

Uma caixa contém nove bolas idênticas e numeradas de 1 a 9. Uma primeira bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa. Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3 e a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3?

(A) $\frac{2}{9}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{2}{3}$.

(D) $\frac{6}{9}$.

(E) $\frac{7}{9}$.

Solução: Para que a soma das duas primeiras bolas retiradas não seja um múltiplo de 3, para cada primeira bola sorteada, existem 6 possibilidades para a segunda (por exemplo, se o número observado na primeira bola for 1, o número observado na segunda não pode ser 2, 5 ou 8). Logo, a probabilidade para este caso é:

$$\frac{9}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Cumprida a exigência anterior, há 3 possibilidades para a retirada da terceira bola de modo que a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3 (por exemplo, se nas duas primeiras bolas sorteadas foram observados os números 1 e 4, em qualquer ordem, os números favoráveis para a terceira são 1, 4 ou 7).

Assim, a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3 e a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3 é:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{9}.$$

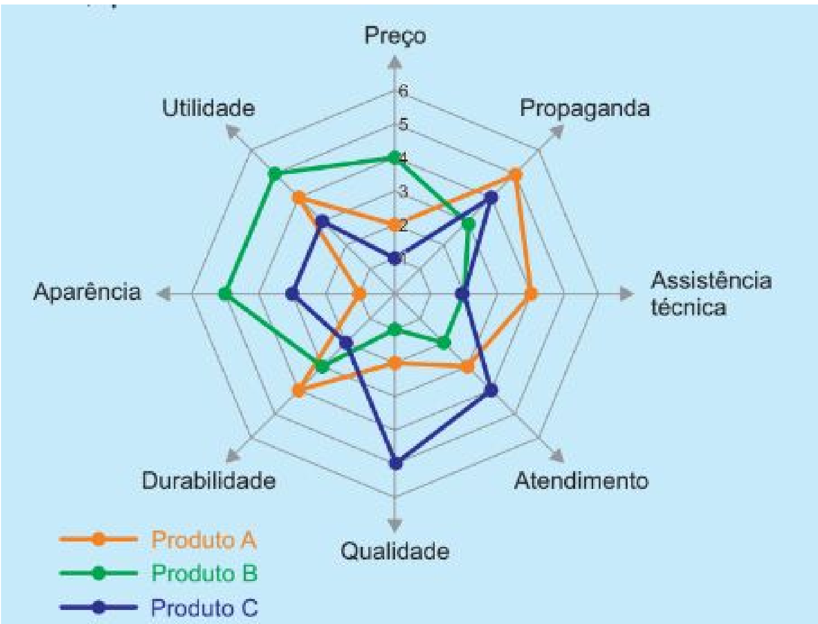
A alternativa **(A)** apresenta a resposta correta.

■

Este problema envolve o conceito de probabilidade condicional. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

35. **(OBMEP-2018) Nível 3 - Fase 1 - Questão 3**

Os produtos A, B e C foram avaliados pelos consumidores em relação a oito itens. Em cada item os produtos receberam notas de 1 a 6, conforme a figura. De acordo com essas notas, qual é a alternativa correta?



(A) O produto B obteve a maior nota no item propaganda.
(B) O produto de maior utilidade é o menos durável.
(C) O produto C obteve a maior pontuação em quatro itens.
(D) O produto de melhor qualidade é o de melhor assistência técnica.
(E) O produto com a melhor avaliação em propaganda é o de pior aparência.

Solução:

Observa-se diretamente a veracidade de cada alternativa.

(A) O produto que obteve a maior nota no item propaganda foi o produto **A**. A alternativa é falsa.
(B) O produto de maior utilidade foi o **B** e o menos durável foi o **C**. A alternativa é falsa.

(C) O produto **C** obteve a maior pontuação em dois itens. A alternativa é falsa.
(D) O produto de melhor qualidade é o **C** e o de melhor assistência técnica é o **A**. A alternativa é falsa.
(E) O produto com a melhor avaliação em propaganda é o **A** e o de pior aparência é o **A**. A alternativa é verdadeira.

■

Este problema explora o conceito de análise de gráficos apresentando frequência multivariada. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA31, EF07MA34, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407 da BNCC.

36. **(OBMEP-2018) Nível 3 - Fase 1 - Questão 19**

Tomás tem duas caixas, cada uma com cinco bolas numeradas de 1 a 5. As 10 bolas são idênticas, exceto pelo seu número. Ele sorteia uma bola da primeira caixa e a coloca na segunda caixa. Em seguida, ele sorteia duas bolas da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que a soma dos números das duas bolas sorteadas da segunda caixa seja igual a 6?

(A) $\frac{1}{5}$.
(B) $\frac{4}{15}$.
(C) $\frac{11}{30}$.
(D) $\frac{7}{45}$.
(E) $\frac{1}{3}$.

