INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

ROSANGELA VOLOBUEFF DO NASCIMENTO DUARTE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA METODOLOGIA DE ENSINO ENVOLVENDO FUNÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE

DOURADOS, 2022

ROSANGELA VOLOBUEFF DO NASCIMENTO DUARTE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA METODOLOGIA DE ENSINO ENVOLVENDO FUNÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

D874r Duarte, Rosangela Volobueff Nascimento
Resolução de problemas : uma metodologia de ensino envolvendo funções e interdisciplinaridade informacional / Rosangela Volobueff Nascimento Duarte. – Dourados, MS: UEMS, 2022.
42 p.

Artigo (Mestrado Profissional) – Matemática em Rede Nacional – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2022.
Orientador: Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos.

1. Resolução de problemas 2. Interdisciplinaridade 3. Função I. Santos, Otávio José Neto Tinoco Neves dos II. Título
CDD 23. ed. - 515.25

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROSANGELA VOLOBUEFF DO NASCIMENTO DUARTE

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA METODOLOGIA DE ENSINO ENVOLVENDO FUNÇÕES E INTERDISCIPLINARIDADE

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 03 de março de 2022.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Profa. Dra. Marina Rodrigues Maestre (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
(participação realizada à distância por videoconferência)

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves (UNEMAT)
Universidade do Estado de Mato Grosso
(participação realizada à distância por videoconferência)

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar. ”

(Albert Einstein)

AGRADECIMENTOS

A Deus, minha força e refúgio, pelo dom da vida e pelo amor que me encoraja em todos momentos.

Ao meu orientador Otávio José Neto Tinoco Neves, pelo auxílio, compromisso e dedicação, demonstrados, inclusive, em cada ajuste em sua agenda para me atender.

Ao meu esposo, meu parceiro na vida, pelo suporte e compreensão sem os quais percorreria um caminho muito mais árduo para a concretização dos meus objetivos.

Ao meu amigo José André, companheiro de muitas primaveras e impulsionador indispensável para o início dessa empreitada.

Aos meus colegas de turma, pela companhia tão agradável nessa jornada e, em especial, à minha amiga Mirian Castro, cuja amizade é um presente que o mestrado me deu.

E aos demais que, direta ou indiretamente, tenham colaborado com a construção desse trabalho.

RESUMO

O presente artigo utilizou-se de pesquisas bibliográficas e metodologia de resolução de problemas como proposta de desenvolvimento na aprendizagem no ensino das funções de forma interdisciplinar. Apresenta de acordo com a BNCC as habilidades e competências que os estudantes do Ensino Médio devem desenvolver no período letivo e em sua vida cotidiana. Sendo que a Matemática está inserida em tudo ao nosso redor, faz-se necessário a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, dá-se enfoque a Ciências da Natureza e suas Tecnologias, no intuito de inserir nossos estudantes como protagonistas de sua própria aprendizagem e os professores como mediadores e facilitadores desse processo. Neste sentido, esta metodologia de ensino através da resolução de problemas foi proposta para uma melhor visualização do conteúdo matemático envolvido, para proporcionar uma maior interação e participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento, de maneira agradável e significativa.

Palavras-chave: Ensino, aprendizagem, funções, BNCC, resolução de problemas, interdisciplinaridade.

ABSTRACT

This article used bibliographic research and problem solving methodology as a proposal for developing learning in teaching functions in an interdisciplinary way. It presents, according to the BNCC, the skills and competences that high school students must develop during the academic period and in their daily lives. Since Mathematics is embedded in everything around us, interdisciplinary with other areas of knowledge is necessary, focusing on Natural Sciences and its Technologies, in order to insert our students as protagonists of their own learning and teachers as mediators and facilitators of this process. In this sense, this teaching methodology through problem solving was proposed for a better visualization of the mathematical content involved, to provide greater interaction and effective participation of students in the construction of knowledge, in a pleasant and meaningful way.

Key words: Teaching, learning, functions, BNCC, problem solving, interdisciplinary.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática a partir da transmissão e resolução de exercícios por meio de regras formais não contribui para a construção de conhecimentos tornando-se repetitivo e mecânico. Segundo o PCNEM,

> De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (PCNEM, 2000 p.43)

Diante do exposto, é possível relatar que existem falhas no processo de ensino aprendizagem, o que aumenta o fracasso escolar. Neste contexto a Matemática trabalhada apenas com exercícios repetitivos de fixação dificulta a aprendizagem do estudante, a torna uma disciplina, na visão da maioria dos estudantes, “chata e complexa”, sem espaço para criatividade e sem uma construção de conhecimento baseada na realidade vivenciada em seu dia-a-dia. Assim, muitos não compreendem e não questionam os conteúdos abordados, dificultando uma participação ativa da aprendizagem. Neste sentido Borin destaca que:

> “[...] a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la, se dá pela inserção de novas metodologias, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação são grandes, assim estes alunos apresentem um melhor desempenho de aprendizagem. '' (BORIN, 1995 p. 9)

Assim, mudanças de metodologias e estratégia de ensino, podem modificar o papel da Matemática na vida dos estudantes. Desta forma consciente das necessidades de se repensar no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, busca-se uma proposta que contenha um novo posicionamento para o professor, diante da conjuntura atual da prática docente em Matemática que façam os estudantes se interessar pela disciplina e que a mesma venha contribuir para a formação do estudante enquanto ser social. Para que a aprendizagem se torne significativa, deve-se aguçar a capacidade do estudante de fazer conjecturas entre os conceitos e a realidade, com integração das diferentes áreas do conhecimento. Quando se fala em aprendizagem significativa, segue-se a ideia apresentada por Huete e Bravo (2006), que afirmam que:

> Uma aprendizagem significativa obriga o aluno a observar, perguntar, formular hipóteses, relacionar conhecimentos novos com os que já possui, tirar conclusões lógicas a partir dos dados obtidos. Enfim exige que construa paralelamente fatos, conceitos, princípios, procedimentos e estratégias relativas ao conhecimento matemático. (HUETE e BRAVO, 2006 p.24)

Dessa forma, o ensino da Matemática deve priorizar o avanço do conhecimento, com a participação do estudante, diante de situações significativas de aprendizagem, para desenvolver suas habilidades e competências. Nesse processo, faz-se necessário que as estratégias de ensino sejam continuamente atualizadas e contextualizadas, ouvindo às exigências e necessidades do estudante. Visto que o conceito de função é amplamente aplicável em nossa sociedade e utilizado tanto na Matemática e suas Tecnologias como em Ciências da Natureza e suas Tecnologias, (Biologia, Química e Física), cada qual com suas especificidades, objetivos e habilidades a serem desenvolvidos. O presente trabalho busca maneiras de relacionar os conceitos de função através da resolução de problemas, de modo que cada disciplina participe no desenvolvimento das habilidades e competências dos estudantes do Ensino Médio. Para entender melhor como isso pode ocorrer tomamos como referência alguns documentos oficiais como PCNEM – Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (2000), PCN+ - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), BNCC – Base Nacional Comum Curricular (2018), Currículo de Referência do Mato Grosso do Sul (2020). As abordagens de Schroeder e Lester (1989), as fases propostas por Polya (1995), a Heurística e os problemas abertos segundo Polya (1995) e as etapas de Allevato e Onuchic (2014) relacionadas a Resolução de problemas.

