

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

SANDRO LUIZ ROSA ABLE

**A GEOMETRIA FRACTAL NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM-  
AVALIAÇÃO DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

PATO BRANCO

2021

**SANDRO LUIZ ROSA ABLE**

**A GEOMETRIA FRACTAL NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM-  
AVALIAÇÃO DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

**The fractal geometry in the teaching-learning-assessment process of  
Geometric Probability**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adilson da Silveira.

**PATO BRANCO**

**2021**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es).

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Campus Pato Branco**



SANDRO LUIZ ROSA ABLE

**A GEOMETRIA FRACTAL NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE  
PROBABILIDADE GEOMÉTRICA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 03 de Dezembro de 2021

Prof Adilson Da Silveira, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Carlos Alexandre Ribeiro Martins, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Silvana Matucheski, Doutorado - Instituto Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 03/12/2021.

À Deus, minha família e ao meu orientador Dr.  
Adilson da Silveira.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, quero agradecer a Deus, por me permitir realizar esse sonho, me dando coragem para iniciar e sabedoria e resiliência para concluir.

Agradeço imensamente ao meu orientador pela confiança, pela paciência e por toda a atenção dedicada.

A minha mãe Eva, por sempre estar ao meu lado e me incentivar não somente através de palavras, mas também por meio de exemplos.

A minha irmã Bruna, por estar sempre do meu lado, mesmo nos momentos mais difíceis. Sei que posso contar sempre com você.

À minha amada companheira Emilly e meu maravilhoso filho Isaac, serei eternamente grato pelo incentivo, apoio, paciência e por todo o amor.

A instituição UTFPR, ao programa do PROFMAT e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela oportunidade da realização desse sonho.

Aos meus colegas de turma, por todo o companheirismo e, em especial a todos os professores por toda a dedicação e comprometimento ao dividir seus conhecimentos.

A todos àqueles que me incentivaram e me apoiaram de alguma maneira.

Em especial, agradeço e dedico esse trabalho ao meu falecido pai, Artemar, que sempre foi um grande exemplo de homem, honesto e batalhador e que sempre acreditou em mim e, certamente, estaria muito orgulhoso por essa conquista.

Muito obrigado!

## RESUMO

Após uma revisão de literatura em portais de periódicos como o da CAPES, e em diversos sites de programas de pós-graduação, sobre o tema Probabilidade Geométrica, verificou-se que em trinta e oito anos, trinta e três trabalhos foram publicados, entre dissertações, monografias, artigos científicos, minicursos e oficinas. Cabe ressaltar que vinte quatro desses trabalhos foram revisados por Ritter e Bulegon (2016), e apresentados em seu artigo: Uma revisão de literatura sobre estudos relativos à Probabilidade Geométrica. Nele as autoras mapearam os trabalhos publicados de 1982 a 2016. Outros nove trabalhos foram localizados por meio de uma busca realizada para a elaboração desta pesquisa, buscando por publicações de 2017 a 2020. De todos esses trabalhos encontrados, somente dois apresentam os temas Probabilidade Geométrica e Fractais. Diante disso, aliado ao fato de que o conceito de Probabilidade Geométrica não está presente na grande maioria dos livros didáticos, e considerando também a necessidade da instrumentalização da prática do professor de Matemática e da adequação da mesma à BNCC, apresenta-se nesse trabalho uma sequência de ensino de Probabilidade Geométrica para o ensino médio por meio de resultados gerados da Geometria Fractal. Utiliza-se como referência metodológica para a construção da sequência a teoria dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990). As atividades sugeridas também levam em consideração o conceito de Materiais Didáticos Manipuláveis para a construção dos Fractais. A sequência de ensino apresentada nesse trabalho aborda tanto situações bidimensionais, quanto tridimensionais, visto que os resultados usados para trabalhar o conceito de Probabilidade Geométrica são gerados da construção de uma representação do Triângulo de Sierpinski, que é um fractal bidimensional, e do cálculo de sua área, e da construção de uma representação da Esponja de Menger, que é um fractal tridimensional, e do cálculo do seu volume. Essa pesquisa é teórica, de natureza exploratória bibliográfica, sobre o tema específico de Probabilidade Geométrica envolvendo elementos da Geometria Fractal. Os fundamentos para a realização da pesquisa se deram por meio do estudo de publicações sobre os assuntos considerados. A sequência de ensino não foi aplicada e, portanto, sua eficiência no processo de ensino-aprendizagem-avaliação não foi verificada, ficando a aplicação da mesma como sugestão para trabalhos futuros.

Palavras-chave: ensino de probabilidade; probabilidade geométrica; geometria fractal; Sequência de ensino.

## ABSTRACT

After a review of the literature on journal portals such as CAPES, and on several postgraduate program websites about the Geometric Probability theme, in thirty-eight years only thirty-three works had published, including dissertations, monographs, scientific articles, short courses and workshops. It is noteworthy that twenty-four of these works had located by Ritter and Bulegon (2016), presented in their article: "A literature Review on studies concerning the likelihood Geometric". In it, the authors mapped the works published from 1982 to 2016. Another nine works were located through a search carried out for the preparation of this research, looking for publications from 2017 to 2020. Of all these works found, only two present the themes Geometric and Fractal Probability. In Addition, related to the fact of the Geometric Probability concept is not presenting in the most of the textbooks, also considering the necessity of promote the practice of the Mathematics' teacher and the adequacy to BNCC (Base Nacional Comum Curricular), this work presents a sequence of teaching-learning-assessment of Geometric Probability for high school through results generated from Fractal Geometry. The theory of the Three Pedagogical Moments by Delizoicov and Angotti (1990) it is used as a methodological reference for the construction of the sequence. The suggested activities also take into account the concept of Manipulable Materials for the construction of Fractals. The teaching-learning-assessment sequence presented in this work addresses both two-dimensional and three-dimensional situations, since the results used to work the concept of Geometric Probability are generated from the construction and calculation of the area of the Sierpinski Triangle, which is a two-dimensional fractal, and the construction and calculation of the volume of the Menger Sponge, which is a three-dimensional fractal. This research is theoretical, of bibliographical exploratory nature, on the specific theme of Geometric Probability involving elements of Fractal Geometry. The foundations for conducting the research were given through the study of publications on the subjects considered. The teaching-learning-assessment sequence was not applied and, therefore, its efficiency in the teaching-learning process was not verified, leaving its application as a suggestion for future work.

Keywords: probability teaching; geometric probability; fractal geometry; teaching sequence.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Nível zero do Triângulo de Sierpinski.....	19
Figura 2 - Nível um do Triângulo de Sierpinski.....	20
Figura 3 - Nível dois do Triângulo de Sierpinski.....	20
Figura 4 - Níveis três e quatro do Triângulo de Sierpinski.....	20
Figura 5 - Nível zero do Tapete de Sierpinski.....	22
Figura 6 - Divisão do nível zero do Tapete de Sierpinski em nove quadrados congruentes.....	22
Figura 7 - Nível um do Tapete de Sierpinski.....	23
Figura 8 - Nível dois do Tapete de Sierpinski.....	23
Figura 9 - Níveis três e quatro do Tapete de Sierpinski.....	23
Figura 10 - Nível zero da Esponja de Menger.....	25
Figura 11 - Divisão do nível zero da Esponja de Menger.....	25
Figura 12 - Nível um da Esponja de Menger.....	26
Figura 13 - Nível dois da Esponja de Menger.....	26
Figura 14 - Intersecção de dois eventos.....	32
Figura 15 - Eventos mutuamente excludentes.....	32
Figura 16 - Eventos complementares, $A$ e $\bar{A}$ , de um espaço amostral $S$ .....	34
Figura 17 – Diagrama 1 para o exemplo 3 - probabilidade condicional.....	37
Figura 18 – Diagrama 2 para o exemplo 3 - probabilidade condicional.....	37
Figura 19 - Probabilidade Geométrica envolvendo segmentos.....	40
Figura 20 - Probabilidade Geométrica envolvendo áreas.....	41
Figura 21 - Probabilidade Geométrica envolvendo volumes.....	41
Figura 22 - Problema de Probabilidade Geométrica - Recorte de livro didático 01 ...	43
Figura 23 - Problema de Probabilidade Geométrica - Recorte de livro didático 02 ...	44
Figura 24 - Jogo de dardos.....	50
Figura 25 - Região de menor probabilidade no jogo de dardos.....	51
Figura 26 - Probabilidade de um ponto pertencer a um segmento.....	51
Figura 27 - Passo um da construção do Triângulo de Sierpinski.....	52
Figura 28 - Passo dois da construção do Triângulo de Sierpinski.....	53
Figura 29 - Passo três da construção do Triângulo de Sierpinski.....	53
Figura 30 - Passo quatro da construção do Triângulo de Sierpinski.....	54

Figura 31 - Passo cinco da construção do Triângulo de Sierpinski.....	54
Figura 32 - Passo seis da construção do Triângulo de Sierpinski.....	55
Figura 33 - Passo sete da construção do Triângulo de Sierpinski.....	55
Figura 34 - Passo oito da construção do Triângulo de Sierpinski.....	56
Figura 35 - Questão AFA 1993.....	61
Figura 36 - Questão UERG 2011. ....	62
Figura 37 - Caso favorável ao jogador. ....	63
Figura 38- Casos favoráveis à escola. ....	63
Figura 39 – Disco totalmente contido no quadrado.....	64
Figura 40 - Quadrados simetricamente dispostos.....	64
Figura 41 - Cubo contido no paralelepípedo. ....	66
Figura 42 - Passo um da construção do cubo Sonobe.....	68
Figura 43 - Passo dois da construção do cubo Sonobe.....	68
Figura 44 - Passo três da construção do cubo Sonobe.....	69
Figura 45 - Passo quatro da construção do cubo Sonobe. ....	69
Figura 46 - Passo cinco da construção do cubo Sonobe. ....	70
Figura 47 - Passo seis da construção do cubo Sonobe. ....	70
Figura 48 - Passo sete da construção do cubo Sonobe.....	71
Figura 49 - Passo oito da construção do cubo Sonobe.....	71
Figura 50 - Passo dez da construção do cubo Sonobe.....	72
Figura 51 - Foto do encaixe entre as peças para confecção do cubo Sonobe.....	72
Figura 52 - Cubo Sonobe.....	73
Figura 53 - Construção do nível um da Esponja de Menger. ....	73
Figura 54 - Esfera inscrita no cubo.....	76
Figura 55 - Cobertura de sinal das antenas. ....	78
Figura 56 – Cobertura das antenas – resolução do exercício. ....	79
Figura 57 - Jogo da roleta. ....	79
Figura 58 - Cubo contido em outro cubo. ....	80
Figura 59 - Esfera inscrita no cilindro. ....	81

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>2 GEOMETRICA FRACTAL</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1 Introdução à geometria fractal</b> .....	<b>17</b>
<b>2.2 Triângulo de Sierpinski</b> .....	<b>19</b>
2.2.1 Cálculo da área do Triângulo de Sierpinski .....	21
<b>2.3 Tapete de Sierpinski</b> .....	<b>22</b>
2.3.1 Cálculo da área do Tapete de Sierpinski .....	24
<b>2.4 Esponja de Menger</b> .....	<b>25</b>
2.4.1 Cálculo do volume da Esponja de Menger .....	26
<b>3 PROBABILIDADE - CONCEITOS</b> .....	<b>29</b>
<b>3.1 Experimentos aleatórios, espaço amostral e evento</b> .....	<b>29</b>
<b>3.2 Probabilidade clássica</b> .....	<b>32</b>
<b>3.3 Probabilidade da união de dois eventos</b> .....	<b>35</b>
<b>3.4 Probabilidade condicional</b> .....	<b>36</b>
<b>3.5 Eventos independentes</b> .....	<b>39</b>
<b>3.6 Probabilidade geométrica</b> .....	<b>40</b>
<b>4 SEQUÊNCIA DE ENSINO EM PROBABILIDADE GEOMÉTRICA</b> .....	<b>46</b>
<b>4.1 Conceitos introdutórios</b> .....	<b>46</b>
<b>4.2 Probabilidade geométrica e o triângulo de Sierpinski</b> .....	<b>49</b>
4.2.1 Problematização inicial.....	49
4.2.2 Organização do conhecimento .....	51
<b>4.3 Probabilidade geométrica e a esponja de Menger</b> .....	<b>66</b>
4.3.1 Problematização inicial.....	66
4.3.2 Organização do conhecimento .....	67
<b>4.4 Aplicação do conhecimento</b> .....	<b>77</b>
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	<b>82</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>83</b>
<b>APÊNDICE A – Periódicos consultados</b> .....	<b>87</b>
<b>APÊNDICE B - Programas de pós graduação consultados</b> .....	<b>92</b>

<b>APÊNDICE C – Trabalhos sobre Probabilidade Geométrica .....</b>	<b>98</b>
<b>APÊNDICE D – Triângulo equilátero .....</b>	<b>102</b>
<b>APÊNDICE E – Nível dois do Triângulo de Sierpinski.....</b>	<b>104</b>
<b>APÊNDICE F – Construção dos cubos Sonobe.....</b>	<b>106</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Diversas situações do nosso cotidiano podem nos colocar diante de cenários de incerteza, onde é necessário ponderar sobre as chances de que um determinado evento ocorra, ou seja, buscar a probabilidade de que determinada situação aconteça neste fenômeno, visto que os resultados não podem ser previstos, como, por exemplo, quando se deseja saber a probabilidade de ganhar na loteria, de ser aprovado em um vestibular ou um concurso público.

Em um contexto mais avançado, buscar o cálculo da probabilidade aparece, por exemplo, na Estatística Inferencial, em situações onde as ferramentas da probabilidade auxiliam na tomada de decisões diante das chances de uma determinada situação ocorrer.

No Ensino Médio os exemplos trabalhados tratam basicamente do cálculo de probabilidades que envolvem situações nas quais os espaços amostrais são discretos, que são àqueles que podem ser representados por conjuntos finitos ou infinitos de resultados contáveis, como no clássico cálculo da probabilidade de se obter um determinado resultado no lançamento de um dado, ou de uma moeda, exemplos esses comumente apresentados nos livros didáticos.

No entanto, para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é imprescindível que o estudante seja capaz de “reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades”. (BRASIL, 2018, p. 533).

Sendo assim, objetivando promover uma abordagem mais completa no ensino de probabilidade e que possibilite ao estudante um melhor aprendizado, deve-se relacioná-la a outros conteúdos.

Nesse sentido, se torna importante também a abordagem de situações onde se possa ponderar sobre espaços amostrais contínuos, como nos cálculos de probabilidades que envolvem medidas geométricas, como: comprimento, área e volume.

Utilizando questões de probabilidade que utilizam elementos de natureza geométrica torna-se possível trabalhar o conceito de probabilidade em espaços amostrais contínuos, onde os acontecimentos podem ser descritos por retas, figuras

planas ou sólidos geométricos, e nos quais o número de acontecimentos não é contável ou enumerável no sentido matemático.

As afirmações contidas em Lopes; Salvador; Balieiro Filho (2013), indicam que por meio de problemas de Probabilidade Geométrica é possível introduzir o conceito de probabilidade em espaços contínuos, onde os possíveis acontecimentos podem ser descritos por retas, por figuras planas e mesmo por sólidos, situações em que o número de acontecimentos geralmente é não contável.

De acordo com Freitas (2009), a Probabilidade Geométrica faz uso dos conceitos geométricos que os estudantes trabalham desde o Ensino Fundamental para desenvolver o conceito de probabilidade.

No entanto, o tema Probabilidade Geométrica geralmente não é contemplado pelos livros didáticos. Lestch (2021) analisou as dez coleções de livros didáticos aprovados no PNLD 2021 e que serão distribuídos às escolas públicas da rede de ensino brasileira em 2022 e não encontrou este tema contemplado em nenhuma coleção, confirmado o que foi dito sobre a necessidade de complementação dos textos utilizados no processo didático, no que se refere ao ensino de probabilidade considerando a interpretação geométrica.

Ainda em relação a esse aspecto, em Lima (2001) encontra-se a análise de um total de doze coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio no Brasil, e apenas um deles continha o assunto de Probabilidade Geométrica.

Em relação às publicações em Probabilidade Geométrica, o artigo de Ritter e Bulegon (2016) “Uma revisão de literatura sobre estudos relativos à Probabilidade Geométrica”, apresenta trabalhos sobre esse tema, publicados no período de 1982 a 2016: onze dissertações, uma monografia, oito artigos científicos, dois minicursos e duas oficinas, totalizando vinte quatro trabalhos em trinta e quatro anos.

Segundo as autoras, essa revisão de literatura teve como objetivo mapear os trabalhos que abordavam o tema Probabilidade Geométrica e identificar suas abordagens, bem como os recursos utilizados e as atividades propostas. As autoras explicam que buscaram pelo tema em periódicos, monografias e dissertações, selecionando os trabalhos primeiramente pela presença no título das palavras-chave Probabilidade e/ou Jogo dos discos e, na sequência, selecionando àqueles que tratavam de Probabilidade Geométrica. Concluíram que ainda há muitas possibilidades de pesquisa sobre o ensino de Probabilidade Geométrica e que o número de publicações sobre o tema é baixo.

Com o objetivo de localizar possíveis publicações sobre Probabilidade Geométrica após o período de busca utilizado na revisão de literatura mencionada, nesse trabalho também foi realizada uma busca por publicações sobre o tema nos em periódicos e sites de programas de pós, porém no período de 2017 a 2020.

Para essa pesquisa, além dos programas de pós-graduação utilizados por Ritter e Bulegon (2016), também foram utilizados outros programas de pós-graduação e portal de periódicos: UEL, UEM e UNESP de Bauru (Educação para a Ciência), Zetetike, UNESP de Rio Claro, Unicamp e USP.

Todos os periódicos e programas de pós-graduação consultados estão descritos nos Apêndices A e B.

Nessa busca foram utilizados critérios semelhantes aos de Ritter e Bulegon (2016), diferindo na escolha das palavras-chave do título, pois além das palavras Probabilidade e/ou Jogo dos discos, também foram adicionadas as palavras Probabilidade Geométrica, buscando assim ampliar as possibilidades de resultados diante do menor intervalo de tempo.

A partir dessa busca encontrou-se mais nove resultados, sendo oito dissertações e um artigo, os quais estão descritos no Apêndice C. Cabe que o objetivo dessa revisão de literatura foi localizar e descrever os trabalhos encontrados e não garante que são todas as publicações existentes sobre o tema nesse período, mas sim, os encontrados de acordo com as características de pesquisas utilizadas.

Desse número de trabalhos, tanto do mapeamento realizado por Ritter e Bulegon (2016), quanto da busca realizada posteriormente nesta pesquisa, somente dois trabalhos abordam o tema Probabilidade Geométrica e Fractais - um artigo científico e uma dissertação, respectivamente: “O ensino de Probabilidade Geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas” (FILHO, SALVADOR, 2013) e “Probabilidade Geométrica: uma abordagem através do método de Monte Carlo e Geometria Fractal” (CAVALCANTE, 2017).

Um outro aspecto que pode-se observar é de que olhando a nossa volta percebe-se que há na natureza uma geometria que não pode ser explicada apenas através do emprego dos elementos da geometria euclidiana clássica, àquela que trata de pontos, retas, planos e da combinação desses elementos formando segmentos de reta, polígonos, círculos e formas geométricas como os sólidos.

Segundo Barbosa (2005), a partir da observação da natureza onde as formas parecem caóticas, sem padronização, regidas por uma geometria onde predomina a

irregularidade e se tenta buscar padrões onde aparentemente não há, é que surge a denominada Geometria Fractal. Essa geometria oferece métodos para descrever as formas naturais, como o curso de rios, formações vegetais, nuvens, entre outras.

Ainda de acordo com Barbosa (2005), o uso da Geometria Fractal também permite proporcionar a sensação de surpresa ao perceber ordem na desordem, destacar o belo e promover o senso estético, além de possibilitar a difusão ao acesso a computadores e tecnologias da informação nos diversos níveis de ensino.

Como professor de Matemática no Ensino Médio há dez anos, percebi a pouca ou nenhuma abordagem do tema Probabilidade Geométrica nos livros didáticos e, diante das possibilidades elencadas por Barbosa (2005) relacionadas as potencialidades da Geometria Fractal, aliado ao fato que foram localizadas, nas revisões de literatura mencionadas, somente duas publicações relacionando esses dois temas, optei por elaborar uma sequência de ensino de Probabilidade Geométrica para o Ensino Médio por meio de resultados gerados de figuras da Geometria Fractal.

Coloca-se então a questão norteadora dessa pesquisa: quais elementos devem estar presentes em uma sequência de ensino-aprendizagem-avaliação de Probabilidade Geométrica para o Ensino Médio, a partir de elementos gerados da Geometria Fractal?

Para esse trabalho, deve-se considerar a expressão 'ensino-aprendizagem-avaliação' como sendo o processo de aplicação da sequência de ensino apresentada para o ensino-aprendizagem do tema Probabilidade Geométrica e, na sequência, a verificação da aprendizagem dos estudantes em relação a esse tema.

Utiliza-se como referência metodológica para a construção da sequência de ensino a teoria dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990), a qual estabelece que a aplicação de uma sequência de ensino deve ser estabelecida em três momentos, a saber: 1° - Problematização Inicial; 2° - Organização do Conhecimento e 3° - Aplicação do Conhecimento.

A concepção geral desta teoria busca a descrição precisa dos procedimentos relativos a cada momento da sequência de ensino desenvolvida, apresentados no capítulo 4.

Para justificar essa pesquisa aponta-se: somente duas publicações encontradas que relacionam a Geometria Fractal e o tema Probabilidade Geométrica e nenhuma delas é uma sequência de ensino, aliado a ausência do tema

Probabilidade Geométrica nos livros didáticos e a necessidade da instrumentalização da prática do professor de Matemática e da adequação da mesma à BNCC.

Transferir todas essas percepções, constatações e conceitos para o ato didático se constitui em um desafio matemático e metodológico para o professor. A necessidade de se instrumentalizar a sua prática impõe que o processo de apresentação, discussão, conceituação e verificação da aprendizagem sejam claros e organizados. Para tal, como já apontado, pode-se sugerir uma sequência de ensino, observando que esta seja clara, objetiva e precisa, desde a exposição do conteúdo até a verificação da aprendizagem.

Cabe ressaltar que na elaboração da sequência de ensino também foi considerado o conceito de Materiais Didáticos Manipuláveis, buscando desenvolver aspectos lúdicos e um ensino-aprendizagem mais prazeroso.

Essa pesquisa é teórica, de natureza exploratória bibliográfica, sobre o tema específico de Probabilidade Geométrica envolvendo elementos da Geometria Fractal.

Os fundamentos para a realização desse trabalho deram-se pelo estudo de publicações sobre o assunto e, como já pontuado, considerando a teoria dos três momentos pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990), a qual fundamenta a base metodológica dos momentos na elaboração e aplicação da sequência para o ensino-aprendizagem-avaliação de Probabilidade Geométrica.

O capítulo 2, trata da Geometria Fractal, bem como da apresentação dos processos de obtenção do Triângulo de Sierpinski e do Tapete de Sierpinski com seus cálculos de áreas e da construção da Esponja de Menger e o processo para calcular seu volume.

Seguindo, no capítulo 3 do trabalho, apresenta-se a definição de Probabilidade Clássica e também de Probabilidade Geométrica, os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento, além do cálculo de probabilidade.

A principal contribuição dessa pesquisa, que é a sequência de ensino, descrita anteriormente, é apresentada no capítulo 4, onde se inicia descrevendo a estrutura da sequência de ensino por meio da teoria dos três momentos pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990) e uma breve abordagem sobre o uso de Materiais Didáticos Manipuláveis, até a descrição da estrutura completa da sequência contendo as atividades e questões sugeridas para cada um dos seus momentos.

Por fim, apresentam-se as considerações finais e conclusões do trabalho, deixando-se indicação de trabalhos futuros e, também, a lista completa contendo as referências utilizadas.

## 2 GEOMETRICA FRACTAL

### 2.1 Introdução à geometria fractal

Observando a natureza ao nosso redor, percebe-se que a mesma manifesta, segundo Barbosa (2005), uma geometria própria, que não pode ser descrita apenas pelos elementos geométricos e propriedades estudadas em sala de aula, por meio da geometria euclidiana clássica. Os rios, as nuvens, rochas, plantas e animais, por exemplo, se apresentam com uma estrutura de contornos e formas irregulares, de uma maneira que remete a desordem, ao caos.

A geometria euclidiana clássica, com seus elementos - pontos, retas e planos - é capaz de descrever as formas criadas pelo homem, como prédios, estradas, casas, pontes, entre outras, porém não é capaz de tratar da natureza caótica e seus elementos.