Solução: Analisa-se as possibilidades de retirada das duas bolas da segunda caixa a partir da retirada da bola da primeira caixa. Ocorre uma das situações seguintes:

(a) A bola sorteada na primeira caixa tem o número 1. Nesta situação, a segunda caixa terá duas bolas com número 1 (digamos 1a e 1b). Para que a soma seja 6, podem ocorrer as seguintes retiradas: 1a depois 5, 5 depois 1a, 1b depois 5, 5 depois 1b, 2 depois 4, 4 depois 2. Portanto, 6 possibilidades. A probabilidade neste caso é:

$$\frac{1}{5} \times 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

(b) A bola sorteada na primeira caixa tem o número 2. Nesta situação, a segunda caixa terá duas bolas com número 2 (digamos 2a e 2b). Para que a soma seja 6, podem ocorrer as seguintes retiradas: 1 depois 5, 5 depois 1, 2a depois 4, 4 depois 2a, 2b depois 4, 4 depois 2b. Portanto, 6 possibilidades. A probabilidade neste caso é:

$$\frac{1}{5} \times 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

(c) A bola sorteada na primeira caixa tem o número 3. Nesta situação, a segunda caixa terá duas bolas com número 3 (digamos 3a e 3b). Para que a soma seja 6, podem ocorrer as seguintes retiradas: 1 depois 5, 5 depois 1, 2 depois 4, 4 depois 2, 3a depois 3b, 3b depois 3a. Portanto, 6 possibilidades. A probabilidade neste caso é:

$$\frac{1}{5} \times 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

(d) A bola sorteada na primeira caixa tem o número 4. Nesta situação, a segunda caixa terá duas bolas com número 4 (digamos 4a e 4b). Para que a soma seja 6, podem ocorrer as seguintes retiradas: 1 depois 5, 5 depois 1, 2 depois 4a, 4a depois 2, 2 depois 4b, 4b depois 2. Portanto, 6 possibilidades. A probabilidade neste caso é:

$$\frac{1}{5} \times 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

(e) A bola sorteada na primeira caixa tem o número 5. Nesta situação, a segunda caixa terá duas bolas com número 5 (digamos 5a e 5b). Para que a soma seja 6, podem ocorrer as seguintes retiradas: 1 depois 5a, 5a depois 1, 1 depois 5b, 5b depois1, 2 depois 4, 4 depois 2. Portanto, 6 possibilidades. A probabilidade neste caso é:

$$\frac{1}{5} \times 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que a soma dos números das duas bolas sorteadas da segunda caixa seja igual a 6 é:

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

A alternativa **(A)** apresenta a resposta correta.

■

Este problema explora, inicialmente, o conceito de probabilidade condicional e, em seguida, aplica a ideia de eventos disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

37. **(OBMEP-2018) Nível 3 - Fase 2 - Questão 5**

Em uma caixa há 6 barbantes idênticos. Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó. O processo é repetido até que não haja mais extremidades livres.

a) Quantos nós são feitos até o final do processo?

Solução: Como existem 12 pontas livres e cada vez que um nó é dado, duas pontas são amarradas, o número total de nós é 6.

■

b) Qual é a probabilidade de que, na primeira etapa, sejam amarradas as duas pontas de um mesmo barbante?

Solução: Escolhida a primeira ponta a ser amarrada, restam 11 pontas das quais apenas 1 é a outra extremidade do mesmo barbante. Logo, a probabilidade é $\frac{1}{11}$.

■

c) Qual é a probabilidade de que, na última etapa, sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais?

Solução: Pelo PFC, Axioma 3.2.1, há $12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ maneiras de escolher as pontas que serão amarradas.

Existem 6 possibilidades para a escolha do barbante que terá suas duas pontas amarradas na última etapa e há 2 possibilidades para a ordem de escolha dessas pontas. As outras 10 pontas podem ser escolhidas em qualquer ordem e, portando, pelo PFC, Axioma 3.2.1, há $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades.

Assim, a probabilidade é:

$$\frac{6 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{11}.$$

■

d) Qual é a probabilidade de que, ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço?

Solução:

Escolhida a 1ª ponta a ser amarrada, a 2ª ponta não deve ser a outra extremidade do mesmo barbante. Probabilidade $\frac{10}{11}$.

Escolhida a 3ª ponta a ser amarrada, a 4ª ponta não deve ser a outra extremidade do mesmo barbante. Probabilidade $\frac{8}{9}$.

Escolhida a 5ª ponta a ser amarrada, a 6ª ponta não ser deve a outra extremidade do mesmo barbante. Probabilidade $\frac{6}{7}$.

Escolhida a 7ª ponta a ser amarrada, a 8ª ponta não deve ser a outra extremidade do mesmo barbante. Probabilidade $\frac{4}{5}$.

Escolhida a 9ª ponta a ser amarrada, a 10ª ponta não deve ser a outra extremidade do mesmo barbante. Probabilidade $\frac{2}{3}$.

Como todos os eventos são independentes, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, a probabilidade é:

$$\frac{10}{11} \times \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{256}{693}.$$

■

Neste problema, é necessário que se tenha conhecimento acerca do princípio fundamental da contagem e, em seguida, devendo aplicar a ideia de probabilidade clássica. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF06MA30, EF07MA34, EF08MA22, EM13MAT310 e EM13MAT311 da BNCC.

38. **(OBMEP-2019) Nível 3 - Fase 1 - Questão 8**

Em uma caixa há cinco bolas idênticas, com as letras O, B, M, E e P. Em uma segunda caixa há três bolas idênticas, com as letras O, B e M. Uma bola é sorteada da primeira caixa e, a seguir, outra bola é sorteada da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que essas bolas tenham a mesma letra?

