
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

Álgebra Geométrica no Ensino Médio

Marcio Oliveira de Moraes Junior

Orientador: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

São José dos Campos
Fevereiro, 2022



PROFMAT

Título: *Álgebra Geométrica no Ensino Médio*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Fevereiro, 2022

Morais Junior, Marcio Oliveira de

Álgebra Geométrica no Ensino Médio, Marcio Oliveira de Moraes Junior – São José dos Campos, 2022.

viii, 64f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Geometric Algebra in High School.

1. Álgebra Geométrica.
2. Álgebra de Clifford.
3. Multivetores.
4. Blades.
5. Ensino Médio.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação:

Prof^ª. Dr^ª. Grasielle Cristiane Jorge

MARCIO OLIVEIRA DE MORAIS JUNIOR
ÁLGEBRA GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO

Presidente da banca: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Banca examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Fernanda de Andrade Pereira

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Prof^ª. Dr^ª. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Data da Defesa: 25 de fevereiro de 2022.

“...for geometry, you know, is the gate of science, and the gate is so low that one can only enter as a little child.”

“...pois a geometria, você sabe, é o portão da ciência, e o portão é tão baixo que só se pode entrar como uma pequena criança.” (Tradução livre)

- William Kingdon Clifford

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Jeová, meu Deus, por todas as coisas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann, por sua orientação sempre com paciência e dedicação. Estou certo de que sua rigidez e atenção elevaram ainda mais o meu nível de exigência.

À minha esposa, Paola, por toda paciência, ajuda, amor, carinho, cuidado e parceria em toda nossa vida e, especialmente, durante mais essa etapa acadêmica. Sem teu abraço, alcançar o meu objetivo seria mais difícil, quiçá impossível.

À minha filha, Helena, que, mesmo tão pequenina e sem compreender os motivos de minha ausência, me presenteava com seus beijos fortes afim de me dar energia para estudar e escrever essa dissertação.

Ao meu sogro Lorenzo e à minha sogra Bernadete por todo esforço e ajuda.

Aos meus pais Marcio e Katia por toda a dedicação, amor e, principalmente, por minha existência.

A David Cohoe por me auxiliar no desenvolvimento de meus conhecimentos em Álgebras de Clifford. Sou grato por cada mensagem que trocamos.

Aos meus companheiros da turma 2019, pelos momentos que compartilhamos juntos, pelas trocas de ideias e experiências em nossas sextas-feiras.

A todos professores do PROFMAT na UNIFESP, em especial, além de meu orientador, à Prof^a. Dr^a. Grasielle Cristiane Jorge e ao Prof. Dr. Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno, por contribuírem em minha formação como docente. Vosso exemplo como docente é um dos maiores ensinamentos que levo deste curso.

Ao Prof. Me. Márcio André Traesel por sua contribuição em minha formação inicial e, especialmente, por me apresentar e iniciar às Álgebras de Clifford.

A todos aqueles que, diretamente ou indiretamente, contribuíram em minha formação como professor.

RESUMO

Apresentamos as Álgebras Geométricas (ou de Clifford) com o intuito de minimizar a dicotomia Geometria-Álgebra. Apresentamos tais Álgebras Geométricas sobre \mathbb{R}^n de maneira axiomática e exploramos interpretações geométricas de objetos centrais desse formalismo. No caso $n = 2$ apresentamos aplicações da álgebra a nível do Ensino Médio.

Palavras-chave: 1. Álgebra Geométrica. 2. Álgebra de Clifford. 3. Multivetores. 4. Blades. 5. Ensino Médio.

ABSTRACT

We present Geometric Algebra (or Clifford Algebra) as a powerful formalism able to minimize the Geometry-Algebra dichotomy. We present those Geometric Algebras over \mathbb{R}^n through an axiomatic approach and explore geometric interpretations of the main objects of this formalism. Also, we present applications of those algebras with $n = 2$ for High School.

Keywords: 1. Geometric Algebra. 2. Clifford Algebra. 3. Multivectors. 4. Blades. 5. High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	René Descartes (1596 - 1650). Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes >. 7	
Figura 2	Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz >. 7	
Figura 3	Jean-Robert Argand (1768 - 1822). Fonte: < https://prabook.com/web/jean-robert.argand/2202845 >. 8	
Figura 4	Carl Federich Gauss (1777 - 1855). Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss >. 8	
Figura 5	Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877). Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann >. 9	
Figura 6	William Kingdon Clifford (1845 - 1879). Fonte: < https://delphipages.live/pt/filosofia-e-religiao/filosofos/william-kingdon-clifford >. 10	
Figura 7	Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903). Fonte: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Josiah_Willard_Gibbs >. 10	
Figura 8	David Orlin Hestenes (1933 -). Fonte: < http://geocalc.clas.asu.edu/GA_Primer/GA_Primer/index.html >. 10	
Figura 9	Soluções \mathbf{u} e \mathbf{u}' para $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{u}\ \cos \theta$. 14	
Figura 10	Soluções \mathbf{u} e \mathbf{u}' para $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = A$. 15	
Figura 11	Solução única ao combinar as soluções para $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{u}\ \cos \theta$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = A$. 15	
Figura 12	Vetor no plano e seus representantes. 17	
Figura 13	Vetores paralelos. 18	
Figura 14	Vetores paralelos de mesmo sentido e de sentidos opostos. 19	
Figura 15	Soma de vetores. 19	
Figura 16	Regra do paralelogramo para soma de vetores. 19	
Figura 17	Vetor e seu inverso aditivo. 20	
Figura 18	Vetores não-paralelos e as retas contendo seus múltiplos. 21	
Figura 19	Vetor em função de outros dois vetores. 21	
Figura 20	Bivetor $A = a \wedge b$. 42	
Figura 21	Interpretação geométrica do cálculo de $\ a \wedge b\ $. 43	
Figura 22	$b \wedge a = -a \wedge b$. 43	
Figura 23	Representações distintas de um mesmo bivector $a \wedge b$. 44	
Figura 24	Trivetor $a \wedge b \wedge c$. 45	
Figura 25	Interpretação geométrica da soma de 2-vetores coplanares em $\mathcal{Cl}_{3,0}$. 46	
Figura 26	Interpretação geométrica da soma de 2-vetores não coplanares em \mathcal{Cl}_3 . 47	

Figura 27	Triângulo	51
Figura 28	Reta no plano.	53
Figura 29	Área de um triângulo a partir de trapézios.	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Base canônica para \mathcal{Cl}_4	31
Tabela 2	Tábua de multiplicação do produto geométrico em \mathcal{Cl}_2 .	48
Tabela 3	Tábua de multiplicação para $\mathcal{Cl}_{1,1,1}$.	61

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	5
1 BREVE NOTA HISTÓRICA	7
1.1 Álgebras Geométricas ou Álgebras de Clifford?	11
2 MOTIVAÇÃO	12
2.1 A unificação dos produtos escalar e exterior.	12
2.2 Olhar geométrico	14
2.3 Formalização/conceituação de nosso problema	15
3 ESPAÇOS VETORIAIS	17
3.1 Vetores no plano	17
3.2 Algebrização dos vetores no plano	21
3.3 Espaço Vetorial	23
3.4 Vetores em \mathbb{R}^n	26
4 ÁLGBRAS GEOMÉTRICAS	29
4.1 Os produtos interno e exterior de vetores	37
4.2 Os produtos interno e exterior estendidos	38
5 BLADES E SUA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA	42
5.1 Bivetores e trivetores	42
5.1.1 A soma de bivetores em \mathcal{Cl}_3	45
6 ALGUMAS APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO	48
6.1 Números Complexos	49
6.2 Identidades Trigonométricas	49
6.3 Lei dos senos e cossenos	51
6.4 Geometria analítica	52
6.4.1 Áreas	54
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
A OUTRAS ASSINATURAS	59
A.1 Forma quadrática	59
A.2 Álgebra de Clifford	60
A.3 Exemplos	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

INTRODUÇÃO

Alguns dos conteúdos conceituais a serem desenvolvidos no Ensino Médio carecem de uma aplicação prática. A relação dos discentes para com tais conteúdos depende ainda mais da relação do docente com esse e sua visão sobre educação matemática.

É certo que as ferramentas matemáticas nos ajudam a lidar com a realidade concreta. Seu uso reiterado no dia a dia e sua importância como linguagem das Ciências, em todas as áreas, são indiscutíveis. Mas há algo na Matemática que escapa a qualquer sentido prático/utilitário, que expressa relações, às vezes surpreendentes, e nos ajuda a construir significado do mundo da experiência [...]. Para enfrentar as dificuldades com o ensino da matemática, mais do que despertar o interesse pelas suas aplicações práticas, é fundamental desvelar sua beleza intrínseca. (MACHADO, 2012, p. 13)

Nesse sentido, o presente trabalho busca evidenciar as Álgebras Geométricas como poderosa ferramenta capaz de corroborar a apreciação da beleza intrínseca da Matemática ao aproximar duas áreas desse saber que são, comumente, vistas como disjuntas: Álgebra e a Geometria.

A busca incessante por aplicações práticas para cada um dos conceitos trabalhados na educação básica pode acarretar em uma concepção extremamente simplista da matemática como ferramenta utilitária para resolução de problemas reais. Em seu texto, [Silveira et al. \(2014\)](#) fazem observações acerca da contextualização no ensino da matemática.

[...] a contextualização da matemática pode trazer sérias implicações ao seu ensino, primeiro porque negligencia a natureza de suas proposições, em outras palavras, um teorema se constitui a partir de construções lógicas e não por observações empíricas, como se constitui os objetos de outras áreas de conhecimento [...].

Outra implicação decorrente da contextualização no ensino da matemática é o fomento a visão utilitária da disciplina. Tal visão leva professores e alunos ao constante questionamento acerca das aplicações práticas dos conteúdos matemáticos estudados em sala de aula, e o que é pior, acreditam que obtendo uma resposta, o que nem sempre é possível, a matemática escolar torna-se mais significativa. (SILVEIRA et al., 2014, p. 169)

As Álgebras Geométricas se mostram aplicáveis em diversos campos das ciências e tecnologia, com ênfase em aplicações na física (desde mecânica clássica a física quântica) e computação gráfica, sendo possível encontrarmos artigos de aplicação das Álgebras Geométricas até mesmo para determinação de estruturas moleculares. No entanto, o presente trabalho não se atém a aplicações de tais álgebras para além da própria matemática: o objetivo desse trabalho é vislumbrar as Álgebras Geométricas como um importante formalismo para o próprio conhecimento matemático.

Ainda que haja material sobre as Álgebras Geométricas (ou de Clifford), muitos desses são voltados às suas aplicações; caracterizando, assim, textos complexos e que, por vezes, não trazem em seu escopo conceitos básicos para a compreensão de tais álgebras.

