UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUCAS PEDROSA GOMES DE ABREU

# ABORDAGEM DA GEOMETRIA PLANA NAS PROVAS DO ENEM

JUAZEIRO DO NORTE
2022

LUCAS PEDROSA GOMES DE ABREU

ABORDAGEM DA GEOMETRIA PLANA NAS PROVAS DO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

JUAZEIRO DO NORTE
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Cariri**

S586b Pedrosa Gomes de Abreu, Lucas

Abordagem da Geometria plana nas provas do ENEM / Lucas Pedrosa Gomes de Abreu. – 2022.

XV, 163 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2022.

Inclui referências: p. 158 – 163.

1. Ensino de Matemática. 2. ENEM. 3. Geometria Plana. I. Francisco de Assis Andrade, Plácido (Orientador). II. Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 511.12

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

# Abordagem da Geometria Plana nas Provas do Enem

## LUCAS PEDROSA GOMES DE ABREU

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 03 de junho de 2022.

Banca Examinadora

Plácido Francisco de Assis Andrade
Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
Orientador

Maria Silvana A. Costa
Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
UFCA

Maria Cristiane M. Brandão
Profa. Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão
UECE

*À minha mãe.*

# AGRADECIMENTOS


A Deus, por tudo.

A minha mãe, Maria Ildeni Pedrosa de Oliveira, a minha esposa, Noelia dos Santos Lucas, aos meus irmãos: Layana Larisse, Laizy, Thaizy, Elias Júnior, Cecy, Hudson, Taynara e Joab Maycon e demais familiares.

In MEMORIAN, ao meu grande amigo/irmão, Darlan Oliveira de Morais, por ser grande influenciador no gosto pela Matemática.

A todos os meus amigos, pelo apoio e incentivo.

A todos os meus professores do mestrado, em especial ao meu orientador Plácido Francisco de Assis Andrade.

A todos os meus colegas de curso.

“Se não existe vida fora da Terra, então o Universo é um grande desperdício de espaço.”

Carl Sagan

# RESUMO

Com a democratização do acesso ao Ensino Superior, oportunizada pela criação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), preparar-se para este teste e submeter-se a ele já faz parte do calendário educacional de jovens e adultos por todo o Brasil. Entretanto, sua extensão e complexidade ainda são um desafio para aqueles que buscam obter boa pontuação na prova, principalmente quando se trata das áreas que envolvem cálculos, como é o caso da Matemática. Nesse sentido, o presente estudo tem como objetivo analisar as questões de Matemática propostas no ENEM que apresentam conceitos relacionados à subárea denominada Geometria Plana, conteúdo recorrente no exame mas pouco debatido nas aulas da disciplina. O levantamento de dados se deu por meio de pesquisa documental, explorando os problemas dispostos para a área nas edições da prova realizadas entre 2009 e 2021. As informações extraídas serviram de base para a seleção dos conceitos matemáticos apresentados ao longo do segundo capítulo e necessários para a resolução das questões analisadas. Já no terceiro capítulo encontram-se as questões de Geometria Plana solucionadas e comentadas, sendo esta a principal ferramenta oferecida por esse estudo. A união entre a discussão teórica e a parte prática dessa produção compõem uma apostila direcionada para estudantes do curso preparatório Edificar, que é uma das atividades do Programa Edifique Ações, vinculado à extensão da Universidade Federal do Cariri (UFCA). A elaboração de um material pedagógico dessa natureza, que vem a se juntar a outras dissertações, visa auxiliar possíveis candidatos na preparação para o exame em evidência, que, por sua vez, configura-se como a principal porta de acesso para o Ensino Superior atualmente. Além do apoio ao público-alvo citado, espera-se que as discussões aqui presentes também contribuam para uma reflexão sobre como tem se dado o ensino de Matemática nas escolas públicas do país, oportunizando melhorias no processo de ensino/aprendizagem daqueles que integram tais instituições.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. ENEM. Geometria Plana.

# ABSTRACT

With the democratization of access to Higher Education, made possible by the creation of the High School National Exam (ENEM), preparing for this test and submitting to it is already part of the educational calendar for young people and adults throughout Brazil. However, its extension and complexity are still a challenge for those who seek to obtain a good score on the test, especially when it comes to areas that involve calculations, such as Mathematics. In this sense, this study aims to analyze Math questions proposed in ENEM that present concepts related to the subarea called Plane Geometry, a recurring content in the exam but little discussed in the classes of the subject. Data collection was carried out through documentary research, exploring the problems presented for the area in the editions from 2009 to 2021. The information found served as a basis for the selection of the mathematical concepts presented throughout the second chapter and necessary for the resolution of the questions. In the third chapter, the questions about Plane Geometry are solved and commented on, which is the main tool offered by this study. The union between the theoretical discussion and the practical part of this production makes up a booklet directed at students of the Edificar preparatory course, which is one of the activities of the Edifique Ações Program, linked to the extension of the Federal University of Cariri (UFCA). The elaboration of a pedagogical material of this nature, which joins other dissertations, intends to assist candidates in preparing for the exam in evidence, which, in turn, is the main way of entering Higher Education today. In addition to supporting the aforementioned target audience, it is expected that the discussions presented here can also contribute to a reflection on how the teaching of Mathematics has been happening in Brazilian public schools, providing opportunities for improvements in the teaching/learning process of those who integrate such institutions.

**Keywords:** Teaching of Mathematics. ENEM. Plane Geometry.

# Sumário

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE QUADROS

# Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

Considerada uma das ciências mais aplicadas em nosso cotidiano, a Matemática se destaca pelo seu caráter prático, uma vez que relaciona a lógica com as situações rotineiras experienciadas por todos os indivíduos. Nesse sentido, seus pressupostos buscam investigar a veracidade dos fatos lançando mão de técnicas precisas e exatas, que vão desde operações básicas até cálculos mais complexos, sempre observando o que versam os princípios matemáticos.

Ao longo de sua história, tal ciência foi construída e aperfeiçoada buscando responder as necessidades de cada época, até estabelecer-se como objeto de estudo fundamental para a formação de todo cidadão. Para tanto, a Matemática passou a integrar o currículo de instituições escolares por todo o mundo, que hoje empenham-se para oferecer um ensino contextualizado voltado para o desenvolvimento integral do estudante, contribuindo para a concepção de uma visão de mundo que responda aos seus interesses.

Desde os primeiros anos da jornada escolar, iniciada ainda na primeira infância, aprendizes passam a ter contato com os conceitos matemáticos que utilizarão no decorrer de suas vidas. Para muitos, o ensino formal da Matemática tem seu fim no Ensino Médio, seja por decidir não seguir estudando, seja por escolher uma carreira profissional que não se aproxime da disciplina. O que é comum à grande maioria daqueles que desejam se profissionalizar por meio do ingresso no Ensino Superior é submeter-se ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que, por sua vez, tem a Matemática como uma das quatro áreas do conhecimento requeridas dentre as suas 180 questões.

Nos dias atuais, fazer Enem faz parte da vida dos estudantes de todo o Brasil. As escolas se organizam, mobilizam e planejam atividades periódicas que passam a fazer parte do cotidiano escolar: aulas de revisão, motivação, reforço de conteúdos mais complexos, semanas de intensivos, dentre outras ações. Para o exame, não há limitações quanto à classe social ou faixa etária, tanto jovens quanto adultos, até mesmo pessoas na terceira idade podem realizá-lo. É um instrumento democrático e legítimo, que possibilita novos horizontes e oportunidades num contexto que antes era mais complexo. Fica claro que o Enem hoje é um grande evento do calendário educacional brasileiro, e ter domínio de conteúdo em todas as áreas requeridas nele é o primeiro passo rumo à aprovação.

Pensando nisso, a presente dissertação tem como principal objetivo analisar as questões de Matemática do ENEM que apresentam conceitos voltados para a subárea denominada Geometria, em especial a Geometria Plana, conteúdo recorrente nas provas. Tal esforço justifica-se pela importância da Matemática para a aprovação no exame, uma vez que esta se apresenta como a área em que os candidatos alcançam maior média dentre as demais se considerarmos o algoritmo que as corrige, conhecido como TRI (Teoria de Resposta ao Item), tornando-se um diferencial para a média geral, como mostra a Tabela 1.1, a seguir:

Tabela 1.1: Comparativo entre as notas máximas em cada edição do Enem

| **Ano de aplicação da prova do ENEM** | **Nota máxima por disciplina** |
|---|---|
| 2020 | • Linguagens - 801,1<br>• Ciências Humanas - 862,6<br>• Ciências da Natureza – 854,8<br>• Matemática - 975 |
| 2019 | • Linguagens - 801,7<br>• Ciências Humanas - 835,1<br>• Ciências da Natureza – 860,9<br>• Matemática - 985,5 |
| 2018 | • Linguagens - 816,9<br>• Ciências Humanas - 850,4<br>• Ciências da Natureza – 869,6<br>• Matemática - 996,1 |
| 2017 | • Linguagens - 788,8<br>• Ciências Humanas - 868,3<br>• Ciências da Natureza – 885,6<br>• Matemática - 993,9 |
| 2016 | • Linguagens - 846,4<br>• Ciências Humanas - 859,1<br>• Ciências da Natureza – 871,3<br>• Matemática - 991,5 |

Fonte: Adaptado de [33], [34], [35], [36] e [37].

Este trabalho de mestrado se junta ao grupo de outras dissertações dos autores (ALCÂNTARA, 2020) [38], (SIQUEIRA, 2020) [39] e (DANTAS, 2020) [40], produzidas por participantes do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal do Cariri (UFCA), que também decidiram discorrer sobre como a área é tratada no ENEM, sob diferentes perspectivas. Assim como as demais produções este trabalho propõem a oferta de uma cartilha que visa auxiliar estudantes a se prepararem para a prova de Matemática do ENEM, uma vez que discorrem acerca dos conceitos matemáticos necessários para o bom aproveitamento no exame, além de apresentar questões das edições passadas de forma resolvida e comentada.

O material pedagógico fruto das dissertações serve de base para todo e qualquer estudante que deseja ter domínio sobre os conteúdos referentes à Matemática. Contudo, o público-alvo das cartilhas são os estudantes do cursinho preparatório Edificar.

O Curso Intensivo para Enem Edificar é um Projeto de Extensão da UFCA, instituição localizada no interior do estado do Ceará. O cursinho oferece, de forma gratuita, preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio a estudantes da rede pública de ensino, uma vez que conta com trabalho voluntário de servidores e alunos da própria UFCA.

De acordo com os critérios para participação do projeto, estudantes de escolas públicas que comprovem não ter condições de arcar com os custos de um cursinho particular podem inscrever-se para concorrer a uma das 50 vagas que geralmente são disponibilizadas. A seletiva é feita uma vez por ano e consiste em análise das informações socioeconômicas de cada candidato. As aulas acontecem de segunda a quinta no campus da universidade na cidade de Juazeiro do Norte.

A presente pesquisa é predominantemente descritiva, que tem por objetivo registrar e descrever fatos ou fenômenos, sem que haja interferência nos mesmos, tendo um formato de levantamento. Quanto à sua natureza é aplicada já que se dedica em gerar conhecimentos que são aplicados na solução de problemas locais, no caso, o Curso Intensivo para Enem - Edificar. A sua abordagem é qualitativa, uma vez que se ocupa em relatar a maior quantidade possível de informações (PRODANOV, 2013) [41].

Já em relação às técnicas de elaboração, a presente pesquisa é essencialmente documental. Esse tipo de procedimento metodológico se assemelha ao pesquisa bibliográfica, uma vez que também se debruça sobre fontes de papel. A abordagem bibliográfica se baseia em materiais já publicados como livros e periódicos. Já uma pesquisa documental se baseia em fontes que ainda não tiveram um trato analítico e que ainda podem ser reestruturadas, por exemplo leis, resoluções e projetos pedagógicos (PRODANOV, 2013) [41]. No caso, dessa pesquisa, a fonte explorada são os cadernos de provas do Enem; para isso, foram selecionados os cadernos de cor amarela de 2009 à 2021.

Posto isto, este trabalho é composto da presente introdução e mais quatro capítulos. O Capítulo 2 faz um apanhado geral sobre o ensino de Matemática, abrangendo o seu surgimento, perpassando os seus pressupostos pedagógicos da disciplina como parte integrante e fundamental das etapas da formação escolar de crianças e jovens Brasil afora, até a sua configuração no que diz respeito à estrutura das questões do ENEM, destacando tópicos iniciais relacionados à subárea Geometria Plana, foco desse estudo.

Já no Capítulo 3, também de caráter teórico, trata dos conceitos matemáticos necessários para a resolução de problemas que envolvem Geometria Plana, servindo de subsídio metodológico para aqueles que pretendem se submeter ao exame em questão.

No Capítulo 4 são apresentadas as resoluções de questões do ENEM sobre Geometria Plana das últimas 13 edições. As soluções apresentadas por meio dos cálculos, bem como os comentários pertinentes a cada questão. Com isso, formam o produto pedagógico direcionado aos estudantes do cursinho supracitado, configurando-se também como a principal contribuição desta pesquisa para o cenário educacional em nível local, regional e nacional.

Ao fim, no Capítulo 5, nas Considerações Finais, é destacada a contribuição do presente estudo no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Ficando o material produzido como fonte de estudo e preparação para estudantes do curso Edificar, bem como de outros públicos interessados.

# Capítulo 2

# ENSINO DE MATEMÁTICA: HISTÓRIA E CONTRIBUIÇÕES PARA O APRENDIZ

## 2.1 Contribuições da Matemática para a humanidade

Desde os babilônios, primeiros povos nos registros da história a desenvolverem o que conhecemos hoje como álgebra elementar, até os gregos, responsáveis pelo avanço da Matemática com o status de ciência, vê-se o quão importante essa área do conhecimento foi e tem sido para o homem. Quando falamos em progresso científico e econômico das sociedades estamos tratando também de Matemática, uma vez que suas descobertas contribuíram significativamente quando aplicadas à construção, aperfeiçoamento e uso produtivo de máquinas e equipamentos (BURGO, 2015).

Assim como as civilizações, a Matemática também passou por períodos de evolução. Nem sempre o imaginário social associou tal área do conhecimento à disciplina escolar como se conhece hoje. As práticas pedagógicas matemáticas foram ganhando destaque anos depois do surgimento das escolas, visto que, a princípio, preocupava-se mais em atender os processos de industrialização do que discutir as questões relacionadas à prática docente, o que significava maior foco na formação de profissionais que respondessem às demandas dos mais diversos ramos das atividades humanas, solucionando problemas de ordem prática (CURITIBA, 2006 apud BURGO, 2015).

Tal cenário se modificou entre o final do século XIX e o início do século XX, quando exigências advindas das revoluções dos séculos anteriores passaram a refletir no modo como se pensava a Matemática como disciplina escolar pelo mundo. A partir de então, a escola passa a ser considerada "o espaço por excelência de desenvolvimento dos conceitos científicos, a instituição capaz de fazer a mediação entre os conceitos cotidianos e o científico" (MORAES; MOURA, 2009, p. 99). Alinhadas às discussões do movimento chamado Escola Nova, começase a conceber o ensino de Matemática no Brasil a partir da valorização dos processos de aprendizagem, nos quais o estudante está envolvido em atividades de pesquisa, resolução de problemas e outras atividades voltadas para a ludicidade. Nesse sentido, o centro do processo de ensino da Matemática passa a ser o estudante, que tem o professor como orientador da aprendizagem (BURGO, 2015).

Em meio as novidades e possibilidades advindas de tais mudanças e pensamentos, surge a necessidade de padronizar o ensino nas escolas, de modo a oportunizar uma educação igualitária para todas as regiões do país. Assim, nascem os documentos oficiais que orientam docentes de todas as áreas do conhecimento. É sobre o que versam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o componente curricular em questão que discutiremos a seguir.

## 2.2 Como a disciplina configura-se no currículo escolar brasileiro

A fim de adequar o ensino das escolas brasileiras às mudanças advidas com a chegada das novas tecnologias, bem como as transformações na produção de bens e serviços, o Ministério da Educação elabora nos anos de 1997 e 1998 os Parâmetros Curriculares Nacionais, que ganharam a sua versão para o Ensino Médio logo no ano de 2000. Tendo como marco legal a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, LDB (nº 9.394 de 20 dezembro de 1996) - que no artigo 26 regulamenta uma base nacional comum para a Educação Básica, os PCNs trouxeram um novo perfil para o currículo que até então apresentava um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações (BRASIL, 2000).

As referências apresentadas em tal documento se apoiam nas competências básicas necessárias aos jovens para sua inserção na vida adulta. Dessa forma, visam divulgar os princípios da reforma curricular da época e nortear os professores no que diz respeito às novas abordagens e metodologias dispostas ao longo das orientações. Para o Ensino Médio, os PCNs sugerem que o trabalho em cada área do conhecimento envolva, "de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo" (BRASIL, 2000, p. 06).

No que concerne ao ensino de Matemática, os PCNs tratam tanto sobre o valor formativo da disciplina, uma vez que auxilia na estruturação do pensamento e o raciocínio dedutivo, como do seu papel instrumental, já que se configura como "uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas" (BRASIL, 2000, p. 40). Além disso, sugere-se que a Matemática passe a ser vista também como ciência, para que proporcione aos estudantes perceber as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que vão auxiliá-los a construir novos conceitos e estruturas a partir de outros, o que resultará na validação de intuições e construção de sentido às técnicas aplicadas. Assim, o jovem passa a perceber a Matemática como "um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la" (BRASIL, 2000, p. 40).

Outro documento oficial elaborado pela União com o intuito de padronizar o ensino no Brasil é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). De caráter normativo, a BNCC define o conjunto de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas por alunos ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Após os esforços do Conselho Nacional de Educação (CNE) para a elaboração da propostas até a homologação da sua 3ª versão em 2018, a BNCC passa agora pelo processo de implementação nas escolas de todas as Unidades Federativas do país. Pautada em princípios éticos, políticos e estéticos, "a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva" (site do MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO).

As discussões expressas nos PCNs sobre contextualização do ensino a fim de contribuir com a formação para a vida cotidiana também são contempladas na BNCC. Aqui, temos um foco ainda maior nas propostas que possibilitem uma visão mais integrada do ensino de Matemática, sem esquecer da sua aplicação prática à realidade. Nesse sentido, "é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 518). Entretanto, desmistificar a ideia de que a Matemática é apenas um conjunto de regras e técnicas, mas sim parte integrante da nossa cultura e da nossa história, ainda se apresenta como um grande desafio para a Educação.

Nessa perspectiva, além dos debates iniciais acerca dos princípios que norteiam as orientações curriculares, a BNCC divide as propostas por área do conhecimento que, por sua vez, subdividem-se em competências e habilidades. Para a área de Matemática e suas Tecnologias são estabelecidas 5 competências, e a cada uma delas são listadas habilidades, que juntas somam 45. Ao fazer a leitura do documento fica claro que a Matemática é um "componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar" (BURGO, 2015, p. 17).

Dentre os apontamentos descritos na BNCC, sugere-se que os estudantes do Ensino Médio desenvolvam:

> [...] habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 517).

Para tornar ainda mais prática toda sua proposta, a BNCC propõe algumas habilidades nas quais inter-relaciona toda a área da Matemática no Ensino Médio com o papel que os estas devem desempenhar ao serem abordadas. Conforme explana Lima (2019), das 45 habilidades de Matemática e suas Tecnologias apontadas pela BNCC, 11 são referentes ao estudo da Geometria. Lima (2019, p. 56 ) ressalta ainda que " todas as habilidades estão relacionadas a temas de relevância para a sociedade atual. O foco não está na quantidade de conteúdos que compõem o currículo, mas na qualidade da apropriação destes". É justamente sobre a subárea da Matemática denominada Geometria que trataremos na próxima seção.

## 2.3 Geometria plana: parte integrante do currículo

A Geometria é uma subárea da Matemática que nasceu da necessidade de medir terras. Desde a sua criação, seus pressupostos têm sido aplicados em diversas situações pelas sociedades, seja na divisão de terras em partes iguais, ou na confecção de artefatos de decoração, utensílios, desenhos ou até mesmo na criação de monumentos, como as pirâmides do Egito. Seus conteúdos estão divididos em três categorias, a saber: geometria plana, geometria espacial e geometria analítica.

Seus conceitos estudam as medidas e formas das figuras planas e dos objetos espaciais, as posições relativas de figuras no espaço, a superfície delimitada por uma região ou o volume de um poliedro ou corpo redondo, entre outros. Definições e axiomas são os pilares que sustentam esse conteúdo. Assim, toda sua estrutura é desenvolvida como uma consequência deles, tornando o conhecimento prévio das definições da Geometria fundamental em todo o processo de aprendizagem dessa subárea de estudo. Encontramos traços geométricos em diversos objetos ao nosso redor, seja na estrutura de um edifício, no formato de uma janela, na estrutura de uma ponte etc. Nesse sentido, é possível dizer que convivemos com a geometria em diversos aspectos do nosso cotidiano, o que a torna indispensável para a construção do pensamento crítico das pessoas.

Assim como os demais conteúdos descritos nos documentos quanto ao ensino da Matemática, a Geometria é uma área que está sempre presente no dia a dia do estudante. Ensinar Geometria é trabalhar em uníssono teoria e prática , em que cada cálculo realizado irá representar algo em sua realidade. Dessa forma, é imprescindível aprender com êxito todos os conceitos, abordando em conjunto os cálculos necessários para a resolução de questões. Rêgo, Rêgo e Gaudêncio Júnior (2018) confirmam tal posicionamento quando declaram:

> É, portanto, a partir da exploração de elementos ligados a realidade do aluno que as primeiras noções relativas aos elementos geométricos podem ser trabalhadas, incorporando-se sua experiência pessoal com os elementos do espaço e sua familiarização com as formas bi e tridimensionais, e interligando-as aos conhecimentos numéricos, métricos e algébricos que serão construídos. (RÊGO, RÊGO; GAUDENCIO JÚNIOR, 2018, p. 23).

Quando se trata da Geometria Plana, embora esta seja de grande importância na vida do aluno, ela está praticamente ausente no ensino de Matemática. Não é difícil encontrar relatos de professores que assumem sentir dificuldade em trabalhar tais conteúdos, de conseguir obter a compreensão do aluno, visto que é necessária uma visualização do que está sendo ensinado. Tudo isso exige que os ambientes de ensino possuam materiais concretos que facilitem esse processo, fato que não ocorre em grande parte das instituições, gerando um distanciamento entre Geometria Plana e as demais subáreas da Matemática.

O estudo da Geometria se faz em concordância com outros tópicos da Matemática no que se refere à articulação entre a teoria e a prática na grande maioria das situações-problema. Por exemplo, quando relaciona o cálculo de área e perímetro com a área de grandezas e medidas, ou quando abrange a trigonometria para obter um dado necessário para resolução de um problema geométrico. Por esse motivo, é importante que haja uma compreensão das mais diversas áreas da Matemática ao praticar a Geometria.

De acordo com a BNCC, "[a] Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2018, p. 271). É importante ressaltar que a área de Matemática e suas Tecnologias precisa assegurar as competências específicas, onde em cada uma dessas competências existem habilidades que precisam serem alcançadas. Das 45 habilidades, 6 são referentes ao ensino de Geometria Plana. O Quadro 1, a seguir, apresenta as habilidades do ensino médio apresentadas pela BNCC que abrangem a Geometria Plana.

Quadro 1: Habilidades da BNCC sobre Geometria Plana.

Continua

- (EM13MAT103) Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade;
- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras;

Quadro 1: Habilidades da BNCC sobre Geometria Plana.

Conclusão

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- (EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança;
- (EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas;
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de Geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados;
- (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica;
- (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

Fonte: [6].

A BNCC, em sua proposta para o Novo Ensino Médio, relata que os conteúdos escolares devem despertar, sobretudo, o amadurecimento cidadão dos estudantes. Desse modo, faz com que estes passem a intervir na comunidade onde estão inseridos, participando diretamente das ações sociais desenvolvidas. No que se refere à Geometria não é diferente, o documento deixa claro a atuação desse conteúdo para a construção crítica e social dos aprendizes. Além disso, uma preparação adequada dos estudantes aumenta a sua propabibilidade de ingressar no Ensino Superior, que tem o Enem como um dos processos de admissão mais conhecidos nacionalmente. Trataremos sobre a disposição da Geometria Plana nas edições do exame em questão na seção que se segue.

## 2.4 Geometria Plana no ENEM

É sabido que as transformações sociais ocorridas no mundo têm exigido cada vez mais profissionais capacitados e competentes para atuarem nas diversas áreas do conhecimento. Quando se trata da sua formação, um dos principais requisitos para os potenciais candidatos ao mercado de trabalho é o ensino superior. De acordo com Delors et al (2003), o nível superior ocupa um espaço determinante no nosso crescimento, tendo vistas que “num mundo em que os recursos cognitivos, enquanto fatores de desenvolvimento, tornam-se cada vez mais importantes do que os recursos materiais a importância do ensino superior e das suas instituições será cada vez maior” (p. 140). Assim, faz-se necessário pensar acerca da preparação desses estudantes que pretendem se submeter a exames de admissão como o Enem, principal modo de acesso ao nível superior em terras tupiniquins.

No ano de 1998, com o intuito de avaliar os parâmetros educacionais do Ensino Médio Brasileiro, o Ministério da Educação (MEC) criou o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A sua primeira edição computou um pouco mais de 150.000 inscritos, no dia 20 de agosto daquele ano, com uma taxa de inscrição de R$ 20,00 e apenas com duas instituições aceitando suas notas para o ingresso no Ensino Superior. Sua formatação era bem mais simples, contando com apenas 63 questões em um único dia de prova. Com o sucesso da aplicação, no ano seguinte 93 instituições de nível superior aderiram aos resultados do Enem para preencher vagas em seus cursos, ampliando, assim, o número de candidatos interessados na avaliação, sendo necessária uma cooperação com a estatal Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos para efetuar as inscrições.

Com a virada do milênio, houve mudanças significativas no exame, como as inscrições pela internet e a isenção da taxa de inscrição para concluintes do ensino médio oriundos da rede pública. O Enem atingiu a marca surpreendente de mais de 1,5 milhões de inscritos, confirmando o seu sucesso e garantindo um futuro promissor para essa nova modalidade de vestibular. No ano de 2009, o Enem passa a ser a principal porta de entrada nas universidades brasileiras, com a concepção do SISU, Sistema de Seleção Unificada. No mesmo ano, vale ressaltar, ele passa por uma reformulação que o deixa nos moldes atuais: 180 questões de múltipla escolha, divididas em quatro áreas e com aplicação em dois dias de prova distintos, atingindo a marca de, aproximadamente, 4,5 milhões de inscritos.

Já em meados de 2013, o Enem consegue ser aplicado em quase todas as cidades do Brasil, e dessa vez também ganha destaque internacional, já que a nota do exame consegue ser usada para programas de intercâmbio como o Ciência Sem Fronteiras e a Universidade de Coimbra, em Portugal, que também passa a admitir alunos brasileiros através da nota da prova. Nesse contexto, surgem dois programas que ajudaram a consolidar o Enem como principal veículo de acesso ao ensino superior: O Fies e o Prouni, haja vista que conseguiram democratizar ainda mais o acesso à educação de todas as classes sociais brasileiras.

Assim, é possível destacar as diversas mudanças que o Enem realizou no cenário educacional do país quando se trata do ingresso de estudantes nas universidades brasileiras. Antes do surgimento do exame, de natureza unificada, os candidatos precisavam mapear todas as universidades que ofertavam os cursos de sua preferência, deslocar-se quilômetros para a realização das provas nas instituições outrora escolhidas, sem contar que, muitas vezes, as datas de alguns vestibulares coincidiam, reduzindo as chances dos candidatos. Dessa forma, é notório que o Enem modernizou e melhorou a experiência dos proponentes que buscam uma oportunidade para adentrar no nível superior, trazendo acesso democrático às vagas de universidades públicas e privadas em todo o território nacional, sem necessidade de grandes deslocamentos na maioria dos casos.

Para tanto, é preciso estar bem preparado. Muitos estudantes acreditam que o fato de não aprender um determinado assunto possa não influenciar tanto no resultado, visto que a lista de conteúdos é extensa. Esse pensamento resulta na acomodação do candidato e, consequentemente, acaba por prejudicá-lo, pois é preciso boa preparação em todas as áreas para se ter um ótimo desempenho no exame. Não é diferente quando se trata de Matemática, como apontam as orientações da BNCC:

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 471)

Além de considerar tópicos corriqueiramente discutidos ao longo do Ensino Médio, o espaço destinado à Matemática no Enem conta também com uma quantidade considerável de questões em Geometria. Após analisar os conteúdos encontrados nas questões dos exames realizados no período de 2009 a 2021, foi constatado que a Geometria Plana abrange cerca de 10,6% das questões de Matemática. Ademais, depois de uma reflexão feita em relação às médias do Enem na área de Matemática e suas Tecnologias, observamos que, nas últimas 7 provas realizadas, a média geral de Matemática não ultrapassou 540 pontos. Tal média mostra-se insatisfatória, visto que, de acordo com a Teoria de Resposta ao Item (TRI) - algoritmo usado pelo Enem para corrigir e dar nota às questões da prova, essa área atinge a nota máxima mais elevada entre as quatro áreas do conhecimento requeridas no exame.

A prova do Enem espera que os candidatos consigam fazer uma articulação do conhecimento adquirido em todos os anos de estudo com resoluções de situações-problema do cotidiano, que seja feita uma relação da Geometria Plana e Espacial, principalmente, relacionando o espaço tridimensional com o plano bidimensional, ou ainda que estejam aptos para resolver contextos que envolvam o cálculo de perímetro e área associados com resultados de grandezas e medidas. De acordo com Alcântara, Sousa e Lima (2015), das 225 questões de Matemática e suas Tecnologias das provas de 2009 a 2013, cerca de 25% são voltados para a área de Geometria em geral.

Dessa maneira, sempre que professores e alunos tiverem o objetivo de realizar um estudo voltado para a Geometria cobrada nas provas do Enem, devem então iniciar correlacionando conhecimento e prática numa abordagem indissociável, pois essa será a estrutura básica encontrada em tal exame. É de extrema importância estudar a teoria e a prática com a mesma ênfase, pois não há cálculo sem que antes se saiba ao que se refere o estudo e, por outro lado, a teoria de nada serve caso senão para pô-la em prática. Apesar de este ser o que consideramos ideal, nem sempre é o que se observa nas salas de aula dos sistemas de ensino brasileiro.

Com o intuito de mudar essa realidade, surgiu a ideia de produzir uma apostila, visando apoiar pedagogicamente os estudantes do curso preparatório para o Enem Edificar, que faz parte das atividades do Programa Edifique Ações, vinculado à extensão da Universidade Federal do Cariri. Esse material será construído dando ênfase à importância do estudo de Geometria Plana para a resolução de questões do Enem. Tal instrumento será composto por esclarecimentos de cunho teórico e questões solucionadas e comentadas, caracterizando-se como um excelente suporte para os estudantes que têm como meta obter aprovação no exame. Os conceitos apresentados e discutidos nos capítulos que seguem são parte integrante da apostila outrora pensada, que, quando reunidos, formam o produto pedagógico fruto desta dissertação.

# Capítulo 3

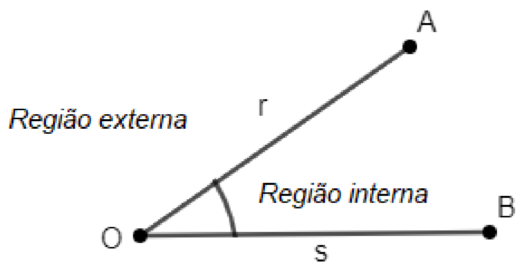
# ALGUNS CONCEITOS DA GEOMETRIA PLANA RECORRENTES NO ENEM

## 3.1 Ângulos

### 3.1.1 Conceito

É a região, interna ou externa, formada a partir de duas semirretas de mesma origem, ou dois segmentos[1] de mesmos extremos.

Figura 3.1: Ângulo - conceito.




Fonte: [42].

Observe na imagem (Figura 3.1), que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ possuem um extremo em comum, o ponto $O$, e eles formam duas regiões: a menor, considerada região interna, e a maior, região externa, essa ideia de região interna e externa é relativa e depende da compreensão da leitura de cada questão.

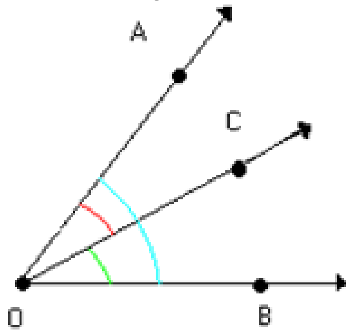
Neste trabalho, todo ângulo possui indicação $A\widehat{O}B$ ou $\widehat{O}$, vértice (é o ponto $O$, a origem das semirretas), e os lados (que, dependendo do problema, podem ser semirretas ou segmentos) que o formam, no caso acima são os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

[1] Usaremos a notação $\overline{AB}$ para indicar um segmento de extremos $A$ e $B$ e $AB$ para representar sua medida.

### 3.1.2 Ângulos Consecutivos

São dois ângulos distintos que possuem o mesmo vértice e um lado em comum. Veja a Figura 3.2, temos três casos de ângulos consecutivos: primeiro são os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{O}C$ (possuem o lado $\overrightarrow{OA}$ em comum), segundo os ângulos $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}C$ (possuem o lado $\overrightarrow{OC}$ em comum) e, finalmente, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}B$ (possuem o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum).

Figura 3.2: Ângulos consecutivos.




Fonte: [43].

### 3.1.3 Ângulos Adjacentes

São dois ângulos distintos que possuem o mesmo vértice, um lado em comum e não têm pontos em comum na região interna. No caso acima, Figura 3.2, apenas os ângulos $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}B$ são adjacentes, os outros dois casos possuem pontos em comum na região interna.

### 3.1.4 Ângulo reto

São ângulos cuja medida é exatamente $90°$Ele possui um símbolo representativo para identificação.

**Observação:** O ângulo reto aparece quando temos duas retas perpendiculares, elas se cruzam em um único ponto formando $4$ ângulos retos entre si. Outro caso que ocorre o ângulo reto é no segmento que representa a altura de polígonos, ou a distância entre duas retas.

**Terminologia:** é comum nos livros didáticos identificar um ângulo com sua medida. Aqui seguiremos esta identificação.

### 3.1.5 Ângulo agudo

São ângulos cuja medida é menor que $90°$.