Segundo Barbosa (2005), nas últimas décadas a ciência conhecida como CAOS, vem tentando dar ordem à desordem, procurando regularidades no que parece irregular. Nessa ciência, temas como turbulência nos fluidos, oscilações do coração e cérebro, ramificações alveolares, entre outras foram estudados de maneira a buscar ligações entre os diferentes tipos de irregularidades, e que curiosamente ordens no caos foram descobertas.

Barbosa (2005) explica ainda que intimamente ligada a essa ciência temos a chamada geometria dos fractais, que tenta buscar padrões em situações aparentemente caóticas, cujas ferramentas e elementos foram insubstituíveis para muitos cientistas do caos e, que em particular, a Geometria Fractal revolucionou a geração de imagens.

O termo fractal surgiu em 1975 com seu precursor Mandelbrot (1924 - 2010): “[...] Mandelbrot as denominou fractais, baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa *quebrar*, criar fragmentos irregulares, fragmentar.” (BARBOSA, 2005, p.1).

Paula e Souza (2017), afirmam que por ser difícil a conversão para a linguagem ordinária, não existe uma definição formal para fractal, de consenso geral. Porém, os fractais apresentam algumas características particulares, das quais a que mais chama

a atenção é a semelhança de cada uma de suas partes com o todo, ou seja, a autossimilaridade e, para Barbosa (2005), essa característica é suficiente para a abordagem em sala de aula.

De acordo com Barbosa (2005), os fractais vêm sendo estudados em diversas áreas, como economia e medicina, buscando respostas a problemas de natureza aparentemente irregular e comenta que Mandelbrot, durante um trabalho que realizou na IBM - Centro de Pesquisas Thomas Watson, utilizou de um antigo trabalho de Georg Cantor, conhecido como Poeira de Cantor, para resolver um problema de ruídos que interferiam nos sinais nas linhas telefônicas em rede entre os computadores, e que devido à aleatoriedade que apresentavam não teriam sido eliminados pelos engenheiros.

A matemática pode propiciar diversas atividades agradáveis, como por exemplo, a satisfação no sucesso ao se resolver uma equação ou uma situação-problema envolvendo, por exemplo, geometria.

Barbosa (2005) comenta que algumas áreas da Matemática, como a Geometria, permitem observações prazerosas, assim como ocorre ao observar os aspectos harmoniosos ou contrastantes na arte, na arquitetura ou mesmo na própria natureza. E que um exemplo é na visualização de simetrias, conceito muito importante na Filosofia da Arte e na Estética.

Diversos temas da geometria, como proporção áurea ou número de ouro comumente são abordados, ou pelo menos deveriam ser, em sala de aula, evidenciando o belo, a simetria e a harmonia, desenvolvendo o senso estético nos estudantes, seja através do que é belo, ou da observação dos padrões regulares naquilo que parece irregular.

Para Barbosa (2005), muitos temas são áridos ou desinteressantes, e poucos são os temas da Matemática que permitem ver e sentir o belo, como ocorre com os fractais.

Para Barbosa (2005), o estudo dos fractais permite fazer conexões com outras ciências, como a Biologia e a Ciência da Computação, além de preencher algumas lacunas da Geometria Euclidiana no que diz respeito ao estudo das formas naturais, promover a sensação de surpresa da ordem presente na desordem, evidenciar o belo e desenvolver o senso estético, além de incentivar o acesso a computadores e tecnologias da informação nos diversos níveis de escolaridade.

De acordo com Paula e Souza (2017), através do estudo dos fractais é possível desenvolver diversos conteúdos como:

contagem, perímetros, áreas, volumes, relações entre figuras geométricas, estudo entre relações de grandezas, exponenciais, logaritmos, sequências, figuras tridimensionais, funções, limites, podem analisar algoritmos e progressão aritmética e geométrica, entre outros. (PAULA E SOUZA, 2017, p. 138).

Devido as grandes potencialidades evidenciadas, aliado a realidade do baixo número de publicações correlacionando os temas Fractais e Probabilidade Geométrica, a Geometria Fractal foi escolhida como elemento mediador para o ensino de Probabilidade Geométrica na sequência de ensino elaborada neste trabalho.

Nesse capítulo ainda serão apresentadas as etapas de construção de três fractais: o Triângulo de Sierpinski, o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger. Também serão desenvolvidos os cálculos das áreas dos dois primeiros e o cálculo de volume do último.

A seguir explica-se o processo de construção e o cálculo de área do fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski.

## 2.2 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski foi descrito em 1915 por Waclaw Sierpinski (1882 – 1969), e o processo de construção se dá como limite de um processo iterativo. De acordo com Barbosa (2005), para obtermos esse fractal podemos seguir as etapas de construção a seguir:

1 - Considerar inicialmente um triângulo equilátero;

Figura 1 - Nível zero do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

2 - Marcar os segmentos que unem os pontos médios dos lados do triângulo, formando 4 triângulos equiláteros;

3 - Eliminar o triângulo do centro;

Figura 2 - Nível um do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

4 – Repetir as construções 2 e 3 em cada um dos triângulos não eliminados.

Figura 3 - Nível dois do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

5 – Repetir a operação 4 sucessivamente.

A seguir, mostra-se o resultado da operação 5 repetida mais duas vezes.

Figura 4 - Níveis três e quatro do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

O resultado da etapa cinco aplicada sucessivamente gera, no limite do processo, o Triângulo de Sierpinski.

### 2.2.1 Cálculo da área do Triângulo de Sierpinski

Sabe-se que a área  $S$  de um triângulo equilátero pode ser obtida em função do comprimento de seu lado  $l$  e expressa pela relação  $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ . Sendo assim, como o triângulo inicial (nível 0) do processo é equilátero e considerando que cada um de seus lados mede uma unidade de comprimento ( $l = 1$  u.c.), sua área é de  $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$  u.a. (unidades de área).

No passo três, elimina-se o triângulo central, que tem área igual a  $1/4$  da área inicial  $S_0$ . Então, a área restante  $S_1$  é igual a  $3/4$  de  $S_0$ , ou seja,  $S_1 = \left(\frac{3}{4}\right)S_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ .

Após a etapa quatro, restam nove triângulos congruentes (nível 2), que juntos somam  $9/16$  da área inicial. Logo, sendo  $S_2$  o valor da área nesse nível, tem-se  $S_2 = \left(\frac{9}{16}\right)S_0 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{64}\right)$ .

Seguindo essa mesma ideia pode-se obter os valores das áreas em cada triângulo da sequência. Pode-se escrever  $S_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^0 S_0$ ,  $S_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^1 S_0$ ,  $S_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 S_0$ , e assim por diante, induzindo que a área total do triângulo no nível  $n$  é  $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n S_0$ .

O quadro abaixo resume o processo do cálculo da área do Triângulo de Sierpinski até o nível  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ :

Quadro 1 - Área do Triângulo de Sierpinski.

Nível	Quantidade de triângulos retirados	Área de cada triângulo retirado (u.a.)	Quantidade de triângulos restante	Área de cada triângulo restante (u.a.)	Área total (u.a.)
0	0	-	1	$S_0$	$S_0$
1	1	$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot S_0$	3	$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot S_0$	$\left(\frac{3}{4}\right) \cdot S_0$
2	3	$\left(\frac{1}{16}\right) \cdot S_0$	9	$\left(\frac{1}{16}\right) \cdot S_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S_0$
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
$n$	$\begin{cases} 3^{n-1}, & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \end{cases}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot S_0$	$3^n$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot S_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S_0$

Fonte: Autoria própria (2021).

Tem-se que a área total fica  $3/4$  menor a cada nível, e assim, como  $0 < 3/4 < 1$ , no limite do processo a área tende a zero, ou seja, é dada por  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S_0 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 = 0$ .

O Quadro 1, será utilizada no capítulo 4, como ferramenta auxiliar na resolução de atividades que irão compor parte da sequência de ensino sobre Probabilidade Geométrica, em particular, nas atividades que envolvem o conceito de área.

O fractal apresentado na sequência é o tapete de Sierpinski.

### 2.3 Tapete de Sierpinski

De acordo com Barbosa (2005), pode-se utilizar a mesma técnica de remoção da construção do Triângulo de Sierpinski para se obter o Tapete de Sierpinski. Detalha-se a seguir cada etapa desse processo:

1 – Considerar inicialmente um quadrado.

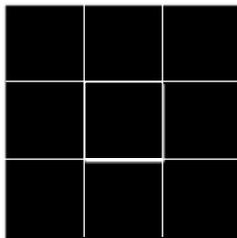
Figura 5 - Nível zero do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

2 – Dividir o quadrado em 9 pequenos quadrados congruentes;

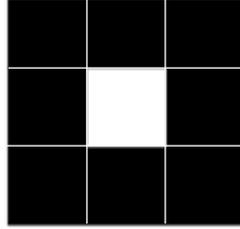
Figura 6 - Divisão do nível zero do Tapete de Sierpinski em nove quadrados congruentes.



Fonte: Autoria própria (2021).

3 – Eliminar o quadrado central.

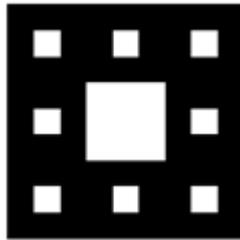
Figura 7 - Nível um do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

4 – Repetir as construções 2 e 3 em cada um dos quadrados não eliminados.

Figura 8 - Nível dois do Tapete de Sierpinski.

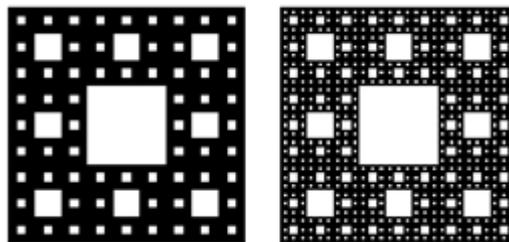


Fonte: Página do portal Matemática do Renato<sup>1</sup> (TAVARES, s.d.).

5 - Repetir a operação 4 sucessivamente.

A seguir, mostra-se o resultado da operação 5 repetida mais duas vezes.

Figura 9 - Níveis três e quatro do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Página do portal Matemática do Renato<sup>1</sup> (TAVARES, s.d.).

O resultado da etapa cinco aplicada sucessivamente gera, no limite do processo, o Tapete de Sierpinski.

<sup>1</sup> Disponível em: <http://matematicadoretrato.blogspot.com/2016/04/fractais-tapete-de-sierpinski.html>. Acesso em: 20 ago. 2021.

### 2.3.1 Cálculo da área do Tapete de Sierpinski

O processo de obtenção da área do Tapete de Sierpinski é análogo ao do Triângulo de Sierpinski e será detalhado a seguir.

A área  $S$  de um quadrado de lado  $l$  é igual a  $S = l^2$ . Sendo assim, seja  $S_0$  a área do quadrado inicial (nível 0) e, considerando que seu lado mede  $l = 1$  unidade de comprimento (u.c.), então  $S_0 = 1^2 = 1$  u.a. (unidades de área).

No passo 3, elimina-se o quadrado central, que devido ao passo 2, tem área igual a  $\frac{1}{9}$  da área inicial  $S_0$ . Logo, no nível 1 a área restante  $S_1$  é igual a  $\frac{8}{9}$  de  $S_0$ , ou seja,  $S_1 = \left(\frac{8}{9}\right) S_0$ .

Após a etapa 4, restam 64 quadrados congruentes que juntos somam  $\left(\frac{64}{81}\right) S_0$ , ou seja, no nível 2, a área restante é  $S_2 = \left(\frac{64}{81}\right) S_0$ .

Seguindo esse mesmo processo pode-se obter a área para os demais níveis da construção do Tapete de Sierpinski. Observa-se ainda que é possível reescrever as áreas como  $S_0 = \left(\frac{8}{9}\right)^0 \cdot S_0$ ;  $S_1 = \left(\frac{8}{9}\right)^1 \cdot S_0$ ;  $S_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot S_0$ , e assim por diante, induzindo-se que a área no nível  $n$  é  $S_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot S_0$ .

O quadro abaixo resume o cálculo da área do Tapete de Sierpinski até o nível  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ :

Quadro 2 - Área do Tapete de Sierpinski.

Nível	Quantidade de quadrados retirados.	Área de cada quadrado retirado (u.a.)	Quantidade de quadrados restante	Área de cada quadrado restante (u.a.)	Área total (u.a.)
0	0	-	1	$S_0$	$S_0$
1	1	$\left(\frac{1}{9}\right) \cdot S_0$	8	$\left(\frac{1}{9}\right) \cdot S_0$	$\left(\frac{8}{9}\right) \cdot S_0$
2	8	$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot S_0$	64	$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot S_0$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot S_0$
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
$n$	$\begin{cases} 8^{n-1}, & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \end{cases}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot S_0$	$8^n$	$\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot S_0$	$\left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot S_0$

Fonte: Autoria própria (2021).

Tem-se que a área total fica  $8/9$  menor a cada nível e como  $0 < 8/9 < 1$ , a área restante no limite da expressão que descreve esse processo é  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{8}{9} \right)^n \cdot S_0 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{9} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 = 0$ .

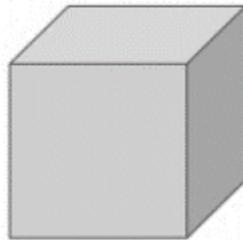
O terceiro fractal a ser apresentado é a Esponja de Menger.

## 2.4 Esponja de Menger

De acordo com Barbosa (2005), a Esponja de Menger pode ser obtida por meio do processo descrito a seguir:

1 – Inicia-se com um cubo de aresta 1 unidade de comprimento (u.c.).

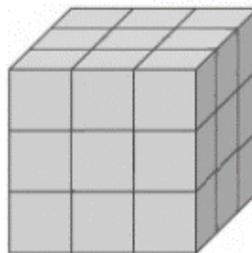
Figura 10 - Nível zero da Esponja de Menger.



Fonte: Página do portal Questões Online<sup>2</sup> (“Questões Online.com”, s.d.)

2 – Utilizando de planos secantes ortogonais às faces, dividir o cubo em 27 cubos congruentes, com arestas medindo  $1/3$  da aresta inicial.

Figura 11 - Divisão do nível zero da Esponja de Menger.

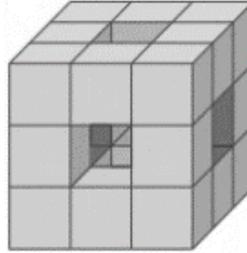


Fonte: Página do portal Questões Online<sup>2</sup> (“Questões Online.com”, s.d.)

<sup>2</sup> Disponível em: <https://questoesonline.com/lista-de-exercicios/matematica-lista-36/resolver>. Acesso em: 20 ago. 2021.

3 – Retirar o cubo central do cubo inicial e os cubos centrais de cada face.

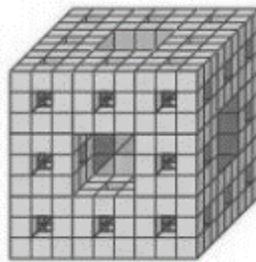
Figura 12 - Nível um da Esponja de Menger.



Fonte: Página do portal Questões Online<sup>3</sup> (Questões Online.com, s.d.)

4 – Repetir as etapas 2 e 3 para cada um dos cubos não retirados.

Figura 13 - Nível dois da Esponja de Menger.



Fonte: Página do portal Questões Online<sup>3</sup> ("Questões Online.com", s.d.).

5 – Repetir a operação 4 sucessivamente.

O resultado da etapa cinco aplicada sucessivamente gera, no limite do processo, o a Esponja de Menger.

#### 2.4.1 Cálculo do volume da Esponja de Menger

Considerando o processo descrito por Barbosa (2005), para a construção da Esponja de Menger, tem-se o cubo inicial (nível 0) de aresta medindo 1 unidade de comprimento (u.c.) e volume  $V_0$ , em que  $V_0 = 1^3 = 1$  u.v. (unidades de volume).

<sup>3</sup>Disponível em: <https://questoesonline.com/lista-de-exercicios/matematica-lista-36/resolver>. Acesso em: 20 ago. 2021.

Na etapa 03, retira-se um total de 7 cubos de arestas iguais a  $1/3$  da aresta inicial e, conseqüentemente, cada cubo retirado tem volume igual a  $(1/3)^3 V_0 = (1/27)V_0$ . Assim, o volume total retirado é de  $7 \times (1/27)V_0 = (7/27)V_0$  e, portanto, o volume restante no nível 01 é de  $V_1 = (20/27)V_0$ .

Na etapa 04, divide-se cada um dos 20 cubos restantes no nível 01 em 27 cubos menores (que podem ser chamados de cubinhos), obtendo um total de  $20 \times 27 = 540$  cubinhos, cada um deles com as arestas medindo  $1/9$  da aresta inicial.

Posteriormente, retira-se de cada um desses 20 cubos, 7 cubinhos, ou seja,  $7 \times 20 = 140$ , restando então  $540 - 140 = 400$  cubinhos.

Visto que cada um dos cubinhos restantes tem aresta  $1/9$  da aresta inicial, o volume total restante é  $V_2 = 400 \times (1/9)^3 V_0 = (400/729)V_0$ .

É possível reescrever os volumes como  $V_0 = \left(\frac{20}{27}\right)^0 V_0$ ,  $V_1 = \left(\frac{20}{27}\right)^1 V_0$  e  $V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V_0$ , e assim por diante, induzindo-se que a expressão para o volume no nível  $n$  é  $V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n V_0$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

O quadro abaixo resume o processo de cálculo do volume da Esponja de Menger:

Quadro 3 - Volume da Esponja de Menger.

Nível	Quantidade de cubos retirados	Quantidade de cubos restantes	Volume restante (u.v.)
0	0	1	$V_0 = \left(\frac{20}{27}\right)^0 V_0$
1	$7 = 7 \times 20^0$	$20 = 20^1$	$V_1 = \left(\frac{20}{27}\right)^1 V_0$
2	$140 = 7 \times 20^1$	$400 = 20^2$	$V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V_0$
3	$2800 = 7 \times 20^2$	$8000 = 20^3$	$V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 V_0$
(...)	(...)	(...)	(...)
$n$	$7 \times 20^{n-1}$	$20^n$	$V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^n V_0$

Fonte: Autoria própria (2021).

Como  $0 < 20/27 < 1$  e a cada nível o volume é multiplicado por  $20/27$ , o mesmo diminui em  $7/27$ , o que é uma redução aproximada de 25,93%.

Nota-se que o volume da Esponja de Menger no limite do processo é:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{20}{27} \right)^n \cdot V_0 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{20}{27} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 = 0.$$

O Quadro 3, será utilizada no capítulo 4, como ferramenta auxiliar na resolução de algumas atividades da sequência de ensino que será apresentada, em particular, naquelas que envolvem o conceito de volume.

No capítulo seguinte, apresenta-se os conceitos relativos aos temas probabilidade e Probabilidade Geométrica.

### **3 PROBABILIDADE - CONCEITOS**

Diversas situações do cotidiano apresentam cenários de incerteza, onde é preciso ponderar sobre as chances de que uma determinada situação ocorra, visto que os possíveis resultados para essa situação não podem ser previstos.

Em geral, tais cenários ocorrem numa perspectiva não determinística, conhecidos como experimentos aleatórios, que basicamente são àqueles em que mesmo que se realize o experimento diversas vezes sob as mesmas condições, não há garantias que o resultado seja o mesmo.

Em um âmbito mais avançado, a teoria das probabilidades pode ser utilizada como ferramenta auxiliar em cenários de incerteza mais complexos, como por exemplo, na previsão do tempo e na análise da variação da bolsa de valores.

Em situações mais tradicionais, o cálculo de probabilidade trata, por exemplo, das chances de se obter um determinado resultado em jogos que envolvem dados, moedas e baralhos, sendo esses os exemplos tradicionalmente abordados pelos livros didáticos e trabalhados em sala de aula.

Em geral, não se pode controlar a ocorrência dos fenômenos, ou seja, “naturalmente, não exercemos influência sobre aquilo que observamos. No entanto, ao escolher um modelo, podemos lançar mão de nosso julgamento crítico” (MEYER, 1983, p. 1).

Um estudo mais detalhado sobre experimentos aleatórios será apresentado a seguir. Também serão trabalhados os conceitos de espaços amostrais e eventos.

#### **3.1 Experimentos aleatórios, espaço amostral e evento**

Um modelo determinístico é de tal modo que as condições sob as quais o mesmo é executado possibilita a previsão do resultado, ou em outras palavras, é possível prever o resultado de um experimento descrito por um modelo determinístico, bastando para isso executar o modelo segundo condições controladas.

Nesse sentido, Meyer (1983) explica que o resultado do experimento é determinado pelas condições estipuladas para a execução do modelo, de modo que se o experimento for repetido um determinado número de vezes, sob as mesmas condições, pode-se esperar o mesmo resultado, de tal maneira que quaisquer desvios que possam ocorrer são irrelevantes e podem ser desprezados.

Analogamente, Montgomery e Runger (2009) explicam que em alguns casos, as variações aleatórias num experimento determinístico são suficientemente pequenas, em relação aos objetivos dos experimentos, que podem ser ignoradas.

Por outro lado, existem experimentos que necessitam de modelos diferentes para descrevê-los, ditos não-determinísticos ou aleatórios, nos quais o resultado não pode ser previsto, mesmo executando o experimento diversas vezes e sob as mesmas condições.

Sobre esta característica, Meyer (1983) explica que em um modelo não-determinístico as condições do experimento determinam somente o comportamento probabilístico do resultado, a sua distribuição de probabilidade, mas não o resultado efetivo.

Ainda sobre a natureza deste, para Montgomery e Runger (2009), num experimento aleatório não importa o quão cuidadoso seja o planejamento e a execução, a variação pode ser suficientemente grande de maneira que conclusões importantes do experimento não sejam tão óbvias.

Esses casos constituem exemplos de experimentos em que se fazem necessários modelos não-determinísticos ou aleatórios para o cálculo das chances ou probabilidade de um determinado resultado ocorrer.

Segundo Montgomery e Runger (2009, p. 11) “o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral do experimento. O espaço amostral é denotado por  $S$ ”.

Um espaço amostral pode ser de dois tipos, discreto ou contínuo, dependendo da natureza de seus elementos. Precisamente, “Um espaço amostral é discreto se ele consiste em um conjunto finito ou infinito contável de resultados. Um espaço amostral é contínuo, se ele contém um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais”. (MONTGOMERY E RUNGER, 2009, p. 12).

Para compreender o conceito de espaço amostral discreto pode-se pensar no experimento aleatório do lançamento de um dado honesto (todas as faces têm a

mesma chance de ocorrer), e observar a face voltada para cima, onde o espaço amostral é o conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Já para o espaço amostral contínuo pode-se considerar o experimento aleatório de escolher um ponto sobre uma circunferência  $C$  de centro  $O(0,0)$  e raio  $r = \sqrt{2}$ , onde o espaço amostral pode ser representado pelo conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 2\}$ .

Em se tratando de um experimento aleatório, denomina-se de evento uma coleção particular de resultados de um espaço amostral. Precisamente, de acordo com Montgomery e Runger (2009, p. 13) “um evento é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório”.

Considerando o espaço amostral  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , referente ao lançamento de um dado honesto, caso se tenha o interesse na probabilidade de se obter um número par na face voltada para cima, o conjunto evento pode ser expresso por  $A = \{2, 4, 6\}$ . Observa-se que todo elemento que pertence ao conjunto  $A$  pertence também ao conjunto  $S$ , e assim  $A$  é dito um subconjunto de  $S$ , ou ainda,  $A \subset S$  ( $A$  está contido em  $S$ ).

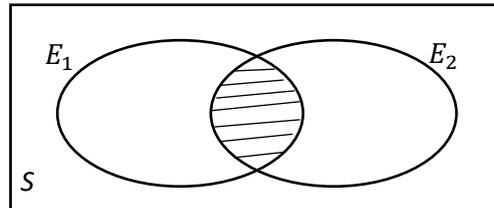
Como os eventos constituem subconjuntos de um espaço amostral, de acordo com Montgomery e Runger (2009), pode-se utilizar as operações relacionadas aos conjuntos, como uniões, intersecções e complementares, para se obter outros eventos de interesse.

Nesse sentido, pode-se considerar novamente o espaço amostral  $s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , referente ao lançamento de um dado honesto, onde se um evento  $E$  corresponde a probabilidade de se obter um número que seja par e primo ao mesmo tempo, pode-se dizer que o evento  $E$  é a intersecção de dois outros eventos.

Sendo assim, considerando  $E_1 = \{x \in S: x \text{ é um número par}\}$  e  $E_2 = \{x \in S: x \text{ é um número primo}\}$ , tem-se que  $E = E_1 \cap E_2$ .