Diante do exposto, pretende-se, nesse trabalho:

- explorar a geometria intrínseca às Álgebras de Clifford;
- considerar o tratamento de vetores no Ensino Médio e como tal abordagem não se contrapõe à estrutura de Espaços Vetoriais;
- propor ao leitor que atua na educação básica revisitar conceitos de Espaços Vetoriais;
- apresentar conceitos básicos para a compreensão inicial das Álgebras Geométricas;
- apresentar as Álgebras Geométricas sobre um sistema axiomático e sem a necessidade de conceitos complexos como, por exemplo: tensores, formas quadráticas, operadores de criação ou aniquilação.
- apresentar o uso das Álgebras Geométricas para conceitos a nível do Ensino Médio.

Para tanto, essa dissertação está organizada da seguinte maneira:

- Capítulo 1.** Apresentamos uma breve nota histórica sobre o desenvolvimento e a correlação da geometria e álgebra, desde Euclides a Hestenes.
- Capítulo 2.** Capítulo motivacional no qual duas motivações são apresentadas. A primeira, mais voltada para o campo algébrico e como a não comutatividade para o caso geral de um produto de vetores traz implicações que merecem ser observadas. A segunda, uma motivação mais voltada para o campo geométrico e como é útil um produto que combine o produto escalar de vetores e o produto exterior de Grassman.
- Capítulo 3.** Um capítulo elementar no qual exploramos o conceito de vetores no plano, tal como é apresentado aos estudantes de Ensino Médio, e fazemos a formalização do conceito de Espaços Vetoriais.
- Capítulo 4.** Principal capítulo dessa dissertação. Neste, apresentamos o sistema axiomático para as Álgebras Geométricas e, a partir dele, seguimos com uma breve exploração de tais álgebras.
- Capítulo 5.** Apresentação da interpretação geométrica de Blades.
- Capítulo 6.** Aplicações da Álgebra \mathcal{Cl}_2 ao Ensino Médio.
- Capítulo 7.** Breves considerações sobre essa dissertação e apontamentos sobre possíveis trabalhos futuros.
- Apêndice A.** Um capítulo adicional no qual fazemos uma breve apresentação sobre outras assinatura e apontamos exemplos de Álgebras de Clifford sobre espaços vetoriais munidos delas.

BREVE NOTA HISTÓRICA

A tentativa de unificar a álgebra e a geometria não é uma ideia nova, tampouco desconhecida. Ao lermos x^2 ou x^3 como “xis ao quadrado” e “xis ao cubo” estamos a descrever, respectivamente, a área de um quadrado de lado x e o volume de um cubo de aresta x .

Podemos considerar o primeiro avanço nesse sentido o trabalho de Euclides (aprox. 300 a.E.C.): *Os Elementos*. Não que Euclides tenha feito um esboço de uma unificação, mas sua estrutura axiomática da geometria sustenta conceitos algebrizados posteriormente. (DORST; FONTIJNE; MANN, 2009; VAZ JUNIOR, 1999)

Um importante trabalho sobre uma unificação ocorre com René Descartes e o surgimento da *Geometria Analítica*. Em 1679, a ideia de uma unificação foi defendida por Leibniz em um ensaio a Christiaan Huygens; essa carta foi publicada posteriormente em 1833. (VAZ JUNIOR; ROCHA, 2016; DORST; FONTIJNE; MANN, 2009; VAZ JUNIOR, 1999)



Figura 1: René Descartes (1596 - 1650). Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes>.



Figura 2: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz>.

Um importante avanço no caminho de uma unificação é a interpretação geométrica dos números complexos. Antes dos trabalhos de Jean-Robert Argand e de Carl Federich Gauss, os números complexos eram apenas artifícios para a obtenção de raízes de equações algébricas (CORRÊA, 2020; VAZ JUNIOR, 1999). Anterior aos trabalhos de Argand e Gauss, Caspar Wessel é o primeiro a apresentar o conceito de vetores, no entanto seu trabalho não foi notado pela comunidade (OLIVEIRA, 2015).

Em 1787 e em um de seus trabalhos, Wessel apresenta uma proposta para efetuar as quatro operações básicas com segmentos (orientados) no plano. [...] No dia 10 de março de 1797, *Directionens* é lido em um encontro da Academia e submetido para publicação na Academia Real Dinamarquesa. Wessel torna-se então o primeiro a apresentar (sem revelar tal intenção no artigo) uma representação geométrica dos números complexos. (OLIVEIRA, 2015, p. 26)



Figura 3: Jean-Robert Argand (1768 - 1822). Fonte: <<https://prabook.com/web/jean-robert.argand/2202845>>.



Figura 4: Carl Federich Gauss (1777 - 1855). Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>.

A partir da interpretação geométrica dos complexos, Hamilton tenta generalizar os conceitos desenvolvidos para o espaço tridimensional logrando a descoberta dos quaternions em 1843. Uma curiosidade é que, depois de anos tentando generalizar os números

complexos para o espaço tridimensional, Hamilton tem a ideia de uma generalização enquanto caminha sobre uma ponte em Dublin, Irlanda (CORRÊA, 2020). Com medo de esquecer sua ideia, Hamilton entalha na própria ponte a relação fundamental que levaria a tal generalização:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Em 1844, Hermann Günther Grassmann publica seus estudos sobre um sistema algébrico baseado em um produto geométrico. Posteriormente, em 1862, Grassmann publica uma segunda versão de seus estudos. Um grande avanço nos estudos de Grassmann é que, diferentemente dos estudos de Hamilton, esses não se restringem ao espaço tridimensional, sendo aplicáveis em espaços de dimensões ainda maiores. Em 1846, Grassmann é premiado por ter desenvolvido as ideias do ensaio de Leibniz. Ainda assim, o trabalho de Grassmann permanece desconhecido para a maior parte da comunidade, salvo alguns poucos como William Kingdon Clifford. (VAZ JUNIOR, 1999)



Figura 5: Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877). Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann>.

Mais tarde, em 1878, Clifford publica um trabalho em que mostra uma unificação dos trabalhos de Grassmann e Hamilton. A tal estrutura, Clifford dá o nome de *Álgebra Geométrica* e, hoje em dia, denominamos *Álgebras de Clifford*. Infelizmente, Clifford não pôde seguir com seu trabalho, pois falece um ano depois com 33 anos após ter contraído tuberculose. (VAZ JUNIOR; ROCHA, 2016; FERNANDES; LAVOR; NETO, 2017)

Em contra partida, Josiah Willard Gibbs desenvolve um formalismo que facilita o uso dos estudos de Hamilton. Esse sistema vetorial de Gibbs foi amplamente adotado e ainda é utilizado como linguagem da física. No entanto, tal formalismo, por vezes, requer extensões na busca de ser possível descrever teorias científicas mais modernas. (CHAPPELL et al., 2016)

Durante um bom tempo, os trabalhos de Clifford ficaram no esquecimento. Até que no fim do século XX - início do século XXI, o professor David Orlin Hestenes desenvolve um importante papel na divulgação e desenvolvimento das *Álgebras Geométricas*; sendo um dos principais nomes quando se pensa em reformular a linguagem matemática na física. (FERNANDES; LAVOR; NETO, 2017)



Figura 6: William Kingdon Clifford (1845 - 1879). Fonte: <<https://delhipages.live/pt/filosofia-e-religiao/filosofos/william-kingdon-clifford>>.

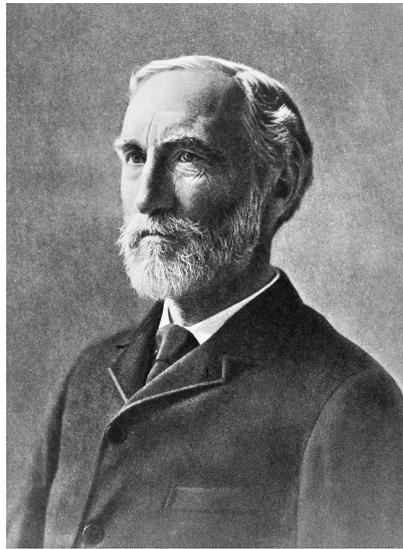


Figura 7: Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903). Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Josiah_Willard_Gibbs>.

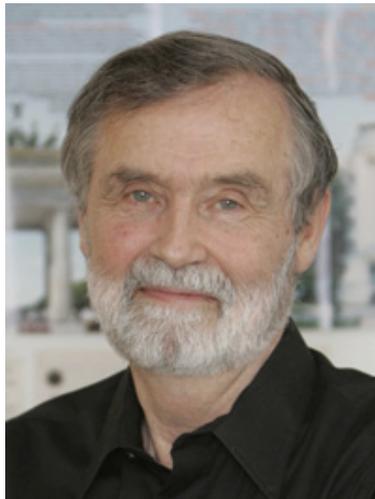


Figura 8: David Orlin Hestenes (1933 -). Fonte: <http://geocalc.clas.asu.edu/GA_Primer/GA_Primer/index.html>.

1.1 ÁLGEBRAS GEOMÉTRICAS OU ÁLGEBRAS DE CLIFFORD?

Historicamente, Clifford, ao desenvolver seus estudos unificando os trabalhos de Grassmann e Hamilton, chama sua descoberta de *Álgebras Geométricas*. No entanto, no desenvolver dessas álgebras, em sua homenagem, matemáticos e físicos passaram a denominar tais álgebras como *Álgebras de Clifford*. Hestenes, por sua vez, prefere continuar a tratar como Álgebra Geométrica como o fazia Clifford.

Esses dois termos podem ser encarados como sinônimos. No entanto, [Dorst, Fontijne e Mann \(2009\)](#) em seu capítulo 7, mais precisamente a partir da página 198, propõem uma distinção entre os termos. De forma extremamente simplificada: eles defendem o uso de Álgebra Geométrica como a estrutura cujos elementos são obtidos majoritariamente sobre estruturas multiplicativas, afirmando que “todo elemento produzido por uma multiplicação usando quaisquer de nossos produtos tem uma interpretação geométrica” ([DORST; FONTIJNE; MANN, 2009](#), p. 198. Tradução livre.); e Álgebra de Clifford fica reservado ao desenvolvimento dessas álgebras sem a preocupação das interpretações geométricas de seus entes que podem ser tomados sobre estruturas aditivas.

No decorrer deste trabalho, usaremos ambos os termos como sinônimos, assim como grande parte da comunidade.

MOTIVAÇÃO

Ainda que, nesse capítulo, sejam utilizados conceitos que podem não ser tão habituais ao leitor, esse capítulo justifica sua posição prévia por apresentar três motivações para o estudo da Álgebra Geométrica. A não compreensão total de tais conceitos não prejudica a compreensão do objetivo deste capítulo, que é: a visualização de que a Álgebra Geométrica é poderosa e eficiente.

2.1 A UNIFICAÇÃO DOS PRODUTOS ESCALAR E EXTERIOR.

Tal abordagem é baseada na aula do professor [da ROCHA \(2013\)](#).

Dado o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, introduzamos um novo produto $*$, denotemos esse produto por justaposição, assim

$$\mathbf{v} * \mathbf{u} = \mathbf{vu}, \text{ com } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} \in V.$$

Uma hipótese coerente e compartilhada pelo produto interno de vetores é que

$$\mathbf{vv} = \|\mathbf{v}\|^2,$$

em que $\|\mathbf{v}\|$ é a norma de \mathbf{v} , dada por $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, em que $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ com $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 .

