

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

**ATIVIDADES DINÂMICAS CONSTRUÍDAS COM O GEOGEBRA PARA
COMPROVAR O TEOREMA DE PITÁGORAS**

CURITIBA

2024

VICTORIA MAZOTTI RODRIGUES DA SILVA

**ATIVIDADES DINÂMICAS CONSTRUÍDAS COM O GEOGEBRA PARA
COMPROVAR O TEOREMA DE PITÁGORAS**

Dynamic activities built with GeoGebra to prove the Pythagorean theorem

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29513>>.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós.

Coorientadora: Profa. Dra. Mari Sano.

CURITIBA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho atividades construídas em páginas da plataforma GeoGebra para comprovar dinamicamente o teorema de Pitágoras. Na organização dessas atividades, selecionamos abordagens geométricas e vetoriais presentes na obra *The pythagorean Proposition* de Elisha Scott Loomis (1852-1940). As atividades podem ser acessadas por intermédio de links externos, sendo que o(a) professor(a) de matemática da Educação Básica também pode salvá-las com o GeoGebra App para utilizá-las em sala de aula.

Palavras-chave: Demonstrações Geométricas; Demonstrações Vetoriais; Teorema de Fermat; Ensino de Matemática; Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This work presents activities created on GeoGebra platform pages to prove the Pythagorean theorem dynamically. In organizing these activities, we selected geometric and vectorial approaches found in the work *The Pythagorean Proposition* by Elisha Scott Loomis (1852-1940). The activities can be accessed through external links, and mathematics teachers in Basic Education can save them with the GeoGebra App to use in the classroom.

Keywords: Geometric Proofs; Vectorial Proofs; Fermat's Theorem; Mathematics Teaching; Digital Technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Demonstração algébrica número 1 de Loomis (1968)	9
Figura 1.2 – Demonstração algébrico-geométrica número 100 de Loomis (1968)	11
Figura 1.3 – Demonstração geométrica número 9 de Loomis (1968): a equicomposição de Perigal	12
Figura 1.4 – Demonstração geométrica número 63 de Loomis (1968)	14
Figura 1.5 – Demonstração geométrica número 153 de Loomis (1968)	15
Figura 1.6 – Demonstração vetorial número 1 de Loomis (1968)	16
Figura 1.7 – Demonstração vetorial número 4 de Loomis (1968)	17

SUMÁRIO

1	ATIVIDADES DINÂMICAS COM O TEOREMA DE PITÁGORAS . . .	7
1.1	Atividade 1: demonstração algébrico-geométrica número 100 de Loomis . . .	8
1.2	Atividade 2: demonstração geométrica número 9 de Loomis	12
1.3	Atividade 3: demonstração geométrica número 63 de Loomis	13
1.4	Atividade 4: demonstração geométrica número 153 de Loomis	15
1.5	Atividade 5: demonstrações vetoriais números 1 e 4 de Loomis	16
1.6	Atividade 6: a generalização do teorema de Pitágoras – o último teorema de Fermat	18
	REFERÊNCIAS	22
	Índice	23

1 ATIVIDADES DINÂMICAS COM O TEOREMA DE PITÁGORAS

Nascido na ilha grega de Samos em meados de 570 a.C., Pitágoras de Samos é uma das figuras mais místicas e influentes da história da matemática. Devido às lendas em torno de sua história, e também de sua Irmandade, os historiadores têm dificuldades para escrever sobre sua vida.

Como não existem relatos originais de sua vida e de seus trabalhos, Pitágoras está envolto no mito e na lenda, tornando difícil para os historiadores separar o fato da ficção. O que parece certo é que Pitágoras desenvolveu a ideia da lógica numérica e foi responsável pela primeira idade de ouro da matemática. Graças ao seu gênio, os números deixaram de ser apenas coisas usadas meramente para contar e calcular e passaram a ser apreciados por suas próprias características (Singh, 2010, p. 28).

Segundo Singh (2010), após vários anos de estudo em viagens, Pitágoras retornou à Samos com a intenção de abrir uma escola. Porém, a visão política de Polícrates, tirano que governou Samos de 538 a 522 a.C., transformou Samos em uma cidade conservadora, e não mais aberta a novas ideias. Para não ser perseguido, Pitágoras se escondeu em uma caverna afim de continuar seus estudos matemáticos.

A Irmandade Pitagórica só passou a existir depois que Pitágoras fugiu de Samos com sua mãe e seu discípulo, que se acredita chamar Pitágoras também, e se estabeleceu em Crotona, onde recebeu o apoio de Milos, um dos homens mais fortes de toda a história (Singh, 2010).

Várias são as descobertas matemáticas ligadas a Pitágoras, como os números perfeitos¹, a harmonia musical e o famoso teorema que define o ângulo reto. O que poucos sabem é que “embora este teorema esteja eternamente associado a Pitágoras, ele já era usado pelos chineses e babilônios mil anos antes” (Singh, 2010, p. 40). O que faz com que esse teorema leve o nome de Pitágoras é “que foi ele o primeiro a demonstrar esta verdade universal” (Singh, 2010, p. 40).

De enunciado simples, o teorema de Pitágoras consta na Proposição 47 do Livro I de *Os elementos* de Euclides (Euclides, 2009) com o enunciado do Teorema 1.1.

