



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Como usar a matemática para calcular o volume de um tanque de gasolina

Helias Assunção Freitas

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa**

Barra do Garças - MT

Abril de 2022

Como usar a matemática para calcular o volume de um tanque de gasolina

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Hélias Assunção Freitas e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 28 de abril de 2022.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Prof. Dr. Adilson Antonio Berlatto
Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

F866c Freitas, Helias Assunção.
Como usar a matemática para calcular o volume de um tanque de gasolina / Helias Assunção Freitas. -- 2022
xi, 68 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Márcio Lemes de Sousa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia, 2022.
Inclui bibliografia.

1. Tanque de Gasolina. 2. Geometria Plana. 3. Integral Definida. 4. Integral de Linha. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: COMO USAR A MATEMÁTICA PARA CALCULAR O VOLUME DE UM TANQUE DE GASOLINA

AUTOR (A): MESTRANDO (A) HELIAS ASSUNÇÃO FREITAS

Dissertação defendida e aprovada em 28 de ABRIL de 2022.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. DOUTOR MÁRCIO LEMES DE SOUSA (Presidente Banca / ORIENTADOR)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

2. DOUTOR ADILSON ANTÔNIO BERLATTO (Membro Interno)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

3. DOUTOR MARCELO ALMEIDA DE SOUZA (Membro Externo)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

4. DOUTOR TIBÉRIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS (Suplente)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

BARRA DO GARÇAS, 28/05/2022.



Documento assinado eletronicamente por TIBERIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 28/05/2022, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por MARCIO LEMES DE SOUSA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 28/05/2022, às 14:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por MARCELO ALMEIDA DE SOUZA, Usuário Externo, em 28/05/2022, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por ADILSON ANTONIO BERLATTO, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso, em 28/05/2022, às 20:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 4760993 e o código CRC 5D9CB1DD.

Quero dedicar esse trabalho às pessoas que mais amo na vida Meus filhos Ana Laura e Alfredo Helias, minha mãe Olivia, meu pai Alfredo Assunção Pinto (in-memória) minha esposa Ingrid Angelina, meus amigos e colegas que me ajudaram durante o decorrer desse processo, a meus professores que tiveram uma parte muito importante nesse projeto e a Deus por me honrar e me proteger sempre.

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus por me dar vida e saúde para que eu possa realizar meus projetos, e quero também agradecer algumas pessoas que foram muito importantes durante esse percurso, que são eles: meus filhos Alfredo Helias de Souza Assunção e Ana Laura de Souza Assunção que sempre me servem de incentivo e inspiração para crescer na vida, minha mãe Olívia de Freitas Pinto que sempre foi e será a pessoa que reza e torce por mim a cada minuto, minha esposa Ingrid Angelina de Oliveira Amoreli que é minha companheira em todos os momentos da vida e que tanto me cobra a crescer a crescer profissionalmente, meus irmãos Hermano e Heliene com os quais posso contar sempre que necessário, dentre outros familiares e amigos que estão sempre comigo, quero também agradecer meus professores com os quais eu aprendi muito no decorrer desse curso e em especial quero agradecer meu professor orientador Márcio Lemes de Sousa, professor esse que não mediu esforços para me ajudar, auxiliar, cobrar e estar sempre disposto a me responder a qualquer hora que eu precisei, agradecer meus colegas de turma pelo companheirismo, enfim, foram muitos os envolvidos nesse processo, fica meu muito obrigado a todos.

Resumo

No estudo de matemática sempre surge a pergunta, para que esse conteúdo serve? Pensando nisto, temos como objetivo abordar três maneiras distintas de solucionar o seguinte problema: como o frentista de um posto de gasolina sabe quantos litros de gasolina tem no tanque. Iremos mostrar a resolução de tal problema usando a geometria plana, a integral definida, e a integral de linha.

Palavras chave: Tanque de gasolina, Geometria Plana, Integral definida, Integral de Linha.

Abstract

In the study of mathematics, the question has always arisen, what is this content for? With this in mind, we aim to approach three different ways to solve the following problem: how does the gas station attendant know how many liters of gasoline are in the tank. We will show how to solve such a problem using plane geometry, the definite integral, and the line integral.

Keywords: Gas tank, Plane Geometry, Definite Integral, Line Integral.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de figuras	xi
Introdução	1
1 Breve relato histórico	4
1.1 Geometria	4
1.2 Cálculo Diferencial e Integral	6
2 Preliminares	9
2.1 Geometria	9
2.1.1 Identidades trigonométricas	9
2.1.2 Áreas de figuras planas	12
2.1.3 Princípio de Cavalieri	16
2.2 Cálculo Integral de uma variável	20
2.3 Integral de linha	28
2.3.1 Curvas parametrizadas	28
2.3.2 Integrais duplas	34
2.3.3 Teorema de Green	38
3 A geometria do posto de combustível	46
3.1 Introdução	46
3.2 Resolução do problema usando integral de uma variável	48

3.3	Resolução do problema usando geometria euclidiana	54
3.4	Resolução do problema usando integral de linha	58
3.5	Contribuições para o Ensino Médio	62
	Considerações finais	66
	Referências Bibliográficas	68

Lista de Figuras

2.1	Triângulos que motivam trigonometria	10
2.2	Triângulo equilátero de lado 1	11
2.3	Área do setor circular de raio R	14
2.4	Círculo inscrito no quadrado de lado $8m$	15
2.5	Área da figura procurada	15
2.6	Prismas de mesmo volume	16
2.7	Deformação de um prisma a outro	17
2.8	Figuras distintas com mesmo volume	18
2.9	Volume da esfera	19
2.10	Partição do intervalo $[a, b]$	21
2.11	Escolha dos c'_i s na partição	22
2.12	Interpretação geométrica de $f(c_i)\Delta x_i$	22
2.13	Área do conjunto A	25
2.14	Interpretação geométrica de somas inferior e superior	26
2.15	Integral definida	27
2.16	Segmento AB	29
2.17	Círculo de centro na origem e raio R	30
2.18	Elipse de centro na origem e os focos sobre os eixos de coordenadas	31
2.19	Partição do retângulo R	34
2.20	A curva γ é C^1 por partes	42
2.21	Lemniscata	44
2.22	Curva de Lissajous para $a = 2$ e $b = 3$	44
3.1	Tanque de combustível	47
3.2	Medindo o volume	48

3.3	Interpretação geométrica da área da base para calcular o volume de um tanque	49
3.4	Auxiliar para cálculo de menos de meio tanque	49
3.5	Interpretação geométrica das áreas denotados por A_2 e A_s	50
3.6	Auxiliar para cálculo de mais de meio tanque	52
3.7	Gráfico da função volume	53
3.8	Área para cálculo do volume de menos de meio tanque	55
3.9	OM é bissetriz de $A\hat{O}B$	55
3.10	Área para cálculo do volume de mais de meio tanque	56
3.11	Região D delimitada pelas curvas C_1 , C_2 e C_3	59
3.12	Gráfico da função volume	61
3.13	Tabela régua medidora	62

Introdução

O presente trabalho tem como principal enfoque a construção de uma régua medidora que serve para medir o nível de combustível (ou qualquer outro líquido) armazenado em um tanque de formato cilíndrico sendo esse um cilindro circular reto ou um cilindro reto de base elíptica, sendo dada uma maior atenção ao cilindro de base circular onde o mesmo estará na posição deitado, ou seja, a régua medidora a ser construída deve ser feita a partir de uma função que terá como variáveis a altura do tanque (essa altura vai variar com o diâmetro do círculo da base do cilindro e tendo a altura do cilindro constante). A idéia desse trabalho teve origem ao assistirmos uma palestra ministrada pelo professor Ms. Miguel Antônio de Camargo, na época professor efetivo do IME (Instituto de Matemática e Estatística) da UFG-GO (Universidade Federal de Goiás). Sobre um artigo escrito (não publicado) relacionado a este tema, em parceria com o professor Dr. João Carlos da Rocha Medrado, também professor efetivo do curso de Matemática da UFG-GO, o título da palestra era: “A Geometria do Posto de Combustíveis” (Camargo, 2009), logo ao assistir essa palestra interessamos pelo tema e observamos que daria pra fazer uma correlação com uma aplicação no ensino médio. Em conversa com meu orientador decidimos fazer um trabalho a partir desse tema inicialmente discutido pelos professores supracitados. O trabalho será dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, apresentaremos algumas partes históricas da geometria euclidiana, tendo como objetivo mostrar alguns dos principais nomes que tanto contribuíram para o desenvolvimento da geometria. Iremos mostrar que a geometria teve seu início, através de alguns pesquisadores, por volta de 2000 a. C. a 1600 a. C. pelos babilônios. Nesse período os babilônios faziam alguns cálculos de áreas, porém de maneira bem rudimentar. Segundo Eves (2011), foi apenas no século V a. C. que o matemático grego Euclides de Alexandria apresentou uma série de livros chamados “Os Elementos”, e nesses livros ele trouxe uma organização teórica da geometria onde a mesma vinha sendo orga-

nizada com postulados e teoremas. É em homenagem a Euclides que hoje chamamos essa área do conhecimento de Geometria Euclidiana, porém temos vários outros matemáticos que tiveram grandes contribuições para o desenvolvimento da mesma, como Pitágoras de Samos e os pitagóricos, dentre vários outros. Falaremos também sobre Cavalieri, um matemático italiano que viveu no século XVII e dentre algumas contribuições para a matemática apresentou um rico trabalho intitulado como “Os Indivisíveis de Cavalieri” que trata sobre o cálculo de volumes de alguns sólidos geométricos. Ainda nessa primeira parte falaremos sobre o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral dando mais ênfase a alguns matemáticos, como Leibniz e Newton, e sobre uma disputa ou rivalidade existente entre os mesmos, inclusive segundo alguns autores havendo acusações de plágio do seu trabalho por parte de Newton. Falaremos também um pouco sobre a família Bernoulli e suas contribuições para o cálculo passando também pela história e trabalhos de Weierstrass e Riemann, tendo em vista que esse trabalho muito se embasara em cálculos de integrais, simples e múltiplas, onde a definição que nos serve como alicerce e que hoje chamamos de integrais de Riemann.

No segundo capítulo, traremos uma parte teórica que precisaremos para conseguir atingir o objetivo final do trabalho, que é a construção da régua medidora do tanque de combustível. Nesse tópico daremos prioridade a algumas definições da geometria euclidiana, tais como: os quatro postulados para calcular áreas de figuras planas e o cálculo de volume utilizando o Princípio de Cavalieri, também vamos definir e conceituar, sem muito formalismo, as integrais de Riemann, integrais duplas e integrais de linhas com o objetivo de aplicar no cálculo de áreas e volumes. Todos esses conceitos serão apresentados de forma breve sem se preocupar muito com a demonstração dos teoremas a cerca desses conteúdos. Finalizando, no terceiro capítulo vamos finalmente apresentar o formato e os cálculos necessários para a construção da régua medidora a ser construída para medir o nível de líquido existente em um tanque de formato cilíndrico e colocado de forma “deitado”. Aqui o objetivo é concluir que esse nível pode ser calculado a partir da função:

$$A(h) = \begin{cases} R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R}\right) + (h-R)\sqrt{R^2 - (R-h)^2}, & 0 \leq h \leq R \\ R^2 \left[\pi - \arcsen\left(\frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R}\right) \right] + (h-R)\sqrt{R^2 - (R-h)^2}, & R \leq h \leq 2R, \end{cases}$$

onde $A(h)$ é a área do círculo dado em função do raio R e da altura h , e o volume $V(h)$ é,

$$V(h) = cA(h), 0 \leq h \leq 2R,$$

sendo c o comprimento lateral do tanque e h a altura do tanque de combustível em formato cilíndrico.

E ainda nesse capítulo, apresentaremos uma última seção com o intuito de mostrar que os resultados apresentados nesse trabalho podem ser trabalhados também no ensino médio, através da utilização de geometria que é uma das partes mais importantes da matemática. Observamos também que a função apresentada como resultado final do trabalho é uma função trigonométrica, conteúdo trabalhado na segunda série do ensino médio, de acordo com os novos rumos dados pelo MEC através da BNCC. Esperamos assim que o presente trabalho seja de interesse de professores do ensino básico e que sirva como fonte de pesquisa e inspiração para aplicação da geometria no dia a dia das pessoas.

Capítulo 1

Breve relato histórico

Neste capítulo iremos elencar um pouco da história, tanto da Geometria quanto do Cálculo Diferencial e Integral, e a maioria dos relatos deste capítulo são baseadas em Eves (2011).

1.1 Geometria

Não se sabe ao certo a origem temporal da geometria, mas alguns autores afirmam que os babilônios do período 2000 a. C. a 1600 a. C. já eram familiarizados com as regras gerais do cálculo da área do retângulo, da área do triângulo retângulo assim como do triângulo isósceles, bem como de algumas outras operações com base em cálculos de áreas e também cálculos de alguns volumes. No entanto, esses cálculos eram feitos de forma apenas “mecânica”, ou seja, não havia até então uma preocupação formal com essas operações, apenas para suprir suas necessidades. Essa formalidade apareceu apenas por volta do século V a. C. com o matemático grego Euclides de Alexandria, apesar de alguns autores como Eves (2011) afirmarem que muito pouco se sabe sobre sua vida. Por exemplo, não se sabe onde e nem quando ele teria nascido, porém sabe-se o que ele produziu, e que foi professor da Escola de Matemática de Alexandria. Porém, seu principal legado para a matemática - de forma mais precisa, a gemoetria - foi o desenvolvimento de sua grande obra prima, Os Elementos,

... nenhum trabalho exceto a bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior pro pensamento científico. (Eves, 2011).

Nessa pequena citação da obra de Eves (2011), podemos ter a real importância de Euclides para o desenvolvimento e principalmente para a estruturação formal e científica da geometria como conhecemos nos dias atuais, disciplina essa, na visão do autor deste trabalho, é a mais bela dentre todas as maravilhas criadas pelo homem.

O cálculo de área de figuras planas, datada de antes do calendário cristão, porém como afirmam vários pesquisadores no início (em torno de seis a sete séculos antes de Cristo), a área de uma região plana era calculada somente com o intuito de calcular pequenos “pedaços” de terra. Na verdade, segundo Eves (2011), era usado para determinar uma porção de terra a ser cultivada por cada pessoa que tinha direito àquela terra no Egito antigo, assim como em outras regiões. Algo interessante apresentado no livro de Eves (2011) é: os pitagóricos tinham interesse pelos problemas de transformar área em figura retilínea noutra figura retilínea, e é sabido que a solução desses problemas está em um dos livros Os Elementos:

... a construção de um quadrado de área igual a de um polígono pode ser encontrada nas Proposições 14 do livro II dos Elementos de Euclides. (Eves, 2011).

Ainda em Eves (2011), podemos observar que o cálculo da área de figuras planas passou a se dar de forma teórica, apenas após a formalização da geometria por Euclides.

A ideia de volume nos remete a pensar no quanto de espaço um sólido geométrico qualquer ocupa em determinado ambiente. Nesse trabalho, daremos ênfase ao cálculo do volume de sólidos geométricos:

...O volume de um sólido é um número real positivo associado a ele tal que: 1) Sólidos congruentes têm volumes iguais; 2) Se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é soma dos volumes de S_1 com S_2 . (Dolce e Pompeo, 2005).