Temos, até o momento, $v = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ em que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é base canônica de \mathbb{R}^3 . Sem assumirmos a comutatividade¹, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{vv} &= (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) = \\ &= v_1^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + v_2^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + v_3^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + v_1v_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + v_1v_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + v_2v_3(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Da hipótese temos que

$$\mathbf{vv} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

De modo que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = 0$, isto é, a soma dos termos em parênteses deveria ser nula afim de se obter o resultado da hipótese.

¹ A perda da comutatividade terá sentido geométrico que poderá ser percebido ao considerarmos o *produto exterior* durante os Capítulos 4 e 5.

Uma solução para isso seria considerar o produto $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ como produto escalar $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, uma vez que \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j são ortogonais para todo $i \neq j$ (são vetores da base canônica de \mathbb{R}^3) e o produto escalar de vetores ortogonais é zero.

No entanto, existe uma solução mais geral: considerar

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2$$

isto é, esses vetores anticomutam. Tal solução é mais geral no sentido de não restringir que cada um dos termos $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0$.

Também, devemos ter em mente que, para satisfazer a hipótese,

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1.$$

O mesmo ocorre para \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 .

De modo que podemos escrever, convenientemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) &= \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j}.$$

Na expressão anterior, \wedge denota o produto exterior. Tal produto provem da álgebra exterior de Grassmann e será definido em termos da Álgebra Geométrica no capítulo 4. Assim, vemos que ao introduzir o produto de justaposição e impor a condição

$$\mathbf{v} \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$$

uma solução seria a de Gibbs que considera esse produto como produto escalar, mas que, no entanto, há uma outra solução possível que é considerar tal produto como a soma do produto escalar com o produto exterior.

É importante notar que, se $i = j$, esse produto é

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i,$$

também, o produto exterior goza da propriedade de que $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$,

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i.$$

Mas, se $i \neq j$,

$$\boxed{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j},$$

como $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ para $i \neq j$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j.$$

Ou seja, o produto introduzido é eficiente ao unificar o produto escalar e o exterior em uma única expressão; portanto uma solução mais geral. Essa foi justamente a solução desenvolvida por Clifford.

2.2 OLHAR GEOMÉTRICO

Essa seção é baseada em [Dorst, Fontijne e Mann \(2009, p. 142\)](#).

Dados \mathbf{v} e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta$, com θ o ângulo formado entre \mathbf{u} e \mathbf{v} , não há uma única solução \mathbf{u} . Somando a uma solução qualquer vetores perpendiculares a \mathbf{v} obtemos outras (Figura 9).

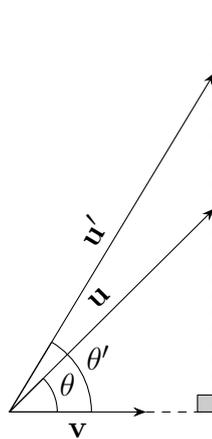


Figura 9: Soluções \mathbf{u} e \mathbf{u}' para $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta$.

Por hora, consideremos o produto exterior $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ a área de um paralelogramo de lados \mathbf{u} e \mathbf{v} ; tal interpretação é suficiente para esse capítulo motivacional, ainda que incompleta. Uma interpretação mais completa é considerada no Capítulo 5.

Dados \mathbf{v} e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = A$, não há solução \mathbf{u} única. Somando a uma solução qualquer vetores paralelos a \mathbf{v} obtemos outras (Figura 10).

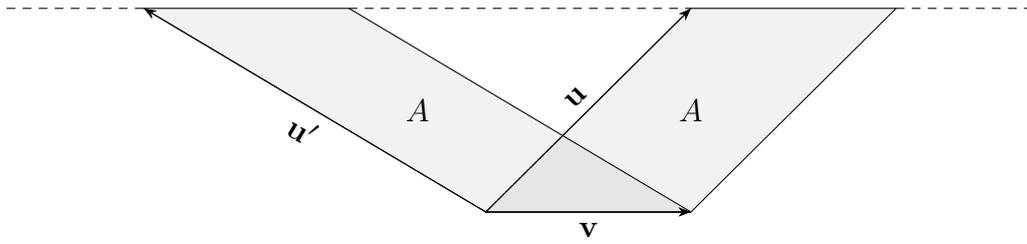


Figura 10: Soluções \mathbf{u} e \mathbf{u}' para $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = A$.

De modo que combinando $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é possível determinar \mathbf{u} de maneira única (Figura 11).

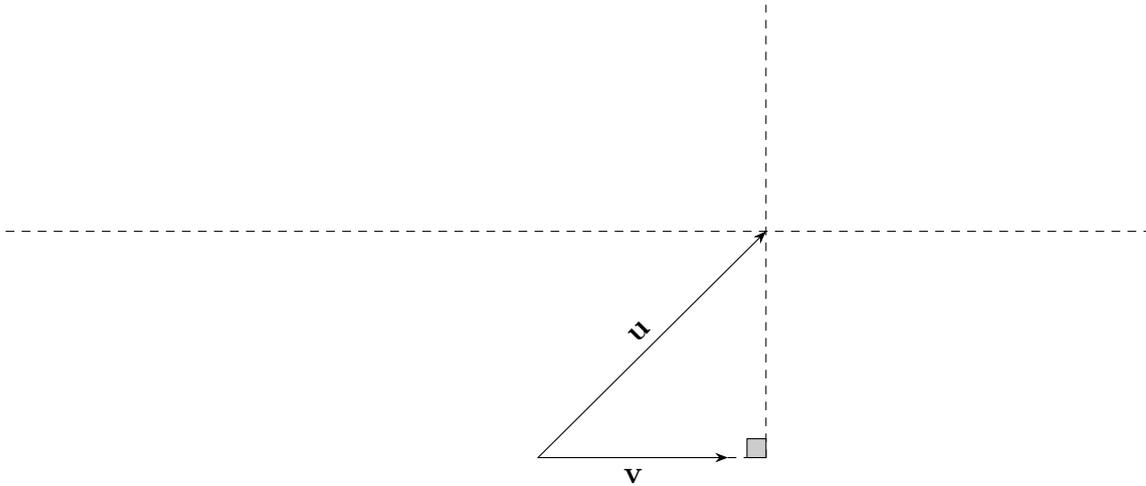


Figura 11: Solução única ao combinar as soluções para $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = A$.

Ainda assim, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é um escalar e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é um elemento de natureza distinta; o que nos leva a uma importante questão: como combinar os produtos escalar e exterior em um único objeto?

Quando estamos a trabalhar com números complexos, “combinamos” reais e imaginários em um único objeto complexo e, normalmente, não nos questionamos sobre isso, ou talvez não nos damos conta de que estamos a combinar objetos de naturezas distintas e ainda assim fazemos aritmética com esses.

O objetivo do presente trabalho é apresentar ao leitor um formalismo capaz de incorporar tais produtos.

2.3 FORMALIZAÇÃO/CONCEITUAÇÃO DE NOSSO PROBLEMA

Nessa seção, queremos elucidar o problema que essa dissertação se propõe a explorar:

Considerando um espaço vetorial real $(V = \mathbb{R}^n, +, \cdot)$ munido da norma usual para vetores $\|\cdot\|$, encontrar um espaço vetorial real $(G, +, \cdot)$ que contém V e os escalares K como subespaços com $K \not\subset V$, e um produto \star que torne (G, \star) uma álgebra que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)* $\forall a, b \in K, a \star b = a \cdot b \in K$ (multiplicação de escalares);

- ii*) $\forall a \in K$ e $v \in V$, $a \star v = av \in V$ (multiplicação de um escalar por um vetor é um vetor);
- iii*) $\forall v \in V$, $v \star v = \|v\|^2$ (o quadrado de um vetor é um escalar e mais: é o quadrado de sua norma) ;
- iv*) \star não é necessariamente comutativa.

Em nossa seção 2.1, notamos que uma solução é fazermos $G = V$ e \star o produto interno usual e, assim, obtermos uma solução comutativa. Uma outra solução é considerar \star um produto chamado *produto geométrico* ou *produto de Clifford* e o espaço vetorial G uma nova estrutura dita *espaço multivetorial*². A presente dissertação se propõe a explorar essa solução e alguns resultados provenientes dela.

²Tanto o produto de Clifford quanto o espaço multivetorial serão definidos no Capítulo 4.

ESPAÇOS VETORIAIS

O conceito de vetor é, geralmente, simplificado para o conceito de grandezas vetoriais, principalmente durante o ensino da Física no Ensino Médio. Nesse período, é apresentado ao estudante que vetor é um ente dotado de: grandeza (magnitude), direção e sentido. No entanto, esse é o conceito de *grandeza vetorial*, isto é, uma grandeza física que é, completamente, expressa e representada pelo ente matemático *vetor* no plano ou espaço tridimensional.

De fato, a simplificação de vetores a segmentos orientados, aos estudantes do Ensino Médio, se justifica ao observarmos que tais vetores são eficientes para representar grandezas físicas estudadas por esses.

Nesse sentido, façamos uma breve formalização sobre vetores. Apresentemos, primeiramente, o conceito intuitivo de vetores no plano para, posteriormente, fazermos uma algebrização deles.

3.1 VETORES NO PLANO

Em um plano, segmentos de reta orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido (orientados de mesma maneira) são representantes de um mesmo *vetor*. Para uma visualização, tenhamos dois pontos A e B distintos no plano, o segmento de reta orientado \overrightarrow{AB} é um vetor e os demais segmentos de reta orientados paralelos ou colineares a \overrightarrow{AB} são seus representantes.

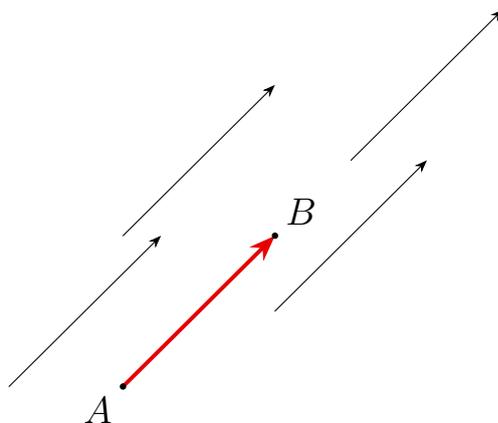


Figura 12: Vetor no plano e seus representantes.

Um vetor também é, comumente, denotado por uma flecha sobre uma letra minúscula latina \vec{v} , ou ainda, por uma letra minúscula latina em negrito \mathbf{v} .¹

Ao escrevermos $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, estamos afirmando que o vetor \mathbf{v} é determinado pelo segmento orientado \overrightarrow{AB} . No entanto, qualquer outro segmento de reta orientado de mesmos comprimento, direção e sentido de \overrightarrow{AB} representa o mesmo vetor \mathbf{v} , no sentido de que qualquer ponto no plano pode ser origem de um representante de \mathbf{v} .

São, portanto, atributos de um vetor no plano: sua magnitude (ou comprimento), direção e sentido. A magnitude de um vetor é, por vezes, chamada *módulo* do vetor. Denotaremos por $\|\mathbf{v}\|$ o módulo de \mathbf{v} .