Teorema 1.1 (de Pitágoras). *Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.*

Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa (do grego *hypotenousa*: que se estende debaixo do ângulo reto), enquanto que os lados que determinam o ângulo reto são denominados catetos (do grego *káthetos*: descido, abaixado de maneira reta). Desta forma, se a hipotenusa mede c e os catetos medem a e b , a tese do Teorema 1.1 pode ser enunciada pela igualdade $c^2 = a^2 + b^2$.

¹ Um número natural é perfeito quando é igual à soma de seus divisores.

O Teorema 1.1 fascinou diversos matemáticos, entre eles Elisha Scott Loomis (1852-1940), um professor de matemática em Cleveland, Ohio (EUA). Loomis colecionou durante 20 anos, de 1907 a 1927, demonstrações desse teorema e as agrupou em um livro denominado *The Pythagorean Proposition* (A proposição de Pitágoras) (Loomis, 1968). O livro foi lançado inicialmente em duas edições: a primeira em 1927 com 230 demonstrações; a segunda em 1940 com 370 demonstrações. Após a morte de Loomis, o livro foi reimpresso mais duas vezes, em 1968 e 1972, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* dos Estados Unidos (Rosa, 1983).

Em seu livro, Loomis separa as demonstrações do Teorema 1.1 em quatro categorias: a algébrica, que utiliza as relações métricas no triângulo retângulo; a geométrica, que compara áreas; a vetorial, que emprega operações com vetores; a dinâmica, que usa conceitos físicos, como massa e velocidade. Na parte final do livro, apresenta cinco quadrados pitagóricos mágicos.

Assim, motivados pelo trabalho de Loomis, apresentamos neste recurso educacional algumas atividades dinâmicas no GeoGebra com demonstrações algébrico-geométricas e vetoriais do teorema de Pitágoras, estas selecionadas do livro *The Pythagorean Proposition* (Silva, 2022, 2023).

1.1 ATIVIDADE 1: DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICO-GEOMÉTRICA NÚMERO 100 DE LOOMIS

Loomis (1968) organizou 109 demonstrações algébricas, as quais foram divididas em sete grupos, cada um deles com um método de demonstração. Selecionamos as demonstrações algébricas de números 1, 16 e 100, sendo esta última uma demonstração algébrico-geométrica. A demonstração algébrica mais utilizada nos livros didáticos de matemática atualmente, que depende das razões entre os lados de triângulos semelhantes, é também a primeira demonstração algébrica apresentada por Loomis. Esta demonstração é direta, do tipo implicação simples (se ..., então ...)² (Fossa, 2009). Para tanto, basta reescrever o Teorema 1.1 como:

Se em um triângulo retângulo ABC a hipotenusa mede c e os catetos medem a e b , então

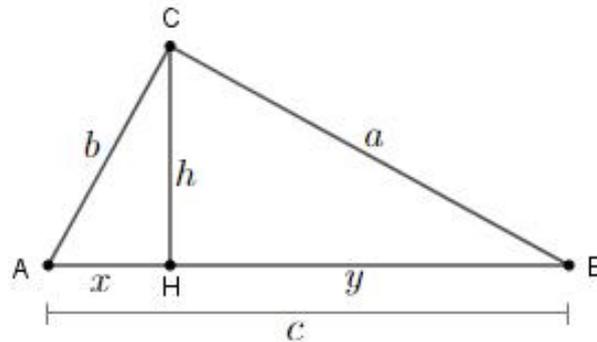
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Demonstração algébrica 1. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} , de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, e $h = CH$ a altura relativa ao lado AB , onde H divide esse lado nos segmentos $AH = x$ e $BH = y$, tais que $x + y = c$ - Figura 1.1.

Por construção, temos que $HC \perp AB$. Logo, os triângulos ABC , ACH e BCH são retângulos. Como possuem o ângulo \hat{A} em comum, os triângulos retângulos ABC e ACH são

² A demonstração também pode ser do tipo implicação dupla (se, e somente se).

Figura 1.1 – Demonstração algébrica número 1 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) (Neto, 2013). Assim, usando as razões de semelhança obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{b}{x} &= \frac{x+y}{b} \Leftrightarrow b^2 = x^2 + xy; \\ \frac{h}{x} &= \frac{a}{b} \Leftrightarrow hb = ax; \\ \frac{b}{h} &= \frac{x+y}{a} \Leftrightarrow ab = hx + hy. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Os triângulos retângulos ABC e CBH também são semelhantes pelo caso AA. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+y} &= \frac{y}{a} \Leftrightarrow a^2 = xy + y^2; \\ \frac{a}{b} &= \frac{y}{h} \Leftrightarrow by = ah; \\ \frac{b}{x+y} &= \frac{h}{a} \Leftrightarrow ab = hx + hy. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Finalmente, os triângulos retângulos ACH e CBH também são semelhantes pelo caso AA. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{b}{h} &= \frac{a}{y} \Leftrightarrow by = ah; \\ \frac{b}{x} &= \frac{a}{h} \Leftrightarrow bh = ax; \\ \frac{h}{x} &= \frac{y}{h} \Leftrightarrow h^2 = xy. \end{aligned}$$

Somando as igualdades (1.1) e (1.2) e fatorando o trinômio quadrado perfeito (Coxford; Shulte, 1994), constatamos que:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= x^2 + xy + xy + y^2; \\ a^2 + b^2 &= x^2 + 2xy + y^2; \\ a^2 + b^2 &= (x+y)^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Empregando $AB = x + y = c$ em (1.3), concluímos que:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Outra forma de demonstração muito utilizada nos cursos de álgebra é a redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*) (Fossa, 2009). Essa técnica consiste na obtenção de uma contradição a partir da negação da tese do teorema. Loomis (1968) utiliza a redução ao absurdo nas demonstrações algébricas de números 16 e 32.