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{1}{5}$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

(E) $\frac{1}{2}$.

Solução: As possibilidades de que as bolas tenham as mesmas letras são:

- As bolas sorteadas na primeira e na segunda caixas apresentam a letra **O**. Probabilidade $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.
- As bolas sorteadas na primeira e na segunda caixas apresentam a letra **B**. Probabilidade $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.
- As bolas sorteadas na primeira e na segunda caixas apresentam a letra **M**. Probabilidade $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$.

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que essas bolas tenham a mesma letra é

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

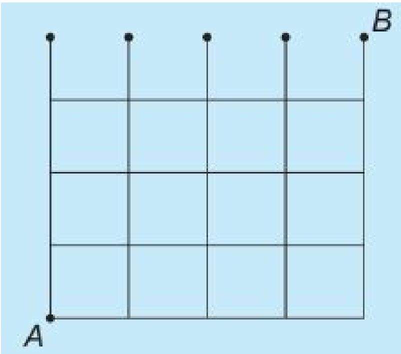
A alternativa **(B)** apresenta a resposta correta.

■

Nesta questão basta aplicar a ideia de probabilidade envolvendo eventos disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

39. **(OBMEP-2019) Nível 3 - Fase 1 - Questão 17**

Uma formiga caminha pela grade abaixo, podendo se mover apenas para a direita ou para cima. Se tiver duas opções para se mover, ela escolhe uma ao acaso, com probabilidade 1/2. Qual é a probabilidade de que a formiga comece no ponto A e termine no ponto B?



(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{32}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{10}$.

(E) $\frac{1}{8}$.

Solução: Partindo de **A** para chegar em **B** e chamando de **D** o movimento para a direita e de **C** o movimento para cima, deve-se calcular os movimentos nos quais a formiga chega na coluna mais à direita de **A**, pois, uma vez nesta coluna, a única possibilidade é realizar movimentos para cima até chegar em **B**.

Assim, a formiga realizará 4 movimentos para a direita e n movimentos para cima, $n = 0, 1, 2$ ou 3, até chegar na coluna mais à direita de **A**. A probabilidade de realizar cada um desses caminhos em função de n é $\left(\frac{1}{2}\right)^{4+n}$.

Como cada caminho pode ser descrito como uma sequência de **D**'s e **C**'s e para chegar na coluna mais à direita de **A**, o último movimento deve ser, necessariamente, para a direita, deve calcular quantas sequências distintas de **D**'s e **C**'s podem ser escritas. Como são $3 + n$ letras, pela Definição 3.2.2, a quantidade de sequências distintas em função de n é $(3+n) \times (3+n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = (3+n)!$. Para evitar dupla contagem, divide-se esse valor por $3!\, n!$, Definição 3.2.3. Assim:

- Para $n = 0$ a probabilidade é $\dfrac{(3+0)!}{3!\,0!} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4+0} = \dfrac{1}{16}$.
- Para $n = 1$ a probabilidade é $\dfrac{(3+1)!}{3!\,1!} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4+1} = \dfrac{4}{32}$.
- Para $n = 2$ a probabilidade é $\dfrac{(3+2)!}{3!\,2!} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4+2} = \dfrac{10}{64}$.
- Para $n = 3$ a probabilidade é $\dfrac{(3+3)!}{3!\,3!} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{4+3} = \dfrac{20}{128}$.

Como os eventos são disjuntos, pela Definição 3.2.4 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de que a formiga comece no ponto A e termine no ponto B é $\dfrac{1}{16} + \dfrac{4}{32} + \dfrac{10}{64} + \dfrac{20}{128} = \dfrac{64}{128} = \dfrac{1}{2}$ e a alternativa **(C)** apresenta a resposta correta.

∎

Este problema explora o conceito de probabilidade envolvendo a distribuição binomial. Ao fim, remete ao fato dos eventos serem disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF08MA22, EF09MA20, EM13MAT510 e EM13MAT511 da BNCC.

40. **(OBMEP-2019) Nível 3 - Fase 2 - Questão 3**

As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

a) Qual é a probabilidade de que Ana receba três bolas?

Solução: Pelo enunciado, nota-se que cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas.

Sendo assim, para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem, necessariamente, mandar sua bola para ela.

Assim, a probabilidade de que Beatriz mande a bola para Ana é $\dfrac{1}{3}$.

Empregando o mesmo raciocínio, percebemos que a probabilidade de que Cláudia mande a bola para Ana é $\dfrac{1}{3}$ e de que Diana mande a bola para Ana também é $\dfrac{1}{3}$.

Todos esses lançamentos são independentes, isto é, o resultado de um lançamento não afeta o resultado de outro lançamento.

Assim, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, a probabilidade de Ana receber as três bolas será de:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

∎

b) Qual é a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas?

