Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica

Robert Henrique Gonçalves Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

São José dos Campos
Janeiro, 2022

Título: *Paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Janeiro, 2022

Silva, Robert Henrique Gonçalves

Paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica , Robert Henrique Gonçalves Silva – São José dos Campos, 2022.

viii, 83f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Mathematical paradoxes that occur in Middle and High School

1. Paradoxo Matemático. 2. História da Matemática. 3. Obstáculo Epistemológico. 4. Educação Básica. 5. Fundamentos da Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Grasiele Cristiane Jorge

ROBERT HENRIQUE GONÇALVES SILVA

PARADOXOS MATEMÁTICOS QUE OCORREM NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Presidente da banca: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Banca examinadora:

Profª. Drª. Grasiele Cristiane Jorge

Prof. Dr. Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno

Profª. Drª. Rosa Monteiro Paulo

Data da Defesa: 25 de Janeiro de 2022

“A essência da matemática está em sua liberdade”.

(Georg Cantor)[6]

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que, com sua luz, tem iluminado o caminho.

Em especial à minha esposa Tamy, pela sua cumplicidade, apoio, dedicação e compreensão.

Aos meus pais Roselene e Sávio cujos exemplos de vida edificaram meus valores morais e cujo cuidado e orientação me fizeram crescer.

Aos Professores do Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, por me auxiliarem como mestres e amigos, demonstrando excelência na prática docente.

As amizades que formei na UNIFESP, pois o clima descontraído e o espírito colaborativo formado em sala de aula tornaram o caminho que tivemos de percorrer menos tortuoso.

As amizades que acreditaram no meu potencial. Este reconhecimento me ajudou a não desistir nos momentos difíceis.

Ao meu amigo Elvis, por me apresentar o programa de mestrado PROFMAT e me convencer a ingressar no mesmo.

Ao governo de Dilma Rousseff, pelo incentivo a educação manifestado por investimentos substanciais nesta área e aprovação do Plano Nacional de Educação, aprovado pela LEI Nº 13.005 de 25 de Junho de 2014, que alavancou a criação de programas de pós-graduação em todo o país.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre paradoxos matemáticos que ocorrem na Educação Básica e tem por objetivo fornecer uma referência a professores de matemática interessados em utilizar este tema como recurso didático. Ele contempla um levantamento histórico apontando a importância dos paradoxos no processo de desenvolvimento da Matemática, pois a busca pela solução deles impulsionou o surgimento de várias teorias como a Teoria dos Tipos de Bertrand Russell ou a Teoria da Verdade e o Esquema-T de Alfred Tarski, além de inspirar movimentos de pensamento filosófico como o Logicismo, Intuicionismo e em especial a Escola Formalista de David Hilbert e sua abordagem axiomática dos conceitos matemáticos. O trabalho reserva um capítulo onde se explica porque surgem paradoxos fazendo a distinção entre paradoxos matemáticos e semânticos, uma vez que a causa de cada paradoxo depende essencialmente da linguagem a qual ele se expressa. E também contempla um capítulo que trata dos fundamentos da Matemática necessários para análise aprofundada dos fatores causadores de paradoxos matemáticos, pois o estudo destes paradoxos exige o domínio de alguns assuntos especialmente os axiomas de corpo ordenado e o conjunto dos números reais. Entendendo que o estudo deste tema é inerente ao desenvolvimento da Matemática, a proposta deste trabalho é, além de destacar a importância deste assunto, reinterpretar alguns paradoxos matemáticos classificando-os como obstáculos epistemológicos e não como erros matemáticos. Assim, estudando problemas que envolvem a divisão por zero, a regra de sinais, números complexos e algumas operações com logaritmos por exemplo, é possível fazer com que o ensino de matemática se aproxime da forma com que esta ciência se desenvolveu e com isso desmistificar o caráter infalível atribuído a Matemática, demonstrando que os paradoxos matemáticos sempre estiveram presentes em seu processo de desenvolvimento.

Palavras-chave: 1. Paradoxo Matemático. 2. História da Matemática. 3. Obstáculo Epistemológico. 4. Educação Básica. 5. Fundamentos da Matemática.

ABSTRACT

The present work presents a study on mathematical paradoxes that occur in Basic Education and aims to provide a reference for mathematics teachers interested in using this topic as a didactic resource. It contemplates a historical survey pointing out the importance of paradoxes in the development process of Mathematics, as the search for their solution led to the emergence of several theories such as Bertrand Russell's Theory of Types or Alfred Tarski's Theory of Truth and T-Scheme , in addition to inspiring philosophical thought movements such as Logicism, Intuitionism and especially David Hilbert's Formalist School and its axiomatic approach to mathematical concepts. The work reserves a chapter where it explains why paradoxes arise, distinguishing between mathematical and semantic paradoxes, since the cause of each paradox essentially depends on the language in which it is expressed. It also includes a chapter that deals with the fundamentals of Mathematics necessary for in-depth analysis of the causative factors of mathematical paradoxes, as the study of these paradoxes requires mastery of some subjects, especially the ordered field axioms and the set of real numbers. Understanding that the study of this topic is inherent to the development of Mathematics, the purpose of this work is, in addition to highlighting the importance of this subject, to reinterpret some mathematical paradoxes, classifying them as epistemological obstacles and not as mathematical errors. Thus, studying problems involving division by zero, the sign rule, complex numbers and some operations with logarithms, for example, it is possible to make the teaching of mathematics approach the way in which this science was developed and thereby demystify the infallible character attributed to Mathematics, demonstrating that mathematical paradoxes were always present in its development process.

Keywords: 1. Mathematical Paradox. 2. History of Mathematics. 3. Epistemological Obstacle. 4. Middle and High School. 5. Fundamentals of Mathematics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em seu livro, Riddles in Mathematics, Northrop (2014) define paradoxo como sendo “tudo aquilo que de antemão parece ser falso, mas na realidade é verdadeiro; ou que parece ser verdadeiro, mas na realidade é falso; ou que é simplesmente contraditório. ” (Tradução)

Como veremos adiante, nem sempre a Matemática foi tão exata. Seu desenvolvimento ocorreu de forma escalonada ao longo de séculos. Objetos matemáticos e suas operações, como os conjuntos numéricos ou as funções por exemplo, foram criados e utilizados antes do surgimento das teorias que viriam a definir seus significados. Foi através de revisões e uma sequência de contribuições de diversos matemáticos que os fundamentos da Matemática foram sendo consolidados, e os paradoxos matemáticos desempenharam um papel fundamental neste processo.[6]

Muitos dos conceitos que hoje utilizamos de forma corriqueira já foram verdadeiros obstáculos para muitos matemáticos, por exemplo, ainda no século XIX, Lazare Carnot (1753-1823) não aceitava a existência dos números negativos, pois não conseguia dar algum sentido a eles, isso tornava muitas equações algébricas insolúveis.[1] Pode-se também citar o exemplo dos Pitagóricos com relação ao número $\sqrt{2}$ que representava um verdadeiro paradoxo naquela época, uma vez que sua existência colocava à prova a teoria vigente de que os números naturais eram suficientes para expressar qualquer medida, sendo assim sua existência significava que os números naturais eram insuficientes para estabelecer uma unidade de medida comum entre a diagonal e o lado de um quadrado.

Foi tentando explicar estas e outras contradições que os matemáticos estabeleceram uma ciência que adquiriu o título de “exata”.

Contudo, mesmo hoje com a Matemática já consolidada, resultados paradoxais continuam surgindo no âmbito do ambiente escolar. Para muitos, esse fenômeno pode ser tratado apenas como um equívoco do aluno cometido talvez por não ter memorizado alguma regra ou condição que torna o uso de uma propriedade adequada ou não. De um ponto de vista simplório, para resolver este problema bastaria apontar o erro e reforçar novamente as condições em que as propriedades podem ser utilizadas.

Consideramos a ocorrência destes paradoxos como uma oportunidade de apresentar aos alunos a Matemática tal qual ela foi concebida, como uma construção humana que, analogamente a uma edificação construída sem um projeto, mesmo sendo executada por talentosos construtores, à medida que novas estruturas eram erguidas, patologias estruturais acusavam falhas em seus fundamentos, demonstrando que estes não tinham capacidade de sustentar toda a obra que vinha pela frente, de forma que, muitas vezes, partes desta edificação tiveram de ser desmanchadas para que seus fundamentos pudessem ser reconstruídos, desta vez, com capacidade para sustentar tudo aquilo que outrora não havia sustentação. No entanto, estes fundamentos foram tão bem construídos que se tornaram capazes de sustentar muitas outras estruturas inesperadas, pois a Matemática é uma obra magnífica que nunca parou de crescer.

Nosso objeto de estudo são alguns paradoxos matemáticos que surgem na educação básica, entretanto, antes de discutir este tema, apresentaremos um levantamento histórico de alguns problemas paradoxais que estiveram presentes na Matemática e como estes problemas impulsionaram seu desenvolvimento, o objetivo desta abordagem é estabelecer uma imersão inicial do leitor sobre o assunto, para que ele possa reconhecer o papel histórico dos paradoxos no desenvolvimento da Matemática, estimulando reflexões e questionamentos sobre ele.

De acordo com Almouloud (2007, p. 149) *"a epistemologia é o estudo da constituição dos conhecimentos científicos tanto na sua gênese histórica como nas suas articulações numa dada etapa do desenvolvimento do saber científico"*. Sendo assim, mantendo uma abordagem epistemológica sobre o tema dedicamos um capítulo para explicar por que surgem os paradoxos. Por um lado, paradoxos podem surgir por decorrência de questões de ambiguidades entre palavras e conceitos; questões mais relacionadas a linguagem e ao significado de expressões e palavras, neste caso, tais paradoxos são objeto de estudos do campo da Semântica e são denominados Paradoxos Semânticos; por outro lado, paradoxos podem ser resultado de incoerências na utilização de regras e definições formalmente estabelecidas na área da lógica e da Matemática. Estes são denominados Paradoxos Matemáticos e são o objeto de estudo e investigação deste trabalho.

Entendendo que toda a estrutura na qual a Matemática se fundamenta foi concebida para que não haja paradoxos em seu discurso, podemos dizer que uma proposição, problema ou sentença formulada adequadamente com rigor matemático, em tese, não pode culminar em um paradoxo. Portanto, diante dos paradoxos que ocorrem na educação básica, nos resta investigar quais pressupostos são violados nesse contexto.

Para tanto, dedicamos um capítulo no qual apresentamos alguns fundamentos essenciais para utilização da linguagem matemática praticada na Educação Básica que, de uma forma geral, são constituídos pelas seguintes áreas: Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos e os Números Reais.

Em especial abordaremos o conceito de corpo ordenado, que é a base para a compreensão da estrutura do conjunto dos números reais e suas operações. Assim, este texto constitui um material condensado, com a finalidade de auxiliar na atividade de pesquisa de professores com respeito às definições matemáticas já consolidadas e estruturadas justamente para eliminar contradições que possam ocorrer no discurso matemático.

Finalmente, finalizando este estudo epistemológico a respeito do tema, apresentamos no capítulo 5 alguns paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica.

Como sabemos, um dos objetivos finais do professor é o desenvolvimento do aprendizado de seus alunos, uma das formas de mensurar este aprendizado tem sido a proposição de problemas e posterior identificação dos erros cometidos na solução destes, porém nosso trabalho propõe um caminho diferente, caminho que historicamente culminou em grandes avanços para a Matemática.

Ao invés de fornecer uma lista de questões em que os alunos devam apenas aplicar as propriedades relacionadas a elas, nossa proposta é que o professor apresente um erro que resulte em um paradoxo. Acreditamos que paradoxos matemáticos podem ser usados como um recurso pedagógico a fim de causar um momento de desequilíbrio, que segundo Piaget, é necessário no processo de aquisição do conhecimento. Segundo essa linha de pensamento, inicialmente o conhecimento se encontra em um estado de equilíbrio, nesta etapa o aluno não tem dúvidas quanto a informação que possui, segundo sua percepção toda a informação adquirida lhe é suficiente, em seguida novas informações ou questionamentos são assimilados a o conhecimento que possui já não é suficiente para explicar ou compreender este novo conteúdo, essa é a fase do desequilíbrio, segundo Piaget uma nova aprendizagem é adquirida quando ocorre a reorganização do conhecimento pelo aluno.[1]

Portanto, o objetivo principal deste trabalho é fornecer alguns paradoxos que podem ser usados para causar um momento de desequilíbrio no conhecimento dos alunos, bem como a base teórica necessária para que professores possam desenvolver o assunto em sala de aula explorando o máximo que este tema possa oferecer.

É importante salientar que o presente texto não é composto por planos de aulas baseados em situações problema sobre paradoxos matemáticos. Na verdade ele fornece um estudo epistemológico sobre paradoxos, abrangendo também problemas matemáticos que surgem na educação básica, pois entendemos ser exclusivamente papel do professor traçar a melhor rota para trabalhar qualquer assunto em sua sala de aula, uma vez que tanto a organização do sistema educativo, como currículo, material pedagógico ou cronogramas, quanto outras variáveis didáticas, como a formação do professor, as habilidades matemáticas dos próprios alunos ou os objetivos do Projeto Pedagógico são diferentes em cada instituição de ensino. Portanto, é necessário que haja um processo de transposição didática, em que o professor molda o conhecimento acadêmico produzido por pesquisadores conforme as variáveis didáticas ao qual ele está submetido, tornando este conhecimento adequado ao seu contexto educacional.[1]

2

PARADOXOS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Historicamente resultados paradoxais sempre estiveram presentes em campos variados da Matemática: como no período Helênico, a existência de um segmento incomensurável contradizia a Teoria dos Números da época que afirmava que qualquer parte poderia ser expressa como a razão de dois números naturais; no estudo de séries infinitas, podemos citar o famoso paradoxo de Zenão ou a soma infinita 1-1+1-1+1... denominada série de Grandi que confundiu a mente de muitos matemáticos do século XVII; ou no campo da Teoria dos Conjuntos a descoberta do Paradoxo de Russell colocava a prova um grande tratado denominado “Os Fundamentos da Aritmética” escrito por Friedrich Ludwig Göttlob Frege (1848-1925) antes mesmo de sua publicação.[6]

O surgimento de paradoxos, além de causar perplexidade em todos os períodos da história, impulsionou o desenvolvimento da Matemática servindo como fonte de novas ideias. Por vezes, tais paradoxos abalaram profundamente seus fundamentos e por consequência, estes tiveram de ser revisados e aperfeiçoados.

Vejamos um problema que, tanto impulsionou o desenvolvimento de uma nova forma de operar com grandezas quanto inspirou, séculos mais adiante, a construção do conjunto dos números reais, a famosa descoberta do segmento incomensurável pelos matemáticos pitagóricos.

No sul da Itália por volta do ano 500 a.C., Pitágoras fundou sua escola, onde aconteciam convenções nas quais se discutia questões de cunho filosófico, ciências naturais e Matemática. Muitas descobertas no campo da Aritmética são atribuídas à escola de Pitágoras, como os números figurados, perfeitos, amigáveis, entre outros temas que, posteriormente, serviram como objeto de estudo para muitos matemáticos. Contudo, o estudo destes conceitos não tinha apenas um caráter conceitual. Além disso, os pitagóricos sempre atribuíram um significado místico a tais conceitos, pois acreditavam que os números eram a razão de tudo. Devido a este aspecto, muitos historiadores consideram que a escola pitagórica funcionava também como uma espécie de seita.[6]

No campo da Geometria, é creditado aos pitagóricos a descoberta das chamadas “figuras cósmicas”, que nada mais são do que os sólidos regulares. Entretanto eles apenas conheciam o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. É interessante salientar que o símbolo desta escola era a estrela de cinco pontas, formada pelas diagonais de um pentágono regular conforme figura 1.

Uma característica importante a se destacar é que o ponto de intersecção de duas diagonais que partem de vértices consecutivos deste pentágono, divide cada diagonal em média de extrema razão, mais conhecida como razão áurea, representada pelo símbolo ϕ

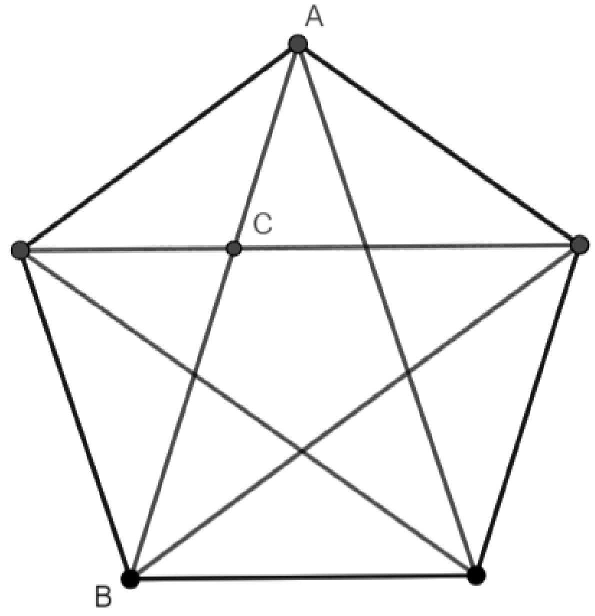

Figura 1: Pentágono Regular e suas diagonais.

(phi). De forma algébrica, considerando os pontos descritos na figura 1, pode-se provar que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB} = \phi.$$

Não se pode afirmar com certeza, mas historiadores acreditam que os pitagóricos já sabiam dividir um segmento em média de extrema razão, apesar de o registro mais antigo desta construção estar no livro II, proposição 11, dos Elementos de Euclides mais de um século posterior a escola pitagórica.[3]

Hoje sabemos que ϕ é um número irracional, mais precisamente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Contudo os pitagóricos consideravam como números apenas os inteiros positivos, o conceito de número racional não existia na época, razões eram apenas relações de proporções entre grandezas de mesma espécie e esta ideia se manteve até os tempos de Euclides, estando presente no livro III dos Elementos de Euclides.

Embora o conceito de número racional não houvesse sido estabelecido pelos Gregos, pois as frações unitárias já eram utilizadas pelos babilônios, existia um conceito geométrico muito parecido, a comensurabilidade.

Duas grandezas de mesma espécie são consideradas comensuráveis quando é possível estabelecer uma unidade de medida comum entre as duas, de forma que o resultado da medição das duas grandezas seja um número inteiro.

Como exemplo, consideremos três segmentos u, A e B conforme a figura a seguir:

Suponhamos que o segmento A seja formado por quatro segmentos u justapostos e, da mesma forma, o segmento B seja formado por três. Podemos considerar, portanto, o

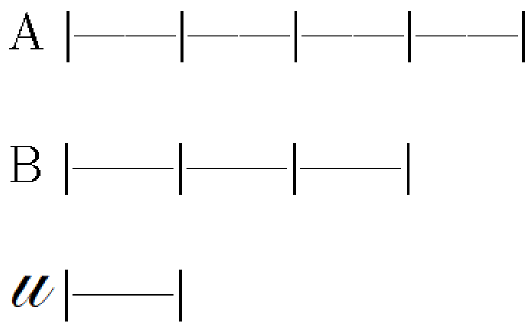

Figura 2: Segmentos Comensuráveis.

segmento u como uma unidade de medida comum entre A e B, de forma que A está para B sob uma razão de 4:3, dizemos então que A e B são segmentos comensuráveis.

Mas será que dois segmentos quaisquer sempre serão comensuráveis? Isso é intuitivamente plausível, pois para estabelecer uma unidade de medida comum entre duas grandezas quaisquer, em tese, bastaria escolher uma fração de uma das grandezas pequena o suficiente para caber um número inteiro de vezes na outra, caso a fração escolhida não atendesse ao critério, bastaria escolher uma fração cada vez menor, até encontrar aquela que servisse ao propósito.

Contudo, isso nem sempre é possível. Existem grandezas que são incomensuráveis. Historiadores acreditam que este problema foi descoberto na segunda metade do século V. Um primeiro exemplo deste fato teria surgido na tentativa de estabelecer uma unidade comum entre o lado e a diagonal de um quadrado, Aristóteles (384-322 a.C.) no final do século IV, ao discutir sobre a conhecida técnica de raciocínio denominada redução ao absurdo, demonstra a consequência paradoxal da existência de tal unidade comum ao afirmar que:

> *"[...] se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis, um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ımpares são iguais aos pares; esta contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas"* (Primeiros Analíticos, I.23,41a29).[25]

Este raciocínio pode ser verificado algebricamente. Caso o lado e a diagonal de um quadrado $ABCD$ fossem comensuráveis, denominado AB e AC como as supostas medidas do lado AB e da diagonal AC respectivamente, por hipótese AB e AC correspondem a dois números inteiros.

Logo, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, formado por dois lados consecutivos deste quadrado e a diagonal adjacente como na figura 3, teríamos $AC^2 = AB^2 + AB^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2AB^2$, sendo a última igualdade um absurdo, pois o expoente do fator 2 da decomposição em fatores primos de AC^2 seria par, enquanto

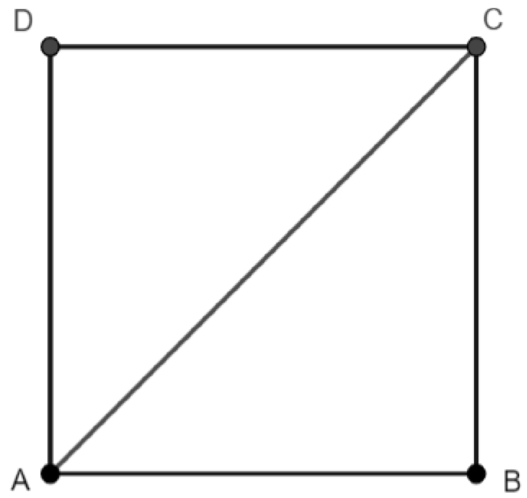

Figura 3: Quadrado de lado AB e diagonal AC.

que em $2AB^2$ o expoente do fator 2 seria ímpar. Conforme a afirmação de Aristóteles, considerar o lado e a diagonal de um quadrado comensuráveis acarreta em um paradoxo.

Existem muitos mitos em torno deste tema, diz a lenda que um integrante da escola de Pitágoras foi lançado ao mar por ter revelado o segredo da existência de grandezas incomensuráveis, uma vez que isto contestava a crença de que tudo poderia ser explicado por números (neste caso, números inteiros positivos). Outros acreditam que isto teria gerado uma crise entre os matemáticos, pois se os números não podiam exprimir a razão entre dois segmentos, como eles poderiam ser a essência de todas as coisas? Considerando verdadeira a premissa que estabelecia os números como a causa de todas as coisas, estes matemáticos estavam diante de um verdadeiro paradoxo.

Contudo, este aparente paradoxo da matemática grega inspirou Eudoxo, um matemático discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, a criar a teoria das proporções, tema do livro V dos elementos de Euclides.[6]

A teoria das proporções de Eudoxo relaciona grandezas da seguinte forma: dizer que A está para B assim como C está para D, significa que devem existir dois números inteiros positivos m e n tais que: $nA = mB$ e $nC = mD$. Porém, se A e B forem incomensuráveis esta equação nunca ocorreria, entretanto, dados dois números inteiros n e m sempre se pode testar:

$$nA = mB, \ nA > mB \text{ ou } nA < mB.$$

Da mesma forma:

$$nC = mD, \ nC > mD \text{ ou } nC < mD.$$

Assim Eudoxo estabeleceu uma igualdade entre as razões $A : B$ e $C : D$, sendo as grandezas comensuráveis ou não da forma que se segue:

Dadas quatro grandezas de mesma espécie A, B, C e D, diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números naturais m e n, se tenha:

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD; \; nA = mB \Leftrightarrow nC = mD; \; nA < mB \Leftrightarrow nC < mD.$$

Caso as grandezas sejam comensuráveis dizer que $A : B = C : D$ significa que existiram m e n tais que $nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$ caso sejam incomensuráveis, se para todos os m e n acorrer $nA > mB \Leftrightarrow nC > mD$ e $nA < mB \Leftrightarrow nC < mD$ então a igualdade $A : B = C : D$ também é válida.[2]

Sem perceber, ao resolver este problema, Eudoxo desenvolveu uma forma de operar com números que nem sequer eram reconhecidos como tal, os números irracionais.

A teoria das proporções de Eudoxo, além de resolver o problema dos incomensuráveis, inspirou mais de 2.000 anos depois a ideia central por trás da construção dos números reais elaborada por Richard Dedekind que será melhor detalhada na subseção 4.3.1 Os Cortes de Dedekind.

Ainda no século V, podemos citar também os famosos paradoxos de Zenão (450 a.C.) relativos a questões sobre o infinito. Segundo estes paradoxos todo tipo de movimento seria impossível, verifiquemos dois deles a fim de compreender esta contradição, o Paradoxo da Dicotomia e da Flecha.

O Paradoxo da Dicotomia diz que para percorrer uma certa distância, primeiramente é necessário percorrer a metade, contudo, antes disso, deve-se percorrer a metade da metade e assim por diante. Se uma distância pode ser dividida indefinidamente, sempre tomando a metade da distância que falta, uma pessoa teria que percorrer infinitas subdivisões de espaço em um período finito de tempo, o que tornaria o movimento impossível.

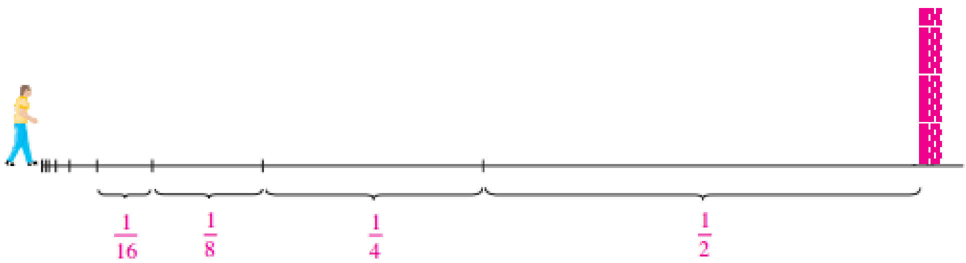

Figura 4: Paradoxo da Dicotomia. Fonte: (STEWART, 2013, p. 33)

O paradoxo da flecha sugere que, caso o tempo fosse formado por instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha estaria sempre parada a cada instante, desta forma qualquer movimento seria uma ilusão.[6]

Ambos os paradoxos foram concebidos questionando-se a teoria atomista da época formulada por Demócrito de Abdera (460 a.C. – 340 a.C.), conforme esta teoria, tempo e espaço seriam compostos por partículas atômicas (indivisíveis).