Pode-se, também, utilizar diagramas de Venn-Euler para representar relações entre diferentes eventos de um mesmo espaço amostral. Por exemplo, para o evento  $E$  descrito acima, tem-se a região hachurada na Figura 14.

Figura 14 - Intersecção de dois eventos.

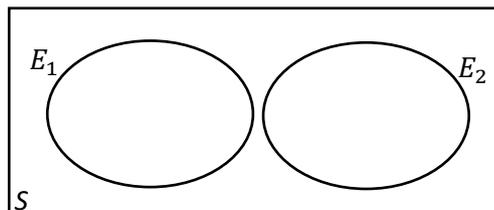


Fonte: Autoria própria (2021).

Em um mesmo espaço amostral pode-se ter ainda eventos mutuamente excludentes, os quais, de acordo com Montgomery e Runger (2009), são dois eventos  $E_1$  e  $E_2$ , tais que  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , onde  $\emptyset$  representa o conjunto vazio.

Nesse caso, o diagrama correspondente é dado pela Figura 15, onde observa-se que os conjuntos  $E_1$  e  $E_2$  não se intersectam, ou seja, a intersecção é vazia.

Figura 15 - Eventos mutuamente excludentes.



Fonte: Autoria própria (2021).

### 3.2 Probabilidade clássica

O conceito de probabilidade na visão clássica envolve inicialmente as definições de espaços amostrais e eventos, sendo que a noção de conjuntos e suas operações pode contribuir na compreensão das ideias que serão trabalhadas.

Considerando um espaço amostral finito e equiprovável, ou seja, que possui um número finito de elementos, os quais têm a mesma probabilidade de ocorrer, a probabilidade de ocorrer um evento  $A$ ,  $P(A)$ , é a razão entre o número de elementos do evento  $A$ ,  $n(A)$ , pelo número de elementos do espaço amostral,  $n(S)$ , ou seja:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

O número de elementos do evento também pode ser dito como número de casos favoráveis, bem como o número de elementos do espaço amostral como número de casos possíveis.

Se  $A$  é um evento de um espaço amostral  $S$ , então o número de elementos de  $A$  é no mínimo zero e, no máximo, igual a  $n(S)$ , ou seja,

$$0 \leq n(A) \leq n(S)$$

Assim, como  $n(S) \neq 0$ , pode-se dividir todos os termos da desigualdade por  $n(S)$ :

$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Ou ainda, em porcentagem:

$$0\% \leq P(A) \leq 100\%.$$

Assim, a probabilidade de um evento  $A$  ocorrer é maior que ou igual a 0%, e menor que ou igual a 100%. Quando a  $P(A) = 0\%$ , o evento é impossível e quando  $P(A) = 100\%$ , tem-se um evento certo.

Para calcular, por exemplo, a probabilidade de se obter um número par na face voltada para cima referente ao lançamento de um dado honesto, é preciso obter o número de elementos do evento em questão, o número de elementos do espaço amostral e calcular a razão entre eles:

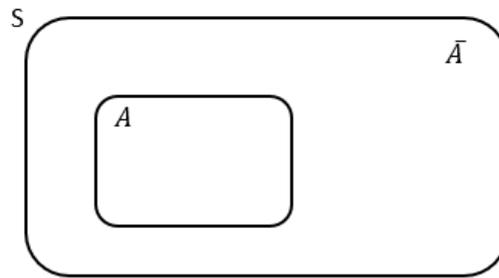
Como descrito anteriormente, o espaço amostral desse experimento é  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , o evento é  $A = \{2, 4, 6\}$  e, assim,  $n(S) = 6$  e  $n(A) = 3$ . Portanto,  $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5 = 50\%$ .

Quando a probabilidade de não ocorrer um evento  $A$ , que indicaremos por  $P(\bar{A})$ , é igual a 1 menos a probabilidade de ocorrer o evento  $A$ , os eventos  $A$  e  $\bar{A}$  são ditos complementares:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Pode-se utilizar de diagramas para representar essa relação da seguinte maneira:

Figura 16 - Eventos complementares,  $A$  e  $\bar{A}$ , de um espaço amostral  $S$ .



Fonte: Autoria própria (2021).

Observa-se que, nesse caso,  $A \cap \bar{A} = \phi$  e que  $A \cup \bar{A} = S$ .

### Exemplo 1 (Proposto pelo autor):

Considere o lançamento de dois dados honestos e, em seguida, a operação de somar os pontos das faces voltadas para cima. Calcule a probabilidade de não se obter soma 4.

### Solução:

O espaço amostral  $S$  está descrito no Quadro 4.

Quadro 4 - Espaço amostral referente a soma das faces obtidas no lançamento de dois dados honestos.

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: Autoria própria (2021).

Observa-se que o espaço amostral desse experimento possui 36 valores, ou seja  $n(S) = 36$ . Considerando o evento  $A$  como àquele em que a soma das faces voltadas para cima é 4, tem-se três resultados favoráveis, ou seja,  $n(A) = 3$ .

Sendo assim, a probabilidade de a soma ser 4 é dada por  $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .

Seja  $\bar{A}$  o evento “a soma não é 4”, então para determinar a probabilidade de  $\bar{A}$ , tem-se:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{12 - 1}{12} = \frac{11}{12} \cong 91,67\%$$

### 3.3 Probabilidade da união de dois eventos

A probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B, de um espaço amostral S, indicado por  $A \cup B$ , é igual à probabilidade de ocorrer o evento A, mais a probabilidade de ocorrer o evento B, menos a probabilidade de ocorrer o evento A e B, indicado por  $A \cap B$ , ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Pode-se justificar essa igualdade manipulando a relação para o número de elementos da união de dois conjuntos A e B, em que  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ , dividindo ambos os lados dessa igualdade por  $n(S)$ :

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para o caso em que A e B são ditos disjuntos, ou seja,  $A \cap B = \phi$ , os eventos A e B são denominados mutuamente exclusivos e  $n(A \cap B) = 0$ , o que implica  $P(A \cap B) = 0$  e, por consequência,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

#### Exemplo 2 (Proposto pelo autor):

Numa urna existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Retirando-se dessa urna uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer um múltiplo de 2 ou de 3?

#### Solução:

Sejam os eventos  $A = \{\text{o número da bola é múltiplo de 2}\}$  e  $B = \{\text{o número da bola é múltiplo de 3}\}$ , então  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  e  $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ .

Tem-se ainda que  $A \cap B = \{6, 12, 18\}$ .

Logo, a probabilidade de ocorrer um múltiplo de 2 ou de 3 é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0,65 = 65\%$$

### 3.4 Probabilidade condicional

Dados dois eventos  $A$  e  $B$  de um mesmo espaço amostral  $S$ , a probabilidade de ocorrer o evento  $B$ , condicionado à ocorrência de  $A$ , indicado por  $P(B|A)$ , é dada por:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Essa relação pode ser escrita em função das probabilidades de ocorrência dos eventos  $A \cap B$  e de  $A$ :

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dessa última relação, pode-se obter uma regra para multiplicar probabilidades:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Assim, a probabilidade de ocorrer o evento  $A \cap B$  é igual à probabilidade de ocorrer o evento  $A$  multiplicada pela probabilidade de ocorrer o evento  $B$ , na certeza de que  $A$  ocorreu.

#### Exemplo 3 (ENEM, 2013):

Numa escola com 1200 estudantes foi realizada uma pesquisa sobre conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 estudantes falam inglês, 500 estudantes falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um estudante dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse estudante fale espanhol?

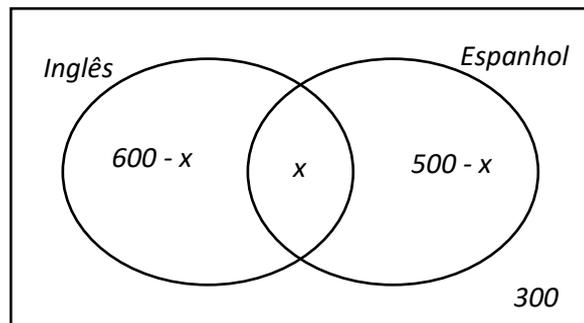
- a) 1/2
- b) 5/8
- c) 1/4

- d)  $5/6$   
e)  $5/14$

**Solução:**

Para resolver essa questão pode-se inicialmente organizar o seguinte diagrama, onde  $x$  representa o número de estudantes que falam inglês e espanhol:

Figura 17 – Diagrama 1 para o exemplo 3 - probabilidade condicional.

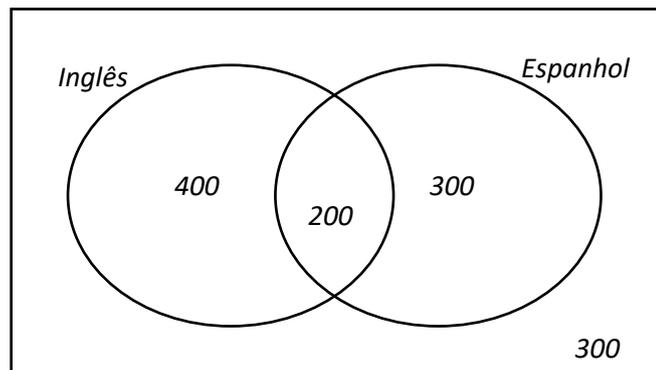


Fonte: Autoria própria (2021).

Tem-se que  $(600 - x) + x + (500 - x) + 300 = 1200$ , então  $x = 200$ .

Reescrevendo o diagrama tem-se:

Figura 18 – Diagrama 2 para o exemplo 3 - probabilidade condicional.



Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, o número de estudantes que não falam inglês é 600, sendo àqueles que falam somente espanhol, mais os que não falam nem inglês nem espanhol.

Portanto, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{300}{600} = 0,5 = 50\%$$

De outra maneira, seja  $E = \{\text{n}^\circ \text{ de estudantes que falam espanhol}\}$  e  $\bar{I} = \{\text{n}^\circ \text{ de estudantes que não falam inglês}\}$ , escolhendo-se um estudante dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, a probabilidade de que esse estudante fale espanhol é dada por:

$$P(E|\bar{I}) = \frac{P(E \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{300}{600} = 0,5 = 50\%$$

**Exemplo 4 (ENEM, 2021):**

Um apostador deve escolher uma entre cinco moedas ao acaso e lançá-la sobre uma mesa, tentando acertar qual resultado (cara ou coroa) sairá na face superior da moeda.

Suponha que as cinco moedas que ele pode escolher sejam diferentes:

- duas delas têm “cara” nas duas faces;
- uma delas tem “coroa” nas duas faces;
- duas delas são normais (cara em uma face e coroa na outra).

Nesse jogo, qual é a probabilidade de o apostador obter uma face "cara" no lado superior da moeda lançada por ele?

- a) 1/8
- b) 2/5
- c) 3/5
- d) 3/4
- e) 4/5

**Solução:**

Seja  $P(A)$  a probabilidade de o indivíduo escolher uma moeda que apareça cara e  $P(B|A)$  a probabilidade de o indivíduo obter cara dado que escolheu uma moeda que apareça cara.

A probabilidade de o apostador obter uma face "cara" no lado superior da moeda lançada por ele é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$$

### 3.5 Eventos independentes

Seguindo com os conceitos, dados dois eventos  $A$  e  $B$  de um mesmo espaço amostral  $S$ , tem-se que eles são independentes quando a probabilidade de ocorrência de um não afeta a probabilidade de ocorrência do outro.

Nesse caso, a probabilidade de ocorrer o evento  $A \cap B$  é o produto da probabilidade de ocorrer o evento  $A$  e a probabilidade de ocorrer o evento  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Caso dois eventos sejam dependentes, então  $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ .

Deve-se tomar cuidado para não confundir eventos mutuamente exclusivos com eventos independentes, sendo que dois eventos são mutuamente exclusivos quando não ocorrem juntos.

Nesse caso, a ocorrência de um deles interfere na ocorrência do outro, de modo que eventos mutuamente exclusivos, em geral, são dependentes.

À exceção é dada no caso em que dada a ocorrência do primeiro, a probabilidade do segundo já é zero.

#### Exemplo 5 (ENEM, 2018):

Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos. Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

- a)  $1/16$
- b)  $3/16$
- c)  $1/4$
- d)  $3/8$
- e)  $1/2$

#### Solução:

Observe que a probabilidade de nascer um menino ou menina em cada nascimento independe do sexo do nascimento anterior, ou seja, cada nascimento é um evento independente, sendo sempre as chances de  $1/2$  pra menino e  $1/2$  pra menina.

Logo, a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas é

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

### 3.6 Probabilidade Geométrica

De acordo com Possani (2012, p. 1), “O termo ‘probabilidade geométrica’ se refere à área da matemática que estuda problemas que, ao mesmo tempo, envolvem o conceito de probabilidade e situações de caráter geométrico.”.

Nesse contexto, são tratados os problemas que vão além das tradicionais situações abordadas normalmente no estudo de probabilidade, baseadas em um conjunto finito e igualmente provável de eventos.

Problemas que envolvem Probabilidade Geométrica tratam de possíveis situações que podem ser representadas por pontos pertencentes a um segmento de reta, por figuras planas ou sólidos, onde não seja possível definir probabilidade como a razão entre o número de elementos favoráveis e o número de elementos possíveis, visto que tratam de situações onde o número de acontecimentos não é usualmente contável. Nesses casos, é possível calcular a probabilidade de um evento por meio de considerações geométricas.

De acordo com Alcântara (2014), em muitos problemas de Probabilidade Geométrica necessitaremos da noção de segmentos para a resolução. Isso ocorre quando os cálculos envolvem comprimentos, como escolher aleatoriamente um ponto sobre um segmento AB e calcular a probabilidade de o mesmo pertencer a um segmento XY, contido em AB.

Figura 19 - Probabilidade Geométrica envolvendo segmentos.



Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, a probabilidade desejada pode ser obtida pela relação

$$P(XY) = \frac{\text{Medida do Comprimento } XY}{\text{Medida do Comprimento } AB}$$

Nesse caso, segundo Alcântara (2014), a probabilidade de que um ponto de AB pertença a XY, contido em AB, é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y pertencentes a AB.

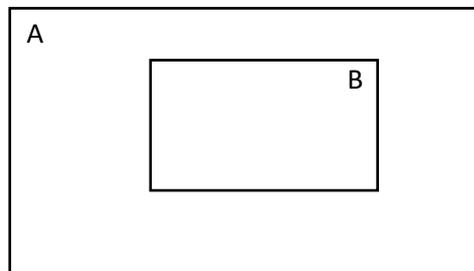
Pode-se ter ainda problemas que envolvem o conceito de área de regiões no plano:

Na probabilidade geométrica, se tivermos uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. (WAGNER, 1997, online).

Nesse sentido, sejam as regiões A e B, de áreas  $S_A$  e  $S_B$ , respectivamente, tal que B está contida em A (Figura 20), a probabilidade de um ponto de A pertencer também a B pode ser obtida por:

$$P(B) = \frac{\text{Área da região B}}{\text{Área da região A}} = \frac{S_B}{S_A}$$

Figura 20 - Probabilidade Geométrica envolvendo áreas.

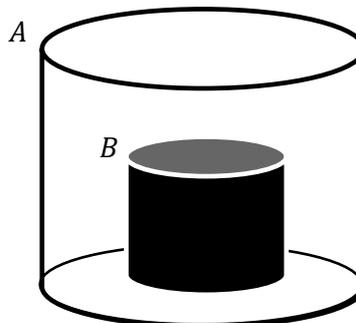


Fonte: Autoria própria (2021).

De acordo com Alcântara (2014), são poucos os problemas de Probabilidade Geométrica que envolvem a ideia de volume de um corpo, mas que ainda assim são importantes.

Dados dois corpos A e B, de volumes  $V_A$  e  $V_B$ , respectivamente, tal que B está contido em A (Figura 21), a probabilidade de que um ponto de A pertença também a B, é proporcional ao volume  $V_B$ , e independe da posição de B em A.

Figura 21 - Probabilidade Geométrica envolvendo volumes.



Fonte: Autoria própria (2021).

Sendo assim, a probabilidade de um ponto pertencer a B pode ser obtida pela razão entre o volume de B e o volume de A, ou seja,

$$P(B) = \frac{\text{Volume de B}}{\text{Volume de A}} = \frac{V_B}{V_A}$$

De acordo com Wagner (1997), no Ensino Médio os problemas de probabilidade são basicamente aqueles restritos ao caso finito basicamente de contagem de casos favoráveis e casos possíveis.

Ainda assim é possível encontrar alguns exemplos de problemas em livros didáticos que tratam de Probabilidade Geométrica.

A seguir, apresenta-se um exemplo retirado da seção intitulada Matemática em Detalhes, que é uma seção complementar ao tema probabilidade, do livro didático da segunda série do Ensino Médio, da Editora Positivo:

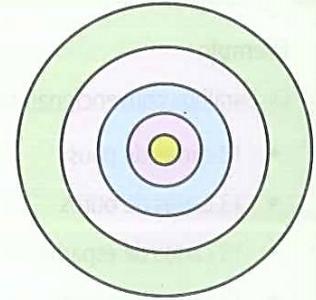
Figura 22 - Problema de Probabilidade Geométrica - Recorte de livro didático 01



## Matemática em detalhes

Até agora nos deparamos com situações nas quais as probabilidades são calculadas contando-se o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Porém, nem sempre isso é possível. Acompanhe um exemplo.

Um alvo tem 40 cm de raio e é dividido em 5 regiões. A região amarela é um círculo de raio 4 cm. Uma pessoa com os olhos encobertos tenta acertar o alvo com dardos. Ela não viu onde o alvo foi fixado, apenas recebeu a informação de que ele está em sua frente. Se um desses dardos atingir o alvo, qual a probabilidade de que seja na região amarela?



Não é possível contar os elementos do espaço amostral nem do evento que corresponde ao dardo atingir a região amarela, pois o espaço amostral é infinito. Mesmo assim, é possível calcular essa probabilidade. Vamos considerar que cada ponto do alvo tem a mesma chance de ser tocado. Assim, basta calcular a razão entre as áreas do círculo amarelo e do alvo.

$$\text{Área do alvo: } \pi \cdot 40^2 = 1\,600\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da região amarela: } \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

Portanto, a probabilidade P de que o dardo tenha tocado um ponto da região amarela é igual a:

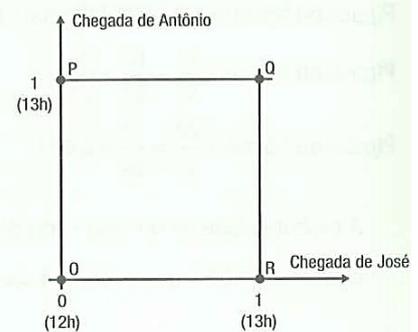
$$P = \frac{16\pi}{1\,600\pi} = \frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$$

O segundo exemplo é um pouco mais difícil.

Trata-se de um problema presente em duas questões do Enem.

José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho.

Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x; y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR ao lado indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x; y):



1. (ENEM) Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde

a) à diagonal OQ.

c) ao lado PQ.

e) ao lado OR.

b) à diagonal PR.

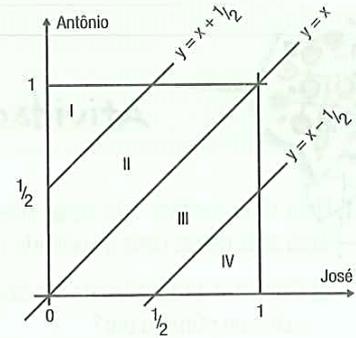
d) ao lado QR.

Fonte: Editora Positivo (2016, v. 8, p. 16).

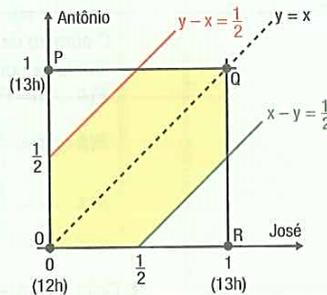
Figura 23 - Problema de Probabilidade Geométrica - Recorte de livro didático 02

2. (ENEM) Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que  $y - x \leq 1/2$  ou que  $x - y \leq 1/2$ . De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, as chances de José e Antônio viajarem juntos são de:

- a) 0%
- b) 25%
- c) 50%
- d) 75%
- e) 100%



Para responder a essas questões, observe o gráfico.



Questão 1

Para que José e Antônio cheguem ao marco inicial no mesmo horário, o ponto da região OPQR deve ter coordenadas iguais, ou seja, deve pertencer à reta de equação  $y = x$ . Assim, o conjunto de pontos que representa o evento corresponde à diagonal OQ.

Alternativa correta: a.

Questão 2

Para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que a diferença entre os horários de chegada de cada um seja de, no máximo, 30 minutos, ou seja, meia hora. No gráfico, os pontos que satisfazem essa condição são aqueles entre as retas de equações  $y - x = \frac{1}{2}$  e  $x - y = \frac{1}{2}$ , além dos pontos da região OPQR que pertencem a essas retas. Assim, a probabilidade de que eles viajem juntos é obtida dividindo-se a área amarela pela área do quadrado OPQR.

$$P = \frac{\text{Área amarela}}{\text{Área de OPQR}} = \frac{1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Alternativa correta: d.

Para resolver esse problema, consideramos que José e Antônio podem chegar entre meio-dia e 1 hora da tarde de modo equiprovável.

Para finalizar, deixamos uma pergunta para você:

Qual seria a probabilidade de José e Antônio viajarem juntos caso tivessem combinado que o primeiro a chegar esperaria pelo outro no máximo 15 minutos?

O material não apresenta solução para a última questão, por isso, apresenta-se abaixo uma possível solução.

**Solução:**

Para resolver essa última questão o estudante deve perceber que como 15 minutos é equivalente  $\frac{1}{4}$  de hora, os pontos que satisfazem o problema são àqueles pertencentes a região entre as retas  $y - x = \frac{1}{4}$  e  $x - y = \frac{1}{2}$ , intersecção com a região OPQR, ou seja, pela área do quadrado OPQR, menos a área de dois triângulos de catetos  $\frac{3}{4}$ .

Sendo assim, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{1^2 - \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{2}}{1^2} = \frac{7}{16} = 0,4375 = 43,57\%$$

## 4 SEQUÊNCIA DE ENSINO EM PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

### 4.1 Conceitos introdutórios

As atividades que serão propostas a seguir têm por objetivo contribuir com o processo de ensino-aprendizagem-avaliação do tema Probabilidade Geométrica, todavia os conceitos de probabilidade clássica devem ser trabalhados previamente.

Cabe ressaltar que cálculos de áreas e volumes estarão presentes e, assim, é importante que o professor intervenha sempre que julgar necessário, para que eventuais dúvidas a respeito desses procedimentos de cálculo sejam dirimidas.

Pensando na questão relacionada ao objetivo geral desse trabalho: quais elementos devem estar presentes em uma sequência de ensino destinada ao ensino-aprendizagem-avaliação de Probabilidade Geométrica – Ensino Médio, a partir de dados gerados da Geometria Fractal?; e por meio do estudo do referencial teórico, optou-se pela elaboração e apresentação de uma sequência de ensino que explore tanto situações bidimensionais quanto tridimensionais, buscando também, por meio do emprego de Materiais Didáticos Manipuláveis - conceito que será discutido mais adiante - desenvolver aspectos lúdicos e o ensino-aprendizagem mais prazeroso, além de promover o senso estético com a construção física de representações para os fractais que serão utilizados: Triângulo de Sierpinski e Esponja de Menger.

Optou-se por utilizar questões cujas soluções utilizam dados gerados a partir dos fractais trabalhados, e outras que não estão relacionadas à Geometria Fractal, buscando explorar também como as questões que envolvem o tema Probabilidade Geométrica podem ser cobradas em provas de vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

Para elaborar a sequência, optou-se por seguir os fundamentos e orientações descritas na proposta dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990) – Problematização Inicial, Organização do Conhecimento e Aplicação do Conhecimento.

A etapa da Problematização Inicial, contém algumas questões introdutórias ao conteúdo, as quais o professor pode utilizar para incentivar a discussão e motivar o interesse do estudante em relação ao tema.

Para Delizoicov (2002), nesse momento o educador verifica os conhecimentos prévios dos estudantes e promove discussões com o objetivo de identificar possíveis contradições e limitações dos conhecimentos que vão sendo revelados pelos estudantes.

Na Organização do Conhecimento, apresenta-se os conceitos relacionados a Probabilidade Geométrica. Em particular, para a esta sequência de ensino, aborda-se o tema Probabilidade Geométrica por meio da Geometria Fractal: Obtenção do Fractal por construção, seguido de diversas questões de Probabilidade Geométrica relacionadas ao fractal construído.