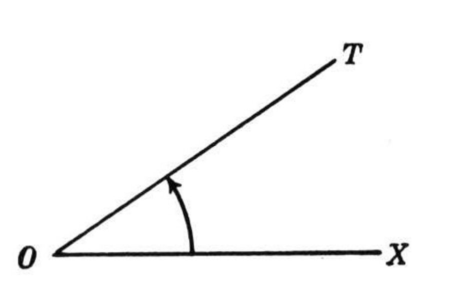
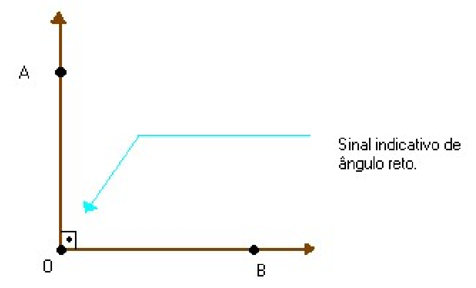
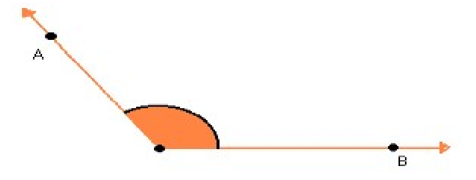
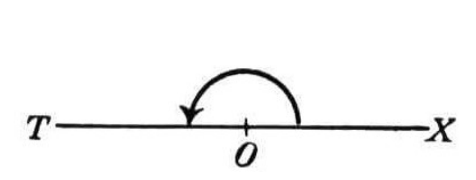
### 3.1.6 Ângulo obtuso

São ângulos cuja medida se encontra entre $90°$ e $180°$, ou seja, a medida é maior que $90°$ e menor que $180°$.

### 3.1.7 Ângulo raso

Ângulo cuja medida é $180°$. É formado por duas semirretas opostas. Pode ser identificado também por representar a metade de uma volta. Veja o Quadro 2 abaixo um exemplo de cada um desses tipos de ângulos.

Quadro 2: Tipos de ângulos: reto, agudo, obtuso e raso.

| **Agudo** | **Reto** |
|---|---|
|  |  |
| **Obtuso** | **Raso** |
|  |  |

Fonte: Adaptado de [44] e de [45].

### 3.1.8 Ângulo nulo

Ângulo formado por semirretas coincidentes, logo sua medida é $0°$.

**Observação:** Vale ressaltar o sentido de formação de um ângulo, que pode ser no sentido horário, ou da esquerda para a direita, ou ainda no sentido anti-horário, da direita para a esquerda. Essa informação é de grande relevância na compreensão adequada do contexto de problemas, principalmente em questões do ENEM que resgatam o conhecimento acerca dos ângulos.

### 3.1.9 Ângulos complementares

São dois ângulos cuja a soma das medidas vale $90°$.

**Exemplo 1.** *(AMEOSC – 2021) Dados os ângulos $x$ e $y$, em que $x$ é igual a $30°$. Se são ângulos complementares, é correto afirmar que $y$ é igual a:*

***A)*** $45°$

***B)*** $60°$

***C)*** $90°$

***D)*** $150°$

**Solução:** A questão informa que $x$ e $y$ são complementares, logo a soma entre eles resulta em $90°$: $x + y = 90°$, como $x = 30°$, então:

$$\begin{aligned} x + y = 90° &\implies 30° + y = 90° \\ &\implies y = 60°. \end{aligned}$$

RESPOSTA: LETRA B.

### 3.1.10 Ângulos suplementares

São dois ângulos cuja a soma das medidas é $180°$.

**Exemplo 2.** *(FEPESE – 2022) O ângulo, em graus, cujo triplo do complementar excede o suplementar em* $36$ *graus é:*

***A)*** *Maior que* $31$.
***B)*** *Maior que* $28$ *e menor que* $31$.
***C)*** *Maior que* $25$ *e menor que* $28$.
***D)*** *Maior que* $22$ *e menor que* $25$.
***E)*** *Menor que* $22$.

**Solução:** Considerando o ângulo procurado como $\alpha$ e chamando seu complementar de $c$ e seu suplementar de $s$, temos, de acordo com a questão, que:

$$3 \cdot c = s + 36° \implies s = 3c - 36°.$$

Como a questão fala em complementar e suplementar, então as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{cases} \alpha + c = 90° \\ \alpha + s = 180° \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos:

$$\alpha + s - \alpha - c = 180° - 90° \implies s - c = 90°.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} s - c = 90° &\implies 3c - 36° - c = 90° \\ &\implies 2c = 126° \\ &\implies c = 63°. \end{aligned}$$

Substituindo $c$:

$$\begin{aligned} \alpha + c = 90° &\implies \alpha + 63° = 90° \\ &\implies \alpha = 27°. \end{aligned} \tag{3.1}$$

RESPOSTA: LETRA C.

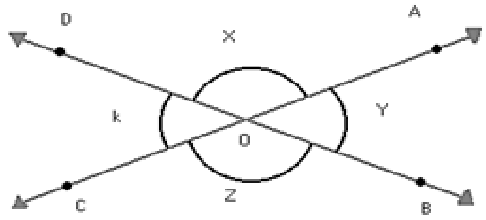
### 3.1.11 Ângulos congruentes

Dois ângulos, $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{D}E$, são congruentes se possuem a mesma medida. Isto será indicado por $A\widehat{O}B \equiv C\widehat{D}E$.

### 3.1.12 Ângulos opostos pelo vértice (O.P.V.)

São dois ângulos que possuem a mesma origem e os lados de um deles são semirretas opostas do outro. Na Figura 3.3, $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são opostos pelo vértice. Vale notar que $A\widehat{O}D$ e $B\widehat{O}C$ também são opostos pelo vértice.

Figura 3.3: Ângulos opostos pelo vértice (O.P.V).




**Proposição 1.** *Se dois ângulos são opostos pelo vértice (O.P.V.), então eles têm medidas iguais.*

**Demonstração:** Veja a figura acima, os ângulos $x$ e $z$ são opostos pelo vértice. Repare que $x$ e $y$ são suplementares, pois juntos determinam uma reta, formando um ângulo de $180°$. Analogamente, $z$ e $y$ também suplementares, logo:

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ z + y = 180° \end{cases}$$

Visto que as duas equações são iguais ao mesmo valor, podemos igualá-las:

$$x + y = z + y \Longrightarrow x = z.$$

Portanto $x$ e $y$ são congruentes.

**Exemplo 3.** *(IFMA-modificada) Considerando-se que* $5x - 40°$ *e* $3x - 10°$ *são opostos pelo vértice, o complemento de um desses ângulos mede:*

***A)*** $55°$

***B)*** $75°$

***C)*** $145°$

***D)*** $65°$

***E)*** $155°$

**Solução:** Usando a congruência de ângulos opostos pelo vértice, temos:

$$\begin{aligned} 5x - 40° = 3x - 10° &\implies 2x = 30° \\ &\implies x = 15°. \end{aligned}$$

Veja que a questão está pedindo o complementar desse ângulo, logo, considerando $c$ o complementar:

$$c + 15° = 90° \implies c = 75°.$$

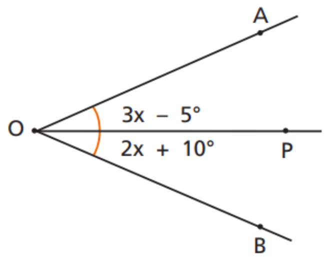
RESPOSTA: LETRA B.

### 3.1.13 Bissetriz de um ângulo

É uma semirreta com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

**Exemplo 4.** *(Fundamentos de Matemática Elementar Vol.9) Se $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $A\widehat{O}B$, determine $x$ no caso:*

Figura 3.4: Ângulos: bissetriz.




Fonte: [46].

**Solução:** Conforme informado na questão, se $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz, então os ângulos $3x - 5°$ e $2x + 10°$ são congruentes, logo:

$$\begin{aligned} 3x - 5° = 2x + 10° &\implies 3x - 2x = 10° + 5° \\ &\implies x = 15°. \end{aligned}$$

## 3.2 Triângulos

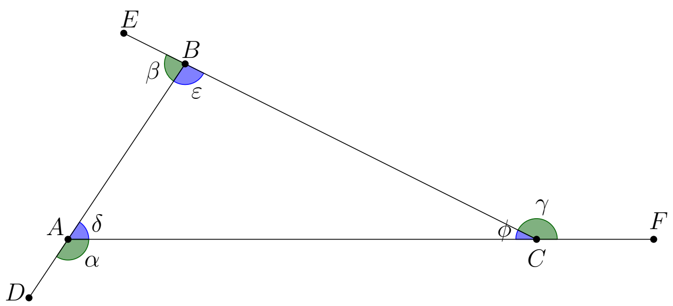
Conceito: Tomando três pontos não colineares $A$, $B$ e $C$, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, formam um triângulo. É um polígono que possui três lados e é indicado por $ABC$. Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do triângulo e as suas medidas serão, respectivamente, $AB$, $AC$ e $BC$.

### 3.2.1 Elementos do triângulo

Os elementos são as características apresentadas em todo triângulo, que são os lados (segmentos que formam o triângulo), os vértices (extremos dos segmentos), ângulos internos (ângulo formado, na região interna do triângulo, entre dois lados consecutivos) e ângulos externos (ângulo suplementar e adjacente de cada ângulo interno).

**Exemplo 5.** *Identifique os elementos do triângulo $ABC$:*

Figura 3.5: Elementos do triângulo.




Fonte: Adaptado de [46].

**Solução:** Da Figura 3.5, temos
Lados: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
Vértices: $A$, $B$ e $C$.
Ângulos internos: $B\widehat{A}C$, $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$.
Ângulos externos: $C\widehat{A}D$, $A\widehat{B}E$ e $B\widehat{C}F$.

### 3.2.2 Classificação

Há dois modos de classificar os triângulos. A primeira é de acordo com a medida de cada um dos lados e a segunda de acordo com as medidas dos ângulos internos. Dessa forma, cada triângulo pode receber duas classificações que irão informar detalhes acerca das medidas dos seus ângulos internos e dos seus lados.

#### 3.2.2.1 Quanto aos lados

*Escaleno:* triângulos que possuem os três lados com medidas distintas.

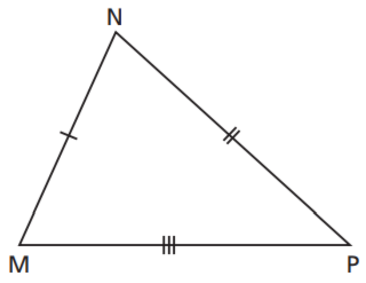
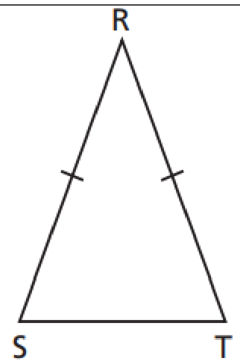
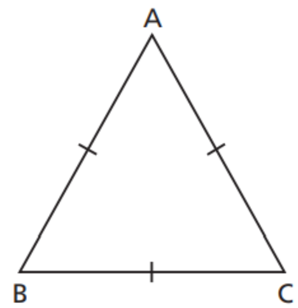
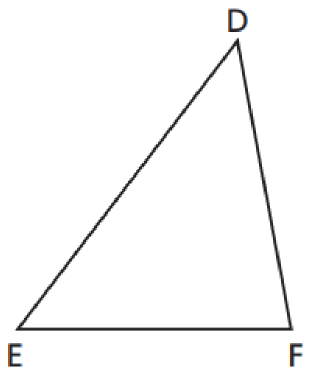
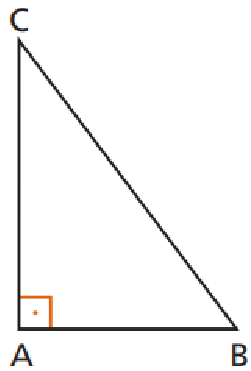
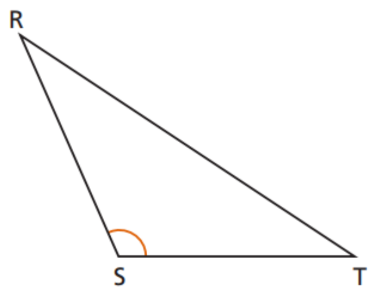
*Isósceles:* triângulos que possuem pelo menos dois lados congruentes (que possuem a mesma medida) o terceiro lado pode ser ou não congruente e ele é chamado de base do triângulo isósceles.
*Equilátero:* triângulos que possuem os três lados congruentes.

#### 3.2.2.2 Quanto aos ângulos internos

*Acutângulo:* Triângulos que possuem os três ângulos internos agudos.
*Retângulo:* Triângulos que possuem um ângulo interno reto; No triângulo retângulo, o maior lado, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa e os outros dois lados, adjacentes ao ângulo reto, são chamados de catetos.
*Obtusângulo:* triângulos que possuem um dos ângulos internos obtuso;

No Quadro 3 há uma exemplificação de cada triângulo de acordo com sua classificação. Na primeira linha estão os classificados quanto aos lados e na segunda, aos ângulos.

Quadro 3: Classificação dos triângulos: lados e ângulos.

| **Escaleno** | **Isósceles** | **Equilátero** |
|---|---|---|
|   |   |   |
| **Acutângulo** | **Retângulo** | **Obtusângulo** |
|   |   |   |

Fonte: Adaptado de [46].

**Exemplo 6.** *(Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 9) O triângulo $ABC$ é equilátero. Determine $x$ e $y$ sabendo que $AB = 15 - y$, $BC = 2x - 7$ e $AC = 9$.*

**Solução:** Visto que $ABC$ é um triângulo equilátero então, por definição, os três lados são congruentes e podemos fazer:

$$\begin{aligned} AB \equiv AC &\implies 15 - y = 9 \\ &\implies 15 - 9 = y \\ &\implies 6 = y. \end{aligned}$$

Usando a mesma ideia para encontra o valor de $x$, temos:

$$\begin{aligned} BC \equiv AC &\implies 2x - 7 = 9 \\ &\implies 2x = 16 \\ &\implies x = 8. \end{aligned}$$

**Observação:** a desigualdade triangular estabelece que a medida de qualquer lado de um triângulo deve ser sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

**Exemplo 7.** *(Portal OBMEP – modificada - Desigualdades) A desigualdade triangular afirma que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois. É possível demonstrar a partir desta propriedade que se o maior dentre três segmentos é menor que a soma dos outros dois então existe um triângulo formado por tais segmentos. Nos itens abaixo, decida se existe um triângulo com as medidas dadas. Justifique sua resposta.*

***A)*** $4\,\text{cm}$, $5\,\text{cm}$ *e* $6\,\text{cm}$.

***B)*** $7\,\text{cm}$, $3\,\text{cm}$ *e* $3\,\text{cm}$.

***C)*** $4\,\text{cm}$, $4\,\text{cm}$ *e* $8\,\text{cm}$.

***D)*** $3\,\text{cm}$, $3\,\text{cm}$ *e* $4\,\text{cm}$.

***E)*** $6\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ *e* $6\,\text{cm}$.

**Solução:** A aplicação da propriedade se torna mais simples quando é feita a soma das medidas dos dois menores e compara com a medida lado de maior comprimento, dessa forma, analisando cada item

***A)*** $4 + 5 > 6$, sim.

***B)*** $3 + 3 < 7$, não forma triângulo.

***C)*** $4 + 4 = 8$, não forma triângulo.

***D)*** $3 + 3 > 4$, sim.

***E)*** $6 + 6 > 6$, sim.

### 3.2.3 Congruência de triângulos

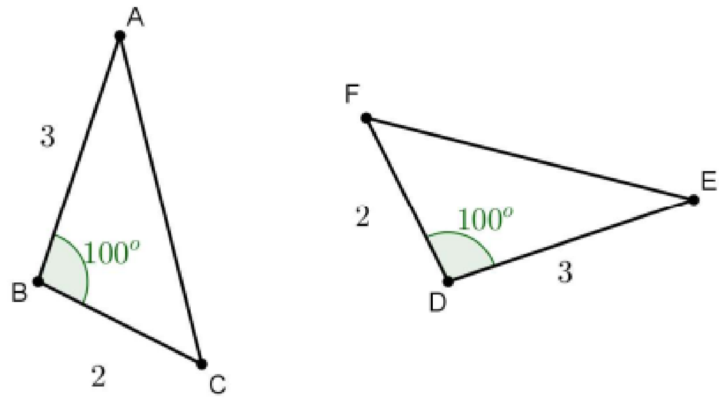
Dois triângulos são congruentes quando seus lados correspondentes são congruentes e seus ângulos correspondentes também são congruentes. Serão explicados 5 casos de congruência de triângulos. São casos que, quando satisfeitos, conclui-se que os triângulos são congruentes, satisfazendo a ideia de congruência entre os lados e os ângulos correspondentes. Temos os seguintes critérios para estabelecer a congruência de triângulos.

#### 3.2.3.1 1º caso: lado, ângulo, lado (L.A.L.)

Sempre que dois triângulos possuem dois pares de lados congruentes e o ângulo formado entre esses dois lados também congruentes, então os dois triângulos são congruentes.

**Exemplo 8.** *(Portal OBMEP – Congruência de Triângulos e Aplicações) Os triângulos ao lado são congruentes pelo caso LAL. Determine os lados homólogos e os vértices correspondentes desta congruência.*

Figura 3.6: Triângulos Congruentes: caso L.A.L.




Fonte: [27].

**Solução:** Veja que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são congruentes pois $AB = 3 = DE$. Analogamente, $BC = 2 = FD$, logo $\overline{BC}$ é congruente a $\overline{FD}$. O Ângulo compreendido entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ tem medida igual a $30°$ que é a mesma medida do ângulo compreendido entre os lados $DE$ e $DF$, logo, pelo caso L.A.L. os triângulos $ABC$ e $DEF$ são congruentes e:

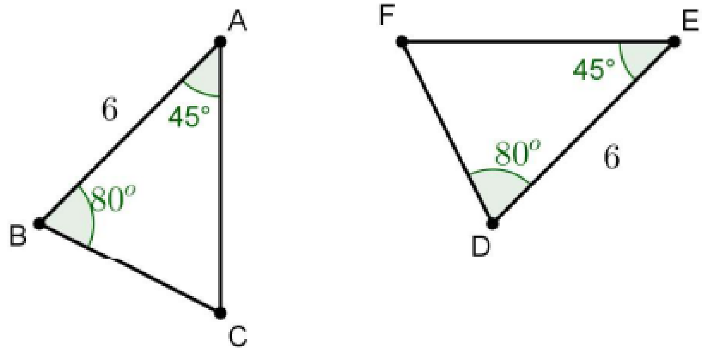
$$\begin{aligned} AB &\equiv DE \\ BC &\equiv DF \\ AC &\equiv FE \\ \widehat{A} &\equiv \widehat{E} \\ \widehat{B} &\equiv \widehat{D} \\ \widehat{C} &\equiv \widehat{F} \end{aligned}$$

#### 3.2.3.2 2º caso: ângulo, lado, ângulo (A.L.A.)

Sempre que dois triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes e o lado adjacente a esses dois ângulos também for congruente, então os dois triângulos são congruentes e vale a congruência entre os ângulos e os lados ordenadamente.

**Exemplo 9.** *(Portal OBMEP – Congruência de Triângulos e Aplicações) Os triângulos $ABC$ e $DEF$ são congruentes?*

Figura 3.7: Representação do Exemplo 9.




Fonte: [27].

**Solução:** Observe que os ângulos $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{E}F$ são congruentes pois ambos têm medida de $45°$. Analogamente, os ângulos $A\widehat{B}C$ e $E\widehat{D}F$, também são congruentes e ambos medem $80°$. O lado adjacente aos ângulos $B\widehat{A}C$ e $A\widehat{B}C$ tem medida igual a $6$. O lado adjacente aos ângulos $D\widehat{E}F$ e $E\widehat{D}F$, também tem medida igual a 6, assim, pelo caso A.L.A. os triângulos $ABC$ e $DEF$ são congruentes.

#### 3.2.3.3 3º caso: lado, lado, lado (L.L.L.)

Quando dois triângulos possuem três pares de lados ordenadamente congruentes então os dois triângulos são congruentes.

#### 3.2.3.4 4º caso: lado, ângulo, ângulo oposto (L.A.A$_0$)

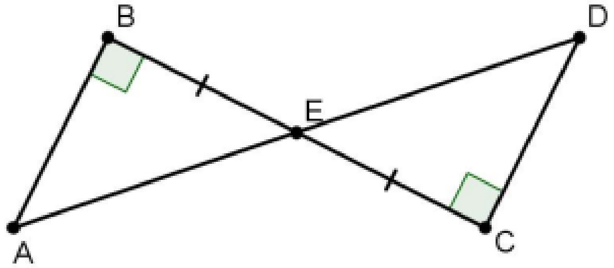
Sempre que dois triângulos possuem, ordenadamente, um lado, um ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto a esse lado congruentes, então os dois triângulos também são congruentes.

#### 3.2.3.5 5º caso: caso especial de congruência de triângulos retângulos

Sempre que dois triângulos retângulos possuem um cateto e uma hipotenusa ordenadamente congruentes, então os dois triângulos retângulos são congruentes.

**Exemplo 10.** *(Portal OBMEP - Congruência de Triângulos e Aplicações) Na figura, temos* $AB = 30$*,* $DE = 50$*,* $AE = 3x - 1$ *e* $CD = 2y + 8$*. Determine os valores de* $x$ *e* $y$*.*

Figura 3.8: Triângulos retângulos congruentes.




**Solução:** Veja que os ângulos $A\widehat{E}B$ e $D\widehat{E}C$ são opostos pelo vértice, com isso, pode-se concluir que são congruentes. Os ângulos $A\widehat{B}E$ e $D\widehat{C}E$ são retos e, pela figura, os lados $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$ que são adjacentes aos ângulos $A\widehat{B}E$ e $A\widehat{E}B$ e aos ângulos $C\widehat{E}B$ e $D\widehat{C}E$, respectivamente, são congruentes, portanto, pelo caso A.L.A. os triângulos $AEB$ e $DEC$ são congruentes. Relacionando as medidas dos lados homólogos, temos:

$$\begin{aligned} AE \equiv DE &\implies 3x - 1 = 50 \\ &\implies 3x = 51 \\ &\implies x = 17. \end{aligned}$$

Analogamente,

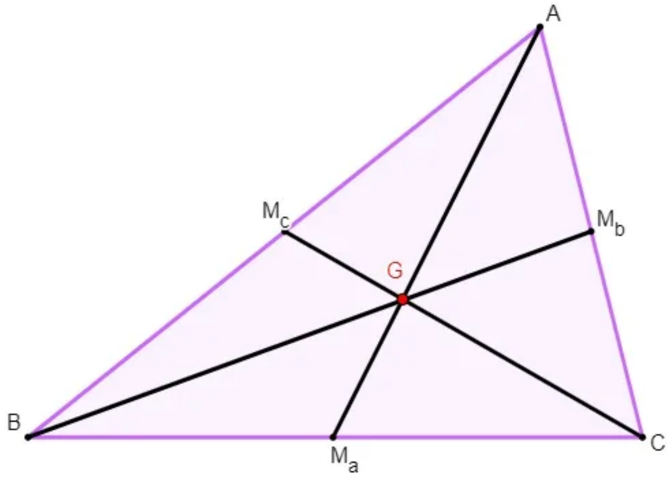
$$\begin{aligned} AB \equiv CD &\implies 2y + 8 = 30 \\ &\implies 2y = 22 \\ &\implies y = 11. \end{aligned}$$

### 3.2.4 Mediana de um triângulo

É um segmento que possui uma das extremidades em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade fica no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

**Baricentro:** as três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto. Esse ponto é chamado de baricentro. Na Figura 3.9, $M_a$, $M_b$ e $M_c$ são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, e o ponto $G$ é o baricentro do triângulo $ABC$.

Figura 3.9: Baricentro.




Fonte: [47].

Vale ressaltar ainda que o ponto $G$ divide cada uma das medianas em duas partes que satisfazem as duas igualdades que serão apresentadas usando os dados da Figura 3.9, acima:

$$\frac{GM_a}{GA} = \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{GM_a}{AM_a} = \frac{1}{3}$$

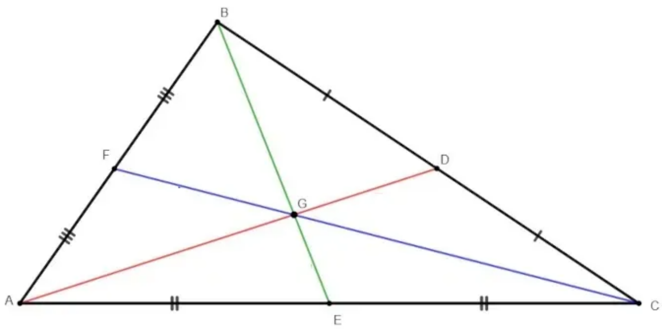
ou ainda

$$\frac{AG}{AM_a} = \frac{2}{3}.$$

Essas razões se estendem às outras medianas.

**Exemplo 11.** *Em um triângulo foram traçadas as medianas, como na imagem a seguir:*

Figura 3.10: Baricentro, exemplo.




Fonte: [48].

*Conhecendo os valores* $AC = 48\,\text{cm}$, $BE = 24\,\text{cm}$ *e* $AD = 30\,\text{cm}$, *pode-se afirmar que o perímetro do triângulo* $AGE$ *é igual a*

***A)*** $18\,\text{cm}$.

***B)*** $24\,\text{cm}$.

***C)*** $32\,\text{cm}$.

***D)*** $48\,\text{cm}$.

***E)*** $52\,\text{cm}$.

**Solução:** Note que, no triângulo $AGE$, o lado $\overline{AG}$ é o segmento maior da mediana $\overline{AD}$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} = \frac{AG}{30} \quad &\Longrightarrow \quad 3 \cdot AG = 60 \\ &\Longrightarrow \quad AG = 20\,\text{cm}\,. \end{aligned}$$

O ponto $E$ é ponto médio do lado $AC$, logo:

$$AE = \frac{AC}{2} \quad \Longrightarrow \quad AE = \frac{48}{2} = 24\,\text{cm}\,.$$

O lado $GE$ é o segmento menor da mediana $BE$, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{GE}{BE} = \frac{1}{3} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{GE}{24} = \frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \quad 3 \cdot GE = 24 \\ &\Longrightarrow \quad GE = 8\,\text{cm}\,. \end{aligned}$$

Finalmente o perímetro do triângulo $AGE$ será:

$$AG + AE + GE = 20 + 24 + 8 = 52\,\text{cm}\,.$$

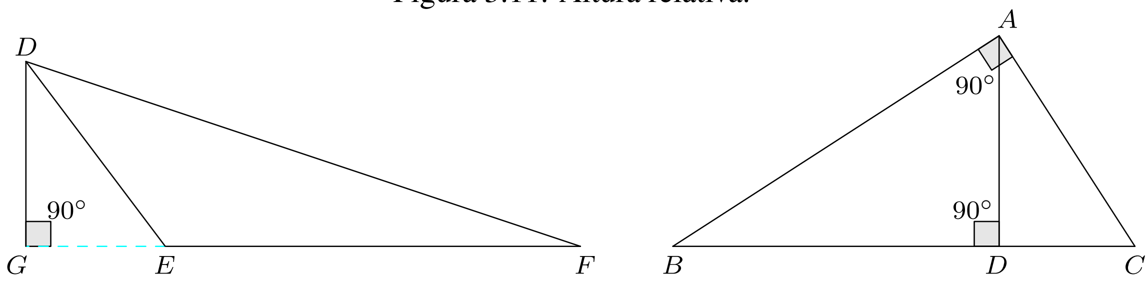
RESPOSTA: LETRA E.

### 3.2.5 Altura de um triângulo

É o segmento com um dos extremos em um dos vértices do triângulo e o outro extremo no lado oposto a esse vértice ou em uma projeção do lado oposto, formando um ângulo reto com esse lado.

Nos casos abaixo, o triângulo $DEF$ tem altura $\overline{DG}$, já o segundo triângulo $ABC$ possui altura $\overline{AD}$.

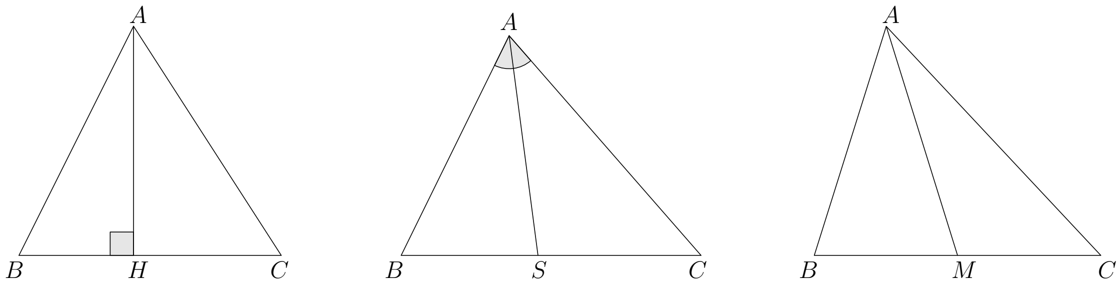
Figura 3.11: Altura relativa.




Fonte: O autor.

**Exemplo 12.** *(Instituto Machado de Assis – 2018) Analise os triângulos abaixo e suas definições e marque a opção com a sequência correta.*

Figura 3.12: Altura relativa, exemplo.




Fonte: O autor.

***A)*** *$\overline{AH}$ = Bissetriz, $\overline{AS}$ = Altura, $\overline{AM}$ = Mediana.*

***B)*** *$\overline{AH}$ = Mediana, $\overline{AS}$ = Bissetriz, $\overline{AM}$ = Altura.*

***C)*** *$\overline{AH}$ = Altura, $\overline{AS}$ = Bissetriz, $\overline{AM}$ = Mediana.*

***D)*** *$\overline{AH}$ = Bissetriz, $\overline{AS}$ = Mediana, $\overline{AM}$ = Altura.*

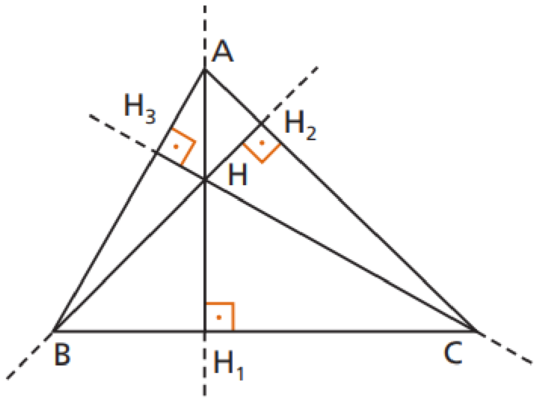
**Solução:** Analisando o primeiro triângulo, observamos que $\overline{AH}$ é um segmento que possui extremo no vértice $A$ do triângulo $ABC$ e forma um ângulo reto com o lado oposto ao ângulo $B\widehat{A}C$, lado $\overline{BC}$, logo $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, por definição. No segundo triângulo, percebemos que $\overline{AS}$ é o segmento que divide o ângulo interno $B\widehat{A}C$, do triângulo $ABC$, em duas partes iguais, logo $\overline{AS}$ é bissetriz interna relativa ao Ângulo $B\widehat{A}C$. Finalmente, no terceiro triângulo, observamos que $\overline{AM}$ possui um dos extremos no vértice $A$, do triângulo $ABC$, e o outro extremo divide o lado $\overline{BC}$ em duas partes iguais, assim $\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

RESPOSTA: LETRA C.

Nesse ponto será apresentado um estudo mais detalhado das características encontradas nos principais triângulos abordados nas questões do ENEM.

**Ortocentro:** as três alturas de um triângulo se intersectam em um único ponto. Esse ponto é chamado de ortocentro. Observe a Figura 3.13, abaixo.

Figura 3.13: Ortocentro.




Fonte: [46].

O ponto $H$ é o ortocentro do triângulo $ABC$.

### 3.2.6 Triângulo Isósceles

**Propriedade 1.** *Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

**Demonstração:** Seja $ABC$ um triângulo isósceles com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ congruentes e base $\overline{BC}$. Comparando o triângulo $ABC$ com o mesmo triângulo, mas com a ordem dos vértices da base inversa, $ACB$. Veja que os lados $\overline{AB}$ do primeiro triângulo com o lado $\overline{AC}$ do segundo triângulo, são congruentes por definição, analogamente, os lados $\overline{AC}$ do primeiro triângulo e $\overline{AB}$ do segundo também são congruentes. Observe ainda que o ângulo $B\widehat{A}C$, formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, está presente nos dois triângulos, então são congruentes. Dessa forma, pelo caso L.A.L. os dois triângulos, $ABC$ e $ACB$, são congruentes e os ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ são congruentes.

□

**Propriedade 2.** *A mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também uma bissetriz nesse triângulo.*

**Demonstração:** Seja o triângulo isósceles $ABC$ de base $\overline{BC}$, seja $O$ o ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{AO}$ a mediana relativa à base $\overline{BC}$.

Analisando os triângulos $AOB$ e $AOC$ tem-se que $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ pois $O$ é o ponto médio. $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ pois são os lados congruentes do triângulo isósceles $ABC$ e ainda $A\widehat{B}O \equiv A\widehat{C}O$ pois são os ângulos congruentes do triângulo $ABC$. Observe que, pelo caso L.A.L., os triângulos $ABO$ e $ACO$ são congruentes e $O\widehat{A}C \equiv O\widehat{A}B$, portanto $AO$ também é bissetriz de $ABC$ relativa ao ângulo $\widehat{A}$.

□

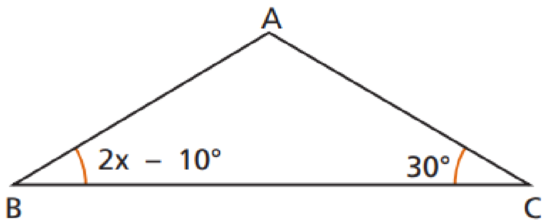
**Propriedade 3.** *A altura relativa à base do triângulo isósceles é também a mediana relativa à base desse triângulo.*

**Demonstração:** Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, seja $\overline{AD}$ a altura desse triângulo relativa à base $\overline{BC}$. Analisando os triângulos $ADB$ e $ADC$ percebe-se que os lados $AB$ e $AC$ são congruentes, que os ângulos $A\widehat{B}D$ e $A\widehat{C}D$ também são congruentes, por serem do triângulo isósceles $ABC$, e que eles são triângulos retângulos em $\widehat{D}$, dessa forma, pelo caso L.A.L$_0$. os triângulos $ADB$ e $ADC$ são congruentes, assim os lados $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ são congruentes e $\overline{AD}$ é mediana relativa à base $\overline{BC}$.

□

**Exemplo 13.** *(Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 9) Se o triângulo $ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine o valor de $x$.*

Figura 3.14: Triângulo isósceles, exemplo.




Fonte: [46].

**Solução:** Considerando que o triângulo $ABC$ é isósceles, então $A\widehat{B}C \equiv A\widehat{C}B$, portanto:

$$\begin{aligned} 2x - 10^\circ = 30^\circ \quad &\Longrightarrow \quad 2x = 20^\circ \\ &\Longrightarrow \quad x = 10^\circ. \end{aligned}$$

### 3.2.7 Triângulo retângulo

Um dos resultados mais importantes e avaliados em todo tipo de prova, seja de concurso, olimpíadas de matemática, ENEM, vestibulares entre outros é o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, que é um resultado que só é válido nos triângulos retângulos.