Hoje estes paradoxos já não constituem problemas, uma vez que o tempo e espaço são entendidos como sendo contínuos, mas a reflexão sobre a nossa percepção espacial é muito oportuna, pois estes paradoxos desafiam um pensamento bastante intuitivo de que a soma infinita de certas quantidades seria infinita ou que a soma de infinitas parcelas que tendem a zero seria convergente, ambos pensamentos equivocados. De fato, ainda na educação básica, no estudo de progressões geométricas, os alunos têm contato com somas infinitas de termos de uma progressão geométrica de razão positiva menor do que um, somas que convergem para um valor finito.

Mesmo antes de ser inteiramente compreendido, o conceito de infinito sempre esteve presente de alguma forma no estudo da Matemática, na proposição 20 do livro IX dos Elementos de Euclides pode-se notar que mesmo sem utilizar a palavra infinito Euclides prova a seguinte proposição:

> *"Os números primos são mais numerosos do que toda a quantidade que tenha sido proposta de números primos."*[5]

Entretanto, questões que envolviam o infinito eram evitadas pelos matemáticos gregos. Conta-se que um sofista contemporâneo de Sócrates chamado Antífon (c. 430 a.C.) propôs que a área do círculo poderia ser calculada através de sucessivas duplicações de um polígono inscrito na circunferência, de forma que a diferença entre as áreas tenderia a zero. Todavia, processos matemáticos infindáveis eram considerados como paradoxos da mesma natureza das grandezas incomensuráveis. Esta questão impôs uma barreira ao cálculo com grandezas que tendiam a zero. Contudo, Eudoxo supera esta barreira mostrando mais uma vez que era um matemático além do seu tempo, e elabora uma forma de calcular com estas grandezas indivisíveis.[6]

Consta no livro XII dos Elementos de Euclides o famoso Método da Exaustão criado por Eudoxo, neste livro, Euclides demonstra com a ajuda deste método que a área do círculo é diretamente proporcional ao quadrado de seu diâmetro.[25]

Arquimedes utilizou deste mesmo método para calcular a área do círculo procedendo da seguinte forma: utilizando polígonos regulares de n lados inscritos e circunscritos na circunferência, ele estabeleceu aproximações sucessivas por falta e por excesso de sua área. A cada passo Arquimedes dobrava o número n de lados, desta forma ele provou que esta área era exatamente πr^2 provando que ela não pode ser nem menor nem maior que este valor. Em termos práticos, ao construir um polígono de 96 lados, Arquimedes demonstra que a razão entre a circunferência e seu diâmetro está compreendida entre $3 + 10/71$ e $3 + 10/70$, ou seja, ele calculou uma aproximação para π.[2]

O grande avanço de Arquimedes foi descrever um método capaz de calcular a área de uma região curva, através de aproximações sucessivas até alcançar a precisão desejada, ou então como dizia Arquimedes “exaurindo-a”, indicando que este processo poderia ser repetido infinitas vezes.[17]

Vale ressaltar que o Método da Exaustão de Eudoxo ou método dos indivisíveis, apesar de servir ao propósito de aproximar áreas de figuras curvas, era vago pois sua aplicabilidade dependia da destreza e habilidade do matemático em perceber qual figura seria mais

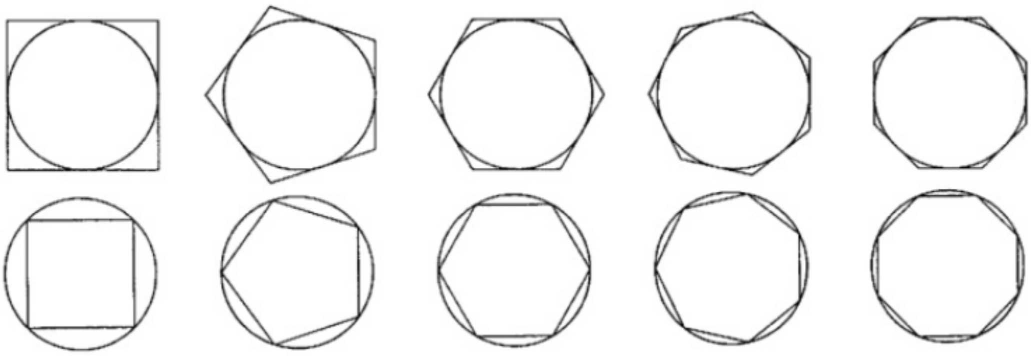

Figura 5: Aproximações da área de um círculo. Fonte: (MAOR, 2008, p. 64)

adequada nas aproximações. Este método foi totalmente superado pelo Cálculo Infinitesimal criado por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), e aperfeiçoado pelos trabalhos de Cauchy e seus estudos sobre limites.[6]

Mesmo com a superação de alguns paradoxos relacionados a este tema, questões sobre o infinito continuaram intrigando matemáticos por séculos. A famosa série de Grandi citada no início deste capítulo causou muito embaraço entre os séculos XVII e XVIII.[6]

Esta série consiste na seguinte soma alternada:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$$

Muitos paradoxos podem surgir ao se aplicar propriedades de somas finitas a expressões envolvendo somas infinitas. Por exemplo, aplicando a lei associativa podemos agrupar os números de forma a concluir que $S = 0$:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0.$$

Ou então $S = 1$ caso o agrupamento seja:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 1.$$

Ainda pode-se considerar $S = 1/2$ fazendo:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots) = 1 - S.$$

$$S = 1 - S \Leftrightarrow 2S = 1 \Leftrightarrow S = 1/2.$$

O famoso matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), conhecido como um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, chegou a afirmar que esta seria a resposta correta para o resultado do somatório da série.

Esta inconsistência que permite que o resultado do somatório de uma série admita vários valores diferentes ocorre pois, por mais que somemos indefinidamente sempre haverá parcelas a somar. Isto significa que não é possível operar com uma soma infinita da mesma maneira que se opera com somas finitas.[2]

Este tipo de problema só começou a ser resolvido no século XIX, mais precisamente foi Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quem deu o primeiro tratamento adequado a questões envolvendo séries infinitas. Em um trabalho publicado em 1812 sobre séries hipergeométricas ele estabelece o conceito de convergência de uma série infinita.[6]

Atualmente uma soma infinita é definida como sendo uma sequência de somas parciais (finitas). De forma que, dada uma série infinita:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Considera-se as somas parciais $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ou seja,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Caso esta sequência seja convergente, isto é, caso o $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, dizemos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S.$$

Mas isto não significa que foram somados todos os termos de forma indefinida, isso significa que a diferença $S_n - S$ pode ser tão pequena quanto quisermos, a partir de certo índice.[16]

Às vezes, alguns resultados em Matemática podem ser paradoxalmente verdadeiros, ou seja, são resultados que parecem ser falsos, mas na realidade são verdadeiros. Muitos deles estão relacionados a questões sobre o infinito e a Série Harmônica representa um bom exemplo de como as verdades matemáticas podem fugir ao senso comum.

A Série Harmônica consiste no seguinte somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Uma condição necessária (mas não suficiente) para que uma série seja convergente é que seu termo geral tenda a zero. Não é difícil demonstrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Contudo, logo no século XIV, o matemático Nicole Oresme (1325-1382) provou que a Série Harmônica é divergente, ou seja, sua soma tende ao infinito. Aparentemente, isto talvez não cause espanto, porém este não é um resultado intuitivo e jamais seria possível prevê-lo experimentalmente.

Consideremos hipoteticamente a existência do computador mais rápido que poderia existir, este computador estaria limitado a efetuar uma soma em 10^{-23} segundos, pois este é o tempo gasto por um fóton para que ele percorra uma distância igual ao diâmetro de um elétron e teoricamente isto poderia ser usado como unidade de medida de um ciclo de máquina por exemplo. Caso este computador estivesse somando termos da Série Harmônica desde a origem do universo, isto é, por aproximadamente 16 bilhões de anos, o resultado da soma estaria em torno de 94,2999![2]

Investigando a fundo os conjuntos numéricos, podemos perceber muitos outros resultados paradoxais envolvendo o infinito. É fácil demonstrar que, entre os números naturais 0 e 1, existem infinitos números racionais. Basta verificar que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Entretanto, eles possuem a mesma cardinalidade, ou seja, existem tantos números naturais quanto números racionais e isto é provado estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os elementos dos dois conjuntos. George Cantor (1845-1918) demonstrou este resultado e muitos outros um tanto quanto perturbadores, como o fato de existir conjuntos infinitos maiores que outros conjuntos também infinitos (a palavra maior neste caso refere-se ao número de objetos no conjunto), e que sempre pode existir um conjunto infinito maior que outro conjunto infinito. Atualmente esta teoria é muito bem aceita e seus princípios são estudados em alguns cursos de graduação em Matemática. Mas na época em que foram publicados, estes resultados eram encarados com ceticismo perante os matemáticos. Um matemático alemão chamado Leopold Kronecker (1823-1891), classificava as afirmações de Cantor como Teologia e não como Matemática.[2] Não se pode condenar o ceticismo com que a Teoria dos Conjuntos foi tratada por alguns matemáticos, os resultados apresentados por Cantor eram tão surpreendentes que ele mesmo chegou a duvidar se referindo a um deles com a frase: “Vejo, mas não acredito”.[13]

Esta teoria é tão intrigante que fugia ao senso de seu próprio criador. Não é por menos que o próprio Cantor, em 1899, identificou um paradoxo curioso relacionado ao conceito criado por ele, o conceito de Número Transfinito para representar a cardinalidade de conjuntos infinitos.

Cantor imaginou a possibilidade de existir o conjunto $\mathcal{U}$ de todos os conjuntos chamado Conjunto Universal. Esta é uma ideia bem intuitiva e plausível para o pensamento da época, pois estava em consonância com a antiga definição de conjunto que permitia essa possibilidade. Logo, este conjunto teria que possuir a cardinalidade máxima, uma vez que seus elementos são conjuntos com todas as cardinalidades possíveis, além das partes desses conjuntos, e como possui todos os conjuntos não existiria a possibilidade de haver qualquer outro conjunto maior. Em particular, este conjunto também deveria ser elemento de si mesmo, fato também permitido conforme a definição de conjunto da época.

Contudo, a existência do conjunto $\mathcal{U}$ contradizia um teorema do próprio Cantor, o qual afirmava que a potência de um conjunto (ou cardinalidade) é sempre menor que a potência do conjunto das partes deste conjunto. Sendo assim, de acordo com o teorema temos que a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ (conjunto das partes de $\mathcal{U}$) é maior que a cardinalidade de $\mathcal{U}$, contradizendo a suposição inicial de que $\mathcal{U}$ possui a cardinalidade máxima.[2]

Pouco antes do início do século XX, muitos paradoxos matemáticos foram descobertos e uma crise se instaurou. Isto causou um movimento da sociedade matemática que procurou rever ou construir novos fundamentos que fornecessem a consistência necessária para que a Matemática fosse de fato uma ferramenta confiável de prova e argumentação.

Russell em 1908 publicou um trabalho denominado Mathematical Logic as Based on the Theory of Types em que ele expõe uma lista com alguns paradoxos conhecidos na época. Apesar de muitos destes paradoxos não serem paradoxos matemáticos, mas sim pertenciam ao campo da Linguística, especificamente da Semântica por estarem relacionados a conceitos semânticos como significado, definibilidade e ao conceito de verdade, ele os considerou como tal e propôs uma solução apresentando o que ele chamou de Teoria dos Tipos, que a grosso modo estabelece uma hierarquia entre os argumentos de uma função proposicional e a proposição em si ou entre elementos de um conjunto e o conjunto em si. Esta teoria será melhor detalhada no próximo capítulo.

Um dos exemplos apontados por Russell foi o chamado Paradoxo do Mentiroso, sua versão mais simples se resume conforme a seguinte sentença:

P: Estou mentindo.

Se P for uma mentira, então quem afirma P diz a verdade, mas se diz a verdade sobre P então quer dizer que está mentindo. Desta forma P se torna uma sentença que não obedece ao Princípio da Bivalência ou Princípio da Não-Contradição que diz que uma proposição ou é verdadeira ou falsa.

O famoso Paradoxo de Russell referente a teoria dos conjuntos fez parte desta lista. Segundo a definição de conjunto da época, todos os conjuntos poderiam ser separados em duas classes, a classe dos conjuntos que são membros de si mesmo, sendo o conjunto $\mathcal{U}$ do Paradoxo de Cantor membro desta classe, e a classe dos conjuntos que não são membros de si mesmo, conjuntos de acordo com a teoria dos conjuntos atual.

É de se esperar que o paradoxo de Cantor nos tenha parecido incoerente, pois estamos familiarizados com a concepção moderna da teoria dos conjuntos que afirma que um conjunto não pode pertencer a si mesmo. Contudo, Russell apresentou um paradoxo relativo a conjuntos que não pertencem a si mesmos, o famoso Paradoxo de Russell.

Consideremos o conjunto $\mathcal{V}$ formado por todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Simbolicamente este conjunto pode ser representado por $\mathcal{V} = \{x/x \notin x\}$. Uma pergunta que pode ser feita é, será que $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$?

A resposta é não, pois se $\mathcal{V}$ pertencesse a $\mathcal{V}$ então $\mathcal{V}$ seria um elemento x tal que $x \notin x$, ou melhor, $\mathcal{V} \notin \mathcal{V}$, o que contradiz a hipótese de que $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$. Mas também $\mathcal{V} \notin \mathcal{V}$, pois se fosse o caso como o conjunto $\mathcal{V}$ não pertence a si mesmo então ele é um elemento de $\mathcal{V}$, isto é, $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$.

Desta forma $\mathcal{V} \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V} \notin \mathcal{V}$.

Um fato curioso com respeito a este paradoxo é que em 1902, antes de publicá-lo em seu trabalho no qual apresenta a teoria dos tipos, Russell o enviou por carta a Göttlob Frege (1848-1925) dias antes deste finalizar a obra em que fundamentava toda a Aritmética utilizando a Teoria dos Conjuntos. Ao receber esta carta, Frege fez a seguinte declaração: *"nada mais indesejável para um cientista do que ver ruir os fundamentos de seu edifício, justamente no momento em que ele está sendo concluído"*.[2]

Outro importante paradoxo apresentado foi o seguinte: considere $\mathcal{T}$ a relação entre duas relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ que existe quando $\mathcal{R}$ não se relaciona com $\mathcal{S}$. Neste caso, se $\mathcal{R}$ não se relaciona com $\mathcal{S}$ então existe uma relação $\mathcal{T}$ entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, logo $\mathcal{R}$ se relaciona com $\mathcal{S}$, uma afirmação completamente contraditória.

Antes da descoberta do Paradoxo de Cantor, em 1897 o italiano Burali-Forti (1861-1931) apontou o primeiro paradoxo na área da Teoria dos Conjuntos relativo ao conceito de número ordinal. Este paradoxo também fez parte da lista de Russell.

O conceito de número ordinal foi estabelecido primeiramente por Cantor para acomodar sequências infinitas e classificar conjuntos cujos elementos admitem uma ordem. John Von Neumann (1903-1957) definiu um ordinal como o conjunto bem-ordenado de todos os ordinais menores que ele. Assim um número ordinal é definido pelos números que o antecedem, prevalecendo em sua definição exclusivamente a natureza da ordem. Por exemplo, o número 4 é definido pelo conjunto bem ordenado 0, 1, 2, 3, observe que os números 0, 1, 2 e 3 também são números ordinais definidos da mesma forma, portanto, todo elemento de um número ordinal é subconjunto deste ordinal, sendo a relação de pertinência a relação que define esta ordem.

Burali-Forti tentou demonstrar que os números ordinais não são ordenados linearmente, ou seja, que existe ao menos um par de números ordinais que não são comparáveis com respeito a relação $\geq$. Supondo por absurdo que a classe $\mathcal{M}$ de todos os ordinais poderiam ser ordenada linearmente ele observou que esta classe possuiria um número ordinal m relativo a ela pois conforme a teoria da época:

1. Todo conjunto bem ordenado possui um único número ordinal relativo a ele.

2. Todo segmento de um número ordinal possui um número ordinal maior que qualquer ordinal do segmento (um segmento de número ordinal é o conjunto de ordinais arranjados em ordem natural que contém os predecessores de todos os seus elementos).

3. O conjunto $\mathcal{M}$ de todos os ordinais em ordem natural é bem ordenado.

Decorre das afirmações 1 e 3 que $\mathcal{M}$ possui um ordinal, denominado m, mas $m \in \mathcal{M}$ uma vez que $\mathcal{M}$ possui todos os ordinais, logo, devido a afirmação 2, $m > m$, uma contradição.

Russell apontou ainda outro curioso paradoxo referente ao que entendemos por definir um número. Este paradoxo foi descoberto por um matemático francês chamado Jules

Richard (1862-1956), conforme nossa adaptação para o português o paradoxo de Richard diz o seguinte:

Se $\mathcal{W}$ denota o conjunto de todos os números naturais que podem ser descritos com menos de 20 palavras na língua portuguesa, este conjunto claramente é finito, pois é finito o conjunto de agrupamentos de menos de 20 palavras na língua portuguesa sendo finito o conjunto de palavras da língua portuguesa. Ao considerar o conjunto complementar de $\mathcal{W}$, denotemos por $\mathcal{W}'$, pelo princípio da boa ordenação $\mathcal{W}'$ possui um menor elemento que podemos chamar de w, sendo assim, w é o menor número natural que não pode ser descrito com menos de vinte palavras da língua portuguesa, contudo, acabamos de descrever w com apenas 18 palavras da língua portuguesa!

Em resposta a esta crise na Matemática, surgiram estudos em três correntes filosóficas: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo, cada corrente sustentando uma solução diferente para os paradoxos em questão.

O movimento logicista foi representado por Russell. Simplificadamente, a principal tese logicista é que a Matemática pode ser completamente sintetizada por conceitos lógicos. E a principal contribuição deste movimento na busca de soluções destes paradoxos foi a Teoria dos Tipos de Russell.

Já a tese intuicionista, cujo principal representante foi Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), sugere que a Matemática deveria ser construída a partir de métodos finitos sobre a sequência dos números naturais. Uma contribuição importante do pensamento intuicionista para a Teoria dos Conjuntos foi a ideia de que um conjunto não pode ser concebido como uma coleção acabada, mas sim formado através de uma lei que estabeleça passo a passo como os elementos de um conjunto devam ser construídos. Essa ideia exclui a possibilidade de existir conjuntos contraditórios como o conjunto de todos os conjuntos.

A escola formalista foi fundada por David Hilbert (1862-1943). Segundo sua linha de pensamento a Matemática consiste no estudo de sistemas simbólicos formais. Logo, teoremas matemáticos são consequências de um sistema axiomático que podem ou não ser fundamentados na lógica. Portanto, de acordo com esta tese é fundamental garantir a consistência do sistema axiomático.[6]

Esta escola obteve grande sucesso. Foram criados sistemas axiomáticos consistentes para cada um dos conjuntos numéricos. Os números complexos, reais, racionais e inteiros, foram todos fundamentados um a partir do outro até alcançar os números naturais. Hilbert tratou de estabelecer uma correspondência entre a Geometria Plana e pares ordenados de números reais e assim os matemáticos convenceram-se de que a consistência da matemática estava restrita à consistência da Aritmética (ou Conjunto dos Números Naturais). Leopold Kronecker (1823-1891) chegou a afirmar que os números naturais foram inventados por Deus e todo o resto era obra do homem.[2]

Foi em meio a esta atmosfera de inovação e estudo que ocorreu o Segundo Congresso Internacional de Matemática em Paris no ano 1900. Neste congresso, Hilbert propôs 23 problemas matemáticos que julgava de suma importância para o desenvolvimento da

Matemática. Tamanho era o entusiasmo de Hilbert sobre sua tese formalista que chegou a declarar em seu discurso que, por mais difíceis que fossem, as soluções para cada problema seriam inevitáveis!

Contudo, o lógico austríaco Kurt Gödel (1906-1978) juntamente com Paul Cohen (1934-2007) demonstrou o estranho resultado de que o primeiro problema da lista de Hilbert "não tinha solução". Uma afirmação completamente paradoxal segundo a tese formalista.

O primeiro problema era determinar a validade da conjectura de Cantor, denominada Hipótese do Continuum. Cantor, provou utilizando o famoso argumento diagonal que a cardinalidade do conjunto dos números reais era maior que a cardinalidade do conjunto dos números naturais. Porém, não soube como provar se era possível existir uma cardinalidade intermediária entre a dos dois conjuntos. Ele conjecturou então que não existia tal cardinalidade. Gödel e Cohen provaram que não era possível afirmar, utilizando a teoria dos conjuntos, nem a veracidade nem a falsidade da Hipótese do Continuum de Cantor.

Esse foi um golpe duro sobre a tese formalista, mas o pior (ou o melhor) ainda estava por vir, o segundo problema de Hilbert era fundamental na sustentação não só de sua tese formalista, mas de toda a Matemática conhecida até aquele momento, o problema se resumia em demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética.

Ninguém imaginava, mas a solução do primeiro problema anunciava que estava por vir outro resultado mais desconcertante e paradoxal. Em 1933 Gödel revelou ao mundo que até mesmo um sistema axiomático apresenta deficiências insuperáveis conforme a lógica clássica.

Gödel provou, entre outras questões, que os princípios da lógica são insuficientes para demonstrar a consistência de qualquer sistema matemático baseado na Aritmética. A consequência deste resultado é o seu famoso Teorema da Incompletude que afirma que: caso um sistema axiomático que fundamente as leis da aritmética seja consistente, então ele será incompleto no sentido de que haverá alguma afirmação com respeito aos números naturais que a teoria não poderá julgar ser verdadeira ou falsa. Logo, algumas afirmações matemáticas podem ser indecidíveis![9]

Assim concluímos este capítulo com a Frase de um dos maiores matemáticos do século XX Hermann Weyl:

> *"Deus existe porque certamente a Matemática é consistente; e o demônio existe porque somos incapazes de provar essa consistência."*[2]

3

POR QUE SURGEM PARADOXOS?

A palavra paradoxo vem do grego e é composta pelo prefixo 'para' que significa contrário a, seguida da palavra 'doxa' que significa juízo. Logo, um paradoxo significa algo contrário ao juízo, que não pode ser compreendido ou algo que não podemos dizer ser verdadeiro ou falso. Com o passar dos anos a palavra paradoxo se tornou sinônimo de contraditório.

O matemático e filósofo norte-americano Willard Van Orman Quine distinguiu três classes de paradoxos; os paradoxos verídicos que são aparentemente contraditórios embora comprovadamente verdadeiros, como a existência dos segmentos incomensuráveis, a divergência da série harmônica, o fato de existir tantos números racionais entre 0 e 1 quanto números pares, ou que uma afirmação mesmo sendo fundamentada num sistema axiomático consistente pode ser indecidível; os paradoxos falsídicos que representam os resultados contraditórios comprovadamente falsos, como por exemplo a convergência da série de Grandi, ou o paradoxo da Dicotomia ou o paradoxo da flecha, ou ainda paradoxos que envolvendo a divisão por zero que resulta em resultados contraditórios como $1 = 2$, ou aplicações inadequadas de regras de potenciação que resultam em afirmações como $-1 = 1$ (os dois últimos paradoxos serão melhor explicados no capítulo 5 Paradoxos na educação básica); e as antinomias (palavra muitas vezes utilizada de forma geral como sinônimo de paradoxo) que são resultados simplesmente autocontraditórios que não se enquadram nas duas classes de paradoxos antecedentes. Como exemplo de antinomia podemos citar o paradoxo do mentiroso, o paradoxo de Cantor, de Russell, de Richard entre tantos outros.

Para compreender porque surgem paradoxos, antes devemos compreender outra classificação fundamental bem diferente da classificação de Quine. São muitos os motivos pelos quais pode ocorrer um paradoxo, contudo esses motivos vão depender da linguagem de origem ao qual o paradoxo foi formulado.

O matemático britânico Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), em seu trabalho publicado postumamente em 1931 denominado The Foundations of Mathematics, faz uma distinção mais apropriada entre os paradoxos. Tomando por base os paradoxos apresentados por Russell descritos no capítulo anterior, Ramsey estabeleceu uma divisão entre os paradoxos separando-os em dois tipos, A e B, de acordo com a teoria requerida para a solução.

Os paradoxos do tipo A podem ser representados pelo paradoxo de Russell (ou o conjunto formado por todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos), o paradoxo da relação entre duas relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ tais que $\mathcal{R}$ não se relaciona com $\mathcal{S}$ e o paradoxo de Burali-Forti (ou o paradoxo do maior número ordinal); e entre os paradoxos do tipo B estão o paradoxo do mentiroso e o paradoxo de Richard (ou o do menor número natural que não pode ser descrito com menos de vinte palavras da língua portuguesa).