Ainda para desenvolver a etapa de Organização do Conhecimento, sugere-se outras questões sobre Probabilidade Geométrica, que não envolvem fractais, para que o professor resolva junto com os estudantes, com o objetivo de aprofundar o tema.

De acordo com Abreu, Ferreira, Freitas (2017), nesse momento o professor tem um papel mais ativo, mediando novos conhecimentos e não oferecendo respostas prontas, mas sim, indicando caminhos e possibilidades e junto com os estudantes, organizando o conhecimento.

Para a terceira etapa, que para Delizoicov e Angotti (1990) é a Aplicação do Conhecimento, tem-se outras atividades, que podem ser utilizadas pelo professor na verificação do conhecimento adquirido pelos estudantes, podendo utilizá-las no processo avaliativo dos mesmos.

Para a construção dos fractais a serem utilizados na elaboração da sequência, optou-se pela utilização de Materiais Didáticos Manipuláveis, ou simplesmente Materiais Manipuláveis, buscando-se propiciar maior ludicidade nos processos e uma aprendizagem mais prazerosa.

A seguir, apresenta-se mais detalhadamente o conceito de Materiais Manipuláveis e as contribuições dos mesmos no processo de ensino-aprendizagem:

Diversos são os tipos de materiais didáticos possíveis de serem utilizados com o objetivo de melhorar o processo de ensino-aprendizagem nas aulas de matemática. Entre estes, destacam-se os livros, apostilas, lousa, giz, projetores, computadores, régua, esquadros, compassos, entre outros, e que constituem o conjunto de ferramentas que conhecemos como materiais didáticos.

Segundo Lucena (2017), chamamos de Materiais Didáticos Manipuláveis àqueles que:

[...] permitem a manipulação tátil do estudante, permitindo realizar construções e deformações de objetos geométricos, cálculos de forma concreta através de jogos (por exemplo), ajudando a perceber conceitos e propriedades de elementos matemáticos, bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, que é determinante na resolução de problemas matemáticos do seu cotidiano. (LUCENA, 2017, p. 27).

No entanto, de acordo com Pereira e Oliveira (2016), não se deve descartar dentre os Materiais Manipuláveis, que o uso de folhas de papéis, tesouras e régua. Apesar de não serem destinados exclusivamente ao ensino da matemática, estes materiais podem ajudar a desenvolver uma ideia, favorecendo o ensino-aprendizagem de algum tópico da matemática.

É importante ressaltar que qualquer que seja o material utilizado no processo de ensino-aprendizagem, é preciso que o professor saiba utilizar corretamente o material didático escolhido, sendo a atuação do professor um fator determinante no processo.

Santos e Cury (2011) ressaltam que os Materiais Manipuláveis não substituem o professor, mas podem ser grandes aliados para sua prática, complementando suas aulas e que o ideal é que sejam realizadas experiências com determinados materiais, elaborados para um determinado conteúdo, e que os resultados sejam disponibilizados aos professores que desejam trabalhar com os mesmos.

De acordo com Pereira e Oliveira (2016), a matemática não é indiferente aos Materiais Manipuláveis, e a importância desses materiais se dá pela maneira como são utilizados na resolução das questões propostas.

Ainda sobre esses recursos, Lucena (2017) explica que os Materiais Manipuláveis devem ser escolhidos pensando nos objetivos almejados, visto que as características estruturais de cada material implicam na sua natureza exploratória, de modo que materiais mais rígidos admitem menos interação, como sólidos geométricos construídos em madeira, enquanto que jogos de tabuleiros, por exemplo, são mais propícios a investigação de propriedades matemáticas.

Barbosa (2005), no seu livro “Descobrimos a Geometria Fractal para a Sala de Aula”, destina o capítulo V – ‘Construindo fractais em sala de aula com manipulação de materiais concretos’ - à construção de representações de fractais utilizando materiais concretos, como peças quadradas de madeira com uma pequena espessura ou um conjunto de peças triangulares equiláteras, também de madeira.

Esses ‘materiais concretos’ também podem ser considerados como Materiais Manipuláveis, pois como explicam Pereira e Oliveira (2016, p. 2), é Material Manipulável “qualquer objeto que venha a compor o material, que pode ser sentido em sua totalidade, no intuito de cumprir o objetivo das tarefas que serão apresentadas a seguir”. Isso evidencia ainda mais a importância de se utilizar esse conceito como um adicional à sequência de ensino que será apresentada.

Em seguida, apresenta-se a sequência de ensino.

## **4.2 Probabilidade geométrica e o triângulo de Sierpinski**

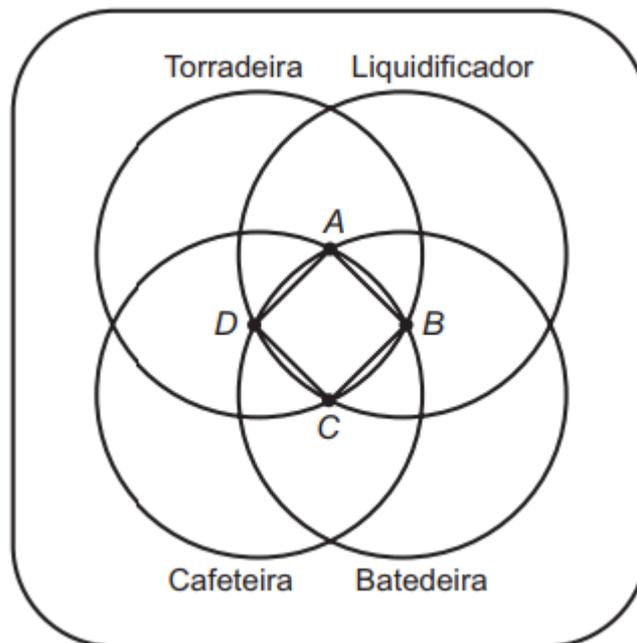
### **4.2.1 Problematização inicial**

Nesse momento, apresentam-se duas questões que têm por objetivo despertar o interesse dos estudantes, por meio de discussões de possíveis soluções, através dos conhecimentos relativos à probabilidade que os estudantes já possuem:

#### **Questão 01 (ENEM, 2013):**

Ao realizar uma compra em uma loja de departamentos, o cliente tem o direito de participar de um jogo de dardo, no qual, de acordo com a região do alvo acertada, ele pode ganhar um ou mais prêmios. Caso o cliente acerte fora de todos os quatro círculos, ele terá o direito de repetir a jogada, até que acerte uma região que dê o direito de ganhar pelo menos um prêmio. O alvo é o apresentado na Figura 24:

Figura 24 - Jogo de dardos.



Fonte: ENEM (2013) - segunda aplicação – caderno cinza<sup>4</sup> (BRASIL, 2019, n.p).

Ao acertar uma das regiões do alvo, ele terá direito ao(s) prêmio(s) indicado(s) nesta região. Há ainda o prêmio extra, caso o cliente acerte o dardo no quadrado ABCD.

João Maurício fez uma compra nessa loja e teve o direito de jogar o dardo. A quantidade de prêmios que João Maurício tem a menor probabilidade de ganhar, sabendo que ele jogou o dardo aleatoriamente, é exatamente:

- A) 1.
- B) 2.
- C) 3.
- D) 4.
- E) 5.

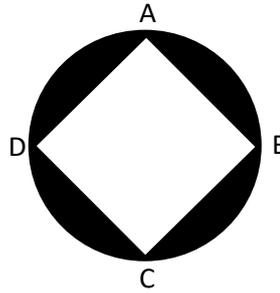
**Solução:**

Tem-se que a área colorida na Figura 25, representa a região de menor probabilidade de João acertar, pois é constituída pela união das regiões delimitadas entre a interseção dos quatros círculos, que indicam cada um dos possíveis prêmios, e o quadrado ABCD, e essas regiões são as menores áreas do alvo.

<sup>4</sup> Disponível em:

[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/ppi/2013/prova\\_caderno\\_cinza\\_6\\_2013.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppi/2013/prova_caderno_cinza_6_2013.pdf).  
Acesso em: 11 ago. 2021.

Figura 25 - Região de menor probabilidade no jogo de dardos.



Fonte: Autoria própria (2021).

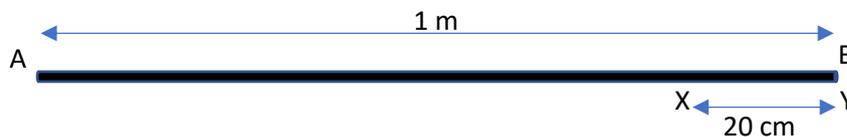
Segue que qualquer ponto na área colorida pertencerá a interseção dos quatro círculos, logo ganhará os quatro prêmios.

**Alternativa correta: D**

**Questão 02 (Proposta pelo autor):**

Escolhendo-se ao acaso um ponto sobre uma corda de 1 m de comprimento, qual a probabilidade de o ponto pertencer aos 20 cm finais?

Figura 26 - Probabilidade de um ponto pertencer a um segmento.



Fonte: Autoria própria (2021).

**Solução:**

Primeiro deve-se converter todas as medidas à mesma unidade, por exemplo, usar  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ .

Na sequência, pode-se obter a probabilidade desejada fazendo:

$$P(XY) = \frac{\text{Medida do comprimento } XY}{\text{Medida do comprimento } AB} = \frac{20 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$$

4.2.2 Organização do conhecimento

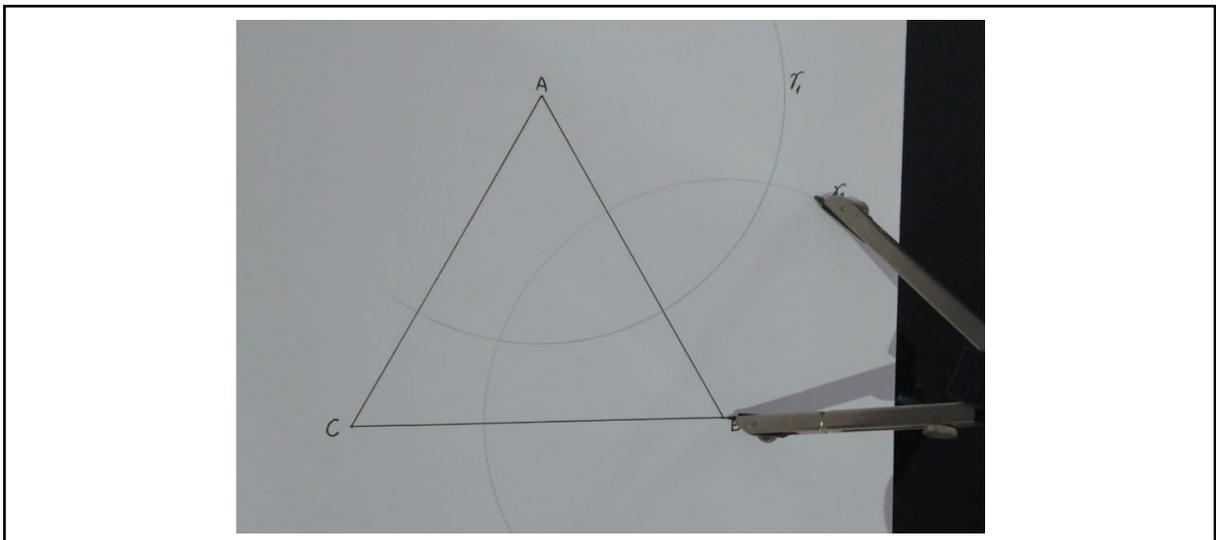
Nesse momento tem-se a construção de uma representação para o fractal denominado Triângulo de Sierpinski.

Inicialmente, é necessário apresentar o Triângulo de Sierpinski, bem como as etapas para a sua construção, conforme seção 2.2 e, em seguida, sugerir aos estudantes a construção do nível 01 do Triângulo de Sierpinski.

Para isso, a partir de um triângulo equilátero dado (Apêndice D), utilizando régua e compasso para obter os pontos médios dos lados e dividir o triângulo inicial:

1 - Com uma abertura do compasso maior do que a metade do segmento AB, ou seja,  $r > \frac{1}{2} \overline{AB}$ , traçar os arcos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  de raio  $r$ , centrados em A e B, respectivamente.

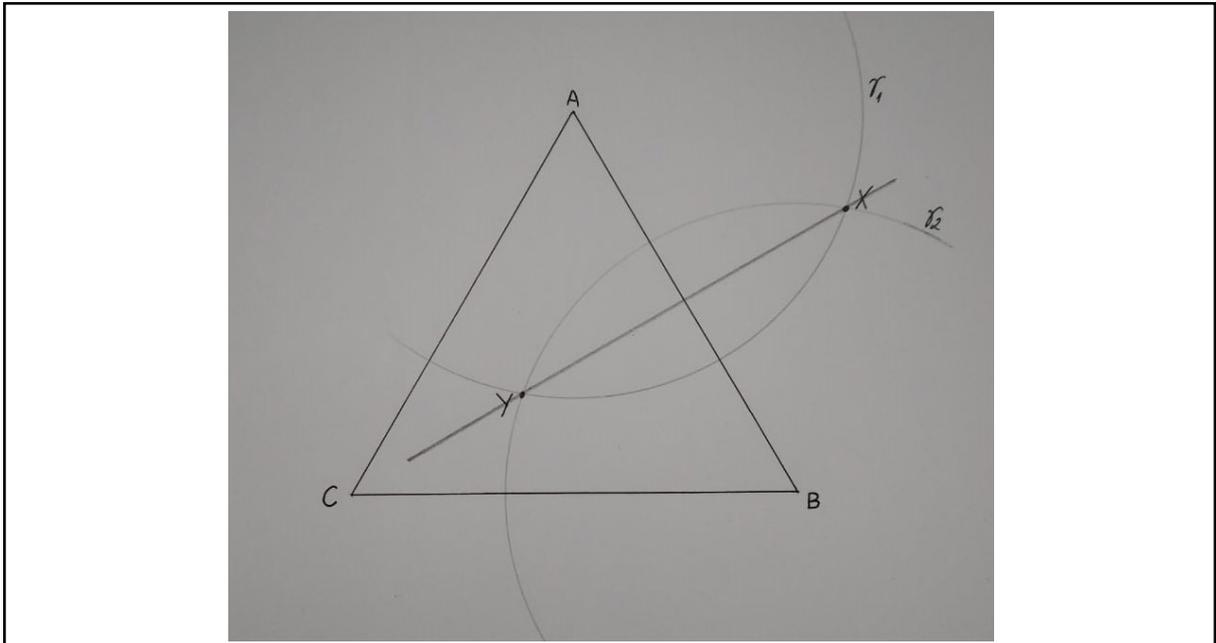
Figura 27 - Passo um da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

2 – Se X e Y são os pontos de intersecções de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , então  $\overleftrightarrow{XY}$  é a mediatriz de AB.

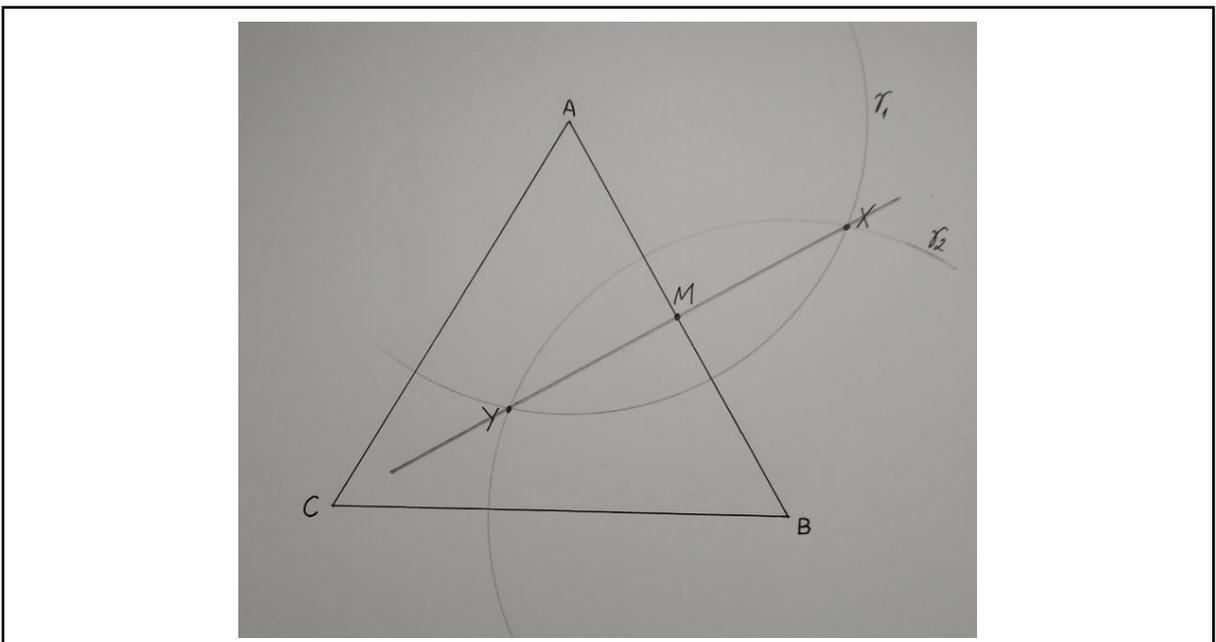
Figura 28 - Passo dois da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

3 – Marcar o ponto M, intersecção de  $\overleftrightarrow{XY}$  com o segmento AB.

Figura 29 - Passo três da construção do Triângulo de Sierpinski.

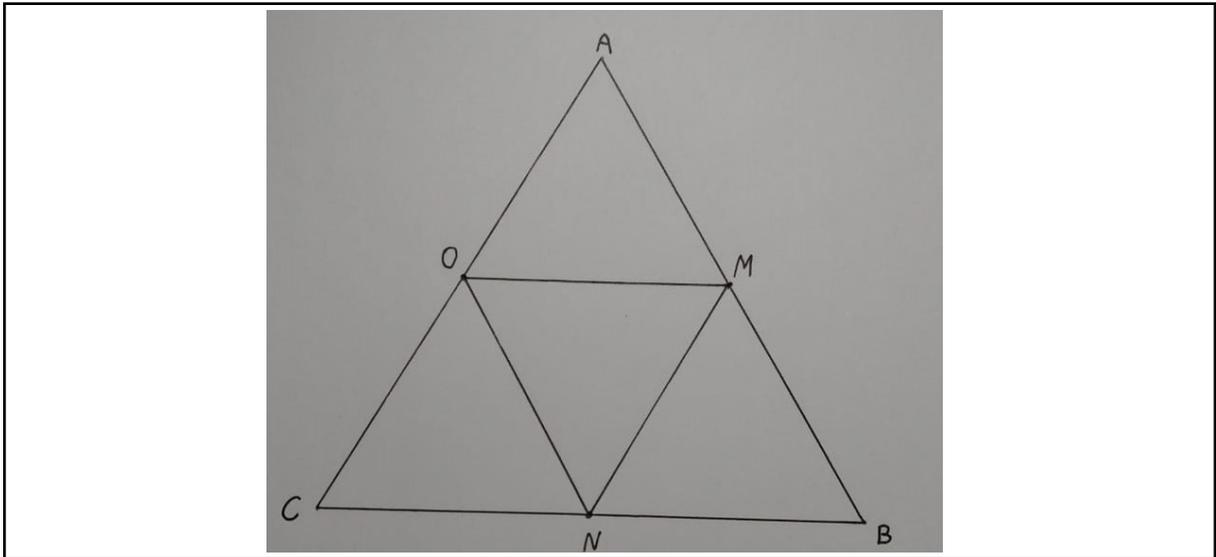


Fonte: Autoria própria (2021).



6 – Traçar os segmentos MN, NO e MO.

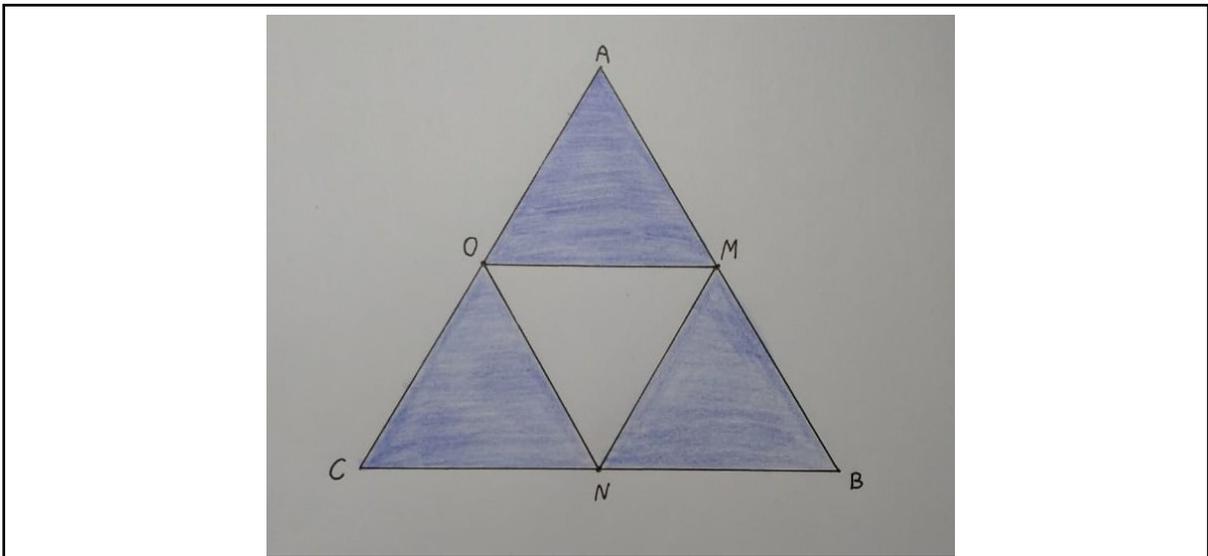
Figura 32 - Passo seis da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

7 – Colorir os triângulos AMO, BMN e CNO.

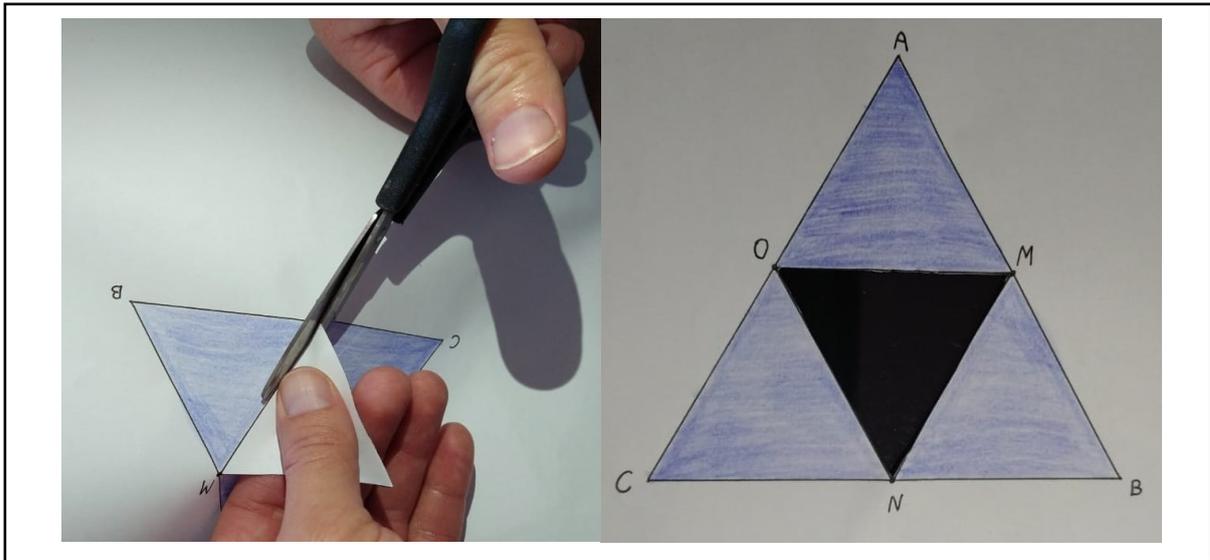
Figura 33 - Passo sete da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

8 - Com o auxílio de uma tesoura, retirar o triângulo central MNO, obtendo um buraco, como no nível 01 do Triângulo de Sierpinski.

Figura 34 - Passo oito da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Autoria própria (2021).

Na sequência, mostrar o procedimento de cálculo da área do Triângulo de Sierpinski, descrito na subseção 2.2.1, e que gerou o quadro abaixo.

Quadro 5 - Cópia do Quadro 1.