Seja $ABC$ um triângulo retângulo de hipotenusa $a$ e catetos $b$ e $c$. O Teorema de Pitágoras conclui que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, assim:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

**Exemplo 14.** *(OBJETIVA – 2021) Sabe-se que a hipotenusa de certo triângulo retângulo mede* $17\,\text{cm}$. *Sabendo-se que um dos catetos desse triângulo mede* $8\,\text{cm}$*, assinalar a alternativa que apresenta a medida do outro cateto desse triângulo:*

***A)*** $15\,\text{cm}$

***B)*** $14\,\text{cm}$

***C)*** $13\,\text{cm}$

***D)*** $12\,\text{cm}$

***E)*** $10\,\mathrm{cm}$

**Solução:** De acordo com a questão, o triângulo retângulo possui hipotenusa medindo $17\,\mathrm{cm}$ e um dos catetos, $8\,\mathrm{cm}$. Vamos chamar o cateto que desejamos encontrar a medida de $c$. Assim aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} 17^2 = 8^2 + c^2 &\implies 289 = 64 + c^2 \\ &\implies c^2 = 225 \\ &\implies c = 15. \end{aligned}$$

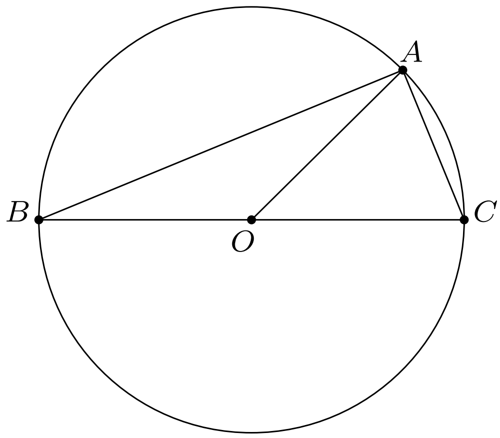
RESPOSTA: LETRA A.

#### 3.2.7.1 Triângulo retângulo inscrito na circunferência

**Proposição 2.** *Diz-se que um triângulo está inscrito numa circunferência se seus vértices são pontos dessa circunferência.*

**Exemplo 15.** *(Saresp) Considere o triângulo retângulo $ABC$ inscrito em uma circunferência de centro $O$.*

Figura 3.15: Triângulo retângulo inscrito na circunferência.




Fonte: O autor.

*Sabendo que $AB = 36\,\mathrm{cm}$ e $AC = 15\,\mathrm{cm}$, o valor de $AO$ é:*

***A)*** $18\,\mathrm{cm}$

***B)*** $39\,\mathrm{cm}$

***C)*** $\dfrac{21}{2}\,\mathrm{cm}$

***D)*** $\dfrac{39}{2}\,\mathrm{cm}$

**Solução:** Observe que o lado $\overline{BC}$ é também o diâmetro da circunferência de centro $O$, nesse caso, pode-se concluir que $ABC$ é um triângulo retângulo em $\widehat{A}$. Dessa forma o lado $\overline{BC}$ é o dobro do raio e a questão solicita a medida do raio.

Aplicando o Teorema de Pitágoras para determinar a medida de $\overline{BC}$:

$$\begin{aligned} BC^2 = 36^2 + 15^2 &\implies BC^2 = 1296 + 225 \\ &\implies BC^2 = 1521 \\ &\implies BC = 39. \end{aligned}$$

### 3.2.8 Triângulo equilátero

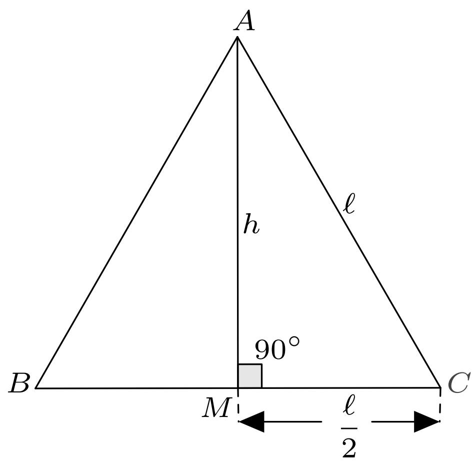
Visto que o triângulo equilátero é um caso especial de triângulos isósceles então as propriedades dos triângulos isósceles também se aplicam ao equilátero. Há diversos resultados interessantes em relação aos triângulos equilátero, todavia iremos tratar daqueles abordados em questões no exame do ENEM.

#### 3.2.8.1 Altura do triângulo equilátero

Abaixo será apresentada uma igualdade útil que relaciona a medida da altura com a medida do lado de um triângulo equilátero.

Seja $ABC$ um triângulo equilátero, $\overline{AM}$ a altura de medida $h$ e $\ell$ a medida dos seus lados, conforme a Figura 3.16. Como o triângulo $ABC$ também é isósceles, então $\overline{AM}$ é mediana de $ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$, dessa forma o lado $\overline{BC}$ está dividido em duas partes iguais, cada parte possui medida $\dfrac{\ell}{2}$.

Figura 3.16: Altura do triângulo equilátero.




Fonte: [46].

Note que o triângulo $ACM$ é retângulo em $M$, assim podemos aplicar o Teorema de

Pitágoras:

$$\begin{aligned} \ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 &\implies \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = h^2 \\ &\implies \frac{3\ell^2}{4} = h^2 \\ &\implies h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} \\ &\implies h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 16.** *(VUNESP – 2017) O quadrado da altura de um triângulo equilátero é exatamente* $300$*. O perímetro desse triângulo, em uma determinada unidade de medida, é:*

***A)*** $60$.

***B)*** $50$.

***C)*** $30$.

***D)*** $20$.

***E)*** $10$.

**Solução:** Como o triângulo é equilátero então o perímetro é $3\ell$, com $\ell$ sendo a medida do lado desse triângulo. Note que a questão informa o quadrado da altura desse triângulo, então:

$$\begin{aligned} h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} &\implies h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \\ &\implies 300 = \frac{3\ell^2}{4} \\ &\implies 1200 = 3\ell^2 \\ &\implies 400 = \ell^2 \\ &\implies \ell = 20. \end{aligned}$$

Como a questão quer o perímetro do triângulo equilátero, então $3\ell = 60$.
RESPOSTA: LETRA A.

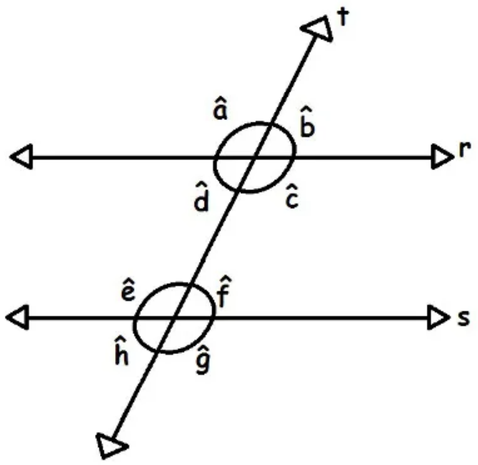
## 3.3 Semelhança

### 3.3.1 Retas paralelas

São retas pertencentes ao mesmo plano (coplanares) que não possuem ponto em comum. São representadas pelo símbolo $//$. Se a reta $r$ for paralela à reta $s$ então representamos por $r//s$.

Sejam $r$ e $s$ duas retas paralelas e $t$ uma reta transversal a elas, que passa por $r$ e $s$ em um único ponto, de acordo com a Figura 3.17, a seguir.

Figura 3.17: Retas paralelas.




Fonte: [49].

Temos as seguintes situações em relação aos ângulos:
I – Colaterais: $\widehat{a}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{d}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{f}$ e $\widehat{c}$.
II – Alternos: $\widehat{c}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{f}$ e $\widehat{d}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{g}$ e $\widehat{a}$.
III – Correspondentes: $\widehat{d}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{g}$.
Pode-se ainda subdividir os alternos e os colaterais em internos e externos, veja:

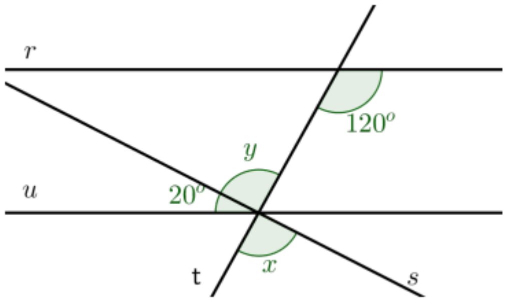
- Colaterais $\begin{cases} \text{internos: } \widehat{c} \text{ e } \widehat{f};\ \widehat{d} \text{ e } \widehat{e} \\ \text{externos: } \widehat{g} \text{ e } \widehat{b};\ \widehat{h} \text{ e } \widehat{a} \end{cases}$.

- Alternos $\begin{cases} \text{internos: } \widehat{e} \text{ e } \widehat{c};\ \widehat{d} \text{ e } \widehat{f} \\ \text{externos: } \widehat{h} \text{ e } \widehat{b};\ \widehat{g} \text{ e } \widehat{a} \end{cases}$.

**Observações:** Vejamos alguns resultados que transcorrem desses conceitos.
$1^{\underline{o}}$ Dois ângulos alternos são congruentes, sejam eles internos ou externos;
$2^{\underline{o}}$ Dois ângulos colaterais são complementares, sejam eles internos ou externos;
$3^{\underline{o}}$ Dois ângulos correspondentes são congruentes.

**Exemplo 17.** *(Obmep – retas paralelas cortadas por uma transversal) Considere as retas $r$, $s$, $t$, $u$, todas no mesmo plano, com $r//u$.*

Figura 3.18: Retas paralelas, exemplo.




Fonte: [28].

*O valor em graus de* $(2x + 3y)$.

***A)*** $64°$

***B)*** $500°$

***C)*** $520°$

***D)*** $660°$

***E)*** $580°$

**Solução:** Note que $y + 20°$ é congruente a $120°$, pois são alternos internos, logo:

$$y + 20° = 120° \Longrightarrow y = 100°.$$

Temos que $y$ é oposto pelo vértice ao ângulo $x$, então também são congruentes, assim:

$$y = x = 100°.$$

Portanto,

$$2x + 3y = 2 \cdot 100° + 3 \cdot 100° = 500°.$$

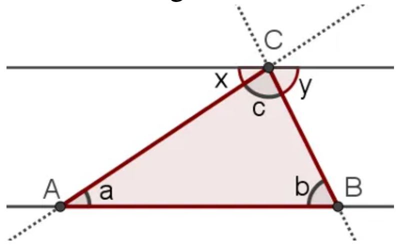
RESPOSTA: LETRA B.

### 3.3.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo

**Teorema 1.** *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a* $180°$.

**Demonstração:** Observe o triângulo $ABC$ na Figura 3.19, seja $r//\overrightarrow{AB}$, passando pelo ponto $C$, note que os ângulos de medida $y$ e $b$ são ângulos alternos internos, assim são congruentes.

Figura 3.19: Soma dos ângulos internos de um triângulo.




Fonte: [50].

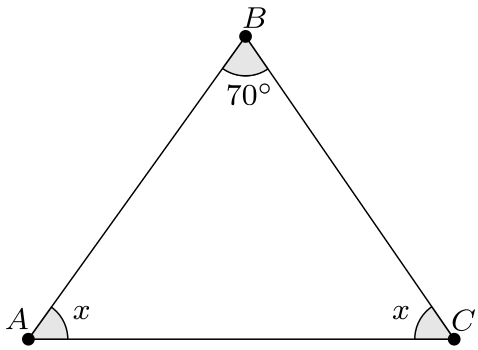
Os ângulos de medidas $a$ e $x$ também são congruentes por serem alternos internos. Veja ainda que:

$$x + c + y = 180^\circ \Longrightarrow a + c + b = 180^\circ.$$

□

**Exemplo 18.** *(OMNI – 2021) Se a Figura 3.20 representa um triângulo isósceles, qual é a medida de $x$ dos ângulos da base?*

Figura 3.20: Soma dos ângulos internos de um triângulo $ABC$.




Fonte: o autor.

***A)*** $x = 55^\circ$

***B)*** $x = 60^\circ$

***C)*** $x = 70^\circ$

***D)*** $x = 45^\circ$

**Solução:** Como o triângulo é isósceles então os ângulos da base são iguais, logo os ângulo desse triângulo são $x$, $x$ e $70^\circ$. Usando a soma dos ângulos internos, temos:

$$\begin{aligned} x + x + 70^\circ = 180^\circ \quad &\Longrightarrow \quad 2x = 110^\circ \\ &\Longrightarrow \quad x = 55^\circ \end{aligned}$$

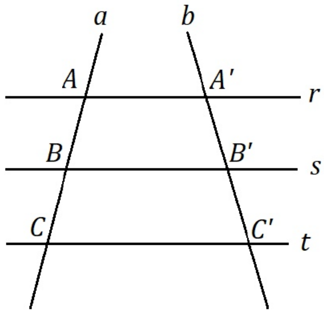
RESPOSTA: LETRA A.

### 3.3.3 Teorema de Tales

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Sejam $r$, $s$, $t$ retas paralelas e $a$ e $b$ retas transversais a elas, de acordo com a Figura 3.21.

Figura 3.21: Teorema de Tales I.



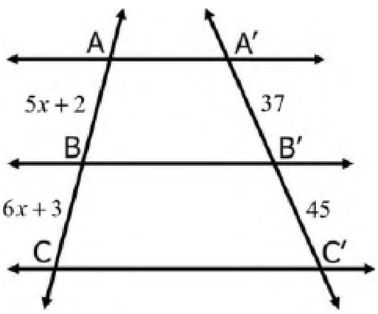

Fonte: [51].

Usando o Teorema de Tales, temos as seguintes proporções:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

**Exemplo 19.** *(Nosso Rumo – 2017) Assinale a alternativa que apresenta o valor de $x$ no Teorema de Tales abaixo.*

Figura 3.22: Teorema de Tales II.




Fonte: [52].

***A)*** 5

***B)*** 7

***C)*** 6

***D)*** 8

Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\begin{aligned}\frac{5x+2}{6x+3}=\frac{37}{45} &\implies 37\cdot(6x+3)=45\cdot(5x+2)\\ &\implies 222x+111=225x+90\\ &\implies 3x=21\\ &\implies x=7.\end{aligned}$$

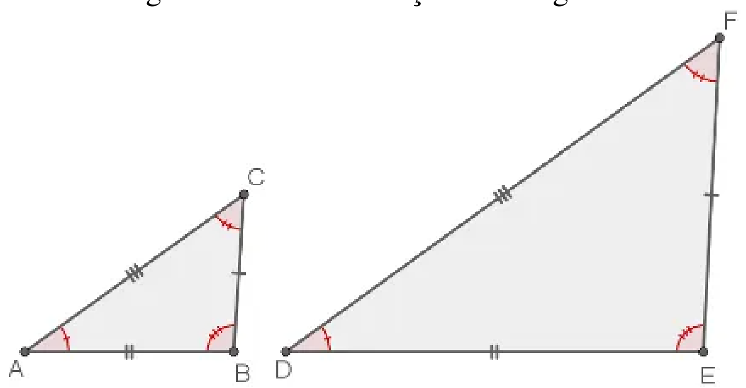
RESPOSTA: LETRA B.

### 3.3.4 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os lados homólogos proporcionais. Como consequência os ângulos são ordenadamente congruentes.

Analise os triângulos semelhantes $ABC$ e $DEF$ abaixo. Os lados homólogos semelhantes são proporcionais.

Figura 3.23: Semelhança de Triângulos.




Fonte: [53].

Dessa forma temos:

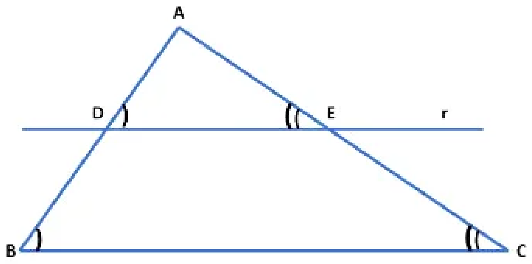
$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}.$$

### 3.3.5 Teorema fundamental da semelhança de triângulos

Quando uma reta paralela a um dos lados do triângulo intersecta os outros dois lados do triângulo em pontos distintos então ela forma um triângulo semelhante ao primeiro.

Na Figura 3.24, a reta $r$ é paralela a $\overline{BC}$ e intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos $D$ e $E$, respectivamente, assim, pelo Teorema Fundamental da Semelhança, $ADE \sim ABC$.

Figura 3.24: Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.




Fonte: [54].

**Exemplo 20.** *(Aeronáutica – 2017) Na figura, se* $BC = 60\,\mathrm{cm}$*, a medida de* $\overline{DE}$*, em* $\mathrm{cm}$*, é:*

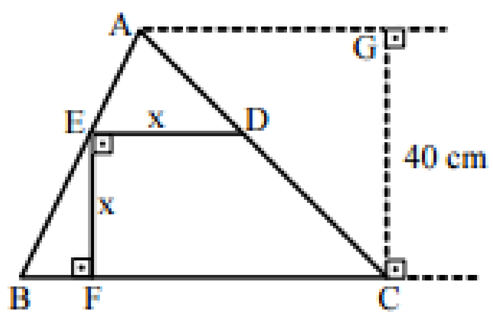
***A)*** 20

***B)*** 24

***C)*** 30

***D)*** 32

Figura 3.25: Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, exemplo.




Fonte: [55].

**Solução:** Veja que $\overline{ED}//\overline{BC}$ assim os triângulos $AED$ e $ABC$ são semelhantes e seus lados homólogos são proporcionais. Note ainda que a altura do triângulo $ABC$ é $40\,\mathrm{cm}$ e a altura do triângulo $AED$ é $40 - x$, dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{60} = \frac{40-x}{40} \quad &\Longrightarrow \quad 40x = 2400 - 60x \\ &\Longrightarrow \quad 100x = 2400 \\ &\Longrightarrow \quad x = 24. \end{aligned}$$

RESPOSTA: LETRA B.

### 3.3.6 Casos de semelhança de triângulos

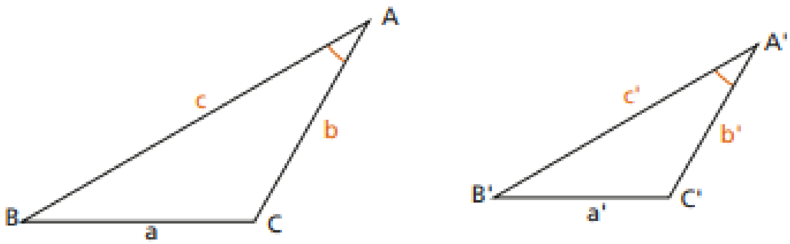
#### 3.3.6.1 1º caso: ângulo, ângulo (A.A.)

Se dois triângulos possuem ordenadamente dois ângulos internos congruentes, então os dois triângulos são semelhantes.

#### 3.3.6.2 2º caso: lado, ângulo, lado (L.A.L.)

Se dois lados de um triângulo são proporcionais a outros dois lados de outro triângulo e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os dois triângulos são semelhantes.

Figura 3.26: Casos de Semelhança de Triângulos: L.A.L.



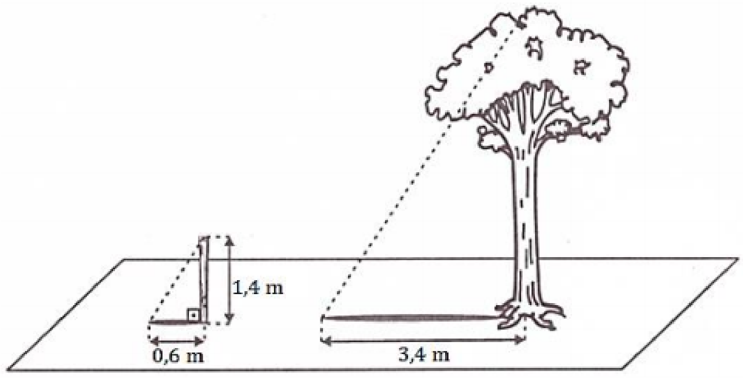

Fonte: [46].

#### 3.3.6.3 3º caso: lado, lado, lado (L.L.L.)

Se três lados de dois triângulos forem ordenadamente proporcionais, então os dois triângulos são semelhantes.

**Exemplo 21.** *(GUALIMP – 2020) Renata precisava medir a altura de uma árvore. Para isso, colocou um pedaço de cano enterrado no chão, formando um ângulo de* $90°$ *com o solo. Depois mediu os comprimentos das sombras da árvore e do cano, obtendo as medidas indicadas na Figura 3.27.*

Figura 3.27: Casos de Semelhança de Triângulos, exemplo.




Fonte: [56].

*Qual é a medida aproximada da altura dessa árvore?*

***A)*** $6,8\,\text{m}$.

***B)*** $8,4\,\text{m}$.

***C)*** $9,2\,\text{m}$.

***D)*** $7,9\,\text{m}$.

**Solução:** Observe que o cano e a árvore formam um ângulo reto com o solo. As sombras da árvore e do cano são projetadas com a mesma angulação em relação aos raios solares, dessa forma, pelo caso A.A., os dois triângulos na figura são semelhantes.

Seja $h$ a altura da árvore, usando a proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos:

$$\begin{aligned} \frac{h}{1,4} = \frac{3,4}{0,6} &\implies 0,6h = 4,76 \\ &\implies h \cong 7,93. \end{aligned}$$

RESPOSTA: LETRA D.

## 3.4 Área e perímetro de algumas regiões poligonais

**Área:** é a medida de uma superfície plana.

**Perímetro:** é a soma de todos os lados de um polígono, ou ainda o comprimento do contorno de uma figura plana.

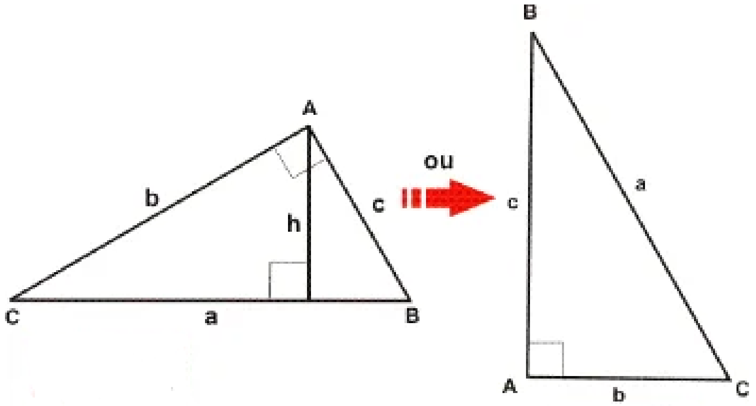
Adiante serão apresentados alguns polígonos e as fórmulas, quando houver, para determinar as medidas das áreas e dos perímetros.

### 3.4.1 Triângulo

Seja $ABC$ um triângulo com $BC = a$ e altura, relativa ao lado $\overline{BC}$, $h$. A área desse triângulo será calculada pela fórmula:

$$A_\Delta = \frac{a \cdot h}{2}.$$

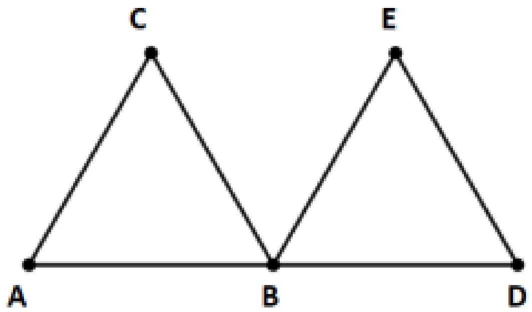
Figura 3.28: Área do triângulo.




Fonte: [57].

**Exemplo 22.** *(FUNDATEC – 2021) A figura abaixo apresenta dois triângulos equiláteros $ABC$ e $BDE$ nos quais a medida de $\overline{AD}$ é 12.*

Figura 3.29: Área do triângulo, exemplo.




Fonte: [58].

*Se $B$ é o ponto médio de $\overline{AD}$ e os pontos $A$, $B$ e $D$ estão alinhados, então a área do triângulo $ABC$ é:*

***A)*** $5\sqrt{3}$
***B)*** $6\sqrt{3}$
***C)*** $7\sqrt{3}$
***D)*** $8\sqrt{3}$
***E)*** $9\sqrt{3}$

**Solução:** De acordo com as informações da questão, $AB = 6$, pois $AD = 12$ e $B$ é ponto médio de $AD$. Como $ABC$ é um triângulo equilátero, podemos encontrar a medida da altura de $ABC$:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \implies h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$
$$\implies h = 3\sqrt{3}.$$

Calculando a área de $ABC$:

$$A_T = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \implies A_T = 9\sqrt{3}.$$

RESPOSTA: LETRA E.

### 3.4.2 Paralelogramo

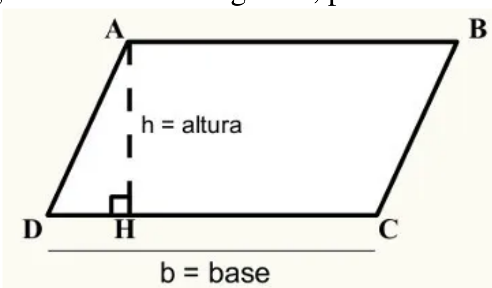
Paralelogramo é todo quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos. Mostra-se que os lados opostos do paralelogramo são congruentes. Assim considerando $b$ a medida de um dos lados do paralelogramo e $a$ a medida do outro lado, então o perímetro será

$$P_P = 2b + 2a.$$

Seja $b$ a base de um paralelogramo e $h$ sua altura, então a área desse paralelogramo é calculada por:

$$A_P = b \cdot h.$$

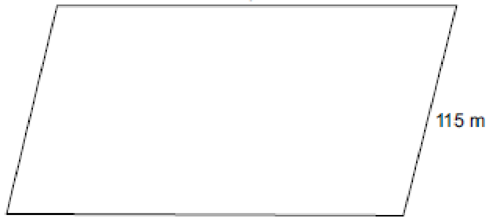
Figura 3.30: Paralelogramo, perímetro e área.




Fonte: [59].

**Exemplo 23.** *(VUNESP – 2020) Um guarda noturno faz a ronda num quarteirão em formato de um paralelogramo com* 115 *metros no lado menor e* 215 *metros no lado maior, conforme a Figura 3.31.*

Figura 3.31: Paralelogramo, perímetro e área, exemplo.




Fonte: [60].

*Todas as noites, ele percorre* 4 *vezes o perímetro completo desse quarteirão. Ele percorre a cada noite, nessa ronda, um total de*

**A)** $330\,\text{m}$.

**B)** $660\,\text{m}$.

**C)** $1\,320\,\text{m}$.

**D)** $1\,980\,\text{m}$.

**E)** $2\,640\,\text{m}$.

Primeiro vamos calcular uma volta completa no quarteirão. Veja que o quarteirão tem formato de um paralelogramo, assim:

$$\begin{aligned} P_P = 2b + 2a \quad &\Longrightarrow \quad P_P = 2 \cdot 115 + 2 \cdot 215 \\ &\Longrightarrow \quad P_P = 660\,\text{m}\,. \end{aligned}$$

Devemos ainda calcular a distância necessária para $4$ voltas completas.

$$4 \cdot 660 = 2640\,\text{m}\,.$$

RESPOSTA: LETRA E.

#### 3.4.2.1 Retângulo

Retângulo é todo quadrilátero paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos. Visto que o retângulo é um paralelogramo então os lados opostos também são congruentes, conforme a Figura 3.32.

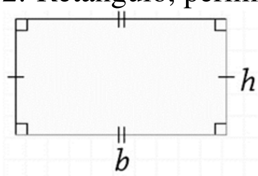
O cálculo do perímetro do retângulo será análogo ao perímetro do paralelogramo. Se um dos lados possui medida $b$ e o lado adjacente possui medida $h$ então o perímetro será:

$$P_R = 2 \cdot b + 2 \cdot h.$$

Para calcular a área do retângulo deve-se observar que os lados são perpendiculares, assim um deles pode ser considerado a base e o outro já é, por definição, a altura, assim, considerando as medidas dos lados adjacentes como $b$ e $h$, não necessariamente diferentes, a área será:

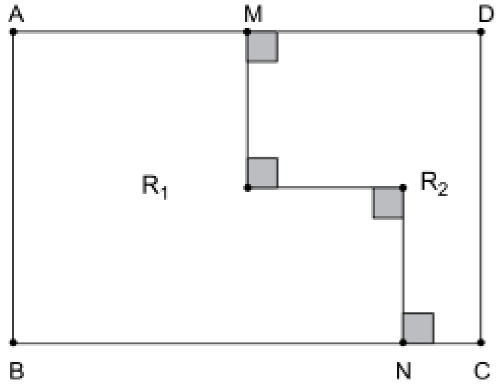
$$A_R = b \cdot h.$$

Figura 3.32: Retângulo, perímetro e área.



**Exemplo 24.** *(VUNESP – 2022) Em um retângulo $ABCD$, o ponto $M$ divide o lado $AD$ em dois segmentos de mesma medida e o ponto $N$ está sobre o lado $BC$. Esse retângulo foi dividido em duas regiões, $R_1$ e $R_2$, por meio de três segmentos, cada um medindo a metade do lado $AB$, e que são perpendiculares entre si e aos lados do retângulo, conforme mostra a Figura.*

Figura 3.33: Retângulo, perímetro e área, exemplo.




Fonte: [61].

*Sabendo que a razão entre as medidas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ é igual a $1,5$ e que o perímetro do polígono que delimita a região $R_1$ é igual a $81\,\mathrm{cm}$, a área da região $R_2$ é*

**A)** $162\,\mathrm{cm}^2$.

**B)** $171\,\mathrm{cm}^2$.

**C)** $180\,\mathrm{cm}^2$.

**D)** $189\,\mathrm{cm}^2$.

**E)** $198\,\mathrm{cm}^2$.

**Solução:** Visto que a razão entre as medidas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ é $1,5$, então:

$$\frac{AD}{AB} = 1,5 \implies AD = 1,5AB.$$

Note que $BN$ é equivalente à metade de $AD$ adicionado à metade de $AB$.

Veja ainda que o perímetro da região $R_1$ deve ser a soma da metade de $AD$ com a medida de $AB$, a medida $BN$ é três vezes a metade de $AB$. Assim:

$$P_{R_1} = \frac{AD}{2} + AB + BN + 3 \cdot \frac{AB}{2} \implies P_{R_1} = \frac{AD}{2} + BN + 5 \cdot \frac{AB}{2}. \tag{3.2}$$

Substituindo $BN = \dfrac{AD}{2} + \dfrac{AB}{2}$ em (3.2), temos:

$$\begin{aligned} P_{R_1} = \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{AB}{2} + 5 \cdot \frac{AB}{2} &\implies P_{R_1} = \frac{2AD}{2} + \frac{6AB}{2} \\ &\implies P_{R_1} = AD + 3AB. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Substituindo $AD = 1,5AB$ em (3.3), temos:

$$P_{R_1} = 1,5AB + 3AB \implies P_{R_1} = 4,5AB. \tag{3.4}$$

Como o perímetro é $81\,\mathrm{cm}$, então, ao substituir em 3.4, temos:

$$\begin{aligned} P_{R_1} = 4,5AB = 81 &\implies AB = 18\,\mathrm{cm} \\ &\implies AD = 1,5AB = 1,5 \cdot 18 = 27\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Observe que a área de $R_2$ é igual a área de um retângulo de lados $NC$ e $AB$ adicionada à área de outro retângulo cujos lados congruentes medem $\dfrac{AB}{2}$, logo:

$$A_{R_2} = AB \cdot NC + \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2}. \tag{3.6}$$

Note que $NC = 4,5$, substituindo em (3.6), logo:

$$A_{R_2} = 4,5 \cdot 18 + 9 \cdot 9 = 81 + 81 = 162\,\mathrm{cm}^2\,. \tag{3.7}$$

RESPOSTA: LETRA A.

#### 3.4.2.2 Quadrado

Quadrado é todo quadrilátero paralelogramo que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos retos.

**Observação:** De acordo com as definições todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado. Como todos os lados do quadrado são congruentes entre si então, seja $\ell$ a medida do lado do quadrado, o seu perímetro pode ser calculado por:

$$P_Q = \ell + \ell + \ell + \ell = 4\ell.$$

Visto que o quadrado é um caso especial de retângulo, por definição, então a área do quadrado é calculada com a mesma ideia da área do retângulo:

$$A_Q = \ell \cdot \ell = \ell^2.$$

**Exemplo 25.** *(CONSESP – 2018) Alexandre cortou um quadrado de lados iguais a $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Qual é a área desse quadrado?*

**A)** $12\,\mathrm{cm}^2$

**B)** $14\,\mathrm{cm}^2$

**C)** $16\,\mathrm{cm}^2$

**D)** $18\,\text{cm}^2$

**Solução:** Veja que a medida do lado do quadrado é $2\sqrt{3}\,\text{cm}$ dessa forma sua área será:

$$A_Q = (2\sqrt{3})^2 \implies A_Q = 4 \cdot 3 = 12\,\text{cm}^2\,.$$

RESPOSTA: LETRA A.

#### 3.4.2.3 Losango

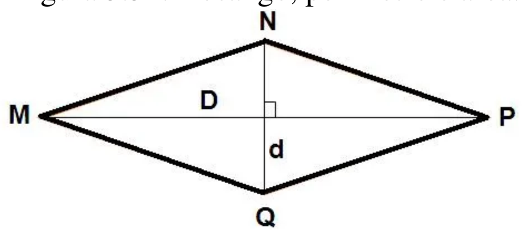
Losango é todo quadrilátero paralelogramo que possui os quatro lados congruentes. Essa definição se assemelha parcialmente com a do quadrado, dessa forma, pode-se concluir que todo quadrado é também um losango, todavia a recíproca não é verdadeira, nem todo losango é considerado um quadrado.

Considerando que todos os lados do losango são congruentes, então, chamando de $\ell$ a medida de seu lado, o perímetro é calculado por:

$$P_L = \ell + \ell + \ell + \ell = 4 \cdot \ell.$$

Seja $MNPQ$ um losango qualquer. Todo losango possui duas diagonais, conforme a Figura 3.34, suas medidas são $D$ e $d$.

Figura 3.34: Losango, perímetro e área.




Fonte: [62].

A área do losango é calculada usando as medidas dessas diagonais, assim:

$$A_L = \frac{D \cdot d}{2}$$

**Exemplo 26.** *(APTA Assessoria Consultoria – 2022) Qual é a área de um losango sabendo que a diagonal maior mede* $60\,\text{cm}$ *e que a diagonal menor mede* $\frac{2}{3}$ *da diagonal maior?*

**A)** $240\,\text{cm}^2$

**B)** $960\,\text{cm}^2$

**C)** $1200\,\text{cm}^2$

**D)** $2400\,\text{cm}^2$

**Solução:** Para determinar a área do losango deve-se obter as medidas das duas diagonais. De acordo com o enunciado da questão uma das diagonais possui $60\,\mathrm{cm}$, enquanto a outra será:

$$d = \frac{2}{3} \cdot 60 = 20 \cdot 2 = 40\,\mathrm{m}\,.$$

Calculando a área:

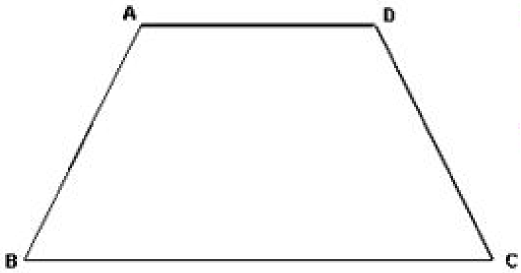
$$A_L = \frac{60 \cdot 40}{2} = 1\ 200\,\mathrm{cm}^2\,.$$

RESPOSTA: LETRA C.