De acordo com Ramsey, os paradoxos do tipo A são estritamente matemáticos, isso quer dizer que a causa destes paradoxos está relacionada com a estrutura e conceitos puramente lógicos ou matemáticos, isto significa que estes paradoxos rompem de alguma forma com regras ou axiomas matemáticos ou são consequências de definições matemáticas mal interpretadas ou mal formuladas. Quanto aos paradoxos do tipo B, Ramsey verificou que são compostos por sentenças que não podem ser descritas ou traduzidas apenas por termos lógicos, pois todas elas fazem referência a conceitos além da lógica, como pensamento, linguagem ou simbolismo que não são estabelecidos formalmente, mas empiricamente. Portanto as causas dos paradoxos do tipo B não podem ser explicadas por conceitos da Lógica Formal ou da Matemática, mas sim por conceitos do campo da Linguística, mais especificamente da Semântica, área da linguística responsável pela investigação do significado das palavras e da interpretação de sentenças e enunciados. Sendo assim, os paradoxos podem ser classificados como Paradoxos Matemáticos ou Semânticos.[23]

Nesta mesma época, antes da publicação de Ramsey, Giuseppe Peano (1858-1932), bastante conhecido por ser responsável pela axiomatização do conjunto dos Números Naturais, já havia observado que o Paradoxo de Richard não era de fato um paradoxo matemático, mas sim semântico, uma vez que a causa do paradoxo está relacionada com o conceito de definibilidade que neste caso relaciona o conceito de número a expressões de linguagem utilizadas para defini-lo.[28]

Russell tentou explicar alguns paradoxos semânticos considerando que eles são fruto de uma falha na sintaxe das funções predicado, porém Ramsey aponta que os paradoxos semânticos são na realidade fruto de inconsistências no significado das palavras, no significado da própria verdade (conceitos semânticos) e também da estrutura sintática da linguagem comum que permite a construção de sentenças autorreferentes como o Paradoxo do Mentiroso por exemplo.

Desta forma, investigaremos separadamente como ocorrem os paradoxos semânticos e matemáticos.

3.1 PARADOXOS SEMÂNTICOS

Uma capacidade fundamental das linguagens usuais é a de comportar declarações autorreferentes. Esta capacidade às vezes se mostra como uma deficiência da linguagem, pois mesmo uma frase obedecendo cuidadosamente as regras da língua, ainda assim pode gerar afirmações inconsistentes com a lógica habitual.

Vejamos como é fácil criar paradoxos utilizando sentenças autorreferentes:

- Se Deus existe como um ser criador onipotente, então ele pode criar uma pedra da qual ele mesmo não pode levantar. Mas se ele não consegue levantar uma pedra então ele não é onipotente contradizendo a hipótese de ser onipotente.

- Conheci um professor que diz que só se enganou uma vez na vida, quando pensou estar enganado. Portanto este professor nunca se enganou contradizendo a hipótese de ter se enganado uma vez.

- Em uma cidade há um barbeiro que barbeia somente as pessoas que não se barbeiam, a questão é: O barbeiro se barbeia? Se ele faz a própria barba então ele não pode fazer a própria barba pois ele barbeia apenas as pessoas que não se barbeiam e somente elas, se ele não faz a própria barba então ele deve fazer a própria barba segundo sua regra.

- Toda regra tem uma exceção, mas esta afirmação é uma regra, portanto deve haver uma exceção, mas isso significa que existe uma regra que não tem exceção, fato que contraria a hipótese inicial.

- Isto é uma mentira: se for mentira então a afirmação é verdadeira contrariando a hipótese de ser uma mentira (Paradoxo do Mentiroso).

Observe que expressões paradoxais existem simplesmente por serem possíveis de se formular dentro da estrutura das linguagens naturais. Morais (2013) demonstra de uma forma generalizada que uma linguagem formal obedecendo aos três princípios da lógica clássica e que admite sentenças autorreferentes pode conter sentenças paradoxais. Sendo assim, toda linguagem baseada nessas premissas sempre será inconsistente. Uma forma de evitar tais paradoxos seria criar uma linguagem formal cuja sintaxe seja construída de forma a não permitir sentenças autorreferentes.

Através dos séculos muitos filósofos se debruçaram na tarefa de explicar este fenômeno. O Paradoxo do Mentiroso, por ser bastante antigo, foi objeto de estudo tanto na antiguidade quanto na idade média. Entre os séculos XII e XIII uma das primeiras soluções deste paradoxo, chamada solução cassatória, concluía que quem diz a frase “estou a dizer uma mentira”, na verdade não está a dizer nada. Outra solução medieval restringia o uso da autorreferência não permitindo que parte de sentença pudesse referir-se a sua totalidade, conclusão parecida com a de Russell em sua Teoria dos Tipos.[28]

Contudo, o ponto de partida para os estudos dos paradoxos semânticos ocorreu em 1933 com o trabalho do filósofo matemático polonês Alfred Tarski (1901-1983) sobre o que ele chamou de Teoria da Verdade e o conceito de metalinguagem.[28]

Era fundamental um estudo sobre o conceito de verdade e sobre o que significa atribuir o predicado ‘é verdade’ a uma sentença, pois o significado da mentira possui em si a natureza do que vem a ser um paradoxo.

Uma fábula bastante conhecida dos Irmão Grimm sobre um pastor mentiroso exemplifica bem a natureza paradoxal da mentira. Entediado com a rotina do dia-a-dia um pastor resolveu se divertir contando uma mentira, ele gritava: Um lobo, lobo!! Para que fosse socorrido pelos outros aldeões. Contudo não existia nenhum perigo e os aldeões voltavam furiosos para suas casas. Porém, na presença real de um lobo o pastor pediu socorro e ninguém foi ajudá-lo. Quando o pedido de socorro era mentira, todos acreditavam ser verdade, e quando era verdade, todos acreditaram ser uma mentira. Este é o caráter contraditório da mentira.

Tarski considerou que a verdade é um conceito semântico como a denotação ou ambiguidade mas diferente deles, no sentido de que a verdade se refere às próprias sentenças e expressões da língua. Em um trabalho intitulado: O conceito de verdade nas linguagens formalizadas ele expõe a teoria capaz de quebrar a autorreferência com uma definição adequada do conceito de verdade. Pois segundo seu estudo, "*conceitos semânticos não podem estar na linguagem a qual eles se relacionam e, principalmente, que a linguagem que contém sua própria semântica é inconsistente.*" [18]

Assim ele desenvolveu um método para construir a definição de verdade e a forma como este conceito pode ser atribuído como um predicado. Resumidamente, ele considerou que para cada linguagem "$\mathcal{L}$" deve ser elaborada uma definição formal adequada para o estabelecimento do conceito de verdade em $\mathcal{L}$ utilizando uma metalinguagem $\mathcal{L}$'.

Desta forma, ele cria sua própria definição formal de verdade baseada em uma sentença bicondicional intuitiva e simples, denominada Esquema-T, que concorda tanto com o senso comum quanto com linguagens formais e pode ser generalizado pela sentença:

$$x \text{ é verdadeira se e somente se } p.$$

Sendo p uma frase da linguagem $\mathcal{L}$ e x é o nome da frase p na metalinguagem $\mathcal{L}$'.

Ao exemplificar sua teoria da verdade, Tarski utilizou a sentença n: a neve é branca. Para lhe atribuir um predicado de verdade ele considera a frase entre aspas 'a neve é branca' o nome da sentença n na linguagem $\mathcal{L}$' (metalinguagem de $\mathcal{L}$) e monta e Esquema-T correspondente:

'a neve é branca' é verdadeira se e somente se a neve é branca.

Contudo, observe que elaborando uma frase f que nega a si mesma, por exemplo a frase f: f não é verdadeira.

Podemos tentar elaborar uma sentença bicondicional sem utilizar o conceito de metalinguagem ou esquema-T, obtendo então a seguinte afirmação:

$$f \text{ não é verdadeira é verdadeira se e somente se } f \text{ não é verdadeira.}$$

O que equivale a:

$$f \text{ é verdadeira se e somente se } f \text{ não é verdadeira.}$$

Segundo a lógica clássica isto é uma contradição. De forma generalizada o resultado é sempre o mesmo, qualquer linguagem autorreferente que obedece aos princípios da lógica clássica e que lhe atribuir seu próprio conceito de verdade será inconsistente. Este resultado é o chamado Teorema da Indefinibilidade de Tarski, este teorema foi demonstrado por ele utilizando o Teorema da Diagonalização elaborado por Kurt Gödel para provar que a aritmética também possui afirmações impossíveis de se decidir se são verdadeiras ou falsas. (Para maiores detalhes, as provas de ambos os teoremas se encontram no apêndice.)

Entendendo, portanto, que a causa dos paradoxos vem da incapacidade de se definir nas linguagens não formais um predicado de verdade que possa ser atribuído à própria linguagem, (O paradoxo do mentiroso é sintoma disso pois a formulação do paradoxo pressupõe que seria possível uma frase negar sua própria verdade) a solução encontrada por Tarski foi definir o conceito de verdade de uma linguagem $\mathcal{L}$ utilizando uma linguagem de ordem superior $\mathcal{L}$', ou seja, uma Metalinguagem. Assim Tarski formula uma teoria para hierarquizar a atribuição do predicado de verdade valendo-se do Esquema-T.

Mas ainda existe um problema com a frase f mesmo utilizando o esquema-T para lhe atribuir o predicado de sentença verdadeira. Considerando a frase entre aspas 'f não é verdadeira' o nome de f na metalinguagem $\mathcal{L}$', a frase f se torna um substantivo e se comporta como sujeito da sentença bicondicional do Esquema-T e a predicação de verdade não será sobre a frase, mas sim sobre o nome da frase. Isto resulta em:

'f não é verdadeira' é verdadeira se e somente se$f$ não é verdadeira.

Ou ainda:

'f' é verdadeira se e somente se f não é verdadeira.

Apesar da bicondicional não relacionar o predicado de verdade aos mesmos objetos linguísticos, embutida na sentença f existe uma predicação de verdade de um objeto de $\mathcal{L}$ sobre outro objeto de $\mathcal{L}$, o que de fato se desejava evitar. Neste caso o paradoxo se manteve. Diante deste impasse, Tarski conclui que sentenças deste tipo devem ser proibidas.

Mesmo sendo tecnicamente satisfatória, sua solução limita a capacidade da linguagem não formal. Aceitar que nossa linguagem é incapaz de conter seu próprio predicado de verdade é aceitar que de certa forma tudo que se descreve como verdade não seria válido, uma vez que utilizamos o predicado de verdade sobre a nossa linguagem o tempo todo. Tarski percebeu esse dilema e a solução para ele foi aceitar que a linguagem natural realmente é inconsistente.

Com esta afirmação pode parecer que o trabalho de Tarski foi em vão, contudo ele teve grande importância para o desenvolvimento dos campos de estudos da Semântica e da Filosofia Analítica.

Nas palavras de Tarski:

> *[...] tal como as antinomias da teoria dos conjuntos, em particular a antinomia de Russell [...], foram o ponto de partida para as tentativas bem-sucedidas de uma formalização consistente da lógica matemática, assim a antinomia do mentiroso e outras antinomias semânticas originam a construção da semântica teórica.*(Tarski 1944:348, apud Santos, 2014)

Compreendidas as questões relacionadas à ocorrência de paradoxos semânticos, resta compreender as questões envolvendo os paradoxos matemáticos, objeto principal deste estudo.

3.2 PARADOXOS MATEMÁTICOS

Como já mencionado anteriormente, paradoxos matemáticos sempre ocorreram em momentos diversos da história. Em alguns desses momentos, suas descobertas tiveram grande repercussão, como a que ocorreu no final do século XIX. Estes resultados colocavam em cheque a consistência da Matemática necessária para sustentar sua utilidade. Em decorrência disto, a sociedade matemática, em especial os filósofos matemáticos, mobilizou-se no objetivo de buscar uma solução para tais inconsistências.

A superação dos paradoxos relacionados com a ideia de que um conjunto poderia ser elemento de si mesmo ilustra como o desenvolvimento da linguagem matemática se difere profundamente do desenvolvimento das linguagens não formais. Fora do campo da matemática é possível que um conjunto seja elemento de si mesmo, como por exemplo o conjunto das ideias abstratas ou o conjunto cujos elementos são conjuntos não vazios.

No universo da linguagem e do discurso não há nada de errado com estas ideias, entretanto os paradoxos de Cantor e de Russell revelam que ocorrem contradições matemáticas quando se faz esse tipo de suposição. Então o que ocorre? Por que a Teoria dos Conjuntos não comporta a ideia de um conjunto ser elemento de si mesmo?

A resposta é simples, esta teoria não comporta esta ideia justamente porque o resultado disto é a formação de um paradoxo.

Como veremos na seção 4.1 (Teoria dos Conjuntos), Ernst Zermelo (1871-1953) formulou um importante axioma da Teoria dos Conjuntos o Axioma da Especificação, este axioma define como são formados os conjuntos e, da forma como foi elaborado, ele exclui a possibilidade de um conjunto ser elemento de si mesmo.

Diferentemente do universo do discurso no qual habita a linguagem natural, universo estabelecido de forma empírica por milhares de anos, se adequando às nossas capacidades cognitivas e também às nossas necessidades de comunicação, a Matemática foi constituída como uma linguagem fundamentada na consistência de suas próprias regras e não conforme a demanda do nosso pensamento intuitivo. Neste sentido qualquer tipo de contradição que se apresente em algum campo da matemática só pode ser resultado de dois fatores mutuamente excludentes, ou um dos objetos que compõem a Matemática como axiomas, definições, teoremas, representações simbólicas, etc. foi utilizado de forma incorreta ou então existe uma inconsistência entre esses conceitos exigindo assim uma reformulação.

Em Northrop (2014) é apresentado um exemplo interessante de como ocorre a formalização de conceitos matemáticos. Um lago pode ser definido como uma massa de água totalmente rodeada por uma massa de terra, e uma ilha pode ser definida como uma massa de terra totalmente rodeada por água. Imaginemos, portanto, um planeta cujo hemisfério sul seja totalmente formado de água enquanto que o hemisfério norte seja totalmente formado por terra.

O hemisfério norte seria uma ilha dentro de um lago? Ou o hemisfério sul seria um lago dentro de uma ilha dentro do mesmo lago?

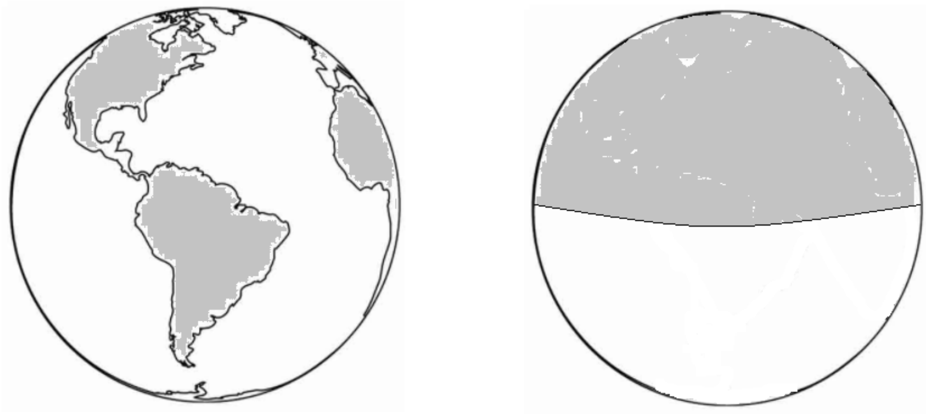

Figura 6: Planeta Terra comparado ao Planeta imaginário com hemisfério norte formado apenas por terra.

Há várias saídas para este problema. Pode-se estabelecer limites para a aplicação da definição de lago. Um lago pode ser definido considerando um volume limite para a quantidade de água ou o conceito de lago pode estar definido apenas nos limites territoriais do hemisfério norte sendo que no hemisfério sul poderíamos utilizar outra definição, talvez o conceito de oceano por exemplo. Enfim, este exemplo simples ilustra bem o processo utilizado pelos matemáticos na construção, ou melhor dizendo, na axiomatização da Matemática. O problema da ilha e do lago sob a perspectiva de um planeta imaginário desempenhou o mesmo papel que as definições inconsistentes desempenharam sob a perspectiva de afirmações contraditórias.

O paradoxo de Cantor foi um dos primeiros paradoxos descoberto na Teoria dos Conjuntos e decorre da definição de conjuntos elaborada pelo próprio Cantor. Esta definição dizia que um conjunto se refere à totalidade de uma coleção de objetos distintos quaisquer. O paradoxo, portanto, era resultado de uma definição ambígua, pois se baseava no conceito de "coleção" que, por não possuir uma definição precisa, podia ser usado livremente, causando resultados paradoxais.

Em meio à crise causada pelos paradoxos, os matemáticos perceberam que o universo do discurso era muito amplo e ambíguo, e imprecisões de linguagem desempenhavam um papel fundamental neste fenômeno. Estes problemas tinham que ser resolvidos, pois a partir de uma contradição, qualquer coisa pode ser provada. Assim algumas saídas foram propostas.

Representando a escola Logicista, Russell em 1906 publica um artigo no qual expõe sua nova teoria denominada Teoria dos Tipos, cujo objetivo principal era solucionar o paradoxo das classes que não pertencem a si mesmas. Para resolver este e outros paradoxos, ele considerou a existência de níveis de linguagem.

A ideia chave desta teoria era a de que uma totalidade não pode ser elemento de si mesma. O raciocínio de Russell era muito parecido com o de Tarski, pois, na teoria dos tipos, conjuntos não podem ser elementos de si mesmos, enquanto que segundo o Teorema da Indefinibilidade, uma linguagem não pode atribuir sobre si mesma o predicado de verdade.

Russell definiu o conceito de “variável aparente” que corresponde a variáveis que não definem claramente qual seu domínio se tornando um conjunto indeterminado de objetos, como no caso do conjunto universal. Logo, Russell afirmava que um conjunto definido por variáveis aparentes não pode ser considerado uma variável aparente, ou seja, o conjunto não pode ser elemento de si mesmo.

Na verdade, para Russell, expressões matemáticas, representações de conjuntos, ou sentenças lógicas eram encaradas como funções proposicionais. De forma que apenas variáveis bem definidas podem servir de argumento para as funções proposicionais. Se a variável não é bem definida, ela pode conter valores verdadeiros ou falsos, assim, não se pode afirmar nada de uma função proposicional que utiliza uma variável aparente como argumento.

Além disso, cada função proposicional possuía um intervalo de significância, isto é, “um tipo”, considerado um valor bem determinado (ou variável real) de um conjunto hierarquicamente inferior à função que os contém como argumento. Da mesma forma, a ordem de cada função proposicional deve ser maior que a ordem das funções as quais ela quantifica.

Para explicar o paradoxo do mentiroso, Russell difere as sentenças entre proposições e juízos, sendo proposições sentenças a respeito de variáveis reais, verdadeiras ou falsas, enquanto o juízo é uma asserção que envolve variáveis aparentes, logo, indeterminadas e neste caso podem ter valores lógicos distintos.

Assim, a noção de verdade para proposições se torna diferente da noção de verdade dos juízos. A sentença do mentiroso “Eu minto” é um juízo pois a mentira não pode se referir a ela mesma (hierarquia dos tipos), como o objeto ao qual se mente não está definido, a sentença a qual se mente é uma variável aparente e, o que se afirma sobre ela é um juízo sobre si mesmo e não uma proposição, podendo ser ou verdadeiro ou falso.

Em suma, a Teoria dos Tipos não resolve os paradoxos mas evita que eles ocorram numa linguagem formal. Esta teoria serviu como inspiração e base em estudos modernos da ciência da computação e da teoria dos conjuntos.

Apesar do sucesso da teoria dos tipos em resolver alguns paradoxos, a tese formalista se mostrou mais adequada não somente para impedir que paradoxos ocorram, mas também para definir o que significa um modelo matemático.

Segundo a tese formalista de Hilbert, a Matemática se resume no estudo de sistemas simbólicos formais. As leis que regem esses sistemas simbólicos são determinadas por axiomas e agrupadas em um sistema axiomático previamente elaborado para ser consistente, ou seja, para que não haja conflitos entre as leis. Um sistema elaborado sobre estas premissas elimina o problema das imprecisões de linguagem, pois todos os seus objetos e relações sobre eles são previamente elaborados de forma a não comportar ambiguidades.

Desta forma, primeiramente os matemáticos definem os objetos com os quais se deseja trabalhar, estes podem ser de qualquer natureza como números, tabelas ou pontos. Em seguida, eles estabelecem um conjunto de regras, que podem ser denominadas axiomas ou postulados, das quais todos os objetos definidos devem obedecer, estas regras é o que chamamos de sistema axiomático, formado por uma lista de propriedades ou operações entre os objetos que expressam seu comportamento.

É interessante observar que tais regras não necessariamente devem obedecer algum tipo de senso comum ou o que a maioria das pessoas entendem como verdade, em vez disso, e tão somente, basta que o sistema axiomático obedeça três condições: que seja consistente, no sentido de que deva existir uma coerência entre as regras (axioma ou postulados), livre de contradições por si mesmas ou por suas consequências; que seja completo, o que significa que o conjunto de axiomas devam ser suficientes para que se possa constatar a veracidade ou falsidade de proposições relativas aos objetos da teoria em questão; e finalmente que deva ser garantida a independência entre os axiomas, isto significa que um axioma não pode ser consequência de outro axioma, assim é garantido que o sistema axiomático seja livre de redundâncias.[2]

Pode parecer estranha a ideia de que uma teoria matemática não necessite "parecer verdadeira" segundo aquilo que o senso comum entenda como verdade. Bertrand Russell afirmou em seu livro Mysticism and logic que a Matemática Pura consiste inteiramente de afirmações (axiomas ou postulados) tais que, por consequência dessas afirmações, se uma proposição relacionada a objetos de um determinado conjunto é verdadeira então esta proposição será verdadeira quando relacionada a qualquer outro objeto deste conjunto. Contudo, não importa se a primeira proposição é de fato verdadeira, menos ainda importa o que supostamente signifique algo ser verdadeiro. Assim, a Matemática pode ser definida como *"um assunto do qual não se pode saber do que estamos falando, nem se o que estamos falando seja verdade."*[20]

Dois exemplos de teoria matemática consistente e contra intuitiva são as geometrias Elíptica e Hiperbólica. Estas geometrias são formadas modificando-se o conhecido axioma das paralelas da geometria euclidiana. Segundo este axioma, por um ponto não pertencente a uma reta t existe apenas uma reta p paralela à reta t. Contudo, na geometria elíptica não existem retas paralelas enquanto que na geometria hiperbólica existem infinitas retas paralelas a uma reta dada.

No capítulo 5, apresentamos uma série de paradoxos que ocorrem na Educação Básica, neste capítulo analisamos ponto a ponto demonstrando que os paradoxos em questão provêm do manuseio inapropriado de propriedades e execuções de operações matemáticas inadequadas e inconsistentes com a teoria axiomática que os fundamentam, ocasionadas pela falta de familiaridade com o rigor matemático do sistema axiomático em questão.

Contudo, não é só devido a isto que ocorrem paradoxos matemáticos, observe o exemplo a seguir que demonstra que a partir de uma hipótese falsa, mesmo efetuando cálculos matemáticos de forma coerente, ainda podemos chegar a um paradoxo.

Seja $P(n)$ a seguinte relação com $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(2n+1)^2}{8}.$$

Esta relação de fato é falsa, uma vez que a fórmula da soma dos n primeiros naturais consecutivos já é conhecida e dada pela fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Contudo, se partirmos de uma hipótese falsa, podemos provar utilizando o princípio da indução matemática que $P(n)$ é verdadeira e assim criar um paradoxo.

Pelo princípio da indução matemática: sejam $r \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ tal que $n \geq r$. Supondo que:

$$\begin{cases} \exists r \in \mathbb{N} \ tal \ \ que \ \ P(r), verdadeiro. \\ P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \geq r. \end{cases}$$

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq r$.

Como base do processo de indução consideremos hipoteticamente existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $P(r)$ é verdadeira.

Basta então demonstrar o passo de indução, isto é, $P(k) \rightarrow P\left(k+1\right), \forall \ k \geq r$.

Adicionando $k+1$ em ambos os lados da igualdade de $P(k)$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(2k+1)^2}{8} + (k+1).$$

Agrupando os termos do segundo membro desta igualdade podemos encontrar a seguinte expressão:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{\left(2(k+1)+1\right)^2}{8}.$$

Ou seja, esta última expressão equivale a $P(k+1)$.

Neste exemplo não foi realizada nenhuma operação inadequada ou inconsistente com as propriedades das operações fundamentais (comutatividade, distributividade, etc.). Foi devido a hipótese falsa considerada como base de indução (existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $P(r)$ é verdadeira) que ocorreu o paradoxo.

É importante compreender que nem sempre nossas indagações com respeito à realidade são precisamente verdadeiras, às vezes apenas uma pequena premissa falsa pode acarretar em um resultado paradoxal, e isto se torna um problema insolúvel caso a premissa falsa não seja identificada.

Ao considerarem a hipótese de que os números naturais são a razão de tudo, os Pitagóricos se depararam com um paradoxal segmento incomensurável (a diagonal do quadrado); ao considerar que o tempo e o espaço eram formados por partículas indivisíveis, Zenão demonstrou que o movimento seria impossível; ao considerar possível somar parcelas infinitamente, Leibniz acreditava que a famosa série de Grandi convergia para ½, mesmo sendo possível apresentar outros resultados diferentes; supor que fosse possível existir o conjunto de todos os conjuntos fez com que Cantor negasse seu próprio teorema; mas a suposição de Hilbert em considerar que todos os problemas tinham solução impulsionou Kurt Gödel a descobrir o Teorema da incompletude. A História mostra que suposições falsas fazem parte do processo de descoberta.

4

OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Um objetivo particular da Matemática é o de servir como instrumento de argumentação e prova de afirmações. Sob este aspecto, qualquer afirmação que passa pelo seu crivo recebe um grau de confiança que muitas vezes pode ser incontestável (especialmente nos casos em que a afirmação se refere a algo relativo à própria Matemática).

Alguns podem se questionar: como a Matemática pode ser tão confiável? A resposta requer cautela, pois, como verificado no capítulo anterior, sempre existiram diversos paradoxos matemáticos que desafiavam a mente de grandes pensadores.

Como vimos, os paradoxos tiveram um importante papel na formação e revisão dos fundamentos da Matemática. A Matemática é uma poderosa ferramenta utilizada para demonstrar afirmações, pois ela foi moldada para este fim. Portanto, é de suma importância compreender o processo de evolução da Matemática e de seus fundamentos para assim entender como ela pôde ser confiável e como proceder diante de paradoxos.