Nível	Quantidade de triângulos retirados	Área de cada triângulo retirado (u.a.)	Quantidade de triângulos restante	Área de cada triângulo restante (u.a.)	Área total (u.a.)
0	0	-	1	$S_0$	$S_0$
1	1	$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot S_0$	3	$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot S_0$	$\left(\frac{3}{4}\right) \cdot S_0$
2	3	$\left(\frac{1}{16}\right) \cdot S_0$	9	$\left(\frac{1}{16}\right) \cdot S_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot S_0$
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
$n$	$\begin{cases} 3^{n-1}, & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \end{cases}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot S_0$	$3^n$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot S_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot S_0$

Fonte: Autoria própria (2021).

Em seguida, propor a resolução da questão 03:

### Questão 03 (Proposta pelo autor):

Considerando o nível 1 do Triângulo de Sierpinski, escolhendo-se aleatoriamente um ponto P, qual a probabilidade de:

a) P pertencer ao triângulo AMO?

- b) P pertencer ao buraco?  
 c) P não pertencer ao buraco?  
 d) P pertencer ao triângulo AMO, sabendo que não pertence ao buraco?

**Soluções:**

Obs.: É importante lembrar que as probabilidades procuradas são proporcionais aos valores das áreas das regiões de interesse e independem das suas posições.

Para auxiliar nos cálculos serão considerados os dados do Quadro 5.

- a) Nesse nível cada triângulo restante tem área igual a  $\left(\frac{1}{4}\right)S_0$ , a probabilidade de P pertencer ao triângulo AMO é:

$$P = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)S_0}{S_0} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

- b) A área do buraco é igual a área de cada um dos triângulos restantes, ou seja, também é  $\left(\frac{1}{4}\right)S_0$ .

Portanto, a probabilidade de P pertencer ao buraco é:

$$P = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)S_0}{S_0} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

- c) Observe que P não pertencer ao buraco é o evento complementar de P pertencer ao buraco, então a probabilidade procurada é:

$$P = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

De outra maneira, se P não pertence ao buraco, pertence a um dos três triângulos restantes, cujas áreas somam  $\left(\frac{3}{4}\right)S_0$  e, assim, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)S_0}{S_0} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

- d) Nesse caso tem-se um exemplo de probabilidade condicional. Observa-se que se P não pertence ao buraco, ele pertence a um dos triângulos restantes, cujas áreas somam  $\left(\frac{3}{4}\right)S_0$ , enquanto que a área do triângulo AMO é de  $\left(\frac{1}{4}\right)S_0$ . Sendo assim, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)S_0}{\left(\frac{3}{4}\right)S_0} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 = 33,33\%$$

De outra maneira, sejam os eventos  $A = \{P \text{ não pertence ao buraco}\}$  e  $B = \{P \text{ pertence ao triângulo AMO}\}$ , tem-se que a probabilidade procurada é dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Onde  $P(A \cap B)$  é a probabilidade de  $P$  pertencer não pertencer ao buraco e pertencer ao triângulo AMO.

Assim, a probabilidade desejada é:

$$P(B|A) = \frac{\binom{1}{4}}{\binom{3}{4}} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 = 33,33\%$$

Na sequência, trabalhar com o nível 2 do Triângulo de Sierpinski, mas nesse caso sugere-se utilizar um modelo pronto (Apêndice E), pedindo para que os estudantes recortem os triângulos brancos para gerar os buracos.

Em seguida, propor a resolução das questões 04 e 05:

#### Questão 04 (Proposta pelo autor):

Escolhendo-se ao acaso um ponto  $Q$  pertencente ao triângulo  $ABC$ , referente ao nível 02 do Triângulo de Sierpinski, qual a probabilidade de:

- $Q$  pertencer a um dos buracos?
- $Q$  não pertencer a um dos buracos?
- $Q$  pertencer ao buraco central, sabendo que pertence a um dos buracos?

#### Soluções:

a) Nesse nível o triângulo original  $ABC$  fica dividido em 16 triângulos congruentes, cuja área de cada um é equivalente a  $\left(\frac{1}{16}\right)S_0$ , como observa-se no Quadro 5. Tem-se ainda, que o buraco central tem área equivalente a quatro desses triângulos e, assim, a área total dos buracos é igual a sete desses triângulos, ou seja,  $\left(\frac{7}{16}\right)S_0$ .

Portanto, a área procurada é:

$$P = \frac{\left(\frac{7}{16}\right)S_0}{S_0} = \frac{7}{16} = 0,4375 = 43,75\%$$

b) Observe que  $Q$  não pertencer ao buraco é o evento complementar de  $P$  pertencer ao buraco, então a probabilidade procurada é:

$$P = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} = 0,5625 = 56,25\%$$

c) Se Q pertencer a um dos buracos, ele pode estar em uma área equivalente a  $\binom{7}{16} S_0$ , enquanto que a área do buraco central é igual a  $\binom{4}{16} S_0$ .

Sendo assim, a probabilidade desejada é:

$$P = \frac{\binom{4}{16} S_0}{\binom{7}{16} S_0} = \frac{\binom{4}{16}}{\binom{7}{16}} = \frac{4}{7} \cong 0,5714 = 57,14\%$$

De outro modo, sejam os eventos  $A = \{Q \text{ pertence a um dos buracos}\}$  e  $B = \{Q \text{ pertence ao buraco central}\}$ , então a probabilidade desejada é:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{4}{7} \cong 0,5714 = 57,14\%$$

Onde  $P(A \cap B)$  é a probabilidade de Q pertencer a um buraco e este ser o buraco central.

#### Questão 05 (Proposta pelo autor):

Ainda em relação ao nível 2 do Triângulo de Sierpinski, escolhendo-se dois pontos, R e S, qual a probabilidade de:

- R e S pertencerem a buracos?
- R pertencer a um buraco e S não?

#### Soluções:

a) Dados os eventos independentes  $A = \{R \text{ pertence a um buraco}\}$  e  $B = \{S \text{ pertence a um buraco}\}$ , a probabilidade procurada pode ser obtida por:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Como a probabilidade de um ponto pertencer a um dos buracos já foi calculada na questão 4(a), temos:

$$P(A \cap B) = \frac{7}{16} \times \frac{7}{16} = \frac{49}{256} \cong 0,1914 = 19,14\%$$

b) Como a probabilidade de um ponto não pertencer a um dos buracos foi calculada na questão 4(b), de forma análoga a questão 5(a), a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{7}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{63}{256} \cong 0,2461 = 24,61\%$$

Na sequência, visando explorar a ideia no nível n do Triângulo de Sierpinski, ou seja, no limite do processo, propor a questão 06:

**Questão 06 (Proposta pelo autor):**

Escolhendo-se aleatoriamente um ponto T do Triângulo de Sierpinski, no enésimo nível, qual a probabilidade de:

- a) T pertencer a um buraco?
- b) T não pertencer a um buraco?

**Soluções:**

a) Como visto no capítulo 3.2.1, tem-se que no limite do processo a área do Triângulo de Sierpinski tende a zero, ou seja, é dada por  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot S_0 \right] = 0$ . Uma outra interpretação para esse resultado é de que a soma das áreas dos buracos tende a  $S_0$ .

Portanto, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{S_0}{S_0} = 1 = 100\%$$

b) Tem-se que T não pertencer a um buraco é o complemento de T pertencer a um buraco.

Sendo assim, a probabilidade desejada é dada por:

$$P = 1 - 1 = 0 = 0\%$$

Na sequência, visando aprofundar o tema Probabilidade Geométrica e mostrar como o mesmo pode ser abordado em questões como as de vestibulares, resolver com os estudantes as questões 07 a 09:

**Questão 07 - Academia da Força Aérea (AFA, 1993):**

Um ponto é selecionado aleatoriamente dentro de um triângulo equilátero de lado  $L = 3$ . Qual a probabilidade de a distância desse ponto a qualquer vértice ser maior do que 1?

- A)  $1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$
- B)  $1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$
- C)  $1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$
- D)  $1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{27}$

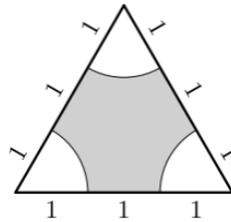
**Solução:**

A probabilidade procurada pode ser medida pela razão entre a área da região formada pelos pontos P que satisfazem as condições do enunciado e a área total do triângulo no qual P é escolhido.

A área do triângulo equilátero de lado  $L = 3$  é igual a  $\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$  u. a.

A área da região onde P pode ser selecionado de modo que a distância entre P e qualquer vértice do triângulo seja menor do que 1, pode ser observada pela área colorida na Figura 35.

Figura 35 - Questão AFA 1993



Fonte: Portal OBMEP - Miscelânea de Exercícios – 2019<sup>5</sup> (BENEVIDES; NETO, 2019)

Tem-se que para obter a área dessa região colorida, deve-se remover do triângulo três setores circulares de raio 1 e ângulo central de  $60^\circ$ , visto que, por hipótese, o triângulo é equilátero e então cada um de seus ângulos internos mede  $60^\circ$ .

Os três setores somados são equivalentes a um semicírculo (metade de um círculo) de raio 1, e cuja área é:

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ u. a.}$$

Assim, a área da região colorida pode ser obtida pela diferença:

$$\left( \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \text{ u. a.}$$

Portanto, a probabilidade procurada é igual a:

$$P = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

**Alternativa correta: C.**

### Questão 08 – Universidade Estadual do Rio Grande do Sul (UERG, 2011):

Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo C de raio 2 e centro O. Em seguida, constrói-se um quadrado, também centrado em O, que tem M

<sup>5</sup> Disponível em: [https://portaldabobmepimpa.br/uploads/material\\_teorico/dg4uquxvay8sg.pdf](https://portaldabobmepimpa.br/uploads/material_teorico/dg4uquxvay8sg.pdf). Acesso em: 28 jul. 2021.

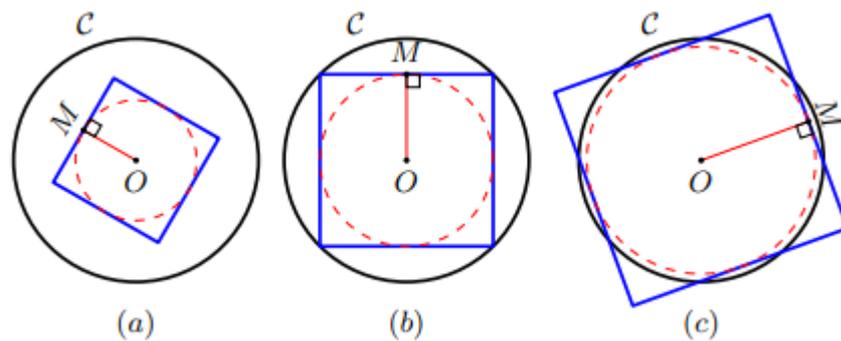
como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo C.

**Solução:**

Para que o quadrado esteja completamente contido no círculo, é preciso que a diagonal do quadrado, que tem M como ponto médio de um de seus lados, seja menor ou igual ao diâmetro do círculo C, que é igual 4, visto que seu raio é 2.

Na Figura 36 pode-se observar três, de infinitas, possíveis escolhas para M e as consequentes configurações, sendo que em (a) e (b) as condições do problema são satisfeitas e em (c) não.

Figura 36 - Questão UERG 2011.



Fonte: Portal OBMEP – Miscelânea de Exercícios – 2019<sup>6</sup> (BENEVIDES; NETO, 2019).

Em (b), tem-se o caso limítrofe, pois os vértices do quadrado pertencem a circunferência C. Nessa configuração a diagonal do quadrado é 4, e assim pode-se calcular o comprimento  $l$  do lado do quadrado como segue:

$$l\sqrt{2} = d \rightarrow l\sqrt{2} = 4 \rightarrow l = \frac{4}{\sqrt{2}} \rightarrow l = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow l = \frac{4\sqrt{2}}{2} \rightarrow l = 2\sqrt{2} \text{ u. c.}$$

Observa-se que  $\overline{OM} = l/2$ , visto que como M é o ponto médio do lado do quadrado, OM é apótema do mesmo.

$$\text{Assim, } \overline{OM} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ u. c.}$$

Tem-se então que a região favorável para a escolha de M é o círculo de centro O e raio  $\overline{OM} = \sqrt{2}$ , e cuja área é:

$$\pi r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi \text{ u. a.}$$

<sup>6</sup> Disponível em: [https://portaldabmeopimpa.br/uploads/material\\_teorico/dg4uquxvay8sg.pdf](https://portaldabmeopimpa.br/uploads/material_teorico/dg4uquxvay8sg.pdf). Acesso em: 28 jul. 2021

A probabilidade procurada pode ser obtida pela razão entre a área desse círculo e a área do círculo C, que é igual a  $\pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$  u. a.

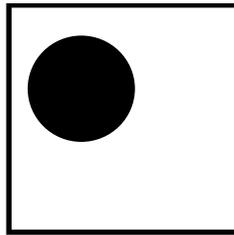
Portanto, a probabilidade é:

$$P = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

**Questão 09 - Inspirado no problema do Jogo dos Discos da RPM 48<sup>7</sup> (Paterlini, 2002):**

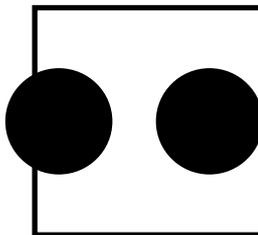
Considere que numa determinada escola os estudantes prepararam um jogo para a Feira de Ciências. Para isso, utilizaram o piso do salão de festas da Feira, feito com quadrados de 25 cm de lado. O jogo consiste no visitante jogar aleatoriamente um disco de papelão no piso e, se o disco tocar um lado de um quadrado, o visitante perde. Se o disco ficar totalmente contido em um quadrado, o visitante ganha.

Figura 37 - Caso favorável ao jogador.



Fonte: Autoria própria (2021).

Figura 38- Casos favoráveis à escola.



Fonte: Autoria própria (2021).

Qual o valor aproximado do diâmetro do disco, para que resulte em uma probabilidade de 40% favorável ao jogador e de 60% à escola?

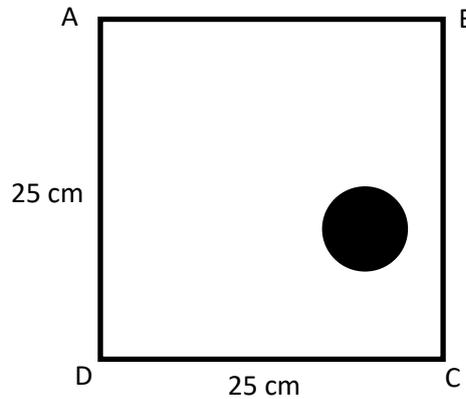
**Solução:**

Seja  $d$  o diâmetro do disco. Para que o mesmo fique totalmente dentro do quadrado, é preciso ter  $d < 25$  cm.

<sup>7</sup> Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/48/3.htm>. Acesso em: 04 ago. 2021.

Considere um quadrado ABCD de lado medindo 25 cm e um disco em posição favorável para o jogador, ou seja, totalmente contido e não tangenciando o lado do quadrado, como na Figura 39.

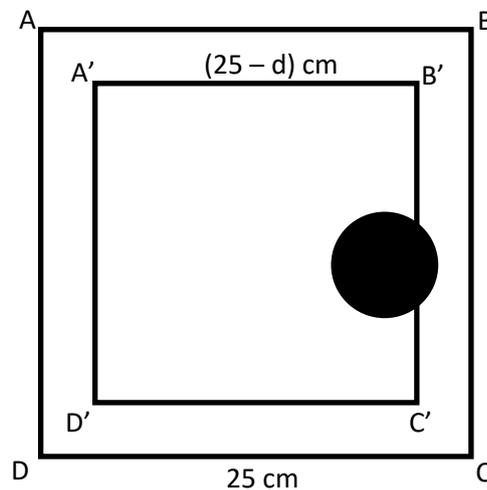
Figura 39 – Disco totalmente contido no quadrado.



Fonte: Autoria própria (2021).

Considere também um outro quadrado  $A'B'C'D'$ , simetricamente disposto dentro do quadrado ABCD e de lados medindo  $(25 - d)$  cm, como mostra a figura a seguir.

Figura 40 - Quadrados simetricamente dispostos.



Fonte: Autoria própria (2021).

Observa-se que para que o disco esteja totalmente contido no quadrado ABCD, basta que o centro do disco pertença ao quadrado  $A'B'C'D'$ . Assim, numa situação ideal, pode-se considerar que a probabilidade de o disco estar dentro de ABCD é equivalente a probabilidade de que um ponto lançado aleatoriamente fique dentro de  $A'B'C'D'$ .

Logo, pode-se calcular a probabilidade de o disco estar dentro de ABCD por:

$$P = \frac{\text{área de } A'B'C'D'}{\text{área de ABCD}}$$

Assim, o diâmetro procurado do disco é:

$$\begin{aligned} \frac{(25 - d)^2}{25^2} = 0,4 &\rightarrow \frac{(25 - d)^2}{625} = 0,4 \rightarrow (25 - d)^2 = 250 \rightarrow 25 - d = \sqrt{250} \rightarrow \\ &\rightarrow 25 - d \cong 15,81 \rightarrow d \cong 25 - 15,81 \rightarrow d \cong 9,19 \text{ cm} \end{aligned}$$

Sugere-se que nesse momento, o professor retome as duas questões propostas na etapa de Problematização Inicial, e resolva as mesmas por meio do conceito de Probabilidade Geométrica, estudado nesta etapa de Organização do Conhecimento.

### 4.3 Probabilidade geométrica e a esponja de Menger

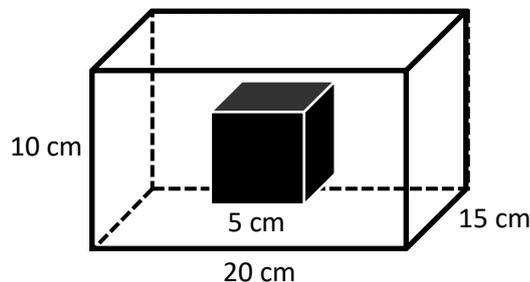
#### 4.3.1 Problematização inicial

Nessa etapa, semelhante a abordagem bidimensional, tem-se uma questão introdutória, para despertar o interesse dos estudantes, possibilitando discussões sobre possíveis soluções, e que deve ser retomado mais tarde:

#### Questão 10 (Proposta pelo autor):

Considere que em um paralelepípedo reto retângulo, de dimensões 10 cm de altura, 15 cm de largura e 20 cm de comprimento, tem-se um cubo inscrito, de aresta 5 cm. Escolhendo-se um ponto do paralelepípedo aleatoriamente, qual a probabilidade desse ponto pertencer ao cubo?

Figura 41 - Cubo contido no paralelepípedo.



Fonte: Autoria própria (2021).

#### Solução:

Sejam  $V_1$  e  $V_2$  os volumes do paralelogramo e do cubo, respectivamente. Tem-se que a probabilidade de um ponto  $P$  pertencer ao cubo pode ser obtida pela razão entre o volume do cubo ( $V_2$ ) e o volume do paralelepípedo ( $V_1$ ), ou seja,

$$P(\text{cubo}) = \frac{V_2}{V_1}$$

Calculando os volumes tem-se:

$$V_1 = 20 \times 15 \times 10 = 3000 \text{ cm}^3 \text{ e } V_2 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

Portanto, a probabilidade procurada é:

$$P(\text{cubo}) = \frac{125}{3000} \cong 4,17\%$$

#### 4.3.2 Organização do conhecimento

Nesse momento, tem-se a construção do nível 01 da Esponja de Menger, por dobradura de papel, seguida de questões relacionadas a esse fractal e que envolvem o cálculo de volumes.

Inicialmente, sugere-se apresentar a Esponja de Menger, bem como as etapas para a sua construção, conforme descrito na seção 2.4.

Em seguida, sugerir aos estudantes a construção física do nível 01 desse fractal, por meio da junção de diversos cubos Sonobe, que são cubos de papel construídos pela técnica de origami.

“Origami é uma palavra japonesa composta do verbo dobrar (折り=*ori*) e do substantivo papel (紙=*kami*), significando literalmente, ‘dobrar papel’.” (HAYASAKA, NISHIDA, s.d., online).

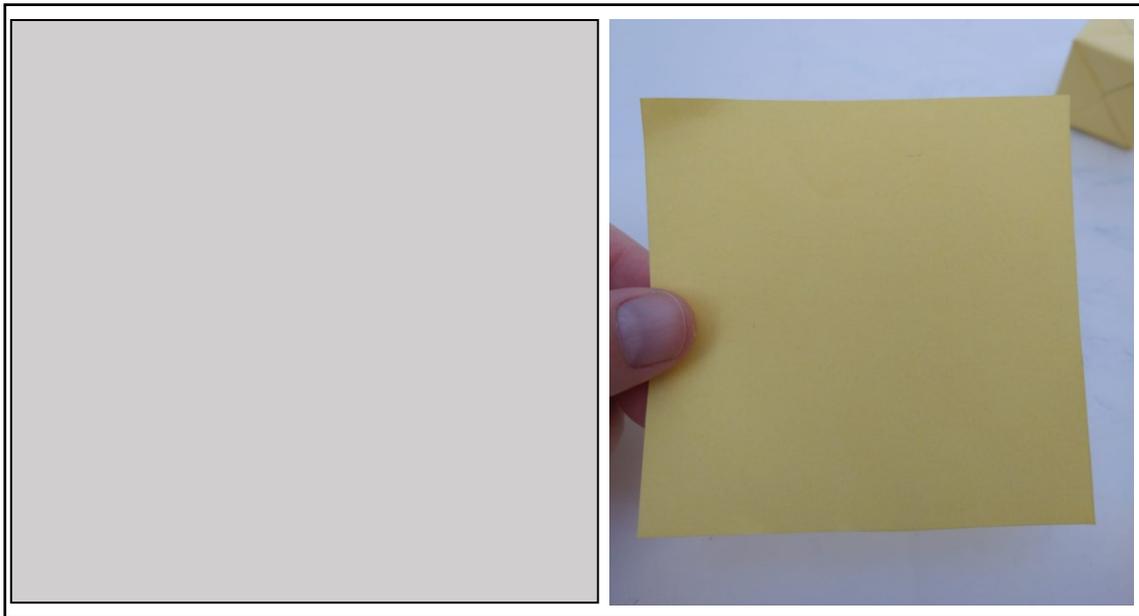
É importante ressaltar que enquanto o processo de obtenção da Esponja de Menger se dá por redução, visto que inicia-se com um cubo e a cada iteração elimina-se o cubo central de cada cubo restante da iteração anterior, a construção aqui sugerida gera uma representação para esse fractal por meio de ampliação, pois é obtida pela junção de diversos cubos Sonobe.

Uma sugestão é realizar a atividade em grupos (na medida do possível) de três a quatro pessoas por grupo, visando otimizar o processo, visto que para essa construção serão necessárias 120 peças, que darão origem a 20 cubos Sonobe.

Todas as etapas para a construção de cada peça, de cada cubo, e do nível 01 do fractal Esponja de Menger estão descritas a seguir:

- 1 – Recortar 120 quadrados como os do Apêndice F. Para isso, serão necessárias 20 páginas iguais a esse apêndice.