Demonstração algébrica 16. Seja o triângulo retângulo ABC , de hipotenusa de medida c e catetos de medidas a e b . Pela lei da tricotomia, temos que:

$$a^2 + b^2 > c^2 \text{ ou}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ou}$$

$$a^2 + b^2 < c^2.$$

Suponhamos inicialmente que

$$a^2 + b^2 > c^2. \tag{1.4}$$

Substituindo (1.3) em (1.4) e considerando que $x + y = c$ - Figura 1.1, temos que:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &> c^2; \\ c^2 &> c^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como temos uma contradição em (1.5), consideremos agora que

$$a^2 + b^2 < c^2. \tag{1.6}$$

Substituindo (1.3) em (1.6) e considerando novamente que $x + y = c$, obtemos que:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &< c^2; \\ c^2 &< c^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

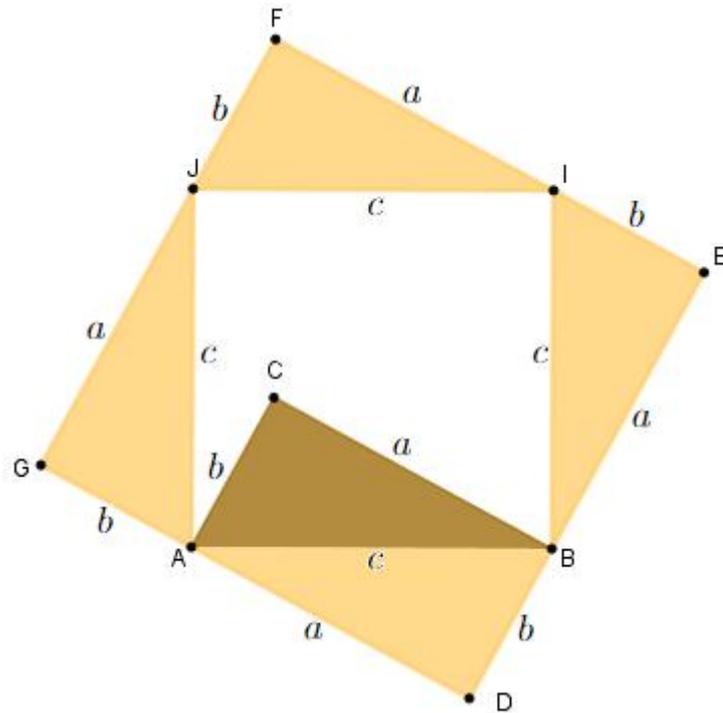
Temos em (1.7) novamente uma contradição. Assim, $a^2 + b^2 \not> c^2$ e $a^2 + b^2 \not< c^2$. Portanto, $a^2 + b^2 = c^2$.

□

Na centésima demonstração do teorema de Pitágoras, Loomis (1968) utiliza uma estratégia algébrico-geométrica que compara áreas.

Demonstração algébrico-geométrica 100. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, o quadrado $DEFG$, de lado $a + b$, e o quadrado $ABIJ$, de lado c - Figura 1.2.

Figura 1.2 – Demonstração algébrico-geométrica número 100 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Na Figura 1.2, o quadrado $DEFG$ é equivalente à união do quadrado $ABIJ$ com os triângulos FIJ , EIB , DAB e GAJ . Como esses quatro triângulos são congruentes ao triângulo ABC , concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(DEFG) &= \mathcal{A}(ABIJ) + 4\mathcal{A}(\Delta ABC); \\ (a + b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}; \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab; \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da centésima demonstração de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

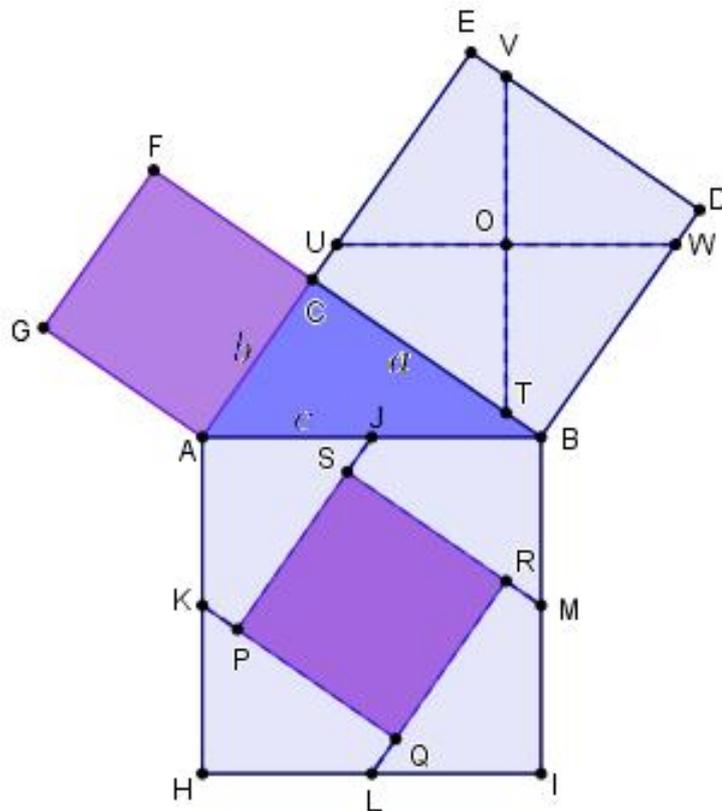
<https://www.geogebra.org/m/krkgpaqe>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