Pode-se citar por exemplo uma importante evolução da Matemática com respeito a sua linguagem. Antes da utilização de uma linguagem formal para expressar sentenças matemáticas, ou seja, uma linguagem moldada para comportar o pensamento matemático e estruturada para ser livre de contradições, estas eram expressas pela linguagem natural. Entretanto, como ilustrado nos capítulos anteriores, a linguagem natural não possui a precisão requerida para que uma argumentação matemática esteja livre de ambiguidades ou contradições.

Percebendo essa deficiência, em 1922 os matemáticos Adolf Fraenkel e Albert Skolem propuseram que a linguagem corrente fosse substituída por uma linguagem formal constituída de poucos símbolos, e uma estrutura sintática suficiente apenas para comportar o raciocínio dedutivo.[2]

Desde então, esta linguagem foi bem aceita pela sociedade científica sendo a linguagem com a qual todos nós estamos familiarizados, composta pelos sinais de operações, juntamente com os símbolos de existência ($\exists$), igualdade ($=$), pertence ($\in$), para todo ($\forall$) entre diversos outros.

Utilizando esta linguagem podemos descrever por exemplo o Teorema de Euler, que diz que todo número natural é a soma de quatro quadrados, da seguinte forma:

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ a, b, c, d, \in \mathbb{N},\ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Esta linguagem formal se mostrou consistente, pois ainda não foi encontrado nenhum paradoxo decorrente de uma expressão deste tipo e por isso ela continua a ser usada ainda hoje para expressar sentenças matemáticas.

Além da linguagem, o próprio conceito de número teve de ser mais bem fundamentado. No final do século XIX os matemáticos perceberam que a formulação de uma teoria consistente dos conjuntos dos números reais era necessária para a compreensão e desenvolvimento do estudo das funções e do método diferencial-integral, criado por Newton e Leibniz e utilizado largamente desde então. Este método carecia de uma sustentação teórica consistente, fato que resultava por vezes em conclusões paradoxais.

Através do sistema axiomático elaborado por Peano composto por 5 axiomas, o conjunto dos números naturais foi estabelecido. Outras construções dos números naturais também tiveram êxito como a de Gottlob Frege (1848-1925) que conseguiu formular as mesmas ideias de Peano utilizando apenas os princípios da lógica e teoria dos conjuntos.

A construção do conjunto dos números reais elaborada por Richard Dedekind (1831-1916), por exemplo, também foi fundamentada utilizando a teoria dos conjuntos e o conjunto dos números racionais que por sua vez eram definidos a partir dos números naturais.

Neste capítulo os fundamentos que serão mais detalhados referem-se ao estudo da Teoria dos Conjuntos, da Lógica Matemática e ao estudo do conjunto dos números reais. Esses três temas são fundamentais para compreensão dos paradoxos matemáticos que serão tratados no capítulo 5. Tais paradoxos provêm exclusivamente de operações aplicadas a elementos do conjunto dos números reais, portanto para que compreendamos melhor os problemas em questão, devemos conhecer a base axiomática que os fundamenta, bem como seu processo de evolução e adaptação.

4.1 TEORIA DOS CONJUNTOS

A Teoria dos Conjuntos é uma das bases utilizadas no desenvolvimento da Matemática. Foi com esta ferramenta que muitos conceitos matemáticos importantes foram construídos, tanto conceitos mais simples como a própria definição de número, quanto teorias mais complexas como a aritmetização da análise. Logo, compreender esta teoria é fundamental para a compreensão de alguns aspectos dos paradoxos matemáticos que são apresentados no capítulo 5.

Os paradoxos de Russell e Cantor, entre outros, frutos de uma teoria pouco formal, demonstraram que a teoria dos conjuntos necessitava de uma fundamentação mais sólida. Como exemplo de inconsistência temos a seguinte definição de Cantor sobre conjuntos: *"por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento."*[2]

Com o objetivo de fornecer uma fundamentação confiável, Zermelo elaborou em 1908 a primeira tentativa de axiomatização da teoria dos conjuntos, seguida por aprimoramentos de Adolf Fraenkel (1891-1956) e de outros matemáticos.

Na verdade, a Teoria dos Conjuntos como a conhecemos é fruto de décadas de pesquisa e conta com a contribuição de vários outros matemáticos como Dedekind, Bolzano e

Russell. É devido a Dedekind, por exemplo, algumas relações básicas entre conjuntos como a união e a interseção e o conceito de subconjunto.

Apesar de não conseguir provar a consistência de seu sistema axiomático, Zermelo em 1908 teve sucesso em solucionar o Paradoxo de Cantor. Seu sistema era composto por sete axiomas descritos a seguir:

- Axioma da extensão: Um conjunto é determinado pelos elementos que ele contém.
- Axioma da especificação ou Axioma da Separação: Considerando um conjunto universo $\mathcal{U}$, e uma propriedade $\mathcal{P}$ sobre os elementos do conjunto $\mathcal{U}$, pode-se separar um conjunto $\mathcal{A}$ cujos elementos satisfazem a propriedade $\mathcal{P}$.
- Axioma dos conjuntos elementares: Afirma a existência do conjunto vazio e o conjunto unitário formado por um objeto de qualquer tipo e o conjunto formado por quaisquer dois objetos dados.
- Conjunto potência: dado um conjunto, existe outro conjunto formado por todos os subconjuntos deste conjunto. (Conhecido hoje como o conjunto das partes).
- Axioma da união: Para qualquer conjunto, a coleção dos membros desse conjunto também forma um conjunto.
- Axioma do infinito: Este axioma afirma a existência de um conjunto infinitamente grande que contém o conjunto vazio e, para cada conjunto $\mathcal{A}$ que ele contém, também contém o conjunto $\{\mathcal{A}\}$. (Assim, este conjunto infinito deve conter $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, ...)
- Axioma da escolha: para qualquer conjunto de pares disjuntos, conjuntos não vazios, existe um conjunto (que é um subconjunto do conjunto de união ao qual o conjunto dado dá origem) que contém exatamente um membro de cada membro do conjunto dado.[33]

Valendo-se da mesma construção do conjunto responsável pelo Paradoxo de Russell, Zermelo demonstrou que, baseado em seu sistema axiomático, não pode existir um conjunto universal tal qual considerado no Paradoxo de Cantor.

Utilizando o axioma da separação ele forma $\mathcal{V}_0$, um subconjunto de um conjunto universo $\mathcal{V}$ hipotético, tal que $\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{V} / v \notin v\}$. Isto é, $\mathcal{V}_0$ é o conjunto formado pelos conjuntos que não são elementos de si mesmos.

Em outras palavras $v \in \mathcal{V}_0$ se e somente se $v \in \mathcal{V}$ e $v \notin v$.

Supondo por absurdo que $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{V}_0$, então $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_0 \notin \mathcal{V}_0$, absurdo, logo $\mathcal{V}_0 \notin \mathcal{V}_0$.

Porém, diante deste resultado, se $\mathcal{V}_0$ fosse elemento de $\mathcal{V}$ então obrigatoriamente $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{V}_0$ pela lei de formação de $\mathcal{V}_0$, outro absurdo.

A conclusão de Zermelo é que $\mathcal{V}_0$ não é elemento de $\mathcal{V}$.

Este resultado demonstra que nem todos os objetos v do domínio $\mathcal{V}$ universal podem ser elementos de um mesmo conjunto, assim, nem mesmo o próprio $\mathcal{V}$ pode ser considerado um conjunto. Outra consequência importante disto é que o subconjunto $\mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{V} / v \notin v\}$ também não existe e com apenas uma demonstração de seu sistema axiomático Zermelo soluciona o paradoxo de Russell e de Cantor!

É importante observar que "nenhum axioma define o que é um conjunto", eles apenas descrevem seu comportamento. Tal como os pontos e retas são conceitos primitivos na geometria, também o conceito de conjunto é considerado como tal.

Após alguns aprimoramentos elaborados por Fraenkel e de outros matemáticos, a teoria moderna dos conjuntos passou a ser definida por uma lista de axiomas denominada Axiomas de Zermelo-Fraenkel descritos a seguir:

- Axioma da extensão: dois conjuntos são iguais se e somente se possuírem os mesmos elementos.
- Axioma da especificação: Dado qualquer conjunto $\mathcal{A}$ e qualquer propriedade $P(a)$, existe um conjunto $\mathcal{B}$ formado pelos elementos $a \in \mathcal{A}$ que satisfazem $P(a)$.
- Axioma do emparelhamento: para quaisquer dois conjuntos existe um conjunto ao qual ambos pertencem.
- Axioma da potência: Para cada conjunto, existe um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos possíveis do conjunto dado (conjunto das partes ou conjunto potência).
- Axioma da união: Dado qualquer coleção de conjuntos, existe um conjunto que contém todos os elementos pertencentes a ao menos um conjunto da coleção dada.
- Axioma do infinito: Existe um conjunto que contém o elemento $\emptyset$ e o sucessor de todos os seus elementos.
- Axioma da escolha: O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é um conjunto não vazio.[10]

Em posse destes axiomas pode-se explicar precisamente o significado de alguns conceitos paradoxais. Por exemplo, a existência do conjunto vazio é uma consequência direta do axioma de especificação. Este axioma diz que "qualquer" propriedade $P(a)$ pode definir um conjunto, o que dizer então das propriedades contraditórias? O conjunto vazio é consequência da existência de propriedades contraditórias como por exemplo o conjunto dos números reais x tal que $x \neq x$, ou dos números naturais y tal que $y < 0$. O conjunto definido por esse tipo de propriedade é o conjunto que não possui elementos, ou seja, o conjunto vazio.

Outro resultado que pode parecer paradoxal é que o conjunto vazio está contido em todos os conjuntos.

Isso decorre da definição da relação de estar contido. Um conjunto não está contido em outro quando existe ao menos um elemento no primeiro que não pertence ao segundo. Portanto, considerando um conjunto $\mathcal{A}$, para demonstrar que $\emptyset \not\subset \mathcal{A}$ devemos exibir algum objeto de $\emptyset$ que não pertence a $\mathcal{A}$, como não existe nenhum elemento que possa caracterizar isso, somos obrigados a aceitar que o conjunto vazio é subconjunto de todos os conjuntos.

A sequência de operações sobre a equação $x^2 + 1 = 0$ pode ilustrar o significado deste resultado. Apenas por inspeção é possível identificar que não existe x real que satisfaça a equação, pois a soma de dois números positivos não pode ser zero. Porém, consideremos a seguinte sequência de operações:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P)}\ \ x^2+1=0 & \text{multiplicando por}\ \ x^2-1 \\
\text{(Q)}\ \ x^4-1=0 & \\
\text{(R)}\ \ x^4=1 & \\
\text{(S)}\ \ x \in \{-1,1\} &
\end{array}
$$

Todo a cadeia P⇒Q⇒R⇒S de implicações está correta, se a equação tiver uma solução, esta pertence ao conjunto $\{-1, 1\}$ que neste caso é representada por $\emptyset$.

É interessante observar que o Axioma do Infinito torna possível a existência do conjunto dos números naturais. Baseando-se no conjunto vazio é possível definir uma sequência infinita de objetos abstratos em uma certa ordem. Basta definir que o sucessor de um conjunto é formado pela união entre o conjunto unitário que contém este com o mesmo conjunto. Sendo assim o sucessor de $\emptyset$ será $\emptyset \cup \{\emptyset\}$, pode-se atribuir a cada sucessor um símbolo de forma que: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ...

Esta construção estabelece a ordem dos elementos através da relação de subconjuntos $0 \subset 1 \subset 2$ e assim sucessivamente.

A teoria dos conjuntos fornece tanto a base da linguagem matemática quanto dos conceitos matemáticos. Contudo, sem o suporte da lógica matemática estes conceitos carecem de significado. Na próxima seção será apresentado como a lógica matemática pode atribuir um significado a tais conceitos, além de fundamentar o processo dedutivo pelo qual os teoremas são estabelecidos através dos axiomas.

4.2 LÓGICA MATEMÁTICA

A Matemática é fundamentada em dois pilares; uma teoria axiomática como ponto de partida que garante a existência de seus elementos e operações básicas, tal base fundamenta a Teoria dos Conjuntos, a Aritmética, a Geometria e os diversos campos da Matemática; e uma lógica que indica como os objetos matemáticos podem se relacionar, se expandir e se transformar em teoremas mais complexos.

Os primeiros trabalhos no campo da lógica surgiram com Aristóteles. Eles foram reunidos em uma obra coletiva conhecida como Organon. Sua abordagem utilizava a linguagem corrente, e suas ideias são consideradas os primórdios da moderna Lógica de Predicados que utiliza linguagem simbólica, quantificadores, conectivos lógicos, etc., para construir expressões formalizadas.

Deve-se aos gregos pré-socráticos os dois princípios fundamentais que definem o conceito da lógica bivalente, largamente utilizada em quase todos os campos da Matemática. Esses princípios foram melhor definidos por Aristóteles e tais definições se mantêm até hoje basicamente sem alterações, são eles: O princípio da não contradição, que afirma que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo e o princípio do terceiro excluído, que afirma que uma proposição ou é verdadeira ou falsa e não existe outra possibilidade.

Um longo período se passou até que surgissem novas contribuições no campo da lógica. Foi Leibniz, por volta de 1685, baseado na terminologia da época, quem definiu os conceitos de união e intersecção de conjuntos, a inclusão de conjuntos, a ideia do conjunto vazio, os conectivos lógicos de conjunção, disjunção e negação, a relação entre a operação de inclusão entre conjuntos e a implicação lógica entre proposições.

Contudo, foi através de um trabalho de George Boole (1815-1864) que o sistema leibniziano, unido à lógica aristotélica, ganhou uma forma simbólica e um sistema algébrico próprio baseado em operadores lógicos e axiomas que descrevem o comportamento destes operadores.

A notação evoluiu e atualmente utilizamos os operadores $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ para designar a conjunção, disjunção, negação, implicação e equivalências entre proposições respectivamente.

Utilizando os operadores lógicos podemos descrever os 2 princípios fundamentais da lógica:

- Princípio da não contradição: $(P \wedge \neg P)$ é falso.
- Princípio do terceiro excluído: $(P \vee \neg P)$ é verdadeiro.

Normalmente, a união e intersecção entre conjuntos é definida utilizando esses operadores, de forma que:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : \ (x \in A) \vee (x \in B)\}. \\ A \cap B &= \{x : \ (x \in A) \wedge (x \in B)\}. \end{aligned}$$

Assim, a prova de diversas propriedades relacionadas à união ou à intersecção de conjuntos se resume ao manejo adequado dos operadores lógicos da conjunção ou disjunção.

A linguagem lógica não é usada somente para definir conceitos matemáticos, é também uma importante ferramenta de validação de argumentos ou prova de teoremas.

Podemos considerar um argumento como uma composição de proposições relacionadas por operadores lógicos. Um argumento é considerado uma tautologia quando seu valor lógico é sempre verdadeiro. O conceito de tautologia assume um papel importante pois, como afirmou Russell (2007), a Matemática consiste no estudo das tautologias. Essa definição de tautologia foi dada por Wittgenstein em sua publicação denominada Tractatus Logico-Philosophicus[23], em suma, uma tautologia seria o oposto de uma contradição.

Considerando duas proposições A e B, pode-se formar a seguinte tautologia largamente utilizada em provas matemáticas:

$$A \to B \leftrightarrow \neg B \to \neg A.$$

A expressão $\neg B \to \neg A$ é chamada contrapositiva da expressão $A \to B$ e as duas expressões são equivalentes, a prova desta equivalência é simples: primeiro prova-se que $A \to B$ implica $\neg B \to \neg A$. Por hipótese $A \to B$, queremos provar que $\neg B$ implica em $\neg A$. Supondo $\neg B$ verdadeira, se $\neg A$ não fosse verdadeira, pelo princípio do terceiro excluído, A seria verdadeira. Mas por hipótese isto implica que B seria verdadeira e pelo princípio da não contradição isso seria um absurdo, logo, não podemos supor $\neg A$ não verdadeira. Assim $\neg A$ é verdadeira e $\neg B \to \neg A$.

Para demonstrar a equivalência entre as expressões, também deve-se demonstrar a validade do argumento recíproco, ou seja, $\neg B \to \neg A$ implica em $A \to B$. Isto decorre da prova anterior simplesmente denominando $\neg B$ por A e $\neg A$ por B.

A prova por contraposição é muito útil, por exemplo, para provar que todo número primo maior que 2 é ímpar, basta utilizar a forma contrapositiva da expressão, isto é, todo número par menor ou igual a 2 é primo, pois como constatamos, as expressões são equivalentes. Neste caso, provar o argumento contrapositivo é mais fácil que provar o argumento original. Sendo assim, como 2 é o único número par menor ou igual a dois e é primo, por demonstração direta, o argumento contrapositivo é verdadeiro e, portanto, o argumento original (todo número primo maior que 2 é ímpar) é verdadeiro.

A prova por absurdo é outra importante ferramenta que usa princípios lógicos para demonstrar a veracidade de proposições. Novamente considerando duas proposições A e B, para provar a implicação $A \to B$, basta supor B falsa, sendo A verdadeira por hipótese a conjunção $A \land \neg B$ teria que ser verdadeira. Caso a conjunção nos leve a uma contradição, somos obrigados a aceitar B verdadeira.

Podemos provar por absurdo esta mesma afirmação considerando as proposições:

$$A = n \text{ é primo maior do que } 2.$$
$$B = n \text{ é impar.}$$

A afirmação pode ser resumida de forma simbólica $A \to B$. Procedendo com a prova por absurdo, supondo que B é falsa, temos que n é par, isto significa que existe k pertencente aos naturais tal que $n = 2k$. Por hipótese $n > 2$ e primo, assim $k \neq 1$ obrigando n a ser um número composto e não primo. Isso contraria a hipótese de n ser primo e por redução ao absurdo n não pode ser par.

Visto que a teoria dos conjuntos pode ser explicada através da relação entre operadores lógicos, é natural supor que qualquer conceito matemático poderia ser deduzido apenas de conceitos lógicos. Baseado nesta ideia, Frege, Russell e outros matemáticos consideraram que toda a Matemática seria um ramo da Lógica e inauguram o pensamento logicista.

Valendo-se de todo o aparato simbólico formalizado pelos seus antecessores, Russell publica sua famosa obra Princípia Mathemática, identificando boa parte da Matemática da época com a Lógica e, a partir de princípios e postulados da própria Lógica, ele deduz o conjunto dos números naturais.[6]

Foi Frege quem atribuiu os valores verdadeiro e falso para proposições. Em um de seus artigos, ele afirma que *"a palavra verdadeiro determina o objeto de estudo da lógica exatamente da mesma maneira que a palavra belo o faz para a estética e a palavra bom para a ética"*.[29]

Mais tarde, como já mencionado, através dos estudos de Tarski o conceito de verdade se tornou um alicerce na análise lógica e semântica da própria linguagem corrente.

Como podemos perceber, a lógica utilizada nos princípios fundamentais da Matemática foi uma construção coletiva de séculos de trabalho. Este campo de pesquisa continua crescendo ainda hoje. Foram elaboradas outras lógicas que não a bivalente, chamadas Lógicas Não Clássicas, como a Paraconsistente criada pelo brasileiro Newton da Costa (1929-), que nega o princípio da não contradição; ou a Lógica Multivalente que tem como ponto de partida a negação do princípio do terceiro excluído.

Os Paradoxos que serão tratados neste trabalho são simplesmente contradições internas à lógica bivalente. Grande parte da Matemática é baseada nesta concepção aristotélica que exclui ambiguidades. Contudo, esta não é a única forma de entender o mundo, a Física Quântica é melhor explicada pela Lógica Multivalente enquanto a Lógica Paraconsistente auxilia nos estudos de teorias inconsistentes, mas não triviais.

4.3 DEFINIÇÃO DE CORPO ORDENADO E OS NÚMEROS REAIS

Quase toda a Matemática ensinada na Educação Básica refere-se ao conjunto dos números reais com suas propriedades e operações, pois este amplo conjunto agrega os números inteiros positivos e negativos, racionais e irracionais, números que são soluções de vários problemas elementares presentes na história da civilização e que hoje são revistos pelos alunos. A medida de segmentos incomensuráveis discutidos no capítulo 2 como por exemplo, a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário ou a razão áurea são grandezas expressas pelos números irracionais $\sqrt{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ respectivamente; os irracionais e os números negativos também são soluções de vários problemas algébricos conhecidos pelos hindus desde o século VII, como as soluções de uma equação quadrática e diversos outras equações que hoje fazem parte do currículo escolar; os números racionais que hoje expressam proporções, divisões e aproximações de números irracionais que já eram utilizadas bem antes da era moderna, como consta no papiro Rhind

(1650 a.C.) a aproximação de $\pi = 256/81$ ou também a aproximação de π pelo intervalo $223/71 < \pi < 22/7$ feita por Arquimedes (287 a.C., 212 a.C.), ou ainda a aproximação de $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3)(4)} - \frac{1}{(3)(4)(34)}$, elaborada pelos hindus entre 500 a.C. e 200 a.C. como consta nas antigas Sulvasūtras (regras do cordão), e tantas outras aproximações presentes tanto em textos históricos quanto no dia-a-dia.[6]

Desta forma, podemos verificar que todos os conjuntos numéricos que compõem os números reais foram utilizados de alguma forma em diversos períodos da história. Contudo, a fundamentação teórica destes números ocorreu de forma tardia em meados do século XIX, pois foi neste período que houve uma crise dos fundamentos matemáticos impulsionada pela descoberta de uma série de paradoxos nas áreas da lógica e da Teoria dos Conjuntos,[30] alguns deles citados no capítulo 2.

Paradoxos que ocorrem na Educação Básica, fazem referência a elementos do conjunto dos números reais, portanto, para analisar suas causas, bem como identificar e solucionar erros relativos a eles, é necessário compreender como funcionam as operações entre estes elementos e como eles são definidos, pois em suma, a teoria axiomática que fundamenta os números reais foi concebida para que as operações entre estes números estivessem livres de qualquer paradoxo, logo, a ocorrência deles é consequência de uma violação das leis as quais os números se fundamentam.

Em busca desta compreensão, apresentaremos três teorias diferentes que obtiveram êxito na tarefa de caracterizar o conjunto dos números reais: A construção por meio dos Cortes de Dedekind, que são basicamente cortes de separação entre conjuntos de números racionais; A construção por meio de classes de equivalência de sequências de Cauchy, processo de construção elaborado por Cantor; e o conceito de corpo ordenado completo, uma estrutura algébrica que define um conjunto de objetos através das relações e operações entre eles.

As duas primeiras caracterizações partem do conjunto dos números racionais e, a partir deles, definem o que vem a ser um número irracional. Contudo estas duas formas de construção, diante da teoria dos corpos, são úteis apenas para comprovar que existem corpos ordenados, sendo assim a teoria mais adequada para analisar o funcionamento das operações entre elementos deste conjunto é a teoria dos corpos, uma vez que através dela podemos abstrair a natureza dos elementos deste conjunto (que como veremos, dependendo da teoria em questão, podem ter naturezas bem diferentes) e nos concentrar apenas em como estes elementos se relacionam. Visto que para identificar as causas dos paradoxos que serão apresentados, basta compreender como se dão as relações entre os elementos do conjunto dos números reais, pois neste aspecto a natureza destes elementos é irrelevante.[16]

Portanto, serão apresentadas de forma breve as duas primeiras caracterizações do conjunto dos números reais (as de Dedekind e Cantor), e de forma mais aprofundada a teoria dos corpos que será utilizada como embasamento teórico dos capítulos subsequentes.

4.3.1 *Os Cortes de Dedekind*

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) foi um matemático alemão, aluno de Gauss e Dirichlet, que se tornou professor de Matemática em Zurique, destacando-se em diversas áreas da Matemática por meio de trabalhos realizados no campo da lógica, aritmetização da análise e axiomatização do conjunto dos números reais.[6]

Dedekind conta que, logo no início de sua vida acadêmica como professor, mais especificamente ao ministrar aulas de Cálculo Diferencial, percebeu a carência de uma fundamentação teórica com respeito ao conjunto dos números reais. Desta forma, inspirado no tratamento excepcional elaborado por Eudoxo das grandezas incomensuráveis, já exposto no capítulo 2, Dedekind formula sua teoria dos cortes de números racionais em 1872, publicada no livro Stetigkeit und die Irrationalzahlen, (A continuidade e os números irracionais).[2]

Basicamente Dedekind se questionou qual era a característica presente em uma reta geométrica contínua que não está presente no conjunto dos números racionais, ele percebeu que a resposta não está relacionada na existência de elementos que preenchem algum tipo de espaço vazio, mas sim na existência de elementos que separam um conjunto de elementos já existentes, neste caso o conjunto dos números racionais.[3]

De acordo com a definição de Eudoxo, consideremos um par (a, b) de grandezas e um par (x, y) de números naturais, denominando o conjunto E (esquerda) dos pares tal que $bx < ay$, ou seja $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$, caso o quociente $\frac{a}{b}$ tenha um significado numérico, digamos $\frac{a}{b} = r$, e o conjunto D (direita) dos pares tal que $\frac{x}{y} > \frac{a}{b}$, assim Dedekind percebeu que a teoria de Eudoxo define este número r como um elemento de separação do conjunto dos números racionais $\frac{x}{y}$ em dois conjuntos, o conjunto da esquerda $E = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} / \frac{x}{y} < r\right\}$ e o da direita $D = \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} / \frac{x}{y} > r\right\}$, podendo r ser incluído em qualquer um destes conjuntos com as devidas adaptações sendo o elemento máximo de E ou o elemento mínimo de D.

Assim, Dedekind define o conceito de corte no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais:

Definição 4.1. *"Cortes de Dedekind são partições dos racionais em dois conjuntos disjuntos E e D definidos como conjunto da esquerda e conjunto da direita da seguinte forma: Tome x uma grandeza (racional ou não) e defina $E = \{r \in \mathbb{Q}; r < x\}$ e $D = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq x\}$ "*[2]

O conjunto dos números racionais menores que 2 por exemplo representa um corte racional pois é possível construir uma partição de $\mathbb{Q}$ composta pelos conjuntos disjuntos $E = \{r \in \mathbb{Q}; r < 2\}$ e $D = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 2\}$.