Segundo alguns autores que estudam a história da matemática, citam que alguns séculos a. C. já se sabia da teoria do cálculo de volumes dos sólidos geométricos (sólidos regulares, dentre outros). Mas foi no século XVII, que o conceito do cálculo de volumes foi definido da forma que conhecemos nos dias atuais; esses conceitos foram determinados por

um matemático italiano chamado Bonaventura Cavalieri. Cavalieri nasceu em Milão, na Itália, no ano de 1598, foi discípulo de Galileu, tendo estudado astronomia, trigonometria esférica e logaritmos. Também foi professor de matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano em que faleceu. Cavalieri deixou grandes contribuições para a matemática, a maior delas é o tratado “Geometria Indivisibilium”. Publicado em 1635, este trabalho consiste em apresentar seu método dos indivisíveis baseado em trabalhos de Demócrito (410 a. C.) e Arquimedes (287 - 212 a. C.), mas na verdade sua principal motivação se encontra nas tentativas de Kepler de calcular áreas e volumes. Esse método é conhecido por nós como “O método dos indivisíveis de Cavalieri”.

1.2 Cálculo Diferencial e Integral

Falar do Cálculo Diferencial e Integral não é uma tarefa simples por alguns motivos, tais como, sua complexidade, pela grande quantidade de assuntos que podem ser abordados por essa teoria dentre outros. Aqui, nesse momento, nos limitaremos apenas em ressaltar alguns dos principais nomes que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo dentro da matemática e alguns de seus principais feitos. Nesse sentido, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) e Isaac Newton (1643 - 1727) se destacam como dois dos principais nomes a serem aqui abordados. Ao falar a respeito desses dois grandes matemáticos, não podemos deixar de ressaltar uma disputa entre eles. Segundo Eves (2011), Leibniz foi o primeiro matemático a usar o \int um pouco mais alongado para notação de uma integral, símbolo utilizado até os dias atuais, dentre outras enormes contribuições para o cálculo, como a derivada n -ésima de uma função. Além de matemático, Leibniz se fez conhecido como um grande filósofo e metafísico de sua época. Vale sempre ressaltar que os trabalhos de Leibniz voltados ao Cálculo Diferencial e ao Cálculo Integral, foram desenvolvidos de forma paralela, porém de forma independente de Newton, que por sua vez não se faz menos importante para o desenvolvimento do Cálculo, deixando enormes contribuições em várias áreas do conhecimento:

...Não demorou para que Newton criasse sua própria matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial... (Eves, 2011).

Como podemos ver, Newton é considerado, ao lado de Leibniz e de maneira independente, o criador do Cálculo Diferencial e Integral, mas devemos sempre ressaltar outros grandes matemáticos que através dos anos deixaram enormes contribuições para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, como por exemplo a família Bernoulli, L'Hôpital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

Segundo Eves (2011), as principais contribuições dentro da matemática no século XVIII foram feitas por membros da família Bernoulli e ainda podemos afirmar que tudo começou no final do século XVII com os dois irmãos Jacob Bernoulli (1654 - 1705) e Johan Bernoulli (1667 - 1748). Jacob foi professor na Universidade da Basileia e Johan lecionou na Universidade de Groningen. Após a morte do irmão, transferiu-se para a Universidade da Basileia. Os dois tiveram grandes contribuições como a Distribuição de Bernoulli, o Teorema de Bernoulli, os Números de Bernoulli, os Polinômios de Bernoulli dentre outros, tendo também trabalhos voltados para outras áreas como a Teoria dos Números, Equações Diferenciais e Cálculo de Probabilidades por exemplo. Além dos dois irmãos, ainda aparecem nomes como Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782), Johan II (1710-1790). Fora os nomes aqui citados, ainda podemos encontrar vários outros nomes da família Bernoulli com alguma contribuição para o avanço do Cálculo Diferencial e Integral, bem como o avanço da matemática de modo geral.

O matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, nascido em Ostenfeldeem 1815, tem sua história dentro do campo da matemática como um caso curioso, pois ele somente iniciou seus estudos aos quarenta anos de idade, quando entrou para a Universidade de Berlim como instrutor. Apenas oito anos depois foi elevado ao posto de professor titular dedicando-se de maneira integral ao estudo de matemática avançada. No início, Weierstrass escreveu alguns artigos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas. Alguns autores dizem que sua principal contribuição para o Cálculo é o Teorema dos Extremos ou simplesmente Teorema de Weierstrass. O também alemão George Friedrich Bernhard Riemann, nascido em uma aldeia de Hanover em 1826, era filho de um pastor luterano, teve sua formação na Universidade de Berlim e posteriormente na de Gottingen, onde obteve seu título de doutorado com uma brilhante tese em teoria das funções complexas, expondo as equações diferenciais de Cauchy-Riemann (vale aqui ressaltar que apesar de levar seu nome, essas equações já eram conhecidas antes da publicação em sua tese). Essas equações garantem a analiticidade de uma

função de uma variável complexa, bem como o conceito de “superfície de Riemann”, que introduziram considerações topológicas na análise. Riemann teve importante influência para a teorização do Cálculo Integral, que chamamos de Integral de Riemann, conceito que utilizaremos na parte teórica do nosso trabalho. Cálculo Integral torna Riemann um dos matemáticos com maior importância no campo do Cálculo Diferencial e Integral.

Vale muito a pena ressaltar que os matemáticos citados, nesta seção, foram de suma importância para o desenvolvimento do Cálculo, e que aqui não aprofundaremos sobre suas obras por não ser o principal intuito do nosso trabalho, já que para falar o que cada um desses gênios fizeram no decorrer de suas vidas, demandaria no mínimo um livro, por tão grande (em extensão e importância) que são suas obras.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Geometria

2.1.1 Identidades trigonométricas

Nesta seção, faremos um breve estudo de trigonometria que será de utilizado em parte de nosso trabalho. A maioria do resultados desta seção podem ser encontrados, por exemplo, em Carmo et al. (1992).

Primeiramente, faremos uma motivação para tal conteúdo. Conforme ilustra a Figura (2.1), denotaremos por θ a medida do ângulo $A\hat{O}B$, com $0^\circ < \theta < 90^\circ$, e tracemos pontos A_1, A_2, A_3, \dots na semirreta OA , e pontos B_1, B_2, B_3, \dots na semirreta OB , de modo que os segmentos $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ sejam perpendiculares à semirreta OB . Então, pelo Teorema de Tales, observemos que os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, \dots$ são semelhantes, destas informações temos o seguinte:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \dots$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \dots\dots$$

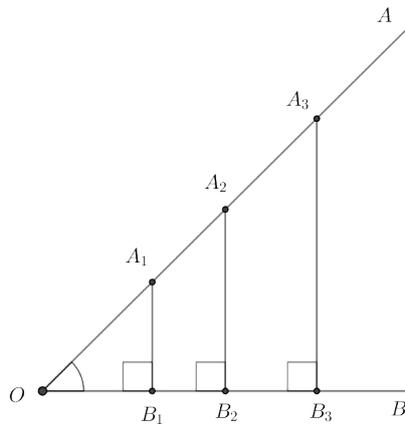


Figura 2.1: Triângulos que motivam trigonometria

Usando a motivação acima, definimos o seguinte:

Definição 2.1. *Seja AOB um triângulo retângulo em B , e denotaremos por θ a medida do ângulo $A\hat{O}B$, com $0^\circ < \theta < 90^\circ$, então definimos, respectivamente, o seno, cosseno e a tangente do ângulo θ por*

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}, \quad \text{cos } \theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}, \quad \text{tg } \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}.$$

Se usarmos as notações da Definição (2.1), o lado AB do triângulo retângulo ABO que é oposto ao ângulo θ é chamado de cateto oposto, já outro cateto do triângulo retângulo ABO , sendo o lado OB , é chamado de cateto adjacente.

Como consequência da Definição (2.1), segue os seguintes resultados, que também podem ser verificados para ângulos θ diferentes dos citados na Proposição (2.1), veja por exemplo em Carmo et al. (1992) ou Muniz Neto (2013).

Proposição 2.1. *Seja ABC um triângulo retângulo em A e denotaremos por θ a medida do ângulo $A\hat{B}C$, com $0^\circ < \theta < 90^\circ$, então*

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \tag{2.1}$$

e

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}. \tag{2.2}$$

A demonstração de tal resultado é uma aplicação direta da Definição (2.1), e para

maiores detalhes, veja por exemplo Carmo et al. (1992). A Equação (2.1) é conhecida na literatura, como sendo, relação fundamental da trigonometria.

Iremos agora fazer uma simples ilustração da Definição (2.1).

Exemplo 2.1. Vamos verificar que

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para tal fato, seja ABC um triângulo equilátero cuja a medida do lado é 1. Considere AD a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ (conforme a Figura 2.2). Pelo fato do triângulo ser equilátero, AD também é mediana e altura relativa ao lado BC ¹, então $\overline{AD} = 1/2$ e $A\hat{D}C = 30^\circ$, conforme ilustra a Figura (2.2).

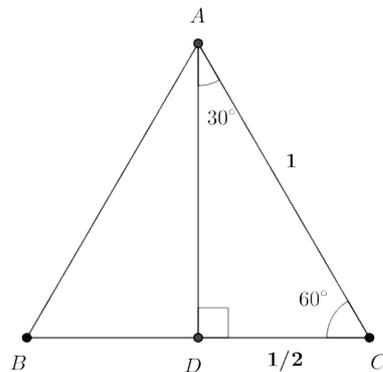


Figura 2.2: Triângulo equilátero de lado 1

Pela Definição (2.1), temos que:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}.$$

Agora, pela relação fundamental da trigonometria (Equação (2.1)), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}^2 30^\circ &= 1 - \operatorname{sen}^2 30^\circ \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

¹O resultado citado pode ser encontrado em Muniz Neto (2013)

Lembremos que, como seno, cosseno e tangente de ângulos em triângulos retângulos são dados pelas medidas de seus lados segue, que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, pela Equação (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

2.1.2 Áreas de figuras planas

Nesta seção, daremos foco para áreas de algumas figuras planas que nos auxiliarão em alguns resultados futuros. Apresentaremos aqui apenas o necessário para nosso objetivo, mas o leitor que tenha maior interesse no assunto veja, por exemplo, Muniz Neto (2013) ou Dolce e Pompeo (2013).

...a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado ... (Muniz Neto, 2013).

Para começar, iremos enunciar os quatro postulados que ajudarão a estabelecer as expressões para o cálculo de áreas de figuras planas, e neste caso, nos baseamos em Muniz Neto (2013).

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais, em símbolos, denotando A e B tais polígonos, então

$$A \equiv B \text{ se, e somente se, } \text{área de } A = \text{área de } B.$$

2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (i. e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores, ou seja,

se existem n polígonos convexos A_1, A_2, \dots, A_n , cuja a interseção entre eles é um vértice ou uma arestas, e a união é um polígono A , então

$$\text{área de } A = \text{área de } A_1 + \text{área de } A_2 + \dots + \text{área de } A_n;$$

3. Se um polígono contém outro em seu interior denotados, respectivamente, por A e B ($B \subset A$) então a área do polígono B é menor que a área do polígono A . Em símbolos:

$$B \subset A \text{ se, e somente se, } \text{área de } B \leq \text{área de } A;$$

4. A área de um quadrado de lado 1 cm é 1 cm^2 .

Os próximos resultados são tradicionais da geometria euclidiana plana, e iremos enunciar sem prova. Para maiores detalhes ver Muniz Neto (2013) ou Dolce e Pompeo (2013).

Proposição 2.2. *Como consequência dos postulados acima, temos*

- (a) *Um quadrado de lado cuja medida seja l , tem área l^2 .*
- (b) *Um retângulo de lados cujas medidas sejam a e b tem área ab .*
- (c) *A área de um paralelogramo cujas medidas da base e da altura são, respectivamente, a e h , é ah .*
- (d) *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, tendo alturas h_a , h_b e h_c , respectivamente relativas ao lados a, b e c . Então*

$$\text{área de } ABC = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

É comum usar, na linguagem popular, as seguintes nomenclaturas: área do quadrado é lado ao quadrado, área do retângulo e do paralelogramo é base vezes altura, e área do triângulo é base vezes altura sobre dois.

A maiorias do livros didáticos dão uma demonstração um pouco avançada para o cálculo da área de um círculo, usando a idéia de aproximações das áreas dos polígonos inscritos ao círculo, e como nos demais casos iremos apenas ilustrar este resultado e também a área do setor circular.

Proposição 2.3. *A área de uma círculo de raio R é*

$$\pi R^2.$$

Agora para setor circular, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Dado um setor circular temos que:*

(i) *Se o setor circular for de raio R e ângulo α radianos, então*

$$\text{área do setor circular} = \frac{\alpha R^2}{2};$$

(ii) *Se o setor circular for de raio R e ângulo α graus, então*

$$\text{área do setor circular} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360};$$

(iii) *Se o setor circular for em função do raio R e do comprimento l do arco, então*

$$\text{área do setor circular} = \frac{lR}{2}.$$

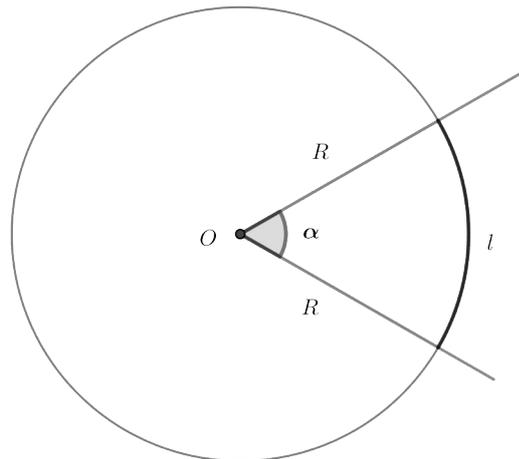


Figura 2.3: Área do setor circular de raio R

Daremos agora, um simples exemplo que envolve conceitos de área de uma figura plana.

Exemplo 2.2. Vamos calcular a área sombreada dada na Figura (2.4), sabendo que o quadrado dado tem 8 m de lado e que o círculo está inscrito no quadrado.

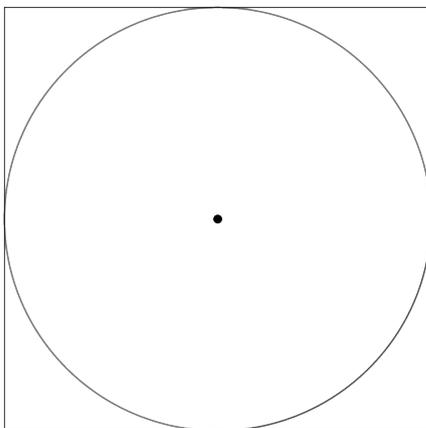


Figura 2.4: Círculo inscrito no quadrado de lado 8 m

Primeiramente, observemos que o raio do círculo é a metade do lado do quadrado, pois, o quadrado tangência o círculo. Então se tomarmos o quadrado de lado 4 m , conforme a Figura (2.5), e representarmos por A_Q a área do quadrado $OABC$, A_s área do setor circular $A\widehat{O}C$ e A a área procurada, vemos que

$$A = A_Q - A_s.$$

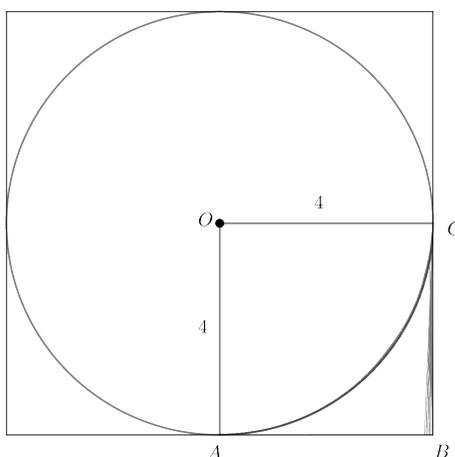


Figura 2.5: Área da figura procurada

Observemos então, que como o setor circular é formado por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$

radianos, da Proposição (2.4), temos que

$$A = 4^2 - \frac{\pi/2 \cdot 4^2}{2} = 4(4 - \pi) \text{ m}^2.$$

2.1.3 Princípio de Cavalieri

Nos dias de hoje o Princípio de Cavalieri é conhecido como um postulado, que é usado para calcular volume de sólidos geométricos, mais especificamente usado para calcular volume de prismas, pois, por meios dele podemos determinar o volume de qualquer prisma utilizando o volume de um prisma já conhecido, desde que o segundo prisma tenha a mesma altura e que suas áreas da base sejam congruentes. Uma das principais ideias que Cavalieri teve é a seguinte: alterando o formato de um sólido geométrico sem modificar sua massa, seu volume permanecerá inalterado. Veremos a seguir o que acontece com dois prismas de mesmo volume, quando são deformados. Primeiramente vamos considerar dois prismas de mesmo volume.