No trabalho é apresentado uma proposta para desenvolver os conceitos matemáticos de Função através da resolução de problemas, ou seja, como uma metodologia de ensino para auxiliar no processo de aprendizagem.

O artigo visa enfim que, através da resolução de problemas como metodologia de ensino, é possível estabelecer vínculos entre os conceitos de Função e o ensino interdisciplinar entre as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias e contribuir para formação de um estudante capaz de construir seu conhecimento.

2. O CONTEÚDO DE FUNÇÕES, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A INTERDISCIPLINARIDADE NOS DOCUMENTOS OFICIAIS.

Nesta parte do trabalho far-se-á uma descrição do que tratam os documentos oficiais sobre: Função, Resolução de Problemas e Interdisciplinaridade. Tomamos como referência, o PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de 2000 e PCN+ - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais de 2002, a BNCC - Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio de 2018, que norteiam o sistema de ensino na elaboração dos Currículos, e o Currículo de Referência do Mato Grosso do Sul, elaborado após a homologação da BNCC do Ensino Médio.

2.1. O OLHAR DO PCNEM E PCN+

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio cumprem o papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor na busca de novas abordagens e metodologias, organiza as disciplinas em três áreas:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e suas Tecnologias;

Ainda segundo o PCNEM, esta organização tem o intuito de aproximar os conhecimentos científicos entre a Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias e aplicar na realidade do cotidiano social.

> “A aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.” (PCNEM, 2000 p.21)

Para organizar o Ensino da Matemática o PCNEM estabelece um conjunto de parâmetros que o currículo deve contemplar, alguns conteúdos mínimos que poderá ser aprofundado conforme as necessidades de cada unidade escolar. Dentre esses conteúdos destacamos as funções que quanto a aplicabilidade e a importância os PCNEM comentam:

> "[...] o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (BRASIL, 2000 p. 43-44).

Ao considerar a aplicabilidade dos diversos tipos de funções, vemos que eles podem auxiliar na resolução de problemas tanto em Matemática como em diversas áreas. Para saber, fazer e pensar Matemática segundo o PCNEM, podemos começar com resoluções de problemas de diversos tipos e com alguns objetivos, como:

> "• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; " (PCNEM, 2000 p.42)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio citam também a importância da interdisciplinaridade no desenvolvimento dos conceitos das três áreas:

> "A reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em áreas, uma vez que entende os conhecimentos cada vez mais imbricados aos conhecedores, seja no campo técnico-científico, seja no âmbito do cotidiano da vida social. A organização em três áreas - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas tecnologias - tem como base a reunião daqueles conhecimentos que compartilham objetos de estudo e, portanto, mais facilmente se comunicam, criando condições para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade." (PCNEM, 2000 p. 18-19)

Tamanha é a importância da interdisciplinaridade, no contexto escolar, que após a elaboração do PCNEM e com a finalidade de complementar as orientações educacionais oferecidas por este documento, o PCN+ apresenta elementos para implementação das diretrizes para o Ensino Médio, com intuito de facilitar o aprendizado sem responsabilizar uma única disciplina e suprir as necessidades dos docentes em aprender novas metodologias de ensino. A ideia é superar as modalidades exclusivamente pré-universitária e profissionalizante para garantir a universalidade do ensino, como destaca a Lei de Diretrizes e Bases - LDB 9394/96. O PCN+ reforça a necessidade da interdisciplinaridade, onde a própria organização se concentra nas disciplinas da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

> “Nessa nova compreensão do ensino médio e da educação básica, a organização do aprendizado não seria conduzida de forma solitária pelo professor de cada disciplina, pois as escolhas pedagógicas feitas numa disciplina não seriam independentes do tratamento dado às demais, uma vez que é uma ação de cunho interdisciplinar que articula o trabalho das disciplinas, no sentido de promover competências.”
> (PCN+, 2002 p. 10)

Sendo a Biologia, a Física, a Química e a Matemática, ciências que têm em comum a investigação pela natureza e desenvolvimentos tecnológicos, as mesmas compartilham linguagens para representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos, o que facilita a integração entre os conceitos para desenvolver as habilidades e competências do estudante.

2.2. PROPOSTA DA BNCC

Desde a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB de 1996 já se fazia alusão a necessidade da criação de uma base comum para a Educação Básica. Mas foi somente em 2014 que a criação da Base Nacional Comum Curricular- BNCC, foi definida como meta pelo Plano Nacional de Educação-PNE. O documento da Base foi homologado para as etapas de Educação Infantil e Ensino Fundamental em 2017 e para a etapa do Ensino Médio em 2018 que entrou em vigor a partir de 2020, mas com cobertura de todas as séries dessa etapa em 2022.

Tendo em vista o contexto social da atualidade, a BNCC apresenta mudanças nas práticas pedagógicas e no olhar Cartesiano em relação ao conhecimento, definindo o conjunto de aprendizagens que os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica. A proposta da BNCC do Ensino Médio serve como referência para formulação dos currículos das redes Estadual, Municipal e do Distrito Federal. Para melhor organizar o Ensino Médio, estipula cinco itinerários formativos que são oferecidos para os estudantes. São eles:

1. Linguagens e suas tecnologias
2. Matemática e suas tecnologias
3. Ciências da Natureza e suas tecnologias

4. Ciências Humanas e sociais aplicadas
5. Formação técnica e profissional

Sobre essa organização a BNCC cita o parecer do Conselho Nacional de Educação que ressalta:

> “Não exclui necessariamente as disciplinas, com suas especificidades e saberes propriamente históricos construídos, mas sim implica o fortalecimento das relações entre elas e sua contextualização para apreensão e intervenção na realidade, requerendo trabalho conjugado e cooperativo dos seus professores no planejamento e na execução dos planos de ensino.” (PARECER CNE/CP nº 11/2009)

Ao contrário, a BNCC do Ensino Médio requer um trabalho colaborativo na elaboração e execução de planos de ensino, incluindo o projeto político pedagógico de cada instituição de ensino. Então a organização do sistema escolar não está pautado em conteúdos especificamente, mas em um processo muito mais integrador do conhecimento onde o conteúdo passa a ser um objeto de conhecimento que deve ser articulado para desenvolver as competências que a BNCC define como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), e as habilidades (práticas, cognitivas e sócio emocionais) atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A Base organiza as áreas por competências gerais e específicas. A área de Matemática e suas Tecnologias é composta por cinco competências específicas a serem desenvolvidas, cada uma com sua lista de habilidades, que representam aprendizagens a serem desenvolvidas formando um todo que deve estar sempre conectado.