Observemos implicações dessa definição:

- a) Dois vetores são paralelos se seus representantes têm a mesma direção. Denotamos \mathbf{a} e \mathbf{b} paralelos por $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Na figura 13, os vetores \mathbf{v} , \mathbf{u} e \mathbf{w} são paralelos, ainda que \mathbf{u} tenha sentido contrário a \mathbf{v} .

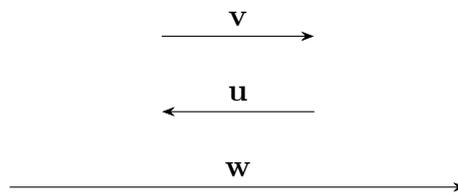


Figura 13: Vetores paralelos.

- b) Dois vetores são iguais se, e somente se, têm os mesmos módulo, direção e sentido. Denotamos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} iguais por $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
- c) O vetor nulo tem como seus representantes qualquer ponto do plano e pode ser indicado como $\mathbf{0}$. Por conta da ausência de direção e sentido para esse vetor, consideramos o vetor nulo paralelo a qualquer vetor do plano.
- d) Indicamos vetores dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} paralelos e de mesmo sentido por $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$. Também, indicamos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} paralelos e de sentidos opostos por $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$. Na figura 14, temos $\mathbf{v} \uparrow\uparrow \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \uparrow\downarrow \mathbf{u}$.

Soma de vetores no plano

Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores distintos no plano, cuja soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ desejamos obter. Assim, tomemos A um ponto qualquer do plano e tomemos um representante de \mathbf{a} com origem em A , determinando B , o ponto do plano extremidade do representante de \mathbf{a} . Tomemos

¹ Em literatura em português é mais comum o uso da flecha, enquanto, em literatura na língua inglesa, o uso do negrito é mais comum. Ainda, em textos mais avançados, não há uma notação muito distinta para vetores; preferindo somente o uso de letras minúsculas latinas (a, b, c, \dots). Afim de diminuir a poluição visual, simplificar a leitura e, ainda, garantir a atenção a estes objetos temos a preferência para o uso do negrito durante os Capítulos 2 e 3. A partir do capítulo 4, sempre que não houver risco de ambiguidade, usaremos apenas letras minúsculas; quando necessário, usaremos o negrito.

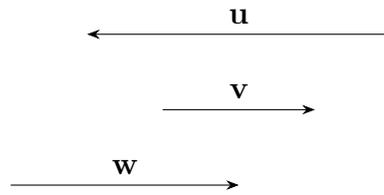


Figura 14: Vetores paralelos de mesmo sentido e de sentidos opostos.

o representante de \mathbf{b} com origem em B , determinando o ponto C extremidade do representante de \mathbf{b} . Por fim, o segmento orientado \overrightarrow{AC} é representante do vetor soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. (Figura 15).

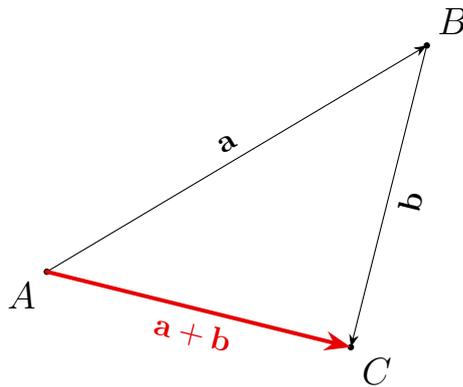


Figura 15: Soma de vetores.

A regra do paralelogramo

Uma outra maneira de obtermos a soma de \mathbf{a} e \mathbf{b} é a *regra do paralelogramo*. Tal estratégia consiste em tomarmos um representante de \mathbf{b} com mesma origem de \mathbf{a} e fazermos um paralelogramo com esses vetores. O vetor soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ é determinado pela origem de \mathbf{a} e \mathbf{b} e o vértice do paralelogramo formado (Figura 16).

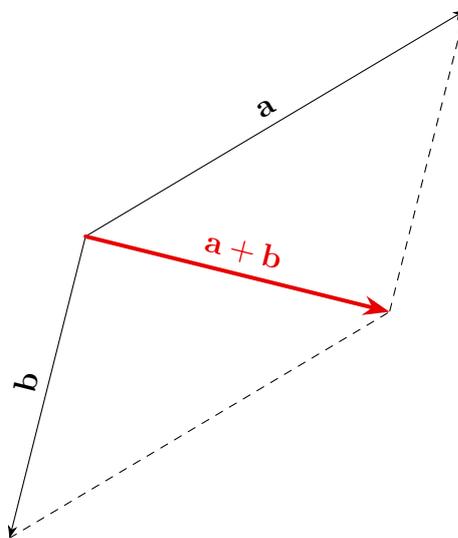


Figura 16: Regra do paralelogramo para soma de vetores.

Inverso aditivo

Notemos que para todo vetor \mathbf{a} não nulo é possível obter um vetor de mesmo módulo, direção mas sentido oposto a \mathbf{a} ; tal vetor é denominado inverso aditivo de \mathbf{a} e é denotado $-\mathbf{a}$ (Figura 17).

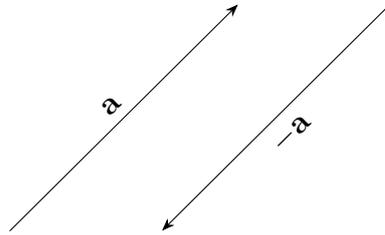


Figura 17: Vetor e seu inverso aditivo.

Produto de um vetor por um escalar

Definição 3.1. Dado um vetor \mathbf{v} qualquer do plano e um $\alpha \in \mathbb{R}$ (escalar), o produto por um escalar, ou ainda, produto por um número real é o vetor $\alpha\mathbf{v}$ tal que

- a) seu módulo é $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$, isto é, o módulo de $\alpha\mathbf{v}$ é igual ao módulo de \mathbf{v} multiplicado pelo valor absoluto de α ;
- b) sua direção é paralela a \mathbf{v} e
- c) seu sentido é o mesmo que \mathbf{v} se $\alpha > 0$ e oposto a \mathbf{v} se $\alpha < 0$, ou seja: $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha\mathbf{v} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$ e $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha\mathbf{v} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$.

Observemos que, caso $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

O Espaço Vetorial Plano

Com as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar definidas até o momento, o conjunto A dos segmentos orientados no plano, munido dessas operações, satisfaz

- i) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (associatividade da adição);
- ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (comutatividade da adição);
- iii) $\exists \mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in V$ (elemento neutro da adição);
- iv) para cada $\mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (existência do inverso aditivo);
- v) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ (associatividade da multiplicação por escalar);
- vi) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, onde 1 denota a identidade multiplicativa em F ;

vii) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ (propriedade distributiva);

viii) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ (propriedade distributiva).

Assim, concluímos que os segmentos de reta orientados são elementos de um conjunto que satisfaz a definição de *espaço vetorial*, e portanto, justificam ser denominados vetores.

3.2 ALGEBRIZAÇÃO DOS VETORES NO PLANO

A partir deste momento, toda vez que não houver risco de ambiguidade, trataremos os vetores no plano simplesmente por vetores.

Dados dois vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 não-paralelos e de mesma origem, traçamos as retas r_1 e r_2 que contém, respectivamente, os múltiplos de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

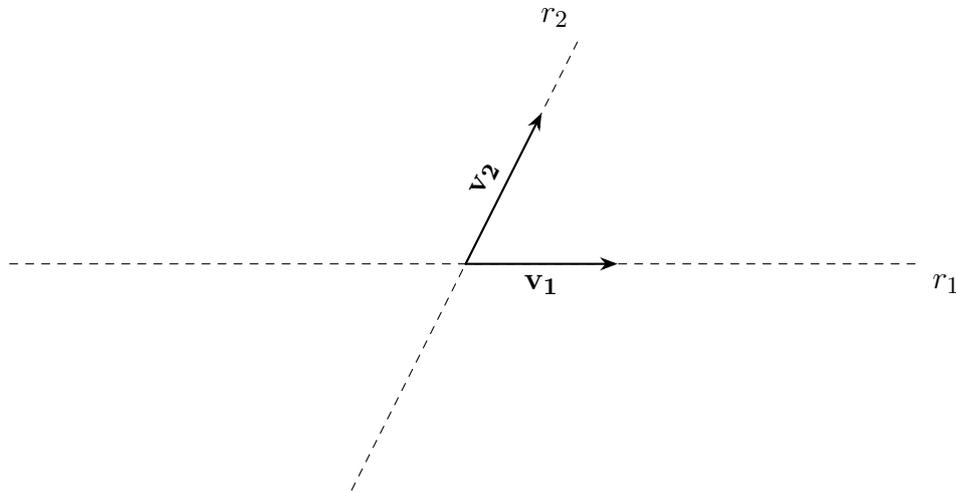


Figura 18: Vetores não-paralelos e as retas contendo seus múltiplos.

Assim, qualquer vetor no plano pode ser escrito em função de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , como por exemplo o vetor \mathbf{v} , na Figura 19, pode ser escrito como $\mathbf{v} = 1,5 \cdot \mathbf{v}_1 + 1,25 \cdot \mathbf{v}_2$.

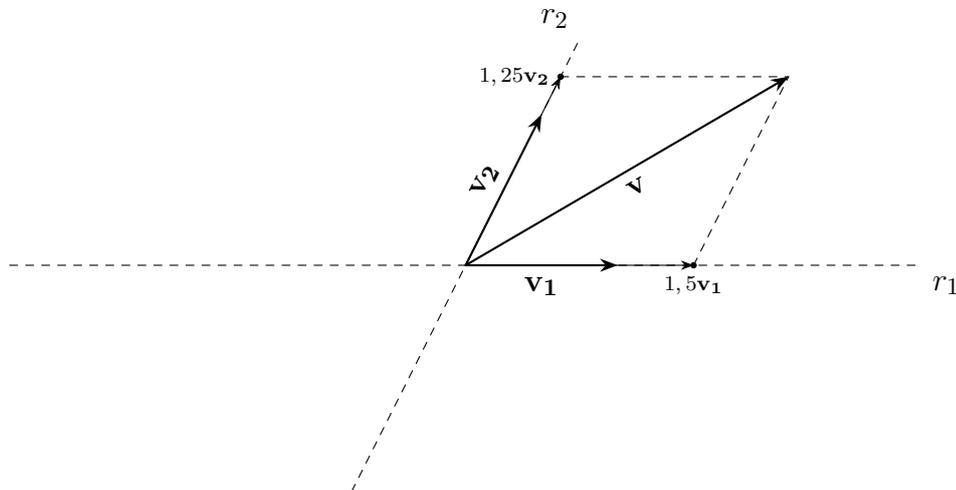


Figura 19: Vetor em função de outros dois vetores.

De maneira geral, dados dois vetores não-paralelos, todo vetor, no mesmo plano, pode ser escrito, de maneira única, como

$$\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2. \quad (3.1)$$

O vetor \mathbf{v} , quando escrito dessa maneira, é dito *combinação linear* dos vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . O conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é dito *base* no plano, o conceito de base será formalizado um pouco mais adiante.