### 3.4.3 Trapézio

Trapézio é todo quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos. Esses lados paralelos possuem medidas distintas e são chamados de bases do trapézio, uma maior e outra menor.

Figura 3.35: Trapézio.




Fonte: [63].

No quadrilátero $ABCD$ ao lado, $\overline{AD}//\overline{BC}$ e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não são paralelos entre si. Dessa forma esse quadrilátero é um trapézio de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, note que a medida do lado $BC$ é maior que $AD$.

Há três tipos de trapézio que chamam atenção quanto aos conceitos:

**Trapézio isósceles:** trapézio que possui os lados não paralelos congruentes.

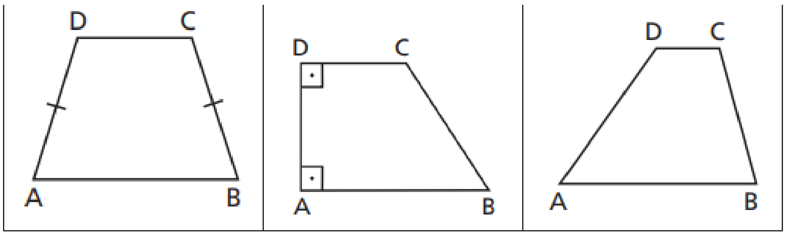
**Trapézio retângulo:** trapézio que possui dois ângulos internos retos.

**Trapézio escaleno:** trapézio que possui os quatro lados com medidas distintas

O Quadro 4 exemplifica com imagem cada um dos dois casos:

Quadro 4: Classificação dos trapézios: isósceles, retângulos e escaleno.

| Isósceles | Retângulo | Escaleno |
|---|---|---|



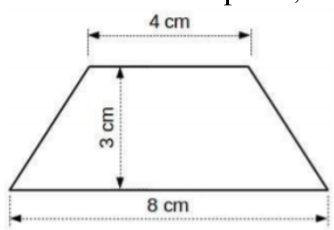

Fonte: Adaptado de [46].

Para determinarmos a área da superfície de um trapézio deve-se usar as medidas das duas bases e a altura relativa às bases, usando a fórmula abaixo:

$$A_{Tr} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}, \text{ sendo } \begin{cases} B, \text{ a medida da base maior;} \\ b, \text{ a medida da base menor;} \\ h, \text{ a medida da altura relatia às bases do trapézio.} \end{cases}$$

**Exemplo 27.** *(AMEOSC – 2021) A figura abaixo apresenta um trapézio com as medidas indicadas.*

Figura 3.36: Área do trapézio, exemplo.




Fonte: [64].

*A área do trapézio exposto, em cm², é:*

***A)*** 15

***B)*** 36

***C)*** 20

***D)*** 18

Note que as medidas das bases maior e menor do trapézio são, respectivamente, $8\,\text{cm}$ e $4\,\text{cm}$, e a medida da altura é $3\,\text{cm}$. Usando a fórmula da área do trapézio, temos:

$$A_{Tr} = \frac{(8+4)\cdot 3}{2} \implies A_{Tr} = 18\,\text{cm}^2\,.$$

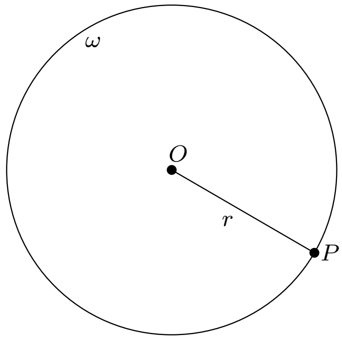
RESPOSTA: LETRA D.

## 3.5 Círculo e circunferência

### 3.5.1 Circunferência

Uma circunferência $\omega$ é o conjunto de pontos em um mesmo plano que possuem uma mesma distância, não nula, de um ponto dado. Esse ponto dado é chamado de **centro da circunferência** e a distância dela aos outros pontos é chamada de **raio da circunferência**.

Figura 3.37: Circunferência.

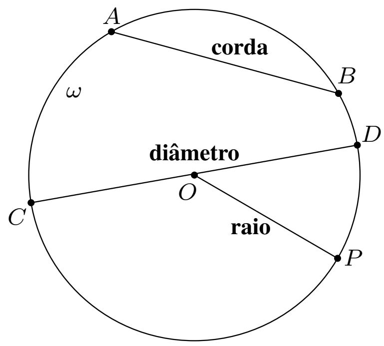



Fonte: O autor.

#### 3.5.1.1 Corda, raio e diâmetro

Uma corda é o segmento com extremos na circunferência. Observe a Figura 3.38, $\overline{AB}$ é uma corda.

Figura 3.38: Circunferência: corda, raio e diâmetro.




Fonte: O autor.

O raio é o segmento que possui um dos extremos no centro da circunferência e o outro extremo na circunferência. Na figura, $\overline{OP}$, $\overline{OC}$, e $\overline{OD}$ são raios.

O diâmetro é uma corda (possui extremos na circunferência) que passa pelo centro da circunferência. $\overline{CD}$ é um diâmetro, na Figura 3.38. Veja que o diâmetro tem medida igual a duas vezes o raio, logo:

$$CD = 2 \cdot OC = 2 \cdot OP = 2 \cdot OD.$$

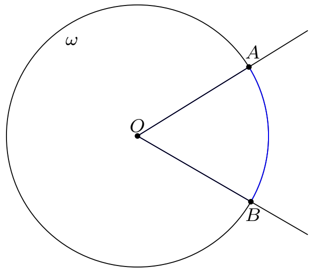
#### 3.5.1.2 Arco de uma circunferência e semicircunferência

Seja $\omega$ uma circunferência de centro $O$ e sejam $A$ e $B$ dois pontos nessa circunferência. Considerando que $A$ e $B$ não sejam extremos de um diâmetro de $\omega$ podemos concluir que a circunferência está dividida em duas partes:

I. *Arco menor*: $\widehat{AB}$ é a união de todos os pontos que pertencem a $\omega$ e estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$.

II. *Arco maior*: $\widehat{AB}$ é a união de todos os pontos que pertencem a $\omega$ e estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.

Figura 3.39: Circunferência: arco.




Fonte: O autor.

Considerando que $A$ e $B$ são extremos de um diâmetro de $\omega$, então $\widehat{AB}$ é uma semicircunferência

#### 3.5.1.3 Comprimento de uma circunferência

**Proposição 3.** *O comprimento $C$ de uma circunferência é dado pela fórmula:*

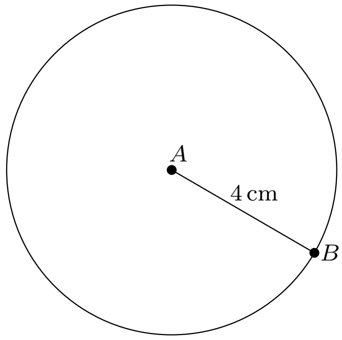
$$C = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi,$$

*onde $C$ é o comprimento do circunferência; $d$ é a medida do diâmetro; $r$ é o raio.*

Dependendo das informações contidas em cada questão a fórmula pode ser adaptada para facilitar os cálculos.

**Exemplo 28.** *(AMAUC – 2021) Analise a circunferência a seguir: (Dado: considere $\pi = 3,14$).*

Figura 3.40: Circunferência: comprimento, exemplo.




Fonte: O autor.

*Assinale a alternativa que representa corretamente o seu perímetro.*

***A)*** $50,24\,\text{cm}$

***B)*** $25,12\,\text{cm}$

***C)*** $20,15\,\text{cm}$

***D)*** $16,14\,\text{cm}$

***E)*** $12,56\,\text{cm}$

**Solução:** Observe, inicialmente que o perímetro solicitado é o comprimento da circunferência e que o dado apresentado cuja medida é $4\,\text{cm}$ refere-se ao raio dessa circunferência, dessa forma, temos:

$$c = 2r\pi = 2 \cdot 4 \cdot 3,14 = 8 \cdot 3,14 = 25,12\,\text{cm}$$

RESPOSTA: LETRA D.

**Exemplo 29.** *(UEG – 2021) O aro do pneu de um carro consiste na medida do diâmetro interno do pneu, em polegadas. Sabendo-se que* $1$ *polegada equivale a* $2,54$ *centímetros, o comprimento da circunferência interna de um pneu de aro* $14$*, em centímetros, é igual a:*

***A)*** $31,76\pi\,\text{cm}$

***B)*** $32,46\pi\,\text{cm}$

***C)*** $33,62\pi\,\text{cm}$

***D)*** $34,47\pi\,\text{cm}$

***E)*** $35,56\pi\,\text{cm}$

**Solução:** Primeiramente, deve-se encontrar a medida de $14$ polegadas em centímetros: Como $1$ polegada é equivalente a $2,54\,\text{cm}$, temos:

$$14 \cdot 2,54 = 35,56\,\text{cm}\,.$$

Veja que o aro $14$ equivale ao diâmetro$d$ da circunferência e que a questão pede que encontremos a medida dessa circunferência, logo:

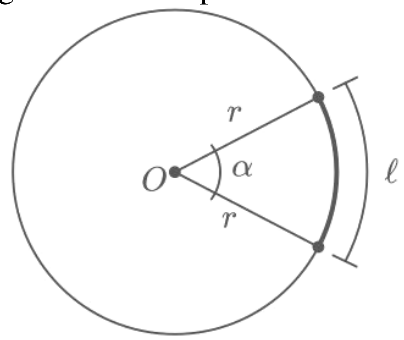
$$c = d \cdot \pi = 35,56 \cdot \pi \,\text{cm}\,.$$

RESPOSTA: LETRA E.

#### 3.5.1.4 Comprimento do arco de uma circunferência

Sejam $\alpha$ o ângulo central, medido em radianos, de uma circunferência de centro $O$, $r$ o raio dessa circunferência e $\ell$ o comprimento do arco, conforme a Figura 3.41.

Figura 3.41: Comprimento de arco.




Fonte: [65].

O comprimento de $\ell$ é calculado pela fórmula:

$$\ell = r \cdot \alpha.$$

**Exemplo 30.** *(Exército – 2020) Para fabricar uma mesa redonda que comporte* $8$ *pessoas em sua volta, um projetista concluiu que essa mesa, para ser confortável, deverá considerar, para cada um dos ocupantes, um arco de circunferência com* $62,8\,\text{cm}$ *de comprimento. O tampo redondo da mesa será obtido a partir de uma placa quadrada de madeira compensada. Adotando* $\pi = 3,14$*, a menor medida do lado dessa placa quadrada que permite obter esse tampo de mesa é*

**A)** $72\,\text{cm}$.

**B)** $80\,\text{cm}$.

**C)** $144\,\text{cm}$.

**D)** $160\,\text{cm}$.

**E)** $180\,\text{cm}$.

**Solução:** Observe que o lado do quadrado é também o diâmetro da circunferência. Por outro lado, o comprimento do arco, dado na questão, é $62,8\,\text{cm}$. Usando a fórmula do comprimento do arco de uma circunferência, temos:

$$\ell = r \cdot \alpha = 62,8\,\mathrm{cm}\,.$$

Precisamos encontrar a medida de $\alpha$. Visto que a circunferência foi dividida em $8$ partes iguais então, considerando que a circunferência completa delimita um ângulo central de $360°$:

$$\alpha = \frac{360°}{8} = 45° = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \cdot \alpha = 62,8 = r \cdot \frac{\pi}{4} \quad &\Longrightarrow \quad r \cdot \pi = 62,8 \cdot 4 = 512,2 \\ &\Longrightarrow \quad r = \frac{512,2}{\pi} = \frac{512,2}{3,14} = 80\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Como a questão quer o lado do quadrado, que é igual ao diâmetro, então:

$$d = 2r = 2 \cdot 80 = 160\,\mathrm{cm}\,.$$

RESPOSTA: LETRA D.

### 3.5.2 Círculo

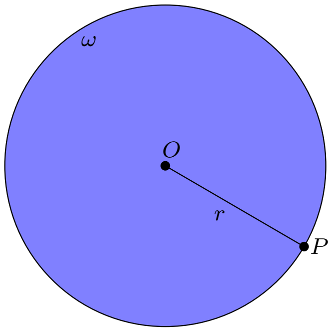
Círculo é o conjunto de todos os pontos de uma região cuja distância entre esses pontos a um ponto dado (centro do círculo) é menor ou igual a uma distância dada (raio do círculo).

#### 3.5.2.1 Área da superfície de um círculo

Considere o círculo $\omega$ de raio $r$. Para calcular a medida da superfície de $\omega$ temos que usar a fórmula:

$$A_\omega = \pi \cdot r^2.$$

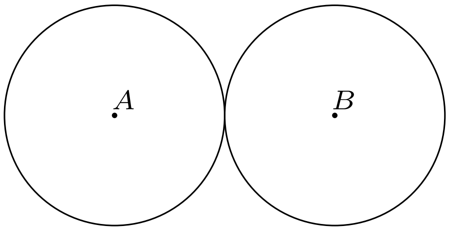
Figura 3.42: Área do círculo.




Fonte: O autor.

**Exemplo 31.** *(FUNDATEC – 2019) Na figura abaixo estão representados dois círculos iguais entre si e tangentes externamente, de centros $A$ e $B$, respectivamente.*

Figura 3.43: Área do círculo, exemplo.




Fonte: Adaptado de [66].

*Se a distância entre os pontos $A$ e $B$ é $10$, então a soma das áreas dos círculos é:*

**A)** $30\pi$.

**B)** $50\pi$.

**C)** $60\pi$.

**D)** $70\pi$.

**E)** $80\pi$.

**Solução:** Visto que os círculos são tangentes e iguais entre si, então entendemos elas possuem o mesmo raio e mesma área, assim a distância de A até B é o dobro desse raio, logo:

$$\overline{AB} = 2 \cdot r = 10 \implies r = \frac{10}{2}.$$

A área do circulo de centro $A$ é:

$$A_A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

Observe ainda que a questão solicita a área dos dois círculos iguais, assim:

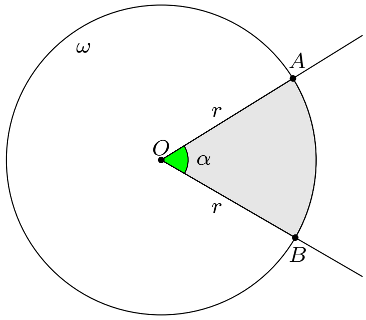
$$A_A + A_B = 25\pi + 25\pi = 50\pi.$$

RESPOSTA: LETRA B.

#### 3.5.2.2 Área do setor circular

Todo ângulo central de um círculo determina uma região conhecida como setor circular. Observando a figura ao lado, temos um círculo $\omega$ de centro $O$ e raio $R$. O ângulo central $\alpha$ delimita a região em verde que é chamada de setor circular.

Figura 3.44: Setor circular.




Fonte: O autor.

Para calcular a área da superfície de um setor circular devemos usar:

$$\text{I.} \quad A_S = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}, \text{ com } \alpha \text{ em graus.}$$
$$\text{II.} \quad A_S = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}, \text{ com } \alpha \text{ em radianos.}$$

**Exemplo 32.** *(Aeronáutica – 2013) Em uma circunferência de raio* $r = 6\,\text{cm}$*, a área de um setor circular de* $30°$ *é* ___ $\pi\,\text{cm}^2$.

**A)** 3

**B)** 4

**C)** 5

**D)** 6

**Solução:** Veja que o ângulo que forma o setor circular $\alpha$ está em graus, assim vamos usar a primeira fórmula:

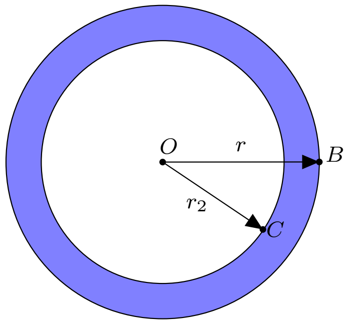
$$\begin{aligned} A_S &= \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°} \\ &= \frac{30°\pi \cdot 6^2}{360°} \\ &= \frac{\pi \cdot 36}{12} \\ &= 3\pi\,\text{cm}^2\,. \end{aligned}$$

RESPOSTA: LETRA A.

#### 3.5.2.3 Área da coroa circular

Na Figura 3.45 ao lado há dois círculos concêntricos. O maior círculo possui raio $r_1$ e o menor $r_2$, com $r_1 > r_2$. Os dois círculos juntos formam a região amarela, chamada de coroa circular.

Figura 3.45: Coroa circular.




Fonte: O autor.

A área $S$ é dada por:

$$A_S = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2).$$

**Exemplo 33.** *(PM ES – CFO – 2013). Adriana planta flores num canteiro circular de raio* $8\,\mathrm{m}$*. Ao redor desse canteiro, ela pretende plantar ervas medicinais formando uma coroa circular, de maneira que a parte destinada às flores sofrerá uma redução de* $2\,\mathrm{m}$ *em seu diâmetro. A área ocupada pelas ervas medicinais neste canteiro será igual a:*

***A)*** $13\pi$

***B)*** $14\pi$

***C)*** $15\pi$

***D)*** $16\pi$

***E)*** $8\pi$

**Solução:** Sabemos que o diâmetro é o dobro do raio, como Adriana deseja diminuir $2\,\mathrm{m}$ do diâmetro de um círculo cujo raio é $8\,\mathrm{m}$, então o diâmetro do novo círculo usado nas flores será:

Sejam $d_1$ e $d_2$ os diâmetros antigo e atual, respectivamente, usados no plantio das flores, de raios $r_1 = 8$ e $r_2$, também respectivamente, logo:

$$d_2 = d_1 - 2 = 2 \cdot 8 - 2 = 14\,\mathrm{m} \Longrightarrow r_2 = 7\,\mathrm{m}\,.$$

Adriana deseja calcular a área ocupada pelas ervas, que é um espaço delimitado por uma coroa circular, assim:

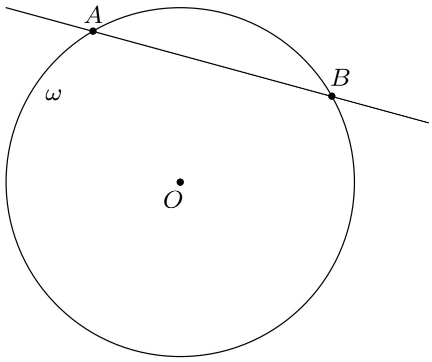
$$A_c = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2) = \pi \cdot (8^2 - 7^2) = \pi \cdot (64 - 49) = \pi \cdot 15\,\mathrm{m}^2\,.$$

RESPOSTA: LETRA C.

### 3.5.3 Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

**I - Secante:** Toda reta que intersecta uma circunferência em dois pontos distintos é chamada de reta secante a essa circunferência.

Figura 3.46: Circunferência: reta secante.



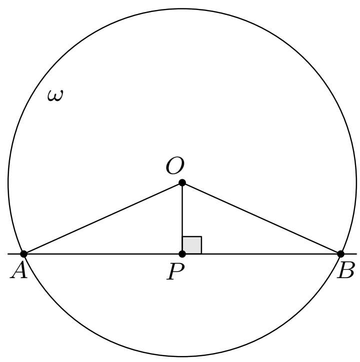

Fonte: O autor.

Na Figura 3.46, pode-se observar uma circunferência $\omega$ de centro $O$ e uma reta $r$ que intersecta essa circunferência nos pontos $A$ e $B$. Assim $r$ é secante à circunferência $\omega$.

**Propriedade 4.** *Seja $r$ uma reta secante a circunferência $\omega$ nos pontos $A$ e $B$, considerando que $r$ não passa pelo centro da circunferência de centro $C$ e seja $P$ um ponto da reta $r$ que esteja na corda $\overline{AB}$ tem-se que $\overline{CP}$ é perpendicular à reta $r$ se, e somente se, $P$ é ponto médio de $\overline{AB}$.*

**Demonstração:** 1º caso: considerando $\overline{OP}$ é perpendicular à reta $r$. Observe a Figura 3.47, temos que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, pois são raios da circunferência e ao mesmo tempo são hipotenusas dos triângulos retângulos $ACP$ e $BCP$, respectivamente.

Figura 3.47: Circunferência: reta secante, propriedade.




Fonte: O autor.

Veja ainda que os dois triângulos possuem um cateto em comum $\overline{CP}$, dessa forma pode-se concluir, através do teorema de Pitágoras que $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ pois:

$$\begin{aligned}(AC)^2 = (CP)^2 + (AP)^2 &\implies (BC)^2 = (CP)^2 + (BP)^2\\ &\implies (CP)^2 + (AP)^2 = (CP)^2 + (BP)^2\\ &\implies (AP)^2 = (BP)^2\\ &\implies AP = BP.\end{aligned}$$

2º caso: Considerando $P$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Veja que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, pois são raios da circunferência. $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$, pois $P$ é ponto médio de $\overline{AB}$. Os triângulos $ACP$ e $BCP$ possuem um lado em comum $\overline{CP}$ pelo caso L.L.L. eles são congruentes. Note que $A\widehat{P}C + B\widehat{P}C = 180°$, como esses dois ângulos são congruentes, então:

$$\begin{aligned}A\widehat{P}C + B\widehat{P}C = 180° &\implies 2 \cdot A\widehat{P}C = 180°\\ &\implies A\widehat{P}C = 90° = B\widehat{P}C.\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{CP}$ é perpendicular à reta $r$.

□

**II - Tangente:** Quando uma reta $r$ intercepta uma circunferência em um único ponto, dizemos que essa é uma reta tangente à circunferência.

**Propriedade 5.** *Uma reta é tangente à circunferência se, e somente se, o raio da circunferência for perpendicular ao ponto de tangência.*

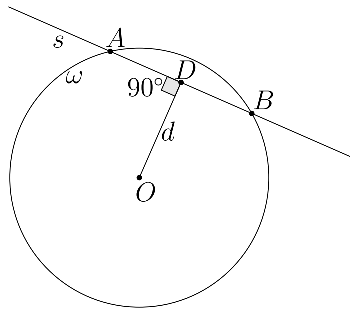
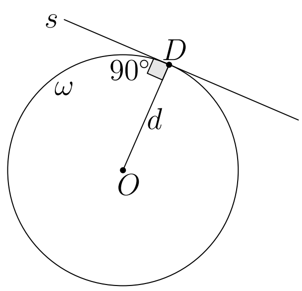
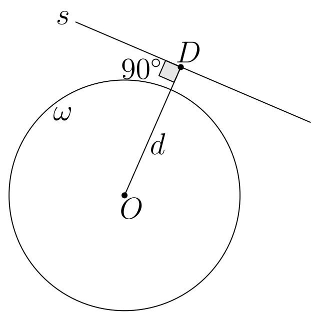
**Demonstração:** Seja $\omega$ uma circunferência de centro $O$ e raio $r$, seja $s$ uma reta qualquer.
1º caso: Considerando que $s$ é tangente à $\omega$ no ponto $P$, vamos supor que $\overline{OP}$ não é perpendicular à reta $s$ no ponto $P$. Dessa forma, existe um outro ponto $K$ pertencente à reta $s$ em que $\overline{OK}$ é perpendicular à $s$. Assim $OK < OP = r$ e a reta $s$ seria secante à $\omega$, o que é uma contradição, visto que, consideramos $s$ tangente à $\omega$.
2º caso: Considerando $P$ um ponto pertencente à reta $s$ e a circunferência $\omega$ e que $\overline{OP}$ é perpendicular a $s$. Seja $T$ um ponto qualquer pertencente a reta $s$, observe que $OT > OP$, pois $\overline{OP}$ é a menor distância entre a reta e o centro $O$, visto que $\overline{OP}$ é perpendicular a $s$. Dessa forma pode-se considerar que $T$ está fora da circunferência e que a reta $s$ possui apenas um ponto em comum com a circunferência, portanto $s$ é tangente à $\omega$.

□

**III - Exterior:** Quando uma retas não possui pontos em comum com uma circunferência $\omega$, dizemos que $s$ é exterior a $\omega$.

Observação: Sejam $\omega$ uma circunferência de centro $O$, $s$ uma reta, $d$ a distância entre $s$ e $O$ e $r$ o raio de $\omega$. O quadro abaixo é válido:

Quadro 5: Posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

| **Reta $s$ secante à $\omega$** | **Reta $s$ tangente à $\omega$** | **Reta $s$ exterior à $\omega$** |
| --- | --- | --- |
| $d < r$ | $d = r$ | $d > r$ |
|  |  |  |

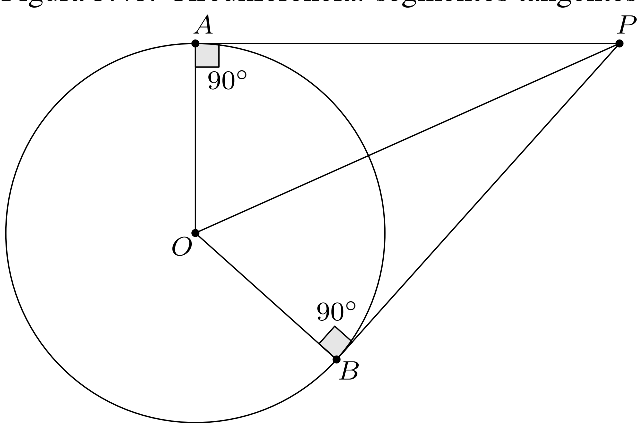
Fonte: O autor.

#### 3.5.3.1 Segmentos tangentes

**Teorema 2.** *Considere um ponto $P$ exterior a uma circunferência $\omega$, se tivermos duas semirretas distintas com origem em P e tangentes a $\omega$ nos pontos $A$ e $B$, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.*

**Demonstração:** Observe a Figura . Como $\overline{PA}$ é secante à circunferência no ponto $A$ então o triângulo $OPA$ é retângulo em $A$. Analogamente, $OPB$ é um triângulo retângulo em $B$.

Figura 3.48: Circunferência: segmentos tangentes.



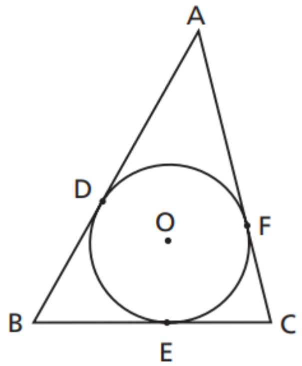

Fonte: O autor.

Analisando os dois triângulos, temos que $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, pois são raios da circunferência. Os dois triângulos possuem o lado $\overline{PO}$ em comum, assim, usando o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que os triângulos $OPA$ e $OPB$ são congruentes e $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Esse resultado é bastante útil e costuma ser cobrado em vários exames importantes incluindo o ENEM. Há questões que necessitam da aplicação desse resultado para que sejam solucionadas. Logo mais serão apresentados dois exemplos bem uteis da aplicação dessa congruência.

**Exemplo 34.** *(Fundamentos da Matemática Vol. 9) Na Figura 3.49, o círculo de centro $O$ é inscrito no triângulo $ABC$. $BD = 4$, $AF = 3$ e $EC = 5$. Qual é o perímetro do triângulo $ABC$?*

Figura 3.49: Circunferência: segmentos tangentes, Exemplo 34.




Fonte: [46].

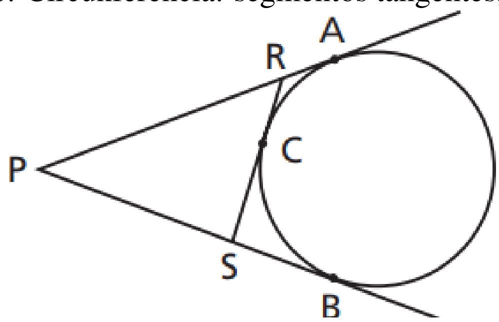
Note que $\overline{BD} \equiv \overline{BE}$, assim $BD = BE = 4$, pois possuem o mesmo ponto exterior $B$ e são tangentes à circunferência nos pontos $D$ e $E$, respectivamente. Analogamente, $\overline{AD} \equiv \overline{AF}$, assim $AD = AF = 3$ e ainda $\overline{CE} \equiv \overline{CF}$, assim $CE = CF = 5$.

O perímetro de $ABC$ é dado por:

$$DB + BE + EC + CF + FA + AD \quad = \quad 4 + 4 + 3 + 3 + 5 + 5 = 24.$$

**Exemplo 35.** *(Fundamentos da Matemática Vol. 9) Na Figura 3.50, $PA = 10\,\text{cm}$. Calcule o perímetro do triângulo $PRS$.*

Figura 3.50: Circunferência: segmentos tangentes, Exemplo 35.




Fonte: [46].

**Solução:** Observe que $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$, assim $PA = PB = 10$. Chamando $AR = x$, temos que $\overline{AR} \equiv \overline{RC}$, assim $AR = RC = x$. Considerando $BS = y$, então $\overline{BS} \equiv \overline{SC}$, assim

$BS = SC = y$. Veja ainda que $PR = PA = x$ e que $PS = PB = y$. O perímetro de $ARS$ é:

$$\begin{aligned} PS + SC + CR + PR &= PB - y + y + x + PA - x \\ &= 10 + x - x + 10 \\ &= 10 + 10 \\ &= 20. \end{aligned}$$

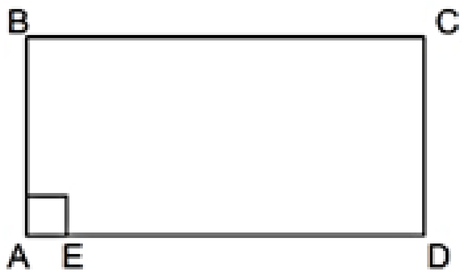
# Capítulo 4

# BANCO DE QUESTÕES

Objetivando um preparo, especificamente, voltado ao estudo da geometria plana, de acordo com o que é cobrado no ENEM, foi executada uma análise detalhada em todas as provas já realizadas desse exame, rastreando todas as questões centradas nesse conteúdo.

Esse capítulo apresentará todas essas questões resolvidas, especificando o número da questão e o ano em que ela apareceu na prova. Vale ressaltar ainda que foram analisadas todas as provas da cor amarela, dessa maneira, o número de cada questão só é compatível quando comparadas às provas dessa mesma cor.

**1. (QUESTÃO 141 – 2009)** O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo $94\%$ da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular $ABCD$, em que $AB = \dfrac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice $A$, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \dfrac{AB}{5}$ é lado do quadrado.




Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

**A)** duplicasse a medida do lado do quadrado.

**B)** triplicasse a medida do lado do quadrado.

**C)** triplicasse a área do quadrado.

**D)** ampliasse a medida do lado do quadrado em $4\%$.

**E)** ampliasse a área do quadrado em $4\%$.

**Solução:** A área total é dada por:

$$A_T = AB \cdot BC,$$

considerando $AB = \dfrac{BC}{2}$, temos:

$$A_T = \frac{BC}{2} \cdot BC = \frac{BC^2}{2} = 0,5BC^2.$$

Calculando a área do quadrado usado na construção da residência:

$$A_Q = AE^2,$$

fazendo $AE = \dfrac{AB}{5}$, temos

$$A_Q = \frac{AB^2}{5^2} = \frac{AB^2}{25},$$

tomando $AB = \dfrac{BC}{2}$, temos

$$A_Q = \frac{\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2}{25} = \frac{BC^2}{50} = 0,02BC^2.$$

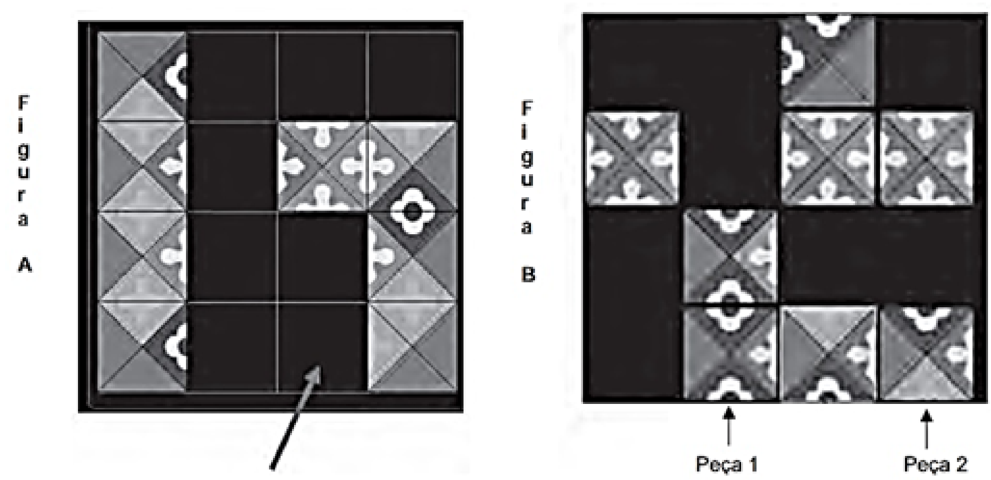
Usando regra de três para determinar a porcentagem da área do quadrado em relação à área do retângulo:

$$\begin{aligned} A_T = 0,5BC^2 &\rightarrow 100\% \\ A_Q = 0,02BC^2 &\rightarrow x\% \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos $x = 2\%$, para que os termos da questão sejam definidos, precisamos triplicar o a área da residência, visto que ela deve ser construída em $6\%$ da área total.

RESPOSTA: LETRA C.

2. **(QUESTÃO 145 – 2009)** As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há $8$ peças no tabuleiro da figura $A$ e $8$ peças no tabuleiro da figura $B$. As peças são retiradas do tabuleiro da figura $B$ e colocadas no tabuleiro da figura $A$ na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.




É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura $A$ colocando a peça

**A)** 1 após girá-la $90°$ no sentido horário.

**B)** 1 após girá-la $180°$ no sentido anti-horário.

**C)** 2 após girá-la $90°$ no sentido anti-horário.

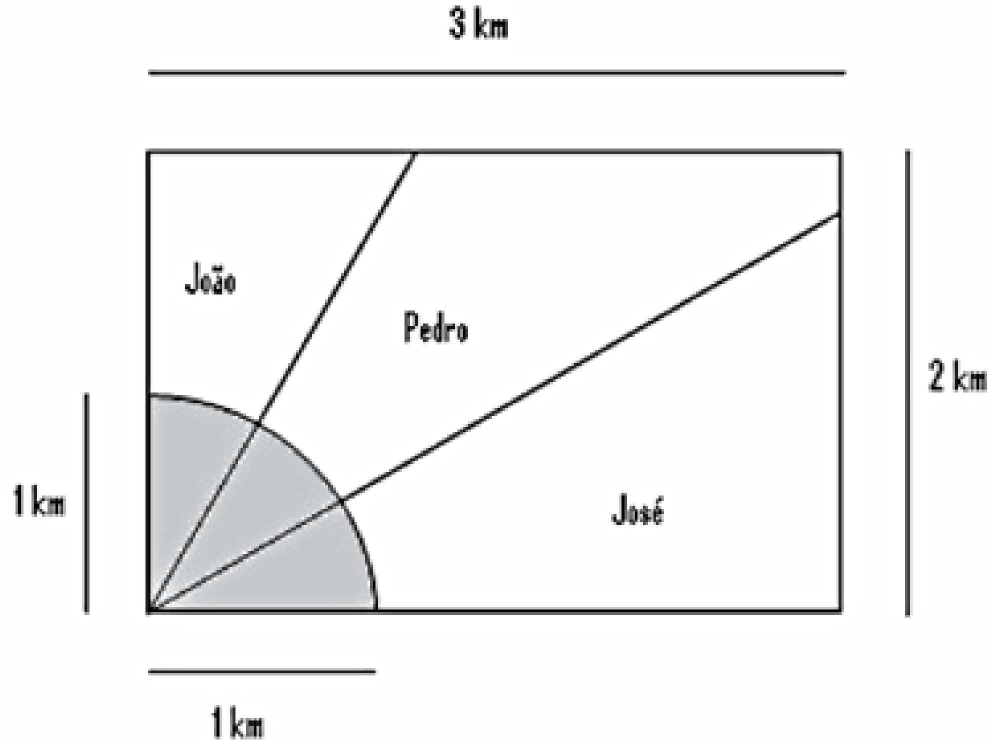
**D)** 2 após girá-la $180°$ no sentido horário.