Solução: Calcula-se a probabilidade de que Ana receba a bola de Beatriz e Cláudia, mas não receba a bola de Diana. Novamente os eventos são independentes, pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, a probabilidade é:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$

Usando o mesmo raciocínio para o caso em que Beatriz é a única que não manda a bola para Ana e o evento no qual Cláudia é a única que não manda a bola para Ana e fazendo o mesmo procedimento utilizado para encontrarmos a probabilidade do primeiro evento, tem-se que estes dois eventos também possuem probabilidade igual a $\frac{2}{27}$.

Assim, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Axioma 3.2.4, a probabilidade de Ana receber exatamente duas bolas é:

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

■

c) Qual é a probabilidade de que cada menina receba uma bola?

Solução: Divide-se em dois casos que dependem de para onde a segunda pessoa joga a bola, se de volta para a primeira pessoa ou se para outra pessoa.

A probabilidade do primeiro caso ocorrer é de $\frac{1}{3}$. Pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, dentro desse caso, a probabilidade de que, ao final, todas as meninas estejam com uma bola é de:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

A probabilidade do segundo caso ocorrer é de $\frac{2}{3}$. Pelo Teorema 3.2.3 e pela Equação 3.25, dentro desse caso, a probabilidade de que ao final todas as meninas estejam com uma bola, também é de:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Perceba ainda que os dois casos iniciais, são eventos disjuntos. Assim, pelo Teorema 3.2.1 e pelo Teorema 3.2.4, calcula-se a probabilidade desejada:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9}.$$

■

Este problema explora o conceito de probabilidade condicional, bem como o cálculo da probabilidade envolvendo eventos independentes e disjuntos. Tais conceitos dizem respeito às habilidades EF07MA34, EF09MA20 e EM13MAT511 da BNCC.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização do presente estudo, percebeu-se que o ensino de probabilidade e estatística pode se relacionar diretamente com o cotidiano dos estudantes, facilitando a aprendizagem dos conteúdos abstratos, próprios da matemática. Nesse contexto, foi destacado que estas áreas da Matemática estão cada vez mais ligadas ao meio social, científico e tecnológico. Assim, é necessário que os estudantes desenvolvam suas competências para compreender e transformar a realidade. Este trabalho aponta como notável a importância da educação matemática no âmbito da estatística e da probabilidade, pois propicia ao estudante condições para lidar com situações de incerteza do seu dia a dia. Com isso, na busca pela valorização da leitura matemática de problemas e uso de suas definições, axiomas e demais conteúdos para solução, enfatizou-se o quanto o aprendizado de probabilidade e estatística pode preparar o estudante para lidar com situações e problemas desafiadores, sejam em âmbito escolar, sejam no cotiano, tornando-o mais motivado e seguro ao tomar decisões.

Nessa perspectiva, o trabalho destacou as olimpíadas de Matemática, uma vez que são primordialmente baseadas em competir e se desafiar, entre elas a Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM; a Olimpíada Internacional de Matemática - IMO e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas - OBMEP. A OBMEP é notadamente uma das competições matemáticas mais relevantes, em abrangência e na forma como é aplicada, sendo referência mundial. Nesse aspecto, foram sugeridas, ao longo do trabalho, formas sistemáticas de se trabalhar temas da Matemática que envolvem competências em probabilidade e estatística. O caminho sistemático oferecido pela matemática, baseando-se no uso de definições, axiomas, teoremas e lógica, pode ser importante norteador para a solução de problemas, inclusive da OBMEP. Espera-se que tal procedimento possa levar a melhores desempenhos por parte dos discentes, uma vez que com a compreensão dos conceitos estudados, estes terão mais segurança para resolver as atividades propostas. Tudo pode facilitar o desenvolvimento de competências destacadas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC.

A partir do levantamento das questões da OBMEP, de primeira e segunda fase, dos anos de 2005 a 2019, ficou evidente o quanto certos temas de probabilidade e estatística, bem como respectivas habilidades estabelecidas pela BNCC, estão presentes nas provas. Na pesquisa, após analisar 300 questões da primeira fase e 90 da segunda e resolver todas as questões relacionadas com os conteúdos de probabilidade ou estatística, fez-se uma relação com as habilidades da BNCC e verificou-se o que consta na Tabela 7.1:

Tabela 7.1: Habilidades da BNCC relacionadas com a resolução das questões de probabilidade ou estatística da OBMEP.

Habilidades da BNCC	% de resoluções.
EF07MA34	46%
EF09MA20 e EM13MAT511	29%
EF06MA30	17%
EF06MA31, EM13MAT102, EM13MAT406 e EM13MAT407	16%
EF08MA22	14%
EM13MAT310 e EM13MAT312	13%
EF07MA35, EF08MA25, e EF08MA27	6%

Fonte: O autor, 2022.

Entre os assuntos mais abordados podemos destacar o estudo das medidas de tendência central, em especial a média aritmética simples; o tratamento da informação em gráficas e tabelas; e o cálculo de probabilidades envolvendo eventos independentes e disjuntos.

Ao fim, buscou-se com esse trabalho oferecer subsídios para que professores de matemática da educação básica possam recorrer aos conteúdos de probabilidade e estatística, para aproximar os seus estudantes da abordagem sistemática própria da matemática na resolução de problemas que envolvem incerteza, sejam esses problemas do mundo real ou mesmo lúdico. Espera-se, portanto, que esta pesquisa tenha possa contribuir academicamente, servindo de base para estudos futuros, e didaticamente, servindo de apoio a professores e estudantes que se interessarem pelo tema aqui abordado.