Os números a_1 e a_2 são chamados coordenadas ou componentes do vetor² \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Também, dada uma base, os vetores podem ser expressos em termos de suas componentes. Por exemplo, o vetor \mathbf{v} da Figura 19 pode ser representado por $\mathbf{v} = (1, 5; 1, 25)_{\mathcal{B}}$, ou ainda $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (1, 5; 1, 25)$.

Um lema mais adiante (Lema 3.17) nos afirma que quaisquer dois vetores não-paralelos formem uma base no plano. Ainda assim, as bases comumente mais utilizadas são as bases *ortonormais*.

Definição 3.2. *Uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ é dita ortonormal se seus vetores são ortogonais e unitários.*

A base mais usual é a *base canônica*, que é a base ortonormal formada pelos vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Se destacarmos um ponto origem O , podemos associar o ponto A com o vetor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$. No sistema de coordenadas fixado por O e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, podemos denotar pontos e vetores de uma maneira similar, desde que todos os vetores tenham em comum o ponto inicial O :

$$\begin{aligned} \text{ponto } A &= (a_1, a_2), \\ \text{vetor } \mathbf{a} &= (a_1, a_2). \end{aligned}$$

Uma vez concluída a algebrização do plano, temos alguns resultados importantes:

- a) igualdade de vetores: dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são iguais se, e somente se, possuem as mesmas componentes em uma mesma base.
- b) a soma de vetores e o produto por escalar podem ser escritos, em termos das componentes, como

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ \alpha(a_1, a_2) &= (\alpha a_1, \alpha a_2); \end{aligned}$$

²Segundo Lounesto (2001, p. 4), alguns autores consideram componentes de vetores e coordenadas de pontos.

3.3 ESPAÇO VETORIAL

Na seção anterior, nos preocupamos com vetores como segmentos de retas orientados. No entanto, *vetores* são, de fato, elementos de uma estrutura chamada *espaço vetorial* e, como veremos a seguir, não se limitam a segmentos orientados.

Definição 3.3. *Um espaço vetorial sobre um corpo F é um conjunto V , não vazio, com duas operações: adição de vetores, $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $F \times V \xrightarrow{\cdot} V$, tais que, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $a, b \in F$, temos*

- i) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (*associatividade da adição*);
- ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (*comutatividade da adição*);
- iii) $\exists \mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in V$ (*elemento neutro da adição*);
- iv) para cada $\mathbf{v} \in V$, $\exists -\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (*existência do inverso aditivo*);
- v) $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ (*associatividade da multiplicação*);
- vi) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, onde 1 denota a identidade multiplicativa em F .
- vii) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ (*propriedade distributiva*);
- viii) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ (*propriedade distributiva*).

Os elementos de V são chamados de *vetores* e os elementos de F *escalares*.

De acordo com a definição anterior, vetor é todo elemento de um espaço vetorial. Vejamos, agora, alguns exemplos de espaços vetoriais.

Exemplo 3.4. *Seja $V = \mathcal{M}(2 \times 2)$ o conjunto de matrizes quadradas com entradas reais de ordem 2, e as operações de soma e multiplicação por escalar usuais. Mostremos que V munido de tais operações é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .*

De fato, sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ e $1, \alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Verifiquemos que V satisfaz as condições de espaço vetorial:

i)

$$\begin{aligned}
A + (B + C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\
&= (A + B) + C.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B + A.
\end{aligned}$$

iii) Seja $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos assim, para cada $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$

$$A + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

iv) Denotemos $-A$ a matriz cujos elementos são os opostos dos elementos da matriz A . Assim,

$$\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & a_{12} + (-a_{12}) \\ a_{21} + (-a_{21}) & a_{22} + (-a_{21}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta A) &= \alpha \left(\beta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = \\
&= \alpha \begin{pmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} \\ \beta \cdot a_{21} & \beta \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot (\beta \cdot a_{11}) & \alpha \cdot (\beta \cdot a_{12}) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot a_{21}) & \alpha \cdot (\beta \cdot a_{22}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha \cdot \beta) \cdot a_{11} & (\alpha \cdot \beta) \cdot a_{12} \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot a_{21} & (\alpha \cdot \beta) \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha \cdot \beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\
&= (\alpha \cdot \beta)A.
\end{aligned}$$

vi)

$$1A = 1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

vii)

$$\begin{aligned}
\alpha(A + B) &= \alpha \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) = \\
&= \alpha \left(\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(a_{11} + b_{11}) & \alpha(a_{12} + b_{12}) \\ \alpha(a_{21} + b_{21}) & \alpha(a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \alpha \cdot b_{11} & \alpha \cdot a_{12} + \alpha \cdot b_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} + \alpha \cdot b_{21} & \alpha \cdot a_{22} + \alpha \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \cdot b_{11} & \alpha \cdot b_{12} \\ \alpha \cdot b_{21} & \alpha \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \alpha \cdot A + \alpha \cdot B.
\end{aligned}$$

viii)

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)A &= (\alpha + \beta) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) \cdot a_{11} & (\alpha + \beta) \cdot a_{12} \\ (\alpha + \beta) \cdot a_{21} & (\alpha + \beta) \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \beta \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} + \beta \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} \\ \beta \cdot a_{21} & \beta \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha A + \beta A.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. O conjunto $W = \mathcal{M}(n \times n)$ das matrizes quadradas de ordem n , munido das operações de soma e multiplicação usuais é um espaço vetorial.

A verificação desse exemplo é análogo ao Exemplo (3.4).

Notemos que, para os exemplos anteriores, vetores não são segmentos de reta orientados, mas, sim, matrizes. Um outro exemplo no qual um vetor também não é um segmento orientado é o que segue.

Exemplo 3.6. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$, isto é, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n . Tal conjunto, munido da soma usual de polinômios e o produto por escalar, define um espaço vetorial.

Nota-se, facilmente, que $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial munido da soma usual e elemento neutro da adição $P(x) = 0$.

3.4 VETORES EM \mathbb{R}^n

Observemos que na Definição 3.3, há a indicação de F um corpo qualquer; no entanto, na sequência deste trabalho, vamos considerar que $F = \mathbb{R}$.

Até o momento, exploramos os vetores no plano. O espaço vetorial plano satisfaz boa parte, se não completamente, os conceitos físicos trabalhados no Ensino Médio. No entanto, podemos explorar ainda mais os Espaços Vetoriais ao trabalhar com espaços n -dimensionais, isto é, espaços vetoriais de dimensão finita n .

Para compreendermos o que é dimensão de um espaço vetorial, precisamos compreender o conceito de *subespaço*, *subespaço gerado* e o conceito de *dependência linear*.

Definição 3.7. Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W , não vazio, é denominado subespaço vetorial de V se:

- i) $\mathbf{0} \in W$;

ii) Para todo \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in W$, tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$;

iii) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in W$ temos que $a\mathbf{u} \in W$.

A definição deixa claro que W , munido das restrições no domínio da soma e da multiplicação por escalar, forma um espaço vetorial por si só.

Da definição acima, podemos concluir que qualquer espaço vetorial não trivial admite ao menos dois subespaços – chamados subespaços triviais. A saber: o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Um vetor $\mathbf{v} \in V$ é uma *combinação linear* dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ se \mathbf{v} é escrito como a soma de múltiplos de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, isto é

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n \quad \text{onde } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Definição 3.8. Subespaço gerado. O conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ é chamado de subespaço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e é denotado por

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}.$$

Podemos também escrever,

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n, \text{ com } a_i \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq i \leq n\}.$$

O subespaço gerado por uma lista vazia de vetores é definido como $\{0\}$.

Definição 3.9. Se $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} = V$, dizemos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ gera V .

Definição 3.10. Seja V um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. O conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é dito linearmente independente (L.I.) se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = \dots = a_n = 0$. Se a equação admitir solução não nula, dizemos que tal conjunto é linearmente dependente (L.D.)

Em outras palavras,

Lema 3.11. Um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se, um dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.

Definição 3.12. Uma base de V é um conjunto de vetores em V que são linearmente independentes e gera V . Isto é, um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ de vetores LI é uma base de V se $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = V$.

Proposição 3.13. Quaisquer duas bases de um espaço vetorial têm a mesma quantidade de vetores.

Definição 3.14. *A dimensão de um espaço vetorial de finitamente gerado é igual a quantidade de vetores de sua base.*

Para que a definição anterior tenha completo sentido é necessário que a Proposição 3.13 esteja muito clara para o leitor, sua demonstração pode ser encontrada em Axler (2015), Boldrini et al. (1980) e Winterle (2000).

Notação 3.15. *Denotamos $\dim V$ a dimensão de V .*

Proposição 3.16. *Suponhamos V um espaço vetorial de dimensão finita. Então, toda lista LI com $\dim V$ vetores é uma base de V .*

Uma consequência direta da proposição anterior é:

Lema 3.17. *Quaisquer dois vetores não-paralelos são base para o plano.*

Notemos que, nesse capítulo, foram abordados apenas alguns conceitos úteis e necessários no decorrer deste trabalho. Algumas demonstrações, deveras esclarecedoras, foram omitidas. Sugerimos, ao leitor interessado, a consulta aos livros-textos que serviram de base para esse capítulo: Winterle (2000), Boldrini et al. (1980) e Axler (2015).

ÁLGEBRAS GEOMÉTRICAS

O objetivo desse capítulo é definir de maneira axiomática as Álgebras Geométricas com base em [Macdonald \(2016\)](#), [Macdonald \(2017\)](#), [Hestenes \(1999\)](#) e [Hestenes e Sobczyk \(2012\)](#).

Definição 4.1. \mathcal{Cl}_n é um espaço vetorial com dimensão 2^n contendo \mathbb{R}^n . Seus vetores são chamados multivetores.. Além disso, \mathcal{Cl}_n satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 1. Sejam a e b vetores ortonormais com respeito ao produto escalar em \mathbb{R}^n , então

$$aa = 1, \quad (4.1)$$

$$ab = -ba. \quad (4.2)$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e A, B e $C \in \mathcal{Cl}_n$, então

Axioma 2. $A(BC) = (AB)C$.

Axioma 3. $A(B + C) = AB + AC$, também $(A + B)C = AC + BC$.

Axioma 4. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

Axioma 5. $1A = A1 = A$.

Os axiomas de 2 a 5 definem, de fato, \mathcal{Cl}_n como uma álgebra associativa com unidade. Ao passo que o axioma 1 é o axioma mais importante para a definição da Álgebra Geométrica.

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal para \mathbb{R}^n . Se desejamos multiplicar um número arbitrário de vetores, então devemos ser capazes de formar sequências de e 's

$$E = e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} \cdots e_{i_r}. \quad (4.3)$$

Um dado e_i pode ocorrer mais de uma vez e não há uma ordem específica para os vetores e_i . Por hora, tais sequências são meramente símbolos sem interpretação, mas se tornarão produtos.

Tomemos E' uma outra sequência obtida a partir de E fazendo:

- (i) troca de pares de e 's adjacentes e distintos;
- (ii) inserindo e retirando pares de e 's adjacentes e iguais.