**E)** 2 após girá-la $270°$ no sentido anti-horário.

**Solução:** Inicialmente deve ser utilizado raciocínio lógico e noção espacial para decidir qual será a peça adequada na solução do problema. Pode-se perceber que a peça correta necessita de uma parte desenho de uma flor na parte superior com o fundo da imagem em cinza claro, na borda direita, deve haver a metade de um triângulo em cinza claro e a única peça que apresenta essas duas imagens vizinha é a número 2, agora basta analisar em qual sentido e quantidade de graus a peça deve ser rotacionada para encaixe, e isso se dá após girá-la $90°$ no sentido anti-horário.

RESPOSTA: LETRA C.

**3. (QUESTÃO 164 – 2009)** Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de $3\,\text{km} \times 2\,\text{km}$ que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio $1\,\text{km}$ a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.




Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a (considere $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$).

**A)** $50\%$.

**B)** $43\%$.

**C)** $37\%$.

**D)** $33\%$.

**E)** $19\%$.

**Solução:** Observe que o terreno de João pode ser representado por um triângulo retângulo cujo ângulo interno da região que representa a área do ouro é de $30°$, visto que o ângulo reto foi dividido em três partes iguais. Deve-se calcular a medida do menor cateto do terreno de João:

Usando trigonometria para encontrar a medida do lado:

$$\text{sen}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{2},$$

tomando $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$, temos

$$0,58 = \frac{x}{2} \Longrightarrow x = 1,16.$$

Calculando a área da região de João:

$$A_T = \frac{2 \cdot 1,16}{2} = 1,16.$$

Usando regra de três para encontrar a porcentagem da área do terreno de João em relação à área total.

$$\begin{array}{rcl} 6 & \rightarrow & 100\% \\ 1,16 & \rightarrow & x\% \end{array}$$

Logo,

$$6x = 116 \Longrightarrow x = \frac{116}{6} \cong 19\%.$$

RESPOSTA: LETRA E.

**4.** **(QUESTÃO 165 – 2009)** Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião $A_I$ que partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em $DF$ e em 4.


SIQUEIRA, S. Brasil Regiões. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião $A_{II}$, que seguiu a direção que forma um ângulo de $135$ graus no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião $A_{III}$, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião $A_{II}$ ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

**A)** Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.

**B)** Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.

**C)** Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.

**D)** Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.

**E)** Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

**Solução:** Partindo de Brasília e formando um ângulo de $135°$ com a rota Brasília-Belém no sentido horário ficaria entre as cidades de Belo Horizonte, Rio de Janeiro e Espírito Santo, eliminando as alternativas **C**, **D** e **E**. Na conexão, ele seguiu no sentido anti-horário a $90°$ com a rota anterior, chegando, possivelmente, a alguma cidade da região Nordeste. Eliminando a alternativa **A**.

RESPOSTA: LETRA B.

**5.** **(QUESTÃO 168 – 2009)** O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

| biomas continentais brasileiros | área aproximada (km²) | área / total Brasil |
|---|---|---|
| Amazônia | 4.196.943 | 49,29% |
| Cerrado | 2.036.448 | 23,92% |
| Mata Atlântica | 1.110.182 | 13,04% |
| Caatinga | 844.453 | 9,92% |
| Pampa | 176.496 | 2,07% |
| Pantanal | 150.355 | 1,76% |
| Área Total Brasil | 8.514.877 | |

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de $120\,\text{m} \times 90\,\text{m}$) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

**A)** $1.400$

**B)** $14.000$

**C)** $140.000$

**D)** $1.400.000$

**E)** $14.000.000$

**Solução:** De acordo com o contexto da questão, a área do Pantanal deve ser dividida pela área do campo de futebol.

Calculando a área do campo de futebol:

$$A_C = 120 \cdot 90 = 10.800\,\mathrm{m}^2\,.$$

Observe que a área do campo está em $\mathrm{m}^2$ e a área do Pantanal está em $\mathrm{km}^2$ e, para que a divisão seja realizada, as unidades de medidas das respectivas áreas devem ser a mesma. Assim,

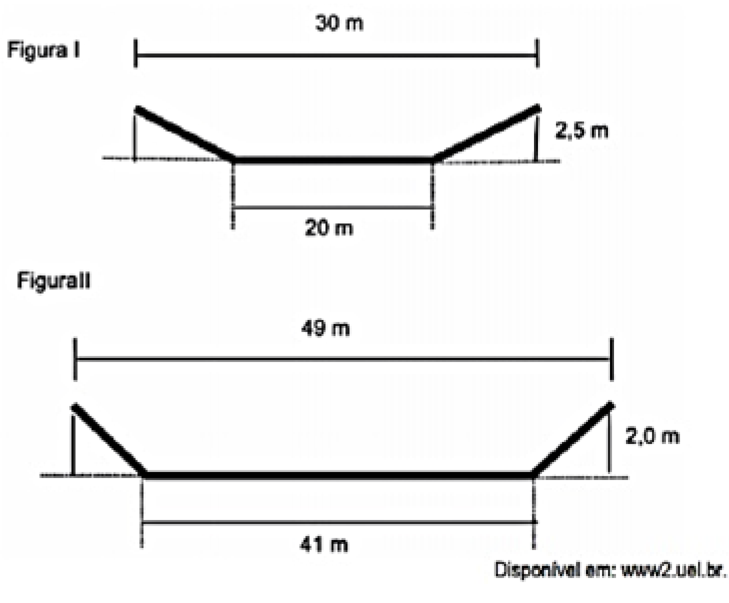
$$150.355\,\mathrm{km}^2 = 150.355.000.000\,\mathrm{m}^2\,.$$

Dividindo a área do Pantanal pela área do campo de futebol:

$$\frac{150.355.000.000}{10.800} \cong 14.000.000.$$

RESPOSTA: LETRA E.

**6. (QUESTÃO 169 – 2009)** A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de $1.050\,\mathrm{m}^3\,/s$. O cálculo da vazão, $Q$ em $m^3/s$, envolve o produto da área $A$ do setor transversal (por onde passa a água), em $m^2$, pela velocidade da água no local, $v$, em $\mathrm{m}\,/s$, ou seja, $Q = Av$.




Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

**A)** $90\,\mathrm{m}^3\,/s$.

**B)** $750\,\mathrm{m}^3\,/s$.

**C)** $1.050\,\mathrm{m}^3\,/s$.

**D)** $1.512\,\mathrm{m}^3\,/s$.

**E)** $2.009\,\mathrm{m}^3\,/s$.

**Solução:** Para encontrar a vazão da figura II, inicialmente, deve ser calculada a velocidade da água na figura I, pois a velocidade nas duas canaletas será a mesma: Calculando a área da figura I:

$$A_I = \frac{(30+20)\cdot 2,5}{2} = 25 \cdot 2,5 = 62,5\,\mathrm{m}^2\,.$$

Encontrando a velocidade da água na figura I:

$$Q = A \cdot V \Longrightarrow 1050 = 62,5 \cdot V \Longrightarrow V = \frac{1050}{62,5} = 16,8\,\mathrm{m}\,/s.$$

Calculando a área da figura II:

$$A_{II} = \frac{(49+41)\cdot 2}{2} = 90\,\mathrm{m}^2\,.$$

Calculando a vazão da água na segunda canaleta:

$$Q = A \cdot V = 90 \cdot 16,8 = 1512\,\mathrm{m}^3\,/s.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**7. (QUESTÃO 150 - 2010)** A loja Telas & Molduras cobra $20$ reais por metro quadrado de tela, $15$ reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de $10$ reais. Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para $8$ quadros retangulares ($25\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para $8$ quadros retangulares ($50\,\mathrm{cm} \times 100\,\mathrm{cm}$). O valor da segunda encomenda será

**A)** o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

**B)** maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

**C)** a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

**D)** menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

**E)** igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

**Solução:** Calculando a área e o perímetro, referente à moldura, da primeira encomenda:

$$A_1 = 25 \cdot 50 = 1250\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Observe que o valor e calculado em $\mathrm{m}^2$, portanto

$$1250\,\mathrm{cm}^2 = 0,125\,\mathrm{m}^2,$$

ou seja,

$$P_1 = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 50 = 150\,\mathrm{cm}\,.$$

O valor do perímetro e calculado de acordo com o meto, assim

$$150\,\mathrm{cm} = 1,5\,\mathrm{m}\,.$$

O valor final de cada quadro na primeira compra é dado por:

$$V_1 = 20 \cdot 0,125 + 15 \cdot 1,5 = 2,5 + 22,5 = 25.$$

Como são $8$ quadros:

$$8 \cdot 25 + 10 = 210.$$

Calculando a área e o perímetro da segunda encomenda:

$$A_2 = 50 \cdot 100 = 5000\,\mathrm{cm}^2 \Longrightarrow 5000\,\mathrm{cm}^2 = 0,5\,\mathrm{m}^2\,.$$

Calculando o perímetro:

$$P_2 = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 100 = 300\,\mathrm{cm} \Longrightarrow 300\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{m}\,.$$

O valor de cada quadro na segunda compra foi de:

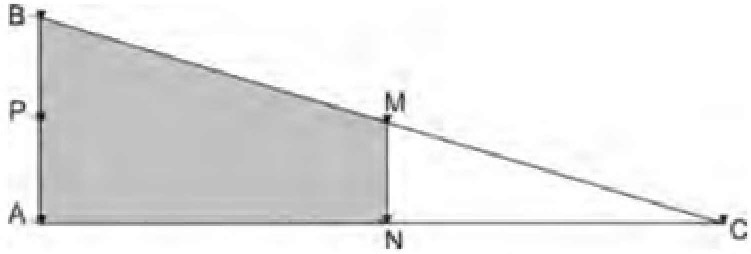
$$V_1 = 20 \cdot 0,5 + 15 \cdot 3 = 10 + 45 = 55.$$

São $8$ quadros, logo:

$$8 \cdot 55 + 10 = 450.$$

Analisando as alternativas podemos concluir que a resposta correta é a LETRA B.

**8. (QUESTÃO 152 – 2010)** Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, foram indicadas por letras.




A região demarcada pelas estacas $A$, $B$, $M$ e $N$ deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

**A)** à mesma área do triângulo $AMC$.

**B)** à mesma área do triângulo $BNC$.

**C)** à metade da área formada pelo triângulo $ABC$.

**D)** ao dobro da área do triângulo $MNC$.

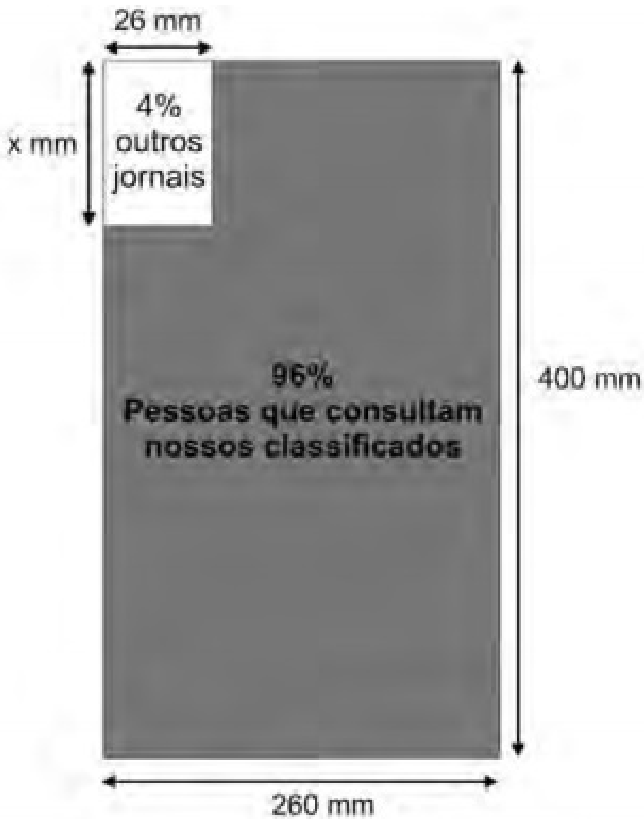
**E)** ao triplo da área do triângulo $MNC$.

**Solução:** Observe que $\overline{AC} \equiv \overline{NC}$, pois $N$ é ponto médio de $\overline{AC}$, que o ângulo $A\widehat{N}M = 90° = C\widehat{N}M$, como os triângulos $AMN$ e $CMN$ têm o lado $\overline{MN}$ em comum, podemos concluir que eles são congruentes pelo caso L.A.L.

Por outro lado, analisando os triângulos $MNC$ e $BPC$, percebe-se que $\overline{MN}//\overline{BP}$, pois $\overline{MN}$ e $\overline{AB}$ são perpendiculares ao lado $\overline{AC}$, que $\overline{MC} \equiv \overline{BM}$, visto que $M$ e ponto médio de $\overline{BC}$ e que

RESPOSTA LETRA E.

**9. (QUESTÃO 153 – 2010)** O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados




Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os $4\%$, deve ser de aproximadamente

**A)** $1\,\text{mm}$.

**B)** $10\,\text{mm}$.

**C)** $17\,\text{mm}$.

**D)** $160\,\text{mm}$.

**E)** $167\,\text{mm}$.

**Solução:** Calculando a área total do jornal:

$$A_T = 260 \cdot 400 = 104000\,\text{mm}^2\,.$$

Calculando a área da região destinada a outros classificados, chamada de $A_R$, temos:

$$A_R = x \cdot 26 = 26x\,\text{mm}^2\,.$$

Usando regra de três para encontrar o valor da medida de $x$:

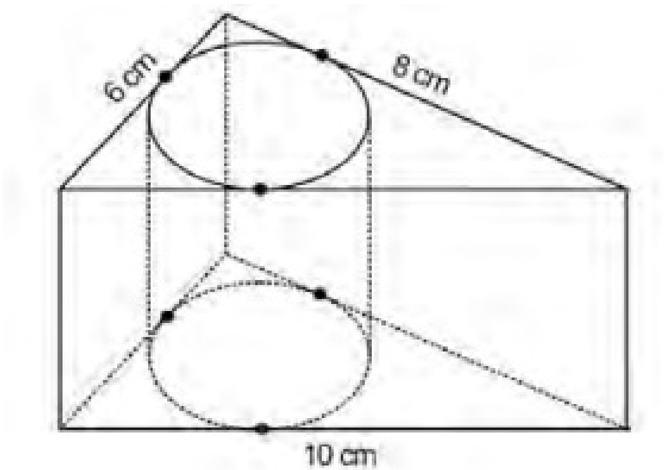
$$\begin{aligned} A_T = 104000 &\quad\longrightarrow\quad 100\% \\ A_R = 26x &\quad\longrightarrow\quad 4\% \end{aligned}$$

Assim,

$$2300x = 416000 \Longrightarrow x = \frac{416000}{2600} = 160.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**10. (QUESTÃO 164 – 2010)** Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são $6\,\mathrm{cm}$, $8\,\mathrm{cm}$ e $10\,\mathrm{cm}$ e cuja altura é $10\,\mathrm{cm}$. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.




O raio da perfuração da peça é igual a

**A)** $1\,\mathrm{cm}$.

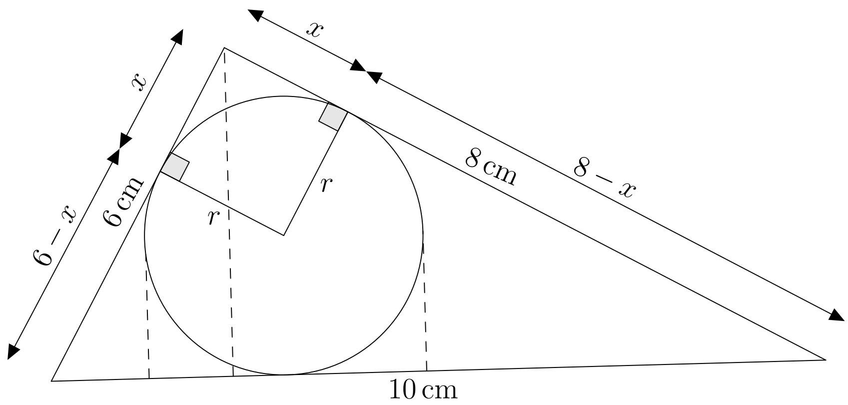
**B)** $2\,\mathrm{cm}$.

**C)** $3\,\mathrm{cm}$.

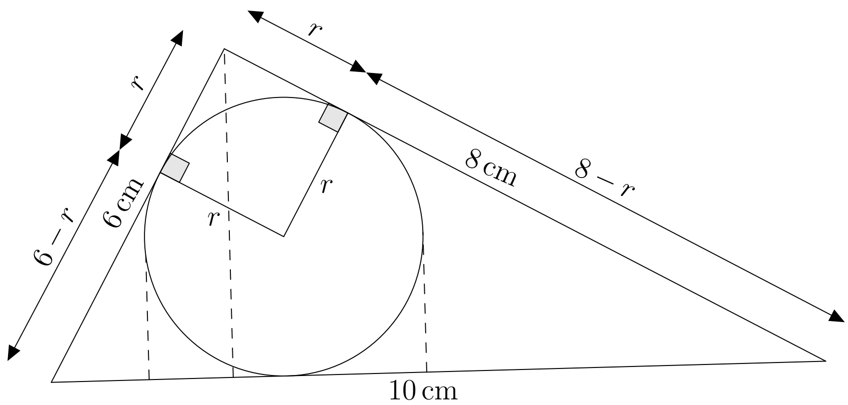
**D)** $4\,\mathrm{cm}$.

**E)** $5\,\mathrm{cm}$.

**Solução:** Para facilitar a compreensão da resolução da questão, divida cada lado do triângulo em duas partes uma maior e uma menor, sendo o local de interseção com a circunferência o ponto de divisão de cada lado. Observe que como esse triângulo possui lados medindo $6\,\mathrm{cm}$, $8\,\mathrm{cm}$ e $10\,\mathrm{cm}$ então o Teorema de Pitágoras é válido e esse triângulo é retângulo com ângulo reto entre os catetos de $6\,\mathrm{cm}$ e $8\,\mathrm{cm}$.




Sabe-se que todo segmento tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio, logo eles formam um ângulo de $90^\circ$ entre si. Outra ideia que deve ser observada é que quando dois segmentos possuem extremos em um mesmo ponto e o outro extremo é tangente à mesma circunferência então eles possuem a mesma medida. Assim pode-se concluir que as menores partes dos lados de $6\,\mathrm{cm}$ e do lado de $8\,\mathrm{cm}$ são congruentes, chamado de $x$ na figura. Observe o quadrilátero de lados $x$, $x$, $r$ e $r$, nele há $3$ ângulos retos e, dessa forma, o quarto ângulo também será reto, concluindo que é um paralelogramo. Todo paralelogramo possui os lados opostos congruentes, então concluímos que $x = r$.




Com isso, pode-se concluir os dados dessa segunda figura acima e tem-se que:

$$\begin{aligned} 10 = 8 - r + 6 - r = 14 - 2r \quad &\Longrightarrow \quad 2r = 14 - 10 = 4 \\ &\Longrightarrow \quad r = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

RESPOSTA LETRA B

**11. (QUESTÃO 142 – 2011)** Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, $180\,\mathrm{m}$ de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Terreno 1: | $55\,\mathrm{m}$ | por | $45\,\mathrm{m}$ |
| Terreno 2: | $55\,\mathrm{m}$ | por | $55\,\mathrm{m}$ |
| Terreno 3: | $60\,\mathrm{m}$ | por | $30\,\mathrm{m}$ |
| Terreno 4: | $70\,\mathrm{m}$ | por | $20\,\mathrm{m}$ |
| Terreno 5: | $95\,\mathrm{m}$ | por | $85\,\mathrm{m}$ |

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno.

**A)** $1$.

**B)** $2$.

**C)** $3$.

**D)** $4$.

**E)** $5$.

**Solução:** Inicialmente deve ser verificado quais são os terrenos que atendem as condições da prefeitura em ralação à medida máxima de tela que será utilizada para cercá-la: Calculando os perímetros:

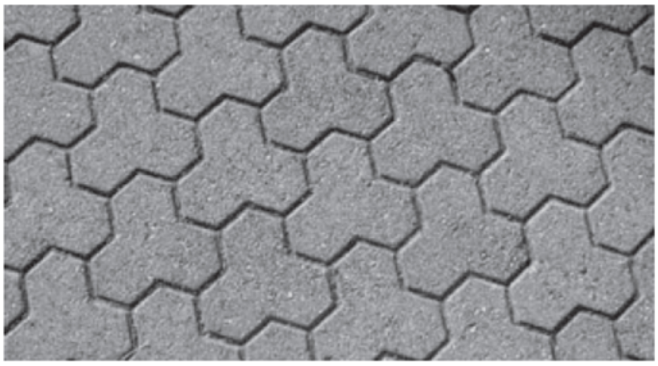
- TERRENO 1: $2 \cdot 55 + 2 \cdot 45 = 110 + 90 = 200$, não serve.
- TERRENO 2: $2 \cdot 55 + 2 \cdot 55 = 110 + 110 = 220$, não serve.
- TERRENO 3: $2 \cdot 60 + 2 \cdot 30 = 120 + 60 = 180$.
- TERRENO 4: $2 \cdot 70 + 2 \cdot 20 = 140 + 40 = 180$.
- TERRENO 5: $2 \cdot 95 + 2 \cdot 85 = 190 + 170 = 360$, não serve.

Em seguida será calculada a área dos dois terrenos que atendem às condições da tela: Calculando a área:

- Terreno 3: $60 \cdot 30 = 1800\,\mathrm{m}^2$;
- Terreno 4: $70 \cdot 20 = 1400\,\mathrm{m}^2$.

RESPOSTA: LETRA C.

**12.** (QUESTÃO 154 – 2011)



Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

**A)** $45^\circ$.

**B)** $60^\circ$.

**C)** $90^\circ$.

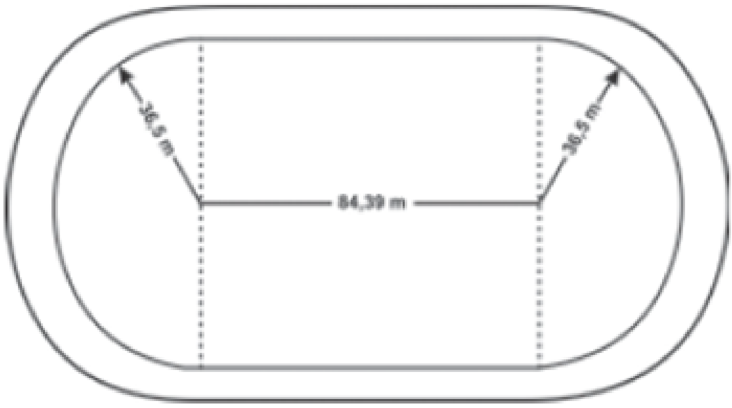
**D)** $120^\circ$.

**E)** $180^\circ$.

**Solução:** Observe que, após colocar um ponto no centro de um dos polígonos, cada polígono pode ser dividido em três partes iguais, o ângulo total formado no centro do polígono possui medida de $360^\circ$, assim cada ângulo central formado por cada uma das partes tem medida de $120^\circ$.

RESPOSTA: LETRA D.

**13. (QUESTÃO 170 – 2011)** O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de $9,76\,\text{m}$. As raias são numeradas do centro da pista para as extremidades e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.




BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus.** 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro,1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

**A)** $1$

**B)** $4$

**C)** $5$

**D)** $7$

**E)** $8$

**Solução:** Observe que o comprimento de cada raia é dado por:

- Cada pista paralela tem medida de $84,39$, logo:

$$2 \cdot 84,39 = 168,78\,\mathrm{m}\,.$$

- Pelos dois arcos de circunferências formam uma circunferência completa, assim: $2\pi r\,\mathrm{m}$.

O comprimento total:

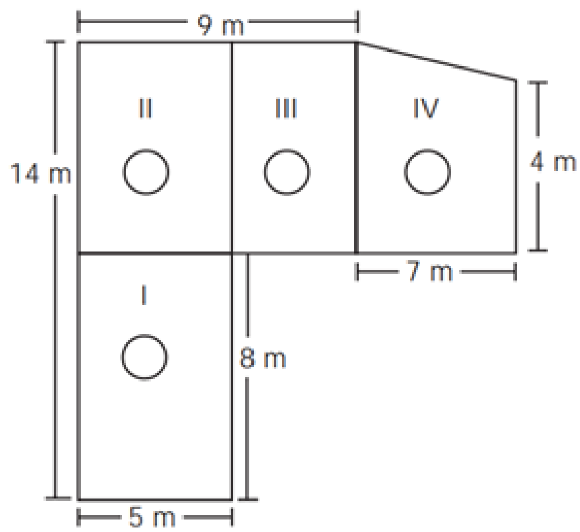
$$(168,78 + 2\pi r)\,\mathrm{m},$$

onde o raio varia de acordo com o número da raia na pista, dessa forma pode-se concluir que quanto maior for o número da raia maior será seu comprimento.

RESPOSTA: LETRA A.

**14. (QUESTÃO 148 – 2012)** Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo $A$, que consome $600\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{h}$ (gramas por hora) de gás propano e cobre

$35\,\mathrm{m}^2$ de área, ou modelo $B$, que consome $750\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{h}$ de gás propano e cobre $45\,\mathrm{m}^2$ de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).




Avaliando-se todas as informações, serão necessários

**A)** quatro unidades do tipo $A$ e nenhuma unidade do tipo $B$.

**B)** três unidades do tipo $A$ e uma unidade do tipo $B$.

**C)** duas unidades do tipo $A$ e duas unidades do tipo $B$.

**D)** uma unidade do tipo $A$ e três unidades do tipo $B$.

**E)** nenhuma unidade do tipo $A$ e quatro unidades do tipo $B$.

**Solução:** Para que Jorge saiba o tipo ideal de aquecedor que deve ser usado em cada cômodo, precisa-se do cálculo da área, portanto: Calculando a área dos cômodos:

- I: (este como é um retângulo de dimensões $5\,\mathrm{m} \times 8\,\mathrm{m}$)

$$A_I = 5 \cdot 8 = 40\,\mathrm{m}^2 - \text{modelo } B.$$

- II: (este cômodo é um retângulo de dimensões $5\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m}$)

$$A_{II} = 6 \cdot 5 = 30\,\mathrm{m}^2 - \text{modelo } A.$$

- III: (este cômodo é um retângulo de dimensões $6\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ .

$$A_{III} = 6 \cdot 4 = 24\,\mathrm{m}^2 - \text{ modelo } A.$$

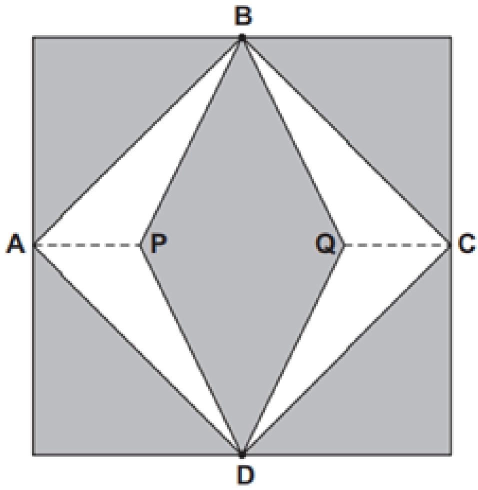
- IV: (este cômodo é um trapézio de bases $4\,\mathrm{m}$ e $6\,\mathrm{m}$ cuja altura é $7\,\mathrm{m}$.

$$A_{IV} = \frac{(4+6)\cdot 7}{2} = 35\,\mathrm{m}^2\,.$$

Como o aquecedor deve ser usado em área menor do que sua cobertura então será utilizado o aquecedor $B$ neste cômodo.

RESPOSTA: LETRA C.

**15. (QUESTÃO 149 – 2012)** Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo $1\,\mathrm{m}$, conforme a figura a seguir.




Nesta figura, os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ $30,00$ o $\mathrm{m}^2$, e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa R\$ $50,00$ o $\mathrm{m}^2$. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

**A)** R\$ $22,50$

**B)** R\$ $35,00$

**C)** R\$ $40,00$

**D)** R\$ $42,50$

**E)** R\$ $45,00$

**Solução:** Calculando a área da parte clara:

- Observe que há $4$ triângulos de base $\frac{1}{4}$ e altura $\frac{1}{2}$.

$$A_C = 4\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{2} = 4\cdot\frac{\frac{1}{8}}{2} = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2\,.$$

O valor, em R$, da área da parte clara:

$$50 \cdot \frac{1}{4} = 12,50.$$

- Calculando a área da parte escura. Observe ainda que a parte escura é a diferença entre a área do quadrado de lado medindo $1\,\mathrm{m}$ e a região clara, logo:

$$A_E = 1^2 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2\,.$$

O valor, em R$, da área da parte escura:

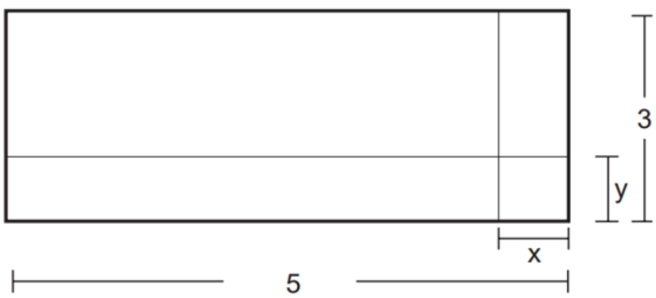
$$30 \cdot \frac{3}{4} = \frac{90}{4} = 22,50.$$

Logo, o valor total, em R$, é:

$$12,50 + 22,50 = 35,00.$$

RESPOSTA: LETRA B.

**16.** **(QUESTÃO 151 – 2012)** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento ($x$) no comprimento e ($y$) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.




Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por

**A)** $2xy$

**B)** $15 - 3x$

**C)** $15 - 5y$

**D)** $-5y - 3x$

**E)** $5y + 3x - xy$

**Solução:** Para encontrar a área perdida após a lavagem basta calcular a diferença entra a área antes da lavagem e a área após a lavagem, portanto:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 - (5-x) \cdot (3-y) &= 15 - (15 - 5y - 3x + xy) \\ &= 15 - 15 + 5y + 3x - xy \\ &= 5y + 3x - xy. \end{aligned}$$

RESPOSTA: LETRA E.

**17. (QUESTÃO 152 – 2012)** A capacidade mínima, em $\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$, de um aparelho de ar-condicionado, para ambientes sem exposição ao sol, pode ser determinada da seguinte forma:

- $600\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$ por $\mathrm{m}^2$, considerando-se até duas pessoas no ambiente;
- para cada pessoa adicional nesse ambiente, acrescentar $600\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$;
- acrescentar mais $600\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$ para cada equipamento eletroeletrônico em funcionamento no ambiente.

Será instalado um aparelho de ar-condicionado em uma sala, sem exposição ao sol, de dimensões $4\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m}$, em que permaneçam quatro pessoas e possua um aparelho de televisão em funcionamento. A capacidade mínima, em $\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$, desse aparelho de ar-condicionado deve ser

**A)** 12 000.

**B)** 12 600.

**C)** 13 200.

**D)** 13 800.

**E)** 15 000.

**Solução:** Calculando o total de $\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$ de acordo com a área:

$$4 \cdot 5 = 20\,\mathrm{m}^2\,.$$

Logo,

$$20 \cdot 600 = 12\,000\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}\,.$$

Calculando o total de $\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$ de acordo com o número de pessoas adicionais:

$$2 \cdot 600 = 1\,200\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}\,.$$

Deve-se acrescentar $600\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$ pelo uso da televisão

Logo, o total em $\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}$ é:

$$12\ 000 + 1\ 200 + 600 = 13\ 800\,\mathrm{BTU}\,/\,\mathrm{h}\,.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**18.** **(QUESTÃO 162 – 2012)** O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

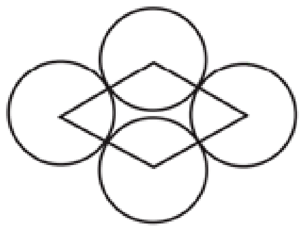


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

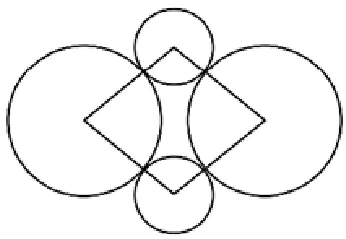


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

**A)** $300\%$.

**B)** $200\%$.

**C)** $150\%$.

**D)** $100\%$.

**E)** $50\%$.

**Solução:** Calculando o perímetro do losango da figura I:

- Chamando de $r$ o raio de cada circunferência na figura I, veja também que cada lado do losango é formado pelo raio de duas circunferências, assim

$$l_1 = 2r,$$

logo:

$$P_1 = 4 \cdot 2r = 8r.$$

- Calculando o perímetro do losango da figura 2: Observe que o lado do losango é formado pelo raio anterior e o raio da nova circunferência, que foi dobrado, assim

$$l_2 = r + 2r = 3r,$$

portanto:

$$P_2 = 4 \cdot 3r = 12r.$$

Agora, usemos regra de três para determinar o percentual de aumento. Veja que do primeiro perímetro para o segundo aumentaram $4r$, dessa forma:

$$\begin{aligned} 8r &\longrightarrow 100\% \\ 4r &\longrightarrow x\% \end{aligned}$$

Logo,

$$8rx = 400r \Longrightarrow x = \frac{400r}{8r} = 50.$$

RESPOSTA: LETRA E.

**19. (QUESTÃO 144 – 2013)** Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a $y$ centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com $N$ unidades e, na caixa, é especificada a área máxima $S$ que pode ser coberta pelas $N$ placas.

Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta $S$ não fosse alterada. A quantidade $x$, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

**A)** $\dfrac{N}{9}$

**B)** $\dfrac{N}{6}$

**C)** $\dfrac{N}{3}$

**D)** $3N$

**E)** $9N$

**Solução:** Calculando a área total que a primeira caixa, com $N$ placas, pode cobrir:

- Área do primeiro quadrado: $y^2$.
- Área total: $Ny^2$.