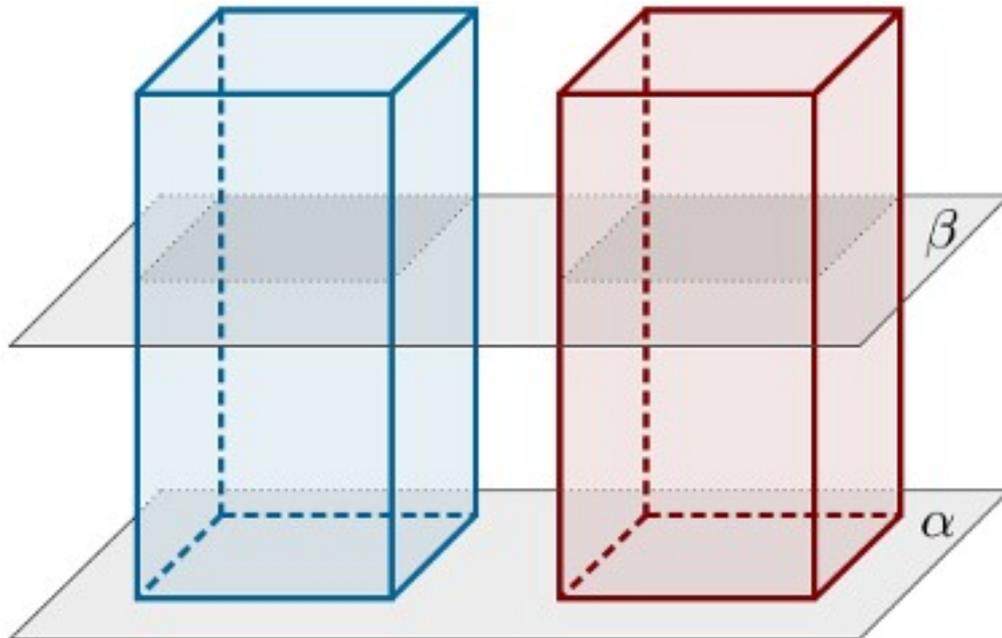


Figura 2.6: Prismas de mesmo volume
Fonte: Silva (2022)

Note que os dois prismas na Figura (2.6) têm suas bases pertencentes ao mesmo plano α e que ainda eles possuem suas bases congruentes, ou seja, a base de ambos os prismas têm a mesma área, ou que suas áreas de suas bases são equivalentes. Note, também, que construímos um plano β interceptando os dois prismas e que a figura formada

pela intersecção deste plano com os prisma são semelhantes às figuras das bases desses prismas. O Princípio de Cavalieri consiste em observar que se deformarmos um desses prismas sem alterar sua base e sua altura o seu volume será o mesmo.

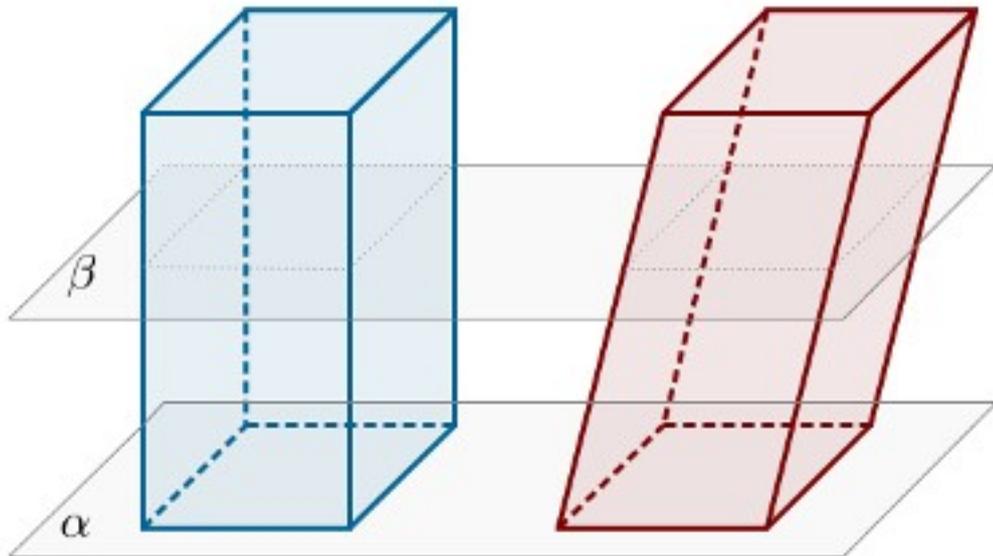


Figura 2.7: Deformação de um prisma a outro
Fonte: Silva (2022)

Note que, como citado acima, o prisma da esquerda foi “empurrado para a direita de forma que a altura fique intacta”, conforme ilustra a Figura (2.7). Note que o sólido sofreu uma deformação mas que não houve alterações em sua base nem alterou sua altura. A base do prisma da direita continua congruente à base do prisma da esquerda e podemos observar ainda que a figura determinada pela intersecção do plano β com o prisma da direita continua semelhante a figura do prisma da esquerda. Dessa forma, Cavalieri propôs que independente da altura desse corte (plano β), não alterando a altura do prisma da direita (oblíquo) o volume dos dois prismas continua igual. Daí podemos concluir que o volume de um prisma reto ou oblíquo é:

$$V = A_b \cdot h,$$

onde denotamos V, A_b, h , respectivamente, por volume, área da base e altura.

Formalização: Dados dois sólidos geométricos A e B de mesma altura e áreas das bases, que, por sua vez, estão contidas no mesmo plano α . Os sólidos A e B têm o mesmo volume se qualquer plano β , paralelo a α , determinar duas secções transversais com áreas iguais. Dessa maneira, o Princípio de Cavalieri pode ser usado também para

sólidos completamente diferentes, mas que possuem mesma altura, bases com áreas iguais e que qualquer corte realizado nos dois por um mesmo plano resulte em figuras com áreas iguais. Observe a Figura (2.8) abaixo:

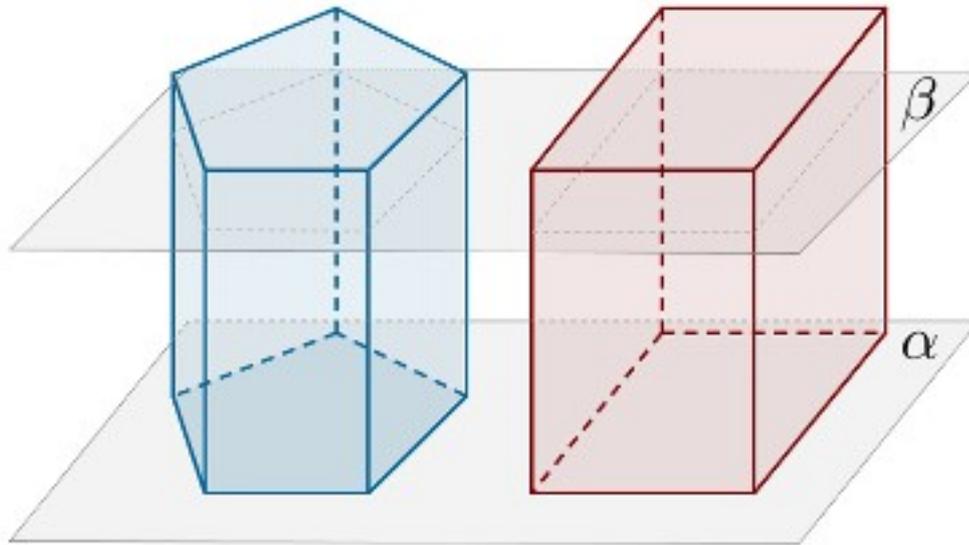


Figura 2.8: Figuras distintas com mesmo volume
Fonte: Silva (2022)

Notemos que, na Figura (2.8), os prismas possuem bases como sendo figuras diferentes, mas se a área de qualquer seção transversal feita no primeiro for igual à sua respectiva seção no segundo e, além disso, suas alturas forem iguais, então os seus volumes também serão. Esses sólidos não precisam ser prismas. Pode ser qualquer sólido geométrico com faces retas ou circulares.

Os próximos resultados são tradicionalmente conhecidos da geometria euclidiana espacial, e iremos enunciar sem prova, e admitindo que já conhecemos o volume de um prisma de base qualquer. Para maiores detalhes ver Muniz Neto (2013) ou Dolce e Pompeo (2005).

Proposição 2.5. *Usando os dados expostos acima, temos os seguintes resultados.*

(a) *O volume de um cilindro sólido C de raio da base medindo R e altura medindo h , é*

$$V_C = \pi R^2 h;$$

(b) O volume de um cone sólido de raio da base medindo R e a altura medindo h , é

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Agora iremos apresentar uma demonstração do volume da esfera, usando o Princípio de Cavalieri.

Proposição 2.6. O volume de uma esfera de raio R é

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Demonstração. Seja C um cilindro sólido de altura $2R$ e com os dois raios das bases medindo R . Considere dois cone sólidos inscritos no cilindro C , ambos com altura R e suas bases sendo as bases do cilindro (conforme a Figura (2.9)), neste caso, o vértice dos cones coincide com o centro do quadrado, formado pela interseção de um plano β com o cilindro passando pelo centro da base do cilindro. Denotemos por S o sólido formado pela parte do cilindro, exterior à união dos cones².

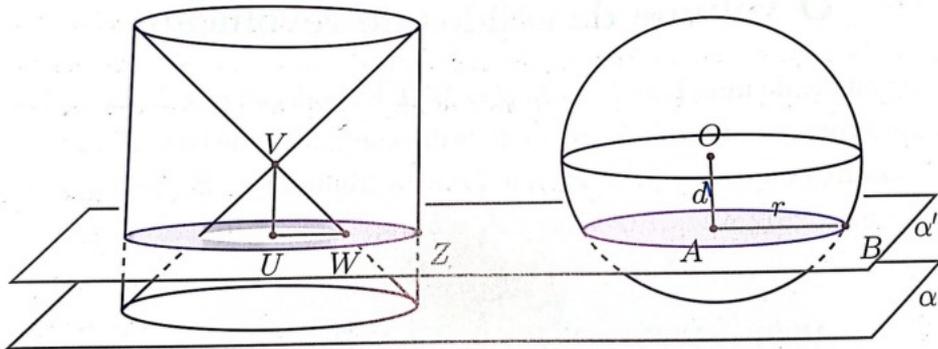


Figura 2.9: Volume da esfera
Fonte: Muniz Neto (2013)

Denotemos por α o plano tangente à esfera B de centro O e raio R , contendo uma das bases do cilindro C , onde B e C estão situados no mesmo semiespaço em relação à α . Seja α' um plano paralelo à α , situado no mesmo semiespaço onde se encontram B e C . Denotemos por d a distância entre O e α' (conforme a Figura (2.9)), com $d < R$. Temos

²Tal região é conhecida na literatura como uma anticlipsisidra.

também que, α' intersecta B se , e somente se, α' intersecta S . Sendo assim, α' secciona S segundo uma coroa circular³ de raios d e R , enquanto secciona B disco de centro A e raio $\overline{AB} = \sqrt{R^2 - d^2}$ (conforme a Figura (2.9)). Temos então, que a área do círculo de raio d é πd^2 e a área da coroa circular é

$$\pi R^2 - \pi(\sqrt{R^2 - d^2})^2 = \pi d^2,$$

ou seja, as duas áreas coincidem. Logo, a área de tais seções são sempre iguais, e pelo princípio de Cavalieri S e B possuem o mesmo volume. Como foi definido acima, o volume S é a diferença entre os volumes do cilindro C e os dois cones, e lembrando que o cilindro possui altura $2R$ e raio da base R e cada cone tem altura R e raio R , obtemos:

$$\begin{aligned} V &= V_c - 2V_{\text{cone}} \\ &= \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \frac{\pi R^2 \cdot R}{3} \\ &= \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

□

2.2 Cálculo Integral de uma variável

Neste tópico, falaremos sobre algumas definições e teoremas do cálculo diferencial, não enfatizando aqui sobre os demais assuntos do cálculo, tais como, o estudo das derivadas por exemplo, logo partiremos do princípio que o leitor já tenha conhecimento sobre conteúdos como limites, continuidade e derivações. A maioria dos resultados desta seção, são baseados em Ávila (2011) e Guidorizzi (2008).

É comum na maioria dos livros de introdução ao cálculo os autores iniciarem o estudo de integral como sendo a primitiva de uma outra função, por exemplo, segundo Ávila (2011), temos o seguinte:

Definição 2.2 (Primitiva). *Dizemos que uma função F é primitiva de uma outra função*

³Coroa circular é a região compreendida entre dois círculos concêntricos.

f se, f for a derivada de F , ou seja:

$$F'(x) = f(x),$$

onde denotamos F' sendo a derivada de F .

Destaquemos, agora, um exemplo da Definição (2.2).

Exemplo 2.3. Segue da Definição (2.2) que:

- (i) Se $f(x) = 3x^2$, então uma primitiva para esta função será a função $F(x) = x^3$;
- (ii) Se $f(x) = \cos x$, então uma primitiva para esta função será a função $F(x) = \sin x$;
- (iii) Se $f(x) = e^x$, então uma primitiva para esta função será a função $F(x) = e^x$.

Em seguida, temos como objetivo fazer a relação entre área de figura e integral de Riemann. Para isto, começaremos com a definição, cujo o enunciado é baseada em Guidorizzi (2008):

Definição 2.3 (Partição). *Uma partição P de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ onde } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

A amplitude do intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$ será indicada por

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vale ressaltar que na Definição (2.3), os números $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ não são necessariamente iguais, neste caso, o maior deles denomina-se amplitude da partição P e indiquemos por $\max \Delta x_i$. Iremos denotar uma partição P de um intervalo $[a, b]$ por

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$



Figura 2.10: Partição do intervalo $[a, b]$

Definição 2.4 (Soma de Riemann). *Sejam f uma função definida num intervalo $[a, b]$, e $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, uma partição de $[a, b]$. Para cada índice i ($i = 1, 2, \dots, n$), seja $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente. O número*

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$$

denomina-se soma de Riemann de f relativa a partição P e aos números c_i .