Como limitações, pode-se apontar as dificuldades impostas pela pouca prática da escrita acadêmica, no caso deste autor, bem como a abrangência e o quantitativo de questões de Probabilidade e Estatística nas provas de 1ª e 2ª fases da OBMEP. Isso porque o presente trabalho se ocupa em analisar o quantitativo de questões dessas duas áreas em relação às habilidades exigidas pela BNCC, sendo que esta diz respeito aos processos de ensino e aprendizagem da educação básica.

Como trabalhos futuros, pode-se apontar a possibilidade, em vez de explorar apenas as provas da OBMEP, realizar um aprofundamento em outras competições ou exames, como por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, o qual foi explorado em alguns trabalhos de conclusão de curso do PROFMAT UFCA, a saber: Alcântara (2020), Dantas (2020) e Siqueira (2020), frente aos assuntos de Probabilidade e Estatística. Para tal, ainda é possível fazer publicações de resultados deste e de outros estudos relacionados a temática estudada em congressos e revistas de Educação Matemática ou de Estatística.

REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA, É. F. d. **A matemática Básica em Provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, CE, 2020. Orientadora: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

ALMEIDA, A. C. d. et al. Políticas educacionais: um estudo bibliométrico sobre o papel das olimpíadas científicas sob uma análise multinível. **Revista Brasileira de Educação**, SciELO Brasil, v. 27, 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/xMBy9RnHnzzycxh4GjXkBcC/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 07/01/2022.

ANAGRAMA. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2022. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/anagrama/>. Acesso em: 08/07/2022.

BASTOS, J. L. D.; DUQUIA, R. P. Medidas de dispersão: os valores estão próximos entre si ou variam muito. **Scientia Medica**, Porto Alegre, RS, v. 17, n. 1, p. 40–44, 2007.

BAYER, A. et al. Probabilidade na escola. In: **Congresso Internacional de Ensino de Matemática**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 3. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Hr_Bittencourt/publication/265449108_PROBABILIDADE_NA_ESCOLA/links/5583f75a08ae4738295c401d/PROBABILIDADE-NA-ESCOLA.pdf>. Acesso em: 13/07/2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: Secretaria da educação fundamental - sef/MEC, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 18/07/2020.

____. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 11/07/2020.

____. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 13/07/2020.

____. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. versão final. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 08/07/2020.

____. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. 2022. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/ce/iguatu/pesquisa/23/25888?detalhes=true>.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística**: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. [S.l.]: Autêntica, 2013.

CARVALHO, P. C. P. et al. Análise combinatória e probabilidade. **Editora SBM**, 2004.

CASELLA, G.; BERGER, R. **Statistical inference**. 2. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2002.

CHANCE, B. L. Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. **Journal of Statistics Education**, Taylor & Francis, v. 10, n. 3, 2002.

CORREIA, M. S. B. B. **Probabilidade e estatística**. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.

CORRELAÇÃO. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2022. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/correlacao/>. Acesso em: 08/07/2022.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 16. ed. Campinas-SP: Papirus Editora, 2008.

DANTAS, M. S. A. **Um estudo sobre funções em provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2020. Orientadora: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

FERNANDES, J. A.; GEA, M. M.; CORREIA, P. F. Conhecimento de estatística bivariada de futuros professores portugueses dos primeiros anos. **Revista Portuguesa de Educação**, Universidade do Minho, v. 32, n. 2, p. 40–56, 2019.

FONSECA, J. J. S. da. **Apostila de metodologia da pesquisa científica**. [S.l.]: João José Saraiva da Fonseca, 2002.

FONTES, M. D. M. et al. A estatística nas provas da obmep. **Actas del CUREM 5**, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2015.

GARFIELD, J.; GAL, I. Teaching and assessing statistical reasoning. **Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12**, 1999.

GUEDES, T. A. et al. Estatística descritiva. **Projeto de ensino aprender fazendo estatística**, Universidade Estadual de Maringá Maringá, p. 1–49, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar 5: Combinatória, Probabilidade**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

HUA-WEI, Z. On the educational value of mathematics olympiad. **Journal of Mathematics Education**, v. 2, 2007.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2.

IMO. **IMO, 2020, 61st International Mathematical Olympiad Saint-Petersburg Russia**. 2020. Disponível em: <https://imo2020.ru/>.

IMPA. **Maior competição escolar do mundo foi criada pelo IMPA e pela SBM.** 2018. Disponível em: <https://impa.br/noticias/olimpiadas-promovem-o-interesse-pela-matematica-em-todo-o-pais/>. Acesso em: 21/07/2020.

____. **Regulamento**. Rio de Janeiro - RJ, 2021. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 09/07/2020.

____. **Vagas olímpicas aliviam pressão de vestibulandos em pandemia**. 2021. Acesso em: 28/06/2021. Disponível em: <https://impa.br/noticias/em-ano-de-incertezas-vagas-olimpicas-aliviaram-vestibulandos/>.