1.2 ATIVIDADE 2: DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA NÚMERO 9 DE LOOMIS

Nas demonstrações do teorema de Pitágoras, Loomis (1968) organizou 256 demonstrações geométricas. Estas foram divididas em dez grupos, cada um deles com um método de demonstração. As demonstrações geométricas de números 9 a 32 consistem na divisão dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo em partes congruentes, e na comprovação de que a união das partes dos quadrados menores forma o quadrado maior (ou que a união das partes do quadrado maior forma os quadrados menores). Nesse grupo, selecionamos a demonstração 9, que corresponde à equicomposição de Henry Perigal (1801-1898) (Nós; Fernandes, 2019), ilustrada na Figura 1.3.

Figura 1.3 – Demonstração geométrica número 9 de Loomis (1968): a equicomposição de Perigal



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração geométrica 9. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ACFG$, $CBDE$ e $ABIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC ; os pontos J , K , L e M , pontos médios dos lados AB , HA , IH e BI , respectivamente, do quadrado $ABIH$; os pontos P , Q , R e S interiores ao quadrado $ABIH$, com $JP \parallel RL \parallel AC$ e $SM \parallel KQ \parallel BC$, onde $S \in JP$, $Q \in RL$, $R \in SM$ e $P \in KQ$; o ponto O , centro do quadrado $CBDE$; os pontos T , U , V e W pertencentes,

respectivamente, aos lados CB , EC , DE e BD do quadrado $CBDE$, tais que $UW \parallel AB$ e $VT \perp UW$ - Figura 1.3.

Desta forma, temos que o quadrado $PQRS$ é congruente ao quadrado $ACFG$, $VT \parallel BI$, $VO \equiv OT \equiv BM$ e $AU \equiv BW \equiv JP \equiv SM \equiv RL \equiv KQ \equiv DV \equiv EU \equiv CT$. Ainda, como $UW \parallel AB$ e $AJ \equiv JB \equiv UO \equiv OW \equiv AK$, os quadriláteros $HLQK$, $IMRL$, $BJSM$, $AKPJ$, $UCTO$, $TBWO$, $WDVO$ e $VEUO$ são congruentes. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABIH) &= \mathcal{A}(PQRS) + 4\mathcal{A}(AKPJ); \\ \mathcal{A}(ABIH) &= \mathcal{A}(ACFG) + 4\mathcal{A}(VEUO); \\ \mathcal{A}(ABHI) &= \mathcal{A}(ACFG) + \mathcal{A}(CBDE). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Como os lados dos quadrados $ABHI$, $ACFG$ e $CBDE$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (1.8) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

A demonstração da equicomposição de Perigal (demonstração geométrica 9 de Loomis) pode ser efetuada com mais detalhes, como em Fernandes (2018) e Sette (2013).

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da equicomposição de Perigal (demonstração geométrica 9 de Loomis (1968)) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/vzjfw5vk>.

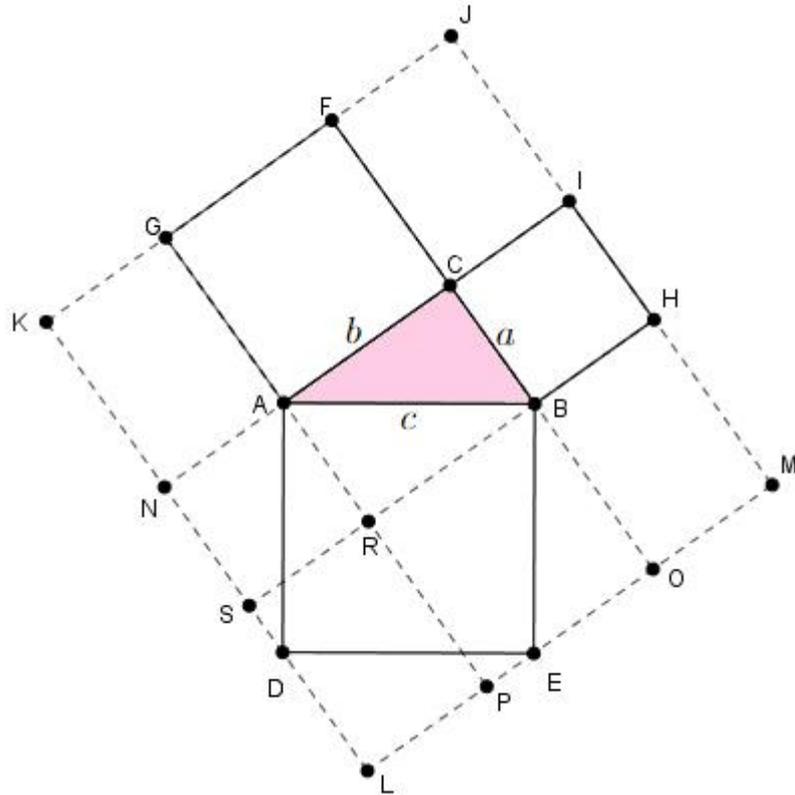
No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

1.3 ATIVIDADE 3: DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA NÚMERO 63 DE LOOMIS

As demonstrações geométricas de números 43 a 69 de Loomis (1968) comparam, geralmente, as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo com as áreas de outros quadriláteros - Figura 1.4. Nesse grupo, selecionamos a demonstração de número 63.