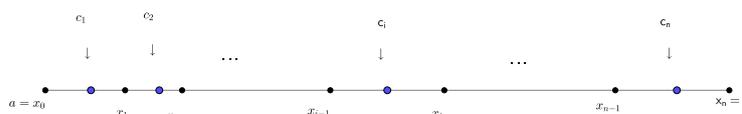
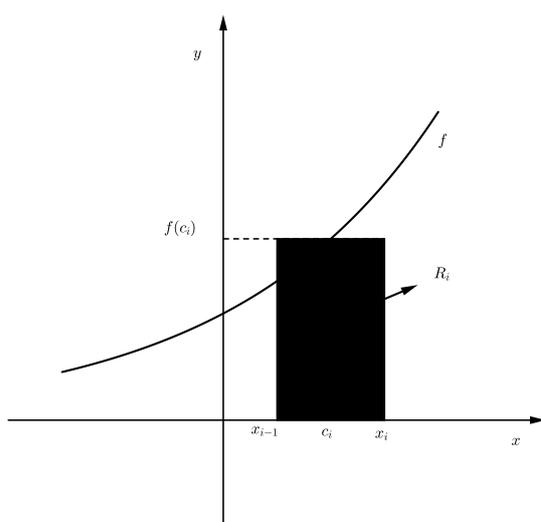


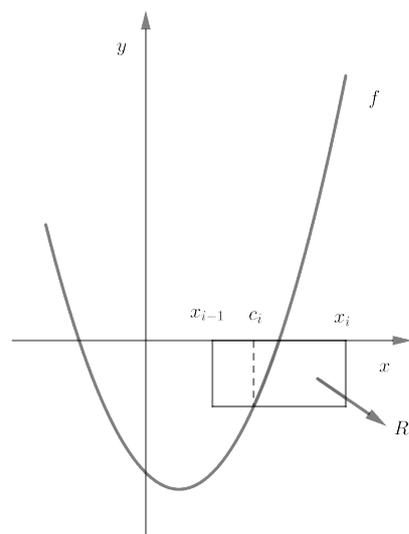
Figura 2.11: Escolha dos c_i s na partição

Observação 1. Temos a seguinte interpretação da Definição (2.4):

- (i) Se $f(c_i) > 0$, temos então que o número $f(c_i)\Delta x_i$ representa a área do retângulo R_i delimitado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$;
- (ii) Se $f(c_i) < 0$, a área do retângulo R_i , citado acima, será $-f(c_i)\Delta x_i$.



(a) $f(c_i)\Delta x_i = \text{área de } R_i$



(b) área de $R_i = -f(c_i)\Delta x_i$

Figura 2.12: Interpretação geométrica de $f(c_i)\Delta x_i$

(iii) Das duas observações anteriores, podemos então interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

como a diferença entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x .

Em seguida, usaremos a Definição (2.4) como ferramenta para definir integral de Riemann.

Definição 2.5 (Integral de Riemann). *Sejam f uma função definida em um intervalo $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ tende a L , quando $\max \Delta x_i$ tende a 0, e escrevemos*

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L,$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só depende de ϵ , mas não da escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$. Tal número “ L ” quando existe é único, e denominamos integral (segundo Riemann) de f em $[a, b]$ e usamos a seguinte notação:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Observação 2. Em relação à Definição (2.5), temos o seguinte;

- (i) Quando $\int_a^b f(x)dx$ existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ e também nos referimos a tal valor como integral definida de f em $[a, b]$.
- (ii) Como consequência da Definição (2.5), temos que

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \quad (a < b).$$

Em seguida, colocaremos algumas propriedades de integral definida sem fazermos demonstrações, e caso leitor tenha interesse veja por exemplo Muniz Neto (2015).

Proposição 2.7 (Propriedades da Integral). *Sejam f e g integráveis num intervalo $[a, b]$, e k uma constante. Então:*

(A) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

(B) kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx;$$

(C) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0;$$

(D) Se $c \in (a, b)$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Na literatura, muitas vezes o Teorema Fundamental do Cálculo é encontrado em duas versões, para nosso objetivo iremos enunciar aqui o chamado

Teorema 2.1 (1º Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.3)$$

O Teorema (2.1) diz que se uma função f for integrável em $[a, b]$, então para encontrar o resultado, basta aplicar uma primitiva no ponto final menos a mesma primitiva no ponto inicial.

Exemplo 2.4. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, resolveremos a integral dada por,

$$\int_1^2 x^2 dx.$$

Lembremos do cálculo (ver por exemplo Ávila (2011)), que uma primitiva para a função $f(x) = x^2$ é a função $F(x) = \frac{x^3}{3}$, temos também que f é contínua em $[1, 2]$, então

f é integrável⁴ em $[1, 2]$, e da Equação (2.3) temos que:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

ou seja,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Dando sequência, consideremos f uma função contínua em $[a, b]$, com $f \geq 0$ em $[a, b]$. Estamos interessados, agora, em definir a área da região delimitada pelas retas $x = a, x = b, y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$, conforme ilustra a Figura (2.13).

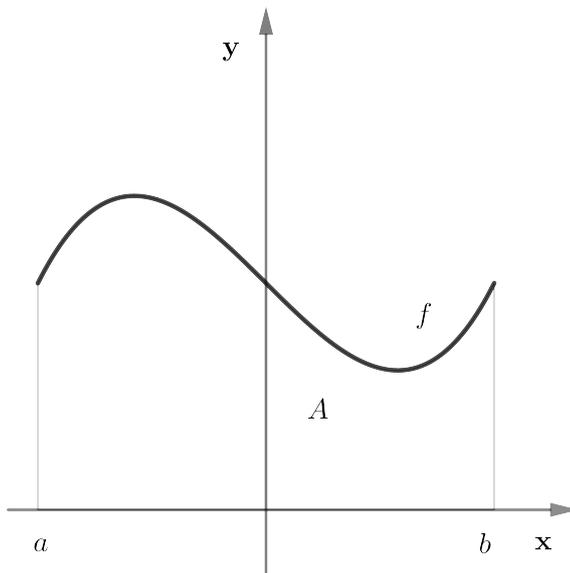


Figura 2.13: Área do conjunto A

Consideremos, então, $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$, e sejam $c_i, d_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tais que $f(c_i), f(d_i)$ sejam, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$. Observe que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ é uma aproximação por falta da área A , conforme a Figura (2.14), e a soma

⁴Veja por exemplo Muniz Neto (2015).

de Riemann $\sum_{i=1}^n f(d_i)\Delta x_i$ é uma aproximação da mesma área, isto é

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^n f(d_i)\Delta x_i. \quad (2.4)$$

Pelo fato de f ser contínua em $[a, b]$ temos que f é integrável, neste caso, as somas de Riemann acima tendem para $\int_a^b f(x)dx$, quando $\max \Delta x_i$ tende a zero, então é natural definirmos o seguinte:

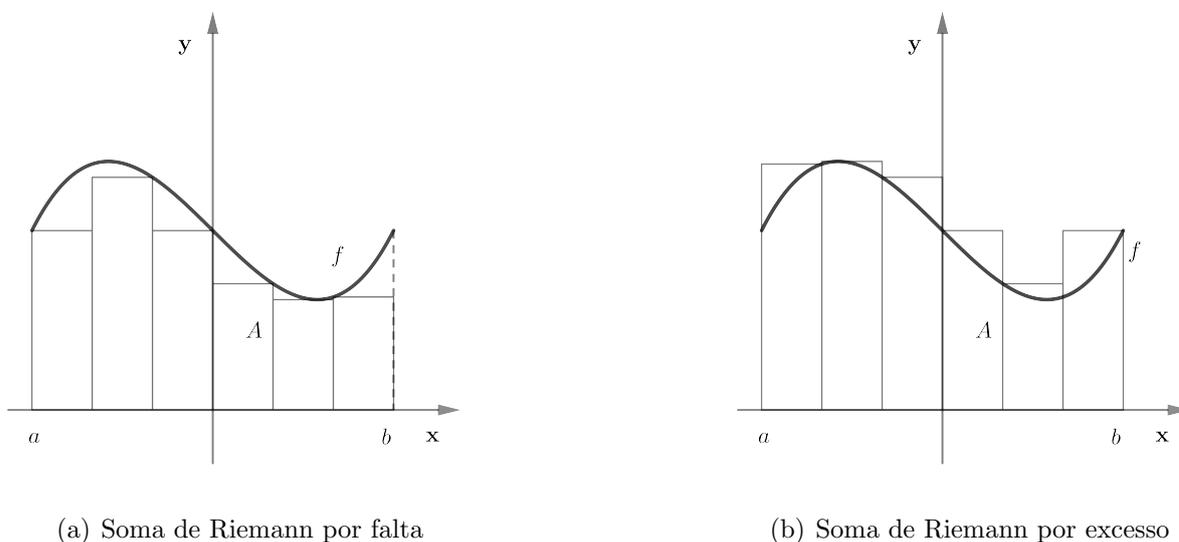


Figura 2.14: Interpretação geométrica de somas inferior e superior

Definição 2.6. *Seja f uma função contínua e positiva num intervalo $[a, b]$, então definimos a área de A por*

$$\text{área } A = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.5)$$

Ilustremos mais uma interpretação geométrica na Figura (2.15).

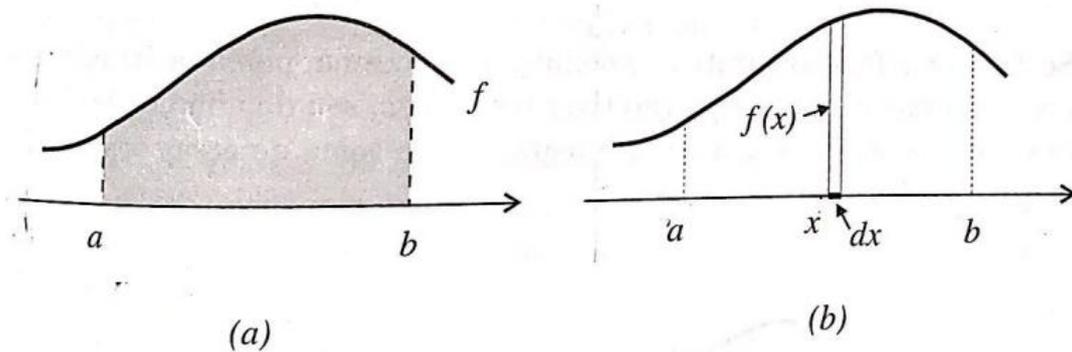


Figura 2.15: Integral definida

Na literatura, conta-se, que o símbolo “ \int ” é uma letra *s* alongada e as letras *a* e *b*, colocadas nas extremidades da letra *s*, são os limites inferior e superior da integral. Essa interpretação como soma de uma infinidade de pequenas áreas pode ser formalizada dividindo o intervalo $[a, b]$ em um certo número n de subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Observação 3. Como consequência da Definição (2.6), temos que das propriedades de integral, temos

- (i) Seja f é uma função integrável em um intervalo $[a, b]$, com $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Considere A o subconjunto de \mathbb{R}^2 dado por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}, \quad (2.6)$$

então,

$$\text{área de } A = - \int_a^b f(x) dx;$$

- (ii) Se f e g são funções integráveis em um intervalo $[a, b]$, com $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Considere A o subconjunto de \mathbb{R}^2 dado por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

então,

$$\text{área de } A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (2.7)$$

2.3 Integral de linha

2.3.1 Curvas parametrizadas

Neste subseção, iremos definir alguns conceitos básicos de curvas, na forma paramétrica, somente em \mathbb{R}^2 , de modo que supra nossos objetivos. Tais resultados são baseados em Guidorizzi (2001) e Alencar e Santos (2002).

Definição 2.7. *Uma função vetorial ou curva parametrizada no plano, é uma função γ de um intervalo não degenerado I contido em \mathbb{R} cuja imagem encontra-se em \mathbb{R}^2 , denotada por*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Mais ainda,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in I.$$

Tal função é uma correspondência que, para cada $t \in I$, associa o vetor $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$.

Iremos, em seguida ilustrar exemplos que serão utilizados em alguns resultados futuros.

Exemplo 2.5 (Segmento de Reta). *Sejam $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, então uma parametrização do segmento AB orientado de A para B , isto é, inicia em A e termina em B é*

$$\gamma(t) = (1 - t)A + tB = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.8)$$

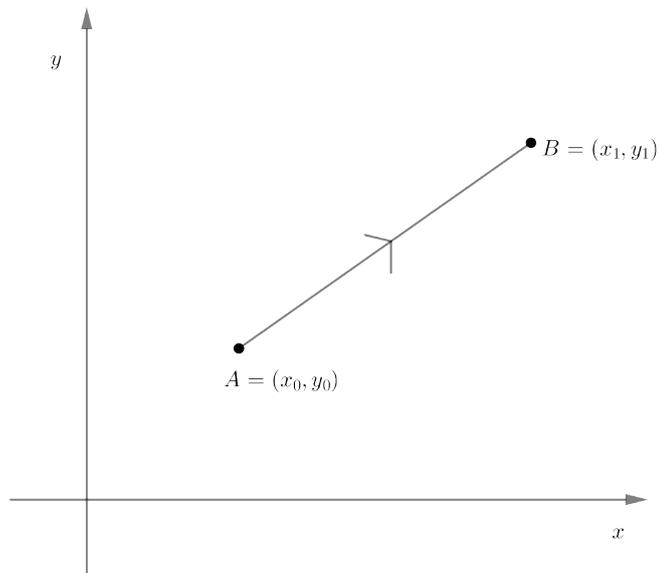


Figura 2.16: Segmento AB

O próximo exemplo será ilustrado apenas como motivação ao exemplo que virá em seguida.

Exemplo 2.6 (Círculo). Iremos escrever a equação paramétrica de um círculo qualquer:

- (a) O círculo de centro na origem de um sistema de coordenadas $O = (0, 0)$ e raio R , satisfaz a seguinte equação⁵

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

e uma equação paramétrica para este círculo é

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.9)$$

⁵Para ver mais bem detalhado a equação de círculo, consulte por exemplo Reis e Silva (1997) ou Delgado et al. (2013).

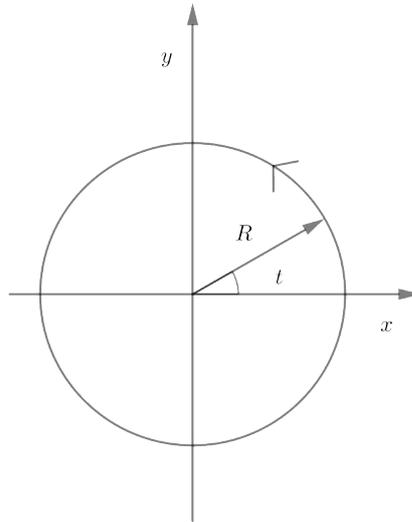


Figura 2.17: Círculo de centro na origem e raio R .

(b) O círculo de centro num ponto $A = (x_0, y_0)$ e raio R , satisfaz a seguinte equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

e uma equação paramétrica para este círculo é

$$\gamma(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.10)$$

No Exemplo (2.6), a parametrização (2.9), é uma parametrização que está orientada no sentido anti-horário, iniciando no ponto $(R, 0)$, e a parametrização (2.10) também está orientada no sentido anti-horário, mas iniciando no ponto $(x_0 + R, y_0)$.