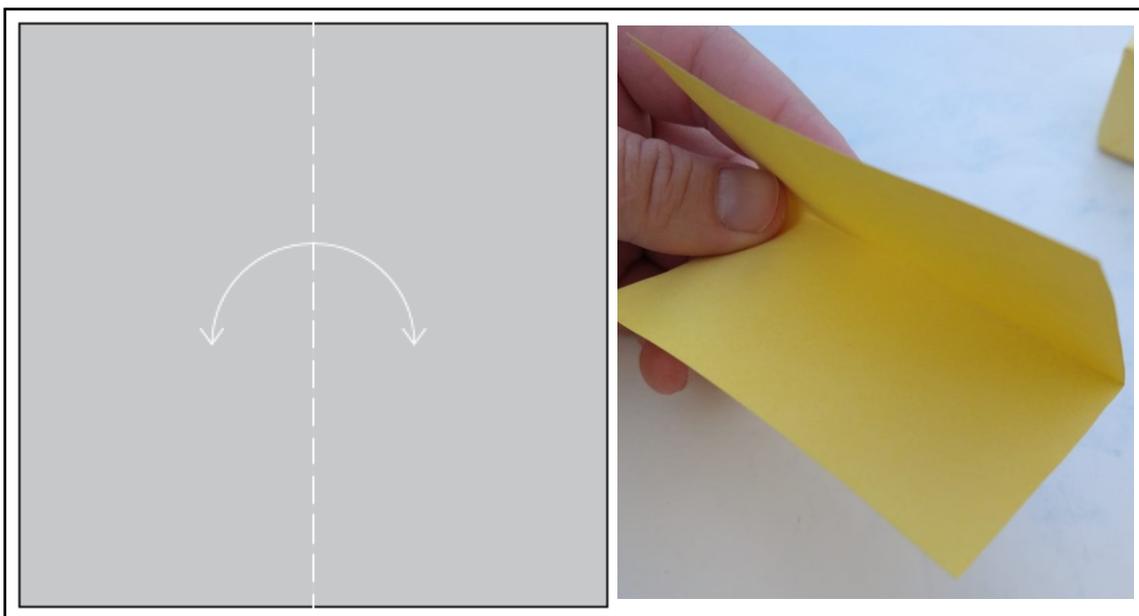
Figura 42 - Passo um da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

2 – Dobrar um quadrado ao meio, marcar a linha da dobra e, em seguida, desdobrar:

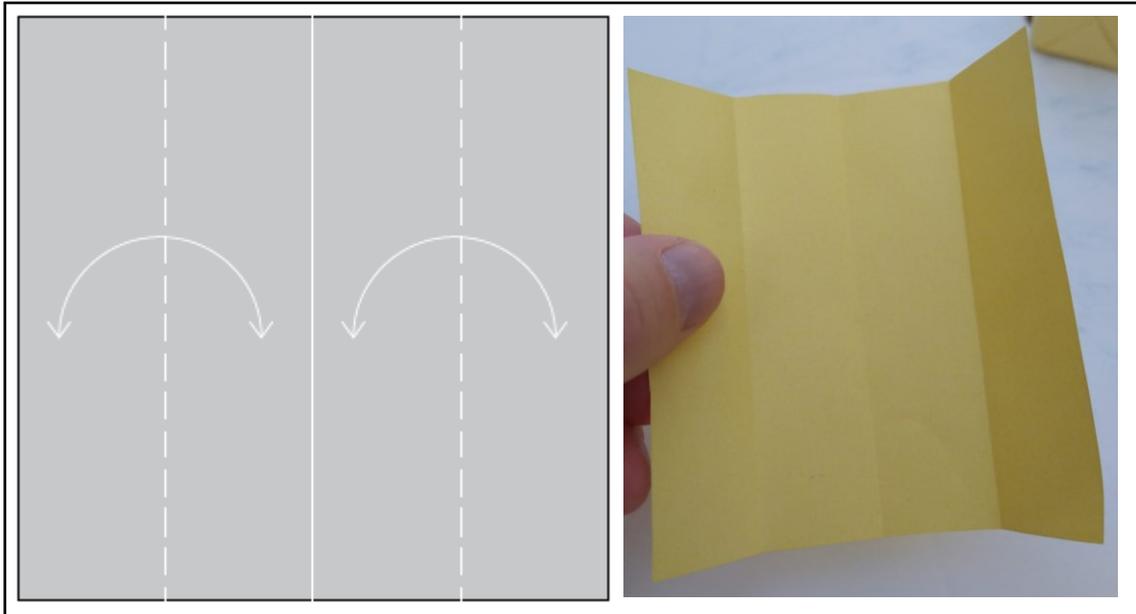
Figura 43 - Passo dois da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

3 – Dobrar ao meio cada retângulo gerado pela linha da dobra inicial, marcar as linhas das dobras e desdobrar:

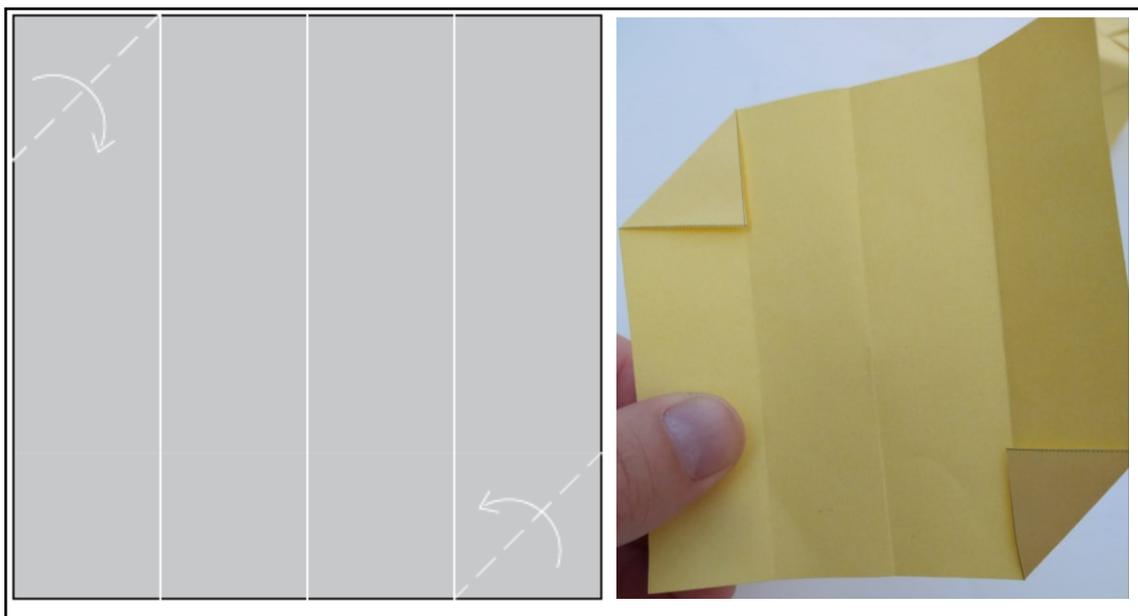
Figura 44 - Passo três da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

4 – Dobrar os cantos superior esquerdo e inferior direito ao longo da linha tracejada, como mostra a Figura 45:

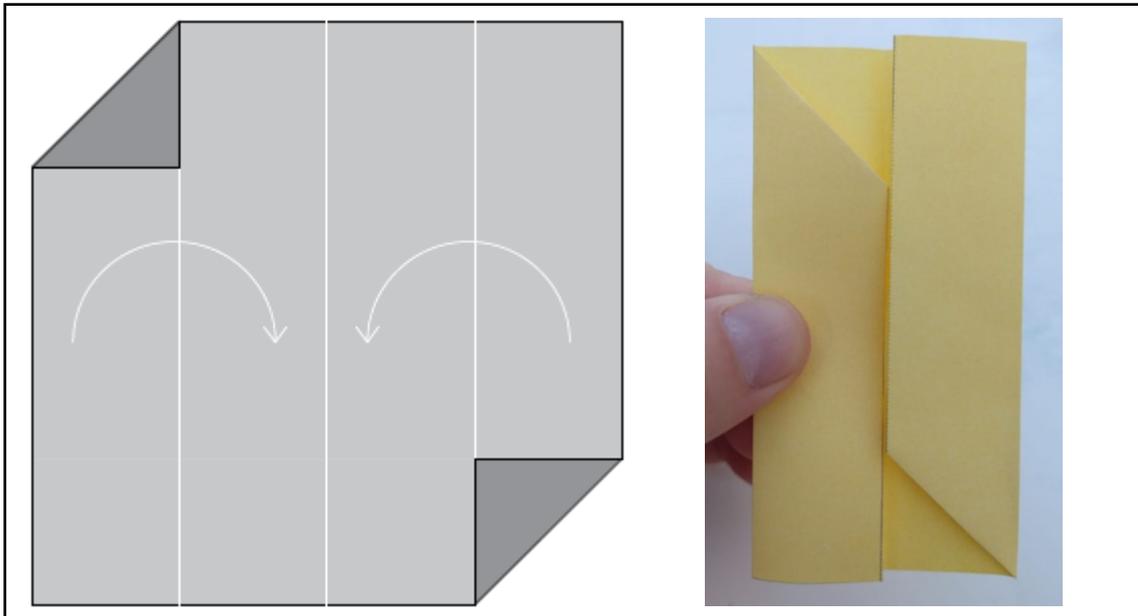
Figura 45 - Passo quatro da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

5 – Dobrar os dois retângulos das extremidades, ao longo das linhas de dobra obtidas no passo 3:

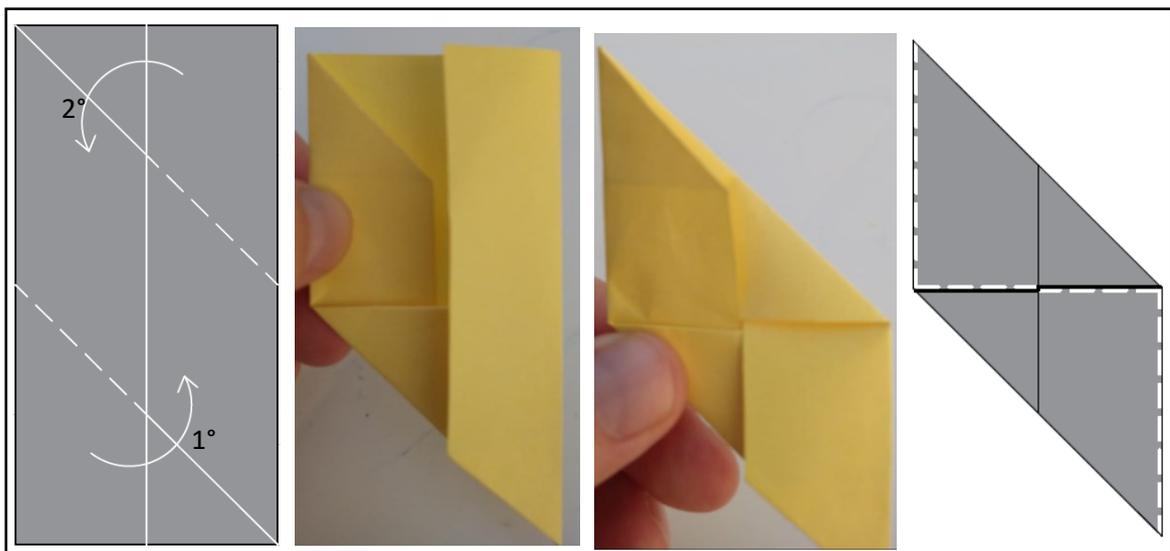
Figura 46 - Passo cinco da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

6 – Dobrar o canto inferior esquerdo, ao longo da linha tracejada, inserindo-o por baixo da aba direita. Em seguida, dobrar o canto superior direito, também ao longo da linha tracejada, inserindo-o por baixo da aba esquerda, como na Figura 47:

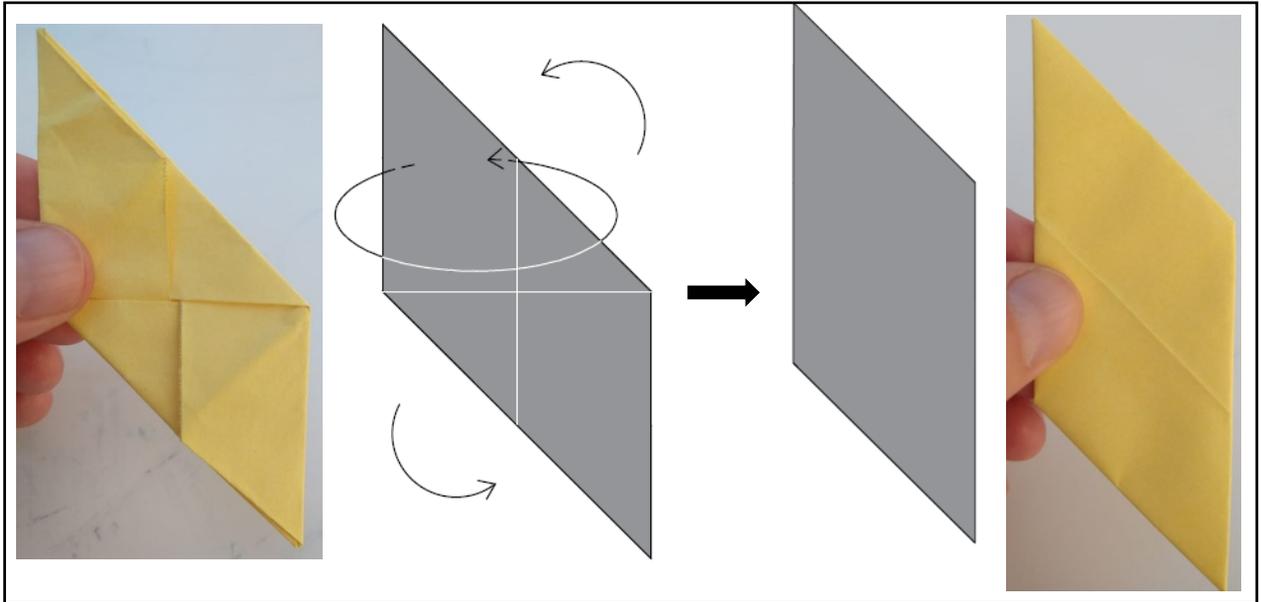
Figura 47 - Passo seis da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

7 – Rotacionar a peça, de maneira que o verso fique à frente e, em seguida, incliná-la no sentido anti-horário, para que fique na posição indicada na Figura 48:

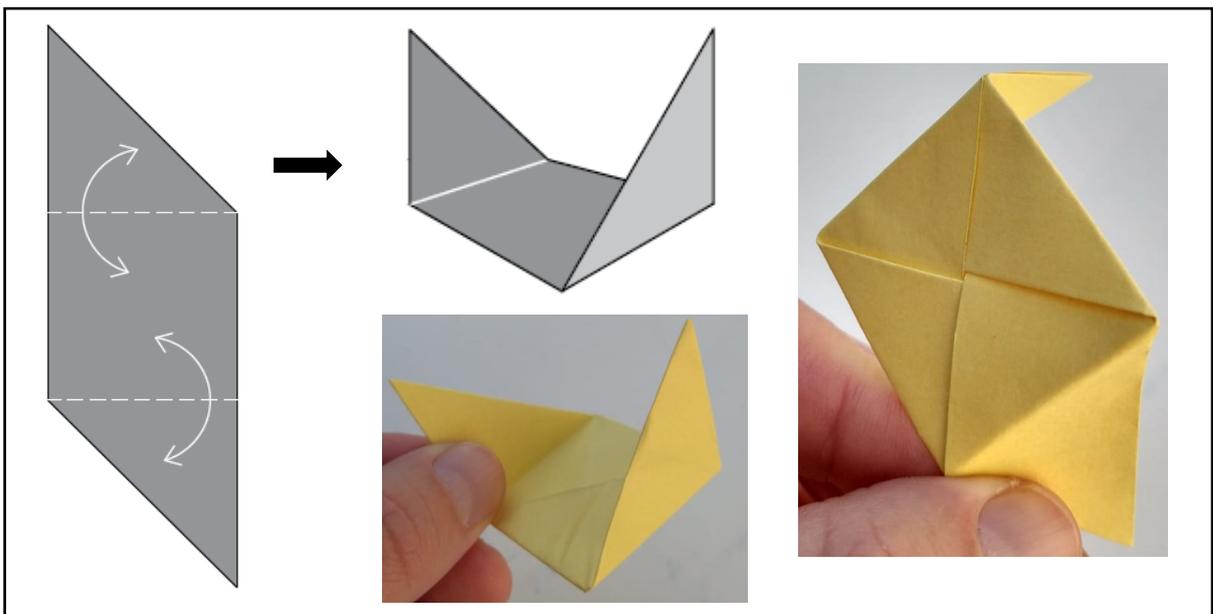
Figura 48 - Passo sete da construção do cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

8 – Dobrar a 90° o canto superior e o inferior, ao longo da linha tracejada indicada na imagem da esquerda na Figura 49.

Figura 49 - Passo oito da construção do cubo Sonobe.

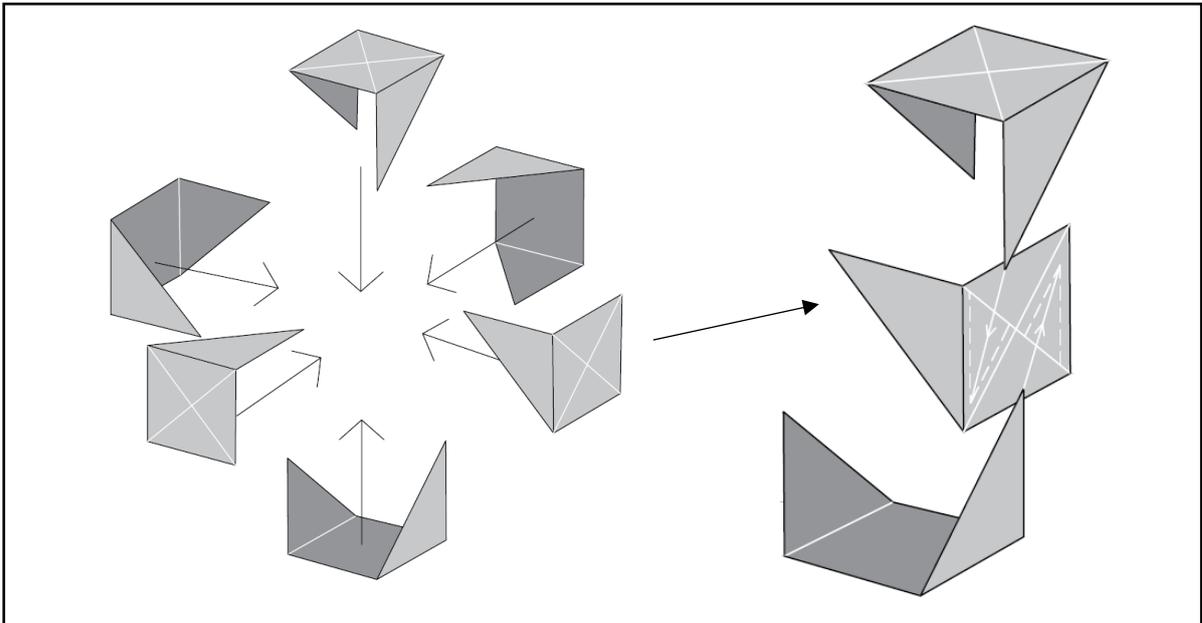


Fonte: Autoria própria (2021).

9 – Repetir os passos de 1 a 8 com todos os quadrados recortados.

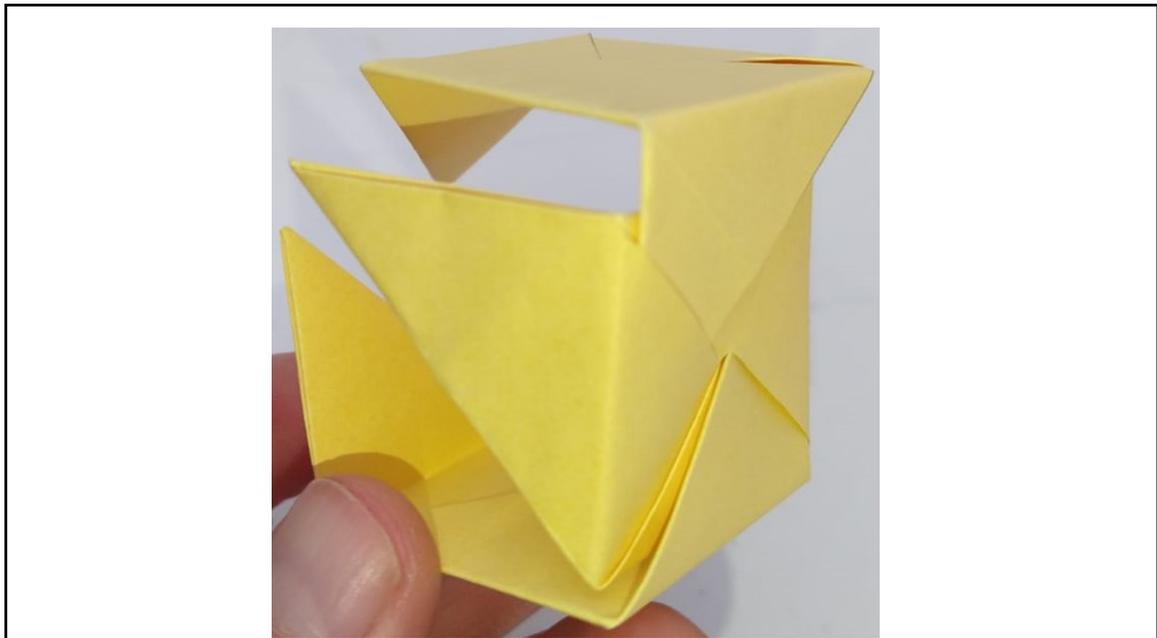
10 – Para montar um cubo, deve-se encaixar seis dessas peças conforme indicado na Figura 50, seguindo o esquema destacado à direita nessa figura.

Figura 50 - Passo dez da construção do cubo Sonobe.



Fonte: adaptado do blog ORIGAMING.<sup>8</sup> (COLOMBO; SONOBE, s.d.)

Figura 51 - Foto do encaixe entre as peças para confecção do cubo Sonobe.

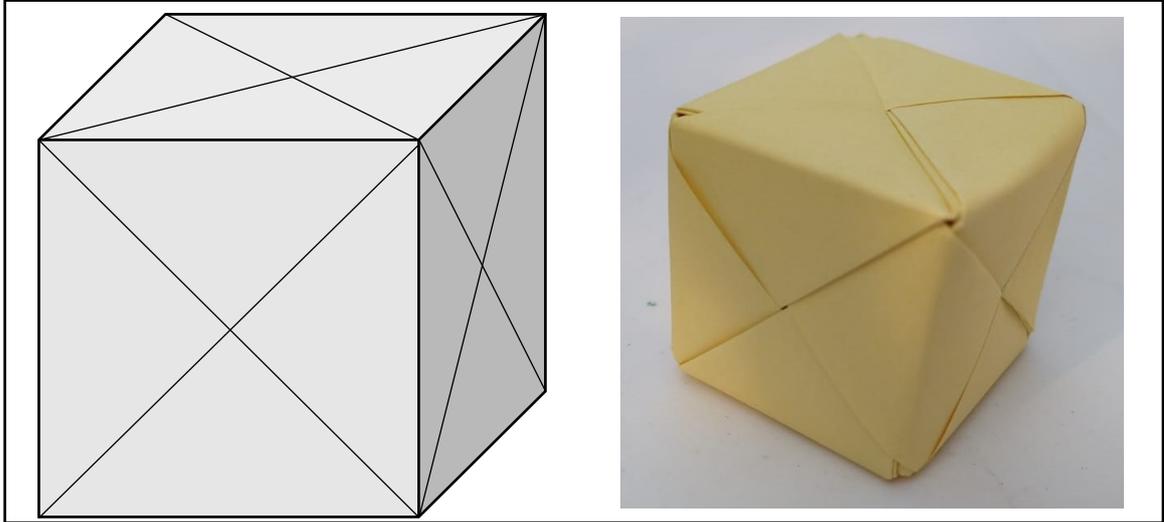


Fonte: Autoria própria (2021).

<sup>8</sup> Disponível em: <http://origaming.blogspot.com/2008/04/cubo-sonobe.html>. Acesso em: 06 ago. 2021.>

11 – Repetir o passo 10 com o restante das peças, para obter cada cubo necessário.

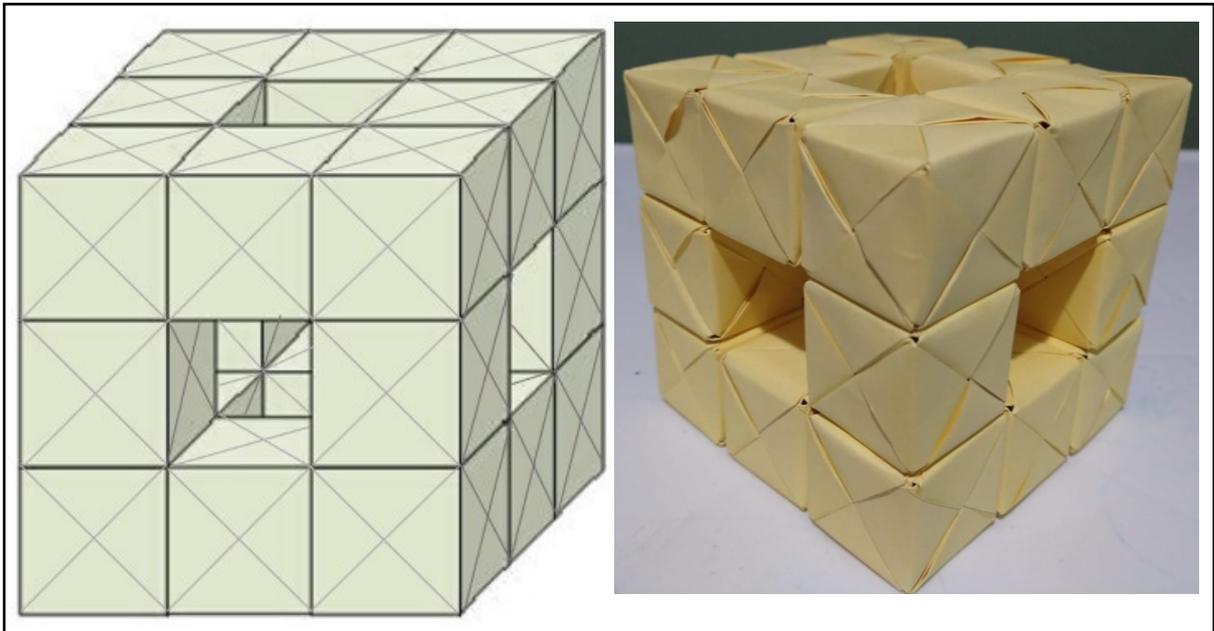
Figura 52 - Cubo Sonobe.