Demonstração geométrica 63. Sejam o triângulo ABC , retângulo em \hat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, e os quadrados $ACFG$, $CBHI$ e $ABED$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC . Inicialmente, prolongamos o segmento GF até os pontos K e J , o segmento HI até os pontos J e M e traçamos o segmento KL paralelamente ao segmento HI , com $LM \parallel JK$, $D \in KL$ e $E \in LM$. Em seguida, prolongamos o segmento FC até o ponto $O \in LM$, o segmento GA até o ponto $P \in LM$, o segmento CA até o ponto $N \in KL$ e o segmento HB até o ponto $S \in KL$. Finalmente, demarcamos o ponto R na interseção dos segmentos GP e HS . Assim, construímos o retângulo $JKLM$, de lados $a + 2b$ e $2a + b$ - Figura 1.4.

Figura 1.4 – Demonstração geométrica número 63 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Em decorrência da construção descrita anteriormente, temos que:

$$\mathcal{A}(JKLM) = \mathcal{A}(ABED) + 4\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(CIHO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK);$$

$$\mathcal{A}(JKLM) = \mathcal{A}(NAPL) + \mathcal{A}(ACOP) + \mathcal{A}(CIHO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK); \quad (1.9)$$

$$\mathcal{A}(NAPL) = \mathcal{A}(CIHB) + 2\mathcal{A}(ABC); \quad (1.10)$$

$$\mathcal{A}(ACOP) = \mathcal{A}(ACFG) + 2\mathcal{A}(ABC). \quad (1.11)$$

Substituindo (1.10) e (1.11) em (1.9), obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(JKLM) &= \mathcal{A}(CIHB) + 2\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACFG) + 2\mathcal{A}(ABC) + \\ &\quad + \mathcal{A}(CIHO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK); \\ \mathcal{A}(JKLM) &= \mathcal{A}(CIHB) + 4\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ACFG) + \\ &\quad + \mathcal{A}(CIHO) + \mathcal{A}(GAIJ) + \mathcal{A}(GANK). \end{aligned} \quad (1.12)$$

A área do quadrado $ABED$ pode ser obtida a partir da área do quadrilátero $JKLM$, ou seja:

$$\mathcal{A}(ABED) = \mathcal{A}(JKLM) - 4\mathcal{A}(ABC) - \mathcal{A}(CIHO) - \mathcal{A}(GAIJ) - \mathcal{A}(GANK). \quad (1.13)$$

Substituindo (1.12) em (1.13), constatamos que:

$$\mathcal{A}(ABED) = \mathcal{A}(CIHB) + \mathcal{A}(ACFG). \quad (1.14)$$

Como os lados dos quadrados $ABED$, $ACFG$ e $CIHB$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (1.14) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração geométrica 63 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

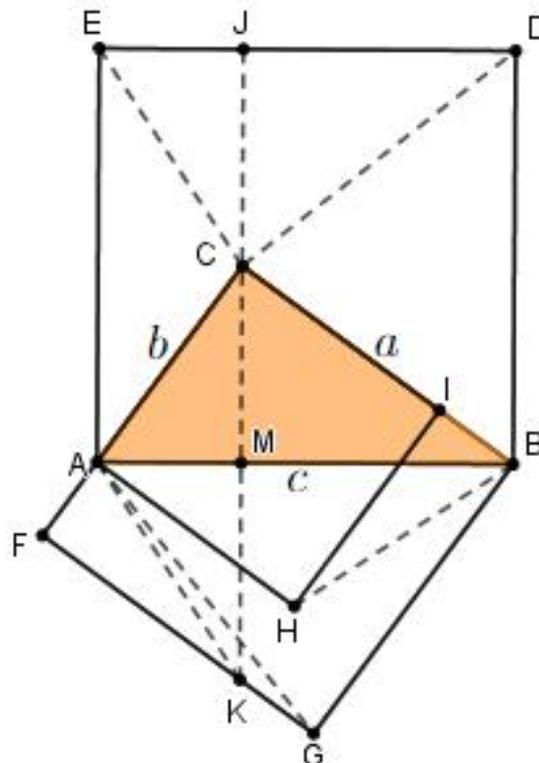
<https://www.geogebra.org/m/qbnkx4rp>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

1.4 ATIVIDADE 4: DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA NÚMERO 153 DE LOOMIS

As demonstrações geométricas de números 71 a 157 de Loomis (1968) empregam, geralmente, o triângulo retângulo contido em pelo menos um dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo - Figura 1.5. Nesse grupo, selecionamos a demonstração de número 153.

Figura 1.5 – Demonstração geométrica número 153 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração geométrica 153. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AB , BC e AC do triângulo ABC ; $JK \perp AB$ no ponto M , com $M \in AB$, $J \in DE$, $K \in FG$ e $C \in JK$; os segmentos AK , AG , EC e DC - Figura 1.5.