Exemplo 2.7 (Elipse). Iremos descrever a equação paramétrica de uma elipse de centro na origem e os focos sobre os eixos de coordenadas: A elipse de centro na origem de um sistema de coordenadas $O = (0, 0)$ e focos sobre os eixos de coordenadas, isto é, a elipse que intersecta os eixos coordenados nos pontos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$, $B' = (0, -b)$, satisfaz a seguinte equação⁶

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

⁶Para ver mais bem detalhado a equação de elipse, consulte por exemplo Reis e Silva (1997) ou Delgado et al. (2013).

e uma equação paramétrica para esta elipse é

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad -\pi \leq t \leq \pi. \quad (2.11)$$

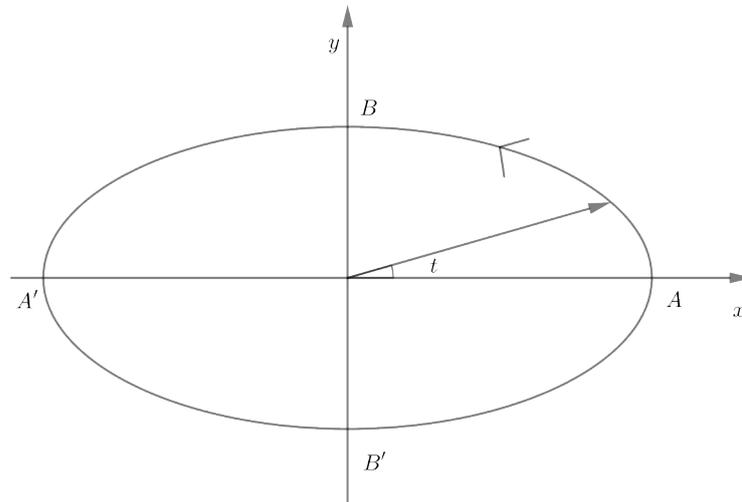


Figura 2.18: Elipse de centro na origem e os focos sobre os eixos de coordenadas

Em seguida iremos destacar algumas propriedades de curvas parametrizadas.

Definição 2.8. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, duas curvas parametrizadas no plano e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, definimos*

(a) *A função $\gamma_1 + \gamma_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t),$$

denominada função soma de γ_1 e γ_2 .

(b) *A função $f \cdot \gamma_1 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$(f \cdot \gamma_1)(t) = f(t)\gamma_1(t),$$

denominada função produto de γ_1 pela função escalar f .

(c) *A função $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t),$$

denominada função escalar (ou produto interno) de γ_1 e γ_2 .

Lembremos em particular que: se

$$\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t)),$$

então

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t).$$

Nos próximos resultados também colocaremos apenas para ilustração, mas caso o leitor tenha interesse, consulte por exemplo Guidorizzi (2001).

Definição 2.9. *Sejam $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva parametrizada no plano e $t_0 \in I$, dizemos que γ é contínua em t_0 se*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0).$$

Dando sequência, temos a seguinte:

Definição 2.10. *Sejam $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva parametrizada no plano e $t_0 \in I$, dizemos que γ é derivável em t_0 se o limite*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0},$$

existir, e neste caso denotaremos por

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) \quad \text{ou} \quad \gamma'(t_0).$$

Observação 4. Colocaremos aqui algumas observações que podem ser usados no contexto:

- (i) Se γ for derivável em t_0 também podemos dizer que γ é diferenciável em t_0 .
- (ii) Se γ for derivável em todos os pontos do domínio, dizemos apenas que γ é diferenciável.
- (iii) Se γ admitir derivada contínua em um ponto t_0 de seu domínio, dizemos que γ é de classe C^1 em t_0 , caso a mesma admitir derivada contínua em subconjunto B de seu

domínio, dizemos que γ é de classe C^1 em B , e admitir derivada contínua em seu domínio, dizemos apenas que γ é de classe C^1 ;

- (iv) Para calcular a derivada da curva γ , também conhecida como vetor tangente, basta olharmos para as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ como funções reais de uma variável real e utilizar o cálculo diferencial de uma variável, ou seja, γ é diferenciável se, e somente se, a funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis.

Exemplo 2.8. Calcularemos o vetor tangente (caso exista), das curvas definidas nos Exemplos (2.5), (2.6) e (2.7). Primeiramente observemos que em todos os casos, as funções coordenadas são diferenciáveis. Além disso, para o Exemplo (2.5) temos,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = x_1 - x_0 \\ y'(t) = y_1 - y_0. \end{cases}$$

Neste caso, o vetor tangente será

$$\gamma'(t) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Para o Exemplo (2.6), iremos fazer apenas o item (a), pois, o item (b) segue de modo análogo. Temos

$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -R \sin t \\ y'(t) = R \cos t. \end{cases}$$

Neste caso, o vetor tangente será

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Finalizando, para o exemplo (2.7), temos

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = b \cos t. \end{cases}$$

Neste caso, o vetor tangente será

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t) \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

2.3.2 Integrais duplas

Agora, falaremos um pouco de integrais duplas com o objetivo maior de conceituar áreas para usarmos no Teorema de Green⁷. Tais resultados citados nesta seção Guidorizzi (2002).

Definição 2.11. *Considere o retângulo*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

onde $a < b$ e $c < d$ são números reais. Sejam

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad e \quad P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

partições de $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente. O conjunto

$$P = \{(x_i, y_j) / i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$$

denomina-se *partição do retângulo R* . Observe que uma partição P de R determina mn retângulos

$$R_{ij} = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}.$$

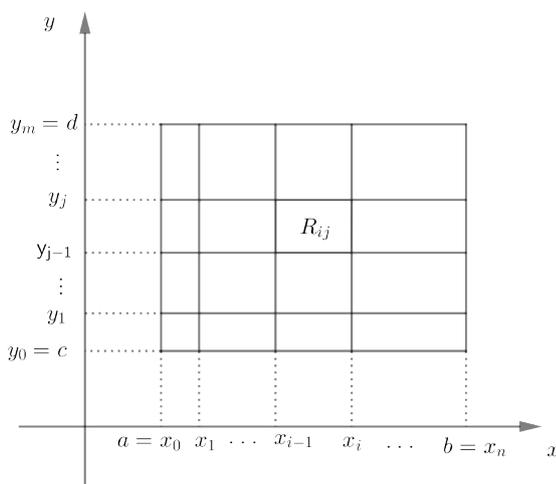


Figura 2.19: Partição do retângulo R

⁷Este teorema estará em seguida no trabalho como Teorema (2.3).

Definição 2.12. *Seja B um subconjunto de \mathbb{R}^2 , dizemos que B é limitado se existir um retângulo R , tal que $B \subset R$.*

Definição 2.13 (Soma de Riemann para integral dupla). *Seja $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde B é um conjunto limitado em \mathbb{R}^2 . Considere o retângulo R tal que $B \subset R$ e*

$$P = \{(x_i, y_j) / i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$$

uma partição de R . Definimos então a função $F : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(X) = \begin{cases} f(X), & \text{se } X \in B \\ 0, & \text{se } X \notin B. \end{cases}$$

Para cada par de índices (i, j) , seja $X_{ij} \in R_{ij} \subset R$ escolhido de modo arbitrário. A soma de Riemann de f relativa a partição P e aos pontos X_{ij} é definida como sendo o número

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j, \quad (2.12)$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Observação 5. Sobre a Definição (2.13) destaquemos:

(I) Pela definição da função F , podemos olhar a soma de Riemann como sendo

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j;$$

(II) Se $f(X_{ij}) > 0$, o número

$$f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

será o volume do paralelepípedo de altura $f(X_{ij})$ e cuja base é o retângulo R_{ij} ;

(III) Se

$$P = \{(x_i, y_j) / i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$$

é uma partição do retângulo R , chamaremos de Δ o maior dos números

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n, \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_m.$$

Observe que se Δ tende a zero, todos Δx_i e todos Δy_j também tendem a zero.

Definição 2.14 (Integral Dupla). *Sejam f uma função definida num conjunto limitado B e L um número real. Dizemos que a soma de Riemann*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

tende a L , quando Δ tende a zero, e denotamos por

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = L,$$

se para qualquer que seja $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, que depende apenas de ϵ e não da escolha de X_{ij} , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P , com $\Delta < \delta$. Tal número “ L ”, quando existe, é único e é denominado integral dupla (segundo Riemann) de f sobre B . Denotamos por

$$\int \int_B f(x, y) dx dy = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (2.13)$$

Se $\int \int_B f(x, y) dx dy$ existir, então diremos que f é integrável em B .

Definição 2.15. *Seja K um subconjunto de \mathbb{R}^2 limitado. A área de K é dada por*

$$\text{área de } K = \int \int_K dx dy. \quad (2.14)$$

Definição 2.16. *Seja $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em B , com $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in B$. Seja A o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in B, 0 \leq f(x, y) \leq z\}.$$

Definimos o volume do conjunto A por

$$\text{volume de } A = \int \int_B f(x, y) dx dy.$$

Teorema 2.2 (de Fubini). *Seja $f(x, y)$ uma função integrável no retângulo*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Suponhamos que $\int_a^b f(x, y)dx$ exista, para todo $y \in [c, d]$, e que $\int_c^d f(x, y)dy$ exista, para todo $x \in [a, b]$. Então

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (2.15)$$

Exemplo 2.9. Calcularemos agora,

$$\int \int_R (x + 2y) dx dy,$$

onde

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int \int_R (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_1^2 (x + 2y) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_1^2 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + 2y \right) dy. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2} + 2y \right) dy = \left[\frac{3}{2}y + y^2 \right]_0^1 = \frac{5}{2},$$

concluimos que

$$\int \int_R (x + 2y) dx dy = \frac{5}{2}.$$

□

Exemplo 2.10. Usando integral dupla, calcularemos a área do círculo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad R > 0 \text{ um número real.}$$

Para facilitar nossas contas, iremos usar mudança de variáveis⁸. Neste caso usaremos coordenadas polares⁹, isto é,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{então} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Então

$$\text{área de } C = \int \int_C dx dy = \int \int_{C_{\rho\theta}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| d\rho d\theta.$$

Observemos que $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = \rho$, segue que

$$\begin{aligned} \text{área de } C &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \rho d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \left[\theta \right]_0^{2\pi}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{área de } C = \pi R^2.$$

2.3.3 Teorema de Green

Definição 2.17. *Sejam n e m dois números naturais não nulos. Uma função de n variáveis reais a valores em \mathbb{R}^m é uma função*

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

onde A é um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n .

Observação 6. Notemos o seguinte:

⁸Veja, por exemplo em Guidorizzi (2002)

$$\int \int_B f(x, y) dx dy = \int \int_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

⁹Um estudo mais abrangente sobre coordenadas polares pode ser encontrado em Simmons (1988)

- (a) Se F é uma função como na Definição (2.17), então para cada n -upla ordenada $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ associa um único vetor $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$;
- (b) O conjunto A é o domínio de F , já a imagem de F é o conjunto

$$\{F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m / (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\},$$

que também pode ser denotado por $F(A)$;

- (c) Quando $m = n$, podemos considerar F como se uma transformação de A em \mathbb{R}^n . Quando estivermos considerando o significado físico ou geométrico de F , iremos considerar $F(x)$ (com $x \in A$), como um vetor aplicado em x , e neste caso, chamaremos a função F de um campo vetorial e denotemos por \vec{F} . Em particular, quando $n = 2$, sempre que não houver confusão, denotaremos por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

onde $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$.

Exemplo 2.11. Citaremos aqui alguns exemplos.

- (I) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um exemplo da Definição (2.17), basta tomar $n = m = 1$;
- (II) Qualquer curva paramétrica é um exemplo da Definição (2.17), basta tomar $n = 1$ e $m = 2$;
- (III) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(u, v) = (x, y, z)$ onde

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

é um exemplo da Definição (2.17), basta tomar $n = 2$ e $m = 3$.

Definição 2.18. Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo e Ω um conjunto aberto. Considere $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 . Definimos a integral de linha de \vec{F} sobre γ por

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt, \quad (2.16)$$

onde $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é o produto escalar das funções vetoriais $\vec{F}(\gamma)(t)$ e $\gamma'(t)$. Também usaremos a seguinte notação para integral de linha:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $\vec{r}(t) = \gamma(t)$.

Iremos agora ilustrar um exemplo da Definição (2.18).

Exemplo 2.12. Usando a Definição (2.18), calcularemos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ onde } \vec{F}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j} \text{ e } \gamma(t) = (t, t^2), t \in [-1, 1].$$

Das informações do enunciado do problema temos:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2t \end{cases}$$

e

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(t, t^2) = t^2 \vec{i} + t \vec{j},$$

então

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^2, t) \cdot (1, 2t) = 3t^2.$$

Logo, da Equação (2.16), temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-1}^1 3t^2 dt \\ &= t^3 \Big|_{-1}^1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Sejam \vec{F} e γ como na Definição (2.18), então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \vec{i} + Q(x(t), y(t)) \vec{j} \right] \cdot \left[\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} \right] dt \\ &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt. \end{aligned}$$

Então usaremos também a notação

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

para a integral de linha de \vec{F} sobre γ .

Definição 2.19. Uma curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ diz-se de classe C^1 por partes se for contínua e se existirem uma partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e curvas

$$\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de classe C^1 , tais que, para todo $t \in (t_{i-1}, t_i)$ tem-se $\gamma(t) = \gamma_i(t)$.

Como consequência, temos a seguinte definição

Definição 2.20. Seja \vec{F} uma campo vetorial contínuo em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sendo Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 . Considere $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva de classe C^1 por partes, como na Definição (2.19), então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 + \dots + \int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\gamma_n.$$

Exemplo 2.13. Iremos calcular $\int_{\gamma} xdx - xydy$, onde $\gamma(t) = (t, |t|)$, $-1 \leq t \leq 1$.

Conforme a Figura (2.20), a curva γ é uma curva C^1 por partes com

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

e

$$\gamma_1(t) = (t, -t), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

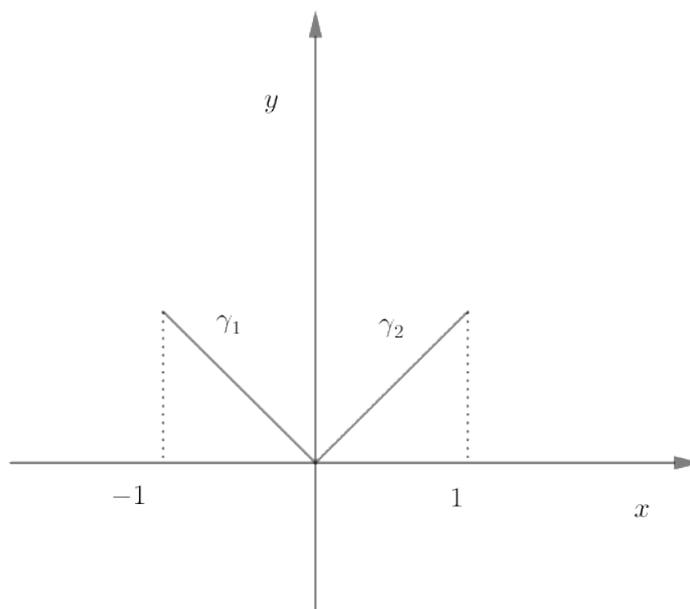


Figura 2.20: A curva γ é C^1 por partes

Então, para γ_1 temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = -1, \end{cases}$$

e para γ_2 temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} xdx - xydy &= \int_{-1}^0 (t \cdot 1 - t \cdot (-t) \cdot (-1)) dt \\ &= \int_{-1}^0 (t - t^2) dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= -\frac{5}{6}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} xdx - xydy &= \int_0^1 (t \cdot 1 - t \cdot t \cdot 1)dt \\ &= \int_0^1 (t - t^2)dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} xdx - xydy = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{2}{3}.$$

As definições a seguir dizem a respeito à curvas.

Definição 2.21.

(I) Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita fechada, quando

$$\gamma(a) = \gamma(b);$$

(II) Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples, se a aplicação γ for injetiva;

(III) Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita fechada e simples, se

$$\gamma(t) \neq \gamma(s), \quad \forall t, s \in [a, b) \quad \text{e} \quad \gamma(a) = \gamma(b).$$

O próximo exemplo é famoso na geometria das curvas, e para o leitor encontrar mais detalhes sobre o exemplo veja, por exemplo, Alencar e Santos (2002).