As cinco competências específicas da área de matemática e suas Tecnologias são:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Essas cinco competências orientam o professor de Matemática a trabalhar de forma integrada com as outras áreas do conhecimento. Propõe investigar, construir, interpretar e argumentar com processo de resolução de problemas, além de utilizar representações matemáticas, como álgebra por exemplo que é uma das ferramentas para representar uma Função.

Para que as competências sejam realmente desenvolvidas o estudante precisa compreender os conceitos dos conteúdos, que a BNCC chama de objeto do conhecimento. Em nosso trabalho para que os conceitos matemáticos sobre Função sejam compreendidos e consequentemente sejam desenvolvidas as competências através da metodologia de resolução de problemas.

2.3. FUNÇÃO COMO OBJETO DO CONHECIMENTO E O CURRÍCULO DE REFERÊNCIA DO MATO GROSSO DO SUL PARA O ENSINO MÉDIO

A secretaria de Estado de Educação (SED/MS), considerando as alterações da implementação da BNCC, iniciou a elaboração de seu Currículo de Referência que entrará em vigor no ano de 2022, para o oferecimento do Novo Ensino Médio, com as expectativas locais para formação dos estudantes.

O currículo de referência do MS está organizado por área do conhecimento, onde cada área possui seu Organizador Curricular. Os conteúdos são tratados como objeto do conhecimento com as respectivas séries a serem aplicados, dado maior enfoque as competências e habilidades. No organizador curricular da área de Matemática e suas Tecnologias, assim como orienta a BNCC, são cinco as competências específicas e quarenta e cinco habilidades, distribuídas nos três anos do Ensino Médio.

Vamos dispor em um quadro a seguir parte do Organizador Curricular com algumas das habilidades que envolvem o objeto do conhecimento Função.

HABILIDADES	OBJETOS DE CONHECIMENTO
(MS.EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com apoio de tecnologias digitais.	Funções: interpretação de gráficos e de expressões algébricas;
(MS.EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais;	Funções afins; Gráficos de funções lineares;

(MS.EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	Função Quadrática;
(MS.EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas e exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como de abalos sísmicos, PH, radioatividade, Matemática financeira entre outros.	Função logarítmica; Função Exponencial;

Quadro 1

Note que, essas habilidades têm por finalidade levar o estudante a ser crítico das situações econômica-sociais, relacionar os conceitos de função com outras áreas do conhecimento, compreender a necessidade da aplicabilidade de função e destaca no processo de aprendizagem a resolução de problemas.

O enfoque do Currículo de Referência do Mato Grosso do Sul, assim como na BNCC não está simplesmente nos conceitos do objeto do conhecimento, mas nas habilidades e competências que esses conceitos podem auxiliar a desenvolver.

3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UMA METODOLOGIA DE ENSINO

Com sua linguagem universal, a Matemática ocupa uma posição singular quando nas ciências torna-se essencial na construção e validação de conceitos, argumentação, generalização, interpretação e principalmente relaciona procedimentos, fenômenos e informações para resolução de problemas. De fato, a linguagem Matemática está presente no contexto de várias áreas da sociedade e no sistema escolar permeia constantemente pela área de Ciências da Natureza e suas tecnologias (BNCC,2018). A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, movida por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculos de créditos) e por problemas vinculados a investigações internas à própria Matemática (Brasil, 1997).

Sendo então esta a sua essência, podemos apresentar a resolução de problemas como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática, ou seja, uma metodologia de ensino.

Uma das principais referências bibliográficas no assunto é George Polya, nascido na Hungria sua pesquisa sobre resolução de problemas ganha forma nos Estados Unidos. Foi a partir de seus trabalhos que a resolução de problemas começou a ganhar status de metodologia de ensino. Como afirma Schoenfeld (1992).

> “O matemático mais conhecido por sua conceituação da matemática como resolução de problemas e por seu trabalho em fazer com que a resolução de problemas se concentre no ensino de matemática é Polya. De fato, o edifício do trabalho de resolução de problemas erguido nas últimas duas décadas se apoia em grande parte nas fundações de sua obra. ” (SCHOENFELD, 1992 p.339)

De acordo com Polya (1995, p.5) se o docente “desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis” que poderá atraí-los com interesse para resolução de problemas, sentindo-se motivado, o discente busca soluções além da sala de aula. Então o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de conhecimento, assim deve motivar e desafiar o estudante a se tornar protagonista da construção de seu conhecimento de forma prática e participativa através da elaboração e resolução de problemas vividos no cotidiano. Portanto, o problema deve se apresentar no contexto em que o estudante está inserido, pois corre-se o risco do referido tornar-se ininteligível e sem sentido.

Foi Polya que reviveu também a ideia de heurística, que definiu como a arte da descoberta, com o objetivo de estudar por métodos e regras da descoberta e da invenção. Falando sobre a heurística ele disse que:

> “A Heurística Moderna busca compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informações, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da Heurística deve levar em conta tanto as bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística, [...] segundo estudo da Heurística tem objetivos “práticos”: melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática. ” (POLYA, 1995 p.87)

Assim, a Heurística busca compreender o processo de resolução de problemas como um caminho traçado para que o processo de aprendizagem realmente aconteça tanto nas bases lógicas quanto as psicológicas. Neste processo, o problema visa desenvolver o pensamento do estudante para que ele mesmo elabore um plano de ação e pense nas possíveis estratégias de resolução. Quando não há uma estratégia específica para resolução do problema, envolve uma pesquisa aberta que exige do estudante um grau mais alto de raciocínio pois, segundo Polya (1995), esse tipo de problema incentiva especialmente a conjectura. Ou seja, requer do estudante a capacidade de supor, testar e provar soluções para o problema. Esse tipo de problema vem ao encontro da proposta deste trabalho.

Neste trabalho, ao optar pela Resolução de Problema como metodologia de ensino de Matemática, faz-se necessário organizar algumas fases, abordagens e etapas que norteiam o desenvolvimento dessa metodologia.

Tem-se os trabalhos de Polya (1995) sobre as quatro fases para a investigação e estudo de um problema, que descrevem uma importante organização na metodologia de resolução de problemas, são elas:

- Compreensão do problema
- Elaboração de um plano
- Execução do plano
- Retrospecto

Na fase de compreensão do problema, o estudante observa de vários ângulos o enunciado do problema através da leitura e da interpretação. Na outra fase, elabora então um plano com cálculos, figuras, através dos dados. Na fase de execução do plano tem-se a parte mecânica do processo, na qual os cálculos e questionamentos são respondidos. Na fase do retrospecto o estudante vai validar e refletir sobre a solução encontrada.