Devido à construção descrita anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(ABDE) &= \mathcal{A}(AMJE) + \mathcal{A}(BMJD); \\
 \mathcal{A}(ABDE) &= \mathcal{A}(ECKA) + 2\mathcal{A}(BCD); \\
 \mathcal{A}(ABDE) &= 2\mathcal{A}(CAK) + 2\mathcal{A}(AGB); \\
 \mathcal{A}(ABDE) &= \mathcal{A}(ACIH) + \mathcal{A}(BCFG).
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Como os lados dos quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $ACIH$ medem, respectivamente, c , a e b , concluímos de (1.15) que $c^2 = a^2 + b^2$.

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração geométrica 153 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

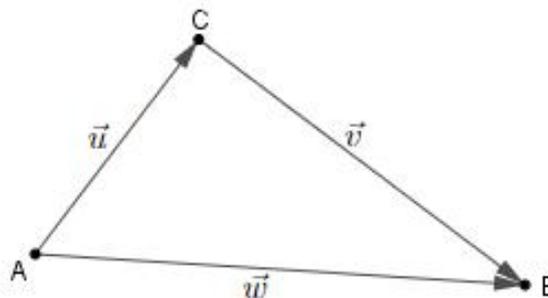
<https://www.geogebra.org/m/p7msbees>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

1.5 ATIVIDADE 5: DEMONSTRAÇÕES VETORIAIS NÚMEROS 1 E 4 DE LOOMIS

Loomis (1968) apresenta quatro demonstrações para o teorema de Pitágoras utilizando operações com vetores - Figura 1.6. Selecionamos as demonstrações vetoriais de números 1 e 4.

Figura 1.6 – Demonstração vetorial número 1 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Demonstração vetorial 1. Sejam $\vec{u} = \vec{AC}$, $\vec{v} = \vec{CB}$, $\vec{w} = \vec{AB}$ e $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, com $\vec{u} \perp \vec{v}$ - Figura 1.6. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned}
 \vec{w} &= \vec{u} + \vec{v}; \\
 \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2; \\
 \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Como os vetores \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, temos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Lipschutz, 1978). Substituindo essa igualdade em (1.16), concluímos que $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

□

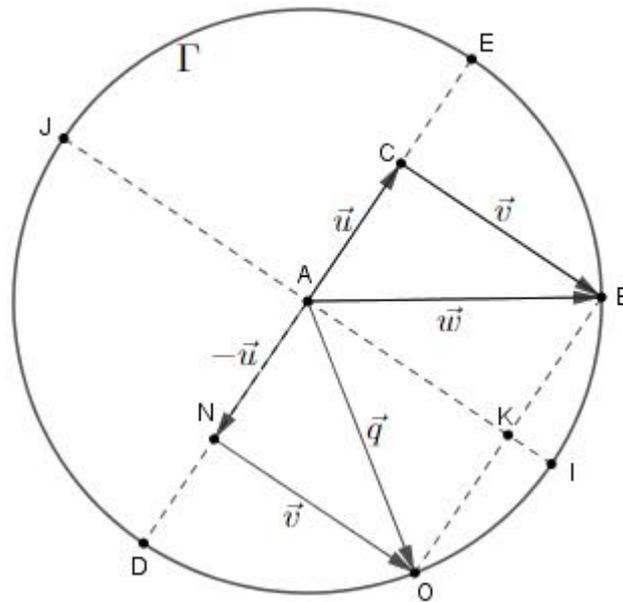
Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração vetorial 1 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/ejdhqyt7>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movidos dinamicamente.

Demonstração vetorial 4. Sejam: $\vec{u} = \vec{AC}$; $\vec{v} = \vec{CB}$; $\vec{w} = \vec{AB}$; $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$; Γ a circunferência de centro A e raio AB ; o ponto $N \in DE$, onde DE é um diâmetro de Γ , com $AC \subset DE$ e $\vec{AN} = -\vec{u}$; o ponto $O \in \Gamma$, com $\vec{NO} = \vec{v}$, $\vec{AO} = \vec{q}$ e \vec{q} simétrico a \vec{w} segundo o diâmetro IJ - Figura 1.7.

Figura 1.7 – Demonstração vetorial número 4 de Loomis (1968)



Fonte: A autora com o GeoGebra (2022).

Como $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{q} = -\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$ e AB e AO são raios de Γ , o que implica $\|\vec{w}\| = \|\vec{q}\|$, temos que:

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{q}\|^2 &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{-u} + \vec{v}\|^2; \\ \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 &= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2; \\ 2\|\vec{w}\|^2 &= 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2); \\ \|\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

□

Construímos no GeoGebra a visualização dinâmica da demonstração vetorial 4 de Loomis (1968) para o teorema de Pitágoras e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/g93wybme>.

No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC podem ser movimentados dinamicamente.

1.6 ATIVIDADE 6: A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS – O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

A equação $x^2 + y^2 = z^2$, que define o teorema de Pitágoras, tem uma infinidade de soluções inteiras (x, y, z) , denominadas trios (ou tríades) pitagóricas. As soluções inteiras ainda existem se reescrevermos a equação como $x^n + y^n = z^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$? Pierre de Fermat (1601-1665), magistrado, matemático e cientista francês, conjecturou em 1637, na margem de sua cópia de *Arithmetica* de Diofante, que não havia soluções inteiras para a equação. Esse teorema, uma generalização do teorema de Pitágoras, é denominado *último teorema de Fermat* e foi demonstrado em 1994 por Andrew John Wiles (1953-), matemático britânico.