Exemplo 2.14 (Curvas de Lissajous). A curva de Lissajous é o traço da curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (\text{sen } at, \text{sen } bt), \quad a, b > 0.$$

Quando $a = 1$ e $b = 2$ temos a curva conhecida como Lemniscata, conforme a Figura (2.21). Neste caso, a curva é fechada, e se nos restringirmos ao intervalo $[0, 2\pi]$ que descreve todo seu traço, a mesma não é injetiva em $[0, 2\pi)$, ou seja, não é simples, pois neste caso

$$\gamma(0) = (0, 0) = \gamma(\pi).$$

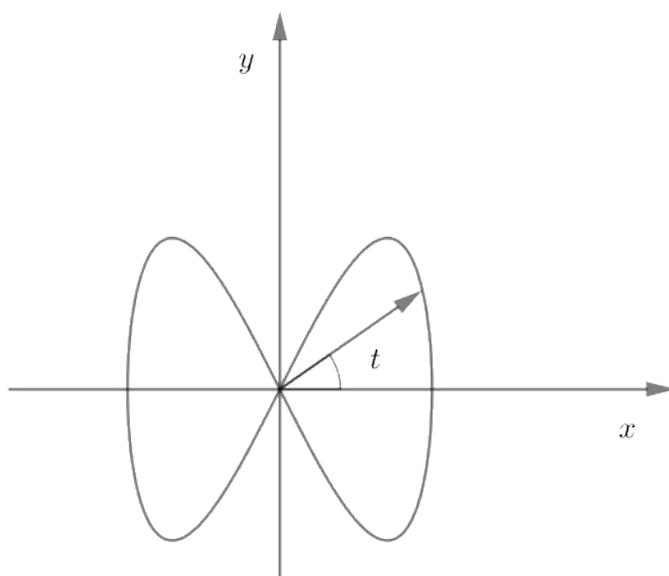


Figura 2.21: Lemniscata

O mesmo ocorreu, para $a = 2$ e $b = 3$ conforme a Figura (2.22).

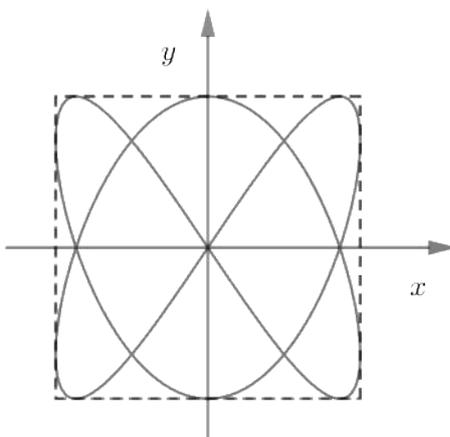


Figura 2.22: Curva de Lissajous para $a = 2$ e $b = 3$.

Teorema 2.3 (Teorema de Green). *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto¹⁰, com interior não-vazio, cuja fronteira é imagem de um curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, fechada, simples, C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto*

¹⁰Conjunto compacto é um conjunto que é limitado e fechado (que contém sua fronteira).

contendo K . nestas condições,

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \int \int_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy. \quad (2.17)$$

Uma aplicação do Teorema de Green é o seguinte:

Corolário 2.1 (Área de uma região K). *Seja K e γ como nas hipóteses do Teorema (2.3), então a área de K , que denotamos por $A(K)$, é dada por*

$$A(K) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} xdy - ydx. \quad (2.18)$$

Demonstração. Tomemos

$$P(x, y) = -\frac{y}{2} \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{x}{2},$$

observe que as funções P e Q são de classe C^1 , e daí, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Pela Equação (2.14)

$$A(K) = \int \int_K dxdy = \int \int_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy.$$

Então, pelo Teorema de Green,

$$A(K) = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \oint_{\gamma} -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy.$$

□

Capítulo 3

A geometria do posto de combustível

Neste Capítulo resolveremos o problema principal deste trabalho, “calcular o volume de um tanque de combustível”, usando três maneiras diferentes:

- (I) Usando integração de funções de uma variável;
- (II) Usando apenas conceitos da geometria elementar;
- (III) Usando integral de linha.

3.1 Introdução

O tanque usado para armazenamento de combustíveis nos postos é, em geral, na forma de cilindro reto. O tanque pode ter vários compartimentos e é enterrado no subsolo na posição horizontal, de modo que o eixo do cilindro é paralelo à superfície horizontal do chão.



Figura 3.1: Tanque de combustível
Fonte: Carmago (2009)

Alguns postos possuem equipamentos de monitoramento eletrônico que mostram o volume e a altura do combustível no tanque, a temperatura, o quanto foi vendido, permitem o controle de estoque, etc. São sensores instalados dentro do tanque que transmitem as informações a um computador. Entretanto, a maioria dos postos não possui este sistema de monitoramento computadorizado. É necessário realizar manualmente este acompanhamento da quantidade de combustível restante.

O volume de combustível que está no tanque em cada momento é medido manualmente inserindo-se uma vara graduada no bocal de abastecimento do tanque até alcançar o seu fundo, retirando-se a vara e observando o nível de combustível que nela é apresentado.

O que pretendemos neste trabalho é determinar de que maneira deve-se marcar a vara para que ela dê o volume de combustível no tanque, em litros. Inicialmente, pretendemos resolver o problema empregando integração de funções de uma variável real. Posteriormente usaremos apenas a geometria euclidiana plana, aquela que geralmente é estudada no ensino fundamental. Após a resolução dessa situação, pretendemos passar a uma resolução equivalente à apresentada acima, porém considerando o tanque na forma cilíndrico elíptico, aquele que é transportado nos caminhões para os postos. Para esta etapa usaremos a integração de linha juntamente com o Teorema de Green. Estes cálculos estão sendo utilizados por engenheiros agrônomos para medir volumes remanescentes de fertilizantes que são armazenados e distribuídos nas lavouras a partir de um tanque em cima de carreta levada por trator.

Em todos os casos que apresentaremos iremos encontrar que função área, que de-

pende de uma variável, a que denotaremos por h . Tal variável independente representará o nível de combustível que nela é apresentado. Para que uma pessoa calcule a quantidade de combustível no tanque, é usada uma régua medidora, para saber em qual valor de h o combustível se encontra. Observamos que, no caso do cilindro circular reto, h está sempre compreendido entre 0 e $2R$ (sendo R o raio do círculo).

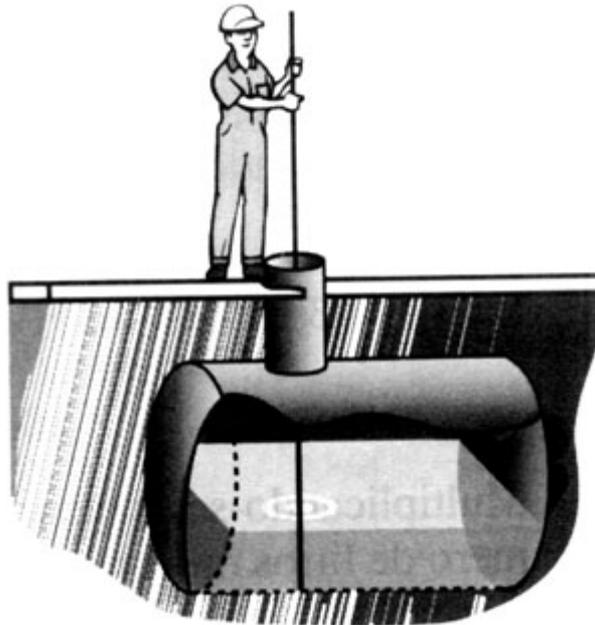
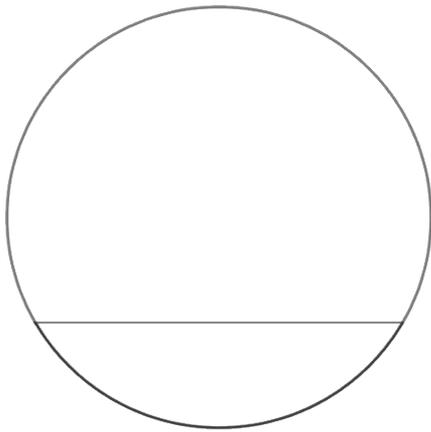


Figura 3.2: Medindo o volume
Fonte: Carmago (2009)

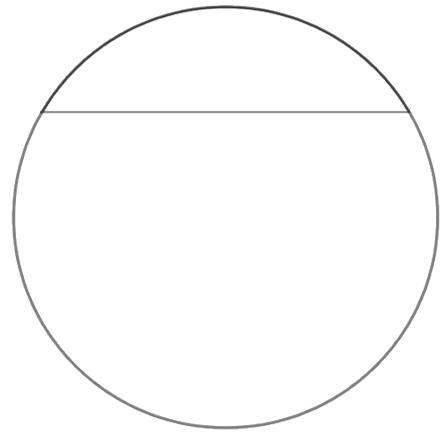
3.2 Resolução do problema usando integral de uma variável

Neste caso, iremos analisar quando o nosso tanque é da forma de um cilindro circular reto, e dividiremos em dois casos:

- (1°) Quando tiver menos de meio tanque, seção plana conforme a Figura (3.3 a);
- (2°) Quando tiver mais de meio tanque, seção plana conforme a Figura (3.3 b).



(a) Menos de meio tanque



(b) Mais de meio tanque

Figura 3.3: Interpretação geométrica da área da base para calcular o volume de um tanque

Primeiro caso:

Para o caso em questão, temos que a base de nosso cilindro é um círculo de raio R , então podemos considerar o mesmo pela equação:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Iremos calcular a área, em seguida o volume, primeiramente para o caso em que o volume está com menos de meio tanque Seção (3.3 a). As Figuras (3.4) e (3.5) irão nos auxiliar no desenvolvimento dos cálculos.

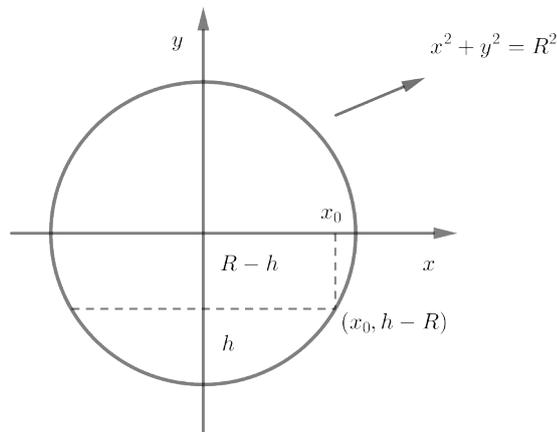


Figura 3.4: Auxiliar para cálculo de menos de meio tanque

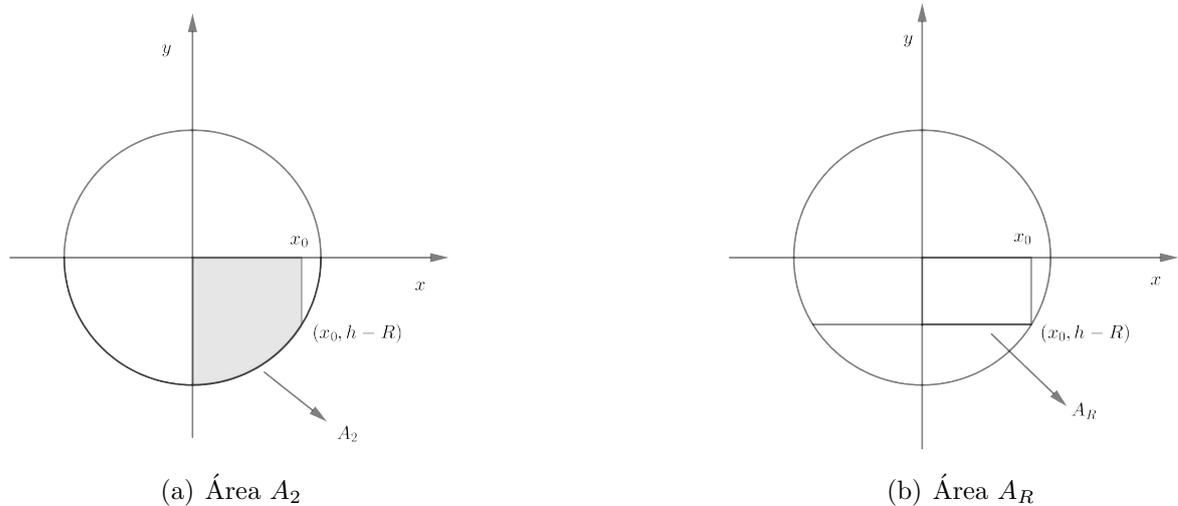


Figura 3.5: Interpretação geométrica das áreas denotados por A_2 e A_s

No caso em questão, a área que pretendemos encontrar é a parte do círculo que está abaixo da reta $y = h - R$. Denotemos então A_2 área compreendida entre as curvas $x = 0$, $x = x_0$, $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ e $y = 0$, conforme a Figura (3.5 a), e A_R a área do retângulo compreendido entre as curvas $x = 0$, $x = x_0$, $y = h - R$ e $y = 0$, conforme a Figura (3.5 b). Então se denotarmos por A_1 a área procurada, temos das Figuras (3.5 a) e (3.5 b), que

$$A_1 = 2A_2 - 2A_r.$$

Então pela Equação (2.7), a mesma pode ser dada por:

$$A_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{R^2 - x^2} dx + 2 \int_0^{x_0} (h - R) dx \quad (h < R), \quad x_0 = \sqrt{R^2 - (h - R)^2}.$$

Então, denotando por

$$I = \int \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (3.1)$$

e fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x &= R \operatorname{sen} \theta \\ dx &= R \cos \theta d\theta, \end{cases} \quad (3.2)$$

substituindo (3.2) em (3.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{R^2 - x^2} dx \\
 &= \int \sqrt{R^2 - R^2 \sen^2 \theta} R \cos \theta d\theta \\
 &= \int R^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{R^2}{2} (\theta + \sen \theta \cos \theta).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Da Equação (3.2), temos que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} \quad \text{e} \quad \theta = \arcsen\left(\frac{x}{R}\right). \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtemos:

$$I = \frac{R^2}{2} \left[\arcsen\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{R^2} \right]. \tag{3.5}$$

Então,

$$\int_0^{x_0} \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \left[\arcsen\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{R^2} \right]_0^{x_0} = \frac{R^2}{2} \left[\arcsen\left(\frac{x_0}{R}\right) + \frac{x_0\sqrt{R^2 - x_0^2}}{R^2} \right].$$

Como $x_0 = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}$, temos que

$$I_1 = \frac{R^2}{2} \left[\arcsen\left(\frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}}{R}\right) + \frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}(R - h)}{R^2} \right]. \tag{3.6}$$

Segue da Equação (3.6) que

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 2I_1 + 2x_0(h - R) \\
 &= \left[R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}}{R}\right) + \sqrt{R^2 - (R - h)^2}(R - h) \right] \\
 &\quad + 2\sqrt{R^2 - (R - h)^2}(h - R).
 \end{aligned}$$

Portanto

$$A_1(h) = R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R}\right) + (h-R)\sqrt{R^2 - (R-h)^2}, 0 \leq h \leq R. \quad (3.7)$$

Segundo caso:

Agora calcularemos a área, em seguida o volume, para o caso de em que o volume tenha mais de meio tanque (3.3 b). Para isto, usaremos a Figura (3.6) para nos auxiliar no desenvolvimento dos cálculos.