____. **Provas e Soluções**. 2022. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 22/06/2022.

INFOMONEY. **Ibovespa (IBOV)**. 2021. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/b3/indice/ibovespa/historico/>. Acesso em: 03/06/2022.

INSTITUTO FEDERAL DO SUL DE MINAS GERAIS. **Edital 164/2020**. 2020. Disponível em: <https://portal.ifsuldeminas.edu.br/attachments/article/4115/Edital%20Vagas%20Ol%C3%ADmpicas%20-%20Cursos%20Superiores%20-%202021%20-%20Retificado%2001.pdf>. Acesso em: 28/06/2021.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. [S.l.]: SBM, 2006. v. 2.

LOPES, C. E. The teaching of statistics and probability at elementary schools and teacher education. **Cadernos Cedes**, SciELO Brasil, v. 28, n. 74, p. 57–73, 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0101-32622008000100005&script=sci_arttext>. Acesso em: 08/07/2020.

MACIEL, M. V. M.; BASSO, M. V. de A. Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep): as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica. **X Encontro Gaúcho de Educação Matemática.**, Ijuí, RS, 2009.

MAROTTI, J. et al. Amostragem em pesquisa clínica: tamanho da amostra. **Revista de Odontologia da Universidade Cidade de São Paulo**, v. 20, n. 2, p. 186–194, 2008.

MEMÓRIA, J. M. P. **Breve história da estatística.** Brasília, DF: Embrapa, 2004.

MINITAB. **Análise de regressão**: Como interpretar o r-quadrado e avaliar a qualidade de ajuste? 2019. Disponível em: <"https://blog.minitab.com/pt/analise-de-regressao-como-interpretar-o-r-quadrado-e-avaliar-a-qualidade-de-ajuste>. Acesso em: 04/04/2019.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. de O. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 13. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MOURA, J. B. de et al. Utilizando estatística em avaliações de larga escala–enem e obmep–ifmt/campus juína. **CoInspiração-Revista dos Professores que ensinam Matemática (ISSN 2596-0172)**, v. 1, n. 1, p. 92–105, 2018.

NETO, J. M. et al. Estatística multivariada: uma visão didática-metodológica. **Revista crítica na rede–Filosofia da ciência**, v. 9, 2015.

OBMEP. **Probabilidade Frequencial**. Clubes de Matemática da OBMEP, Sala de Estudo: Probabilidade – Sala 4, 2021. Acesso em: 14/04/2022. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-probabilidade-sala-4/>.

PESQUISA Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa.

PINHEIRO, J. I. et al. **Princípios de Estatística e Probabilidade**. Rio de Janeiro: ELSEVIER, CAMPUS UFRJ, 2011.

PINTO, E. R.; RODRIGUES, A. d. A. **Proposta de aperfeiçoamento do ensino de probabilidade e estatística para os cursos da área de ciências exatas**. In: 1^{rst} International Congress of Mathematics, Engineering and Society - ICMES. Curitiba-PR, Brasil, 2009.

PONTES, E. A. S. The teaching practice of the mathematics teacher in basic education: A vision in the brazilian school. **International Journal of Humanities and Social Science Invention (IJHSSI)**, v. 7, n. 6, p. 86–89, jun 2018. Disponível em: <http://www.ijhssi.org/papers/vol7(6)/Version-4/M0706048689.pdf>. Acesdo em: 02/06/2021.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição**. [S.l.]: Editora Feevale, 2013.

PROETTI, S. As pesquisas qualitativa e quantitativa como métodos de investigação científica: Um estudo comparativo e objetivo. **Revista Lumen**, v. 2, n. 4, 2018. ISSN 2447-8717.

REIS, E. et al. **Estatística aplicada**. Lisboa: Edições Sílabo, 2015.

RUMSEY, D. J. Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. **Journal of Statistics Education**, Taylor & Francis, v. 10, n. 3, 2002. Disponível em: <http://jse.amstat.org/v10n3/rumsey2.html>. Acesso em: 14/07/2020.

SHAFER, G. The significance of jacob bernoulli's ars conjectandi for the philosophy of probability today. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 75, n. 1, p. 15–32, 1996.

SILVA, A. L. F. da; SOUSA, G. C. D. Investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de números, probabilidade e estatística no 8º ano o caso do princípio da casa dos pombos de dirichlet. **Revista história da matemática para professores**, v. 6, n. 1, p. 14–23, 2020.

SILVA, A. S.; FERNANDES, J. de A.; ARAÚJO, J. E. de. **Pesquisas sobre a utilização de olimpíadas de matemática como recurso pedagógico**. Jundiaí-Sp: Paco e Littera, 2021. v. 87.

SILVA, I. A. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

SILVA, M. J.; LIMA, R. F.; SÁ, P. F. de. Educação estatística na educação de jovens e adultos. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 3, n. 2, p. 514–534, 2019.

SIQUEIRA, V. F. d. **Tópicos de geometria plana em provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, CE, 2020. Orientadora: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa. Coorientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. 3. ed. Campinas-SP: Papirus editora, 2001.