Fonte: Autoria própria (2021).

Utilizando cola, unir os cubos de maneira a obter uma representação para o nível 1 da esponja de Menger, conforme indicado na Figura 53.

Figura 53 - Construção do nível um da Esponja de Menger.



Fonte: Autoria própria (2021).

Na sequência, mostrar o procedimento de cálculo para se obter o volume da Esponja de Menger, descrito na subseção 2.4.1 e que gerou o quadro abaixo.

Quadro 6 - Cópia do Quadro 3.

Nível	Quantidade de cubos retirados	Quantidade de cubos restantes	Volume restante (u.v.)
0	0	1	$V_0 = \left(\frac{20}{27}\right)^0 V_0$
1	$7 = 7 \times 20^0$	$20 = 20^1$	$V_1 = \left(\frac{20}{27}\right)^1 V_0$
2	$140 = 7 \times 20^1$	$400 = 20^2$	$V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V_0$
3	$2800 = 7 \times 20^2$	$8000 = 20^3$	$V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 V_0$
(...)	(...)	(...)	(...)
$n$	$7 \times 20^{n-1}$	$20^n$	$V_2 = \left(\frac{20}{27}\right)^n V_0$

Fonte: Autoria própria (2021).

Em seguida, propor a resolução da questão 11:

**Questão 11 (Proposta pelo autor):**

Considerando o nível 1 da Esponja de Menger, e nomeando de vazios as regiões correspondentes a cada um dos cubos faltantes, calcule a probabilidade de escolhendo ao acaso um ponto P desse nível:

- P pertencer a um dos vazios?
- P não pertencer a um dos vazios?
- P pertencer ao vazio central do cubo, sabendo que pertence a um vazio?
- P pertencer a um vazio sabendo que não pertence ao vazio central do cubo?

**Soluções:**

Obs.: É importante lembrar que as probabilidades procuradas são proporcionais aos valores dos volumes das regiões de interesse e independem das suas posições.

Para auxiliar nos cálculos serão considerados os dados do Quadro 6.

- a) Nesse nível o volume de vazios é equivalente a sete cubinhos de volume  $\left(\frac{1}{27}\right) V_0$  cada, ou seja, um volume total de  $\left(\frac{7}{27}\right) V_0$ . Logo, a probabilidade procurada é:

$$P(P \in \text{vazio}) = \frac{\left(\frac{7}{27}\right) V_0}{V_0} = \frac{7}{27} \cong 25,93\%$$

b) Nesse nível o volume restante é equivalente a vinte cubinhos de volume  $\left(\frac{1}{27}\right)V_0$  cada, ou seja, um volume total de  $\left(\frac{20}{27}\right)V_0$  e, sendo assim, a probabilidade buscada pode ser obtida por:

$$P(P \in \text{restante}) = \frac{\left(\frac{20}{27}\right)V_0}{V_0} = \frac{20}{27} \cong 74,07\%$$

Observe que a probabilidade de P pertencer a um vazio e P não pertencer a um vazio são eventos complementares, pois  $\frac{7}{27} + \frac{20}{27} = \frac{27}{27} = 1 = 100\%$ .

c) Nessa situação tem-se um caso de probabilidade condicional, visto que se sabe que P pertence a um vazio, cuja probabilidade de ocorrência é de  $\frac{7}{27}$ . Segue ainda que a probabilidade de P pertencer a um vazio e esse vazio ser o central pode ser obtida por  $\frac{\left(\frac{1}{27}\right)V_0}{V_0} = \frac{1}{27}$ , pois o volume do vazio central é igual a de um cubinho,  $\left(\frac{1}{27}\right)V_0$ , e a probabilidade é proporcional a esse volume, independentemente de sua posição.

Sendo assim, pela probabilidade condicional, o volume procurado é:

$$P(P \in \text{vazio central} | P \in \text{vazio}) = \frac{\left(\frac{1}{27}\right)}{\left(\frac{7}{27}\right)} = \frac{1}{7} \cong 14,29\%$$

d) Nesse caso, tem-se novamente probabilidade condicional, pois sabe-se que P não pertence ao vazio central, cuja probabilidade de ocorrência é de  $1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ , pois é o evento complementar à P pertencer ao vazio central, que é de  $\frac{1}{27}$ .

Por outro lado, a probabilidade de P pertencer a um vazio, e esse não ser o central, é de  $\frac{\left(\frac{6}{27}\right)V_0}{V_0} = \frac{6}{27}$ , pois o volume total de vazios (exceto o central) é de  $\left(\frac{6}{27}\right)V_0$ , e a probabilidade é proporcional a esse volume, independentemente de sua posição.

Assim, pela probabilidade condicional, o volume procurado pode ser obtido por:

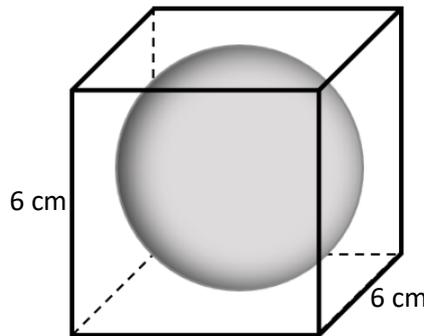
$$P(P \in \text{vazio} | P \notin \text{vazio central}) = \frac{\left(\frac{6}{27}\right)}{\left(\frac{26}{27}\right)} = \frac{6}{26} \cong 23,08\%$$

Nesse momento, para aprofundar o tema, sugere-se resolver com os estudantes as questões 12 e 13:

**Questão 12 (Proposta pelo autor):**

Considere um cubo de aresta medindo 6 cm e uma esfera inscrita nesse cubo. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto P do cubo, qual a probabilidade aproximada de P pertencer também a esfera? Considere  $\pi = 3,14$ .

Figura 54 - Esfera inscrita no cubo.



Fonte: Autoria própria (2021).

**Solução:**

O volume do cubo é igual a  $6^3 = 216 \text{ cm}^3$ .

Segue ainda que, como a esfera é inscrita no cubo, seu raio é igual a metade do comprimento da aresta do mesmo, ou seja, 3 cm.

Assim, o volume da esfera é igual a  $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$ .

Logo, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{36\pi}{216} = \frac{\pi}{6} \cong \frac{3,14}{6} \cong 52,33\%$$

**Questão 13 (Proposta pelo autor):**

Considere que uma esfera de raio 5 cm está dentro de um cilindro de raio da base igual a 8 cm e altura 10 cm. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto P do cilindro, qual a probabilidade aproximada de P pertencer a esfera? Considere  $\pi = 3,14$ .

**Solução:**

O volume do cilindro é igual a  $\pi r^2 h \cong 3,14 \cdot 8^2 \cdot 10 = 2009,6 \text{ cm}^3$ .

Por outro lado, o volume da esfera é  $\frac{4}{3}\pi r^3 \cong \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 \cong 523,33 \text{ cm}^3$

Assim, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{523,33}{2009,6} \cong 26,04\%$$

#### 4.4 Aplicação do conhecimento

Nesse momento, deve-se tratar de forma minuciosa o conhecimento que o estudante vem adquirindo, analisando e interpretando tanto as questões iniciais quanto outras que podem ser compreendidas pelo mesmo conhecimento (DELIZOICOV; ANGOTTI; PERNAMBUCO, 2009).

Para esta sequência, com o objetivo de compor o processo de verificação do conhecimento adquirido pelo estudante em relação ao domínio do tema Probabilidade Geométrica, sugere-se que o professor solicite a resolução das seguintes questões:

##### **Questão 14 - Secretaria da educação do Paraná<sup>9</sup>:**

Um dos estudantes de uma turma desejava mostrar para seus colegas que possuía um ótimo senso de direção. Logo, propôs o desafio de, com os olhos vendados, procurar atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Em certo momento temos a informação de que ele acertou o alvo.

- Encontre a área do alvo.
- Calcule a área da região central do alvo.
- Qual a probabilidade de que o estudante tenha atingido o disco central?

##### **Solução:**

- a) A área do alvo é igual a

$$\pi \cdot r^2 \cong 3,14 \cdot 50^2 = 7850 \text{ cm}^2$$

- b) A área do círculo central é igual a

$$\pi \cdot r^2 \cong 3,14 \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$$

- c) A probabilidade procurada é

$$P = \frac{314}{7850} = 4\%$$

---

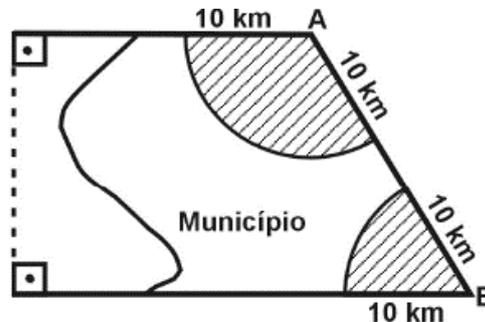
<sup>9</sup> Disponível em:

<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=410>. Acesso em: 14 ago. 2021

**Questão 15 (ENEM, 2001):**

Um município de  $628 \text{ km}^2$  é atendido por duas emissoras de rádio, com antenas situadas nos pontos A e B da Figura 55, e cujos sinais alcançam um raio de 10 km.

Figura 55 - Cobertura de sinal das antenas.



Fonte: ENEM (2001) – caderno amarelo<sup>10</sup> (BRASIL, 2019, n.p).

Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente,

- A) 20%.
- B) 25%.
- C) 30%.
- D) 35%.
- E) 40%.

**Solução:**

Para esta questão deve-se assumir a hipótese de que as chances de um morador estar em qualquer ponto do município em questão é mesma, não existindo locais com maior concentração de pessoas ou locais mais atrativos que outros, mesmo que na realidade isso não seja necessariamente verdade.

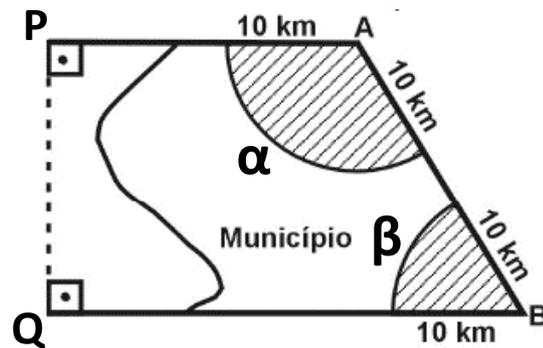
Dito isso, a probabilidade procurada pode ser medida pela razão entre a área do município coberta pelas antenas e a área total do município.

Considerando  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos em A e B, como na Figura 56 a seguir,  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , visto que são ângulos colaterais internos, pois AB é uma transversal as paralelas PA e PB.

<sup>10</sup> Disponível em:

[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2001/2001\\_amarela.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2001/2001_amarela.pdf). Acesso em: 12 ago. 2021

Figura 56 – Cobertura das antenas – resolução do exercício.



Fonte: Adaptado pelo autor, ENEM (2001) – caderno amarelo<sup>11</sup> (BRASIL, 2019, n.p).

Como  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , os dois setores circulares juntos são equivalentes a um semicírculo de raio 10 km e cuja área é:

$$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 10^2}{2} = \frac{100\pi}{2} = 50\pi \text{ km}^2$$

Assim, considerando  $\pi \cong 3,14$ , a probabilidade procurada é de:

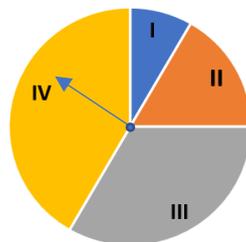
$$P = \frac{50\pi}{628} \cong \frac{50 \times 3,14}{628} = \frac{157}{628} = 0,25 = 25\%$$

**Alternativa correta: B.**

### Questão 16 (Proposta pelo autor):

Considere uma roleta como a da figura abaixo. Se os ângulos centrais dos setores I, II, III e IV medem, respectivamente,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $150^\circ$ , calcule a probabilidade de um jogador ao girar livremente o ponteiro, o mesmo parar na região II.

Figura 57 - Jogo da roleta.



Fonte: Autoria própria (2021).

<sup>11</sup> Disponível em:

[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/provas/2001/2001\\_amarela.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2001/2001_amarela.pdf). Acesso em: 12 ago. 2021

**Solução:**

Considerando  $S_0$  a área total do círculo e  $S_{II}$  a área do setor circular II, temos que  $S_{II} = \frac{1}{6}S_0$ , visto que o ângulo central desse setor é  $\frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$ .

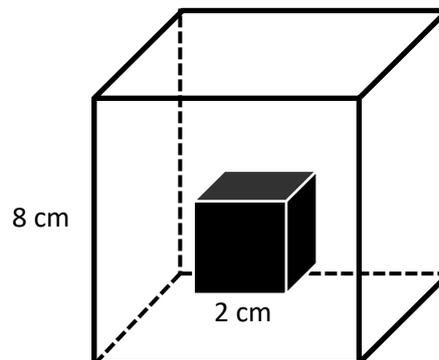
Assim, a probabilidade procurada pode ser obtida pela razão entre  $S_{II}$  e  $S_0$ , ou seja:

$$P = \frac{\left(\frac{1}{6}S_0\right)}{S_0} = \frac{1}{6} \cong 16,67\%$$

**Questão 17 (Proposta pelo autor):**

Considere um cubo de aresta 2 cm, totalmente contido em um outro cubo de 8 cm de aresta, como está representado na figura abaixo. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto pertencente ao cubo maior, qual a probabilidade de ele pertencer também ao cubo menor?

Figura 58 - Cubo contido em outro cubo.



Fonte: Autoria própria (2021).

**Solução:**

A probabilidade desejada pode ser obtida pela razão entre os volumes do cubo menor e do cubo maior, ou seja

$$P = \frac{2^3}{8^3} = \frac{8}{512} \cong 0,0156 = 1,56\%$$

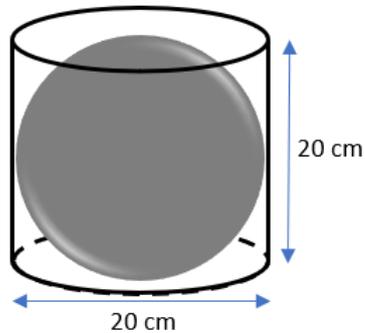
**Questão 18 (Proposta pelo autor):**

Considerando uma esfera inscrita em um cilindro equilátero (altura igual ao diâmetro da base) de raio da base medindo 10 cm, qual a probabilidade de selecionando aleatoriamente um ponto pertencente ao cilindro, este pertencer também a esfera? Considere  $\pi = 3,14$ .

**Solução:**

Pode-se representar a relação entre o cilindro e a esfera pela figura abaixo:

Figura 59 - Esfera inscrita no cilindro.



Fonte: Autoria própria (2021).

Observe que devido ao fato de a esfera estar inscrita no cilindro, seu raio é igual ao raio da base desse cilindro ( $r = 10 \text{ cm}$ ).

Logo, a probabilidade procurada pode ser obtida pela razão do volume da esfera pelo volume do cilindro, ou seja

$$P = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\pi r^2 h} \cong \frac{\left(\frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^3\right)}{3,14 \cdot 10^2 \cdot 20} \cong 0,6667 = 66,67\%$$

## 5 CONCLUSÃO

A proposta geral deste trabalho foi a elaboração de uma sequência de ensino para o Ensino Médio, destinada ao ensino-aprendizagem-avaliação de Probabilidade Geométrica, por meio de resultados gerados da Geometria Fractal, buscando identificar os principais elementos que deveriam compor a mesma.

Optou-se então por utilizar questões que envolvem o tema Probabilidade Geométrica, tanto em um cenário bidimensional quanto tridimensional, algumas relacionadas diretamente com os resultados da Geometria Fractal, e outras não, mas que mostram como o tema é cobrado em provas como vestibulares e o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

Pensando na importância da instrumentalização da prática do professor de Matemática através de uma sequência de ensino clara e precisa, utilizou-se como referencial metodológico a teoria dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990), além de promover a ludicidade e um ensino mais prazeroso, por meio do emprego do conceito de Materiais Manipuláveis.

Dessa forma, conclui-se que o objetivo geral foi alcançado e a questão norteadora a ele respondida.

A sequência de ensino elaborada se apresenta como uma sugestão para o processo didático e seu alcance, bem como possíveis ajustes que venham a ser necessários, só serão percebidos a partir da sua aplicação prática.

Fica então como sugestão de trabalhos futuros a aplicação dessa sequência de ensino.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, J. B. , FERREIRA, D. T.; FREITAS, N. M. da S. Os três momentos pedagógicos como possibilidade para inovação didática. *In: XI ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS*, 2017, Florianópolis. **Anais do XI ENPEC**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2017. Tema: Ensino e aprendizagem de conceitos científicos. Eixo temático: Pesquisa em educação e ciência. Disponível em: [http://www.abrapecnet.org.br/enpec/xi-enpec/anais/lista\\_area\\_01.htm](http://www.abrapecnet.org.br/enpec/xi-enpec/anais/lista_area_01.htm). Acesso em: 21 julho 2021.
- ALCÂNTARA, R. R. **Probabilidade geométrica em lançamentos aleatórios**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Curso de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2014.
- ANGOTTI, J. A; PERNAMBUCO, ALMEIDA, M. M. C. **Ensino de ciências: fundamentos e métodos**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2002.
- ARAÚJO, E. A. DE. **Probabilidade geométrica no ensino médio: uma experiência usando o Geogebra**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Campina Grande, 2017. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2767>. Acesso em: 10 agosto 2021.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal - para a Sala de Aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
- BENDIVES, F. S. NETO, A. C. M. Probabilidade – Miscelânea de Exercícios: Cálculo de Probabilidades – Parte 1. **Portal da OBMEP**, 2019. Disponível em: <https://portaldaobmp.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=51&tipo=7>. Acesso em: 28 julho 2021.
- BISPO, D. M. **A Geometria no Ensino da Probabilidade**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2021. Disponível em: <http://inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 4 julho 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_sit e.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit e.pdf). Acesso em: 15 de agosto de 2020.
- BRASIL. Secretaria da Educação do Paraná. **Dia a Dia Educação**. Curitiba: Secretaria de Educação do Paraná, [s.d.]. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=4>

10. Acesso em: 8 agosto 2021.

CARLONI, P. C. **O Estudo de Probabilidade no Ensino Médio**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória, 2019.

CAVALCANTE, I. D. **Probabilidade Geométrica: uma abordagem através do Método de Monte Carlo e Geometria Fractal**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Maceió, 2017.

COLOMBO, R.; SONOBE, M. Cubo sonobe. **Origami.Hi7.co**, [s.l.], [s.d.]. Disponível em: <http://origami.hi7.co/cubo-sonobe-5768e03892194.html>. Acesso em: 10 agosto 2021.

CURY, H. N.; SANTOS, D.C. DOS. O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos. **Vidya**, Santa Maria, v. 31, n. 1, p. 49 - 61, jan./jun. 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/284>. Acesso em: 28 agosto 2021.

DELIZOICOV, D. Problemas e Problematizações. *In*: PIETROCOLA, M. (org.). **Ensino de Física? Conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2002.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A. **Metodologia do ensino de ciências**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 1990.

FERNANDES, F. M. DOS S. **Resolução de Problemas e Educação Matemática Crítica: uma proposta para o ensino de probabilidade**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Sorocaba, 2018.

FILHO, I. F. B.; LOPES, J. M.; SALVDOR, J. A. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 7, n. 3, p. 47-62, 2013. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/500>. Acesso em: 21 junho 2021.

FREITAS, R. E. A. **Um portal para o cálculo de probabilidades geométricas**. 2009. Trabalho de Graduação (Egenharia da Computação) - Universidade Federal de Pernambuco, Bacharelado em Engenharia da Computação, Recife, 2009.

JUSUS, M. A. DE. **Probabilidade geométrica com abordagem na esperança matemática**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Arraias, 2018.

LESTCH, B. **Intepretações de probabilidade contempladas nas coleções de**

**matemática do PNLD – 2021 para o Novo Ensino Médio.** 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.

LIMA, E. L. **Exame de textos:** análise de livros de matemática para o Ensino Médio. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LUCENA, R. da S. **Laboratório de ensino de matemática.** 1 ed. Fortaleza: Instituto Federal de Educação, 2017.

MATEMÁTICA LISTA 36. **Questões Online.com**, [s.d]. Disponível em: <https://questoesonline.com/lista-de-exercicios/matematica-lista-36/resolver>. Acesso em: 20 agosto 2021.

MELO, M.F. DE; SILVA, A. K. G. da. O problema da agulha de Buffon: formalização, aplicações e interdisciplinaridade entre a matemática e a medicina. **Educação Matemática em Revista**, Fortaleza, v. 24, n. 61, p. 83-97, mar. 2019. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/1043>. Acesso em: 06 janeiro 2021.

MEYER, P. L. **Probabilidade:** aplicações à estatística. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros.** 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

NEMITZ, V. *et al.* **Matemática:** Ensino Médio. v. 8. Curitiba: Editora Positivo Ltda, 2016.

PATERLINI, R. R. O Problema do Jogo dos Discos. **RPM**, São Carlos, v. 48, p. 13 – 20, 2002. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/48/3.htm#:~:text=O%20problema%20dos%20estudantes%20consistia,d%2C%20melhor%20para%20a%20escola.&text=Resolveram%20que%20uma%20probabilidade%20de%2060%25%20favor%3%A1vel%20%3A0%20escola%20seria%20adequada>. Acesso em: 04 junho 2021.

PAULA, C. E. S. DE; SOUZA, T. M. R. DE. Uma Abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, p. 135 – 148, dez. 2017. Disponível em: <chrome-extension://efaidnbnmnnibpcajpcgiclfndmkaj/viewer.html?pdfurl=https%3A%2F%2Fwww.fc.unesp.br%2FHome%2FDepartamentos%2FMatematica%2Frevistacqd2228%2Fv10a10-uma-abordagem-da-geometria-fractal.pdf&clen=757216&chunk=true>. Acesso em: 07 agosto 2021.

PEREIRA, J; OLIVEIRA, A. Materiais manipuláveis e engajamento de estudantes nas aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria. **Ciência & Educação (Bauru)**, Bauru, v. 22, p. 99 - 115, jan./mar. 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/trnC3B5JbdpQ36JYSgKnKvm/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 28 agosto 2021.

PEREIRA, P. B. de S. E. S. *et al.* Definição Clássica e Definição Frenquentista de Probabilidade: uma abordagem em sala de aula. **XII Econtro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, p. 1 – 9, jul. 2016. Disponível em: [chrome-extension://efaidnbnmnnibpcajpcglclefindmkaj/viewer.html?pdfurl=http%3A%2F%2Fwww.sbem.com.br%2Fenem2016%2Fanais%2Fpdf%2F7963\\_3734\\_ID.pdf&clen=364083&chunk=true](chrome-extension://efaidnbnmnnibpcajpcglclefindmkaj/viewer.html?pdfurl=http%3A%2F%2Fwww.sbem.com.br%2Fenem2016%2Fanais%2Fpdf%2F7963_3734_ID.pdf&clen=364083&chunk=true). Acesso em: 29 agosto 2021.

POSSANI, P. C. Artigo Probabilidade Geométrica: História, Paradoxos e Rigor. **ComCiência**, Campinas, n. 143, p. 4, nov. 2012. Disponível em: [http://comciencia.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1519-76542012000900007&lng=en&nrm=iso](http://comciencia.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1519-76542012000900007&lng=en&nrm=iso). Acesso em: 11 agosto 2021.

RITTER, D. **O Ensino de Probabilidade Geométrica: Desafios e Possibilidades**. 2017. Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Centro Universitário Franciscano, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, 2017.

RITTER, D.; BULEGON, A. M. Uma Revisão de Literatura Sobre Estudos Relativos à Probabilidade Geométrica. **Vidya**, Santa Maria, v. 36, n.2, p. 581 – 597, jul./dez. 2016. Disponível em: [file:///C:/Users/User/Downloads/1797-5166-1-PB%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/User/Downloads/1797-5166-1-PB%20(1).pdf). Acesso em: 04 janeiro 2021.