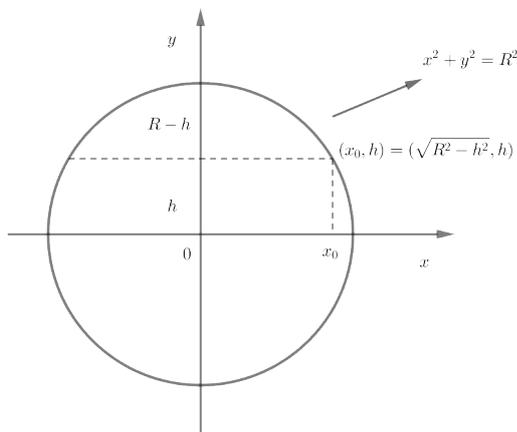


Figura 3.6: Auxiliar para cálculo de mais de meio tanque

No caso em questão, a área que pretendemos encontrar é a parte do círculo que está abaixo da reta $y = h$ (conforme a Figura (3.6)). Lembremos que a área do círculo é πR^2 , então, pela Equação (2.7), a área procurada pode ser dada por:

$$A_2 = \pi R^2 - 2 \left[\int_0^{x_0} \sqrt{R^2 - x^2} dx - \int_0^{x_0} h dx \right].$$

Da Equação (3.5), temos que:

$$A_2 = \pi R^2 + 2x_0 h - \left[R^2 \arcsen\left(\frac{x_0}{R}\right) + x_0 \sqrt{R^2 - x_0^2} \right],$$

substituindo $x_0 = \sqrt{R^2 - h^2}$, obtemos

$$A_2 = \pi R^2 + 2h\sqrt{R^2 - h^2} - \left[R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}\right) + h\sqrt{R^2 - h^2} \right],$$

logo

$$A_2(h) = R^2 \left[\pi - \arcsen \left(\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} \right) \right] + h\sqrt{R^2 - h^2}, 0 \leq h \leq R. \quad (3.8)$$

Para a expressão fazer um melhor sentido prático, na Equação (3.8), faça a mudança h por $h - R$, obtemos:

$$A_2(h) = R^2 \left[\pi - \arcsen \left(\frac{\sqrt{R^2 - (h - R)^2}}{R} \right) \right] + (h - R)\sqrt{R^2 - (h - R)^2}, R \leq h \leq 2R.$$

Logo a área é dada pela função

$$A(h) = \begin{cases} R^2 \arcsen \left(\frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}}{R} \right) + (h - R)\sqrt{R^2 - (R - h)^2}, & 0 \leq h \leq R \\ R^2 \left[\pi - \arcsen \left(\frac{\sqrt{R^2 - (R - h)^2}}{R} \right) \right] + (h - R)\sqrt{R^2 - (R - h)^2}, & R \leq h \leq 2R \end{cases}.$$

Logo concluímos que o volume é dado pela função

$$V(h) = cA(h), 0 \leq h \leq 2R,$$

onde h é a medida estabelecida na régua medidora.

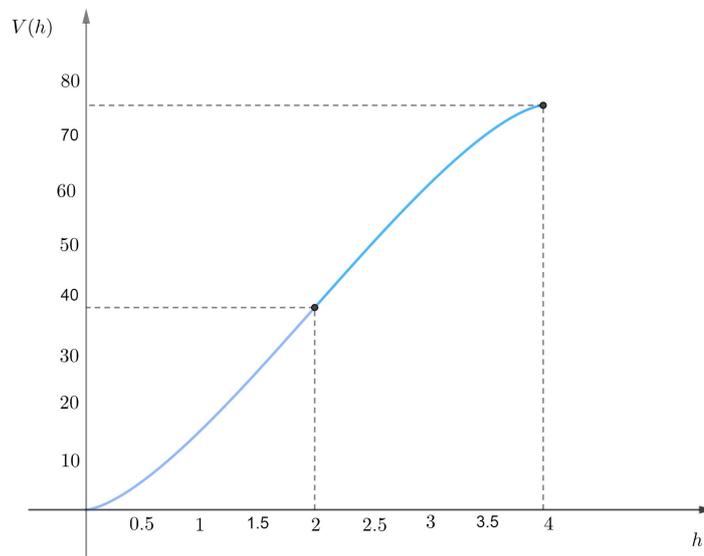


Figura 3.7: Gráfico da função volume

Na Figura (3.7), estamos considerando h medindo em metros, $R = 2 \text{ m}$ e $c = 6 \text{ m}$ e a função volume $V(h)$ em metros cúbicos. Neste caso, pelo fato de ser um cilindro

circular reto, o volume máximo é

$$V(4) = 24\pi \text{ m}^3 \approx 75398 \text{ litros.}$$

Observe também que, se $h = 1$ temos

$$\begin{aligned} V(1) &= 6A(1) \\ &= 6 \left[2^2 \arcsen \left(\frac{\sqrt{2^2 - (2-1)^2}}{2} \right) + (1-2)\sqrt{2^2 - (2-1)^2} \right] \\ &= 6 \left[4 \arcsen \left(\frac{3}{2} \right) - \sqrt{3} \right] \\ &= 8\pi - \sqrt{3}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$V(1) \approx 14,740 \text{ m}^3 = 14740 \text{ litros.}$$

3.3 Resolução do problema usando geometria euclidiana

Agora iremos usar geometria para calcular o volume do tanque de gasolina. Para isto, iniciaremos com o caso em que o volume está indicado abaixo do segmento AB , conforme a Figura (3.8). Nota-se, que tal área pode ser dada pela diferença entre a área do setor circular $A\hat{O}B$ e a área do triângulo AOB , a qual dependerá de h e do ângulo α (sendo $0 \leq \alpha \leq \pi/2$).

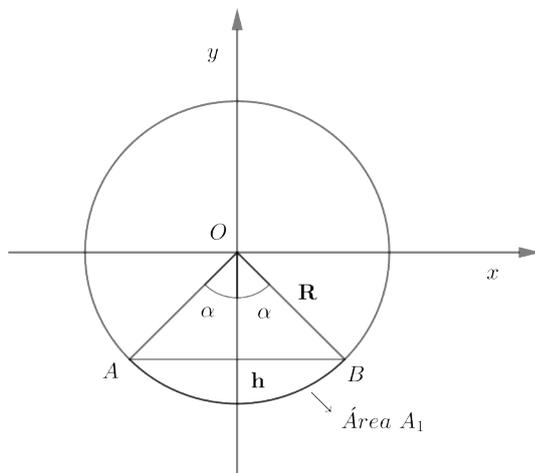


Figura 3.8: Área para cálculo do volume de menos de meio tanque

Sejam A_s a área do setor circular $A\hat{O}B$ e A_T a área do triângulo AOB . Então temos que

$$A_s = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot R^2 = \alpha R^2 \quad \text{e} \quad A_T = \frac{\overline{AB} \cdot (R - h)}{2}. \quad (3.9)$$

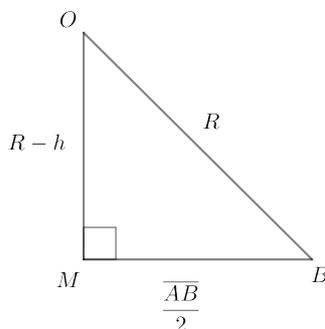


Figura 3.9: OM é bissetriz de $A\hat{O}B$

Observe que o triângulo AOB é isósceles de base AB , então a altura do triângulo AOB de medida $R - h$, também é bissetriz e mediana¹, então conforme a Figura (3.9), e usando as relações trigonométricas (Definição (2.1)), temos que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{2R} \\ \operatorname{cos} \alpha = \frac{R - h}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = 2R \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha = \frac{R - h}{R} \end{cases}. \quad (3.10)$$

¹Este resultado pode ser encontrado em Muniz Neto (2013)

Pela relação fundamental da trigonometria, Equação (2.1), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{R-h}{R}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right). \quad (3.12)$$

Substituindo as expressões (3.10), (3.11) e (3.12) em (3.9), então a área procurada será

$$A_1(h) = R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - R \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R} (R-h)$$

ou seja,

$$A_1(h) = R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) + (h-R)\sqrt{R^2 - (R-h)^2}, \quad 0 < h < R. \quad (3.13)$$

Em seguida, iremos fazer a mesma análise, só que considerando a altura maior que o raio R do círculo para encontrar o volume do tanque de gasolina, novamente usando geometria euclidiana. Para esta situação, analisaremos o caso em que o volume está indicado abaixo do segmento AB , conforme a Figura (3.10). Nota-se, que tal área pode ser dada pela diferença entre a área do círculo e a área da região acima do segmento AB contida no círculo.

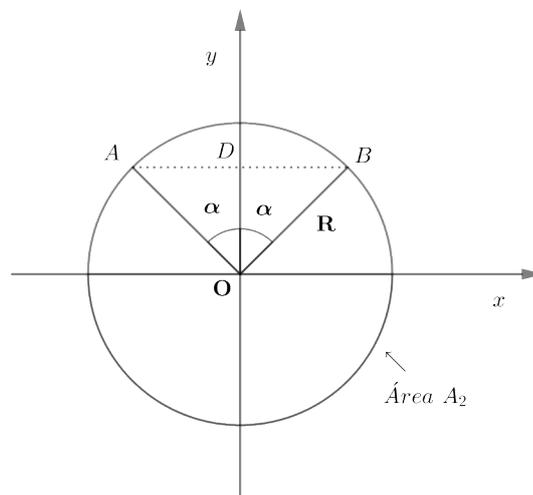


Figura 3.10: Área para cálculo do volume de mais de meio tanque

Usando as notações da figura (3.10), denotando por O o centro do círculo em questão, por H a medida do segmento OD (altura do triângulo AOB relativa ao vértice O). Denotemos por A_c a área do círculo e $A_{\widehat{AB}}$ a área da região acima de AB contida no círculo. Observemos que a área procurada dependerá de H e α e denotemos por A_2 . Então

$$A_2(H, \alpha) = A_c - A_{\widehat{AB}},$$

se denotarmos por A_s a área do setor circular $A\hat{O}B$ e A_T a área do triângulo AOB , com raciocínio análogo ao que expomos anteriormente, então temos que

$$A_2(H, \alpha) = A_c - (A_s - A_T) = \pi R^2 - \alpha R^2 + R \operatorname{sen} \alpha \cdot H, \quad (3.14)$$

pois, das relações trigonométricas

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{2R} \\ \cos \alpha = \frac{H}{R}. \end{cases} \quad 0 < H < R.$$

Usando raciocínio também análogo ao caso anterior, temos que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - H^2}}{R} \quad \text{e} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{H}{R}\right).$$

Assim, a área procurada, que agora dependerá apenas de H , será

$$A_2(H) = R^2 \left[\pi - \arccos\left(\frac{H}{R}\right) \right] + H\sqrt{R^2 - H^2}, \quad 0 < H < R. \quad (3.15)$$

Observemos que, neste caso, a régua medidora nos indica a medida

$$h = R + H, \quad 0 < H < R,$$

ou seja,

$$H = h - R, \quad R < h < 2R, \quad (3.16)$$

substituindo, (3.16) em (3.15), obtemos

$$A_2(h) = R^2 \left[\pi - \arccos \left(\frac{h-R}{R} \right) \right] + (h-R) \sqrt{R^2 - (h-R)^2}, \quad R < h < 2R. \quad (3.17)$$

Assim, das expressões (3.13) e (3.17), concluímos que a função área é dada por

$$A(h) = \begin{cases} R^2 \arccos \left(\frac{R-h}{R} \right) + (h-R) \sqrt{R^2 - (R-h)^2}, & 0 \leq h \leq R \\ R^2 \left[\pi - \arccos \left(\frac{h-R}{R} \right) \right] + (h-R) \sqrt{R^2 - (h-R)^2}, & R \leq h \leq 2R \end{cases} \quad (3.18)$$

e o volume do tanque de gasolina é

$$V(h) = c \cdot A(h), \quad 0 \leq h \leq 2R.$$

3.4 Resolução do problema usando integral de linha

Finalizando a resolução do problema proposto, iremos, agora calcular o volume de um tanque de base elíptica usando integral de linha. Neste caso usaremos a elipse como no Exemplo (2.7), pois, no plano a menos de translação e rotação estamos tratando da mesma elipse.

Consideremos a região D , delimitada pelas curvas C_1 , C_2 e C_3 (conforme a Figura 3.11), onde C_1 é o arco da elipse que liga os pontos $(0, -b)$ e (x_0, h) , C_2 o segmento de reta que liga os pontos (x_0, h) a $(0, h)$ e C_3 o segmento de reta que liga os pontos $(0, h)$ a $(0, -b)$.

Segue das Equações (2.8), que as curvas C_1 , C_2 e C_3 têm as seguintes parametrizações:

$$\begin{cases} C_1 : \gamma_1(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t), & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \theta_0 \\ C_2 : \gamma_2(t) = (x_0 - t, h) & 0 \leq t \leq x_0 \\ C_3 : \gamma_3(t) = (0, h - (h+b)t) & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

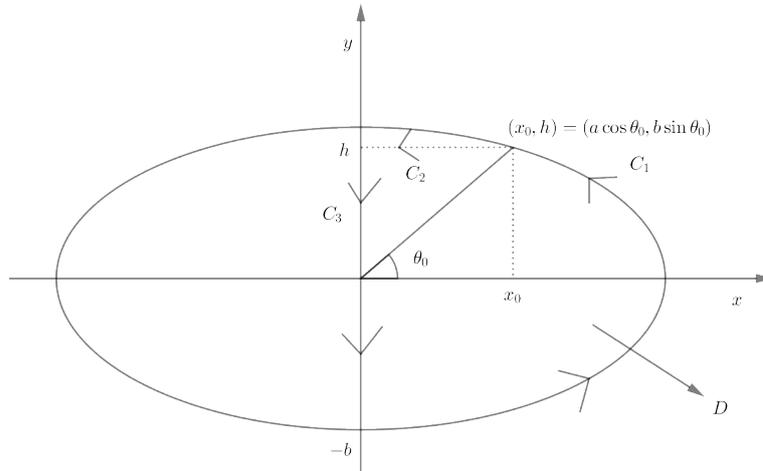


Figura 3.11: Região D delimitada pelas curvas C_1 , C_2 e C_3 .

Iremos, agora, calcular a área de D , que denotaremos por $A(D)$. Note que $A(D)$ é a metade da área que estamos interessados, pela Equação (2.18) temos que

$$2A(D) = \oint_{\partial D} xdy - ydx = \oint_{\gamma_1} xdy - ydx + \oint_{\gamma_2} xdy - ydx + \oint_{\gamma_3} xdy - ydx. \quad (3.20)$$

Calcularemos as três integrais de linhas da equação (3.20). Primeiramente, usando a primeira expressão de (3.19), obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} xdy - ydx &= \int_{-\pi/2}^{\theta_0} [a \cos(t)(b \cos(t)) - b \sin(t)(-a \sin(t))] dt \\ &= ab \int_{-\pi/2}^{\theta_0} 1 dt \\ &= ab \left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Em seguida, usando a segunda expressão de (3.19), e lembrando que $x_0 = a \cos \theta_0$ e $h = b \sin \theta_0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} xdy - ydx &= \int_0^{x_0} [(x_0 - t) \cdot 0 - h \cdot (-1)] dt \\ &= h \int_0^{x_0} dt \\ &= hx_0 \\ &= ab \sin \theta_0 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Finalizando, usando a terceira expressão de (3.19), temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} xdy - ydx &= \int_0^1 [0 \cdot (-h - t) - (h - (h + b)t) \cdot 0] dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Usando o fato que $\text{sen } \theta_0 = \frac{h}{b}$, temos que

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b} \\ \theta_0 &= \text{arcsen} \left(\frac{h}{b} \right), \end{aligned}$$

e daí, denotemos $A(h) = 2A(D)$, obtemos a área em função de h dada por

$$A(h) = ab \left[\frac{\pi}{2} + \text{arcsen} \left(\frac{h}{b} \right) \right] + \frac{ah\sqrt{b^2 - h^2}}{b}, \quad -b \leq h \leq b.$$

Logo concluimos que o volume é dado pela função

$$V(h) = cA(h), \quad -b \leq h \leq b,$$

onde h é a medida estabelecida na régua medidora.