Mas, digamos que E seja o conjunto dos números racionais cujos quadrados são menores que dois, unidos com todos os números racionais negativos, ou seja:

$$E = \{r \in \mathbb{Q}; r^2 < 2\} \cup \{r \in \mathbb{Q}; r \leq 0\}.$$

Assim E seria o conjunto dos números racionais que se aproximam de $\sqrt{2}$ por falta. Contudo, será que este conjunto E possui elemento máximo?

Caso exista um outro número racional $s > r$ tal que $s^2 < 2$, isso significa que sempre haverá um número racional maior que r cujo quadrado seja menor que 2 e o conjunto E não terá um elemento máximo.

Digamos que $s = r + \frac{1}{n}$, com n inteiro "suficientemente grande" a fim de se ter $s^2 < 2$, a questão é: Qual o valor que n deve assumir para que $r < s < \sqrt{2}$?

Caso $s = r + \frac{1}{n}$.

Se desejamos encontrar um s tal que $s^2 < 2$, então $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$.

Em outras palavras: $\left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} < 2 - r^2$.

Mas $n > 1$, uma vez que, se $n \leq 1$ teríamos $s > r + 1$ e para $r = 1$ por exemplo não teríamos $s^2 < 2$.

Portanto se $n > 1$ então $(2r)\frac{1}{n} < \left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$ e portanto $(2r)\frac{1}{n} < 2 - r^2$.

Isso resulta que $n > \frac{(2r)}{(2-r^2)}$, ou seja, para qualquer valor de r podemos sempre encontrar $s > r$ tal que $s^2 < 2$, com $s = r + \frac{1}{n}$ e $n > \frac{(2r)}{(2-r^2)}$.

Sendo assim o conjunto E das aproximações racionais de $\sqrt{2}$ por falta, não possui elemento máximo.

Será que o conjunto das aproximações racionais de $\sqrt{2}$ por excesso, ou seja, $D = \{r \in \mathbb{Q}; r > 0\, e\, r^2 < 2\}$, possui elemento mínimo? Utilizando um raciocínio análogo ao anterior, podemos demonstrar que: se $r^2 > 2$, pode-se determinar um $s < r$ de forma que $s^2 > 2$, sendo assim s poderia ser calculado por $s = r - \frac{1}{n}$ com n inteiro positivo:

$$s^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n}.$$

Fazendo $r^2 - \frac{2r}{n} > 2$ é garantido que, qualquer que seja r, é possível escolher um n tal que $n > \frac{2r}{(r^2-2)}$ de forma a se ter $s < r$ com $s^2 > 2$.

Isso mostra que o conjunto D das aproximações racionais de $\sqrt{2}$ por excesso não possui um elemento mínimo!

Dedekind observa que o fato de vários cortes não possuírem elemento de separação equivale a dizer que o conjunto dos racionais é descontínuo, para resolver este problema ele postulou que *"todos os cortes de números racionais possuem um elemento de separação"*. Logo, se nenhum racional for elemento de separação este elemento será um número denominado irracional.[2]

Na área da geometria Dedekind postulou de forma equivalente o significado de continuidade na reta:

> *Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e um só ponto que realiza essa divisão de todos os pontos em duas classes, isto e, que separa a reta em duas partes.*[6]

Através de todo um extenso trabalho Dedekind mostrou que o conjunto de todos os cortes munido de operações de adição e multiplicação convenientemente definidas e também de um relação de ordem convenientemente definida é uma cópia do conjunto dos números reais.

4.3.2 *Cantor e os números reais*

Diferentemente de Dedekind, que tratou os números irracionais como corte do conjunto dos racionais, Cantor propôs uma abordagem utilizando sequências convergentes de números racionais. Essa concepção difere radicalmente da abordagem apresentada anterior.

Entende-se por sequência de números racionais toda função com domínio nos números naturais $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ que pode ser expressa por $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots)$ ou simplesmente (x_n), com x_n seu enésimo termo. Por exemplo, a sequência (r_n) das aproximações por falta de $\sqrt{2}$ pode ser expressa por: $(r_n) = (1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots)$.

Cantor estabeleceu um novo conceito de número, partindo de sequências de números racionais, contudo, este tipo de sequência pode ser convergente ou não. Uma sequência se diz convergente quando existe um número a tal que, para valores cada vez maiores de n, os termos x_n se mantêm tão próximos de a quanto se deseje. Matematicamente isso significa que:

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \to |x_n - a| < \epsilon.$$

Escrevemos que $x_n \to a$ quando a sequência x_n converge para a.

Por exemplo, a sequência alternada $(+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \cdots)$, cujo enésimo termo pode ser calculado por $a_n = (-1)^n$, não é convergente uma vez que, de acordo com a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
|a_k - a| + |a_{k+1} - a| &= |a_k - a| + |a - a_{k+1}| \\
|a_k - a| + |a_{k+1} - a| &\geq |(a_k - a) + (a - a_{k+1})| \\
|a_k - a| + |a_{k+1} - a| &\geq |a_k - a_{k+1}| = 2
\end{aligned}$$

Logo $|a_k - a| \geq 1$ ou $|a_{k+1} - a| \geq 1$, assim não será possível tornar $|a_n - a| < \epsilon$ quando $0 < \epsilon < 1$.[19]

Cantor associou todos os números racionais a um tipo especial de sequência, as sequências de Cauchy. por definição uma sequência (c_n) se diz de Cauchy quando :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N};\ n, m > N \to |c_n - c_m| < \epsilon.$$

É fácil demonstrar que toda sequência constante é de Cauchy, por exemplo consideremos a sequência (0,0,0,...), pode-se provar facilmente que esta sequência converge para zero, contudo podemos provar que a sequência (z_n) tal que $z_n = \frac{1}{n}$ também converge para zero. Diante desta aparente contradição, Cantor percebeu que sequências diferentes podem convergir para um mesmo número, sendo assim, ele definiu uma relação de equivalência entre sequências de Cauchy da seguinte forma:

Duas sequências x_n e y_n são equivalentes se a sequência resultante das diferenças entre os enésimos termos das respectivas sequências tender a zero, simbolicamente $x_n - y_n \to 0$.

Desta forma, ele definiu como um número racional todas as classes de sequências equivalentes. Nos exemplos anteriores, ambas as sequências (0,0,0,...) e (1,1/2,1/3,1/4,...) fazem parte da classe de sequências equivalentes que definem o número racional zero.[2]

Contudo, Cantor observou que existem sequências de Cauchy (de números racionais) que não convergem para um número racional. É o caso por exemplo da sequência (x_n) de números racionais que convergem para $\sqrt{2}$ definida pela recorrência:

$$\begin{cases} x_0 & = 0 \\ x_{n+1} & = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

Esta recorrência decorre da aplicação do Método de Newton para o cálculo de raízes de um polinômio. Neste caso o método foi aplicado ao polinômio $P(x) = X^2 - 2$, já sabemos que a raiz real positiva deste polinômio é $\sqrt{2}$, contudo os números irracionais ainda não eram definidos, logo a recorrência fornece a seguinte sequência (x_n) de números racionais: $\left(1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \cdots\right)$, que por sua vez não converge para nenhum número racional. Mesmo a sequência de aproximações por falta de $\sqrt{2}$ também não converge para nenhum racional, (logicamente ela converge para o irracional $\sqrt{2}$).

Cantor, portanto, resolve este impasse com o seguinte postulado:

Toda sequência de Cauchy converge.

Sendo assim, de forma equivalente ao postulado de Dedekind que diz que todos os cortes de números racionais possuem elemento de separação, Cantor estende o conceito de número criando números que não são racionais, ou seja, os números irracionais.

O próximo passo foi estabelecer a operação de soma e multiplicação entre classes de sequências equivalentes e suas inversas, subtração e divisão, bem como a classe de sequências nulas, a classe de elemento oposto, inverso e a relação de ordem entre as classes de sequências equivalentes.

Com esta abordagem, Cantor definiu objetos com a mesma estrutura algébrica dos objetos definidos por Dedekind. Contudo, com os avanços das pesquisas em Matemática, constatou-se que: para construção dos números reais, a natureza destes números é irrelevante, na realidade o que os define é o comportamento deles com respeito às operações de adição e multiplicação e suas inversas. Logo, pode ser demonstrado que *qualquer corpo ordenado completo é necessariamente isomorfo ao corpo dos números reais.*[2]

Este importante resultado simplifica a forma de descrever um número irracional, não é preciso necessariamente trabalhar com cortes de Dedekind ou sequências definidas por recorrências, se quisermos expressar um número irracional, por exemplo o número solução da equação $x^3 = 2$, podemos simplesmente defini-lo pelo símbolo $\sqrt[3]{2}$, contanto que este objeto cumpra todas as regras as quais um número real deve obedecer, os axiomas de um corpo ordenado completo.

Vejamos na próxima seção como podemos definir o corpo dos números reais.

4.3.3 *Axiomas de Corpo Ordenado Completo*

Diferentemente da Geometria (euclidiana) que desde os tempos de Euclides (300 a.C.) possuía uma estrutura axiomática praticamente consolidada, a Álgebra obteve seu sistema axiomático num processo mais lento. Foi em busca de um sistema numérico que se relacionasse ao espaço tridimensional, da mesma forma que os números complexos se relacionam ao espaço bidimensional, que o matemático William R. Hamilton (1805-1865) inaugurou o conceito de estruturas algébricas, como os grupos Abelianos, os Anéis e os Corpos, objeto de estudo desta seção.

Mas o que é um corpo (comutativo)? Basicamente um corpo é uma estrutura algébrica formada por um conjunto não vazio K em que se define um par de operações, denominadas adição, indicada por $a+b$, e multiplicação, indicada por $a.b$ com $a, b \in K$ [13], obedecendo aos 7 axiomas listados a seguir:

1. A adição e a multiplicação são bem definidas:
   para todos $a, b, a', b' \in K$, se $a = a'$ e $b = b'$, então $a + b = a' + b'$ e $a.b = a'.b'$.

2. Comutatividade:
   Para todos $a, b \in K$, $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$.

3. Associatividade:
   Para todos $a, b, c \in K$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a.b)c. = a.(b.c)$.

4. Existência de elementos neutros:
   Para todo $a \in K$ existe $0, 1 \in K$ tal que, $a + 0 = a$ e $1.a = a$.

5. Existência de elementos simétricos:
   Para todo $a \in K$ existe $b(= -a)$ tal que $a + b = 0$.

6. Distributividade da multiplicação em relação à adição:
   Para todos $a, b, c \in K$, tem-se $a.(b + c) = a.b + a.c$.

7. Existência do elemento inverso:
   Todo $a \in K$ com $a \neq 0$ possui um inverso a^{-1}, tal que $a.a^{-1} = 1$.[2]

Estes 7 axiomas definem o que vem a ser um corpo (comutativo) e com eles é possível definir outras características relacionadas aos elementos deste conjunto como outras operações e propriedades.

Por exemplo: considerando $x, y \in K$, com a ajuda dos axiomas pode-se definir a subtração chamando $x - y$ de diferença entre x e y, e definindo-a como a soma de x com o elemento simétrico de y, isto é, $x - y = x + (-y)$. De forma análoga pode-se também definir a divisão denominando x/y de quociente de x por y e definindo-o como o produto entre x e o inverso de y que simbolicamente é expresso por $x/y = x.y^{-1}$ [16], lembrando que, de acordo com o sétimo axioma, só possuem um elemento inverso os elementos de K que são diferentes de zero, este é um detalhe que intriga muitos estudantes de matemática.

Negligenciar este detalhe pode culminar em obstáculos no processo de ensino e aprendizado da matemática, causando muitos resultados paradoxais.

O corpo K é dito ordenado quando é possível identificar um subconjunto P, denominado conjunto dos elementos positivos, cujo elementos obedecem as seguintes propriedades:

1. Fechamento em P: As operações de soma e produto de elementos positivos resultam em elementos positivos, ou seja, se $x, y \in P$ então $x + y \in P$ e $x.y \in P$.

2. Tricotomia: Dados $x, y \in K$, ocorre somente uma destas possibilidades, ou $x - y = 0$, ou $x - y \in P$, ou $-(x - y) \in P$.[2]

Utilizando essas propriedades podemos definir a relação $x > y$ dizendo então que x é maior que y quando ocorrer $x - y \in P$, desta forma sempre podemos afirmar que: quando $x > y$ então existe $z \in P$ tal que $x = y + z$. Analogamente podemos dizer $x < y$ quando $-(x - y) \in P$.

Em particular temos que se $x > 0$, então pela nossa definição $x - 0 \in P$, isto é, $x \in P$, assim os elementos que compõem o conjunto P dos números positivos são os elementos que denominamos "maiores que zero".[16]

Todas as propriedades algébricas relacionadas a operações entre números reais podem ser definidas e demonstradas utilizando este conjunto de axiomas.

Pode-se demonstrar por exemplo a lei do cancelamento relativa a elementos regulares. Dizemos que $d \in K \backslash \{0\}$ é um elemento regular quando: $\forall\ x, y \in K,\ x = y \Leftrightarrow dx = dy$.

Assim a multiplicação de elementos regulares é compatível e cancelativa com respeito à igualdade.

Para demonstrar esta importante propriedade demonstraremos antes a monotonicidade da multiplicação com respeito a relação $<$, ou seja, dados $x, y, d \in K$:

$$d > 0, x < y \Rightarrow xd < yd$$
$$d < 0, x < y \Rightarrow xd > yd$$

Se $x < y$ e $d > 0$, então, considerando P o conjunto dos elementos positivos, sabemos que $y - x \in P$ e $d \in P$, como a multiplicação é fechada em P, $(y - x)d \in P$, portanto $yd - xd \in P$, logo $xd < yd$. Contudo, caso $d < 0$, então $-d \in P$ e segundo o mesmo raciocínio anterior $xd > yd$.[16]

Utilizando este resultado, por redução ao absurdo é possível demonstrar a lei do cancelamento.

Suponhamos que $dx = dy$, consideremos dois casos:

i Caso $d > 0$, se $x < y$ então $xd < yd$, o que seria um absurdo, se $x > y$ pelo mesmo raciocínio $xd > yd$, o que seria outro absurdo, logo $x = y$.

ii Caso $d < 0$ então $-d > 0$, e pelo mesmo raciocínio anterior conclui-se que $x = y$.

Com isto, foi demonstrado que, quando $d \neq 0$, vale a relação $dx = dy \Rightarrow x = y$. Note que a proposição $x = y \Rightarrow dx = dy$ decorre do fato de a multiplicação ser bem definida (1º Axioma). É interessante observar que esta proposição também é válida quando $d = 0$, entretanto a relação de volta só é válida se $d \neq 0$.

A lei do cancelamento de elementos regulares é um instrumento muito utilizado na resolução de problemas algébricos. Contudo, o mau uso desta lei pode culminar em muitos paradoxos.

Por fim, um Corpo ordenado se diz completo quando *"todo sub-conjunto não vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K"*[1][16]

Esta propriedade é equivalente ao postulado de Dedekind que afirma que todo corte racional possui elemento de separação, ou ao postulado de Cantor que afirma que toda sequência de Cauchy converge.

Sendo assim, o conjunto dos números reais é estabelecido pelo Axioma fundamental da Análise Matemática:

"Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado de corpo dos números reais."[16]

Na verdade, como veremos adiante, todos os paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica relativos às operações entre elementos do conjunto dos números reais são fruto de algum tipo de violação de premissas estabelecidas em definições ou propriedades baseadas em condições impostas pelo sistema axiomático do universo em questão, que são os axiomas de corpo comutativo juntamente com os axiomas de ordem.

No próximo capítulo discutiremos não somente as questões matemáticas, mas também as questões pedagógicas relacionadas aos fatores causadores de paradoxos.

[1] Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K(LIMA, 2017).

5 PARADOXOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Vimos que, conforme novas teorias foram surgindo no estudo da Matemática também surgiram problemas que colocavam à prova a validade de tais teorias, muitos destes problemas eram de natureza paradoxal e foi na busca de soluções que a Matemática se tornou uma "ciência exata", construída segundo os fundamentos da lógica, definida criteriosamente a fim de eliminar de suas proposições e operações qualquer resultado contraditório.

Já vimos qual a importância dos erros e obstáculos encontrados pelos matemáticos no desenvolvimento de suas teorias. Neste processo de identificação de erros e revisão dos fundamentos da Matemática houve incrementos significativos no aprendizado adquirido e no conhecimento constituído. Esse fenômeno se reflete da mesma forma no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Guy Brousseau, um matemático e educador francês, baseado na visão construtivista de Piaget e nos trabalhos de Gaston Bachelard, caracteriza a noção de obstáculo epistemológico inaugurando uma nova interpretação do conceito de erro. Nesta interpretação ele sugere que o erro consiste em um conjunto de concepções, ou conhecimentos previamente adquiridos, adequadas em um certo contexto, que quando aplicadas em um novo contexto tornam-se um obstáculo na aquisição e domínio de um novo conhecimento.[1]

Um obstáculo, portanto, não constitui a falta de conhecimento, mas sim a aplicação de um conhecimento em situações inapropriadas que resiste às contradições, tornando-se um empecilho para a formação do saber.

Observe que um paradoxo matemático pode ser caracterizado como um obstáculo epistemológico. Lembremos que paradoxos também podem surgir de conflitos entre nossa percepção de realidade e a realidade em si e que conceitos matemáticos nem sempre funcionam conforme esperado. Nossa expectativa referente aos resultados matemáticos vincula-se diretamente a nossa percepção da realidade e ao nosso senso comum que somados constituem parte do nosso conhecimento prévio.

Sendo assim, pode-se utilizar paradoxos matemáticos para criar situações didáticas na qual propositalmente conduzimos nossos alunos a um erro paradoxal, estimulando os alunos a refletir sobre o que pode estar errado. Note que, neste caso, o erro é esperado e aceito como um recurso didático capaz de despertar a curiosidade e potencializar o processo de ensino e aprendizagem.

Michèle Artigue, uma pesquisadora matemática francesa, identificou em seu livro Épistémologie et didactique quatro fatores que podem gerar obstáculos:

- A generalização abusiva: um fenômeno que, segundo a autora, pode ser explicado pelo princípio de continuidade enunciado por Leibniz, de acordo com este princípio, toda mudança ocorre gradativamente, havendo sempre um estágio intermediário entre os estados, um erro que pode ilustrar este fator ocorre quando os alunos estão aprendendo a multiplicar números decimais por 10, como o conhecimento prévio é a multiplicação no conjunto dos números naturais, os alunos tendem a generalizar o processo para os números decimais e resultados como 10×3,14=3,140 ocorrem devido a isto.

- A regularização formal abusiva: ela ocorre segundo a mesma lógica demonstrada na generalização abusiva, entretanto a regularização formal abusiva é predominantemente em expressões com mecanismos estritamente formais. Isto se observa por exemplo, quando é empregada a propriedade distributiva entre operações que não possuem esta propriedade, podendo acarretar em erros do tipo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
- Fixação em uma contextualização: Segundo a autora este é um processo visível historicamente. Esse tipo de fenômeno ocorre, por exemplo, quando se tenta contextualizar o produto de dois números negativos associando o significado dos sinais a valores lógicos, como na afirmação "o contrário de negativo é igual a positivo". Apesar de esta ser uma analogia que facilita a memorização da regra, os números negativos são objetos matemáticos abstratos e a regra de sinais é uma consequência de propriedades predeterminadas.
- Aderência exclusiva a um único ponto de vista: considerado pela autora como um fator determinante na geração de obstáculos, este fator não necessariamente acarreta em erros, mas impede que alguns problemas sejam interpretados e solucionados. A não aceitação pelos pitagóricos da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é um exemplo deste comportamento.[1]

Identificados os fatores que levam a um obstáculo e com a ajuda do conhecimento tratado no capítulo sobre os fundamentos da Matemática, é possível interpretar quais os erros cometidos nas operações matemáticas conduzem essas operações a uma contradição.

Não podemos negar o potencial que um paradoxo desconcertante tem de prender a atenção e despertar a nossa curiosidade. Observe a sequência de operações a seguir:

$$\begin{aligned}
&1 = 1 && \Leftrightarrow \\
&1 = (-1)(-1) && \Leftrightarrow \\
&\sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} && \Leftrightarrow \\
&1 = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} && \Leftrightarrow \\
&1 = (i)(i) && \Leftrightarrow \\
&1 = i^2 && \Leftrightarrow \\
&1 = -1
\end{aligned}$$

Note que, ao efetuar uma sequência de operações matemáticas "aparentemente" válidas, constatou-se um absurdo, neste caso $1 = -1$. Se considerarmos que todas as operações realizadas foram válidas, estaremos diante de um obstáculo intransponível. Pensar desta forma é aderir a um único ponto de vista e este é um dos fatores apontados por Artigue que acarretam em um obstáculo epistemológico.

Entendendo, portanto, que neste conjunto de operações, há um raciocínio que não é válido, para desvendar este paradoxo só nos resta analisar passagem por passagem, e investigar o que pode ter ocorrido. Contudo, este foi apenas um exemplo de como os paradoxos podem ser relacionados a obstáculos epistemológicos e do seu potencial didático como objeto de estudo.

Para alguns, a solução deste paradoxo talvez seja simples, mas até que os fundamentos matemáticos que definem estas operações e elementos fossem totalmente constituídos, resultados deste tipo incomodaram grandes matemáticos por décadas.

Isso indica que o estudo de paradoxos exige um domínio mais aprofundado das definições utilizadas e do sistema axiomático envolvido.

Como citado anteriormente, a essência do pensamento matemático e de suas conclusões, consiste em, através de um conjunto de axiomas, estabelecer proposições válidas para um conjunto de valores e assim demonstrar que esta proposição vale para um valor específico.

Logo, para saber exatamente qual definição, operação ou premissa foi violada acarretando neste paradoxo $1 = -1$ devemos saber quais proposições utilizadas são válidas ou qual o conjunto de valores que as tornam válidas.

A seguir serão analisados, problemas que envolvem a divisão por zero, a regra de sinais, números complexos e algumas operações com logaritmos. Vamos entender como algumas definições foram elaboradas justamente para eliminar paradoxos, e com este material, professores poderão demonstrar aos alunos o porquê de a Matemática sempre se apresentar espantosamente tão exata. É porque nos esconderam os erros.

5.1 A DIVISÃO POR ZERO

Sem dúvida, a concepção moderna do significado do número zero e de suas propriedades pode vir a ser um obstáculo epistemológico e desta forma, quando mal compreendido, operações com este número podem gerar muitos paradoxos. De fato, interpretar o papel do número zero em diversos contextos não é nada trivial, Russell por exemplo, destacou quando se referia a sequência dos números naturais que:

"Provavelmente só alguém com algum conhecimento matemático pensaria em começar com 0 em vez de 1[...]. Muito pouca gente tem condições de dar uma definição do que se entende por "número", ou "0", ou "1"[...]"[27]

Desde o início do século XX até os dias atuais, considerar o número zero como um número natural é uma questão de gosto ou conveniência. Isto porque os axiomas que constituem este conjunto, denominados axiomas de Peano, caracterizam acima de tudo um conjunto de elementos dispostos em uma sequência. Sendo assim, não importa que tipo de propriedade operatória possui o primeiro elemento da sequência, a este, só importa que ele não suceda a nenhum outro deste conjunto.

De forma inocente, alguns podem imaginar que é exagero atribuir ao número zero um caráter não trivial. Entretanto, alguns grandes matemáticos não pensavam desta forma. Analisando a citação a seguir podemos perceber a sutileza com que Leonhard Euler (1707 - 1783), ao apresentar uma definição do que entendia por quantidade indeterminada, ou em uma terminologia moderna uma grandeza variável, atribui ao número zero o mesmo grau de abstração que é atribuído aos números imaginários classificados por ele mesmo como números "impossíveis":

"Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários."[25]

Sendo assim, antes de compreender o que pode estar por trás dos paradoxos que envolvem o número zero, é necessário uma pequena discussão e aprofundamento sobre o que significa este número.

O símbolo 0 pode representar várias ideias; ele pode ser a representação do elemento neutro da adição; pode ser um algarismo em diversos sistemas de numeração como o sistema binário ou o nosso habitual sistema decimal; também pode representar a cardinalidade do conjunto vazio; pode ser simplesmente o elemento de separação entre os inteiros positivos e negativos ou então o limite da diferença entre dois números.

A palavra zero advém de sua forma latinizada zepbrum derivada do árabe "al-sifr" que significa vazio. O símbolo 0 vem do sistema decimal indo-arábico que foi difundido pela Europa no século XII por Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) através de sua obra intitulada Liber abaci. Nesta obra Fibonacci ensina como operar com este sistema numérico. Ele inicia seu trabalho com a seguinte descrição:

> *"Estes são os nove algarismos indianos*
>
> *9 8 7 6 5 4 3 2 1*
>
> *Com esses nove algarismos, e com o sinal 0, que os árabes chamam de zepbirum, pode-se escrever qualquer número, como se demonstrará a seguir."*[6]

É interessante perceber que apesar de o zero desempenhar um papel de algarismo ele não foi denominado como tal por Fibonacci. Entretanto, o zero indiano desempenhava um papel tanto de número quanto de separador de direção, além de ser um marcador de posição no sistema numérico. Isso pode ser verificado em um tratado matemático do século VII intitulado Brahmasphuta-Siddhanta elaborado por Brahmagupta, um proeminente matemático e astrônomo hindu. Neste trabalho o zero tem o papel de elemento separador entre as grandezas positivas e negativas, sendo ele o resultado da soma entre quantidades iguais mas opostas, também o zero é definido como elemento neutro da adição não sendo nem positivo nem negativo e o produto de uma quantidade por zero é definido como zero, neste texto a divisão de zero por qualquer número resulta em zero, até mesmo a divisão pelo 'próprio zero', mas quando um número era dividido por zero o resultado era tido como indefinido.[14]

É impressionante como a matemática hindu, dispondo de recursos limitados, definiu quase precisamente o funcionamento das operações básicas relativas ao número zero, porém existe um equívoco nestas definições nada fácil de demonstrar, considerar a sentença $\frac{0}{0} = 0$ verdadeira é um engano fruto de uma generalização abusiva mencionada na introdução do capítulo 5 como um gerador de obstáculos epistemológicos.