Calculando a área total que a segunda caixa pode cobrir: Área do segundo quadrado:

$$(3y)^2 = 9y^2.$$

Seja $x$ o total de placas do segundo quadrado, assim a área total é dada por:

$$x \cdot 9y^2.$$

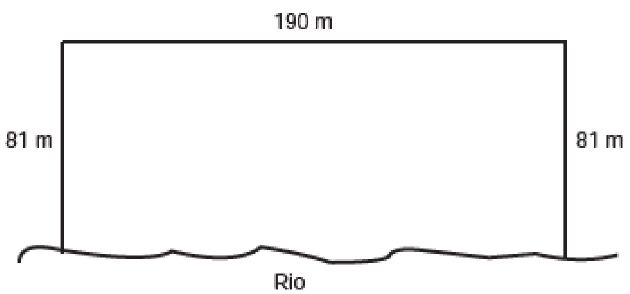
Observe que, de acordo com os dados da questão, a área total se mantém nas duas situações, dessa forma:

$$x \cdot 9y^2 = Ny^2 \Longrightarrow x = \frac{Ny^2}{9y^2} \Longrightarrow x = \frac{N}{9},$$

(quantidade de peças da segunda caixa)

RESPOSTA: LETRA A.

**20. (QUESTÃO 152 – 2013)** Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém $48$ metros de comprimento.




A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

**A)** 6.

**B)** 7.

**C)** 8.

**D)** 11.

**E)** 12.

**Solução:** Calculando o comprimento total que será cercado:

$$81 + 180 + 81 = 342\,\mathrm{m}\,.$$

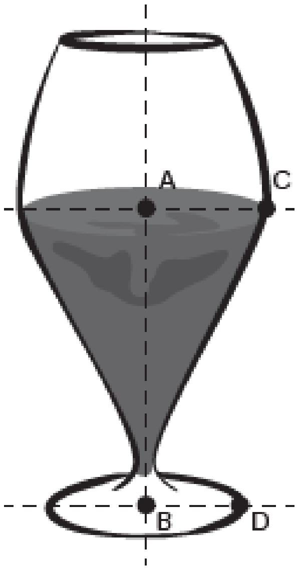
Para encontrar o total de rolos que devem ser comprados deve-se dividir o comprimento total pela medida cercada por um rolo:

$$\frac{342}{42} = 7,125.$$

Devem ser comprados $7$ rolos e ainda sobrará uma parte para ser cercada, com isso serão necessários $8$ rolos para cercar todo o terreno.

RESPOSTA: LETRA C.

**21. (QUESTÃO 171 – 2013)** Um restaurante utiliza, para servir bebidas, bandejas com bases quadradas. Todos os copos desse restaurante têm o formato representado na figura:




Considere que $AC = \frac{7}{5}BD$ e que $\ell$ é a medida de um dos lados da base da bandeja. Qual deve ser o menor valor da razão $\frac{\ell}{BD}$ para que uma bandeja tenha capacidade de portar exatamente quatro copos de uma só vez?

**A)** $2$

**B)** $\frac{14}{5}$

**C)** $4$

**D)** $\frac{24}{5}$

**E)** $\frac{28}{5}$

**Solução:** Observe que, como a bandeja possui base quadrada, ela deve ter dois copos com cada lateral. Veja ainda que nessa bandeja a base dos copos deve ficar nas extremidades e, no meio da bandeja, as bases dos copos não podem ser tangentes entre si pois a circunferência do centro do copo é maior do que a da base, dessa forma em cada lateral da bandeja deve haver dois raios da base do copo e dois raios do centro do copo. Dessa forma, temos:

- Raio da base: $\overline{BD}$;
- Raio do centro do copo: $\overline{AC}$.

Lado da base da bandeja:

$$\ell = 2BD + 2AC.$$

Agora, tomando $AC = \frac{7}{5}BD$, temos:

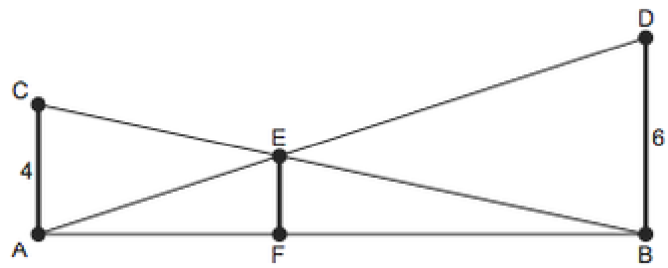
$$\begin{aligned}
\ell &= 2BD + 2 \cdot \frac{7}{5}BD \\
&= 2BD + \frac{14}{5}BD \\
&= BD\left(2 + \frac{14}{5}\right) \\
&= \frac{24}{5}BD.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\ell = \frac{24}{5}BD \Longrightarrow \frac{\ell}{BD} = \frac{24}{5}.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**22. (QUESTÃO 172 – 2013)** O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a $6\,\mathrm{m}$ e $4\,\mathrm{m}$. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.




Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

**A)** $1\,\mathrm{m}$

**B)** $2\,\mathrm{m}$

**C)** $2,4\,\mathrm{m}$

**D)** $3\,\mathrm{m}$

**E)** $2\sqrt{6}\,\mathrm{m}$

**Solução:** Observe que os triângulos $ABC$ e $EBF$ são semelhantes pelo caso A.A., pois $C\widehat{A}B = 90° = E\widehat{F}B$, $A\widehat{C}B \equiv F\widehat{E}B$, pois são ângulos correspondentes, visto que $\overline{EF}//\overline{AC}$.

Dessa forma, usando semelhança, temos:

$$\frac{EF}{AC} = \frac{FB}{AB},$$

como $AC = 4$, temos que

$$\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB}.$$

Analogamente, os triângulos $ADB$ e $AEF$ também são semelhantes pelo caso A.A., assim:

$$\frac{EF}{DB} = \frac{AF}{AB},$$

como $BD = 6$, temos

$$\frac{EF}{6} = \frac{AF}{AB}.$$

Somando as duas equações, temos:

$$\frac{EF}{4} + \frac{EF}{6} = \frac{FB}{AB} + \frac{AF}{AB} \Longrightarrow \frac{3EF + 2EF}{12} = \frac{FB + AF}{AB}.$$

Observe que $FB + AF = AB$, logo

$$\frac{5EF}{12} = \frac{AB}{AB} \Longrightarrow \frac{5EF}{12} = 1 \Longrightarrow EF = \frac{12}{5} = 2,4.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**23.** **(QUESTÃO 174 – 2013)** A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até $20\%$ nas dimensões lineares de uma peça.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam $30\,\text{cm}$ e $15\,\text{cm}$. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em $20\%$.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

**A)** $4\%$.

**B)** $20\%$.

**C)** $36\%$.

**D)** $64\%$.

**E)** $96\%$.

**Solução:** Calculando a área antes do cozimento:

$$A_{A_C} = 30 \cdot 15 = 450\,\text{cm}^2\,.$$

Calculando a área depois do cozimento: Observe que as dimensões diminuíram $20\%$, logo o que era $30\,\text{cm}$ retraiu para $24\,\text{cm}$ e o que era $15\,\text{cm}$, para $12\,\text{cm}$, portanto:

$$A_{D_C} = 24 \cdot 12 = 288\,\text{cm}^2\,.$$

Usando regra de três para determinar o percentual que a área depois do cozimento reduziu em relação à área antes do cozimento:

$$\begin{array}{ccc} 450 & \longrightarrow & 100\% \\ 288 & \longrightarrow & x\% \end{array}$$

Logo,

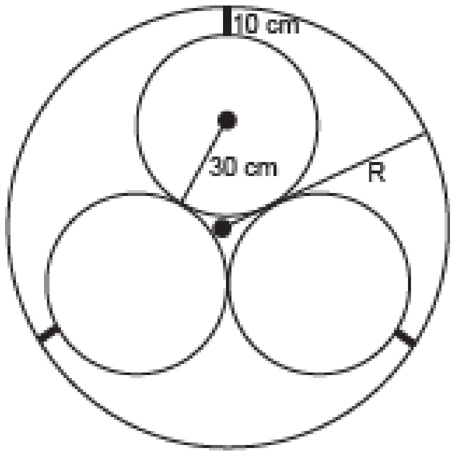
$$450 \cdot x = 28\,800 \Longrightarrow x = \frac{28\,800}{450} = 64\%.$$

Portanto a área diminuiu

$$100\% - 64\% = 36\%.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**24. (QUESTÃO 178 – 2013)** Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo $30\,\text{cm}$, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida $R$. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de $10\,\text{cm}$ entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:




Utilize $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$. O valor de $R$, em centímetros, é igual a:

**A)** $64,0$.

**B)** $65,5$.

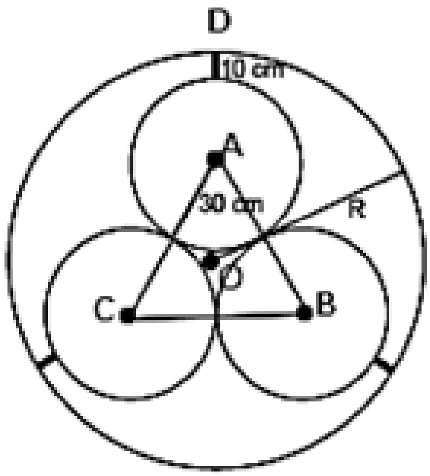
**C)** $74,0$.

**D)** $81,0$.

**E)** $91,0$.

**Solução:** Observe a nova figura criada a partir da figura na questão:

O triângulo $ABC$ é equilátero de lado medindo $60\,\text{cm}$. Veja ainda que o ponto $O$ é centro da circunferência maior e é também o encontro das alturas, ou seja, o ortocentro, como também o encontro das medianas, ou seja, o baricentro do triângulo equilátero. Dessa forma, podemos concluir que $OA = \dfrac{2}{3}$ da altura do triângulo $ABC$.




Calculando a altura do triângulo $ABC$:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{60\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}.$$

Calculando $OA$, temos:
$$OA = \frac{2}{3} \cdot 30\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\,\text{cm}\,.$$

Seja $r$ o raio da circunferência menor. Veja ainda que

$$R = OA + r + 10,$$

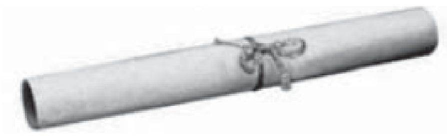
portanto:
$$R = 20\sqrt{3} + 30 + 10 = (20\sqrt{3} + 40)\,\text{cm}\,.$$

Usando $\sqrt{3} = 1,7$, temos:

$$R = 20 \cdot 1,7 + 40 = 34 + 40 = 74\,\text{cm}\,.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**25. (QUESTÃO 137 – 2014)** Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se $5$ voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura:



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

**A)** $\pi d$

**B)** $2\pi d$

**C)** $4\pi d$

**D)** $5\pi d$

**E)** $10\pi d$

**Solução:** Observe que o papel é enrolado $5$ vezes e que, neste caso, a medida do lado da folha corresponde ao quíntuplo da medida do comprimento da circunferência formada pela base do cilindro. Seja $\ell$ a medida do lado da folha, $r$ a medida do raio da base do cilindro e $d$ a medida do diâmetro da base do cilindro, temos:

$$\ell = 5 \cdot 2\pi r \Longrightarrow \ell = 5 \cdot \pi \cdot 2r,$$

considerando $d = 2r$, temos

$$\ell = 5 \cdot \pi \cdot d.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**26.** **(QUESTÃO 163 – 2014)** Uma pessoa possui um espaço retangular de lados $11,5\,\mathrm{m}$ e $14\,\mathrm{m}$ no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é

**A)** 4.

**B)** 8.

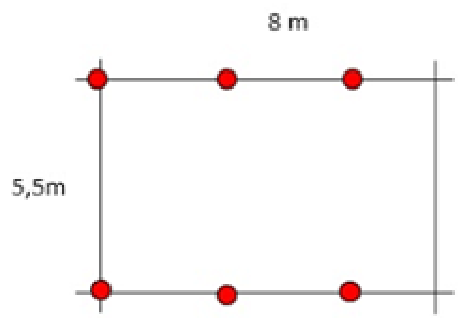
**C)** 9.

**D)** 12.

**E)** 20.

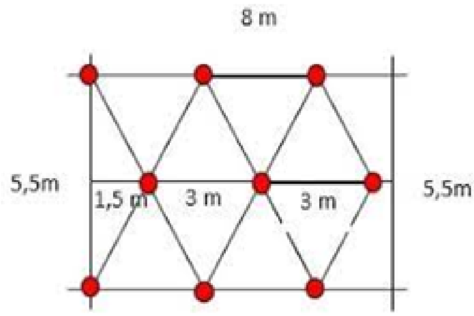
**Solução:** O terreno deve perder 3 metros em cada um dos lados, dessa forma cada muda de maçã pode ser plantada sem se preocupar com o espaçamento das laterais, assim as medidas dos lados para o plantio das mudas passam a ser $5,5\,\mathrm{m}$ e $8\,\mathrm{m}$.

Há duas maneiras de pensar na disposição das mudas, a primeira, conforme a figura abaixo.




Na lateral com $8\,\mathrm{m}$ pode-se adicionar uma muda no início, outra após $3\,\mathrm{m}$, outra com mais três metros e sobrarão $2\,\mathrm{m}$ que não pode ser colocada mais nenhuma muda, assim três no total. Na lateral com $5,5\,\mathrm{m}$ pode-se colocar uma muda no início e após $3\,\mathrm{m}$ outra muda, sobrando apenas $2,5\,\mathrm{m}$ que não pode ser acrescentada mais mudas, totalizando duas mudas. Para saber a quantidade total basta multiplicar $2 \cdot 3 = 6$, contudo não há resposta com essa opção, além disso essa não é a forma que mais cabe mudas.

A segunda forma, pensando nas mudas dispostas como na figura abaixo.




Pode-se colocar as mudas como sendo os vértices de triângulos equiláteros, que, de acordo com a figura ao lado, podem ser plantadas $9$ mudas. A única coisa que precisa ser verificada é se a distância, na lateral de $5,5\,\mathrm{m}$, entre duas mudas opostas é menor ou igual a $5,5\,\mathrm{m}$. Observe que essa distância é o dobro da altura de um triângulo equilátero com lado medindo $3\,\mathrm{m}$, dessa forma, seja $h$ a altura do triângulo equilátero e $d$ a distância entre as duas mudas:

$$d = 2 \cdot h,$$

considerando $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$d = 2 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2},$$

como $\ell = 3m$, temos:

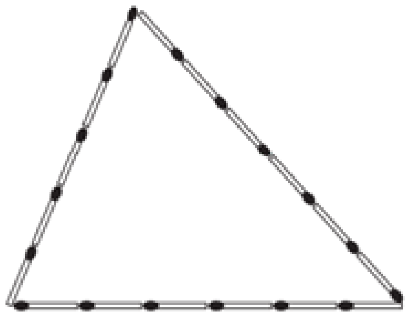
$$d = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

tomando $\sqrt{3} \cong 1,7$, temos:

$$d \cong 3 \cdot 1,7 = 5,1 \leq 5,5.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**27.** **(QUESTÃO 166 – 2014)** Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente $17$ palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente $6$ palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

**A)** $3$.

**B)** $5$.

**C)** $6$.

**D)** $8$.

**E)** $10$.

**Solução:** Para resolver essa questão precisa-se usar a condição de existência de triângulos: "A soma de dois lados quaisquer deve ser maior que o terceiro lado." Como todos os palitos possuem a mesma medida, pode-se encontrar todos os casos de dispor $3$ números cuja soma resulta em $17$, um dos lados tem medida equivalente a $6$ palitos e que conservam essa condição de existência, portanto os triângulos que podem ser formados possuem os lados medindo:

$$6, 3 \text{ e } 8$$

$$6, 4 \text{ e } 7$$

$$6, 6 \text{ e } 5$$

RESPOSTA: LETRA A.

**28. (QUESTÃO 168 – 2014)** Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

**A)** $\frac{1}{8}$

**B)** $\frac{7}{8}$

**C)** $\frac{8}{7}$

**D)** $\frac{8}{9}$

**E)** $\frac{9}{8}$

**Solução:** Para que o custo seja mantido a área das portas devem ser iguais.

Se o carpinteiro aumentou a altura da porta, chamando a altura anterior de $h$, então a nova altura será de

$$H = h + \frac{1}{8} \cdot h = \frac{9}{8}h.$$

A área antes de qualquer alteração nas dimensões da porta é de:

$$A_i = \ell \cdot h, \text{ (onde } \ell \text{ é a largura da porta).}$$

A área depois das mudanças nas dimensões:

$$A_f = L \cdot H.$$

Veja que

$$A_i = A_f \text{ e } H = \frac{9}{8}h,$$

igualando as duas equações e substituindo $H$, temos:

$$L \cdot \frac{9}{8}h = \ell \cdot h \Longrightarrow L = \frac{8\ell \cdot h}{9h} = \frac{8}{9}\ell.$$

Portanto a nova largura equivale a $\frac{8}{9}$ da largura anterior.

RESPOSTA: LETRA D.

**29. (QUESTÃO 174 – 2014)** Diariamente, uma residência consome $20\,160\,\mathrm{Wh}$. Essa residência possui $100$ células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões $6\,\mathrm{cm} \times 8\,\mathrm{cm}$. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, $24\,\mathrm{Wh}$ por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

**A)** Retirar $16$ células.

**B)** Retirar $40$ células.

**C)** Acrescentar $5$ células.

**D)** Acrescentar $20$ células.

**E)** Acrescentar $40$ células.

Veja que a diagonal de uma placa retangular de dimensões $6\,\mathrm{m}$ e $8\,\mathrm{m}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos possuem estas mesmas medidas, assim, usando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Longrightarrow d = \sqrt{100} = 10\,\mathrm{cm}\,.$$

Como cada centímetro de diagonal produz $24\,\mathrm{Wh}$ por dia, então cada placa irá produzir:

$$10 \cdot 24 = 240\,\mathrm{Wh} \text{ por dia.}$$

A questão deseja saber quantas placas serão necessárias para produzir $20\ 160\,\mathrm{Wh}$ por dia, logo:

$$\frac{20\ 160}{240} = 84,$$

dessa forma deve-se retirar $16$ cédulas das $100$.

RESPOSTA: LETRA A.

**30.** **(QUESTÃO 140 – 2015)** O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo $30\,\mathrm{cm}$. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem $18\,\mathrm{cm}$, $26\,\mathrm{cm}$, $30\,\mathrm{cm}$, $35\,\mathrm{cm}$ e $60\,\mathrm{cm}$. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a:

**A)** $18$

**B)** $26$

**C)** $30$

**D)** $35$

**E)** $60$

**Solução:** De acordo com os dados da questão, pode-se concluir que o triângulo equilátero do topo do prisma que é suporte de apoio da mesa estará inscrito no círculo de vidro. Usando a relação entre o raio de uma circunferência e o lado de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência, temos:

$$r = \frac{\ell\sqrt{3}}{3},$$

veja que $\ell = 30\,\mathrm{cm}$, assim

$$r = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3},$$

fazendo $\sqrt{3} = 1,7$, temos

$$r = 10 \cdot 1,7 = 17.$$

Portanto o raio deve ser maior ou igual a $17\,\mathrm{cm}$ para que cubra todo o suporte.

RESPOSTA: LETRA A.

**31. (QUESTÃO 143 – 2015)** Uma carga de $100$ contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de $10\,\mathrm{m}$ por $32\,\mathrm{m}$ foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

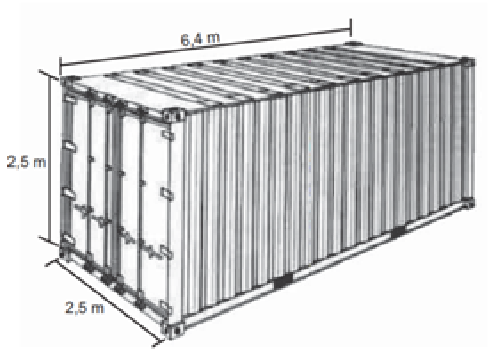



Figura 1


Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é:

**A)** $12,5\,\mathrm{m}$.

**B)** $17,5\,\mathrm{m}$.

**C)** $25,0\,\mathrm{m}$.

**D)** $22,5\,\mathrm{m}$.

**E)** $32,5\,\mathrm{m}$.

**Solução:** Inicialmente deve-se calcular quantos contêineres podem ser colocados na base da área, para isso precisa-se dividir a largura do terreno $(10\,\mathrm{m})$ pela largura do contêiner $(2,5\,\mathrm{m})$ e o comprimento do terreno $(32\,\mathrm{m})$ pelo comprimento do contêiner $(6,4\,\mathrm{m})$, portanto:

Quantidade de contêineres na largura do terreno:

$$\frac{10\,\mathrm{m}}{2,5\,\mathrm{m}} = 4.$$

Quantidade de contêineres no comprimento do terreno:

$$\frac{32\,\mathrm{m}}{6,4\,\mathrm{m}} = 5.$$

Quantidade de contêineres na base do terreno:

$$4 \cdot 5 = 20 \text{ contêineres}.$$

Veja que são necessárias $5$ pilhas de contêineres com $50$ contêineres em cada pilha para que os $100$ sejam colocados no terreno. Logo a altura máxima será de:

$$5 \cdot 2,5 = 12,5\,\text{m}\,.$$

RESPOSTA: LETRA A.

**32.** **(QUESTÃO 148 – 2015)** Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, de modo que $C$ e $D$ coincidam, e o mesmo ocorra com $A$ e $B$, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios $O$ e $N$, dos lados $\overline{FG}$ e $\overline{AF}$, respectivamente, e o ponto $M$ do lado $\overline{AD}$, de modo que $\overline{AM}$ seja igual a um quarto de $\overline{AD}$. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

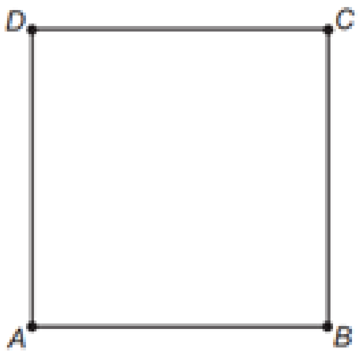


Figura 1

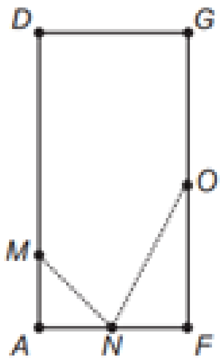
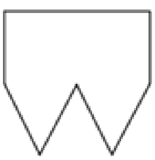
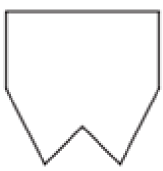
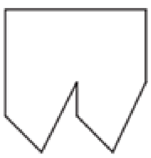


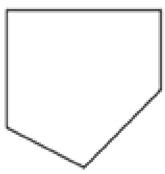
Figura 2

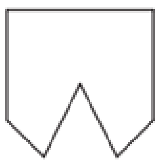
Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta. A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

**Solução:** Para resolução desse tipo de questão é necessário que haja raciocínio lógico e percepção geométrica. Observe que $\overline{ON}$ é o segmento que corta a parte dobrada da folha ficando, após a folha ser aberta, localizada na parte mais central da folha. O segmento $\overline{OC}$ é o corte menor e se localiza nos extremos da folha, após ser aberta. Neste contexto, podemos concluir que

$$ON < OC.$$

Veja ainda que os cortes centrais devem ter a mesma medida que é maior que os cortes extremos que, por sua vez, também são iguais entre si.

No item **A)** os quatro cortes são iguais, não podendo ser a solução.

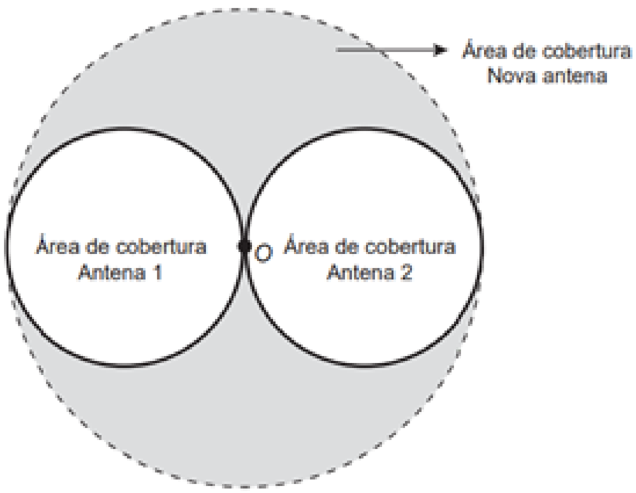
No item **B)** os cortes centrais são menores do que os cortes externos, logo não é solução.

No item **C)** não há simetria nos cortes, dessa forma, não é solução.

No item **D)** há apenas dois cortes, mas como a folha foi dobrada deveria haver $4$, não é solução.

RESPOSTA: LETRA E.

**33. (QUESTÃO 151 – 2015)** Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio $2\,\mathrm{km}$, cujas circunferências se tangenciam no ponto $O$, como mostra a figura.




O ponto $O$ indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

**A)** $8\pi$.

**B)** $12\pi$.

**C)** $16\pi$.

**D)** $32\pi$.

**E)** $64\pi$.

Veja que a área de cobertura das duas antenas é a mesma, dessa forma a área de cobertura das duas é dada por:

$$A_{1,2} = 2 \cdot \pi \cdot r^2,$$

substituindo $r$ por $2$, temos

$$A_{1,2} = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi \,\mathrm{km}^2\,.$$

Calculando a área de cobertura da nova antena. Observe que o raio da nova antena equivale ao diâmetro de uma das antenas anteriores, dessa forma a nova área é:

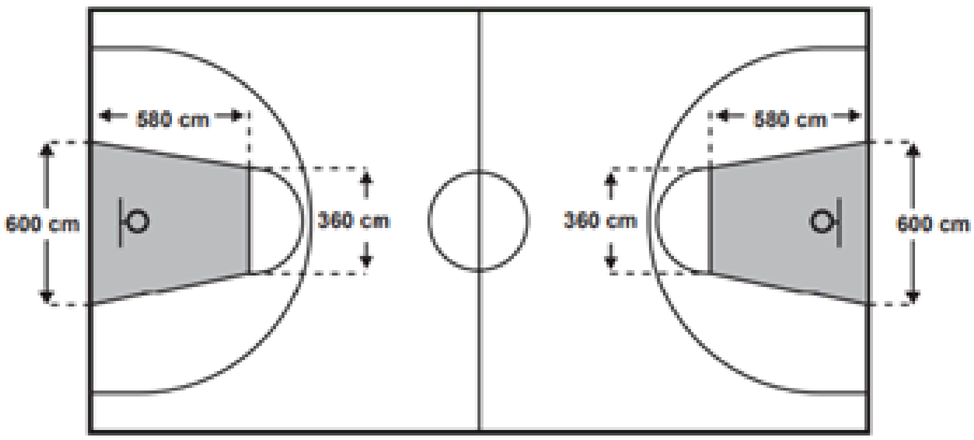
$$A_3 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \,\mathrm{km}^2\,.$$

Para determinar a área de cobertura ampliada, basta subtrair a antiga área da nova área, logo:

$$A_3 - A_{1,2} = 16\pi - 8\pi = 8\pi \,\mathrm{km}^2\,.$$

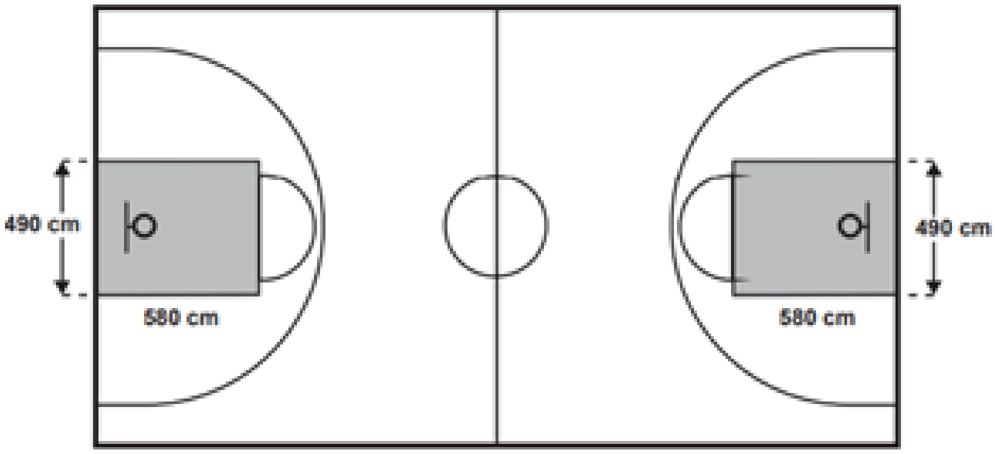
RESPOSTA: LETRA A.

**34.** **(QUESTÃO 161 – 2015)** O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em $2010$, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.




Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

**A)** aumento de $5\ 800\,\mathrm{cm}^2$.

**B)** aumento de $75\ 400\,\mathrm{cm}^2$.

**C)** aumento de $214\ 600\,\mathrm{cm}^2$.

**D)** diminuição de $63\ 800\,\mathrm{cm}^2$.

**E)** diminuição de $272\ 600\,\mathrm{cm}^2$.

**Solução:** De acordo com o enunciado da questão devemos subtrair a antiga área dos garrafões da nova área. Observe que o polígono que representa os antigos garrafões é um trapézio cujas bases maiores e menores possuem medidas, respectivamente, de $600\,\mathrm{cm}$ e de $360\,\mathrm{cm}$ e altura tem $580\,\mathrm{cm}$ de comprimento, dessa forma a área é:

$$A_T = \frac{(600+360)\cdot 580}{2} = 278\ 400 cm^2.$$

A nova região dos garrafões é representada por um retângulo cujas dimensões são $580\,\mathrm{cm} \times 490\,\mathrm{cm}$, assim a nova área é:

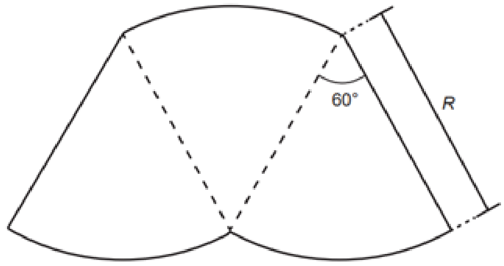
$$A_R = 580 \cdot 490 = 284\ 200\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Para determinar a alteração entre a nova área ocupada por cada garrafão é necessária a subtração entre a nova área e a antiga, assim:

$$A_R - A_T = 284\ 200 - 278\ 400 = 5\ 800\,\mathrm{cm}^2\,.$$

RESPOSTA: LETRA A.

**35. (QUESTÃO 171 – 2015)** O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a $60°$. O raio $R$ deve ser um número natural.




O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões $50\,\mathrm{m} \times 24\,\mathrm{m}$.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere $3,0$ como aproximação para $\pi$.

O maior valor possível para $R$, em metros, deverá ser

**A)** $16$.

**B)** $28$.

**C)** $29$.

**D)** $31$.

**E)** $49$.

**Solução:** Calculando a área da piscina retangular:

$$A_R = 50 \cdot 24 = 1\,200\,\mathrm{m}^2\,.$$

Observe que a piscina a ser construída representa um semicírculo de raio $R$, pois cada setor possui $60°$ como ângulo central e há três setores, dessa forma podemos juntá-los em um único setor cujo ângulo central será $180°$, assim a sua área será:

$$A_S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3R^2}{2} = 1,5R^2\,\mathrm{m}^2\,.$$

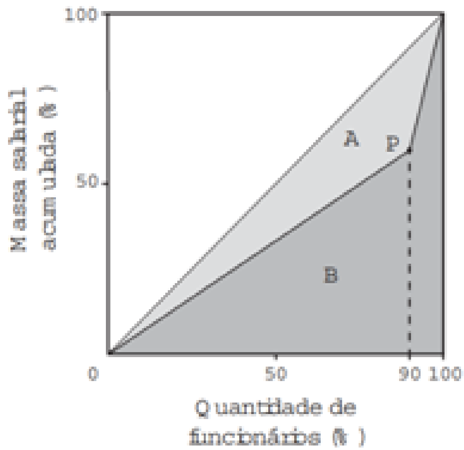
Veja ainda que a área da nova piscina deve ser menor do que a área da piscina retangular, assim:

$$\begin{aligned} A_S < A_R &\implies 1,5R^2 < 1\,200 \\ &\implies R^2 < \frac{1200}{1,5} = 800 \\ &\implies R < \sqrt{800} \\ &\implies R < 28,2. \end{aligned}$$

A questão pede o maior raio possível.

RESPOSTA: LETRA B.

**36. (QUESTÃO 154 – 2016)** A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos $10\%$ que recebem os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto $P$, cuja abscissa tem valor igual a $90$, como ilustrado na figura.




No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.

O Índice de Gini, que mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão $\dfrac{A}{A+B}$ em que $A$ e $B$ são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é $0,3$. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos $10\%$ dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser

**A)** $40\%$

**B)** $20\%$

**C)** $60\%$

**D)** $30\%$

**E)** $70\%$

**Solução:** É necessário que seja calculada a área da região $A$ e $B$ para que o índice de Gini seja utilizado.

Calculando a área da região $B$:

Veja que há um triângulo retângulo de base e altura medindo, respetivamente, $90$ e $P$ e há também um trapézio cujas bases medem $P$ e $100$ e possui altura medindo $10$. Assim:

$$B = \frac{90 \cdot P}{2} + \frac{(100 + P) \cdot 10}{2} = 45P + 500 + 5P = 50P + 500.$$

Calculando a área da região $A$:

Observe que a região $A$ é formada pela diferença entre a área de um triângulo retângulo, cuja base e altura têm medida igual a $100$, e a região $B$, logo:

$$A = 100 \cdot \frac{100}{2} - B = 5000 - (50P + 500) = 5000 - 50P - 500 = 4500 - 50P.$$

A questão informa que o índice de Gini deve ser igual a $0,3$, portanto:

$$\frac{A}{A + B} = \frac{4500 - 50P}{50P + 500 + 4500 - 50P} = \frac{4500 - 50P}{5000} = \frac{90 - P}{100} = 0,3.$$

Logo,

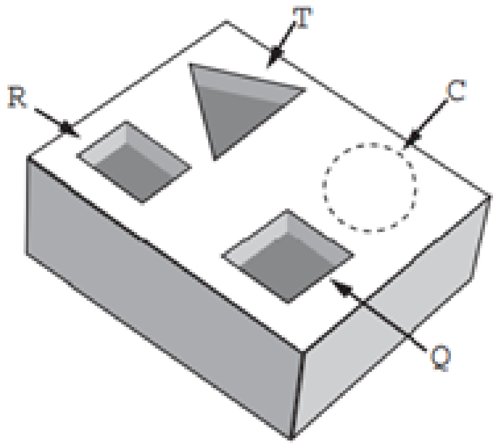
$$90 - P = 30 \Longrightarrow P = 60.$$

A questão deseja alterar o percentual da parcela recebida pelos $10\%$, que é do ponto $P$ para cima, logo:

$$100\% - 60\% = 40\%.$$

RESPOSTA: LETRA A.