Na Figura (3.12), estamos considerando h medindo em metros, $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ e $c = 6 \text{ m}$ e a função volume $V(h)$ em metros cúbicos. Neste caso o volume máximo é

$$\begin{aligned} V(2) &= 6 \left[6 \left[\frac{\pi}{2} + \text{arcsen} \left(\frac{2}{2} \right) \right] + \frac{6\sqrt{4^2 - 2^2}}{2} \right] \\ &= 36\pi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$V(2) = 36\pi \text{ m}^3 \approx 113097 \text{ litros.}$$

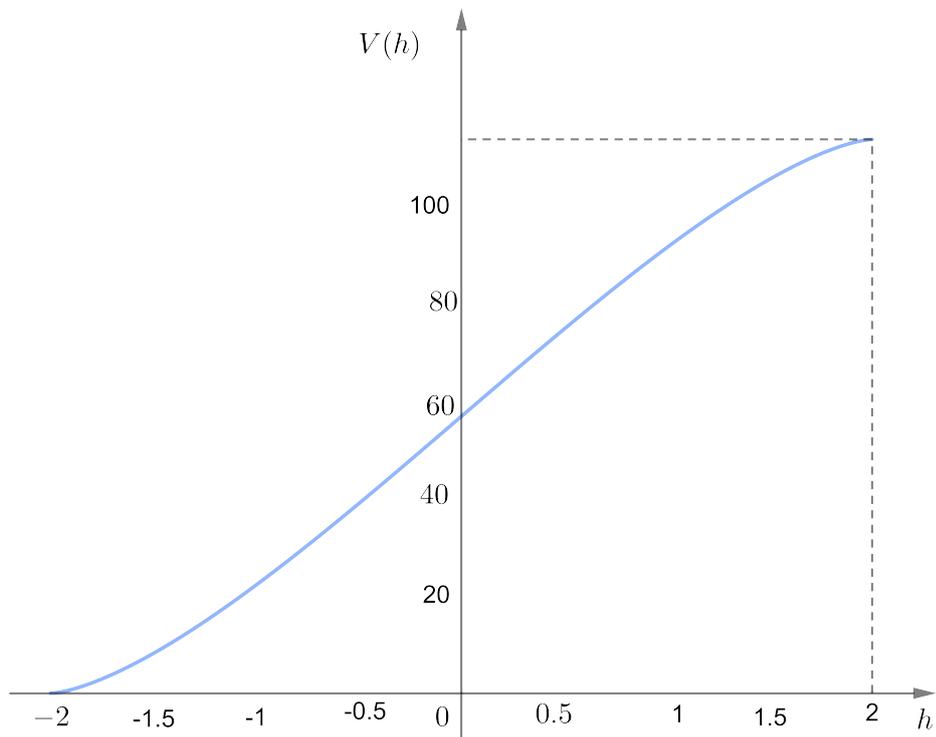


Figura 3.12: Gráfico da função volume

Agora, por exemplo, para $h = 1$ temos

$$\begin{aligned}
 V(1) &= 6 \left[6 \left[\frac{\pi}{2} + \arcsen \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \frac{3\sqrt{4^2 - 1^2}}{2} \right] \\
 &= 36 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right] + 9\sqrt{3} \\
 &= 24\pi + 9\sqrt{3},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$V(1) \approx 90,986 \text{ m}^3 = 90986 \text{ litros.}$$

Como ilustração destacamos, na Figura (3.13), uma tabela de uma régua medidora usada em postos de gasolina.

alt (cm)	volume (litros)			alt (cm)	volume (litros)		
	10.000	15.000	20.000		10.000	15.000	20.000
1	7	10	13	33	1.207	1.802	2.397
2	19	28	38	34	1.260	1.881	2.502
3	35	52	69	35	1.313	1.961	2.609
4	53	80	106	36	1.367	2.042	2.717
5	75	111	148	37	1.422	2.124	2.825
6	98	146	194	38	1.478	2.207	2.935
7	123	184	245	39	1.534	2.290	3.047
8	150	224	298	40	1.590	2.375	3.159
9	179	267	356	41	1.647	2.460	3.272
10	209	313	416	42	1.705	2.545	3.386
11	241	360	479	43	1.763	2.632	3.501
12	274	410	545	44	1.821	2.719	3.617
13	309	461	613	45	1.880	2.807	3.735
14	344	514	684	46	1.940	2.896	3.853
15	381	569	758	47	1.999	2.985	3.971
16	419	623	833	48	2.060	3.075	4.091
17	459	685	911	49	2.120	3.166	4.212
18	499	745	991	50	2.181	3.257	4.333
19	540	806	1.073	51	2.243	3.349	4.455
20	582	869	1.157	52	2.305	3.441	4.578

Figura 3.13: Tabela régua medidora
 Fonte: Luís (2022)

3.5 Contribuições para o Ensino Médio

Agora buscaremos destacar algumas possibilidades em que nosso trabalho possa ser abordado no ensino médio, e até na segunda fase do ensino fundamental. Vale ressaltar que tudo que apresentarmos aqui estará baseado em documento do MEC (Ministério de Educação e Cultura), como a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e Matriz Bianual de Habilidades 2020 - 2021 da Secretaria de Educação e Cultura do estado de Goiás.

Sabemos que o PROFMAT é um programa de pós graduação destinado preferencialmente a professores das escolas de ensino básico (fundamental e médio) e públicas. Nesse sentido, ao se escolher o tema a ser trabalhado na dissertação, tivemos o cuidado de escolher um assunto que tivesse algumas possibilidades de aplicação no ensino básico, como o próprio título diz “A Geometria dos Postos de Gasolina” é um trabalho que está

dando grande ênfase ao ensino da geometria, assunto esse que por muitos anos, talvez por décadas foi colocado de lado pelos professores dos ensinos fundamental e médio, como diz Estela Kaufman Fainguelernt, logo podemos pensar nesse trabalho como um incentivo ao ensino da Geometria (trigonometria) no ensino base e também como uma forma de Modelagem da Geometria. Dentro do trabalho podemos destacar alguns pontos que podem ser trabalhados diretamente com os alunos do ensino médio, são eles, tipos de figuras planas principalmente circunferência e elipse, além dos sólidos também aqui elencados, que no caso é o uso do cilindro, tanto o circular quanto o elíptico, dando mais ênfase ao cilindro circular reto por estar se tratando de uma aplicação com alunos da educação básica, trabalhos como esse também são de grande valia em uma eventual sala de aula no ensino médio, para responder perguntas muito feitas por alunos na fase da adolescência como: “para que estudar matemática?”, “Onde vou usar isso na minha vida?”. Podemos observar que tais conteúdos estão presentes na nova grade curricular do ensino médio como podemos ver no documento que tem uma pequena parte apresentada a seguir:

Objetivo de conhecimento: Áreas de figuras geométricas: cálculo por decomposição, composição ou aproximação. (GO-EMMAT307A) Determinar as medidas de áreas de superfícies planas, utilizando estratégias, conceitos, definições, procedimentos matemáticos e conhecimentos geométricos (reconfigurações, aproximação por cortes, método da dissecção de figuras planas, entre outros) para argumentar e tomar decisões diante de problemas relacionados a espaço e forma. (SEE-GO, 2021).

Tendo em vista que perguntas como essas são muito recorrentes em sala de aula, e os professores precisam mostrar situações onde a matemática pode ser aplicada e nesse caso do uso da Geometria, pois, além de alguns conceitos aqui trabalhados o resultado do problema que trata de uma função “arcsen”, conteúdo que aparece na segunda série do ensino médio apesar de não serem trabalhadas de forma muito aprofundadas, podem ser perfeitamente discutidas e devem pelo menos serem apresentadas aos alunos dessa série. Pois bem, com nossa experiência de professor da educação básica há mais de vinte anos, podemos dizer que os alunos do ensino médio têm total capacidade de absorverem de maneira satisfatória conteúdos como esses apresentados aqui, se trabalhados de maneira correta, como nesse caso podemos trabalhar da seguinte forma:

- (i) Apenas discutir com os alunos o conteúdo de geometria euclidiana plana e espa-

cial existente no trabalho, tais como, circunferência e círculo, elementos, comprimento, área dentre outros, aprofundar um pouco seus conhecimentos sobre as cônicas (Elipse), cilindro circular reto, e as várias aplicações que existem acerca desse sólido geométrico, dando enfoque em seus elementos, superfícies e volume, nesse último podemos e devemos falar sobre o Princípio de Cavalieri, vale ainda destacar que todos esses assuntos aqui citados fazem parte do Currículo apresentado pela BNCC e pelos demais documentos que orientam os professores de matemática do ensino médio.

- (ii) Podemos ainda pensar em trabalhar com os alunos o resultado desta pesquisa, apesar de ser uma função um pouco mais delicada, nada impede que possamos discuti-la com os alunos da segunda ou terceira série do ensino médio, e nesse caso podemos fazer da seguinte forma: A seguir a função resultado do nosso trabalho:

$$A(h) = \begin{cases} R^2 \arcsen \left(\frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R} \right) + (h-R)\sqrt{R^2 - (R-h)^2}, & 0 \leq h \leq R \\ R^2 \left[\pi - \arcsen \left(\frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R} \right) \right] + (h-R)\sqrt{R^2 - (h-R)^2}, & R \leq h \leq 2R \end{cases}$$

onde $A(h)$ é a área do círculo dado em função do raio R e da altura h , e o volume $V(h)$ é dada pela expressão

$$V(h) = cA(h), 0 \leq h \leq 2R,$$

sendo h a altura do tanque de combustível em formato cilíndrico.

O que desejamos mostrar aqui, é que esse resultado pode ser trabalhado com os alunos do ensino médio, não pedindo que demonstrem tal resultado nem teorizar tal resultado, mas sim apresentar o problema resolvido, como apresentado acima, e trabalhar com os alunos lhes dando o valor do raio R da circunferência e a altura da altura h da circunferência, cobrando apenas o cálculo dos valores e no máximo pedindo que calculem a altura do cilindro, que no caso deve ser constante. A aplicação de tais resultados no ensino médio pode ser claramente justificada quando lançamos mão do mesmo Documento Curricular para Goiás, que no segundo bimestre da segunda série aparece, como que segue:

- HABILIDADES DA BNCC:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros)

e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

- OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DO DC-GOEM:

(GO-EMMAT306A) Registrar, em listas, tabelas e outras informações contidas em situações problemas, mídias (internet, livros ou revistas) que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos etc.) identificando as características gráficas das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), para justificar os procedimentos utilizados nas soluções.

(GO-EMMAT306B) Interpretar registros, dados e informações em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, comparando suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria para resolver problemas de natureza trigonométrica.

(GO-EMMAT306C) Resolver problemas cotidianos que envolvem fenômenos periódicos reais, utilizando procedimentos matemáticos diversos para construir modelos de funções senos e cossenos e representá-las no plano cartesiano.

- OBJETOS DE CONHECIMENTO DO DC-GOEM

Trigonometria no triângulo retângulo (principais razões trigonométricas); Trigonometria no ciclo trigonométrico Unidades de medidas de ângulos (radianos); Funções trigonométricas (função seno e função cosseno). Como podemos observar no documento acima, o estudo das funções trigonométricas é objeto de estudo do segundo bimestre da segunda série do ensino médio, logo podemos concluir a aplicação do resultado da nossa pesquisa vem de encontro como uma aplicação ao conteúdo a ser trabalhado, justificando assim tudo que foi colocado anteriormente sobre a possibilidade de aplicação da pesquisa aqui desenvolvida no ensino de matemática em algumas séries do ensino básico.

Considerações finais

Levando em consideração todas as pesquisas feitas para a elaboração desse trabalho, podemos chegar a algumas conclusões; dentre elas podemos destacar, por exemplo, o fato de darmos uma relevância a alguns dos maiores matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria e do Cálculo Diferencial e Integral, como Euclides (na Geometria), Newton, Leibniz e Riemann (no Cálculo Diferencial e Integral). Além disso, a Geometria e o Cálculo contribuem na modelagem de problemas do cotidiano, trazendo para os alunos uma aplicação da matemática, deixando as aulas mais atrativas para os discentes do ensino médio, bem como o ensino da Geometria. Ainda, não é apenas uma aplicação da matemática em problemas reais, mas também se verifica que na matemática existem várias formas de resolver o mesmo problema. Para construir uma régua medidora para aferir a quantidade de combustível que há no tanque, podemos utilizar a geometria euclidiana, as integrais múltiplas ou as integrais de linha. Nesse trabalho, utilizamos duas disciplinas de grande importância ministradas no decorrer do curso (Geometria e Cálculo) e, através do problema apresentado, utilizar os conceitos trabalhados nessas disciplinas para resolvê-lo.

Ao término desse trabalho, esperamos ter correspondido às expectativas inicialmente colocadas sobre o resultado esperado no início das pesquisas. Esperamos, também, que esse trabalho possa servir de inspiração para outros estudantes, bem como que esse trabalho possa ser usado por professores da educação básica para elaboração de suas aulas. Aproveitamos, como dito na introdução, para agradecer o professor Miguel Camargo pela inspiração que nos motivou a esta pesquisa, e em uma possível oportunidade futura, esperamos poder pesquisar ainda mais a respeito das possíveis aplicações a partir do estudo de Geometria, Cálculo Diferencial e Integral ou outras áreas de matemática.

Referências Bibliográficas

- Alencar, H. e Santos, W. (2002). *Geometria das curvas planas*. Universidade Federal de Goiás, Goiânia.
- Ávila, G. (2011). *Cálculo das funções de uma variável*. LTC, Rio de Janeiro.
- Carmago, M. A. (2009). A geometria do posto de combustíveis. *Notas de Palestra*, páginas 1–17.
- Carmo, M. P., Morgado, A. C., e Wagner, E. (1992). *Trigonometria: Números Complexos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Delgado, J., Frensel, K., e Crissaff, L. (2013). *Geometria analítica: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Dolce, O. e Pompeo, J. N. (2005). *Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica*. Atual.
- Dolce, O. e Pompeo, J. N. (2013). *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana*. Atual.
- Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática*. Ed. Unicamp, Campinas, SP.
- Guidorizzi, L. H. (2001). *Um Curso de Cálculo, vol. 2*. LTC, Rio de Janeiro.
- Guidorizzi, L. H. (2002). *Um Curso de Cálculo, vol. 3*. LTC, Rio de Janeiro.
- Guidorizzi, L. H. (2008). *Um Curso de Cálculo, vol. 1*. LTC, Rio de Janeiro.
- Luís, J. (2022). Tabela para medição de tanque subterrâneos. Disponível em: <https://www.joaoluisemeirecomercial.com/p/catalogos-de-filtros.html> Acesso em: 25 mai. 2022.

- Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Muniz Neto, A. C. (2015). *Fundamentos de Cálculo: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Reis, G. L. e Silva, V. V. (1997). *Geometria Analítica Segunda edição*. Livros Técnicos e Científicos Editora.
- SEE-GO (2021). Documento Curricular para Goiás: Etapa Ensino Médio. Disponível em: <https://site.educacao.go.gov.br/files/documento-curricular-de-goias-para-ensino-medio.pdf>. Acesso em: 14 mar. 2022.
- Silva, L. P. M. (2022). Princípio de Cavalieri. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm> Acesso em: 28 mai. 2022.
- Simmons, G. F. (1988). *Cálculo com Geometria Analítica*. Ed. Pearson Makron Books, São Paulo.