Este tipo de raciocínio, mesmo hoje, ainda é muito comum entre as pessoas menos instruídas em matemática. Apesar de muitos terem ouvido de seus professores que "não é bom" dividir por zero, aparentemente parece que este "mandamento sagrado" poderia ser violado se o numerador for igual a zero. Por vezes, no dia-a-dia escolar, professores se deparam com o seguinte raciocínio: se não possuo nada, qualquer divisão desta quantidade entre outras pessoas resultaria em nada para cada pessoa. Este tipo de pensamento também advém de um fator causador de obstáculos epistemológicos, a fixação em uma contextualização, este fator ocorre quando o indivíduo insiste em associar o "nada" ao número zero e a operação de divisão ao ato de repartir objetos.

Em primeiro lugar, de acordo com Almouloud (20007) relacionar o zero com o "nada", o vazio ou a inexistência é a causa de vários erros quando se realiza operações matemáticas. Portanto, não se pode associar o significado do substantivo "nada" ao conceito matemático do número zero, como vimos no capítulo 3, segundo a tese formalista de Hilbert, os números são elementos abstratos definidos por axiomas cujos significados e comportamentos são inteligíveis apenas através de suas regras e propriedades definidas também por outros axiomas ou teoremas que derivados destes. O zero pode ser associado por exemplo a cardinalidade do conjunto vazio, pois, através de uma teoria axiomática consistente, pode-se formar uma cadeia de deduções lógicas formada por expressões simbólicas que obedecem a regras explícitas de manipulação de símbolos de forma a sustentar tal afirmação.[30] Sendo assim, o comportamento do número zero só pode ser compreendido dentro da teoria que o sustenta, neste caso, a definição de corpo ordenado e de suas propriedades.

Em segundo lugar, apesar de a palavra dividir ser sinônimo de repartir e separar objetos em diversos contextos, nem sempre é possível contextualizar a divisão matemática desta forma. O que dizer por exemplo da seguinte divisão: $(-6) \div (-3)$? Sabemos que o resultado é $+2$, contudo, é possível associar a esta operação algum significado concreto relacionado ao ato de repartir e separar objetos? Considerando hipoteticamente que o numerador -6 pudesse se tornar um objeto palpável, ainda assim teríamos dificuldade em repartir este misterioso objeto em 3 partes iguais de -2 objetos, pois poderia não existir alguma simetria que garantisse uma partição exata, muito menos a possibilidade de repartir este objeto em "-3 partes iguais".

Por que então não podemos supor que $\frac{0}{0} = 0$?

Primeiramente, é necessário compreender o significado de um número fracionário ou o quociente entre dois números. Baseando-nos na teoria exposta na subseção 4.3.3 Axiomas de Corpo Ordenado Completo, o quociente entre dois números é definido da seguinte forma:

Dados três números reais a, b e c tais que $a = bc$, caso b "tenha um elemento inverso" denominado b^{-1} (o detalhe destacado é crucial para manter a consistência entre as operações e será comentado mais adiante) devido ao fato de a operação de multiplicação ser bem definida (1º axioma de corpo) sabemos que:

$$\begin{aligned} a = bc &\Rightarrow b^{-1}.a = b^{-1}.bc \\ &\Rightarrow b^{-1}.a = (b^{-1}.b)c \\ &\Rightarrow b^{-1}.a = 1.c \\ &\Rightarrow b^{-1}.a = c \end{aligned}$$

Para justificar a 2ª, 3ª e 4ª linha de raciocínio foram utilizados respectivamente os axiomas 3, 7 e 4. Desta forma, define-se portanto que c é o quociente de a por b escrevendo $\frac{a}{b}$ em vez de b^{-1}.a, ou seja, se $a = bc$ então $c = \frac{a}{b}$.

Observe que este quociente $\frac{a}{b}$ não é uma operação entre os números reais a e b, mas sim uma representação de um número real c tal que $a = bc$.

Compreendendo o significado de um quociente, podemos analisar o significado da expressão $\frac{0}{0}$.

Todo raciocínio utilizado na definição do quociente partiu da hipótese de que b (o denominador) admite um elemento inverso, logo, para que o quociente em questão represente algum número é necessário que o número zero admita um elemento inverso. Sendo assim, façamos uma releitura do sétimo axioma relativo ao corpo ordenado dos números reais K.

7 *Existência do elemento inverso: Todo $x \in K$ com $x \neq 0$ possui um inverso x^{-1}, tal que $x.x^{-1} = 1$.*

Justamente, de acordo com este axioma, o número 0 foi preestabelecido como o único elemento pertencente ao corpo dos números reais que não pode possuir inverso. Diante deste fato, somente nos resta entender o porquê.

Como mencionamos no capítulo 3, na formulação de um sistema axiomático, a primeira regra a ser seguida é que o sistema seja consistente. Isso significa que não pode existir qualquer tipo de conflito lógico entre os axiomas escolhidos. Pois bem, caso 0 possuísse um elemento inverso isso iria contra uma consequência imediata dos axiomas 1, 2, 3, 4, 5 e 6, em outras palavras o sétimo axioma estaria em desacordo com "todos os outros axiomas". Logo, a primeira regra básica de formulação de um sistema axiomático não seria satisfeita. Vejamos como isto ocorre.

Dado um número real qualquer a, sob a luz dos seis primeiros axiomas, analisemos o produto $a.0$.

De acordo com os axiomas 4 e 6 temos que:

$$a.0 = a(0+0) = a.0 + a.0.$$

Mas o primeiro axioma garante que podemos somar $-(a.0)$ nos dois lados da igualdade resultando em:

$$a.0 - (a.0) = (a.0 + a.0) - (a.0).$$

E valendo-se dos axiomas 5, 3, 2 e 4 podemos concluir que:

$$0 = a.0 - (a.0) = (a.0 + a.0) - (a.0) = a.0 + (a.0 - (a.0)) = a.0 + 0 = a.0.$$

Portanto, através dos seis primeiros axiomas, conclui-se que $a.0 = 0$ para todo a real. De forma que, por redução ao absurdo, caso existisse o inverso de zero, digamos 0^{-1}, teríamos $0^{-1}.0 = 1$, mas isso seria um absurdo, pois acabamos de provar que $a.0 = 0$ para qualquer a pertencente ao conjunto dos reais inclusive o suposto 0^{-1}.

Sendo assim, a fim de preservar a consistência entre os axiomas não se pode permitir a existência do quociente $\frac{0}{0}$ e isto é garantido pela condição imposta no 7º axioma.

É compreensível o porquê de os primeiros matemáticos a trabalhar com o número 0 não terem identificado a inconsistência em considerar o quociente entre dois zeros igual a zero. Para demonstrar este erro utilizamos teorias e conceitos formulados após séculos de reflexões e contribuições de vários dos maiores matemáticos da História. Até porque nem sempre os paradoxos relacionados a este quociente são facilmente perceptíveis.

Quem nunca se deparou com este tipo de problema? Determine o valor de x na equação:

$$2x = 4x.$$

Devido a simplicidade desta equação, é possível deduzir o valor de x apenas questionando-se qual o número cujo dobro é igual ao seu quádruplo? Isso seria contraditório e absurdo para quase qualquer número, menos para o número zero que obviamente é a resposta correta.

Entretanto, métodos de resolução de equações como o método dedutivo ou o método da falsa posição infelizmente não são tão difundidos, devido a isso, estudantes estão mais habituados a simplificar equações utilizando a lei do cancelamento.

A lei do cancelamento em relação a multiplicação foi discutida no seção 4.3. Na prática, esta lei é interpretada como se fosse permitido dividir todos os termos da equação pelo mesmo número. Façamos desta forma.

Dividindo a equação por $2x$ verificamos o seguinte absurdo:

$$2x = 4x \Rightarrow \frac{2x}{2x} = \frac{4x}{2x} \Rightarrow 1 = 2.$$

Diante deste impasse, poderíamos tentar de outra forma, desta vez primeiro utilizando a lei do cancelamento em relação à adição e depois finalizando com a mesma lei em relação a multiplicação.

$$2x = 4x \Rightarrow 2x = 2x + 2x \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow \frac{0}{x} = \frac{2x}{x} \Rightarrow 0 = 2.$$

Outro absurdo é encontrado! isto ocorre pois estamos admitindo que $\frac{x}{x} = 1$, e como sabemos, esta afirmação é verdade para quase todos os números. Todavia, já foi identificado de antemão que $x = 0$, logo, quando dividimos a equação por x estamos gerando uma inconsistência entre as operações válidas, uma vez que o quociente $\frac{0}{0}$ surge novamente. Contudo, este exemplo possui uma sutileza muito particular, caso aceitássemos a validade da sentença $\frac{0}{0} = 0$ nos dois casos apresentados, se houvesse uma desconfiança de que $x = 0$, ao invés de um absurdo, chegaríamos à conclusão de que $0 = 0$. Havemos de concordar que este resultado não seria de todo mal, talvez este poderia ser o motivo de os matemáticos hindus considerarem como correta tal incoerência, entretanto, está claro que não podemos permitir tal consideração pois isto colocaria em cheque toda a consistência da teoria dos números reais.

Vejamos algumas afirmações paradoxais que podem surgir em problemas matemáticos da educação básica ao considerar a existência de 0^{-1}.

- Todo número real é igual ao seu dobro.

Considere um número real a representado por b desta forma:

$$a = b.$$

Multiplicando por a os dois lados da igualdade;

$$a^2 = ab.$$

Subtraindo b^2 dos dois lados;

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Fatorando a diferença de quadrados e o termo a direita da equação;

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b.$$

Dividindo ambos os lados por $(a - b)$;

$$a + b = b.$$

Mas $a = b$, portanto $b + b = b$ e assim obtemos;

$$2b = b.$$

- Todo número é igual a zero.

Utilizando o mesmo raciocínio anterior, basta subtrair b dos dois lados da equação e assim obteremos $b = 0$ qualquer que seja b.[20]

Estes dois paradoxos ocorreram devido à consideramos que $\frac{0}{0} = 1$ uma vez que $a = b$ então $a - b = 0$ logo o quociente $\frac{(a-b)}{(a-b)}$ não pode ser igual a 1 como já foi discutido anteriormente.

Até o momento, apenas foi discutido um caso particular da divisão por zero. Contudo, o que pode ser dito do quociente $\frac{a}{0}$ com $a \neq 0$, será que neste caso a divisão é permitida?

Consideremos por absurdo que $\frac{a}{0} = b$, com b pertencente aos reais. Pela definição de quociente já apresentada, podemos dizer que esta igualdade significa que $a = b.0$, mas de acordo com os seis primeiros axiomas $b.0 = 0$ e isto nos leva a admitir que $a = 0$, mas isto é um absurdo pois $a \neq 0$ de acordo com a nossa hipótese. Portanto só nos resta admitir que não existe b pertencente aos reais tal que $\frac{a}{0} = b$ com $a \neq 0$.

Está claro que, de nenhuma forma, o número zero pode assumir o papel de denominador de uma fração. Vejamos outras implicações absurdas que podem surgir ao ignorar este fato.

- Todo par de números diferentes são iguais.

Consideremos dois números reais a e b, tais que $a \neq b$, sem perda de generalidade podemos considerar $a > b$ de modo que existe $c > 0$ tal que:

$$a = b + c.$$

Multiplicando os dois lados por $a - b$ obtemos;

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Subtraindo dos dois lados da equação o termo ac temos que;

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc.$$

Pode-se fatorar os polinômios dos lados da equação de forma a obter;

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Note que o fator $(a - b - c)$ multiplica os dois lados da equação, portanto utilizando a lei do cancelamento chegamos à conclusão que:

$$a = b.$$

Entretanto, não podemos esquecer de que a hipótese do problema era que $a \neq b$. [20]

O segredo por trás deste paradoxo está no fato de que $a - b - c = 0$, logo, aplicar a lei do cancelamento é um erro, uma vez que, como enunciado no seção 4.3, a lei só é válida para todo fator diferente de zero que multiplica os dois lados da equação. Mais uma vez o número zero se torna um caso particular proibido em uma operação matemática, portanto busquemos compreender o porquê desta proibição.

Recordando o que vimos na seção 4.3 a respeito da definição de elemento regular relativo a uma operação, um elemento é considerado regular quando é válida a lei do cancelamento tanto à esquerda quanto à direita. Sendo assim, quando dividimos ambos os lados de uma equação por um mesmo número, o que estamos fazendo na realidade é aplicando a lei do cancelamento em relação a operação de multiplicação.

A questão é, se somente vale a lei do cancelamento para elementos regulares, como podemos saber se um elemento é regular ou não? A proposição a seguir é a chave para resposta desta pergunta:

Proposição 5.1. *Se a operação . sobre K é associativa, tem elemento neutro e e um elemento $a \in K$ é simetrizável, então a é regular.*

Entende-se por elemento simetrizável qualquer $a \in K$ obedecendo a seguinte condição: se $e \in K$ é elemento neutro de uma operação . sobre K, existe $a' \in K$ tal que $a'.a = e = a.a'$.

Neste caso, consideremos que K é um corpo ordenado, logo $K = \mathbb{R}$ e a operação . refere-se a multiplicação. Portanto, segue a demonstração:

Sejam $x, y \in K$ tais que $a.x = a.y$ e $x.a = y.a$. Como a é simetrizável e . é uma operação associativa, então, do fato de a multiplicação ser bem definida:

$$a^{-1}.(a.x) = a^{-1}.(a.y).$$

Utilizando a propriedade associativa, do elemento simétrico e do elemento neutro;

$$(a^{-1}.a).x = (a^{-1}.a).y \Leftrightarrow$$
$$e.x = e.y \Leftrightarrow$$
$$x = y.$$

De forma análoga prova-se que:

$$x.a = y.a \Leftrightarrow x = y.$$

Prova-se portanto que todo elemento x simetrizável é regular e por isso a lei do cancelamento pode ser aplicada para todos os $x \in \mathbb{R}/\{0\}$.[13]

Já sabemos que todos os números reais, com exceção do zero, são simetrizáveis e portanto, todos estes elementos são regulares. Mas apenas com esta afirmação ainda não podemos dizer se o número zero é um elemento regular ou não, a única vantagem obtida é que somente é necessário se preocupar com um único caso especial.

Portanto, a forma mais simples de demonstrar que a lei do cancelamento não vale para o número zero é apresentando um contraexemplo.

A demonstração por contraexemplo é indicada quando se deseja mostrar que uma propriedade é falsa. Para tanto, vamos supor que a lei do cancelamento vale para o número zero, desta forma:

Sejam dois números reais a e b tais que $a \neq b$, já demonstramos que $a.0 =$ e $b.0 = 0$, sendo assim, se a lei do cancelamento vale para o número zero conclui-se que:

$$0 = 0 \leftrightarrow a.0 = b.0 \Leftrightarrow a = b$$

ou,

$$0 = 0 \Leftrightarrow 0.a = 0.b \Leftrightarrow a = b.$$

Mas $a \neq b$, portanto, através deste exemplo comprovamos que esta propriedade é falsa, logo a lei do cancelamento não é válida quando aplicada ao número zero.

Com este último exemplo, concluímos os três tipos obstáculos que podem surgir no contexto da educação básica, que são eles o quociente $\frac{0}{0}$, os quocientes $\frac{x}{0}$ com $x \in \mathbb{R}/\{0\}$ e a lei do cancelamento ou corte envolvendo o número 0.

Vimos que o surgimento de resultados paradoxais ocorre quando, de alguma forma, quebramos a consistência entre o conjunto de axiomas que estabelecem os princípios fundamentais de funcionamento da teoria em questão. É importante ter em mente que a estrutura de corpo ordenado foi moldada exclusivamente para evitar estes paradoxos. Neste caso, o axioma 7, que define a existência do elemento inverso e que elimina a possibilidade da divisão por zero, foi concebido de forma a não entrar em conflito com todos os outros 6 axiomas.

Apresentar estas regras aos alunos sem demonstrar suas motivações, agrega a Matemática um caráter superficial que ela nunca teve, os erros e paradoxos fazem parte do raciocínio que levaram a Matemática a ser como é. Assim, esperamos que estes exemplos paradoxais possam servir como objeto de estudo em sala de aula.

5.2 REGRAS DE SINAIS

Northrop (2014) afirma que paradoxos também ocorrem quando existe uma diferença entre a nossa percepção intuitiva da realidade e a realidade em si. Sobre este aspecto, quando analisamos operações que envolvem números negativos, resultados nada intuitivos podem aparecer: a possibilidade de somar ao número 4 um outro número e como resultado obter 2, ou seja, obtém-se a metade de um número mesmo somando algo a ele; ou então subtrair uma quantidade do número 4 e obter 8, dobrou-se o valor de uma quantidade mesmo realizando uma subtração; pode-se dobrar um número e ele se tornar menor; ou ainda multiplicar dois valores menores que zero e o resultado ser maior que zero.

Esses resultados soam paradoxais pois nossa percepção intuitiva da realidade tende a buscar uma contextualização para operações matemáticas, muitas vezes relacionando-as com manipulações entre objetos concretos, em detrimento de uma interpretação abstrata intrínseca a estas operações. É costume relacionar a adição ao processo de acrescentar objetos a uma dada coleção; a subtração ao processo de retirar objetos; e a multiplicação por um número inteiro a uma sucessão de somas, pois esta é uma das primeiras formas com que nos relacionamos com as operações numéricas e isto tem a ver com a nossa percepção de uma realidade concreta. Contudo, a realidade em si, que neste caso é a realidade matemática, não lida com objetos concretos, mas sim abstrações que obedecem às suas próprias regras.

Devido a estas questões, operações com números negativos são considerados como obstáculos epistemológicos, pois a busca de uma fixação em uma contextualização gera inconsistências, mesmo que tais contextualizações sejam úteis em alguns casos. Relacionar por exemplo números negativos ao extrato de uma conta bancária em dívida ou a profundidade de um ambiente em relação ao nível do mar, pode ser bastante eficaz no ensino da adição entre números negativos. No entanto, esta abordagem torna o ensino das regras de sinais entre o produto destes números algo frustrante para muitos estudantes.

É natural que operações com números negativos causem estranheza. Foram necessários mais de 1500 anos para que estas operações fossem totalmente compreendidas. Sendo importante observar que a motivação para sua formalização advém de aplicações referentes à própria Matemática, dentro do contexto de manipulações algébricas, isto é, este conhecimento não foi constituído de uma maneira prática, mas sim teórica.[24]

Por volta do ano 1000 A.C. os chineses já realizavam operações de soma e subtração entre números negativos, porém não os aceitavam como soluções de equações. Essa deficiência foi parcialmente sanada pelos hindus. Brahmagupta, que viveu por volta do ano 628, elaborou métodos para calcular soluções gerais de equações quadráticas considerando também as soluções negativas, além de enunciar as regras de sinais para multiplicação e divisão envolvendo números positivos e negativos. Apesar dos gregos já conhecerem as regras de sinais através das identidades geométricas, como por exemplo $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$, os termos negativos desta identidade não eram interpretados por eles como números, ao contrário da interpretação hindu.[3]

Foi enunciado em uma publicação de 1572 pelo matemático Rafael Bombelli (1526-1572) as seguintes regras operatórias com números inteiros, juntamente com os seguintes exemplos:

> *Mais por mais dá mais; menos por menos dá mais; Mais por menos dá menos; menos por mais dá menos; Mais 8 por mais 8, dá 64; menos 5 por menos 6, dá mais 30; Menos 4 por mais 5, dá menos 20; mais 5 por menos 4, dá menos 20.* [11]

Mesmo na Renascença, quando os matemáticos já conheciam as regras de sinais, existia uma resistência em aceitar os números negativos como solução de equações. Isso pode ser observado no trabalho de Michael Stifel (1486-1567) intitulado Arithmetica integra, no qual as propriedades algébricas dos números negativos já eram bem formuladas. Apesar disso, Stifel os denominava como "numeri absurdi".[3]

Buscar uma contextualização para a regra de sinais sem recorrer a propriedades puramente matemáticas foi um desafio até mesmo para Euler. Em uma obra voltada ao ensino de matemática ele faz as seguintes declarações comentadas por Glaeser (1985):

> *A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma de dívida de 3a escudos. Logo $b.(-a) = -ab$.*
>
> *Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma operação externa. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.*
>
> *Por comutatividade, Euler deduz daí que $(-a).b = -ab$.*
>
> *Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de a escudos?*
>
> *Resta determinar o que é o produto $(-a).(-b)$.*
>
> *É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto, de decidir entre $+ab$ e $-ab$. Como $(-a).b$ já vale $-ab$, a única possibilidade restante é de que $(-a).(-b) = +ab$.* (GLAESER, 1985, p.64-65, apud RIOS, 2017)

A fim de apontar as dificuldades na interpretação do significado dos números negativos enfrentada pelos matemáticos ao longo da história, Glaeser (1981, apud ALMOULOUD, 2007) listou 6 obstáculos referentes a este conhecimento, são eles:

1. Inabilidade para manipular quantias negativas isoladas;
2. Dificuldade para dar um sentido a quantias negativas isoladas;
3. A unificação da reta numérica;
4. Ambiguidade dos dois zeros;
5. A estagnação ao estágio das operações concretas (por oposição ao estágio das operações formais) como sendo a dificuldade de se descartar de um sentido 'concreto' dado aos seres numéricos;
6. Busca de um modelo unificador: encontrar um 'bom' modelo aditivo, válido para o modelo multiplicativo.

Glaeser organizou em uma tabela os obstáculos que alguns matemáticos famosos superaram ou não. O sinal + indica a superação dos obstáculos, o sinal – significa que não superou e o ponto de interrogação significa que não há informações suficientes.

Obstáculos \ Autores	1	2	3	4	5	6
Diofanto	-					
Simon Stevin	+	-	-	-	-	-
René Descartes	+	?	-	?		
Colin MacLaurin	+	+	-	-	+	+
Leonhard Euler	+	+	+	?	-	-
Jean D'Alembert	+	-	-	-	-	-
Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	?
Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Tabela 1: Matemáticos famosos que superaram obstáculos. (GLASER, 1981, p. 309, apud ALMOULOUD, 2007)

Apesar de Diofanto conhecer as regras de sinais, sendo atribuído a ele o primeiro registro de tais regras no final do século III, as regras eram descritas apenas como um procedimento para readequar os resultados, números negativos não eram considerados números por ele; já Stevin considerava os números negativos como um artifício de cálculo e não os interpretava como soluções de equações; MacLaurin por sua vez obteve um grande avanço sobre o entendimento deste assunto, contudo não pode estabelecer uma teoria completa dos números inteiros por não considerar a ambiguidade dos dois zeros (zero como valor absoluto e zero como origem de uma reta numérica contendo números positivos e negativos); Euler, como observado anteriormente, não superou os obstáculos 5 e 6 buscando contextualizações inconsistentes. Foi apenas no final do século XIX que todos os obstáculos foram superados com a publicação do trabalho de Hermann Hankel (1839-1873). Em um trabalho denominado Teoria dos Números Complexos, Hankel demonstra que as regras de sinais são consequências da preservação de algumas propriedades já conhecidas dos números positivos, como a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição (axioma 6, vide subseção 4.3.3), bem como demonstra compreender o conceito de sinais operatórios, que representam operações, e sinais predicativos, que caracterizam um número como elemento simétrico (axioma 5, vide subseção 4.3.3).[1]

Hankel deu um grande passo ao considerar que a natureza dos números não é substancial, mas sim teórica. Este deve ser o verdadeiro contexto em que as regras de sinais devem ser ensinadas pois isto revela a característica intrínseca aos números, que sua natureza é determinada por suas propriedades.

Apresentamos na seção 4.3 três formas diferentes de caracterizar o conjunto dos números reais, porém a definição mais adequada para a análise e dedução das operações com números negativos é o sistema axiomático que define um corpo ordenado completo, corpo isomorfo ao conjunto dos números reais. Pois as questões relativas à regra de sinais têm um caráter puramente algébrico, próprio do sistema axiomático em questão.

Com apenas estes cinco problemas, é possível explicar todas as operações relacionadas à regras de sinais. Dados a, $b \in \mathbb{R}/\{0\}$ pode-se demonstrar utilizando os axiomas de Corpo que:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \ \text{se } a+b=0, \text{ então } b=-a \ \text{ e } a=-b;\\
&\text{b)} \ -(-a)=a;\\
&\text{c)} \ (-1)a=-a;\\
&\text{d)} \ (-a)b=-(ab);\\
&\text{e)} \ (-a)(-b)=ab.
\end{aligned}
$$

A propriedade descrita na letra a não costuma gerar dúvidas nos estudantes, porém neste exemplo é importante destacar que o sinal negativo na frente dos reais a e b são sinais predicativos que indicam por exemplo que $-a$ é o elemento simétrico ao número a (conforme definição referente ao axioma 5). Somando portanto $-a$ em ambos os lados da igualdade temos $-a+(a+b) = -a+0$, segue da associatividade da adição que $(-a+a)+b = -a$, logo $0+b = -a$, ou seja, $b = -a$. Isso quer dizer que o elemento simétrico a a pode ser descrito como $-a$. Somando $-b$ em ambos os lados da equação e seguindo o mesmo procedimento conclui-se que $a = -b$.

Alguns podem pensar que a letra b exemplifica a regra do produto entre dois números negativos, contudo observe que só existe um número real do lado esquerdo da equação, portanto não existe uma multiplicação entre dois números reais, mas sim dois sinais predicativos, um sinal que indica o simétrico de a (sinal dentro do parênteses) e outro sinal que indica o simétrico do simétrico de a (sinal fora do parênteses). Sendo assim, como $a+(-a) = 0$, a é o simétrico de $-a$ por definição.