A partir dessas ideias de Polya (1995), trabalhou-se muito na educação matemática, com estratégias de resolução de problemas e não no pensar do estudante como era o objetivo de Polya. Esta discordância na forma de trabalhar resoluções de problemas leva a várias reflexões e com intuito de ajudar neste processo Schroeder e Lester (1989) apresentaram três modos diferentes de abordar resolução de problemas:

- Ensinar sobre resolução de problemas; (modelo de resolução de Polya)
- Ensinar para resolver problemas; (como a Matemática é aplicada na resolução de problemas).
- Ensinar matemática através da Resolução de Problemas; (o problema pode desencadear um processo de construção do conhecimento)

Daremos enfoque a essa terceira abordagem da metodologia de ensino através da resolução de problemas, que propõe ensinar Matemática e não apenas ensinar resolver problemas. Como professora de Matemática, vemos que é necessário desenvolver, através dos problemas, as habilidades e competências de um estudante protagonista na construção do conhecimento, na compreensão da Matemática, com dedicação e esforço.

Dante evidencia a importância do desenvolvimento do estudante nestes aspectos,

> “é preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.” (DANTE, 1991 p.11)

Na visão de Onuchic (1999), essa compreensão da Matemática, por parte dos estudantes, deve envolver a ideia de que entender é essencialmente relacionar e afirma que:

> “Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema. ” (ONUCHIC,1999, p.208)

Para que o processo de aprendizagem realmente ocorra, ele deve ser construído pelo estudante com a mediação do professor, como consta na BNCC

(2018). E foi no papel de mediador que organizamos nosso trabalho, oferecendo uma metodologia pautada na resolução de problemas utilizando a abordagem de conteúdos integrados entre as disciplinas de Matemática, Química, Física e Biologia. Ou seja, cada disciplina, apesar de seus conceitos de pertencimento, deve-se encontrar em um âmbito de aplicabilidade: na resolução de problemas cotidianos, tornando assim um processo educativo integrado e, consequentemente, mais eficiente. Descrevendo então, a resolução de problemas como metodologia de ensino, o efeito de sua aplicação seria mais eficaz no processo de ensino aprendizagem. E se esses problemas forem interdisciplinares, o efeito seria melhor ainda.

Esta ideia é destacada em duas das cinco competências previstas na BNCC (2018), a competência três, que salienta a utilização da matemática para interpretar, construir modelos e resolver problemas, analisando a plausibilidade dos resultados e adequações das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente, o estudante deverá ser orientado a pensar na resolução e elaboração de problemas, e na competência quatro, que trata sobre a compreensão e utilização de diferentes registros de representação matemática na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, potencializando assim diferentes formas de resolver problemas, intensificando sua compreensão matemática. Podemos notar que há ênfase dada ao processo de resolução de problemas dentro do processo de aprendizagem não só de Matemática, mas consequentemente em Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Com o intuito de viabilizar um ponto de encontro entre o conhecimento e resolução de problemas, integrando assim as disciplinas de Matemática, Química, Física e Biologia e com a premissa de organizar um processo educativo realmente eficaz, percebe-se a ideia de resolução de problemas como uma atividade norteadora. Mas, para que isso não se torne desorganizado e sem um objetivo, devemos observar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino a ser desenvolvida e não apenas uma ferramenta utilizada após a definição dos conceitos. Para tanto, iremos aliar essa metodologia à sugestão dada por Allevato e Onuchic (2014), descritos por Gonçalvez e Allevato (2020), que sugerem dez etapas para organização e desenvolvimento na resolução de problemas. São elas:

1) Preparação do problema- o professor seleciona, ou elabora um problema, ou aceita um problema proposto por um estudante, chamado de problema gerador, visando a construção de um novo conteúdo matemático necessário para resolução do problema ainda não trabalhado em sala.

2) Leitura individual- cada estudante faz sua leitura do problema. A ação nessa etapa é do estudante; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto.

3) Leitura em conjunto- os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor pode ajudar na compreensão do problema pelos grupos. Mas as ações são realizadas essencialmente pelos estudantes, que nessa fase, exercitam a expressão de ideias para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender.

4) Resolução do problema- os estudantes, em seus grupos, tentam resolver o problema. Esse problema (gerador) é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os estudantes a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. Agora a ação dos estudantes volta-se a expressão escrita. Resolvendo o problema precisarão da linguagem matemática. Se não a dominarem, devem registrar a resolução empregado outros recursos de que dispõem ou que dominam: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas. É importante que os estudantes registrem por escrito, no papel, o que conseguiram fazer e entreguem ao professor.

5) Observação e incentivo - O professor age, enquanto isso, como mediador. Observa o trabalho realizado nos grupos, incentiva os estudantes a utilizar seus conhecimentos prévios e as técnicas operatórias já conhecidas, incentiva a troca de ideias entre eles e auxilia em suas dificuldades com problemas secundários, sem fornecer respostas prontas. Deve demonstrar confiança nas condições do estudante.

6) Registro das resoluções na lousa- representantes dos grupos registram na lousa suas resoluções (certas, erradas ou feitas por diversos processos). É

o momento de compartilhar e uma oportunidade importante para aprimorar a apresentação (escrita) da resolução para mostrar aos colegas.

7) Plenária e 8) Busca pelo consenso- todos os estudantes, com respeito, observam comparam e discutem as diferentes resoluções, apresentadas pelos colegas, defendem seus pontos de vista e esclarecem dúvidas. O professor será o guia e o mediador das discussões. A classe chega a um consenso sobre o resultado correto. Nesse momento, ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

9) Formalização do conteúdo- o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos matemáticos construídos pela resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades relativas ao conteúdo. Essa etapa final tem o professor como centro das atenções; e este, como detentor do conhecimento, irá proporcionar aos estudantes o contato com a correção e o rigor do tratamento matemático e mais construção de conhecimento.

10) Proposição e resolução de novos problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.45-46)

Observa-se que, nessas etapas, existe além de uma análise individual realizada pelo estudante, também um direcionamento para a discussão em grupo, onde os estudantes expressam suas ideias com as possíveis soluções, procedimentos e compreensão dos problemas. Essas discussões proporcionam condições para um trabalho coletivo em busca da solução do problema, favorecendo uma abordagem através de tentativas diferenciadas de resolução em um mesmo grupo, visto que cada indivíduo aborda o problema de maneira diferente. Essa estratégia é também importante, nas etapas de registros e plenária do processo da resolução de problemas, onde o estudante terá uma análise coletiva de suas soluções e caso aconteçam equívocos durante a resolução, estes podem ser considerados como erros do coletivo, afastando a ideia de fracasso individual, pois o erro individual pode desencorajar os estudantes. Com isso, o professor tem papel fundamental de mediador durante as etapas da resolução dos problemas, com o intuito de despertar o interesse de seus estudantes para a Matemática e ainda, auxiliar também no desenvolvimento crítico e o trabalho coletivo em busca de soluções, tais habilidades são indispensáveis para o convívio pleno em sociedade.