TRAINOTTI, A.; GAYESKI, R. G.; NUNES, L. N. O conteúdo de estatística nas provas da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep). **REnCiMa**, v. 9, n. 2, p. 193–209, 2018.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Edital Nº 001/2019**. 2019. Disponível em: <https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/Edital_Ingresso-de-Participantes-de-Competi%C3%A7%C3%B5es-do-Conhecimento_Retificado_30-08-2019.pdf>. Acesso em: 28/06/2021.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. **Deliberação CEPE-A-14/2020, de 06/10/2020**. 2020. Disponível em: <https://www.comvest.unicamp.br/wp-content/uploads/2020/10/Edital_VO_2021.pdf>. Acesso em: 28/06/2021.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. **Vestibular | Olimpíadas Científicas UNESP 2020**. 2020. Disponível em: <https://www.vunesp.com.br/VNSP1903>. Acesso em: 07/08/2020.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ. **Edital Nº 009/2020 – Retificado em 01/04/2021**. 2021. Disponível em: <https://owncloud.unifei.edu.br/index.php/s/86fGLSfvvTLrzVJ>. Acesso em: 28/06/2021.

VIANA, C. S. V.; CALDAS, C. C. S. et al. As olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas na formação de professores e alunos. **Revista Margens Interdisciplinar**, Universidade Federal do Pará, 2013.

ZAT, A. D. Moda estatística: relações conceituais. In: EREMATSUL - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Porto Alegre, RS, 2015. p. 529–539. XVI edição. Disponível em: <https://editora.pucrs.br/anais/erematsul/>. Acesso em: 15/07/2022.

ZHOU, H.; LIU, R. The olympic mathematics education in china. **Research in Mathematical Education**, Korean Society of Mathematical Education, v. 13, n. 4, p. 331–339, 2009.

Anexo A

Quadros e tabelas

Tabela A.1: Participação e desempenho do Brasil nas edições da olimpíada internacional de matemática - IMO.

Ano	Posição do Brasil	# países participantes	posição relativa, Equação 4.1, (%)
1979	22	23	95,65
1980			
1981	16	27	59,26
1982	20	30	66,67
1983	20	32	62,5
1984	18	34	52,94
1985	15	38	39,47
1986	24	37	64,86
1987	19	42	45,24
1988	38	49	77,55
1989	36	50	72
1990	24	54	44,44
1991	37	56	66,07
1992	39	56	69,64
1993	34	73	46,58
1994	39	69	56,52
1995	44	73	60,27
1996	52	75	69,33
1997	26	82	31,71
1998	30	76	39,47
1999	29	81	35,8
2000	48	82	58,54

Continua na próxima página

Tabela A.1 – *Continuação da tabela*

Ano	Posição do Brasil	# países participantes	posição relativa, Equação 4.1, (%)
2001	16	83	19,27
2002	21	84	25
2003	26	82	31,71
2004	21	85	24,71
2005	33	91	36,26
2006	29	90	32,22
2007	24	93	25,81
2008	16	97	16,49
2009	17	104	16,35
2010	35	95	36,84
2011	20	101	19,8
2012	19	100	19
2013	28	97	28,87
2014	34	101	33,66
2015	22	104	21,15
2016	15	109	13,76
2017	37	101	36,63
2018	28	107	26,17
2019	29	112	25,89
2020	10	105	9,52

Fonte: (IMO, 2020).

Fim da tabela

Quadro A.1: Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas no ensino fundamental em probabilidade e estatística

Ano	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
1º ano	Noção de acaso.	**(EF01MA20)** Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.
	Leitura de tabelas e de gráficos de colunas simples.	**(EF01MA21)** Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples.

Continua na próxima página

Quadro A.1 – *Continuação do quadro*

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
	Coleta e organização de informações. Registros pessoais para comunicação de informações coletadas.	**(EF01MA22)** Realizar pesquisa, envolvendo até duas variáveis categóricas de seu interesse e universo de até 30 elementos, e organizar dados por meio de representações pessoais.
2º ano	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano.	**(EF02MA21)** Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
	Coleta, classificação e representação de dados em tabelas simples e de dupla entrada e em gráficos de colunas.	**(EF02MA22)** Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima. **(EF02MA23)** Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas e gráficos de colunas simples.
3º ano	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral.	**(EF03MA25)** Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada e gráficos de barras.	**(EF03MA26)** Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas. **(EF03MA27)** Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos.
	Coleta, classificação e representação de dados referentes a variáveis categóricas, por meio de tabelas e gráficos.	**(EF03MA28)** Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada e representá-los em gráficos de colunas simples, com e sem uso de tecnologias digitais.

Continua na próxima página

Quadro A.1 – *Continuação do quadro*

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
4º ano	Análise de chances de eventos aleatórios.	**(EF04MA26)** Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
	Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e colunas e gráficos pictóricos.	**(EF04MA27)** Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise.
	Diferenciação entre variáveis categóricas e variáveis numéricas. Coleta, classificação e representação de dados de pesquisa realizada.	**(EF04MA28)** Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas e gráficos de colunas simples ou agrupadas, com e sem uso de tecnologias digitais.
5º ano	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios.	**(EF05MA22)** Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.	**(EF05MA23)** Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
	Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada, gráfico de colunas agrupadas, gráficos pictóricos e gráfico de linhas.	**(EF05MA24)** Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas), referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões. **(EF05MA25)** Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas, pictóricos e de linhas, com e sem uso de tecnologias digitais, e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados.