A letra c por outro lado, indica o produto entre dois números reais, um negativo e um positivo. Esta equação surge da ideia de que $0 = 0a = ((-1)+1)a$, aplicando a propriedade distributiva e somando $-a$ dos dois lados da equação temos que:

$$-a = ((-1)a+a)+(-a) = (-1)a+(a+(-a)) = (-1)a+0 = (-1)a.$$

E com este resultado podemos generalizar este produto e demonstrar que um número negativo qualquer $-a$, vezes um número positivo qualquer b resulta em um número negativo. Logo:

$$(-a)b = ((-1)a)b = (-1)(ab) = -(ab).$$

Portanto, é consequência dos axiomas de corpo que um número negativo vezes um positivo é negativo, e pela comutatividade da multiplicação (Axioma 2) um número positivo vezes um negativo também é negativo.

Por fim, a letra e, que ilustra o produto de dois números negativos, pode ser demonstrada utilizando os exemplos anteriores como se segue:

$$(0-a)(-b) = ((-1)a)(-b) = (-1)(a(-b)) = (-1)(-(ab)) = -(-(ab)) = ab.$$

Alguns professores costumam ensinar a regra de sinais considerando que o primeiro sinal à esquerda significa "o inverso". Ao apresentar por exemplo a multiplicação $(-2)(-3)$ é ensinado que o inverso de um número negativo é positivo, logo $(-2)(-3) = +6$, e no caso de $(-2)(+3)$ o raciocínio seria: o inverso de um número positivo é negativo, e assim $(-2)(+3) = -6$. Esta analogia pode ser útil se o objetivo for que os alunos sejam capazes de "decorar" a regra de sinais, contudo tal interpretação não tem nenhum sentido lógico, no caso de $(-2)(-3)$, o primeiro sinal significaria "o inverso" e o segundo sinal significaria "negativo", como se o significado de um sinal fosse relativo à posição que ele ocupa na operação, ou na ordem em que se lê, ao invés de ser apenas uma consequência de sua definição. Esta prática apenas deturpa o sentido matemático das regras de sinais criando obstáculos e inconsistências intransponíveis.

Um caso especial desta última regra diz que $(-1)(-1) = 1$, este resultado é o primeiro passo de seis passos que causaram o paradoxo $-1 = 1$ ilustrado no capítulo 5.

Vejamos novamente a sequência de operações que geraram o paradoxo:

$$\begin{array}{ll}
1 = 1 & \Leftrightarrow \\
1 = (-1)(-1) & \Leftrightarrow \\
\sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} & \Leftrightarrow \\
1 = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} & \Leftrightarrow \\
1 = (i)(i) & \Leftrightarrow \\
1 = i^2 & \Leftrightarrow \\
1 = -1. &
\end{array}$$

Já sabemos, portanto, que a primeira passagem está correta. Isso leva a crer que alguma propriedade de radiciação ou potenciação foi utilizada de maneira incorreta. A resposta para este paradoxo será o objeto de estudo da próxima seção.

5.3 RAÍZES QUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Não há nada de errado com as raízes quadradas de números negativos, apenas devemos compreender que este tipo de número não é real, ou melhor dizendo, não é elemento do conjunto dos números reais. Logo, não necessariamente gozam de suas propriedades.

Na realidade estes números são elementos de um conjunto que integram os chamados números complexos ou números imaginários. O desenvolvimento desta teoria está diretamente relacionado à evolução da álgebra simbólica e de estudos sobre equações algébricas.

Em 1484 na França, um manuscrito escrito por Nicolas Chuquet (1445-1488) denominado Triparty em la Science des nonbres, contém tanto equações com números negativos escritos de forma explícita, quanto algumas técnicas para calcular raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros. Neste trabalho Chuquet já havia identificado que as soluções de algumas equações continham números imaginários. Nestes casos ele afirmava "Tel nombre est ineperible".[3]

Os avanços nesta área continuaram a acontecer, em 1545 Gerônimo Cardano (1501-1576) tornou pública as soluções dos polinômios de graus 3 e 4, um marco no desenvolvimento da Álgebra. Ao buscar a solução do problema de se dividir 10 em duas partes α e β tais que o produto fosse 40 (problema representado pela equação $x^2 - 10x + 40 = 0$, ele se deparou com a seguinte resposta: $\alpha = 5 + \sqrt{(-15)}$ e $\beta = 5 - \sqrt{(-15)}$. Cardano não aceitava tais soluções, pois apenas o conjunto dos números reais era conhecido na época, ele se referia às raízes quadradas de números negativos como soluções "sofisticas", afirmando a inutilidade destes resultados. É interessante comentar que até mesmo os números negativos eram considerados como "números fictícios" por Cardano.[12]

O primeiro matemático a considerar os números imaginários como números de fato, foi Rafael Bombelli (1526-1572) estabelecendo regras de sinais entre multiplicações envolvendo a unidade imaginária $\sqrt{(-1)}$. Cardano, apesar de considerar tais soluções como absurdas, as admitia como artifício para encontrar soluções reais.

Coube a Albert Girard (1595-1632) admitir que tanto os números negativos quanto os números imaginários fazem parte do conjunto das possíveis raízes de uma equação polinomial.

Um século depois, Euler denotou $\sqrt{(-1)}$ por i; desmistificando as operações matemáticas envolvendo este número, pois com esta representação os números imaginários podem ser manipulados como polinômios lineares em i; além de desenvolver a representação dos números imaginários na forma polar.

No início do século XIX, Gauss batizou estes números como números complexos, utilizando-os para provar alguns resultados em Teoria dos Números. Ele foi uns dos primeiros a interpretar estes números como pontos do plano, utilizando essa abordagem em sua primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que diz que toda equação polinomial de coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa.

Tanto quanto os números negativos, os números imaginários foram considerados absurdos, sofismas e contraditórios. Leibniz dizia que estes números estavam entre a existência e a não existência "da mesma forma que o espírito santo de Deus".

Conhecer a história deste conjunto só evidencia o porquê deste conceito ainda causar tanto embaraço em estudantes de Matemática. A motivação para seu desenvolvimento foi puramente teórica e suas aplicações encontram-se em campos de pesquisa nada usuais, como em cálculos de circuitos elétricos, de fenômenos eletromagnéticos ou da aerodinâmica de aviões. Áreas do conhecimento que na maioria das vezes não fazem parte do repertório adquirido por um professor de matemática. Portanto é natural a presença de obstáculos no processo de ensino e aprendizagem destes conceitos. Contudo, é possível utilizar alguns paradoxos para discutir as propriedades fundamentais dos números complexos que os diferenciam dos números reais, bem como definições fundamentais por vezes esquecidas, ou não discutidas.

Uma dessas definições no campo dos números reais é a da extração de raízes quadradas, representada pela notação $\sqrt{}$. Para compreender como a convenção que regula o uso deste símbolo foi definida, é necessário antes, conhecer alguns aspectos importantes relacionados ao corpo dos números reais.

Foi apresentado na subseção 4.3.3 que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo. Recordemos que ser ordenado significa que existe um conjunto $P \subset \mathbb{R}$, denominado conjunto dos elementos positivos, tais que a soma e o produto de elementos positivos são positivos e dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ só pode-se afirmar um das três possibilidades: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Sendo assim, para qualquer real $x \neq 0$ temos que $x^2 \in P$, ou seja, o quadrado de um número real diferente de zero "é sempre positivo". De fato, se $x \neq 0$ então ou $x \in P$ ou $-x \in P$. No primeiro caso $x^2 = x.x \in P$ e no segundo caso $x^2 = (-x).(-x) \in P$.

Em um conjunto ordenado define-se uma relação de ordem, que pode ser representada pelo símbolo $<$, esta relação diz que $y < x$ quando $x - y \in P$, em particular se $x > 0$ então $x \in P$.

Passemos agora a discussão a respeito da extração da raiz quadrada de um número real.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com x positivo, tais que $x^2 = y$, x é chamado de raiz quadrada de y e fica convencionado que seu valor "não negativo" é denotado por $x = \sqrt{y}$.

É importante destacar com respeito a esta convenção que, de acordo com o que foi discutido anteriormente, como x e y são elementos de um corpo ordenado então $y > 0$ "obrigatoriamente", uma vez que $y = x^2$, em outras palavras, não há como existir a raiz quadrada de um número negativo em um corpo ordenado completo, ou seja, no conjunto dos números reais.

Outra observação importante é que sempre vão existir apenas dois valores de x que satisfazem a equação $x^2 = y$, são eles $\sqrt{y}$ e seu simétrico $-\sqrt{y}$.

Em posse destas informações, algumas conclusões podem ser tiradas do seguinte paradoxo em questão:

Passo 0	$1 = 1$	$\Leftrightarrow$
Passo 1	$1 = (-1)(-1)$	$\Leftrightarrow$
Passo 2	$\sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)}$	$\Leftrightarrow$
Passo 3	$1 = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$	$\Leftrightarrow$
Passo 4	$1 = (i)(i)$	$\Leftrightarrow$
Passo 5	$1 = i^2$	$\Leftrightarrow$
Passo 6	$1 = -1.$	

A primeira consideração a ser feita é: A qual conjunto o número 1 pertence? Este número será considerado um número real ou um número complexo?

Esta é uma observação crucial para que se possa compreender os fatores que culminam neste paradoxo. Entre os seis passos descritos, existem inconsistências diferentes nas operações realizadas dentro dos dois domínios, a saber o domínio dos reais e dos complexos.

Consideremos que 1 pertence ao domínio dos números reais: O passo 1 é uma aplicação da regra de sinais exposta na seção anterior, o passo 2 decorre do fato de $1^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1$. O que pode ser dito sobre o passo 3? Nesta etapa a seguinte propriedade foi aplicada: sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$ então $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.

Acontece que esta propriedade decorre do fato de que se $x^2 = a$ e $y^2 = b$, como $x^2y^2 = (xy)^2$ (devido a propriedade associativa da multiplicação), então $ab = (\sqrt{a}.\sqrt{b})^2$, ou ainda, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. Por hipótese a e b são positivos e por isso essa propriedade não pode ser aplicada a números negativos. Além disso já foi demonstrado que $\sqrt{-1}$ não é um número real. Portanto, as únicas operações aceitas no conjunto dos reais seriam, ou seguir o caminho contrário, ou efetuar a multiplicação $(-1)(-1)$. Assim é garantido que sejam realizadas operações consistentes com as definições estabelecidas e com os axiomas considerados, eliminando então a possibilidade de um paradoxo.

Entretanto, o que ocorre caso o número 1 seja um número complexo? Neste caso a situação muda completamente. Deve ser considerado que $\sqrt{-1}$ existe, e por definição $i = \sqrt{-1}$. Sendo assim, o que poderia estar errado?

Na verdade a convenção estabelecida para o símbolo $\sqrt{\ }$ não é a mesma nos dois domínios. Ao contrário do caso real em que está convenção considera apenas uma das raízes da equação $x^2 = a$, no campo complexo esta consideração não existe.

Isso porque no conjunto dos números reais, ao considerarmos a convenção mais geral que engloba o conceito de raiz enésima dados um real positivo b e um natural $n > 1$, "existe um único real positivo" a, tal que $a^n = b$, sendo assim podemos denominar a como sendo a raiz enésima de b, que simbolicamente pode ser definido como sendo $a = \sqrt[n]{b}$.

Assim, ao aplicar a regra $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ não existe ambiguidades entre os resultados esperados, pois só existe uma única raiz enésima por definição.

É importante observar que a unicidade da raiz enésima não ocorre no domínio dos números complexos.

Dado $z \neq 0$ um número complexo definido em sua forma trigonométrica:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

A solução da equação complexa $w^n = z$, com n natural, é representada por n valores de w que podem ser calculados pela fórmula:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi l}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi l}{n}\right)\right),\ l = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Ao utilizar a notação $w = \sqrt[n]{z}$, bem como a propriedade $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, devemos saber com quais das n raízes enésimas estamos trabalhando.

Por exemplo, o número complexo $z = 1$ na sua forma trigonométrica é dado por $z = \cos(0)$. Desta forma, sua raiz quadrada pode ser calculada como se segue:

$$\sqrt{1} = \cos(\pi l)\ , l = 0, 1.$$

Portanto, $z = 1$ possui "duas raízes complexas representadas pelo mesmo símbolo" $\sqrt{1}$, a saber 1 e -1, pois estes são os valores de $\cos(0)$ e $\cos(\pi)$ respectivamente.

A ocorrência do paradoxo se deu devido ao fato de que no passo 3, dentre as duas possibilidades para o valor de $\sqrt{1}$, foi escolhido $\sqrt{1} = 1$, entretanto neste mesmo passo, foi feita a operação $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$, esta escolha gerou uma ambiguidade que deixou implícita a escolha de $\sqrt{1} = -1$, uma vez que a expressão $\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$ não representa mais $\sqrt{(-1)^2}$. Ela é uma expressão que comporta "duas possibilidades", uma vez que $\sqrt{(-1)(-1)} = i^2$ comporta "apenas uma possibilidade" descrita pela definição $i^2 = -1$.

Este paradoxo sobre o campo complexo é consequência de um processo de generalização abusiva destacado por Artigue como um fator gerador de obstáculos epistemológicos.

O exemplo a seguir ilustra outra generalização abusiva muito comum cometida pelos estudantes ao utilizar a seguinte definição de raiz enésima: $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, define-se $b^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n]{b}$.

Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$, extraindo a raiz quadrada dos dois lados e aplicando a definição sobre a equação $(-a)^2 = (a)^2$ ocorre o seguinte paradoxo:

$$\begin{array}{lcc}
\text{Passo 0} & (-a)^2 = (a)^2 & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 1} & \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(a)^2} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 2} & ((-a)^2)^{\frac{1}{2}} = ((a)^2)^{\frac{1}{2}} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 3} & (-a)^{\frac{2}{2}} = (a)^{\frac{2}{2}} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 4} & (-a)^1 = (a)^1 & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 5} & -a = a. &
\end{array}$$

A definição desta propriedade estabelece claramente que só é válida para $b > 0$, portanto ela foi aplicada no passo 2 de maneira correta, uma vez que tanto $(-a)^2$ quanto $(a)^2$ são maiores que zero. Na realidade o erro ocorre no passo 3 especificamente no lado esquerdo da equação.

Neste passo foi utilizada a seguinte propriedade: se $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $m, n \in \mathbb{Q}$ então $(b^m)^n = b^{mn}$.

Sendo assim, não se pode fazer $((-a)^2)^{1/2} = (-a)^{2/2}$, uma vez que se $a > 0$ então $-a < 0$.

Na realidade, toda expressão $\sqrt{(a)^2}$ para qualquer a real, é equivalente a $|a|$ (módulo de a). Pois $\sqrt{(a)^2}$ representa o valor positivo de x solução da equação $x^2 = a^2$.

Portanto, a forma adequada de prosseguir no raciocínio seria:

$$\begin{array}{lcc}
\text{Passo 0} & (-a)^2 = (a)^2 & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 1} & \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(a)^2} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 2} & |-a| = |a| & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 3} & a = a. &
\end{array}$$

Toda propriedade ou definição na matemática é estabelecida baseada em hipóteses que delimitam seu campo de atuação. Pelo fato do símbolo $\sqrt[n]{a}$ delimitar apenas uma solução da equação de números reais $x^n = a$, todas as propriedades operatórias da radiciação somente são aplicáveis neste conjunto.

Este último exemplo mostra o que ocorre quando se insiste em utilizar sobre o domínio complexo propriedades definidas no conjunto dos reais.

$$
\begin{array}{lcr}
\text{Passo 0} & \sqrt{-1} = \sqrt{-1} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 1} & \sqrt{\dfrac{-1}{1}} = \sqrt{\dfrac{1}{-1}} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 2} & \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 3} & \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = \sqrt{1}\sqrt{1} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 4} & ii = 1 & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 5} & i^2 = 1. &
\end{array}
$$

A propriedade utilizada no passo 2 não é definida no conjunto dos números complexos. Esse paradoxo é similar ao primeiro tratado nesta seção e serve para demonstrar o quanto é necessário conhecer as premissas que tornam adequadas a utilização de propriedades operatórias. A história da matemática nos mostra que o estudo de resultados paradoxais, como as raízes quadradas de números negativos, faz parte da essência do desenvolvimento matemático. Logo, quem os ignora, desconhece parte do significado da matemática.

5.4 OPERAÇÕES COM LOGARITMOS

Como destacado na seção anterior, o desenvolvimento da teoria que fundamenta o conjunto dos números complexos ocorreu devido a um estímulo puramente teórico. Ao aceitar uma estrutura algébrica capaz de fundamentar sentenças que expressam relações entre incógnitas numéricas e métodos generalizados para determinar o cálculo de tais incógnitas, consequentemente, os matemáticos se viram diante de resultados puramente teóricos, como $x^2 = -1$. Num primeiro momento, estes resultados eram evitados, contudo, com o avanço dos métodos algébricos, ficou clara a necessidade de estudar e fundamentar melhor esses conceitos.

Apesar de o primeiro contato dos estudantes com logaritmos ter um caráter puramente teórico, sendo caracterizado como a função inversa da função exponencial, inicialmente os logaritmos foram concebidos como uma simples ferramenta de cálculo baseada em sua "propriedade fundamental" de transformar produtos em somas.

Entre os séculos XVI e XVII atividades práticas como: o estudo do movimento dos planetas, ou a navegação e até mesmo a fabricação de relógios, demandavam cálculos cada vez mais precisos, e apesar de já existir ferramentas que auxiliavam na execução desses cálculos, como o ábaco e outros instrumentos, tais ferramentas não eram eficientes para computar multiplicações entre números grandes, pois estas operações são de fato bastante trabalhosas quando realizadas sobre números com vários dígitos. Foi para suprir esta demanda que os logaritmos foram criados por John Napier (1550-1617).

Inspirado em relações trigonométricas que transformam produtos em somas; como por exemplo $\sin(A)\sin(B) = 1/2(\cos(A-B) - \cos(A+B)$, largamente utilizadas na Europa do século XVI para este fim; e também nas propriedades já conhecidas de produto de potências de mesma base em que se conserva a base e apenas são somados os expoentes, tornando desnecessária a realização de uma multiplicação, Napier imaginou a possibilidade de representar todos os números como uma potência (que denominaremos por N) de mesma base. Assim a multiplicação se resumiria em uma soma entre expoentes, a divisão em uma subtração e a extração de raízes seria uma divisão entre expoentes.

Desta forma, ele escolheu $1 - 10^{-7}$ como base, e para evitar números decimais multiplicou por 10^7 . Assim as potências N eram calculadas pela fórmula:

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L.$$

O expoente L era chamado por Napier de "logaritmo de N". Levou-se ao menos 20 anos para que ele concluísse os cálculos de uma tabela, com precisão de 7 casas decimais, que relaciona cada valor de N ao seu respectivo logaritmo L. Napier publicou sua tabela em 1614 num texto intitulado Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos).

Sua ferramenta foi recebida com grande entusiasmo pela sociedade científica. No ano seguinte à sua publicação, o matemático Henry Briggs (1561-1630) visitou Napier pessoalmente para propor melhorias à sua ferramenta. Os dois chegaram à conclusão de que a base dez seria mais adequada, e começando com $\log(10) = 1$ Bringgs calculou os logaritmos de 1 a 1000, cada um com precisão de quatorze casas decimais!

Esta ferramenta passou a ser largamente utilizada pela sociedade científica. Grandes pensadores, como por exemplo Johann Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647), utilizavam e divulgavam com entusiasmo este conhecimento. O impacto desta invenção foi notório, mais tarde Pierre Laplace (1749-1827) chegou a afirmar que os logaritmos foram responsáveis por dobrar a vida dos astrônomos, uma vez que o emprego deste método para cálculos agilizava significativamente a computação dos dados.

Os logaritmos continuaram sendo largamente utilizados apenas como ferramenta de cálculo por muito anos, até que, por volta do final do século XVII, através de estudos da função exponencial, realizados por John Wallis (1616-1703), Newton e J. Bernoulli (1667-1748) que destacavam as relações entre progressões aritméticas e geométricas, constatou-se que a função logarítmica seria a inversa da função exponencial.

Na verdade, o estudo da função exponencial e logarítmica ocorreu paralelamente ao desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Seus problemas fundamentais, a quadratura de curvas e o cálculo de retas tangentes a uma curva dada, indicavam que a função logarítmica era a chave para solução de um problema fundamental, a área abaixo da hipérbole equilátera.

Pierre de Fermat (1601-1665), havia com sucesso calculado a área abaixo da família de curvas descritas pela expressão $f(x) = x^n$ com n inteiro. A partir da origem esta área é calculada pela fórmula $A(x) = x^{(n+1)}/(n+1)$, observe que obrigatoriamente $n \neq -1$ para que não ocorra uma divisão por zero. Assim, a fórmula de Fermat falha no cálculo da área abaixo da hipérbole equilátera $f(x) = x^{-1}$. Contudo o matemático belga Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) identificou que esta área é caracterizada por uma função logarítmica de base desconhecida. Newton o denominou este logaritmo como Logaritmo Hiperbólico.

Coube a Euler identificar a base deste logaritmo desconhecido. De acordo com Simmons (1987), no processo de derivação de uma função logarítmica de uma base "a" qualquer, Euler chegou no seguinte resultado:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Já era do conhecimento de Euler que o limite expresso entre colchetes convergia para a base da função exponencial $f(x) = e^x$, portanto ele verificou que, ao considerar a base "e" denominando $log_e(x)$ como $ln(x)$ este resultado equivale a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Pelo conhecido Teorema Fundamental do Cálculo, a derivação corresponde a operação inversa da integração, sendo assim, sob a luz deste teorema isso significava que o número "e" era base do logaritmo hiperbólico. Diante da descoberta, Euler rebatizou esses logaritmos como Logaritmos Naturais.

O século XVIII foi um período de grandes descobertas na Matemática, o método do Cálculo Diferencial e Integral foi uma importante ferramenta que impulsionou várias destas descobertas. Porém, como toda nova teoria, ele carecia de fundamentos que garantiam a consistência de seus resultados. Assim, surgiram vários paradoxos relacionados a manipulações algébricas que continham equívocos muito parecidos como os cometidos atualmente na educação básica.

Já eram conhecidas muitas propriedades aritméticas dos logaritmos, Considerando a definição moderna da função logarítmica sob o domínio do conjunto dos números reais, os matemáticos já sabiam que:

$$\log x^n = n\log x.$$

Acontece que se $x < 0$, utilizar esta propriedade pode ocasionar em muitos paradoxos. Leibniz e J. Bernoulli identificaram esse problema e trocaram cartas discutindo sobre a natureza dos logaritmos de números negativos.

Partindo do fato de que $ln(1) = 0$, Bernoulli concluiu que:

$$ln(1) = ln(-1)^2 = 2ln(-1) = 0.$$

Afirmando portanto que $ln(-1) = 0$.

Esta afirmação origina o velho paradoxo descrito pela equação -1=1, uma vez que, ao considerar adequado o uso desta propriedade, pode-se concluir de forma generalizada o seguinte paradoxo:

$$\begin{array}{lcc}
\text{Passo 0} & (-a)^2 = (a)^2 & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 1} & \log{(-a)^2} = \log{(a)^2} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 2} & 2\log{(-a)} = 2\log{(a)} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 3} & \log{(-a)} = \log{(a)} & \Leftrightarrow \\
\text{Passo 4} & -a = a. &
\end{array}$$

Considerando o caso particular em que $a = 1$, obtemos a equação $-1 = 1$.

Além de calcular logaritmos de números negativos, Bernoulli tomou o mesmo raciocínio aplicando a regra também em números complexos chegando a outro paradoxo.

$$\log(\sqrt{-1}) = \log(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(-1) = 0.$$

Sob a luz de seus resultados, ele pensou haver provado que o logaritmo de números negativos seria um número real igual ao logaritmo de seu módulo.

Este mesmo erro foi cometido também pelo matemático francês Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783) que apesar de ser um grande matemático, sendo o primeiro a apresentar uma prova rigorosa da irracionalidade de π, realizou as mesmas operações realizadas por Bernoulli chegando ao mesmo resultado.

Em 1728 através de uma carta enviada a Bernoulli, Euler demonstra algumas propriedades dos logaritmos de números negativos que indicavam que estes deveriam possuir uma infinidade de valores todos múltiplos de um número complexo puro, ou seja, desprovido da parte real.[25] Essa questão foi encerrada em 1747 quando em uma carta endereçada a D'Alembert, Euler soluciona o problema e demonstra que suas suposições anteriores estavam corretas.[6]

Foi Euler quem estabeleceu a definição formal que conhecemos dos logaritmos de números reais. Em posse desta definição, utilizando a base "e" dos logaritmos naturais para fundamentar seu argumento, Euler demonstrou que o logaritmo natural de um número negativo não poderia existir no domínio do conjunto dos números reais. Logo, não se pode afirmar que tal logaritmo goze de todas as propriedades admitidas no conjunto dos números reais.

Para entender o porquê de os logaritmos de números negativos não pertencerem ao domínio dos números reais é necessário interpretá-lo sob a seguinte definição que caracteriza a função logarítmica como a inversa da função exponencial de variável real.

Definição 5.2. *Se* $x, b \in \mathbb{R}, 0 < b \neq 1$ *e* $x > 0$*, então* $\log_b a = a \Leftrightarrow b^x = a$.

Considerando a função logaritmo definida como sendo $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que $f(x) = \log_b x$ com $1 \neq b > 0$, nosso questionamento consiste em entender o porquê de esta função ser definida sob o domínio dos números reais positivos.