**37. (QUESTÃO 159 – 2016)** Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com $10\,\mathrm{cm}$ de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada ($Q$), de lado $4\,\mathrm{cm}$, uma retangular ($R$), com base $3\,\mathrm{cm}$ e altura $4\,\mathrm{cm}$, e uma em forma de um triângulo equilátero ($T$), de lado $6,8\,\mathrm{cm}$. Falta realizar uma perfuração de base circular ($C$).




O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue:

(I) $3,8\,\mathrm{cm}$;

(II) $4,7\,\mathrm{cm}$;

(III) $5,6\,\mathrm{cm}$;

(IV) $7,2\,\mathrm{cm}$ e

(V) $9,4\,\mathrm{cm}$.

Considere $1,4$ e $1,7$ como aproximação para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

**A)** I

**B)** II

**C)** III

**D)** IV

**E)** V

**Solução:** Comparando o círculo e do quadrado temos que o quadrado não pode ser inscrito no círculo, do contrário o bloco de base quadrada caberia na perfuração circular, assim o diâmetro do círculo deve ser menor do que a diagonal do quadrado de lado $4\,\mathrm{cm}$.

Sejam $D$ o diâmetro do círculo e $d$ a diagonal do quadrado:

$$\begin{aligned} D < d &\implies d^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \\ &\implies d^2 = 32 \\ &\implies d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ &\implies D < 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Usando $\sqrt{2} = 1,4$, temos

$$D < 4 \cdot 1,4 \implies D < 5,6\,\text{cm}\,.$$

Por outro lado, o círculo não pode ser inscrito no quadrado, do contrário a peça de base circular caberia no espaçamento da peça de base quadrada, assim o diâmetro do círculo precisa ser maior que o lado do quadrado, portanto:

$$D > 4\,\text{cm}\,.$$

Veja que

$$4 < D < 5,6,$$

a única solução possível para essa análise é a broca de número II.

Não é necessária a análise entre os outros polígonos e o círculo pois todas as outras possíveis soluções já foram excluídas nesta análise.

RESPOSTA: LETRA B.

**38.** **(QUESTÃO 166 – 2016)** Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura $B$), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura $A$) cujo comprimento seja $7\,\text{m}$ maior do que a largura.

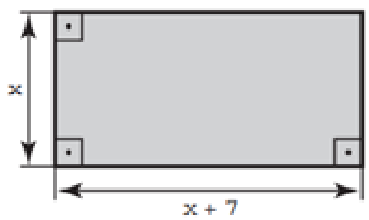


Figura A

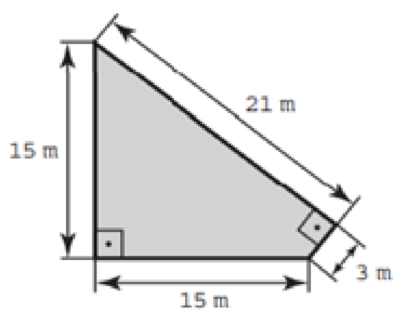


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

**A)** $7,5$ e $14,5$.

**B)** $9,0$ e $16,0$.

**C)** $9,3$ e $16,3$.

**D)** $10,0$ e $17,0$.

**E)** $13,5$ e $20,5$.

**Solução:** Observe a figura $B$, nela podemos formar dois triângulos retângulos, o primeiro possui catetos medindo $15\,\mathrm{m}$ e $15\,\mathrm{m}$ e o segundo, $3\,\mathrm{m}$ e $21\,\mathrm{m}$, dessa forma a área da figura $B$ é a junção das áreas desses dois triângulos, logo:

- $B_1 = 15 \cdot \dfrac{15}{2} = \dfrac{225}{2} = 112,5\,\mathrm{m}^2;$
- $B_2 = 3 \cdot \dfrac{21}{2} = \dfrac{63}{2} = 31,5\,\mathrm{m}^2\,.$

Logo,

$$B = B_1 + B_2 = 112,5 + 31,5 = 144\,\mathrm{m}^2\,.$$

Com isso, sabe-se que a área da figura $A$ é igual a área da figura $B$, assim:

$$A = x \cdot (x+7) = x^2 + 7x = 144 \Longrightarrow x^2 + 7x - 144 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-144) = 49 + 576 = 625.$$

Desse modo,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-7 \pm 25}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7+25}{2} = \dfrac{18}{2} = 9; \\ x_2 = \dfrac{-7-25}{2} = \dfrac{-32}{2} = -16. \end{cases}$$

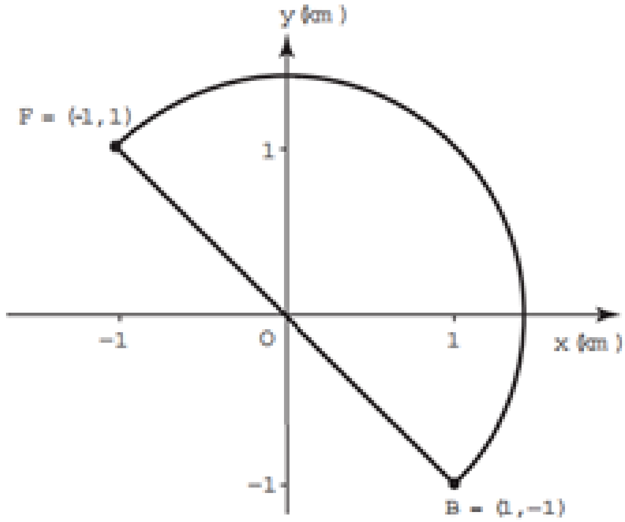
Como $x$ é uma medida de comprimento então não pode ser negativo, assim $x = 9$.

Portanto, as dimensões do terreno são $x$ e $x+7$ que equivalem à $9\,\mathrm{m}$ e $16\,\mathrm{m}$.

RESPOSTA: LETRA B.

**39. (QUESTÃO 171 – 2016)** Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte ($F$) até o reservatório de um novo bairro ($B$).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas $xOy$ da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.




Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de $1\,\mathrm{m}$ de galeria via segmento de reta demora $1,0\,\mathrm{h}$, enquanto que $1\,\mathrm{m}$ de construção de galeria via semicircunferência demora $0,6\,\mathrm{h}$. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use $3$ como aproximação para $\pi$ e $1,4$ como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

**A)** 1 260.

**B)** 2 520.

**C)** 2 800.

**D)** 3 600.

**E)** 4 000.

**Solução:** Para resolução dessa questão, é necessário que seja calculado o tempo gasto para construir os dois tipos de trajetos.

Calculando a distância da galeria em linha reta: Veja que $\overline{OB}$, é a diagonal de um quadrado de lado $1$, assim, usando Pitágoras:

$$OB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Longrightarrow OB = \sqrt{2} = 1,4\,\mathrm{km}\,.$$

Analogamente $OF$ também é uma diagonal de um quadrado de lado $1$, portanto $OF = 1,4$ e o trajeto completo em linha reta é $FB = 2,8\,\text{km}$.

Como a questão fala que para construção de cada metro em linha reta é necessário $1\,\text{h}$ de trabalho então:

$$2,8\,\text{km} = 2\,800\,\text{m} \Longrightarrow 2800\,\text{h}\,.$$

Calculando a distância da galeria se construída usando o formato da semicircunferência: Observe que o raio da semicircunferência é $OF = 1,4$, dessa maneira:

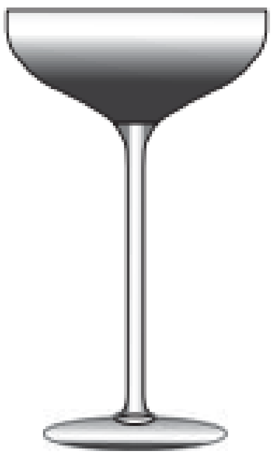
$$S_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1,4}{2} = 3 \cdot 1,4 = 5,2\,\text{km}\,.$$

Como $1\,\text{m}$ na construção da semicircunferência equivale a $0,6\,\text{h}$, então:

$$5,2\,\text{km} = 5\,200\,\text{m} \Longrightarrow 5200 \cdot 0,6 = 3120\,\text{h}\,.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**40.** **(QUESTÃO 137 – 2017)** Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio $4\,\text{cm}$ e $5\,\text{cm}$, respectivamente.



A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a:

**A)** $192$.

**B)** $300$.

**C)** $304$.

**D)** $320$.

**E)** $400$.

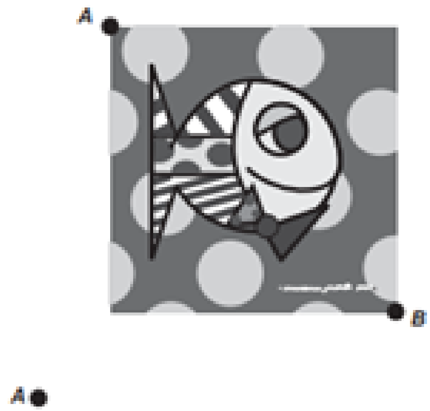
**Solução:** Na largura da bandeja deve conter a mesma medida do diâmetro do círculo da base da taça, pois não haverá taças vizinhas nas laterais, assim, considerando $b$ a base da bandeja, $b = 8\,\text{cm}$. Para o comprimento, observe que nos extremos da bandeja leva-se em conta o raio da base da taça, pois o raio da borda superior da taça pode ficar do lado de fora da bandeja, já na parte central deve-se considerar três diâmetros da borda superior das taças, que é o necessário para completar as quatro taças, chamando de $c$ o comprimento, temos $c = 38\,\text{cm}$.

Calculando a área da bandeja:

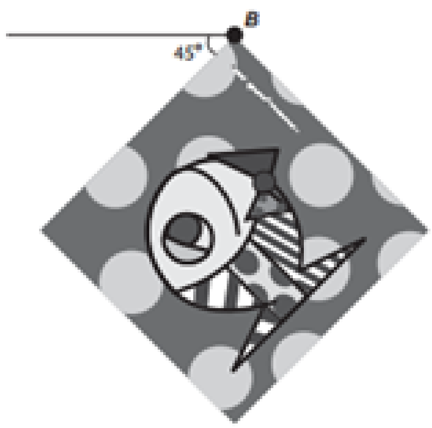
$$A = b \cdot c = 8 \cdot 38 = 304\,\text{cm}^2\,.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**41. (QUESTÃO 147 – 2017)** A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos $A$ e $B$.




Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de $45°$ com a linha do horizonte.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a $360°$

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

**A)** $90°$ no sentido horário.

**B)** $135°$ no sentido horário.

**C)** $180°$ no sentido anti-horário.

**D)** $270°$ no sentido anti-horário.

**E)** $315°$ no sentido horário.

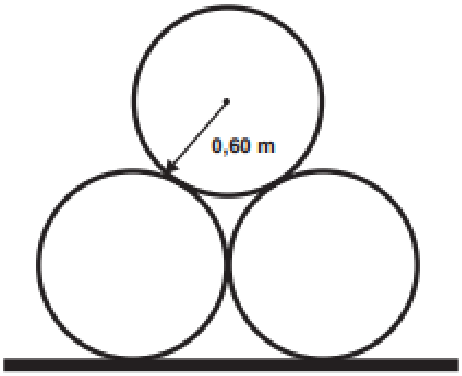
**Solução:** Para que o quadro volte ao lugar original, vamos encontrar quantos graus ele girou e em qual sentido, dessa forma, basta realizar o movimento contrário e ele voltará ao estado de origem. Perceba que o quadro girou $90° + 45° = 135°$ no sentido anti-horário. Como queremos o movimento contrário, então ele deve ser girado $135°$ no sentido horário.

RESPOSTA: LETRA B.

**42.** **(QUESTÃO 157 – 2017)** A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas. Caminhão entala em viaduto no Centro Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja $0,60\,\mathrm{m}$ e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a $1,30\,\mathrm{m}$ do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.




A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, $0,50\,\mathrm{m}$ menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

**A)** $2,82$.

**B)** $3,52$.

**C)** $3,70$.

**D)** $4,02$.

**E)** $4,20$.

**Solução:** Observe a imagem dos três canos empilhados, a altura do empilhamento é

$$H = CD + EC + AF.$$

onde $CD$ e $AF$ são raios dos canos e $EC$ é a altura do triângulo equilátero cujos vértices estão nos centros das circunferências e o lado tem medida de $\ell = 1,2\,\mathrm{m}$.

Calculando a medida de $\overline{EC}$:

$$EC = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{1,2\sqrt{3}}{2} = 0,6\sqrt{3},$$

fazendo $\sqrt{3} = 1,7$, temos:

$$EC = 0,6 \cdot 1,7 = 1,02\,\mathrm{m}\,.$$

Assim a altura é:

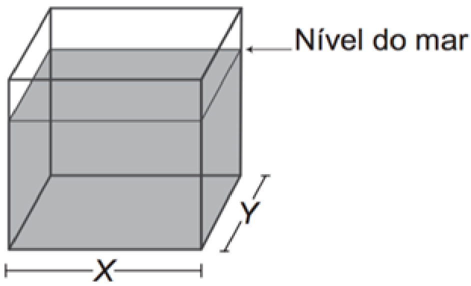
$$H = CD + EC + AF = 0,6 + 1,02 + 0,6 = 2,22\,\mathrm{m}\,.$$

Veja que a questão pede a altura do viaduto que precisa ser $0,5\,\mathrm{m}$ maior que a altura total da carroceria e a carga do caminhão. A altura da carroceria é $1,30\,\mathrm{m}$, a da carga é $2,22\,\mathrm{m}$. Logo, altura do viaduto é:

$$1,30 + 2,22 + 0,50 = 4,02\,\mathrm{m}\,.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**43.** **(QUESTÃO 168 – 2017)** Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente $100$ metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.




Quais devem ser os valores de $X$ e de $Y$, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

**A)** $1$ e $49$

**B)** $1$ e $99$

**C)** $10$ e $10$

**D)** $25$ e $25$

**E)** $50$ e $50$

De acordo com os dados da questão, o perímetro da região é

$$2X + 2Y = 100 \Longrightarrow X + Y = 50.$$

Isolando $Y$, temos:

$$Y = 50 - X.$$

Por outro lado, a área da região retangular é:

$$A = X \cdot Y,$$

substituindo $Y$ por $50 - X$, temos

$$A = X(50 - X) = 50X - X^2.$$

A área será máxima no $X$ do vértice da parábola da equação do 2º grau. Logo:

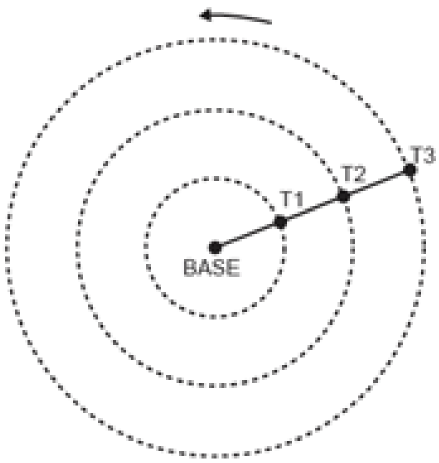
$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2 \cdot (-1)} = 25.$$

Como $Y = 50 - X$, então

$$Y = 50 - 25 = 25.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**44. (QUESTÃO 175 – 2017)** Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move-se com velocidade constante.



Um pivô de três torres ($T_1$, $T_2$ e $T_3$) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre $T_1$ são iguais a $50\,\mathrm{m}$. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em $25$ horas.

Use $3$ como aproximação para $\pi$.

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres $T_1$, $T_2$ e $T_3$ devem ser, em metro por hora, de:

**A)** $12$, $24$ e $36$.

**B)** $6$, $12$ e $18$.

**C)** $2$, $4$ e $6$.

**D)** $300$, $1\,200$ e $2\,700$.

**E)** $600$, $2\,400$ e $5\,400$.

**Solução:** Para obter as velocidades em metro por hora, deve-se dividir o comprimento das três torres ($T_1$, $T_2$ e $T_3$) pelo tempo necessário para efetuar a volta completa.

Calculando os comprimentos das circunferências de $T_1$, $T_2$ e $T_3$ cujos raios são $50\,\mathrm{m}$, $100\,\mathrm{m}$ e $150\,\mathrm{m}$, respectivamente.

- $T_1 = 2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 50 = 300\,\mathrm{m}\,.$

  Velocidade de $T_1$:
  $$V_1 = \frac{300}{25} = 12\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{h}\,.$$

- $T_2 = 2 \cdot 3 \cdot 100 = 600\,\mathrm{m}\,.$

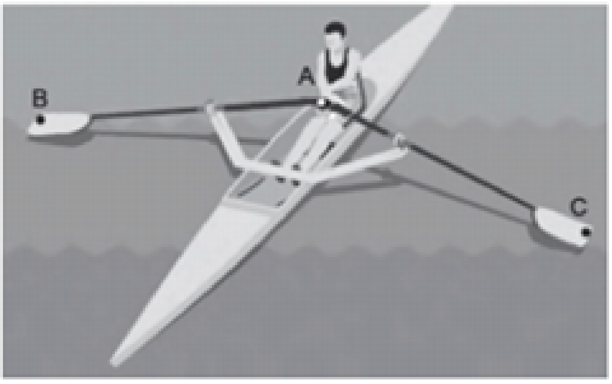
  Velocidade de $T_2$:
  $$V_2 = \frac{600}{25} = 24\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{h}\,.$$

- $T_3 = 2 \cdot 3 \cdot 150 = 900\,\mathrm{m}\,.$

  Velocidade de $T_3$:
  $$V_3 = \frac{900}{25} = 36\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{h}\,.$$

RESPOSTA: LETRA A.

**45. (QUESTÃO 139 – 2018)** O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.




Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto $A$ e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos $B$ e $C$. Esses três pontos formam um triângulo $ABC$ cujo ângulo $B\widehat{A}C$ tem medida de 170°.

O tipo de triângulo com vértices nos pontos $A$, $B$ e $C$, no momento em que o remador está nessa posição, é

**A)** retângulo escaleno.

**B)** acutângulo escaleno.

**C)** acutângulo isósceles.

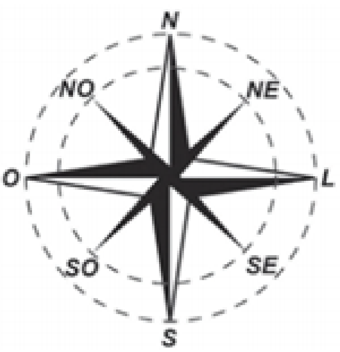
**D)** obtusângulo escaleno.

**E)** obtusângulo isósceles.

**Solução:** Como há um ângulo obtuso ($B\widehat{A}C = 170°$) então já temos um triângulo obtusângulo. Observe que há dois lados que são representados pelos remos, dessa forma, pode-se classificar o triângulo em isósceles. Portanto $ABC$ é um triângulo obtusângulo isósceles.

RESPOSTA: LETRA E.

**46. (QUESTÃO 155 – 2018)** A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: $135°$ no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: $60°$ no sentido horário;
- 3ª mudança: $45°$ no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente. Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

**A)** $75°$ no sentido horário.

**B)** $105°$ no sentido anti-horário.

**C)** $120°$ no sentido anti-horário.

**D)** $135°$ no sentido anti-horário.

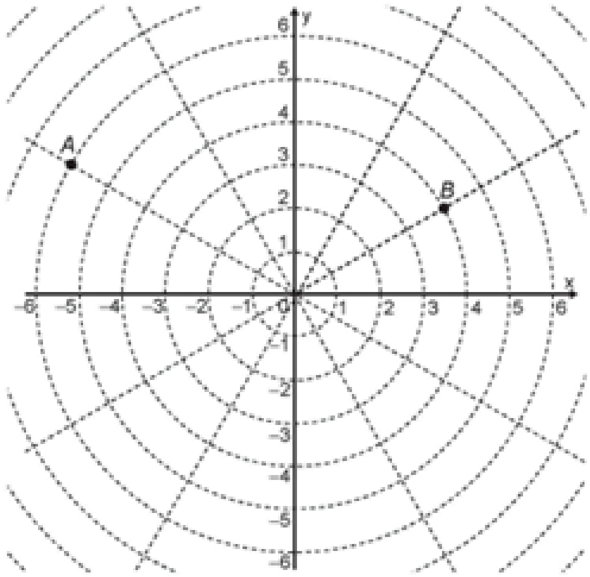
**E)** $165°$ no sentido horário.

**Solução:** Observe que a lente está apontada inicialmente no sentido oeste, após a 1ª mudança ela aponta para sudeste (SE), após a 2ª, ficou entre o sudoeste e o sul ($15°$ mais próximo do sul), após a 3ª ficou entre sudeste e sul ($15°$ mais próximo do sudeste). Para que ele retorne a posição original, a lente precisa percorrer $30°$ no sentido horário ao sul e depois $90°$ no mesmo sentido até o oeste e, finalmente, $45°$ até o noroeste, ainda no sentido horário. Somando tudo, temos:

$$30° + 45° + 90° = 165° \text{ no sentido horário.}$$

RESPOSTA: LETRA E.

**47. (QUESTÃO 157 – 2018)** Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por $12$ semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$ conforme a figura.




Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem $(0; 0)$.

Considere o valor de $\pi$ com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto $B$ até o ponto $A$, um objeto deve percorrer uma distância igual a:

**A)** $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+8$

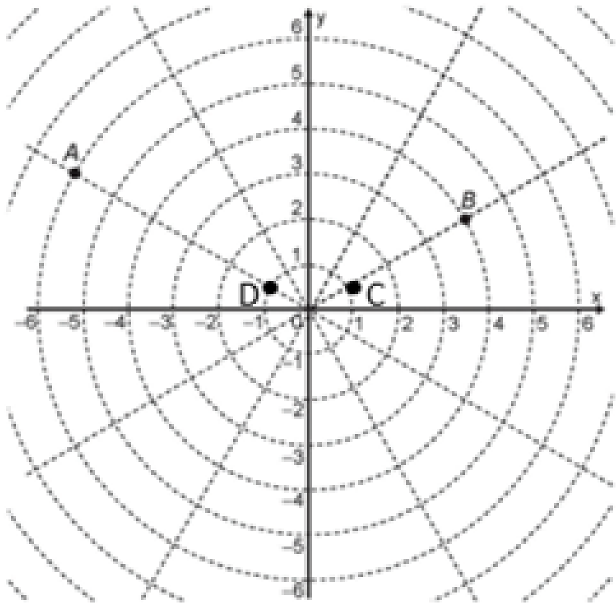
**B)** $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 1}{3}+6$

**C)** $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 3}{3}+4$

**D)** $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 4}{3}+2$

**E)** $\dfrac{2\cdot\pi\cdot 5}{3}+2$

**Solução:** Observe a imagem abaixo. A menor distância é percorrendo pelo segmento $\overline{BC}$ cuja medida é $3$, até chegar ao arco da menor circunferência, o arco $\widehat{CD}$, em seguida pelo segmento $\overline{AD}$, cuja medida é $5$.




Calculando o comprimento de $\widehat{CD}$. Veja que a circunferência que contêm os pontos $D$ e $C$ possui raio $r = 1$ e está dividida em $12$ partes iguais, das quais o arco $\widehat{CD}$ contém $4$ dessas partes. Logo:

$$DC = \frac{4}{12} \cdot 2\pi r = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3}.$$

O comprimento total do ponto $B$ ao ponto $A$ é:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 3 + 5 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8.$$

RESPOSTA: LETRA A.

**48.** **(QUESTÃO 169 – 2018)** Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem $2\,\text{cm}$.

O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

**A)** $14$

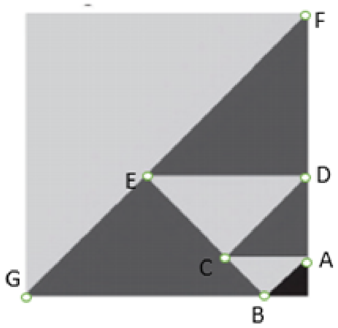
**B)** $12$

**C)** $7\sqrt{2}$

**D)** $6+4\sqrt{2}$

**E)** $6+2\sqrt{2}$

**Solução:** Identificando cada vértice dos triângulos com letras, para que o lado $\ell$ do quadrado seja encontrado, deve-se encontrar as medidas de comprimento dos lados dos triângulos partindo do menor e usando, sempre que possível, o Teorema de Pitágoras.




Observe que o menor triângulo é retângulo cujos catetos medem $2\,\text{cm}$ cada, logo podemos encontrar a medida de $\overline{AB}$, temos:

$$(AB)^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \Longrightarrow AB = 2\sqrt{2}\,\text{cm}\,.$$

Veja que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, assim:

$$AB = BC = 2\sqrt{2}\,\text{cm}\,.$$

Encontrando o valor de $\overline{CD}$, temos:

$$(AC)^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4\cdot 2 + 4\cdot 2 = 16 \Longrightarrow AC = \sqrt{16} = 4.$$

Além disso, $\overline{AD} \equiv \overline{AC}$. Assim pode-se concluir que

$$AD = AC = 4.$$

Encontrando o valor de $\overline{CD}$, temos:

$$(CD)^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Longrightarrow CD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}\,.$$

Sabe-se que $\overline{CD} \equiv EC$, assim

$$CD = EC = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}\,.$$

Encontrando a medida de $\overline{ED}$, temos

$$(ED)^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 32 + 32 = 64 \Longrightarrow ED = \sqrt{64} = 8\,\mathrm{cm}\,.$$

Deduzindo-se que $\overline{ED} \equiv \overline{DF}$, temos que

$$ED = DF = 8,$$

pode-se encontrar a medida de $\overline{EF}$, assim

$$(EF)^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128 \Longrightarrow EF = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}\,.$$

Observe que $\overline{EG} \equiv \overline{EB}$. Assim,

$$EG = EB = EC + CB = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}\,.$$

Conclui-se que o comprimento da diagonal $\overline{GF}$ do quadrado, é

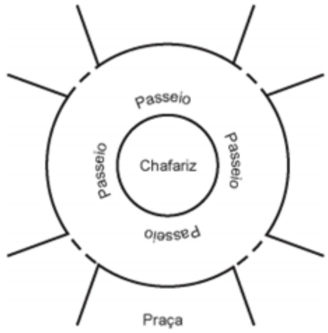
$$GF = EG + EF = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

Usando a fórmula que envolve a diagonal do quadrado e o lado, temos:

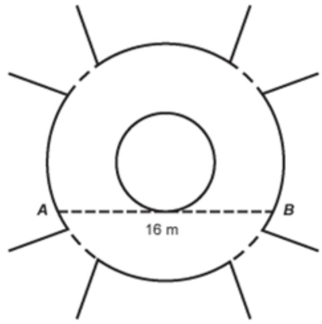
$$GF = \ell\sqrt{2} \Longrightarrow \ell = \frac{GF}{\sqrt{2}} = \frac{GF\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot 2 = 12.$$

RESPOSTA: LETRA B.

**49. (QUESTÃO 179 – 2018)** A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos. O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos $A$ e $B$, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta $\overline{AB}$: $AB = 16\,\mathrm{m}$.




Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.




A medida encontrada pelo engenheiro foi

**A)** $4\pi$.

**B)** $8\pi$.

**C)** $48\pi$.

**D)** $64\pi$.

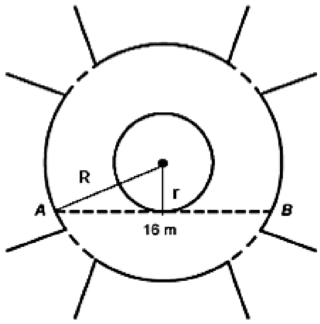
**E)** $192\pi$.

**Solução:** Observe que para calcular a área da região de passeio conclui-se que essa área representa uma coroa circular cuja área é dada pela fórmula:

$$C_C = (R^2 - r^2)\pi,$$

onde $R$ é o raio da circunferência maior e $r$ o da menor.

Observe a figura abaixo onde temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $R$ e os catetos são $8\,\mathrm{m}$ e $r$.




Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = r^2 + 8^2 = r^2 + 64 \Longrightarrow 64 = R^2 - r^2.$$

Igualando as duas equações temos que:

$$C_C = (R^2 - r^2)\pi = 64\pi cm^2.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**50.** **(QUESTÃO 139 – 2019)** Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrada na figura.


Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes é o mesmo, todas têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir:


Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é:

**A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

**Solução:** Observe que ao meio dia o sol está, aproximadamente, a uma posição perpendicular à escultura, ficando, consideravelmente, acima dela. Vale ressaltar também que há, de acordo com a figura 1, quatro espaçamentos entre as letras, com isso, podemos considerar que a sombra da escultura também será separada quatro vezes (com isso as letras **A**, **B** e **D** podem ser excluídas das possíveis soluções). Por outro lado, a letra **I** apresentará uma sombra menor que as demais devido a sua estrutura, enquanto as letras **A** e **N** serão as maiores (excluindo a letra **C**).

RESPOSTA: LETRA E.

**51.** (QUESTÕES 146 – 2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo $6\,\mathrm{m}$, é cercado por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em $8\,\mathrm{m}$, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100\,\mathrm{m}$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada. Utilize $3$ como aproximação para $\pi$. A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque:

**A)** será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21\,\mathrm{m}^2$.

**B)** será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24\,\mathrm{m}^2$.

**C)** será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48\,\mathrm{m}^2$.

**D)** não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108\,\mathrm{m}^2$.

**E)** não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120\,\mathrm{m}^2$.

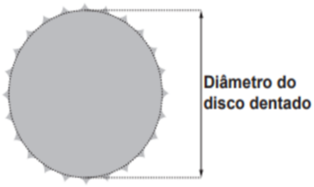
**Solução:** Como o diâmetro será aumentado em $8$ metros, então o novo raio será aumentado em $4\,\mathrm{m}$. Para calcular a área a ser pavimentada, deve-se encontrar a diferença entre a área do círculo maior e a área do círculo que já está gramado, dessa forma:

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = (3 \cdot 7)^2 - (3 \cdot 3)^2 = 147 - 27 = 120\,\mathrm{m}^2\,.$$

Observe que o condomínio dispõe de apenas $100\,\mathrm{m}^2$ de grama para utilizar na pavimentação, tornando-se insuficiente.

RESPOSTA: LETRA E.

**52.** **(QUESTÃO 149 – 2019)** Um ciclista quer montar um sistema de marchas usando dois discos dentados na parte traseira de sua bicicleta, chamados catracas. A coroa é o disco dentado que é movimentado pelos pedais da bicicleta, sendo que a corrente transmite esse movimento às catracas, que ficam posicionadas na roda traseira da bicicleta. As diferentes marchas ficam definidas pelos diferentes diâmetros das catracas, que são medidos conforme indicação na figura.




O ciclista já dispõe de uma catraca com $7\,\mathrm{cm}$ de diâmetro e pretende incluir uma segunda catraca, de modo que, à medida em que a corrente passe por ela, a bicicleta avance $50\%$ a mais do que avançaria se a corrente passasse pela primeira catraca, a cada volta completa dos pedais. O valor mais próximo da medida do diâmetro da segunda catraca, em centímetro e com uma casa decimal, é:

**A)** $2,3$.

**B)** $3,5$.

**C)** $4,7$.

**D)** $5,3$.

**E)** $10,5$.

**Solução:** Calculando a distância que a primeira catraca, cujo raio é $3,5\,\mathrm{cm}$ visto que o diâmetro é $7\,\mathrm{cm}$, percorre a cada volta completa dos pedais:

$$C_1 = 2\pi r_1 = 2\pi \cdot 3,5 = 7\pi\,\mathrm{cm}\,.$$

Observe que o ciclista deseja percorrer $50\%$ a mais na segunda catraca do que iria percorrer se a corrente passasse apenas pela primeira catraca. Chamando a medida da segunda circunferência de $C_2$ cujo raio é $r_2$, então:

$$\begin{aligned} 7\pi\,\mathrm{cm} = 1,5C_2 = 1,5 \cdot 2\pi r_2 = 3\pi r_2 &\implies 3\pi r_2 = 7\pi \\ &\implies r_2 = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Veja que a questão quer encontrar a medida do diâmetro, logo:

$$D_2 = 2 \cdot r_2 = \frac{27}{3} = \frac{14}{3} \cong 4,7\,\mathrm{cm}\,.$$

RESPOSTA: LETRA C.

**53. (QUESTÃO 151 – 2019)** Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40\,\text{cm}$, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60\,\text{cm}$, conforme ilustrado na figura. Use $3,14$ como aproximação para $\pi$.


Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

**A)** 16 628

**B)** 22 280

**C)** 28 560

**D)** 41 120

**E)** 66 240

Pela figura, observa-se que o topo do quadrado coincide com o diâmetro da circunferência e que a menor distância entre a circunferência e a base do retângulo é $20\,\text{cm}$, pois $h = 60\,\text{cm}$ e $d = 40\,\text{cm}$.

Para encontrar a área total da figura, deve-se dividi-la em duas figuras. Traçando o diâmetro do círculo, paralelo à base do retângulo, teremos um semicírculo de raio $r = 20\,\text{cm}$ e um retângulo de dimensões $40\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$.

Calculando a área do semicírculo:

$$A_s = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 400 \cdot \frac{3,14}{2} = \frac{1\,256}{2} = 628\,\text{cm}^2\,.$$

Calculando a área do retângulo:

$$A_r = 40 \cdot 40 = 1\,600\,\text{cm}^2\,.$$

Área total de uma placa:

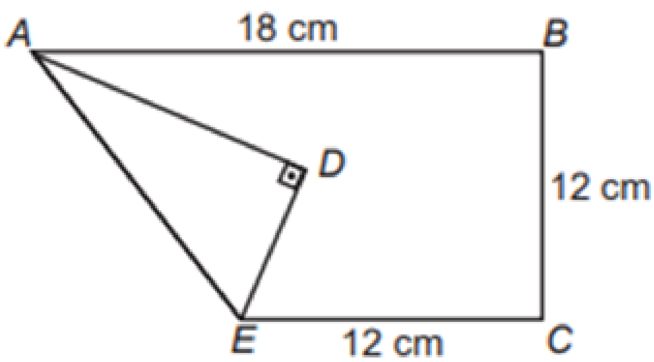
$$A_s + A_r = 628 + 1\ 600 = 2\ 28\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Área das dez placas juntas:

$$10 \cdot 2\ 228 = 22\ 280\,\mathrm{cm}^2\,.$$

RESPOSTA: LETRA B.

**54. (QUESTÃO 171 – 2019)** Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de $18\,\mathrm{cm}$ por $12\,\mathrm{cm}$. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.




Após essa primeira dobradura, a medida do segmento $\overline{AE}$ é

**A)** $2\sqrt{22}\,\mathrm{cm}\,.$

**B)** $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

**C)** $12\,\mathrm{cm}.$

**D)** $6\sqrt{5}\,\mathrm{cm}\,.$

**E)** $12\sqrt{2}\,\mathrm{cm}\,.$

Veja que a medida do maior cateto do triângulo retângulo $ADE$ é igual à medida do menor lado do retângulo ($12\,\mathrm{cm}$). Já o menor cateto é parte da medida do maior lado do retângulo, que tem medida igual a $18\,\mathrm{cm}$, contudo na questão não deixa claro sua medida, por outro lado, a parte do lado do quadrado que sobrou a pós a dobra tem medida igual a $12\,\mathrm{cm}$, dessa forma conclui-se que a medida do menor cateto é $6\,\mathrm{cm}$. Aplicando Pitágoras para encontrar a medida da hipotenusa $\overline{AE}$, temos:

$$(AE)^2 = 6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 180 \Longrightarrow AE = 180 = 6\sqrt{5}\,\mathrm{cm}\,.$$

RESPOSTA: LETRA D.