Portanto, essas etapas servem como norte na resolução dos problemas envolvendo funções propostos no trabalho e implementa o processo de integração dos conceitos referentes as áreas de Matemática, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, haja visto que os referidos problemas têm o papel de auxiliar o estudante na construção de seu conhecimento.

4. PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÃO E A INTERDISCIPLINARIDADE

Apresentaremos uma proposta de atividades compostas de dois problemas com intuito de promover o desenvolvimento do protagonismo do estudante na construção do conhecimento de forma interdisciplinar.

Os problemas foram escolhidos no banco de dados do ENEM pelos professores de Matemática, Física, Química e Biologia da Escola Estadual Senador Filinto Muller. Nessa escolha foi priorizado a aplicabilidade, a variedade nos procedimentos de resolução (cálculos, interpretação de gráficos, lei de formação da função, etc) e principalmente um contexto favorável para a interdisciplinaridade, que permeia os documentos oficiais.

Vale ressaltar que, a integração das disciplinas através dos problemas desta proposta, não visa transformar o professor de Matemática em especialista em Física, Química ou Biologia, pois os conceitos específicos devem ser trabalhados em cada área de pertencimento. Dessa forma, os problemas propostos visam integrar as disciplinas, cada qual com suas especificidades.

A metodologia de resolução de problemas adotada nesse artigo tem uma abordagem de Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas de Schroeder e Lester (1989), as fases propostas por Polya (1995) e irá utilizar como norte na descrição dos passos na Resolução dos Problemas propostos, as etapas de Allevato e Onuchic (2014).

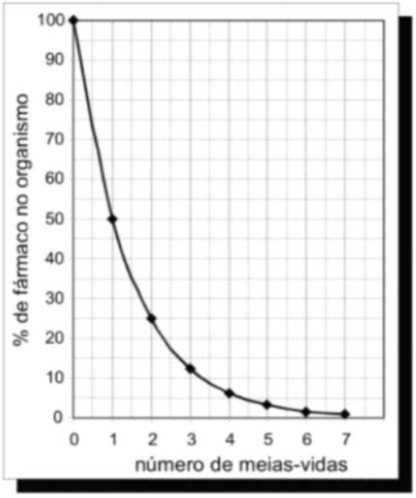
Escolhidos os problemas, definidas a abordagem, fases e etapas, buscaremos como uma proposta de metodologia, a descrição do processo de resolução de dois problemas, para implementação em sala de aula na Educação Básica, com conceitos do objeto do conhecimento “Função” e integração com os conceitos das disciplinas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, referente ao Ensino Médio. A ordem para utilizar os problemas fica a cargo da necessidade de cada professor, pois depende do tipo de função que se pretende abordar primeiro. Para facilitar a descrição das etapas da resolução dos problemas, far-se-á uma enumeração.

O tempo estipulado para a abordagem de cada problema é de 2 horas/aula, obviamente com adequações do tempo a depender das condições específicas da turma a ser trabalhada. Enfatiza-se a importância de oferecer tempo suficiente para que os estudantes possam realizar a atividade proposta, deve-se respeitar o tempo de assimilação de cada estudante.

Apresenta-se no quadro 1, o primeiro problema, que envolve os conceitos sobre o objeto do conhecimento “Função Exponencial” e pode ser proposto para estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Ao trabalhar esse problema, espera-se que o estudante desenvolva as habilidades **(MS.EM13MAT101)**, **(MS.EM13MAT301)** e **(MS.EM13MAT305)** que constam no quadro organizador curricular do Currículo de referência do Mato grosso do Sul.

Questão de múltiplia escolha

A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meiavida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meiavida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. **Farmacologia Clínica**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de

Fonte: ENEM, 2017

1) Preparação do Problema

Este problema foi escolhido pelos professores de Física, Química, Biologia e Matemática, seguindo os critérios citados anteriormente. Fica claro em seu contexto um envolvimento com a realidade do estudante, quando apresenta o fármaco Amoxicilina, antibiótico relacionado ao tratamento de saúde. Apresenta também uma integração da Biologia quando trata da questão saúde, a Química e Física quando cita a meia-vida das substâncias no organismo humano. E claro, seja na representação gráfica ou no texto, estão incluídos os conceitos matemáticos. Essa preparação do problema, ou melhor, essa escolha reverbera a primeira etapa na resolução de problemas, definido por Onuchic e Allevato (2014), como problema gerador, pois visa à construção do novo conteúdo, que neste caso é a Função Exponencial que é uma sequência no desenvolvimento de conteúdos como: conceitos e aplicabilidade de Funções, Função Afim, Função Constante, Função Quadrática, suas leis de formação, gráficos e tabelas. Para resolver este problema o estudante precisa ter a noção do conceito de função para observar a relação de dependência que existe entre a quantidade de fármaco no organismo e o tempo de meia-vida. E ainda que cada tempo de meia-vida está relacionado com uma única quantidade de fármaco. No tocante a porcentagem, compreender a ideia do todo representado pelo 100%.

O estudante precisa ainda, compreender os cálculos com Potenciação, pois esse será o grande diferencial dos conceitos desse problema em relação as outras funções, que devem servir como pré-requisito no desenvolvimento dos conceitos da Função Exponencial.

Como o enunciado do problema é um pouco extenso e apresenta um gráfico, seria bom propor uma versão impressa aos estudantes.

2) Leitura Individual

Nesta etapa o estudante fará a leitura individual do texto e do gráfico elaborados no problema, observará os dados contidos no texto e representados pelo gráfico, como número de meia-vida, percentual do fármaco amoxicilina no organismo humano e relação do tempo relógio com o número de meia-vida. Após essas observações podemos nos deparar com questionamentos sobre informações que descrevem dados que vão além dos conceitos Matemáticos, haja visto que na descrição do problema se observa ideias de substâncias químicas relacionadas ao seu tempo de duração, onde o estudante pode fazer conjecturas que integram a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias sobre compreender, aplicar conceitos de meia-vida e avaliar propostas que visam processos de preservar a saúde individual, coletivas com enfoque implícito a saúde humana. Ou seja, na observação do problema o estudante terá uma gama de informações com enorme potencial para um trabalho interdisciplinar e mais ainda, dentro de sua realidade cotidiana.

3) Leitura em Conjunto

Já para a terceira etapa a ideia é de que o contato com o problema seja realizado em conjunto, assim tanto a leitura do texto quanto do gráfico será realizada em grupo. Nessa etapa destaca-se a discussão dos dados observados por cada estudante. Temos então na discussão das ideias um processo de troca de conhecimento. Segundo Polya (1995), as etapas 2 e 3 são os momentos de compreensão e elaboração de um plano para resolução do problema.