Nascido em 20 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomagne, no sudoeste da França, Pierre de Fermat recebeu formação no Monastério Franciscano de Grandselve e depois na Universidade de Toulouse. “Não há nenhum registro de que o jovem Fermat mostrasse qualquer talento especial para a matemática” (Singh, 2010, p. 55).

Após pressões familiares, Fermat assumiu em 1631 um cargo no serviço público na Câmara de Requerimentos. Lá, intermediava os encontros entre o povo e o rei. Dessa forma, se alguém quisesse pedir algo ao rei, deveria convencer Fermat de que seria um pedido válido, e se ele concordasse, o encontro aconteceria.

Como “a praga estava devastando a Europa e aqueles que sobreviviam à doença eram promovidos para ocupar os lugares dos que tinham morrido” (Singh, 2010, p. 56), Fermat subiu de cargo rapidamente. Devido aos riscos da política do século XVII, Fermat se concentrou em fazer o seu trabalho sem se destacar demais, para não ser perseguido. Em seu tempo vago, se dedicava ao seu novo *hobby*, a matemática.

Fermat adotou a estratégia de cumprir com suas obrigações de modo eficiente, mas sem chamar a atenção para si mesmo. Ele não tinha grandes ambições políticas e fez o melhor que podia para evitar as disputas do Parlamento. Fermat dedicava toda a energia que lhe sobrava à matemática e, quando não estava mandando sacerdotes para a fogueira, ele cuidava do seu *hobby*. Fermat era um verdadeiro estudioso amador, um homem que E. T. Bell chamou de “Príncipe dos Amadores”. Mas era tão talentoso que, quando Julian Coolidge escreveu sua *Matemática dos grandes amadores*, ele excluiu Fermat, dizendo que “fora tão grande que devia ser considerado profissional” (Singh, 2010, p. 57).

Fermat não revelava suas demonstrações para os outros; pelo contrário, ele “tinha um toque travesso, o qual, combinado com o sigilo, levava-o a comunicar-se com outros matemáticos

unicamente para zombar deles” (Singh, 2010, p. 59). Ele escrevia cartas aos matemáticos dando enunciados de teoremas mas sem qualquer demonstração, desafiando seus leitores a provarem aquilo que propunha.

Quando entrou em contato com o livro *Aritmética* de Diofante, na versão de 1621 de Bachet, Fermat mergulhou na teoria de números.

Felizmente, para nós, a edição da *Aritmética* de Bachet tinha grandes margens em torno do texto, em cada uma de suas páginas, e às vezes Fermat apressadamente escrevia comentários e fórmulas nessas bordas. Essas notas se tornariam um valiosíssimo registro, ainda que esparso, dos mais brilhantes cálculos deste gênio (Singh, 2010, p. 76).

Durante seus estudos do Livro II da *Aritmética* de Diofante, Fermat se deparou com o teorema de Pitágoras e os trios pitagóricos. Nesse momento, fez uma observação na margem do livro na qual “tinha apenas mudado a potência de 2 para 3, do quadrado para o cubo, mas sua nova equação aparentemente não tinha solução para qualquer número inteiro” (Singh, 2010, p. 79). A partir disso, formula-se o último teorema de Fermat com a clássica escrita na borda da página: “*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet*”³ (Singh, 2010, p. 80).

A anotação, feita em meados de 1637, foi publicada em 1670 pelo filho mais velho Clément-Samuel Fermat, cinco anos após a morte de Fermat, com o título “*Aritmética de Diofante contendo observações de P. de Fermat*” (Singh, 2010, p. 81). A publicação contém 48 observações de Fermat e diversos teoremas que vieram a ser provados ao longo dos anos. O único que desafiou os matemáticos por mais de três séculos foi o Teorema 1.2.

Teorema 1.2 (último teorema de Fermat). *Não existe solução inteira não nula para x, y e z quando $n > 2$ na equação $x^n + y^n = z^n$.*

Leonhard Euler (1707-1783) estabeleceu uma prova para o Teorema 1.2, mas apenas para $n = 3$ e $n = 4$. Em uma das páginas da *Aritmética* de Diofante, Fermat deixou uma observação da prova por contradição, conhecida como *método da descida infinita*, para $n = 4$. Ainda, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) obteve a prova para $n = 5$ e Gabriel Lamé (1795-1870) para $n = 7$ (Singh, 2010). O grande problema era o fato dos números naturais serem infinitos e provar o teorema para casos isolados não era o mesmo que prová-lo para todo número natural maior do que dois.

O Teorema 1.2 foi finalmente demonstrado em 1994 por Andrew Wiles, após muitos anos de estudos. Desde os 10 anos, quando teve o primeiro contato com o teorema, Wiles sentia que encontraria a demonstração. Ele tentou durante anos utilizando toda a matemática disponível em seus livros didáticos, porém não obteve sucesso em suas tentativas (Singh, 2010).

³ Tradução do latim: Eu descobri uma demonstração notável deste teorema mas a margem é muito pequena para contê-la.

Em seu doutoramento, Wiles foi orientado por John Henry Coates (1945-2022), que o direcionou para a pesquisa das curvas elípticas. O que Coates não sabia, é que “essa decisão se mostraria um ponto vital na carreira de Wiles e lhe daria as técnicas necessárias para uma nova abordagem do Último Teorema de Fermat” (Singh, 2010, p. 175), pois em 1984 Gerhard Frey (1944-) rearranjou a equação do Teorema 1.2 para se tornar uma equação elíptica.