SILVA, A. R. da. **Motivações Matemática por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Natal, 2017.

TAVARES, R. Fractais - Tapete de Sierpinski. **Matemática do Renato**, [s.d]. Disponível em: <http://matematicadoretrato.blogspot.com/2016/04/fractais-tapete-de-sierpinski.html>. Acesso em: 20 agosto 2021.

WAGNER, E. O Problema do Macarrão e um Paradoxo Famoso. **RPM**, Rio de Janeiro, v. 34, [n.p], 1997. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/34/6.htm#:~:text=O%20PROBLEMA%20DO%20MACARR%C3%83O%20E%20UM%20PARADOXO%20FAMOSO&text=Existem%2C%20entretanto%2C%20problemas%20muito%20simples,de%2010%20cm%20de%20raio>. Acesso em: 04 junho 2021.

## **APÊNDICE A – Periódicos consultados**

Quadro 7 - Periódicos consultados.

<b>Periódico</b>	<b>Período</b>	<b>Endereço</b>	<b>Acesso:</b>	<b>Resultados</b>
Aprendizagem significativa em revista	2017 a 2020	<a href="http://www.if.ufrgs.br/asr/">http://www.if.ufrgs.br/asr/</a>	06/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
BOLEMA		<a href="http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema">http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema</a>	06/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Boletim GEPEM	2017 a 2020	<a href="http://r1.ufrj.br/gepem/">http://r1.ufrj.br/gepem/</a>	06/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Ciência e Educação	2017 a 2020	<a href="http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_serial&amp;pid=1516-7313&amp;nrm=iso&amp;rep=&amp;lng=pt">http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_serial&amp;pid=1516-7313&amp;nrm=iso&amp;rep=&amp;lng=pt</a>	06/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Ciência e Ensino	2017 a 2020	<a href="http://prc.ifsp.edu.br/ojs/index.php/cienciaeensino">http://prc.ifsp.edu.br/ojs/index.php/cienciaeensino</a>	06/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática em Foco	2017 a 2020	<a href="http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgem/?page_id=53">http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgem/?page_id=53</a>	06/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática em Revista	2017 a 2020	<a href="http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr">http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr</a>	06/01/2021	- O problema da Agulha de Buffon: formalização, aplicações e interdisciplinaridade entre a matemática e a medicina.
Educação Matemática em Revista - RS	2017 a 2020	<a href="http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS">http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática Pesquisa	2017 a 2020	<a href="http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index">http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado
Ensaio: pesquisa em educação em Ciências	2017 a 2020	<a href="https://periodicos.ufmg.br/index.php/ensaio">https://periodicos.ufmg.br/index.php/ensaio</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Enseñanza de las Ciencias	2017 a 2020	<a href="http://ensciencias.uab.es/">http://ensciencias.uab.es/</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Tecnologia e m Revista	2017 a 2020	<a href="http://srvapp2s.urisan.tche.br/seer/index.php/encitec">http://srvapp2s.urisan.tche.br/seer/index.php/encitec</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Experiências em Ensino de Ciências	2017 a 2020	<a href="http://if.ufmt.br/eenci/">http://if.ufmt.br/eenci/</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Investigação em Ensino de Ciências -IENCI	2017 a 2020	<a href="http://www.if.ufrgs.br/ienci/">http://www.if.ufrgs.br/ienci/</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.

Modelagem na Educação Matemática	2017 a 2020	<a href="http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/index">http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/index</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Perspectivas em Educação Matemática	2017 a 2020	<a href="http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/issue/view/45">http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/issue/view/45</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Praxis educativa	2017 a 2020	<a href="http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa">http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Professor de Matemática On Line	2017 a 2020	<a href="http://pmo.sbm.org.br">http://pmo.sbm.org.br</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia	2017 a 2020	<a href="https://revistas.utfpr.edu.br/reflect">https://revistas.utfpr.edu.br/reflect</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC	2017 a 2020	<a href="http://www.rematec.net.br">http://www.rematec.net.br</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista de Ensino de Ciências e Matemática - RenCiMa	2017 a 2020	<a href="http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/index">http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/index</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista de Educação, Ciências e Matemática	2017 a 2020	<a href="http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm">http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista da Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto	2017 a 2020	<a href="https://periodicos.ufop.br:8082/pp/index.php/revemop">https://periodicos.ufop.br:8082/pp/index.php/revemop</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	2017 a 2020	<a href="http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP">http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista do Professor de Matemática - RPM	2017 a 2020	<a href="http://www.rpm.org.br/">http://www.rpm.org.br/</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT	2017 a 2020	<a href="https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat">https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista Eletrônica de Educação	2017 a 2020	<a href="http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/issue/current">http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/issue/current</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica	2017 a 2020	<a href="http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect">http://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco	2017 a 2020	<a href="http://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula">http://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Revista Internacional de Pesquisa e	2017 a 2020	<a href="http://sbem.iuri0094.hospeda">http://sbem.iuri0094.hospeda</a>	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.

m Educação Matemática - RIPEM		gemdesites.ws/revista/index.php/ripem/index		
Revista Paranaense de Educação Matemática	2017 a 2020	www.fecilcam.br/rpem	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
Vidya	2017 a 2020	http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA	12/01/2021	Nenhum resultado encontrado.
CAPES	2017 a 2020	https://www-periodicos-capes-gov-br.ez1.periodicos.capes.gov.br/index.php?	31/07/2020	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica.</li> <li>- A geometria no ensino da probabilidade.</li> <li>- O ensino de Probabilidade Geométrica: desafios e possibilidades.</li> <li>- Probabilidade Geométrica no Ensino Médio: Uma Experiência Usando o GeoGebra.</li> <li>- Probabilidade Geométrica: Uma abordagem através do Método de Monte Carlo e Geometria Fractal.</li> <li>- Probabilidade Geométrica com abordagem na Esperança matemática.</li> <li>- O estudo de probabilidade no ensino médio.</li> </ul>
Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD.	2017 a 2020	https://bdtd.ibict.br/vufind/	31/07/2020	- Resolução de problemas e educação matemática crítica: uma proposta para o ensino de probabilidade.
Zetetike – Portal de periódicos eletrônicos Científicos – UNICAMP.	2017 a 2020	https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike	08/12/2021	Nenhum resultado encontrado.

Biblioteca digital da USP.	2017 a 2020	<a href="https://www.teses.usp.br/index.php?option=com_jumi&amp;fileid=18&amp;Itemid=85&amp;lang=pt-br">https://www.teses.usp.br/index.php?option=com_jumi&amp;fileid=18&amp;Itemid=85&amp;lang=pt-br</a>	08/12/2021	Nenhum resultado encontrado.
----------------------------	-------------	---	------------	------------------------------

Fonte: Autoria própria (2021).

**APÊNDICE B - Programas de pós graduação consultados**

Quadro 8 - Programas de pós-graduação consultados.

Base de dados	IES	UF	Período	Acesso em	Link	Resultados
Educação em Ciências e Matemática	IFES	ES	2017 a 2020	14/01/2021	<a href="https://educimat.ifes.edu.br/">https://educimat.ifes.edu.br/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação em Ciências e em Matemática	UFPR	PR	2017 a 2020	14/01/2021	<a href="https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/39725">https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/39725</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação em Ciências e Matemática	UFG	GO	2017 a 2020	14/01/2021	<a href="https://portal.revistas.ufg.br/revistas/ufg/">https://portal.revistas.ufg.br/revistas/ufg/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação em Ciências e Matemática	PUCRS	RS	2017 a 2020	14/01/2021	<a href="http://www.pucrs.br/prppg/educem">http://www.pucrs.br/prppg/educem</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação em Ciências e Matemática	UFPA	PA.	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.ppg.ecm.ufpa.br/">http://www.ppg.ecm.ufpa.br/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática	UESC	BA	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.uesc.br/cursos/pos_graduacao/mestrado/ppgem/index.php?item=conteudo_a_presentacao.php">http://www.uesc.br/cursos/pos_graduacao/mestrado/ppgem/index.php?item=conteudo_a_presentacao.php</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática	UFJF	MG	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.ufjf.br/mestradoeducmat/">http://www.ufjf.br/mestradoeducmat/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática	UFOP	MG	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.ppg.edmat.ufop.br">http://www.ppg.edmat.ufop.br</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática	UFMS	MS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="https://repositorio.ufms.br/">https://repositorio.ufms.br/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática	USS	RJ	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.uss.br/posgraduacao/strictoS">http://www.uss.br/posgraduacao/strictoS</a>	Nenhum resultado encontrado.

					ensu/educacao matematica	
Educação Matemática	PUCSP	SP	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www4.pucsp.br/postos/edmat/">http://www4.pucsp.br/postos/edmat/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática	UNIBAN	SP	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.pgsskroton.com.br/anhanguera/programa.php?programa=17">http://www.pgsskroton.com.br/anhanguera/programa.php?programa=17</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática e Ensino de Física	UFSM	RS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://coral.ufsm.br/ppgemef/">http://coral.ufsm.br/ppgemef/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Educação Matemática e Tecnológica	UFPE	PE	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://ufpe.edu.br/matec.net/">http://ufpe.edu.br/matec.net/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	UFAL	AL	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.ufal.edu.br/ppgecim">http://www.ufal.edu.br/ppgecim</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	UEPB	PB	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://ppgecm.uepb.edu.br/index.php?option=com_content&amp;view=article&amp;id=53&amp;Itemid=49">http://ppgecm.uepb.edu.br/index.php?option=com_content&amp;view=article&amp;id=53&amp;Itemid=49</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	CEFET/RJ	RJ	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://dippg.cefet-rj.br/ppecm">http://dippg.cefet-rj.br/ppecm</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	UFPEL	RS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://ppgecm.ufpel.edu.br/">http://ppgecm.ufpel.edu.br/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	ULBRA	RS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.ulbra.br/ppgecim">http://www.ulbra.br/ppgecim</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	FUFS	SE	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/public/prog">https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/public/prog</a>	Nenhum resultado encontrado.

					rama/portal.jsf?lc=pt_BR&id=224	
Ensino de Ciências e Matemática	IFSP	SP	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://mestrado.emensino.spo.ifs.edu.br/">http://mestrado.emensino.spo.ifs.edu.br/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências e Matemática	UNIFRA	RS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.unifra.br/site/pagina/conteudo/51#">http://www.unifra.br/site/pagina/conteudo/51#</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências Exatas	UNIVATES	RS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.univates.br/ppgece">http://www.univates.br/ppgece</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências Exatas	UFSCAR	SP	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.ppgce.ufscar.br">http://www.ppgce.ufscar.br</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	UFRN	RN	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.posgraduacao.ufrn.br/ppgecn">http://www.posgraduacao.ufrn.br/ppgecn</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	UNICENTRO	PR	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www2.unicentro.br/ppgen/">http://www2.unicentro.br/ppgen/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	FURB	SC	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.furb.br/web/2023/cursos/programa-posgraduacao/ensino-de-ciencias-naturais-e-matematica/curso-de-mestrado/processo-seletivo">http://www.furb.br/web/2023/cursos/programa-posgraduacao/ensino-de-ciencias-naturais-e-matematica/curso-de-mestrado/processo-seletivo</a>	Nenhum resultado encontrado.

Ensino de Matemática	UFRJ	RJ	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/mestrado.htm">http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/mestrado.htm</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino de Matemática	UFRGS	RS	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/">http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática	UFABC	SP	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="https://sites.google.com/site/pehfc/m/">https://sites.google.com/site/pehfc/m/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional	Instituições Públicas de Ensino Superior Brasileiras	BR	2017 a 2020	22/05/2021	<a href="http://www.profmat-sbm.org.br/dissemtacoes">http://www.profmat-sbm.org.br/dissemtacoes</a>	Nenhum resultado encontrado.
Programa de pós-graduação em Educação UEL	UEL	PR	2017 a 2020	08/12/2021	<a href="http://www.biblioteca.dig.uel.br/document/results.php?words=jogo+dos+discos">http://www.biblioteca.dig.uel.br/document/results.php?words=jogo+dos+discos</a>	Nenhum resultado encontrado.
Programa de Pós-graduação UEM - Teoria e Prática da Educação.	UEM	PR	2017 a 2020	08/12/2021	<a href="https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/issue/archive">https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/issue/archive</a>	Nenhum resultado encontrado.

Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência	UNESP	SP	2017 a 2020	08/12/2021	<a href="https://www.fc.unesp.br/#!/ensino/pos-graduacao/programas/educacao-para-a-ciencia/publicacoes/serie-ensino-de-ciencias-e-matematica/">https://www.fc.unesp.br/#!/ensino/pos-graduacao/programas/educacao-para-a-ciencia/publicacoes/serie-ensino-de-ciencias-e-matematica/</a>	Nenhum resultado encontrado.
Programa de Pós-Graduação em Educação - Rio Claro	UNESP	SP	2017 a 2020	08/12/2021	<a href="https://ib.rc.unesp.br/#!/pos-graduacao/secao-tecnica-de-pos/programas/educacao/dissertacoes/">https://ib.rc.unesp.br/#!/pos-graduacao/secao-tecnica-de-pos/programas/educacao/dissertacoes/</a>	Nenhum resultado encontrado.

Fonte: Autoria própria (2021).

## **APÊNDICE C – Trabalhos sobre Probabilidade Geométrica**

Cada um dos trabalhos encontrados, de 2017 a 2020, na revisão bibliográfica realizada para a elaboração desse trabalho, está brevemente descrito a seguir.

Ritter (2017), em sua dissertação “O ENSINO DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: DESAFIOS E POSSIBILIDADES”, ressalta que o tema Probabilidade Geométrica normalmente não é trabalhado nas aulas. Investiga de que forma o ensino de Probabilidade Geométrica contribui na aprendizagem do tema probabilidade. Esta realizou uma pesquisa com estudantes da segunda série do Ensino Médio de uma escola de Santa Maria, RS, aplicando a metodologia dos Três Momentos Pedagógicos (TMP) de Delizoicov e Angotti (1990), objetivando, segundo ela, a Aprendizagem Significativa. Nesta pesquisa utilizou diversos recursos: experimentos práticos, jogos manuais e digitais, simulações computacionais, vídeos, situações problema e o software GeoGebra. Para esta pesquisa, foram aplicados questionários pré-teste e pós-teste, tendo um caráter qualitativo, constatando que o ensino de Probabilidade Geométrica contribuiu para reforçar os conhecimentos dos estudantes em relação ao cálculo de áreas de figuras planas, e estimulou a autonomia dos estudantes, bem como a criatividade e o trabalho em grupo.

Na sua dissertação “PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DO MÉTODO DE MONTE CARLO E GEOMETRIA FRACTAL”, Cavalcante (2017), aborda o conceito e aplicações da Probabilidade Geométrica, utilizando o Método de Monte Carlo e o uso de Fractais. Através de uma fundamentação teórica e de métodos computacionais, desenvolve um software aplicável. Aborda ainda outros conceitos relevantes, como estocástica, aleatoriedade e introdução à Geometria Fractal, e exemplifica através de problemas a aplicabilidade do software desenvolvido.

Também, em sua dissertação “PROBABILIDADE GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO: UMA EXPERIÊNCIA USANDO O GEOGEBRA”, Araújo (2017), introduz os conceitos de Probabilidade Geométrica através de problemas voltados ao Ensino Médio, com foco no uso do software GeoGebra. A aplicação do trabalho se deu na 2ª série do Ensino Médio de uma escola na cidade de Mauriti, Ceará. Além disso, aborda diversos problemas que, segundo ele, são quase sempre desconhecidos pelos professores e pela maioria dos estudantes.

Silva (2017), na sua dissertação “MOTIVAÇÕES MATEMÁTICAS POR MEIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE GEOMÉTRICA”, fala sobre cenários históricos e enfatiza os conceitos essenciais da probabilidade e da Geometria para o Ensino Médio. Faz a conexão entre a probabilidade e a geometria

e promove a resolução, segundo ela, de alguns poucos problemas. Reforça a importância da probabilidade em diversas áreas, como Engenharia e Medicina, por exemplo, ressaltando que o trabalho tem por objetivo potencializar a aprendizagem dos temas analisados.

Fernandes (2018), em sua dissertação “RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE”, aborda os fatos históricos e conceituais e as definições e teoremas da probabilidade. Fala sobre o cálculo de probabilidade através da forma clássica e frequentista, aborda a ideia de Probabilidade Condicional e Probabilidade Geométrica e promove uma discussão sobre esta última. Apresenta também uma proposta de ensino para o tema probabilidade, voltada para o Ensino Médio, por meio de sete sequências de atividades e de uma análise do que é esperado no desenvolvimento das mesmas. Ressalta que a proposta não foi aplicada, mas tem intenção de aplicá-la no futuro.

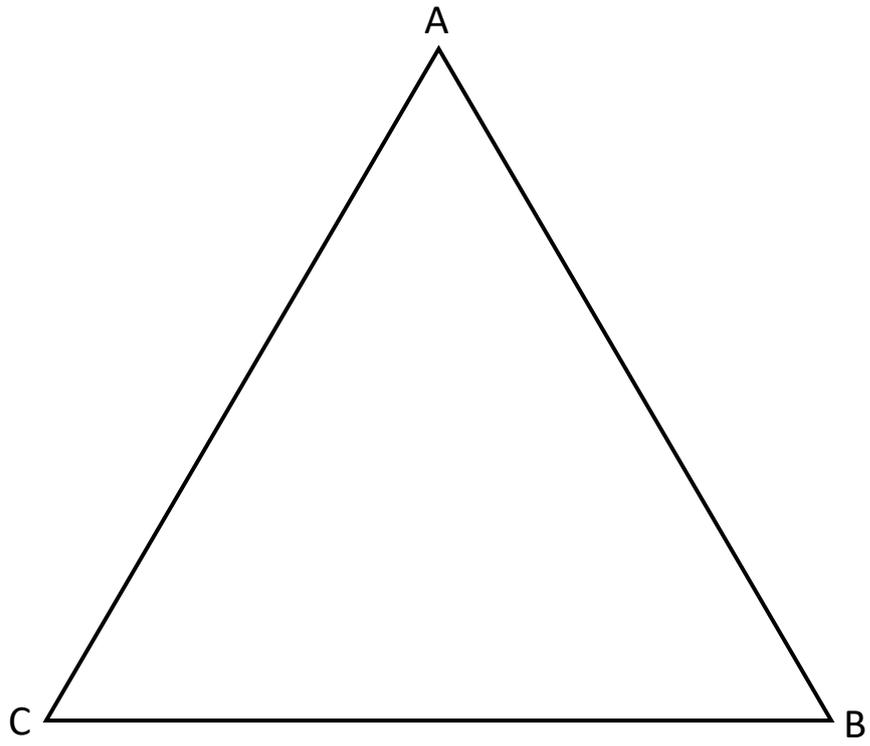
Bispo (2018), com sua dissertação “A GEOMETRIA NO ENSINO DA PROBABILIDADE”, enfatiza que o estudo da história da probabilidade e o tema Probabilidade Geométrica são raramente trabalhados em sala de aula e que há poucos trabalhos científicos nessa área. Neste trabalho, apresenta uma retrospectiva histórica de matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da probabilidade no campo da Geometria. Apresenta problemas onde o espaço tem natureza contínua, relacionados a segmentos de retas, área de figuras planas e volume de sólidos, que apesar de exemplos clássicos, segundo ele, raramente são conhecidos pelos professores.

Jesus (2018), no seu trabalho de dissertação “PROBABILIDADE GEOMÉTRICA COM ABORDAGEM NA ESPERANÇA MATEMÁTICA”, comenta que o estudo de análise combinatória e probabilidade têm grande relação com os jogos de azar, como lançamento de dados e que isso estimula o estudo de probabilidade. Ele ressalta que os conceitos probabilísticos discretos utilizados por Pascal para a resolução do problema de Méré não são suficientes na resolução de problemas de natureza contínua. Fala sobre o problema das agulhas de Buffon e sobre situações onde o espaço amostral é de natureza contínua. Destaca um jogo que denominou de “Girou Ganhou”, aplicado durante uma feira de Matemática para os estudantes de 6º a 9º ano, para explorar o conceito de Probabilidade Geométrica, juntamente com o cálculo da Esperança Matemática.

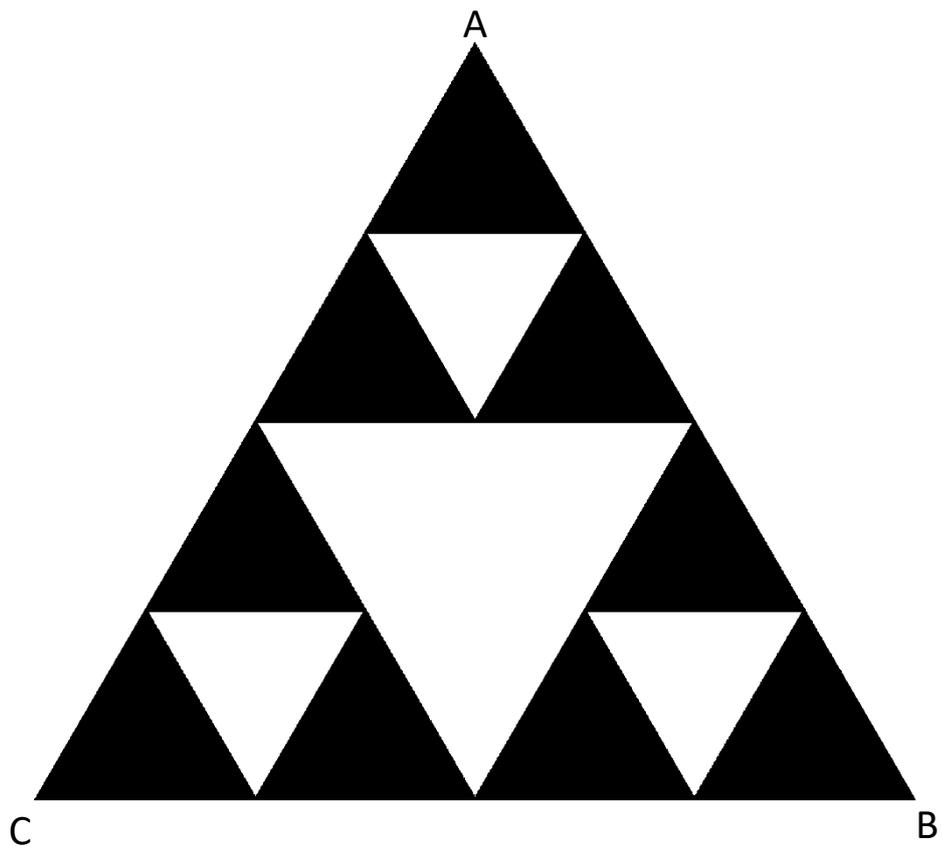
Carlioni (2019), em sua dissertação “O ESTUDO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO”, faz inicialmente um levantamento prévio sobre o conhecimento dos estudantes sobre probabilidade. Na sequência, apresenta aspectos históricos sobre probabilidade e Probabilidade Geométrica. Em seguida, após desenvolver os conceitos e resolver vários problemas sobre o tema, aplica uma sequência didática para o ensino de probabilidade, buscando, segundo ela, uma aprendizagem significativa. Por fim, apresenta os resultados de uma avaliação aplicada sobre o tema abordado.

No artigo “O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFOON: FORMALIZAÇÃO, APLICAÇÃO E INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A MATEMÁTICA E A MEDICINA”, Melo e Silva (2019), comentam sobre a importância da interdisciplinaridade e explicam como a mesma ocorre entre a Matemática e a Medicina por meio da aplicação do famoso problema da agulha de Buffon e o aparelho de Tomografia Computadorizada. No trabalho descrevem detalhadamente os cálculos envolvidos na resolução do problema, que segundo eles diz que se “uma agulha de comprimento  $h$  é derrubada em uma superfície plana (por exemplo, uma mesa), na qual retas paralelas separadas por  $L$  unidades, com  $h \leq L$ , foram desenhadas, então a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas é dada por  $2h/\pi.L$ . Em particular, quando  $h = L$ , a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas  $2/\pi$ ”. Explicam o princípio de funcionamento do aparelho de Tomografia Computadorizada e que basicamente a diferença é que no problema da agulha a mesma é derruba sobre as linhas enquanto que na tomografia computadorizada as retas (feixes planos de radiação paralelos) são lançadas sobre o objeto.

## **APÊNDICE D – Triângulo equilátero**



## **APÊNDICE E – Nível dois do Triângulo de Sierpinski**



## **APÊNDICE F – Construção dos cubos Sonobe**