O professor pode auxiliar na compreensão do problema com alguns questionamentos como:

O que se quer encontrar neste problema?
Como se pode encontrar?
Como se comporta a quantidade do fármaco no intervalo de tempo?
O que está relacionado no gráfico?
O texto relaciona a duração do fármaco em tempo no organismo? E o Gráfico?

Como o processo é interdisciplinar, se surgirem questionamentos sobre conceitos específicos de outras disciplinas, apesar do trabalho ser concomitante, ou seja, os professores desenvolvem as aulas com os conceitos relacionados ao problema de forma simultânea, o estudante poderá realizar uma pesquisa ou poderá recorrer ao professor especialista da área, em momento oportuno.

4) Resolução do problema

Após a leitura individual e em grupo realizada pelos estudantes, é hora de elaborar tentativas de resolução e fazer conjecturas sobre os dados observados, tanto no gráfico quanto no texto. Essa quarta e a quinta etapas é para Polya (1995) a fase execução do plano.

Nesta etapa devem surgir diferentes abordagens de resolução do problema. Uma dessas abordagens se dá na interpretação do gráfico, como podemos verificar ao observar os apontamentos realizados no gráfico que relaciona o eixo do número de meia vida com o eixo do percentual do fármaco. Observe a Figura 2.

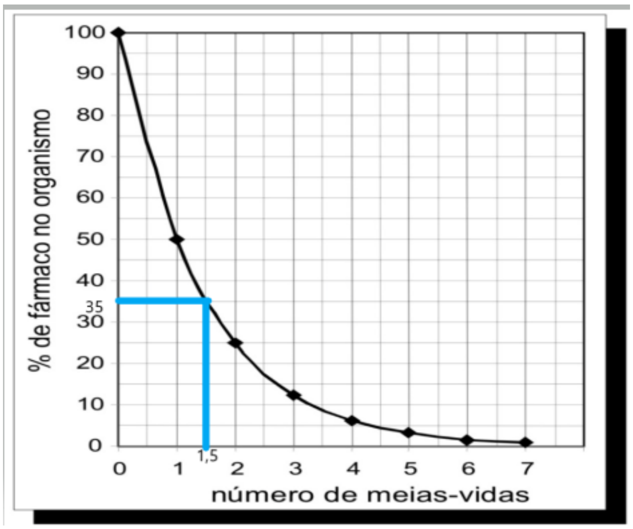


Figura 2

No referido problema o texto apresenta de forma implícita uma lei de formação da função exponencial, o que poderá causar afastamento da resolução do estudante por esse caminho, então ele pode preferir solucionar o problema apenas com a interpretação do gráfico. Porém, a resolução do problema por cálculos realizados com a lei de formação, faz um papel importante no desenvolvimento dos conceitos de função. O professor deve auxiliar e motivar o estudante para que ele busque outra abordagem além do gráfico.

Outra forma de abordagem do problema que o estudante pode realizar é utilizar o dado do problema que descreve sobre a queda pela metade da substância a cada meia-vida e relacionar quantidade total do fármaco com o todo na porcentagem representado pelo um. Então a metade pode ser representada por $0,5$.

Então:

- 1 meia-vida é a metade da quantidade do fármaco: $0,5$
- 2 meias-vidas : $0,5$ de $0,5 = 0,5 . 0,5 = (0,5)^2$
- 3 meias-vidas: $(0,5)^3$
- 4 meias-vidas: $(0,5)^4$

Na sequência dessa ideia, como a meia-vida do fármaco é de uma hora, o intervalo de tempo entre meio dia e treze e trinta é de $1,5$ horas logo:

- 1,5 meia-vida: $(0,5)^{1,5}$ o que corresponde a $0,35$ ou seja 35% .

Então a abordagem apresenta uma resposta sobre o percentual após $1,5$ horas que é de 35% .

5) Observação e Incentivo

Mas apesar da abordagem determinar o percentual do fármaco o professor deverá realizar alguns ajustes nessas conjecturas, principalmente ao que se refere a relação entre as grandezas. Um questionamento sobre o resultado é:

Esse percentual é sobre qual grandeza?

Qual é a quantidade de fármaco?

Como essas ideias poderiam ser escritas para qualquer quantidade de fármaco?

E para qualquer meia-vida?

Nesta etapa o professor segue como mediador e precisa auxiliar e incentivar as tentativas de resolução. Principalmente no problema em questão, onde uma das abordagens é interpretação do gráfico, outras abordagens podem ser descartadas pelos estudantes, pois de posse de uma possível solução, os mesmos têm a tendência de acomodação, que segundo Piaget, é a adequação ao novo processo assimilado.

A recomendação geral dada por Polya (1995) reside basicamente em vasculhar a experiência dos estudantes na procura de problemas por eles conhecidos ou já resolvidos e que, de alguma forma, se relacionem com o problema gerador, os chamados problemas correlatos, ou seja, problemas com características parecidas ao problema em questão.

Como existem conceitos prévios sobre funções e suas leis de formação, o professor pode com auxílio dos estudantes, rever leis genéricas de problemas de outras funções de forma colaborativa para lei de formação da Função Exponencial. O professor neste momento pode orientar os estudantes em relação as variáveis que podem ser observadas na montagem da segunda abordagem. Como, nomear o tempo de meia-vida com a variável t e a quantidade em percentual da substância como $f(t)$.

6) Registro das resoluções

Os registros podem ser realizados pelos grupos em slides elaborados no Power Point e projetados pelo data Show, se esses recursos não estiverem disponíveis o registro das resoluções podem ser feitos na lousa por um estudante de cada grupo. A partir desta etapa acontece o que Polya (1995) definiu como retrospecto.

Além da resolução pela interpretação do gráfico ou pela abordagem descrita no item 4, alguns registros dos estudantes podem apresentar a variável tempo como parte de uma função Afim e com aplicação de apenas uma meia-vida ser levado ao equívoco a seguir

$$f(t) = 0,5.t$$
$$f(1) = 0,5.1 = 50\%$$

Observe que, realmente para o tempo de meia-vida igual a 1, a função Afim faz a quantidade de substância cair pela metade, mas se for aplicada para outras quantidades, isso não será verdadeiro. O professor então mediará essa discussão em Plenária.

7) Plenária

Após os devidos registros há então a continuidade das discussões, agora com todos os estudantes, sobre as possibilidades de resolução, é hora de expor as ideias do grupo. Neste problema essas discussões giram em torno da interpretação do gráfico e dos cálculos relacionados a lei de formação da função exponencial. Para lei de formação pode-se encontrar dificuldade em relação a montagem das ideias e até mesmo na ordem das Variáveis. E como foi descrito anteriormente podem ocorrer equívocos em relação a variável tempo de meia-vida, como parte de uma função.