Em 1984, durante um simpósio, Frey apresentou sua equação elíptica, a qual ele mesmo chamou de “estranha”, e afirmou que se ela existisse de fato, nunca poderia ser modular⁴. Porém, isso contradizia a conjectura de Taniyama-Shimura, que diz que toda equação elíptica é uma equação modular. Como a conjectura não havia sido provada, nascia um novo desafio para os matemáticos da época.

Segundo Singh (2010), Frey afirmou que se o último teorema de Fermat estivesse errado, então sua equação elíptica existiria e não seria modular. Logo, a conjectura de Taniyama-Shimura seria falsa. Porém, o contrário também poderia ser provado: se a conjectura de Taniyama-Shimura fosse verdadeira, então toda equação elíptica seria modular e, portanto, a equação de Frey não existiria e o último teorema de Fermat seria verdadeiro. Wiles percebeu então que se provasse a conjectura de Taniyama-Shimura, o último teorema de Fermat seria provado.

Utilizando teoria de grupos e o método de Kolyvagin-Flach, Wiles acreditou ter provado que a conjectura de Taniyama-Shimura era verdadeira. Assim, o último teorema de Fermat também seria verdadeiro. Wiles apresentou sua demonstração em um seminário no Instituto Isaac Newton, em Cambridge, em três palestras ocorridas nos dias 21, 22 e 23 de junho de 1993 (Singh, 2010).

O trabalho de Wiles foi corrigido por uma banca especializada, que encontrou uma inconsistência no capítulo 3. Esse erro assombrou Wiles por meses, até que um colega sugeriu que ele confiasse em alguém qualificado para trabalharem juntos na correção. Wiles escolheu Richard Lawrence Taylor (1962-), um ex-aluno que era professor em Princeton (Singh, 2010).

Percebendo que o método de Kolyvagin-Flach não era suficiente, Wiles e Taylor se voltaram para a álgebra de Hecke (Erich Hecke (1887-1947)) para solucionar o problema e, 14 meses após a palestra no Instituto Isaac Newton, Wiles entregou um manuscrito com a demonstração. Dessa vez, nenhuma inconsistência foi encontrada e o teorema foi enfim provado. A demonstração rendeu a Wiles os Prêmios *Wolfskehl*, no valor de 50 mil dólares, e *Wolf*, no valor de 100 mil dólares, que foram divididos com Taylor (Singh, 2010).

Diversas teorias da matemática foram exploradas nas tentativas para se provar o último teorema de Fermat, entre elas os números complexos, os números primos, as formas de demonstração e os processos lógicos associados a elas, a teoria de jogos e probabilidade, a criptografia, a teoria de grupos e as equações elípticas e modulares (Singh, 2010).

Construímos uma animação no GeoGebra com soluções não inteiras do último teorema

⁴ Encontra-se uma definição de equação modular em Weisstein (2022a).

de Fermat e a disponibilizamos no link

<https://www.geogebra.org/m/kbjwvrzw>.

No GeoGebra App, as superfícies podem ser observadas para n variando de 3 a 100.

REFERÊNCIAS

- COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994. 9
- EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. 7
- FERNANDES, F. M. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. 116 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2018. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2972>>. Acesso em: 06 dez. 2024. 13
- FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 8, 10
- GEOGEBRA. **GeoGebra: aplicativos matemáticos**. 2022. Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR>. Acesso em: 10 out. 2021. 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17
- LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978. 17
- LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968. 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
- NETO, A. C. M. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 9
- NÓS, R. L.; FERNANDES, F. M. Ensinando áreas e volumes por equicomposição. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 63, p. 121–137, 2019. 12
- ROSA, E. Mania de Pitágoras. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, v. 1, n. 2, p. 14–17, 1983. 8
- SETTE, P. F. **A aula de matemática no projeto UCA: o GeoGebra e o teorema de Pitágoras**. 213 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/jspui/bitstream/123456789/3475/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O_AulaMatem%c3%a1ticaProjeto.pdf>. Acesso em: 06 dez. 2024. 13
- SILVA, V. M. R. da. **Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra**. 102 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2022. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29513>>. Acesso em: 06 dez. 2024. 8
- SILVA, V. M. R. da; NÓS, R. L.; SANO, M. Uma visão dinâmica do teorema de pitágoras via GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 12, n. 1, p. 62–77, 2023. 8
- SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. 17. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010. 7, 18, 19, 20
- WEISSTEIN, E. W. **Modular equation**. 2022a. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/ModularEquation.html>>. Acesso em: 06 dez. 2024. 20

ÍNDICE

- Demonstração formal
 - teorema de Pitágoras, 8
- Lei
 - da tricotomia, 10
- Matemáticos
 - Coates, 20
 - Euler, 19
 - Fermat, 18
 - Frey, 20
 - Hecke, 20
 - Lamé, 19
 - Legendre, 19
 - Loomis, 8
 - Pitágoras, 7
 - Richard Taylor, 20
 - Wiles, 18
- Matemáticos amadores
 - Perigal, 12
- Números perfeitos, 7
- Teorema
 - de Pitágoras, 7
 - último de Fermat, 19
- Triângulo
 - retângulo, 7
- Técnicas de demonstração
 - direta, 8
 - redução ao absurdo, 10
- Visualização dinâmica
 - teorema de Pitágoras, 11, 13, 15–18