Continua na próxima página

Quadro A.1 – *Continuação do quadro*

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
6º ano	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas.	**(EF06MA31)** Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico. **(EF06MA32)** Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
	Coleta de dados, organização e registro. Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações.	**(EF06MA33)** Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).
7º ano	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	**(EF07MA34)** Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Continua na próxima página

Quadro A.1 – *Continuação do quadro*

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
	Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados	**(EF07MA35)** Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
	Pesquisa amostral e pesquisa censitária. Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações.	**(EF07MA36)** Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
	Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados	**(EF07MA37)** Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.
8º ano	Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados.	**(EF08MA23)** Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
	Organização dos dados de uma variável contínua em classes.	**(EF08MA24)** Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
	Medidas de tendência central e de dispersão.	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

Continua na próxima página

Quadro A.1 – *Continuação do quadro*

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
	Pesquisas censitária ou amostral.	**(EF08MA26)** Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).
	Planejamento e execução de pesquisa amostral.	**(EF08MA27)** Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.
9º ano	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	**(EF09MA21)** Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos.	**(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório.	**(EF09MA23)** Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Fim do quadro

Quadro A.2: Habilidades a serem desenvolvidas no ensino médio em probabilidade e estatística.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: (BRASIL, 2018).

Tabela A.2: Quantidade de vagas para o Nível 1

Grupo	Quantidade de alunos inscritos na Primeira Fase	Quantidade de vagas para a Segunda Fase
1A	1 alunos	1 vaga
	2 a 40 alunos	2 vagas
1B	41 a 80 alunos	4 vagas
1C	81 a 140 alunos	7 vagas
1D	141 a 240 alunos	12 vagas
1E	241 alunos ou mais	5% do total de alunos inscritos na Primeira Fase

Fonte: (IMPA, 2021a)

Tabela A.3: Quantidade de vagas para o Nível 2

Grupo	Quantidade de alunos inscritos na Primeira Fase	Quantidade de vagas para a Segunda Fase
2A	1 alunos	1 vaga
	2 a 40 alunos	2 vagas
2B	41 a 80 alunos	4 vagas
2C	81 a 140 alunos	7 vagas
2D	141 a 240 alunos	12 vagas
2E	241 alunos ou mais	5% do total de alunos inscritos na Primeira Fase

Fonte: (IMPA, 2021a)

Tabela A.4: Quantidade de vagas para o Nível 3

Grupo	Quantidade de alunos inscritos na Primeira Fase	Quantidade de vagas para a Segunda Fase
3A	Até 6 alunos alunos	6 vaga
	7 a 120 alunos	6 vagas
2B	121 a 240 alunos	12 vagas
2C	241 a 380 alunos	19 vagas
2D	381 a 620 alunos	31 vagas
2E	621 alunos ou mais	5% do total de alunos inscritos na Primeira Fase

Fonte: (IMPA, 2021a)

Tabela A.5: Premiação para alunos de escolas públicas e escolas públicas seletivas.

PRÊMIO/CRITÉRIO		Nível 1		Nível 2		Nível 3	
		Pública não seletiva	Pública Seletiva	Pública não seletiva	Pública Seletiva	Pública não seletiva	Pública Seletiva
OURO	Nacional	160	Até 40	160	Até 40	50	Até 50
PRATA		400	Até 100	400	Até 100	250	Até 250
BRONZE	Nacional	1.030	Até 150	750	Até 150	450	Até 350
	Por UF	30	0	20	0	10	0
MENÇÃO	Nacional	10.000		10.000		10.000	
HONROSA	Por UF	200	0	200	0	200	0

Fonte: (IMPA, 2021a)

Tabela A.6: Premiação para alunos de escolas privadas.

Prêmio	Nível 1	Nível 2	Nível 3
	Privada	Privada	Privada
Ouro	25	25	25
Prata	75	75	75
Bronze	225	225	225
Menção Honrosa	1900	1900	1900

Fonte: (IMPA, 2021a)

Tabela A.7: Premiação para professores.

Premiação	Critério	Total de Premiados: 969
Participação no programa OBMEP na Escola em 2022, 1 diploma e 1 livro de apoio para formação matemática.	2 (dois) professores de escola pública não seletiva com a maior média em sua UF (sendo um entre os grupos 1 e 8 e outro entre os grupos 9 e 15)	54
	Excluídos os premiados acima, 2 (dois) professores de escola pública não seletiva com a maior média em seu Grupo	30
1 diploma e 1 livro de apoio para formação matemática.	Em cada Grupo, de cada UF, 1 (um) professor de escola pública não seletiva que obtiver a maior média em seu Grupo, excluídos os premiados acima.	405

Continua na próxima página

Tabela A.7 – *Continuação da tabela*

Premiação	Critério	Total de Premiados: 969
	Aos 30 (trinta) professores de escola não seletiva com a maior média nacional em seu Grupo, excluídos os premiados no item anterior.	450
	A 1 (um) professor de escola pública seletiva com a maior média nacional de cada grupo.	15
	A 1 (um) professor de escola privada com a maior média nacional de cada grupo.	15

Fonte: (IMPA, 2021a)

Fim da tabela