8) Busca pelo consenso

Realizadas as discussões sobre possibilidades de resolução do problema, nesta próxima etapa da metodologia de resolução de problemas a proposta é buscar um consenso entre os resultados da interpretação do gráfico e os cálculos pela lei de formação. Um ponto será consenso, desenvolver o problema pela interpretação do gráfico é realmente muito mais fácil. Mas para o desenvolvimento mais amplo dos conceitos matemáticos envolvidos e das habilidades, é necessária a disposição da lei de formação que poderá ter aperfeiçoamento da escrita Matemática, para que os estudantes possam adequar os seus registros escritos e corrigir os procedimentos equivocados.

Haja visto que o problema será utilizado para a abordagem do conteúdo e neste contexto o estudante ainda não teve contato com exemplos genéricos de lei de formação de um Função Exponencial e pode tender a uma resolução equivocada ao utilizar a lei da função Afim. Para buscar o consenso, neste momento é necessário desenvolver com a aplicação de mais tempos de meias-vidas na função Afim elaborada pelos estudantes e pedir que façam um parâmetro com o gráfico. Como por exemplo utilizar o tempo de meia-vida igual a 2,

$$f(2) = 0,5.2.100 = 100$$

Ou seja, o resultado é a mesma quantidade de substância do início da aplicação, o que não é possível ocorrer. Então os estudantes podem descartar a Função Afim e reforçar a ideia da presença da variável t no expoente da lei da função, ao estender a ideia da abordagem do item 4.

9) Formalização dos conceitos

O professor pode através da abordagem do item 4, organizar com as ideias dos estudantes em relação as grandezas envolvidas: tempo de meia-vida e o percentual do fármaco no organismo humano. De posse da descrição da parte final da abordagem,

$$(0,5)^{1,5} = 0,35 = 35\%$$

Orienta os estudantes para que observem as grandezas tempo e percentual, é o momento de destacar que a relação dessas grandezas ocorre de maneira biunívoca e remete então a valores de uma função.

Ao escrever esses valores genericamente, onde t representa o tempo de meia-vida e f(t) representa a quantidade do fármaco no organismo, temos

$$f(t) = (0,5)^{t}.1$$

Para facilitar a visualização e melhor compreensão dos estudantes, poderá ser utilizado os números inteiros de meias vidas inseridos, o professor utiliza os conceitos de valores de uma função e orienta os estudantes a comparar com os resultados do gráfico.

$$(0,5)^{0}.100 = 1.100 = 100$$
$$(0,5)^{1}.100 = 0,5.100 = 50$$
$$(0,5)^{2}.100 = 0,25.100 = 25$$
$$(0,5)^{3}.100 = 0,125.100 = 12,5$$

Neste momento o professor deve realizar a definição formal de uma função exponencial e fazer os devidos reportes.

Antes de finalizar o processo de ensino aprendizagem o professor deve relembrar o questionamento sobre a quantidade do fármaco, que para resolução do problema em relação ao percentual se descreve como 100% ou como utilizado na abordagem pelo 1. Para representar qualquer quantidade do fármaco além do percentual, o professor pode acrescentar à lei da função a quantidade Q.

$$f(t) = (0,5)^t . Q$$

E ainda mobilizar os estudantes para que resolvam o problema através da lei de formação, que foi descrita com a contribuição de todos.

Ao substituir o tempo do problema, $t = 1{,}5\ horas$. Tem-se:

$$f(1,5) = (0,5)^{1,5} . Q$$

Para facilitar os cálculos, podemos utilizar a calculadora,

$$f(1,5) = Q . 0,35$$

Ao utilizar as ideias de resolução dos estudantes para formalizar os conceitos envolvidos em Função Exponencial, o processo terá mais significado para o mesmo e ele fará parte da construção mesmo que informalmente desses conceitos. Ao apresentar os conceitos formais de Função Exponencial, o estudante terá a capacidade de relacionar com parte de suas próprias ideias, desde a escrita da variável no expoente, a sua modelagem de crescimento ou decrescimento e principalmente a sua aplicabilidade.

Também neste momento o professor poderá ratificar a importância da integração entre as disciplinas de Física, Química, Biologia e, obviamente, Matemática no desenvolvimento, compreensão e construção do conhecimento do estudante, através da resolução do problema.

10) Proposição e resolução de novos problemas

Trabalhar com outros problemas que envolvam os conceitos de Função exponencial, mas que não apresentem gráficos, com tabelas e com suas leis de formação, haja visto que problemas que envolvem função exponencial têm ampla aplicabilidade no cotidiano do estudante e em outras áreas do ensino.

Apresenta-se no quadro 2 o segundo problema que é uma sugestão para dar continuidade ao estudo dos conceitos de Função Quadrática iniciados no Ensino Fundamental e pode ser proposto para estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Espera-se que o estudante desenvolva as habilidades **(MS.EM13MAT101), (MS.EM13MAT503)** e **(MS.EM13MAT301)** que constam no quadro organizador curricular do Currículo de Referência do Mato Grosso do Sul.

PROBLEMA 2

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento(t=0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$ *com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39ºC. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?*

Fonte: ENEM, 2013

1) Preparação do Problema

Antes de explorar os dados do problema proponha, aos estudantes uma conversa sobre os conceitos de função, tabelas e lei de formação de uma função Afim. Pois esses conceitos são pré-requisitos para que o estudante possa desenvolver uma aprendizagem significativa dos conceitos de uma Função Quadrática.

O problema refere-se a temperatura de um forno, medida em graus centígrados, que varia de acordo com uma expressão determinada pela lei de formação de uma função Quadrática. Ao apresentar em seu contexto a temperatura, integra os conceitos matemáticos com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

O professor pode registrar o problema na lousa ou utilizar um projetor.

2) Leitura Individual

Ao ler o texto individualmente é provável que os estudantes recordem expressões parecidas com a do texto, as leis de formação de funções Afim. Oriente os mesmos a observar as características da expressão do problema que eles julgam diferentes das leis da função Afim.

3) Leitura em Conjunto

Reunidos em grupo os estudantes realizam novamente a leitura do texto para melhor compreender o problema. Afim de ajudar nessa compreensão o professor pode auxiliar e conduzir de modo que o estudante reflita sobre as seguintes questões:

O que é dado no problema?
Existe uma relação entre algumas grandezas? Quais?
O que se pede?

Após o estudante observar mais atentamente os dados envolvidos no problema o professor reitera o incentivo para que identifiquem as duas grandezas variáveis envolvidas, a temperatura do forno e o tempo de espera. E ao observar a temperatura em que a trava de segurança é liberada poderá refletir sobre quando a porta do forno pode ser aberta.

4) Resolução do problema

Após realizar as leituras e responder aos questionamentos, ainda reunidos em grupos, os estudantes elaboram algumas abordagens das possíveis resoluções do problema. Uma dessas abordagens pode ser através de estimativas entre as grandezas tempo e temperatura, faz-se a escolha do tempo e substitui na expressão dada no problema, para observar o que ocorre com a temperatura. O conceito aplicado é o de valores de uma função.