Escrevemos T a operação obtida da reunião de trocas, inserções e retiradas que transformam E em E' ; assim, escrevemos $T(E) = E'$. Denominamos T par ou ímpar de acordo com N_e , o número de trocas em T ser par ou ímpar.

Satisfazendo as Equações 4.1 e 4.2, devemos fazer $E' = \pm E$, de acordo com T par ou ímpar. Uma questão que surge é: Se T_1 e T_2 transformam E em E' , T_1 e T_2 tem, necessariamente, a mesma paridade?

Lema 4.2. *Dados E e E' , todo T com $T(E) = E'$ são todos pares ou todos ímpares.*

Demonstração. Seja $G(E)$ o número de vezes que o subscrito em E é maior ou igual ao subscrito imediatamente a sua direita. Por exemplo, $G(e_2e_1e_5e_5e_4) = 3$. Trocando-se um par de e 's adjacentes e distintos, troca-se a paridade de G . i.e., troca G de par para ímpar ou vice versa. Inserindo ou retirando um par de e 's adjacentes e iguais troca G por um número par, e portanto não troca sua paridade. Portanto, T é par ou ímpar dependendo se $G(E)$ e $G(E')$ têm a mesma paridade ou não. \square

Se há um T par com $T(E) = E'$, escrevemos $E' = E$ e, por conseguinte, $-E' = -E$. Por exemplo, $e_2e_3e_1e_3 = e_1e_2$. A relação “=” é uma relação de equivalência. Se $E' = E$, então existe um T par com $T(E) = E'$. Logo, tomando T^{-1} as trocas, inserções e retiradas de T na ordem reversa, então $T^{-1}(E') = E$. Como T^{-1} é par, $E = E'$.

De maneira similar, se existe T ímpar com $T(E) = E'$, fazemos $E' = -E$ e $-E' = E$. Por exemplo, $e_3e_2e_1e_3 = -e_1e_2$.

O espaço vetorial $\mathcal{C}\ell_n$ é o conjunto das combinações lineares das classes de equivalência. Cada classe de equivalência tem um único membro $\pm B$, no qual B é da forma

$$B = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}, \text{ com } i_1 < i_2 < \cdots < i_r.$$

As classes de equivalência contendo B formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{C}\ell_n$. Há 2^n destas sequências (nas quais cada um dos e 's pode figurar ou não). Considerando a sequência vazia como a sequência formada apenas da unidade 1, temos $\dim \mathcal{C}\ell_n = 2^n$.

Definição 4.3. *Sejam $E = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$ e $F = e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_s}$. Definimos o produto geométrico de E e F :*

$$EF = (e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r})(e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_s}) = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_s}.$$

O produto é bem definido sobre as classes de equivalência: Se $E = E'$ e $F = F'$, então $EF = E'F'$. Agora, sequências da forma da Equação 4.3 podem ser interpretadas como o produto geométrico.

Estendendo o produto geométrico por linearidade, temos

$$\left(\sum_i \alpha_i E_i \right) \left(\sum_j \beta_j F_j \right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E_i F_j. \quad (4.4)$$

e o produto continua bem definido e satisfaz os axiomas propostos.

Na maior parte das vezes, não se faz necessário uma base em particular para multivetores. No entanto, uma base conveniente para algumas situações é a dita *base canônica*. O exemplo a seguir nos auxiliará na compreensão desse conceito.

Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base ortonormal para \mathbb{R}^4 , então a Tabela 1 nos apresenta a base para \mathcal{Cl}_4 .

Elementos						Base para
1						0-vetores ou escalares
e_1	e_2	e_3	e_4			1-vetores ou vetores
e_1e_2	e_1e_3	e_1e_4	e_2e_3	e_2e_4	e_3e_4	2-vetores ou bivectores
$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_4$	$e_1e_3e_4$	$e_2e_3e_4$			3-vetores ou trivetores
$e_1e_2e_3e_4$						4-vetores

Tabela 1: Base canônica para \mathcal{Cl}_4

Os subscritos nos produtos de e 's aumentam da esquerda para a direita e cada um desses produtos estão na base de \mathcal{Cl}_4 . Notemos que, rearranjar a ordem dos termos da base pode, apenas, trocar seu sinal; logo um produto dos elementos da base de \mathbb{R}^4 e seu rearranjo são linearmente dependentes e, portanto, ambos não figurarão ao mesmo tempo em uma base. A base canônica usa o arranjo com subscritos aumentando da esquerda para a direita.

A Tabela 1 pressupõe a existência de até o 4-vetor em \mathcal{Cl}_4 . Podemos examinar o que ocorre ao tentarmos formar um 5-vetor. Façamos $e_1e_2e_3e_4e_2$, mas decorre que

$$e_1e_2e_3e_4e_2 = -e_1e_2e_3e_2e_4 = e_1e_2e_2e_3e_4 = e_1e_3e_4 \tag{4.5}$$

e portanto $e_1e_2e_3e_4e_2$ é um trivetor em \mathcal{Cl}_4 . De maneira geral, não há m -vetores em \mathcal{Cl}_n para $m > n$.

A fim de simplificar a notação, é comum escrevermos por exemplo $e_1e_2e_3 = e_{123}$.

Definição 4.4. [k -vetor]. *Os multivetores dados pela combinação linear dos elementos formados pelo produto de k vetores e distintos são ditos multivetores homogêneos ou k -vetores.*

Definição 4.5. *Zero (0) é um k -vetor para todo k .*

A definição anterior se faz necessária afim de que k -vetores formem um subespaço de \mathcal{Cl}_n .

Notação 4.6. *Denotemos $\langle A \rangle_k$ a parte k -vetorial do multivetor A .*

Exemplo 4.7. *Um multivetor A qualquer em \mathcal{Cl}_3 é escrito da forma*

$$A = \alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_{12} + \alpha_5 e_{13} + \alpha_6 e_{23} + \alpha_7 e_{123}; \tag{4.6}$$

com $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, 7$. Então,

$$\langle A \rangle_0 = \alpha_0, \tag{4.7}$$

$$\langle A \rangle_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \tag{4.8}$$

$$\langle A \rangle_2 = \alpha_4 e_{12} + \alpha_5 e_{13} + \alpha_6 e_{23}, \tag{4.9}$$

$$\langle A \rangle_3 = \alpha_7 e_{123}. \tag{4.10}$$

Proposição 4.8. *Todo multivetor em $\mathcal{C}l_n$ pode ser escrito como a soma de suas partes k -vtoriais com $0 \leq k \leq n$, i.e. para todo $A \in \mathcal{C}l_n$,*

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \dots + \langle A \rangle_n = \sum_{k=0}^n \langle A \rangle_k$$

Definição 4.9. [*Multivetor par e ímpar*]. *Um multivetor A é dito par (ímpar) se $\langle A \rangle_r = 0$ para todo r ímpar (par).*

Claramente, um multivetor A pode ser escrito como a soma de sua parte par $\langle A \rangle_+$ e ímpar $\langle A \rangle_-$:

$$A = \langle A \rangle_+ + \langle A \rangle_-.$$

Proposição 4.10. *O operador de grau $\langle \ \ \rangle_r$ goza das seguintes propriedades:*

$$\langle A + B \rangle_r = \langle A \rangle_r + \langle B \rangle_r; \tag{4.11}$$

$$\langle \lambda A \rangle_r = \lambda \langle A \rangle_r = \langle A \rangle_r \lambda, \text{ se } \lambda = \langle \lambda \rangle_0; \tag{4.12}$$

$$\langle \langle A \rangle_r \rangle_r = \langle A \rangle_r \tag{4.13}$$

A última proposição, em especial suas Equações 4.11 e 4.12, implica que o espaço de todos os r -vetores é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}l_n$. A Equação 4.12 também implica que os escalares compõem uma subálgebra comutativa de $\mathcal{C}l_n$.

Um resultado dos axiomas propostos é a seguinte proposição:

Proposição 4.11. *O quadrado de um 1-vetor é um escalar.*

Demonstração. Seja $v \in \mathcal{C}l_n$ então pode ser decomposto na base canônica como $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Então, temos que

$$vv = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \tag{4.14}$$

$$= \alpha_1^2 e_1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 e_2 + \dots + \alpha_n^2 e_n e_n + \tag{4.15}$$

$$+ \alpha_1 \alpha_2 e_1 e_2 + \alpha_1 \alpha_3 e_1 e_3 + \dots + \alpha_1 \alpha_n e_1 e_n + \tag{4.16}$$

$$\vdots \tag{4.17}$$

$$+ \alpha_n \alpha_1 e_n e_1 + \alpha_n \alpha_2 e_n e_2 + \dots + \alpha_n \alpha_{n-1} e_n e_{n-1} \tag{4.18}$$

Notemos que $\forall i \neq j$, temos $e_i e_i = 1$ e $e_i e_j = -e_j e_i$ de modo que $\alpha_i^2 e_i e_i = \alpha_i^2$ e $\alpha_i \alpha_j e_i e_j + \alpha_j \alpha_i e_j e_i = 0$, então

$$vv = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = \|v\|^2. \tag{4.19}$$

□

A partir desse momento, vamos introduzir objetos notáveis nas Álgebras Geométricas. Os objetos a serem definidos apresentam propriedades particulares e interpretações geométricas que se mostram úteis na manipulação das álgebras geométrica e suas aplicações.

Definição 4.12. [Blade]. *Uma blade é o produto de vetores ortogonais não-nulos.*

Definição 4.13. [k-blade]. *Tomemos $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ um conjunto de k vetores ortogonais não-nulos, então*

$$\mathbf{B}_k = b_1 b_2 \dots b_k \tag{4.20}$$

é uma k -blade. Escalares não-nulos são 0-blades.

As blades são objetos cuja interpretação geométrica merece destaque; o que faremos no Capítulo 5.

Multivetores podem apresentar um inverso multiplicativo à esquerda satisfazendo $A^{-1L}A = 1$ e um inverso multiplicativo à direita satisfazendo $AA^{-1R} = 1$. Podemos usar tais inversos para dividir multivetores. Infelizmente, calcular inversos de um multivetor não é trivial. Entretanto, existe um importante conjunto de multivetores para os quais o cálculo do inverso é intuitivo: os *versores*¹.

Definição 4.14. [Versor]. *Um multivetor A é dito versor se pode ser escrito da forma*

$$A = v_1 v_2 \dots v_k, \tag{4.21}$$

em que v_i são 1-vetores.

Como consequência da definição anterior, temos a seguinte conclusão:

Proposição 4.15. *Toda k -blade não nula é um versor.*

Um elemento que nos auxiliará na obtenção da norma de um multivetor e do inverso é o *reverso*.

¹Notemos aqui que esse objeto *versor* que estamos a definir é distinto do objeto homônimo definido em Álgebra Linear.