De acordo com esta definição podemos estabelecer a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f^{-1}(x) = b^x$ com $1 \neq b > 0$. Assim, esclarecendo o porquê de a imagem da função exponencial f^{-1} ser restrita aos números reais positivos, estará esclarecido o porquê de o domínio da função logarítmica f estar restrito aos números positivos, pois:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}.$$

No início desta seção, destacamos que os logaritmos foram concebidos segundo uma propriedade fundamental, a propriedade de transformar produtos em somas. Em linguagem algébrica isto significa que a função $f(x) = \log x$ é tal que, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

De fato, mais precisamente, prova-se que a função logarítmica é "a única função que goza de tal propriedade" e é totalmente caracterizada por ela de acordo com o seguinte teorema:

Teorema 5.3. *Seja* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*. Então existe* $b > 0$ *tal que* $f(x) = \log_b x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$*.[15]*

Sendo a função exponencial sua relação inversa, será que podemos supor que sua propriedade fundamental é a de transformar somas em produtos?

Isto de fato é verdade. Considerando $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona e injetiva, pode-se provar a seguinte afirmação: $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x).f^{-1}(y)$ (vide referência [15] capítulo 8.4 - Caracterização da função exponencial). Em outras palavras, afirmar que f^{-1} é uma função que transforma somas em produtos é equivalente a afirmar que $f^{-1}(x) = a^x$, cujo $a = f^{-1}(1)$, ou seja, f^{-1} define uma função exponencial.

Com a ajuda desta caracterização fundamental é fácil demonstrar que o conjunto imagem de f^{-1} só pode ser formado por números reais positivos, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)$ é sempre positivo, uma vez que:

$$f^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2.$$

De acordo com os axiomas de corpo ordenado, já foi demonstrado que todo número elevado ao quadrado é sempre positivo, portanto $f^{-1}(x) > 0$.

Assim, exatamente pelos mesmos motivos de que não existe a raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais, fica demonstrado que a imagem de f^{-1} é formada por números reais positivos. Na verdade podemos verificar em [15] capítulo 8.3 - A função Exponencial, que a função exponencial $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é sobrejetiva e consequentemente o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ compõe o domínio de f, quer dizer, da função logarítmica.

Isso resolve parte do paradoxo, pois ao considerarmos a operação do passo 2:

$$\log(-a)^2 \Leftrightarrow 2\log(-a).$$

Realizamos uma operação utilizando uma propriedade definida apenas entre números reais, o termo $\log(-a)$ não existe, ou seja, não é elemento do conjunto dos números reais.

Na realidade, realizando operação válidas, o paradoxo não pode existir, como ilustrado pelas operações a seguir:

Passo 0	$(-a)^2 = (a)^2$	$\Leftrightarrow$
Passo 1	$\log(-a)^2 = \log(a)^2$	$\Leftrightarrow$
Passo 2	$\log(a)^2 = \log(a)^2$	$\Leftrightarrow$
Passo 3	$a^2 = a^2.$	

Euler, enviou diversas cartas a D'Alembert sustentando que os logaritmos de números negativos não possuíam um valor real. Baseado na função $y = e^x$ e conhecendo a seguinte expansão racional $e = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \cdots$, como $x = ln(y)$, ele considerava impossível que uma potência real de e retornasse um valor negativo para y, diante disso ele afirmou que o logaritmo de um número negativo deveria ser um "número impossível".

Contudo, Euler sabia que até os números negativos já haviam sido considerados como números impossíveis, e investigando a fundo o problema ele demonstrou que logaritmos de números negativos poderiam ter uma interpretação numérica diferente do conjunto dos números reais. Mais tarde, Euler denominou estes números impossíveis como grandezas imaginárias.[25]

Utilizando a conhecida série de Maclaurin, ele calculou as expansões polinomiais das funções $\sin(z)$, $\cos(z)$ e e^z, e permitindo que a variável z assumisse um valor imaginário iy, Euler descobriu uma das mais belas equações matemáticas conhecida como identidade de Euler:

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

De forma geral, dado o número complexo $z = x + iy$ expresso em coordenadas retangulares, calculando o número e^z o resultado também será um número complexo $w = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ expresso na forma polar como se segue:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = w.$$

Dois números complexos são iguais quando possuem as mesmas coordenadas polares. Isso significa que $r = e^x$, e devido a periodicidade das funções seno e cosseno, para cada valor de y existem infinitos valores de θ que tornam $w = e^z$, a saber $y = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Na realidade esta nova expressão exponencial $e^z = w$ pode ser melhor interpretada como uma transformação entre coordenadas retangulares (x, y) e coordenadas polares (r, θ) e não como uma função. De acordo com estas equações, r depende apenas de x, mantendo o valor de x constante e variando o valor de y sobre uma reta vertical $x = c$ o resultado será uma circunferência de raio $r = e^c$ concêntrica a origem conforme a figura a seguir.

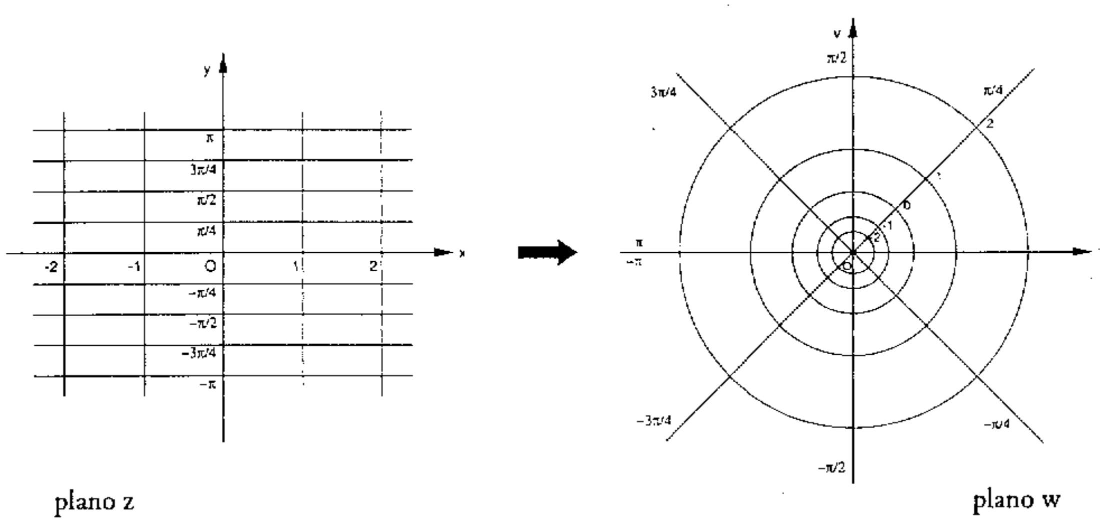

Figura 7: Transformação entre planos. (MAOR, 2008, P. 226)

A principal diferença entre as funções exponenciais em variável real e a complexa é que a função de variável real é monótona, portanto injetiva, isso significa que para cada x diferente de y então $f(x)$ é diferente de $f(y)$, contudo no campo complexo isso não ocorre. Conforme já demonstrado um mesmo número complexo z gera infinitos valores de imagem $f(z) = w = e^z$ diferentes.

Assim, para que Euler pudesse definir um conceito de logaritmo de um número complexo (sendo os números negativos um caso especial) ele teve de abrir mão da injetividade da função e interpretar o símbolo $ln(w)$ como "um conjunto de valores", de forma que: se $w = e^z$ o logaritmo natural de um número complexo então $ln(w)$ pode ser definido como:

$$
\begin{aligned}
ln(w) &= z && \Leftrightarrow \\
ln(w) &= x + iy && \Leftrightarrow \\
ln(w) &= ln(r) + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Podemos então utilizar esta fórmula para calcular $ln(-1)$. Se -1 é um número complexo (caso fosse um número real não existiria $ln(-1)$) sua representação na forma polar seria $w = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$. Logo $r = 1$ e $\theta = \pi$, e o cálculo de $ln(-1)$ será dado por:

$$ln(-1) = ln(1) + i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

Sendo assim, $ln(-1)$ admite, por exemplo, os seguintes valores: $-\pi i$, πi, $3\pi i$, $5\pi i$.

Da mesma maneira podemos calcular $ln(-1)$ e encontrar os valores: 0, $2\pi i$, $4\pi i$.

Perante estes resultados, o paradoxo encontrado por Bernoulli pode ser interpretado da seguinte forma: este paradoxo concluía falsamente que $ln(-1) = 0$ uma vez que,

$$ln(1) = ln(-1)^2 = 2ln(-1) = 0.$$

Se assumirmos que estamos a operar no domínio dos números complexos temos que rejeitar a propriedade operatória utilizada por Bernoulli, ou seja, $\log(x)^n = n\log(x)$ mais especificamente, $lnx^2 = 2lnx$.

Na verdade, Euler demonstrou que dados dois complexos z e w, ainda permanece válida a característica fundamental dos logaritmos, em outras palavras:

$$ln(z.w) = lnz + lnw.$$

Considerando $z = w$ temos que:

$$lnw^2 = lnw + lnw.$$

Mas, se forem somados os membros do lado direito da equação obtém-se $lnw^2 = 2lnw$ validando a operação paradoxal realizada por Bernoulli. Contudo, afirmar que $lnw + lnw = 2lnw$ vai contra tudo o que foi discutido anteriormente e é a causa da inconsistência.

Como ilustrado anteriormente, Euler concluiu que a função logarítmica não é injetiva no campo complexo. Sendo assim, ele definiu que o símbolo $ln(w)$ representa "qualquer um dos diversos valores possíveis do logaritmo de w". Não se pode considerar que $ln(w) + ln(w)$ seja a soma de dois valores iguais, o que de fato não são neste exemplo, pois essa consideração resulta em um paradoxo.

Neste caso, para resolver o problema basta considerar dois valores simétricos de $ln(-1)$ como por exemplo $-\pi i$ e πi, desta forma uma sequência correta de operações válidas seria:

$$ln(1) = ln(-1)^2 = ln(-1) + ln(-1) = -\pi i + \pi i = 0.$$

Mais uma vez demonstra-se que a falta de uma definição ou o desconhecimento dela, neste caso a definição do símbolo que representa o logaritmo de um número negativo, e a generalização de operações estendendo-as inadvertidamente a domínios aos quais ela não pertence, são as principais causas de paradoxos matemáticos que ocorrem na educação básica.

Sobre este tema, podemos destacar também alguns paradoxos verídicos, aqueles resultados que são aparentemente contraditórios, mas na realidade são verdadeiros. A identidade de Euler nos mostra muitos destes resultados, um deles é que, paradoxalmente, potências de números complexos podem ser reais!

Tomando $x = \pi$ chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) && \Leftrightarrow \\
e^{i\pi} &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) && \Leftrightarrow \\
e^{i\pi} &= -1 + i0 && \Leftrightarrow \\
e^{i\pi} &= -1.
\end{aligned}$$

Um número inteiro -1 pode ser representado como uma potência de números transcendentais e imaginários!

Ou então, utilizando a fórmula de mudança de base $b^z = e^{zln(b)}$ descobre-se que i^i representa infinitos valores, todos eles números reais.

De fato:

$$i^i = e^{iln(i)} = e^{i.i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-1\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z}.$$

Um desses valores possíveis pode ser aproximado por $i^i = e^{-\pi/2} \approx 0,208$. Resultados assim soam aparentemente paradoxais sempre que buscamos uma contextualização que dê significado concreto aos números. Como ilustrado neste trabalho, este é um comportamento que sempre esteve presente na história da matemática. Mas, no entanto, a história também nos mostra que este pensamento foi superado por aqueles que desejavam compreender como funciona esta ciência maravilhosa.

Paradoxos neste campo não ocorrem somente sobre números complexos. Utilizando logaritmos de números reais podemos demonstrar que, com uma simples distração, pode-se encontrar resultados absurdos.

Partindo da hipótese verdadeira que $3 > 2$, mas cometendo um descuido, podemos concluir que $4 > 8$ utilizando propriedades válidas de logaritmos.

Se $3 > 2$, multiplicando os dois lados da inequação por $ln(1/2)$ obtém-se:

Passo 1	$3ln(1/2) > 2ln(1/2)$	$\Leftrightarrow$
Passo 2	$ln(1/2)^3 > 2ln(1/2)^2$	$\Leftrightarrow$
Passo 3	$ln(1/8) > ln(1/4)$	$\Leftrightarrow$
Passo 4	$1/8 > 1/4$	$\Leftrightarrow$
Passo 5	$4 > 8.$	

Este paradoxo ocorre, não devido às propriedades de logaritmos utilizadas, mas porque a monotonicidade da multiplicação com respeito à relação de ordem não foi obedecida.

A falácia ocorre quando multiplicamos a inequação por $ln(1/2)$, pois este logaritmo representa um "número negativo". assim de acordo com a definição de ordem, se $3-2$ é positivo e $-ln(1/2)$ é positivo, então o produto deve ser positivo, ou seja:

$$
\begin{aligned}
-ln(1/2)(3-2) > 0 & \quad \Leftrightarrow \\
-3ln(1/2) + 2ln(1/2) > 0 & \quad \Leftrightarrow \\
2ln(1/2) > 3ln(1/2) & \quad \Leftrightarrow \\
ln(1/2)^2 > ln(1/2)^3 & \quad \Leftrightarrow \\
(1/2)^2 > (1/2)^3 & \quad \Leftrightarrow \\
1/4 > 1/8 & \quad \Leftrightarrow \\
8 > 4. &
\end{aligned}
$$

Este raciocínio equivale a inverter o sinal da inequação quando a mesma é multiplicada por um número menor que zero. Portanto, a causa do paradoxo ocorreu no passo 1, quando não foi considerando que a expressão $ln(1/2)$ representa um número negativo, apesar de o sinal negativo não estar presente nesta representação.

Muitas dos detalhes discutidos nesta seção e nas outras; como a definição da relação de ordem, as restrições existentes nos domínios de funções, as deduções de propriedades, as características que diferem corpos ordenados e não ordenados, a análise de axiomas, etc; às vezes são encarados como estudos tediosos, pois os livros de matemática, em sua maioria, não relacionam o conhecimento apresentado a motivação que resultou na criação daquele conhecimento.

Como podemos perceber, os paradoxos matemáticos muitas vezes desempenharam esse papel de motivação. Seu caráter desconcertante nos traz a sensação de que estamos diante de algo sobrenatural, $-1 = 1$, $4 > 8$, $2a = a$ com $a \neq 0$, e todos os outros paradoxos discutidos despertam nossa curiosidade, nos fazem refletir e transformam uma informação que nos dava a sensação de tédio em um conhecimento que nos traz alívio e satisfação. Inserindo-os, portanto, no processo de ensino e aprendizagem é possível que todos possam provar da sensação experimentada por aqueles que amam e vivem a Matemática. Assim, talvez mais pessoas se sintam inclinadas a seguir uma carreira nesta área e assumir o papel de pesquisadores matemáticos na sociedade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pesquisando a respeito das origens da Matemática, verificamos que estas surgem tanto de descobertas quanto de crises. Este segundo viés destaca a importância do papel dos paradoxos no desenvolvimento da Matemática, eles representaram verdadeiros obstáculos que exigiram muito trabalho e reflexão de figuras brilhantes desta área do conhecimento. A superação deles refletiu no aperfeiçoamento e desenvolvimento do conhecimento matemático. É fundamental que os professores reconheçam este processo como algo intrínseco à própria Matemática. Desta forma poderão aperfeiçoar seus métodos de ensino assimilando este processo em suas práticas pedagógicas.

Entender que a Matemática nem sempre esteve livre de incoerências ajuda a quebrar o paradigma de que erros não são permitidos, ou que eles devam ser evitados a todo custo no processo de ensino, ou ainda que a forma mais eficiente de evitá-los é apelar para a memorização.

Ainda se faz necessário discutir a respeito destes paradigmas, pois naturalmente a realidade escolar ocorre como um reflexo das relações sociais predominantes que acabam por influenciar as práticas pedagógicas. Devido a nossa história social e política, vivemos em um país no qual o pensamento prevalecente é conservador e tecnicista. Isto se reflete em um ensino que busca atender às expectativas dessa sociedade.

Sob esta perspectiva, o aluno é formado para se tornar um cidadão apto a seguir a ordem vigente e a atuar no mercado de trabalho. Sem espaço para reflexões, e com o objetivo de manter o status quo do sistema econômico, as técnicas pedagógicas de ensino da matemática buscam apenas tornar o aprendizado eficiente e produtivo. Neste aspecto, as práticas de ensino se resumem a memorização de conteúdos para aplicações específicas que são organizadas em listas de exercícios.[22]

Esta prática de ensino foi agravada pelo movimento da Matemática Moderna que destituiu da Matemática seu caráter histórico, atribuindo uma importância excessiva ao estudo axiomático desta ciência, de suas estruturas algébricas e da Teoria dos Conjuntos.[21] Neste contexto, o conhecimento matemático perde parte de sua essência que é o processo de experimentação e descoberta.

É interessante que haja uma reflexão da parte de professores cujas práticas pedagógicas ainda sofrem forte influência do pensamento conservador e tecnicista ou do movimento da Matemática Moderna. Pois, devido às perdas de significado no conhecimento matemático que ocorrem sob este tipo de abordagem, nossos alunos possuem uma visão distorcida do que de fato é a Matemática. O reflexo disto pode ser notado no frequente uso inconsistente de operações aritméticas, como a divisão por zero, ou na utilização de propriedades inexistentes como $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $(a+b)^n = a^n + b^n$.

Diante destas perdas, é vital um movimento de mudança, de revolução. Mesmo que seja necessário estabelecer um novo contrato didático atribuindo ao erro uma funcionalidade diferente no processo de ensino e aprendizagem.

Retomar o significado de obstáculos epistemológicos lança luz sobre as questões pedagógicas envolvidas no trabalho do educador. Ao utilizar como estratégia didática problemas que envolvam paradoxos, professores podem unir conhecimentos históricos, práticos e metódicos da matemática sob uma análise filosófica e psicológica do pensamento matemático, e com isso tornar o ensino da Matemática plenamente significativo.

O conhecimento dos fatores geradores de obstáculos epistemológicos unido ao entendimento dos conceitos relativos ao sistema axiomático da Matemática, aumenta a habilidade dos professores de identificar equívocos ou contradições que possam surgir no contexto didático da educação básica.

Este tipo de abordagem torna os professores mais preparados e aptos a criar uma situação de aprendizagem cujos aspectos didáticos estejam em consonância com o que vem sendo salientado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, como o desenvolvimento da capacidade dos alunos de estabelecer conexões entre diferentes campos da matemática, relacionando ideias matemáticas entre si e o reconhecimento do caráter epistemológico da matemática que vai além da aplicação prática de seus teoremas no cotidiano e no mundo do trabalho.

Assim nossos alunos poderão compreender que a matemática não é algo infalível e que por isso seu desenvolvimento é dinâmico, aberto a discussões e a novas descobertas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALMOULOUD, S. A., Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Editora UFPR; (2007).

[2] ÁVILA, G. S. S., Análise matemática para licenciatura, 3 ed. São Paulo: Blucher Ltda; (2006).

[3] BOYER, C. B., História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed da Universidade de São Paulo, (1974).

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC /SEF, 1998.148 p..
`portal.mec.gov.br/seb/arquivos`

[5] EUCLIDES, Os elementos, Tradução e introdução Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, (2009).

[6] EVES, H., Tradução: Domingues, H. H., Introdução à história da matemática, 5 ed., Campinas: Editora da Unicamp; (2011).

[7] GLAESER, G.. Epistémologie des nombres relatifs. Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v 2,3, p. 5-31 (1981).

[8] GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática. Boletim do GEPEM, Seropédica, v. 17, p. 29–124, (1985).

[9] GOLDSTEIN, R., Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Tradução Ivo Korytowski. São Paulo: Companhia das Letras, (2008).

[10] HALMOS, P. R., Naive set Theory. Princeton, N. J., Van Nostrand, (1960)

[11] HEFEZ, A, Aritmética, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, (2016).

[12] HEFEZ, A; VILLELA, M. L. T. Polinômios e Equações Algébricas, Rio de Janeiro: SBM, (2018).

[13] IEZZI, G., DOMINGUES H. H., ÁLGEBRA MODERNA. 4 ed. São Paulo: Atual, (2003).

[14] JOSEPH, G. G., The enormity of Zero. Revista Brasileira de História da Matemática, Vol. 2, nº 4, p.155-167, outubro, (2002).

[15] LIMA, E. L., Números e Funções Reais, Rio de Janeiro: SBM, (2013).

[16] LIMA, E. L., Curso de análise vol. 1, 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e aplicada, (2017).

[17] MAOR, E. e: A História de um Número. Trad. Jorge Calife. 5 ed. Rio de Janeiro: Editora Record, (2008).

[18] MORAES L.; ALVES, C. R. T., Paradoxos: o Mentiroso e outras histórias. Curitiba: Champagnat, (2013).

[19] NETO, A. C. M., Fundamentos de Cálculo, Rio de Janeiro: SBM, (2015).

[20] NORTHROP, E. P., RIDDLES IN MATHEMATICS: A book of paradoxes. New York: Dover; (2014).

[21] PINTO, N. B. - Marcas históricas da matemática moderna no Brasil – Revista Dialogo Educacional, n. 16 (2005).

`http://www2.pucpr.br/reol/pb/index.php/dialogo?dd1=600&dd99=view&dd98=pb`

[22] QUEIROZ C. T. A. P., MOITA F. M. G. S. C.– Fundamentos sócio-filosóficos da educação Fasc. 9 – Tendências pedagógicas e seus pressupostos. Campina Grande - Natal: UEPB/UFRN, (2007).

[23] RAMSEY, F. P., The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. Londres: Routledge & Kegan Paul LTD. (1950).

[24] RIOS, N. M., Os números inteiros: construção histórica e as dificuldades atuais em sala de aula, dissertação de mestrado do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, São José dos Campos, 39, (2017).

[25] ROQUE, T.; J. B. Pitombeira, Tópicos de história da matemática. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM; (2016).

[26] RUSSELL, B., Matematical Logic as Based on the Theory of Types. American Journal of Mathematics, Vol. 30, 3 ed. , p. 222-262, Jul. (1908).

[27] RUSSELL, B., Introdução à filosofia matemática, tradução Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, (2007).

[28] SANTOS R. Paradoxos Semânticos. Compêndio em Linha de Problemas de Filosofia Analítica. João Branquinho e Ricardo Santos (eds.). Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa. (2014).

[29] SHRAMKO, Y., HEINRICH W, "Truth Values", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.).

https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/truth-values/

[30] SILVA, J. J., Filosofias da matemática. São Paulo: Editora UNESP, (2007).

[31] SIMMONS, G. F.; Cálculo com geometria analítica. Trad. Seiji Hariki, São Paulo - SP: Editora McGraw-Hill, (1987).

[32] STEWART J. Cálculo, Vol. 1., Trad. Cyro C. Patarra, São Paulo: Pioneira T. L, (2013).

[33] WALLETT, Michael, "Zermelo's Axiomatization of Set Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.).

https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/zermelo-set-theory/

APÊNDICE

Teorema .1 (Teorema da Diagonalização)**.** *Supondo φ uma expressão qualquer de uma linguagem $\mathcal{L}$ e $[\varphi]$ o nome desta expressão disponível em $\mathcal{L}$, para qualquer fórmula $\varphi(v)$ da linguagem aritmética, v sua única variável livre, existe uma frase δ nessa linguagem de forma que $\delta \leftrightarrow \varphi([\delta])$ é uma verdade demonstrável na aritmética.*

Demonstração:

Iremos demonstrar que, a partir de qualquer propriedade expressa pela fórmula $\varphi(x)$, existe uma frase que atribui essa propriedade a si mesma.

Seja portanto $\varphi(x)$ uma fórmula qualquer da linguagem aritmética, com x sua única variável livre, temos que $[\varphi(x)]$ o nome desta fórmula.

Denomina-se diagonal de $\varphi(x)$ a fórmula resultante $\varphi([\varphi(x)])$ e a operação de diagonalização é expressa através do predicado Dxy, sendo a fórmula x a diagonal da fórmula y.

Utilizando $\psi(x)$ para expressar a fórmula $\exists y(Dyx \wedge \varphi(y))$ que significa que alguma diagonal de x possui a propriedade φ, a diagonal de $\psi(x)$ será dada por $\exists y(Dy[\exists y(Dyx \wedge \varphi(y))] \wedge \varphi(y))$ que significa que alguma diagonal de $\psi(x)$ possui a propriedade φ.

Denotando diagonal de $\psi(x)$ por λ, como o nome de uma fórmula é único, a fórmula expressa por λ é a única diagonal de $\psi(x)$.

Portanto,

$$\lambda \leftrightarrow \exists y(y = [\lambda] \wedge \varphi(y)).$$

Que é equivalente a:

$$\lambda \leftrightarrow \varphi([\lambda]).$$

Kurt Gödel utilizou este lema para construir uma frase que atribui a si mesma a propriedade de ser indemonstrável. Denominando de φ a expressão 'não demonstrável' na linguagem $\mathcal{L}$, Gödel produziu uma frase λ tal que $\lambda \leftrightarrow \varphi([\lambda])$.[28]

Teorema .2 (Teorema da indefinibilidade de Tarski)**.** *Se $\mathcal{L}$ é uma linguagem capaz de expressar a aritmética, então não é possível definir em $\mathcal{L}$ um predicado de verdade em $\mathcal{L}$.*

Para provar o teorema pode-se utilizar a redução ao absurdo:

Caso fosse possível definir em uma linguagem $\mathcal{L}$ um predicado de verdade $V_{\mathcal{L}}(x)$, então para toda frase φ de $\mathcal{L}$ pelo teorema da diagonalização:

$$\varphi \leftrightarrow V_{\mathcal{L}}([\varphi]).$$

Mas se $V_{\mathcal{L}}(x)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}$ (com uma única variável livre) então $\sim V_{\mathcal{L}}(x)$ (negação de $V_{\mathcal{L}}(x)$ também o é, portanto, novamente pelo teorema da diagonalização:

$$\varphi \leftrightarrow \sim V_{\mathcal{L}}([\varphi]).$$

E isto implica que:

$$\sim V_{\mathcal{L}}([\varphi]) \leftrightarrow V_{\mathcal{L}}([\varphi]).$$

Em outras palavras, uma contradição. Portanto devemos abandonar a suposição inicial de que é possível definir em $\mathcal{L}$ um predicado de verdade em $\mathcal{L}$.