Ao descrever a abordagem temos,

$$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$$

Para $t = 0$,

$$T(0) = -\frac{0^2}{4} + 400 = 400$$

O professor pode questionar o que representa essa temperatura quando t é representado por zero, para que o estudante se atente que para essa temperatura o forno acaba de ser desligado.

E as estimativas de tempo podem ser realizadas até que se chegue a temperatura onde o forno destrava, $39°C$.

$$T(4) = -\frac{4^2}{4} + 400 = -4 + 400 = 396°C$$
$$T(16) = -\frac{16^2}{4} + 400 = -64 + 400 = 336°C$$
$$T(32) = -\frac{32^2}{4} + 400 = -256 + 400 = 144°C$$
$$T(38) = -\frac{38^2}{4} + 400 = -361 + 400 = 39°C$$

Temos então que o tempo de espera após desligar o forno para que a trava de segurança fique liberada é de 38 minutos.

5) Observação ao incentivo

Durante o processo de leitura individual e em grupo o professor já desempenha seu papel de mediador, no momento em que o estudante aborda uma possível resolução por estimativa das grandezas envolvidas, dúvidas sobre escrita e até mesmo cálculos e sinais são eminentes e cabe ao professor auxiliar em seus questionamentos, obviamente sem interferir nas ideias.

6) Registro das soluções

Ao chegar a uma resolução pela abordagem de estimativa das grandezas envolvidas ou outras, os estudantes devem compartilhar com a classe. Os registros podem ser realizados pelos grupos na lousa por um estudante de cada grupo e devem escrever na forma de equação a situação da abordagem, como foi descrito anteriormente, se houver equívocos o professor fará as orientações pertinentes para cada grupo sem dar muita ênfase ao erro, aproveitando as conjecturas dos estudantes. A partir desta etapa acontece o que Polya (1995) definiu como retrospecto.

7) Plenária

É importante reservar um momento para que os estudantes compartilhem as percepções, descobertas e principalmente que seja discutida a relação entre as grandezas temperatura do forno e o tempo de espera para que a trava de segurança fique liberada.

8) O Consenso

Neste problema a busca pelo consenso deve permear a expressão dada como uma lei de formação de uma função. Ainda sem uma definição formal, mas como uma representação importante para os conceitos de Função Quadrática.

9) Formalização dos Conceitos

O professor pode adequar a abordagem de resolução dos estudantes por estimativas dos valores entre as grandezas, representadas na expressão, para detalhar melhor os conceitos envolvidos e organizar a resolução de uma equação quadrática.

O professor retoma a ideia da abordagem de resolução dos estudantes, porém de maneira invertida, ou seja, ao invés de supor valores para o tempo na busca da temperatura que destrava o forno, ele utilizará a temperatura de 39°C na expressão para determinar o tempo.

Assim,

$$T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$$
$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400 (I)$$

A variável $T\,(t)$ pode ser descrita neste momento pelo professor, como dependente do tempo t e que para cada tempo que o estudante estimou existia apenas uma temperatura relacionada. Ratifica o que o estudante instintivamente relacionou com uso dos valores da função Afim e verifica que a expressão dada no problema é a lei de formação de uma função. É preciso determinar ainda qual é o tipo dessa função.

Ao organizar a equação (I) tem-se uma equação quadrática incompleta

$$-t^2 + 1600 = 156$$

O professor deve evidenciar a relação da equação quadrática com a expressão dada no problema e definir então as características da lei uma função Quadrática e os conceitos formais da função. Finaliza seus apontamentos com a resolução da equação e compara os resultados com a abordagem dos estudantes.

$$-t^2 = 156 - 1600$$
$$-t^2 = -1444$$
$$t^2 = 1444$$
$$t = \sqrt{1444} \quad \text{ou} \quad t = -\sqrt{1444}$$
$$t = 38 \quad \text{ou} \quad t = -38$$

Durante todo o processo de resolução do problema os estudantes acompanham a escrita formal dos conceitos através do livro didático. O professor deve incentivar a leitura, retomar as explanações quando houver dúvidas e sugestões dos estudantes.

10) Proposição e Resolução de Novos Problemas

A função Quadrática está vinculada a solução de diversos problemas nas mais diversas áreas de nossa sociedade, sua aplicabilidade é o que a torna mais próxima da realidade do estudante. Portanto o professor precisa aproveitar isso no processo de ensino aprendizagem.

A partir das definições de Função Quadrática, sua lei de formação, sua relação com a equação quadrática e sua resolução, o professor poderá propor outros problemas que possam dar continuidade aos conceitos, como por exemplo problemas que apresentem equações quadráticas completas, problemas que descrevam trajetória de corpos, instigando assim a construção e interpretação do gráfico de uma Função Quadrática.

Como a abordagem é de ensinar matemática através da resolução de problemas, o processo de ensino aprendizagem deve estar pautado em desenvolver as habilidades e as competências do estudante. As habilidades a serem desenvolvidas com os problemas propostos foram descritas na apresentação de cada problema. No que se refere as competências especificas da Matemática citadas na BNCC, é necessário pontuar que cada uma contribui de forma progressiva no desenvolvimento da outra, não sendo possível dissocia-las.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações, no decorrer desse artigo, acerca do uso de resoluções de problemas como uma metodologia de ensino, buscaram elucidar quais etapas são necessárias para que a utilização deste viesse a contribuir efetivamente no processo de ensino aprendizagem.

Além disso, apresenta-se uma proposta, como sugestão aos professores de Matemática, direcionada aos estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Tal proposta aborda o objeto do conhecimento Função, integrado com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visando o desenvolvimento das habilidades e competências asseguradas pela BNCC.

Diante do que foi apresentado nesse artigo, acredita-se que o desenvolvimento dos conceitos de função integrados à Física, Química e Biologia através da resolução de problemas, colabora para uma aprendizagem significativa e proporciona a oportunidade para que os estudantes sejam protagonistas na construção dos conhecimentos.

Destarte, a construção do conhecimento se dará de forma significativa se o estudante participar ativamente do processo de ensino aprendizagem. Admite-se então, que a metodologia de ensino através da resolução de problemas dispõe de mecanismos para que isso ocorra.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORIN, J. **Jogos e Resoluções de Problemas: Uma Estratégia para a aula de Matemática.** São Paulo. USP. 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental - **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental – **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Brasília: MEC. CNE.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12. ed. São Paulo: Editora Ática. 1997.

GONÇALVES, R.; ALLEVATO, N. S. G. **Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino e Aprendizagem Significativa**. São Paulo: Saraiva, edição 2020.

HUETE, J. C. S.; BRAVO, J. A. F. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006. Tradução Ernani Rosa.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Boletim de Educação Matemática (Bolema), v. 25, n. 41, 2014.

POLYA, G. (1945). **A arte de resolver problemas.** Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SCHOENFELD, A. H. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?** In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.). Investigar para aprender matemática. 1. ed. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1992.