Definição 4.16. *O operador de reversão é definido de forma que*

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (4.22)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \quad (4.23)$$

$$\langle A^\dagger \rangle_0 = \langle A \rangle_0, \quad (4.24)$$

$$a^\dagger = a \text{ se } a = \langle a \rangle_1. \quad (4.25)$$

Proposição 4.17. *Seja $A = v_1 v_2 \cdots v_k$ um versor, então*

$$A^\dagger = v_k v_{k-1} \cdots v_3 v_2 v_1 \quad (4.26)$$

Demonstração. Decorre diretamente de 4.22 e 4.25 □

Notemos que, para blades, tomar o reverso é apenas uma questão de possível troca de sinal. Isso fica claro ao notarmos que uma blade é o produto de 1-vetores ortogonais e que o rearranjo de vetores ortogonais é apenas uma questão de troca de sinal.

Proposição 4.18. *Seja \mathbf{A}_k uma k -blade, então*

$$\mathbf{A}_k^\dagger = (-1)^{k(k-1)/2} \mathbf{A}_k. \quad (4.27)$$

Para todo multivetor A temos um único escalar $\|A\|$ dito *magnitude* ou *norma* de A , definido por

Definição 4.19. [*Norma de um multivetor*]. *Seja A um multivetor. Então*

$$\|A\| = \sqrt{\langle A^\dagger A \rangle_0}. \quad (4.28)$$

é dito norma de A .

Proposição 4.20. *A norma de um vetor é a conhecida norma usual $\|v\|^2 = v \cdot v$.*

Demonstração. De fato,

$$\|v\| \stackrel{4.28}{=} \sqrt{\langle v^\dagger v \rangle_0} \stackrel{4.25}{=} \sqrt{\langle vv \rangle_0} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} = \sqrt{v \cdot v}.$$

□

Proposição 4.21. *Se $\mathbf{A}_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ é uma k -blade, então*

$$\|\mathbf{A}_k\| = \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_k\|. \quad (4.29)$$

Demonstração. Por definição, $\|\mathbf{A}_k\| = \sqrt{\langle \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{A}_k \rangle_0}$. Calculemos $\mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{A}_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{A}_k &= (a_k \cdots a_2 a_1)(a_1 a_2 \cdots a_k) = \\ &= a_k \cdots a_2 a_1 a_1 a_2 \cdots a_k = \\ &= a_k \cdots a_2 \|a_1\|^2 a_2 \cdots a_k = \\ &= \|a_1\|^2 a_k \cdots a_2 a_2 \cdots a_k = \\ &\quad \vdots \\ &= \|a_1\|^2 \cdots \|a_k\|^2. \end{aligned}$$

Logo $\langle \mathbf{A}_k^\dagger \mathbf{A}_k \rangle_0 = \|a_1\|^2 \cdots \|a_k\|^2$ e, portanto, $\|A_k\| = \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_k\|$. \square

Agora, estamos em condições de fazermos algumas divisões para multivetores.

Proposição 4.22. *Seja A um versor, então*

$$A^{-1} = \frac{A^\dagger}{A^\dagger A} \quad (4.30)$$

é seu inverso multiplicativo.

Demonstração. Notemos que $A^\dagger A$ é sempre um escalar. De fato,

$$A^\dagger A = (v_1 v_2 \cdots v_k)(v_k v_{k-1} \cdots v_1) = \quad (4.31)$$

$$= v_1 v_2 \cdots v_k v_k v_{k-1} \cdots v_1 \stackrel{4.19}{=} \quad (4.32)$$

$$\stackrel{4.19}{=} v_1 v_2 \cdots \|v_k\|^2 v_{k-1} \cdots v_1 = \quad (4.33)$$

$$= \|v_k\|^2 v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_{k-1} \cdots v_2 v_1 = \quad (4.34)$$

$$\quad \vdots \quad (4.35)$$

$$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cdots \|v_k\|^2 \quad (4.36)$$

Também, um escalar dividido por si mesmo é 1, logo

$$A^{-1} A = \frac{A^\dagger}{A^\dagger A} A = \frac{A^\dagger A}{A^\dagger A} = 1. \quad (4.37)$$

\square

Notemos que para o caso de 1-vetores, temos

$$a^{-1} = \frac{a^\dagger}{a^\dagger a} \stackrel{4.25}{=} \frac{a}{aa} = \frac{a}{a^2} \stackrel{4.19}{=} \frac{a}{\|a\|}. \quad (4.38)$$

Uma base canônica para \mathcal{C}_n deixa claro que n -vetores formam um subespaço 1-dimensional, logo todo n -vetor é um múltiplo escalar de $I_n = e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$, I_n é dito *pseudoescalar unitário* em \mathcal{C}_n .

Proposição 4.23. *Seja $I = e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$ o pseudoescalar unitário em $\mathcal{C}\ell_n$, então $I^{-1} = e_n \cdots e_3 e_2 e_1$ e, portanto,*

$$I^{-1} = (-1)^{(n-1)n/2} I. \quad (4.39)$$

I.e. $I^{-1} = \pm I$ a depender de n .

Definição 4.24. [Dual]. *O dual de um multivetor A é*

$$A^* = AI^{-1}. \quad (4.40)$$

Proposição 4.25. *Se A é uma j -blade em $\mathcal{C}\ell_n$, então A^* é uma $(n - j)$ -blade que representa o complemento ortogonal de A .*

Demonstração. Exceto por uma multiplicação de um escalar, tomemos $A = a_1 a_2 \cdots a_j$ o produto de j vetores ortonormais. Estendendo para uma base $\{a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n\}$ ortonormal de \mathbb{R}^n , temos

$$A^* = \pm AI = \pm(a_1 a_2 \cdots a_j)(a_1 a_2 \cdots a_n) = \pm a_{j+1} \cdots a_n, \quad (4.41)$$

o qual representa o complemento ortogonal de A . □

Proposição 4.26. *Todo $(n - 1)$ -vetor em $\mathcal{C}\ell_n$ é uma blade. Em particular, todo bivector em $\mathcal{C}\ell_3$ é uma blade.*

Demonstração. Direta ao observar que o dual de um $(n - 1)$ -vetor é um vetor, que todo vetor é uma blade e, pelo resultado anterior, o dual de uma blade é uma blade. □

À primeira vista, o dual do dual de uma blade deveria ser a própria blade, no entanto a equação 4.42 nos elucida que isso não ocorre para o caso geral.

$$\begin{aligned} (A^*)^* &= (AI^{-1})I^{-1} = \\ &= AI^{-1}I^{-1} = \\ &\stackrel{4.39}{=} A(-1)^{(n-1)n/2} II^{-1} = \\ &= A(-1)^{(n-1)n/2}(1) = \\ &= (-1)^{(n-1)n/2} A. \end{aligned} \quad (4.42)$$

A equação anterior, nos mostra que aplicar duas dualizações sucessivas pode alterar a orientação da blade resultante conforme o valor de n . A fim de obtermos a blade inicial, podemos definir um outro operador *desdualização*.

Definição 4.27. *A desdualização de A é tal que*

$$A^{-*} = AI. \quad (4.43)$$

4.1 OS PRODUTOS INTERNO E EXTERIOR DE VETORES

Para quaisquer dois vetores u e v em \mathbb{R}^n , temos um plano que contém esses vetores. Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal para o plano que contém u e v , assim podemos escrever $u = ae_1 + be_2$ e $v = ce_1 + de_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
 uv &= (ae_1 + be_2)(ce_1 + de_2) = \\
 &= ae_1ce_1 + ae_1de_2 + be_2ce_1 + be_2de_2 = \\
 &= ace_1e_1 + ade_1e_2 + bce_2e_1 + bde_2e_2 = \\
 &= ac + bd + ade_1e_2 - bce_1e_2 = \\
 &= (ac + bd) + (ad - bc)e_1e_2 = \\
 &= (ac + bd) + (ad - bc)e_{12}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

O primeiro termo $(ac + bd)$ é justamente o produto interno usual de u e v . Já o segundo membro $(ad - bc)e_{12}$ é o produto exterior de u e v , denotado por $u \wedge v$. Durante a seção 5.1, discorreremos sobre a interpretação geométrica desse elemento como uma porção de área orientada. Tal produto advém da Álgebra Exterior de Grassmann e sua formalização dissociada da Álgebra Geométrica foge ao escopo da presente dissertação, o leitor interessado pode encontrar a formalização em Lima (2005), Vaz Junior e Rocha (2016) e Mundim e Mundim (1997).

Os produtos interno e exterior são intrínsecos aos vetores u e v , de modo que podemos reescrever 4.44 da forma

$$uv = u \cdot v + u \wedge v. \tag{4.45}$$

Façamos, agora, vu

$$\begin{aligned}
 vu &= (ce_1 + de_2)(ae_1 + be_2) = \\
 &= ce_1ae_1 + ce_1be_2 + de_2ae_1 + de_2be_2 = \\
 &= ace_1e_1 + bce_1e_2 + ade_2e_1 + bde_2e_2 = \\
 &= ac + bd + bce_1e_2 - ade_1e_2 = \\
 &= (ac + bd) + (bc - ad)e_1e_2 = \\
 &= (ac + bd) + \underbrace{(bc - ad)e_{12}}_{-(ad-bc)e_{12} = -u \wedge v}.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

O produto vu exhibe uma importante propriedade do produto exterior: a *anticomutatividade*²

²A anticomutatividade para vetores é uma propriedade intrínseca do produto exterior. A demonstração dessa propriedade é apresentada mais adiante. Também, veremos no Capítulo 5, um sentido geométrico para tal propriedade.

A propriedade comutativa $u \cdot v = v \cdot u$ juntamente com a anticomutatividade $u \wedge v = -v \wedge u$ implicam em uma relação entre uv e vu . De modo que escrevemos

$$vu = u \cdot v - u \wedge v \quad (4.47)$$

Somando as equações 4.45 e 4.47, obtemos

$$\begin{aligned} uv + vu &= u \cdot v + u \wedge v + u \cdot v - u \wedge v = \\ &= u \cdot v + u \cdot v + u \wedge v - u \wedge v = \\ &= 2(u \cdot v) \\ u \cdot v &= \frac{1}{2}(uv + vu) \end{aligned} \quad (4.48)$$

chamada parte simétrica.

Subtraindo as equações 4.45 e 4.47, obtemos

$$\begin{aligned} uv - vu &= (u \cdot v + u \wedge v) - (u \cdot v - u \wedge v) = \\ &= u \cdot v + u \wedge v - u \cdot v + u \wedge v = \\ &= u \cdot v - u \cdot v + u \wedge v + u \wedge v = \\ &= 2(u \wedge v) \\ u \wedge v &= \frac{1}{2}(uv - vu) \end{aligned} \quad (4.49)$$

chamada parte antissimétrica.