**55.** (QUESTÃO 152 – 2020) O proprietário de um apartamento decidiu instalar porcelanato no piso da sala. Essa sala tem formato retangular com $3,2\,\mathrm{m}$ de largura e $3,6\,\mathrm{m}$ de comprimento. As peças do porcelanato têm formato de um quadrado com lado medindo $80\,\mathrm{cm}$. Esse porcelanato é vendido em dois tipos de caixas, com os preços indicados a seguir.

- Caixas do tipo $A$: $4$ unidades de piso, R\$ $35,00$;
- Caixas do tipo $B$: $3$ unidades de piso, R\$ $27,00$.

Na instalação do porcelanato, as peças podem ser recortadas e devem ser assentadas sem espaçamento entre elas, aproveitando-se ao máximo os recortes feitos.

A compra que atende às necessidades do proprietário, proporciona a menor sobra de pisos e resulta no menor preço é:

**A)** $5$ caixas do tipo $A$.

**B)** $1$ caixa do tipo $A$ e $4$ caixas do tipo $B$.

**C)** $3$ caixas do tipo $A$ e $2$ caixas do tipo $B$.

**D)** $5$ caixas do tipo $A$ e $1$ caixa do tipo $B$.

**E)** $6$ caixas do tipo $B$.

**Solução:** Deve-se calcular a área do piso e a área de cada peça de porcelanato para saber quantas precisam ser usadas no piso.

Calculando a área do piso:

$$A_R = 3,2 \cdot 3,6 = 11,52\,\mathrm{m}^2\,.$$

Calculando a área da peça de porcelanato:

$$A_Q = 80 \cdot 80 = 6400\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Antes de dividir a área do piso pela do porcelanato, deve-se deixa-las na mesma unidade de medida. Transformando a área do piso em $\mathrm{cm}^2$:

$$11,52\,\mathrm{m}^2 = 115\ 200\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Dividindo a área do piso pela área do porcelanato:

$$\frac{115\ 200\,\mathrm{cm}^2}{6\ 400 cm^2} = 18.$$

(Quantidade de peças de porcelanato necessárias para revestir a sala.)

Para que seja gasto o menor valor possível, precisa-se comprar o máximo de caixas do tipo $A$ e completar com caixas do tipo $B$, deixando a menor sobra possível. Analisando as alternativas, observa-se que: No item **A)**, sobram $2$ unidades e são necessários R\$ $175,00$.

No item **B)**, faltam $2$ unidades, não serve para revestir todo o piso.

No item **C)**, é a quantidade exata de porcelanatos, $18$ e não necessários R\$ $159,00$.

No item **D)**, sobram $5$ unidades e são necessários R\$ $202,00$.

No item **E)**, é a quantidade exata de peças e são gastos R\$ $162,00$.

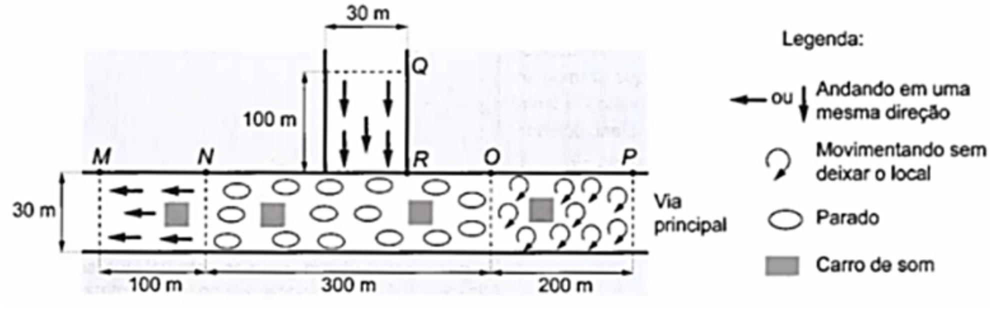
RESPOSTA: LETRA C.

**56. (QUESTÃO 154 – 2020)** O fenômeno das manifestações populares de massa traz à discussão como estimar o número de pessoas presentes nesse tipo de evento. Uma metodologia usada é: no momento do ápice do evento, é feita uma foto aérea da via pública principal na área ocupada, bem como das vias afluentes que apresentem aglomerações de pessoas que acessam a via principal. A foto é sobreposta por um mapa virtual das vias, ambos na mesma escala, fazendo-se um esboço geométrico da situação. Em seguida, subdivide-se o espaço total em trechos, quantificando a densidade, da seguinte forma:

- $4$ pessoas por metro quadrado, se elas estiverem andando em uma mesma direção;
- $5$ pessoas por metro quadrado, se elas estiverem se movimentando sem deixar o local;
- $6$ pessoas por metro quadrado, se elas estiverem paradas.

É feito, então, o cálculo do total de pessoas, considerando os diversos trechos, e desconta-se daí $1\ 000$ pessoas para cada carro de som fotografado.

Com essa metodologia, procederam-se aos cálculos para estimar o número de participantes na manifestação cujo esboço geométrico é dado na figura. Há três trechos na via principal: $MN$, $NO$ e $OP$, e um trecho numa via afluente da principal: $QR$.




Obs.: a figura não está em escala (considere as medidas dadas). Segundo a metodologia descrita, o número estimado de pessoas presentes a essa manifestação foi igual a

**A)** $110\,000$.

**B)** $104\,000$.

**C)** $93\,000$.

**D)** $92\,000$.

**E)** $87\,000$.

**Solução:** De acordo com a figura e a legenda, será calculada a quantidade de pessoas em cada região:

Região $QR$: $30 \cdot 100 \cdot 4 = 12\,000$ pessoas;

Região $MN$: $30 \cdot 100 \cdot 4 - 1\,000 = 12\,000 - 1\,00 = 11\,000$ pessoas;

Região $NO$: $30 \cdot 300 \cdot 6 - 3\,000 = 54\,000 - 2\,000 = 52\,000$ pessoas;

Região $OP$: $30 \cdot 200 \cdot 5 - 1\,000 = 30\,000 - 1\,000 = 29\,000$ pessoas;

Total de

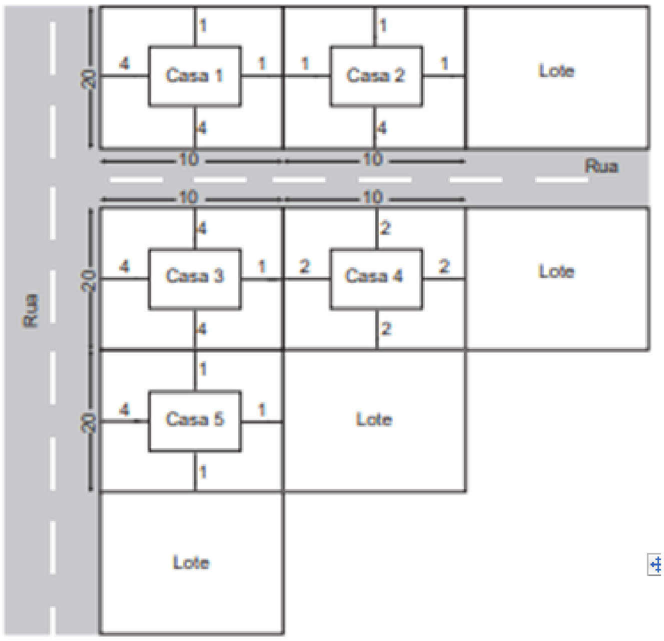
$$12\,000 + 11\,000 + 52\,000 + 29\,000 = 104\,000 \text{ pessoas.}$$

RESPOSTA: LETRA B.

**57.** (QUESTÃO 169 – 2020) A lei municipal para a edificação de casas em lotes de uma cidade determina que sejam obedecidos os seguintes critérios:

- afastamento mínimo de $4\,\mathrm{m}$ da rua;
- afastamento mínimo de $1\,\mathrm{m}$ da divisa com outro lote;
- área total construída da casa entre $40\%$ e $50\%$ da área total do lote.

Um construtor submeteu para aprovação na prefeitura dessa cidade uma planta com propostas para a construção de casas em seus $5$ lotes. Cada lote tem área medindo $200\,\mathrm{m}^2$.




A imagem apresenta um esquema, sem escala, no qual estão representados os lotes, as ruas e os afastamentos considerados nos projetos entre as casas e as divisas dos lotes. As medidas indicadas no esquema estão expressas em metro. A prefeitura aprovará apenas a planta da casa:

**A)** 1.

**B)** 2.

**C)** 3.

**D)** 4.

**E)** 5.

**Solução:** Veja que a primeira regra não é atendida pela casa de número $4$. Já a 2ª regra é respeitada por todas as outras casas. Deve-se calcular as áreas das casas e saber a porcentagem de cada uma em relação à área do lote ao qual pertence.

Área da casa 1: $15 \cdot 5 = 75\,\mathrm{m}^2$;

Área da casa 2: $15 \cdot 8 = 120\,\mathrm{m}^2$;

Área da casa 3: $12 \cdot 5 = 60\,\mathrm{m}^2$;

Área da casa 5: $18 \cdot 5 = 90\,\mathrm{m}^2$.

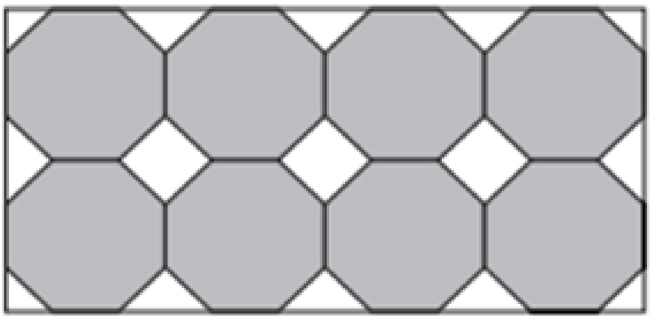
No 3º item informa que as casas devem ter área entre $40\%$ e $50\%$ da área do lote, que possui área igual a

$$20 \cdot 10 = 200\,\mathrm{m}^2\,.$$

Esse valor de $40\%$ de $200\,\mathrm{m}^2$ equivalem a $80\,\mathrm{m}^2$, já o de $50\%$ equivalem a $100\,\mathrm{m}^2$. A única casa que possui área entre esses valores é a casa $5$.

RESPOSTA: LETRA E.

**58. (QUESTÃO 178 – 2020)** Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos. Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

1 - Triângulo retângulo isósceles;

2 - Triângulo equilátero;

3 - Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato

**A)** 1.

**B)** 3.

**C)** 1 e 2.

**D)** 1 e 3.

**E)** 2 e 3.

**Solução:** O ângulo interno de um octógono regular tem medida de $135$ graus, assim o ângulo externo possui medida de

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

dessa forma, pode-se concluir que os triângulos que se encontram na base da figura são retângulo isósceles cujos ângulos internos são $45^\circ$, $45^\circ$ e $180^\circ$. Na junção de dois ângulos externos temos a medida de $90^\circ$, observe que os polígonos em branco no centro da figura possuem todos os ângulos externos com essa medida. Esse polígono possui também todos os lados congruentes, pois correspondem aos lados dos octógonos regulares. Portanto os polígonos em branco serão preenchidos com azulejos nos formatos de triângulo retângulo isósceles e quadrado.

RESPOSTA: LETRA D.

**59. (QUESTÃO 179 – 2020)** No período de fim de ano, o síndico de um condomínio resolveu colocar, em um poste, uma iluminação natalina em formato de cone, lembrando uma árvore de Natal, conforme as figuras 1 e 2.

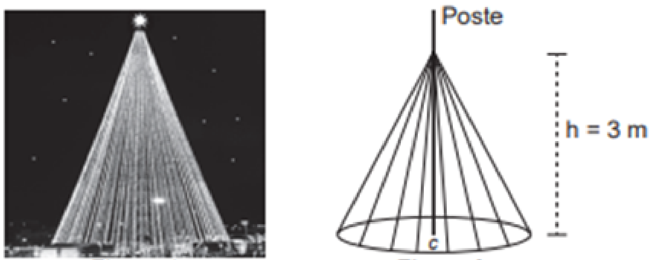


Figura 1 Figura 2

A árvore deverá ser feita colocando-se mangueiras de iluminação, consideradas segmentos de reta de mesmo comprimento, a partir de um ponto situado a $3\,\mathrm{m}$ de altura no poste até um ponto de uma circunferência de fixação, no chão, de tal forma que esta fique dividida em $20$ arcos iguais. O poste está fixado no ponto $C$ (centro da circunferência) perpendicularmente ao plano do chão.

Para economizar, ele utilizará mangueiras de iluminação aproveitadas de anos anteriores, que juntas totalizaram pouco mais de $100\,\mathrm{m}$ de comprimento, dos quais ele decide usar exatamente 100 m e deixar o restante como reserva.

Para que ele atinja seu objetivo, o raio, em metro, da circunferência deverá ser de

**A)** $4,00$.

**B)** $4,87$.

**C)** $5,00$.

**D)** $5,83$.

**E)** $6,26$.

**Solução:** Observe que o segmento com extremos na circunferência e o ponto no poste, situado a $3$ metros do solo, é uma hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $3\,\mathrm{m}$, relativo ao poste, e $r$, que é o raio da circunferência.

Chamando de $h$ esse segmento e usando o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + r^2 \Longrightarrow h = \sqrt{9 + r^2} \tag{4.1}$$

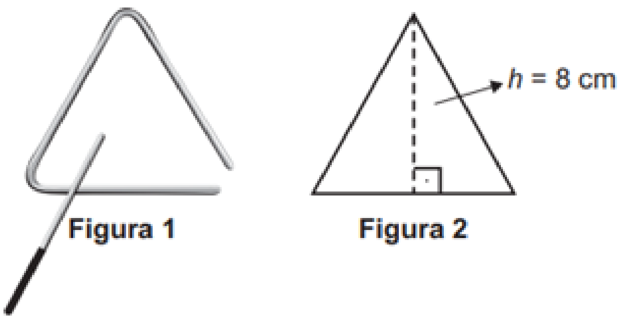
Por outro lado, de acordo com o enunciado da questão, os $20$ segmentos juntos devem totalizar $100$ metros, assim: $20\,\mathrm{h} = 100$.

Multiplicando equação (4.1) por $20$, temos:

$$\begin{aligned} 20h = 20\sqrt{(9 + r^2} = 100 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{9 + r^2} = \frac{100}{20} = 5 \\ &\Longrightarrow \quad 9 + r^2 = 5^2 = 25 \\ &\Longrightarrow \quad r^2 = 25 - 9 \\ &\Longrightarrow \quad r^2 = 16 \\ &\Longrightarrow \quad r = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

RESPOSTA: LETRA A.

**60.** (QUESTÃO 146 – 2021) O instrumento da percussão conhecido como triângulo é composto por uma barra fina de aço, dobrada em um formato que se assemelha a um triângulo, com uma abertura e uma haste, conforme ilustra a Figura 1.




Uma empresa de brindes promocionais contrata uma fundição para a produção de miniaturas de instrumentos desse tipo. A fundição produz, inicialmente, peças com o formato de uma triângulo equilátero de altura $h$, conforme ilustra a Figura 2. Após esse processo, cada peça é aquecida, deformando os cantos, e cortada em um dos vértices, dando origem à miniatura. Assuma que não ocorram perdas de material no processo de produção, de forma que o comprimento da barra utilizada seja igual ao perímetro do triângulo equilátero representado na Figura 2.

Considere $1,7$ como valor aproximado para $\sqrt{3}$. Nessas condições, o valor que mais se aproxima da medida do comprimento da barra, em centímetro, é:

**A)** $9,07$.

**B)** $13,60$.

**C)** $20,40$.

**D)** $27,18$.

**E)** $36,24$.

**Solução:** Note que a questão pede que encontremos o comprimento total da barra que é equivalente ao perímetro do triângulo equilátero. Chamando de $\ell$ a medida do lado desse triângulo, devemos calcular o valor de $3\ell$.

A questão informa que a altura do triângulo é $8\,\text{cm}$. Usando a relação entre a altura e o lado do triângulo equilátero, temos:

$$
\begin{aligned}
h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 8 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \\
&\Longrightarrow \quad 16 = \ell \cdot 1,7 \\
&\Longrightarrow \quad \ell = 9,41
\end{aligned}
$$

Calculando o perímetro:

$$3\ell = 3 \cdot 9,41 = 28,23.$$

O valor que mais se aproxima, de acordo com as alternativas, é $27,18$.

RESPOSTA: LETRA D.

**61.** (QUESTÃO 148 – 2021) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a sua divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ $0,01$ por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

- um triângulo equilátero de lado $12\,\text{cm}$;
- um quadrado de lado $8\,\text{cm}$;
- um retângulo de lados $11\,\text{cm}$ e $8\,\text{cm}$;
- um hexágono regular de lado $6\,\text{cm}$;
- um círculo de diâmetro $10\,\text{cm}$.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R$ $0,80$ por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

Use $3$ como aproximação para $\pi$ e use $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um:

**A)** triângulo

**B)** quadrado

**C)** retângulo

**D)** hexágono

**E)** círculo

Nessa questão deve-se calcular a área de cada polígono descrito no enunciado e, m seguida, multiplicar o resultado por $0,01$, que é o custo de fabricação de cada cartão.

Área do triângulo equilátero de lado $12\,\mathrm{cm}$;

Primeiro vamos calcular a altura desse triângulo, seja $h_3$ sua altura e $\ell$ a medida do lado:

$$\begin{aligned} h_3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \quad &\Longrightarrow \quad h_3 = 12 \cdot \frac{1,7}{2} \\ &\Longrightarrow \quad h_3 = 10,2\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Assim a área será:

$$A_3 = \frac{b \cdot h_3}{2} = 12 \cdot \frac{10,2}{2} = 61,2\,\mathrm{cm}^2 .$$

Calculando o custo:

$$61,2 \cdot 0,01 = 0,62 \text{ (gasto por cartão).}$$

Área do quadrado de lado $8\,\mathrm{cm}$:

$$A = 8^2 = 64\,\mathrm{cm}^2$$

Calculando o custo:

$$64 \cdot 0,01 = 0,64 \text{ (por cada cartão).}$$

Área do retângulo de lados $11\,\mathrm{cm}$ e $8\,\mathrm{cm}$:

$$A_2 = 8 \cdot 11 = 88\,\mathrm{cm}^2 .$$

Custo por cartão:

$$88 \cdot 0,01 = 0,88(\text{ não serve,pois ultrapassa } 0,80).$$

Área do hexágono regular de lado $6\,\mathrm{cm}$:

Note que este hexágono regular possui área equivalente à área de $6$ triângulos equiláteros de lado $6\,\mathrm{cm}$, dessa forma temos que encontrar o sêxtuplo da área desse triângulo, logo:

Altura do triângulo equilátero de lado $6\,\mathrm{cm}$:

$$h_3 = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot 1,7 = 5,1\,\mathrm{cm}\,.$$

Área do triângulo equilátero de lado 6cm:

$$A_3 = 5,1 \cdot \frac{6}{2} = 15,3\,\mathrm{cm}^2$$

Área do hexágono:

$$6 \cdot A_3 = 6 \cdot 15,3 = 91,8\,\mathrm{cm}^2$$

Custo por cartão:

$$91,8 \cdot 0,01 = 0,918 \text{ (não serve).}$$

Área do círculo de diâmetro $10\,\mathrm{cm}$:

Com o diâmetro medindo $10\,\mathrm{cm}$ então o raio mede $5\,\mathrm{cm}$, logo:

$$A_c = \pi \cdot r^2 \implies A_c = 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75\,\mathrm{cm}^2$$

Custo por cartão:

$$75 \cdot 0,01 = 0,75.$$

De acordo com as condições estabelecidas pelo dono da loja, o cartão cujo custo mais se aproxima de R\$ $0,80$ possui formato de um círculo.

RESPOSTA: LETRA E.

**62. (QUESTÃO 152 – 2021)** O projeto de um contêiner, em forma de paralelepípedo reto retangular, previa a pintura dos dois lados (interno e externo) de cada uma das quatro paredes com tinta acrílica e a pintura do piso interno com tinta epóxi. O construtor havia pedido, a cinco fornecedores diferentes, orçamentos das tintas necessárias, mas, antes de iniciar a obra, resolveu mudar o projeto original, alterando o comprimento e a largura para o dobro do originalmente previsto, mantendo inalterada a altura. Ao pedir novos orçamentos aos fornecedores, para as novas dimensões, cada um deu uma resposta diferente sobre as novas quantidades de tinta necessárias. Em relação ao previsto para o projeto original, as novas quantidades de tinta necessárias informadas pelos fornecedores foram as seguintes:

- Fornecedor I: "O dobro, tanto para as paredes quanto para o piso".
- Fornecedor II: "O dobro para as paredes e quatro vezes para o piso".
- Fornecedor III: "Quatro vezes, tanto para as paredes quanto para o piso."
- Fornecedor IV: "Quatro vezes para as paredes e o dobro para o piso."
- Fornecedor V: "Oito vezes para as paredes e quatro vezes para o piso."

Analisando as informações dos fornecedores, o construtor providenciará a quantidade adequada de material. Considere a porta de acesso do contêiner como parte de uma das paredes.

Qual dos fornecedores prestou as informações adequadas, devendo ser o escolhido pelo construtor para aquisição do material?

**A)** I

**B)** II

**C)** III

**D)** IV

**E)** V

**Solução:** Sejam $x$ a largura inicial do contêiner, $y$ o comprimento inicial e $h$ a altura. A base do contêiner possuía área de $x \cdot y$, após as mudanças nas medidas a área passou a ser

$$2x \cdot 2y = 4x \cdot y,$$

assim ela quadruplicou.

Para as paredes, observe que duas delas possuíam dimensões $x$ por $h$ e as outras duas $y$ por $h$. As primeiras paredes, cujas dimensões eram $x$ e $h$ possuía área de $xh$, mas ficaram com área de

$$2xh,$$

no caso dobrou a área.

Nas paredes com dimensões de $y$ e $h$, que possuíam área de $yh$, ficaram com área de

$$2yh,$$

também duplicou.

Portanto, estará correto o orçamento que duplicou a área das paredes e quadruplicou a área do piso.

RESPOSTA: LETRA B.

# Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desta pesquisa vimos que a Matemática foi sendo adequada pelo homem em função de suas necessidades e sobrevivência no meio social, ao longo de sua evolução a Matemática contribuiu consideravelmente para as melhorias das quais usufruímos atualmente. Hoje, além da sua importância enquanto ciência, esta área do conhecimento ocupa um espaço de destaque no que diz respeito à instrução de cidadãos, já que é parte integrante dos currículos de instituições de ensino que garantem educação formal por todo o mundo.

Além do seu aspecto formativo, os conhecimentos matemáticos adquiridos no decorrer da jornada escolar também são essenciais para aqueles que pretendem ingressar no Ensino Superior através do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, uma vez que 45 das 180 das questões do exame são voltadas para Matemática.

Nesse sentido, discutir sobre história da Matemática durante as aulas da disciplina se faz muito significativo, pois conscientiza estudantes e comunidade escolar sobre a importância da área para a vida em sociedade. Ademais, o trabalho a partir de seus aspectos teóricos e práticos prepara futuros candidatos para exames como o ENEM, que ao longo das suas questões apresenta conteúdos que recebem pouca ou nenhuma atenção de docentes nas escolas Brasil afora, como é o caso da Geometria Plana.

A título de ilustração, a tabela a seguir mostra a quantidade de questões dessa sub área nas últimas 13 edições do exame, o que evidencia a necessidade de incorporar a temática às aulas da grade curricular destinadas à Matemática:

Tabela 5.1: Questões de Geometria por ano de Aplicação de 2009 à 2021.

Continua

| **Ano de aplicação da prova** | **Número de questões com foco no conteúdo de Geometria Plana** | **Número percentual das questões de Geometria Plana** |
|---|---|---|
| 2009 | 6 | 13,3% |
| 2010 | 4 | 8,9% |
| 2011 | 3 | 6,6% |

Tabela 5.1: Questões de Geometria por ano de Aplicação de 2009 à 2021.

Conclusão

| | | |
|---|---|---|
| 2012 | 5 | 11,1% |
| 2013 | 6 | 13,3% |
| 2014 | 5 | 11,1% |
| 2015 | 6 | 13,3% |
| 2016 | 5 | 11,1% |
| 2017 | 5 | 11,1% |
| 2018 | 5 | 11,1% |
| 2019 | 5 | 11,1% |
| 2020 | 5 | 11,1% |
| 2021 | 3 | 6,6% |

Fonte: O autor.

Isto posto, viu-se a necessidade de dar continuidade a trabalhos acadêmicos que abordam a prova de Matemática do ENEM, no caso, do próprio PROFMAT UFCA, que já contava com quatro trabalhos a respeito dessa temática. Nesse sentido, a fim de contribuir para a mudança desse cenário é que foi pensada e construída essa dissertação, que objetivou analisar as questões do exame que tratam sobre Geometria Plana, num período que compreende os anos de 2009 a 2021.

Assim, as discussões aqui presentes contribuíram para a reflexão acerca de aspectos comuns à sala de aula, que vão desde a relevância da Matemática para o currículo escolar até a influência da boa preparação do candidato para garantir pontuação satisfatória na prova. Para tanto, o levantamento de questões aqui exposto, bem como a apresentação de conceitos matemáticos necessários para a resolução dos problemas exigidos no ENEM podem tornar essa obra ainda mais relevante.

De modo mais específico, a presente dissertação também visou contribuir para a preparação de potenciais candidatos ao exame em foco, haja vista a produção do material didático reunindo questões encontradas em exames anteriores que foram resolvidas e comentadas, com o intuito de facilitar a compreensão do que ora é solicitado.

Essa cartilha tem como público-alvo os alunos participantes do curso preparatório para o ENEM Edificar, um projeto de extensão da Universidade Federal do Cariri (UFCA) que oferece aulas gratuitas voltadas para o exame aos alunos de escolas públicas do interior do Ceará. Apesar disso, o material didático fruto da dissertação pode ser utilizado por qualquer estudante que tenha acesso a ele.

Vale destacar ainda que diante a resolução das questões solucionadas do exame percebe-se uma articulação do conteúdo da Geometria Plana com outras áreas da Matemática, uma vez que para resolver questões pertinentes a esse conteúdo é necessário também conhecimentos prévios de operações aritméticas e algébricas mais difundidas na escola, atestando a importância de um trabalho abrangente em relação à disciplina.

Ainda, este trabalho configura-se fonte de reflexão para os profissionais docentes no que diz respeito à busca por capacitação e qualificação do seu trabalho, para que o processo de ensino/aprendizagem se ja alcançado com mais eficácia. De modo geral, esta produção buscou cooperar para a transformação do cenário educacional em seus diversos níveis, além de ser fonte de pesquisa para produções acadêmicas futuras.

# REFERÊNCIAS


[1] NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] ALCANTARA, A. C.; SOUSA, I. d. S.; LIMA, J. F. L. de. Geometria no enem 2009-2013: a relação com as abordagens no ensino médio. **Revista Temas em Educação**, v. 24, n. 2, p. 45–64, 2015. Disponível em: <https://www.proquest.com/docview/2343574829>. Acesso em: 24 de maio de 2021.

[3] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio: Bases Legais**. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 09 de abril de 2022.

[4] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 10 de abril de 2022.

[5] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2009. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2009/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 16 de janeiro de 2022.

[6] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

[7] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2010. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 20 de janeiro de 2022.

[8] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 25 de janeiro de 2022.

[9] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2012. Disponível

em: <https:/download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 27 de janeiro de 2022.

[10] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2013. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 29 de janeiro de 2022.

[11] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2014. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/2014_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

[12] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2015. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_05_AMARELO.pdf>. Acesso em: 03 de fevereiro de 2022.

[13] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2016. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 04 de fevereiro de 2022.

[14] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2017. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 06 de fevereiro de 2022.

[15] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2018. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 08 de fevereiro de 2022.

[16] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2019. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 09 de fevereiro de 2022.

[17] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2020. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 11 de fevereiro de 2022.

[18] BRASIL. **Caderno de questões amarelo do ENEM**. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2021. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 13 de fevereiro de 2022.

[19] BURGO, O. G. **Metodologia da matemática**. Maringá: Unicesumar, 2015.

[20] DELORS, J. e. a. **Educação: um tesouro a descobrir**. São Paulo: UNESCO, 2003.

[21] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 9.

[22] BRASIL, E. **Exercícios sobre ângulos**. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-Angulos.htm>. Acesso em: 02 de janeiro de 2022.

[23] BRASIL, E. **Exercícios sobre baricentro**. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-baricentro.htm#resp-4>. Acesso em: 01 de maio 2022.

[24] LIMA, V. A. Dissertação (Mestrado em Matemática), **Geometria na educação básica: da reforma de Francisco Campos ao novo Ensino Médio**. Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Cariri, 2019. 115 p.

[25] MORAES S. P. G.; MOURA, M. O. Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 97–116, 2009. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221900006>. Acesso em: 10 de Abril de 2022.

[26] IMPA. **Módulo de Elementos básicos de geometria plana: Condição de alinhamentos de três pontos e a desigualdade triangular**. [S.l.]: OBMEP. Portal da Matemática.

[27] IMPA. **Módulo de Elementos básicos de geometria plana - parte 2:Congruência de Triângulos e Aplicações**. OBMEP. Portal da Matemática. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/649et3w287goc.pdf>. Acesso em: 06 de janeiro de 2022.

[28] IMPA. **Módulo de Elementos básicos de geometria plana - parte 1: Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal**. OBMEP. Portal da Matemática. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/112s44fs8psg88.pdf>. Acesso em: 07 de janeiro de 2022.

[29] PINHEIRO, A. J. P. Dissertação (Mestrado em Matemática), **O uso de materiais concretos no ensino de geometria**. Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Cariri, 2019. 67 p.

[30] GRAN, C. O. **Questões de Concurso sobre Ângulos complementares, suplementares e replementares**. Brasília: [s.n.]. Disponível em: <https://questoes.grancursosonline.com.br/questoes?a=408869%2C403825&qd=&qa=0>. Acesso em: 03 de janeiro de 2022.

[31] Q concursos. **Questões de concurso**. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-baricentro.htm#resp-4>. Acesso em: 25 de abril de 2022.

[32] RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; JÚNIOR, S. G. **A geometria do Origami**. João Pessoa: CCTA, 2018.

[33] ABRIL. 2016. Disponível em: <https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/confira-as-notas-maximas-e-minimas-do-enem-2016/>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[34] BRASIL, E. BRASIL ESCOLA, 2017. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/veja-as-notas-maximas-minimas-enem-2017/341803.html>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[35] BRASIL, E. BRASIL ESCOLA, 2018. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/enem-2018-notas-maximas-minimas-sao-divulgadas/344576.html>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[36] BRASIL, E. BRASIL ESCOLA, 2019. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/enem-2019-veja-as-notas-maximas-minimas-cada-prova/347180.html>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[37] BRASIL, E. BRASIL ESCOLA, 2020. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/confira-as-medias-e-notas-maximas-e-minimas-do-enem-2020/349732.html>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[38] ALACÂNTARA, É. F. d. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, **A matemática Básica em Provas do ENEM**. Juazeiro do Norte: [s.n.], 2020.

[39] SIQUEIRA, V. F. d. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, **Tópicos de geometria plana em provas do ENEM**. Juazeiro do Norte: [s.n.], 2020.

[40] DANTAS, M. S. A. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Cariri, **Um estudo sobre funções em provas do ENEM**. Juazeiro do Norte: [s.n.], 2020.

[41] PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição**. [S.l.]: Editora Feevale, 2013.

[42] KUADRO. 2021. Disponível em: <https://www.kuadro.com.br/resumos-enem-vestibulares/matematica/geometria-plana/angulos?id=2221&topicId=4538>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[43] SOMATEMáTICA. **"Ângulos" em Só Matemática**. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2022, 2022. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/angulos/angulos9.php>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[44] SUPERCOLORING. **Desenho de ângulo agudo para colorir**. 2022. Disponível em: <http://www.supercoloring.com/pt/desenhos-para-colorir/angulo-agudo>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[45] SOMATEMáTICA. **Ângulo agudo, obtuso e reto**. 2022. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/angulos/angulos12.php>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[46] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. São Paulo: Atual, 2013.

[47] OLIVEIRA, R. R. de. **Baricentro de um triângulo**. BRASIL ESCOLA, 2022. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/baricentro-um-triangulo.htm>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[48] BRASIL, E. **Exercícios sobre Baricentro**. BRASIL ESCOLA, 2021. Disponível em: <https://s4.static.brasilescola.uol.com.br/exercicios/2021/11/medianas-triangulo.jpg>. Acesso em: 07 de junho de 2022.

[49] BRASIL, E. **Retas paralelas cortadas por uma transversal**. BRASIL ESCOLA, 2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/retas-paralelas-cortadas-por-uma-transversal.htm>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[50] ESCOLA, K. **Soma dos ângulos internos de um triângulo**. 2022. Disponível em: <https://escolakids.uol.com.br/matematica/soma-dos-angulos-internos-um-triangulo.htm>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[51] LESSA, J. R. **Teorema de Tales**. INFO ESCOLA, 2013. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/teorema-de-tales/>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[52] RUMO, N. Questões de Concursos, 2017. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/40892a40-62>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[53] MOREIRA, L. P. **O que é semelhança de triângulos?** BRASIL ESCOLA, 2022. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-semelhanca-triangulos.htm>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[54] GOUVEIA, R. **Teorema Fundamental da semelhança**. Todamateéria, 2022. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/semelhanca-de-triangulos/>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[55] AERONÁUTICA. Questões de Concursos, 2017. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-militares/questoes/92b22adf-3f>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[56] GUALIMP. Questões de Concursos, 2020. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/09de159a-6f>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[57] GOUVEIA, R. **Área do Triângulo**. Todamateéria, 2022. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/area-do-triangulo/>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[58] FUNDATEC. Questões de Concursos, 2021. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/3caf131a-2a>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[59] OLIVEIRA, N. C. N. Pre Para Enem, 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/area-paralelogramo.htm>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[60] VUNESP. Questões de Concursos, 2020. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/df304b1d-cb>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[61] VUNESP. Questões de Concursos, 2022. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/00b27679-84>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[62] RIGONATTO, M. Pre Para Enem, 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/area-losango.htm>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[63] TOMAZ, M. **Área do Trapézio**. INFO ESCOLA, 2013. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/area-do-trapezio/>. Acesso em: 08 de junho de 2022.

[64] AMEOSC. Questões de Concursos, 2021. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/19e1a8e5-67>. Acesso em: 09 de junho de 2022.

[65] KILHIAN, K. **Arcos de Circunferência**.

[66] FUNDATEC. Questões de Concursos, 2019. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/271cf90a-dd>. Acesso em: 09 de junho de 2022.