Aqui temos uma notável correlação entre a álgebra e a geometria: por meio da observação do comportamento do produto de dois vetores, podemos extrair a relação geométrica entre eles; i.e. dois vetores u e v são paralelos quando comutam, ou seja, $uv = vu$ o que implica em $u \wedge v = 0$; e são ortogonais quando anticomutam, ou seja, $uv = -vu$ o que implica em $u \cdot v = 0$. Em resumo (LOUNESTO, 2001, p. 11):

$$\begin{aligned} uv = vu &\iff u \parallel v &\iff u \wedge v = 0 &\iff uv = u \cdot v \\ uv = -vu &\iff u \perp v &\iff u \cdot v = 0 &\iff uv = u \wedge v \end{aligned}$$

4.2 OS PRODUTOS INTERNO E EXTERIOR ESTENDIDOS

Definição 4.28. *Definimos o produto interno de dois multivetores homogêneos em $\mathcal{C}l_n$ por*

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} \quad (4.50)$$

$$A_r \cdot B_s = 0, \text{ se } r = 0 \text{ ou } s = 0. \quad (4.51)$$

Por linearidade, o produto de dois multivetores quaisquer é

$$A \cdot B = \sum_r \langle A \rangle_r \cdot B = \sum_s A \cdot \langle B \rangle_s = \sum_r \sum_s \langle A \rangle_r \cdot \langle B \rangle_s. \quad (4.52)$$

Definição 4.29. *Definimos o produto exterior de dois multivetores homogêneos em $\mathcal{C}l_n$ como*

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \quad (4.53)$$

De modo que o produto exterior de um r -vetor por um 0 -vetor λ é dado por

$$A_r \wedge \lambda = \langle A_r \lambda_0 \rangle_{r+0} = A_r \lambda = \lambda A_r = \langle \lambda_0 A_r \rangle_{0+r} = \lambda \wedge A_r. \quad (4.54)$$

O produto exterior de dois multivetores quaisquer é

$$A \wedge B = \sum_r \langle A \rangle_r \wedge B = \sum_s A \wedge \langle B \rangle_s = \sum_r \sum_s \langle A \rangle_r \wedge \langle B \rangle_s. \quad (4.55)$$

Observemos que $r + s > n$ então $A_r \wedge B_s = 0$. Também, se $0 < r \leq s$, então o produto interno $A_r \cdot B_s$ é um $(s - r)$ -vetor, logo o produto interno é uma operação que diminui o grau de B_s em r unidades. Já o produto exterior eleva o grau em r unidades.

Propriedades 4.30. [Propriedades do Produto Exterior]. *Sejam α um escalar, a e b vetores, e A e B multivetores, então são válidas as propriedades:*

$$\text{associatividade: } A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C;$$

$$\text{distributividade à esquerda: } A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C;$$

$$\text{distributividade à direita: } (B + C) \wedge A = B \wedge A + C \wedge A;$$

$$\text{antissimetria para vetores: } a \wedge b = -b \wedge a;$$

$$\text{produto por escalares: } \alpha \wedge A = A \wedge \alpha = \alpha A.$$

Demonstração.

associatividade: Para a associatividade, notemos, primeiramente, a validade para multivetores homogêneos. Sejam A_r , B_s e C_t multivetores homogêneos. (CHISOLM, 2012, p.23) Então

$$\begin{aligned} A_r \wedge (B_s \wedge C_t) &\stackrel{4.29}{=} A_r \wedge \langle B_s C_t \rangle_{s+t} = \\ &\stackrel{4.29}{=} \langle A_r \langle B_s C_t \rangle_{s+t} \rangle_{r+s+t} = \\ &= \langle A_r B_s C_t \rangle_{r+s+t} = \\ &= \langle \langle A_r B_s \rangle_{r+s} C_t \rangle_{r+s+t} = \\ &= (A_r \wedge B_s) \wedge C_t. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Notemos que o cerne da demonstração mora no terceiro passo, no qual $\langle \rangle_{r+s}$ não figura mais. Isso pôde ser feito porque o único termo em $A_r B_s C_t$ que tem grau $r + s + t$ é o termo que resulta da multiplicação de A_r com o termo de maior grau em $B_s C_t$. Pela Equação 4.55, podemos estender o resultado para multivetores A , B e C quaisquer.

antissimetria para vetores: Sejam $a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ e $b = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ vetores em $\mathcal{C}l_n$. Então

$$\begin{aligned}
a \wedge b &\stackrel{4.29}{=} \langle ab \rangle_2 = \\
&= \alpha_1 \beta_2 e_1 e_2 + \alpha_1 \beta_3 e_1 e_3 + \cdots + \alpha_1 \beta_{n-1} e_1 e_{n-1} + \alpha_1 \beta_n e_1 e_n + \\
&\quad + \alpha_2 \beta_1 e_2 e_1 + \alpha_2 \beta_3 e_2 e_3 + \cdots + \alpha_2 \beta_{n-1} e_2 e_{n-1} + \alpha_2 \beta_n e_2 e_n + \\
&\quad + \alpha_3 \beta_1 e_3 e_1 + \alpha_3 \beta_2 e_3 e_2 + \alpha_3 \beta_4 e_3 e_4 + \cdots + \alpha_3 \beta_{n-1} e_3 e_{n-1} + \alpha_3 \beta_n e_3 e_n + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \alpha_{n-1} \beta_1 e_{n-1} e_1 + \alpha_{n-1} \beta_2 e_{n-1} e_2 + \alpha_{n-1} \beta_4 e_{n-1} e_4 + \cdots + \alpha_{n-1} \beta_n e_{n-1} e_n + \\
&\quad + \alpha_n \beta_1 e_n e_1 + \alpha_n \beta_2 e_n e_2 + \alpha_n \beta_4 e_n e_4 + \cdots + \alpha_n \beta_{n-1} e_n e_{n-1} = \\
&= \alpha_1 \beta_2 e_1 e_2 + \alpha_1 \beta_3 e_1 e_3 + \cdots + \alpha_1 \beta_{n-1} e_1 e_{n-1} + \alpha_1 \beta_n e_1 e_n + \\
&\quad - \alpha_2 \beta_1 e_1 e_2 + \alpha_2 \beta_3 e_2 e_3 + \cdots + \alpha_2 \beta_{n-1} e_2 e_{n-1} + \alpha_2 \beta_n e_2 e_n + \\
&\quad - \alpha_3 \beta_1 e_1 e_3 - \alpha_3 \beta_2 e_2 e_3 + \alpha_3 \beta_4 e_3 e_4 + \cdots + \alpha_3 \beta_{n-1} e_3 e_{n-1} + \alpha_3 \beta_n e_3 e_n + \\
&\quad \vdots \\
&\quad - \alpha_{n-1} \beta_1 e_1 e_{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1} \beta_{n-2} e_{n-1} e_{n-2} + \alpha_{n-1} \beta_n e_{n-1} e_n - \\
&\quad - \alpha_n \beta_1 e_1 e_n - \alpha_n \beta_2 e_2 e_n - \alpha_n \beta_4 e_4 e_n - \cdots - \alpha_n \beta_{n-1} e_{n-1} e_n = \\
&= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 e_2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_1 e_3 + \cdots + (\alpha_{n-1} \beta_n - \alpha_n \beta_{n-1}) e_{n-1} e_n = \\
&= -(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) e_1 e_2 - (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) e_1 e_3 - \cdots - (\alpha_n \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_n) e_{n-1} e_n = \\
&= -(\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1) e_1 e_2 - (\beta_1 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_1) e_1 e_3 - \cdots - (\beta_{n-1} \alpha_n - \beta_n \alpha_{n-1}) e_{n-1} e_n = \\
&= -\langle ba \rangle_2 = \\
&= -b \wedge a.
\end{aligned}$$

produto por escalares:

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge A &\stackrel{4.8}{=} \alpha \wedge \left(\sum_{r=0}^n \langle A \rangle_r \right) = \\
&= \alpha \wedge (\langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \cdots + \langle A \rangle_n) = \\
&= \alpha \wedge \langle A \rangle_0 + \alpha \wedge \langle A \rangle_1 + \cdots + \alpha \wedge \langle A \rangle_n = \\
&\stackrel{4.54}{=} \alpha \langle A \rangle_0 + \alpha \langle A \rangle_1 + \cdots + \alpha \langle A \rangle_n = \\
&= \alpha (\langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \cdots + \langle A \rangle_n) = \\
&= \alpha A = A \alpha = \\
&= (\langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \cdots + \langle A \rangle_n) \alpha = \\
&= \langle A \rangle_0 \alpha + \langle A \rangle_1 \alpha + \cdots + \langle A \rangle_n \alpha = \\
&\stackrel{4.54}{=} \langle A \rangle_0 \wedge \alpha + \langle A \rangle_1 \wedge \alpha + \cdots + \langle A \rangle_n \wedge \alpha = \\
&= (\langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \cdots + \langle A \rangle_n) \wedge \alpha = \\
&= A \wedge \alpha.
\end{aligned}$$

□

BLADES E SUA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Normalmente, não notamos uma importante consequência sobre a definição de subespaços: um vetor representa um subespaço 1-dimensional, i.e. um subespaço de dimensão 1. Em um primeiro momento, tal observação pode nos parecer sem sentido; mas podemos considerar subespaços de dimensões maiores como conceitos simples, tal como vetores. Suter (2003, p. 6) nos afirma que

Sem nenhuma razão aparente, temos negado a existência de subespaços 2-dimensionais, 3-dimensionais e subespaços de dimensões maiores como conceitos simples, similares ao vetor. A Álgebra Geométrica introduz esses e ainda define operadores para fazermos aritmética com eles. [...] [Usando a Álgebra Geométrica,] podemos somar e subtrair subespaços de dimensões distintas e, também, multiplicá-los e dividi-los, resultando em poderosas expressões que podem representar qualquer relação ou conceito geométrico. (SUTER, 2003, p. 6. Tradução livre.)

Nesse sentido, nesse capítulo, exploraremos um ente muito importante para a Álgebra Geométrica: as blades.

5.1 BIVETORES E TRIVETORES

A interpretação geométrica para o produto exterior é expansão um vetor pelo outro, i.e. dados dois vetores a e b linearmente independentes, o produto exterior $a \wedge b$ é ilustrado na Figura 20.

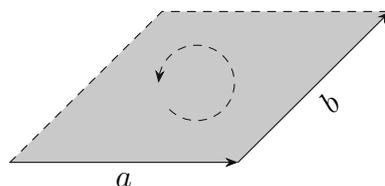


Figura 20: Bivetor $A = a \wedge b$.

Se a e b são linearmente dependentes, então b pode ser escrito $b = \lambda a$ e

$$a \wedge b = a \wedge (\lambda a) = \langle a \lambda a \rangle_2 = \langle \lambda a a \rangle_2 = \lambda \langle a a \rangle_2 = \lambda \langle a^2 \rangle_2. \quad (5.1)$$

mas, pela Proposição 4.11, a^2 é um escalar. Logo, $\langle a^2 \rangle_2 = 0$ e, assim,

$$a \wedge b = \lambda \langle a^2 \rangle_2 = 0. \quad (5.2)$$

Notemos que, por 4.29, esse elemento A é um bivetor. De fato, a e b são 1-vetores e, portanto, $A = a \wedge b = \langle ab \rangle_{1+1} = \langle ab \rangle_2$.

Determinemos $\|A\|$. Para tanto, tomemos o vetor $b' = b - \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a$, notemos que

$$a \wedge b' = a \wedge \left(b - \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a \right) = a \wedge b - a \wedge \left(\frac{a \cdot b}{a \cdot a} \right) a \stackrel{5.2}{=} a \wedge b - 0 = a \wedge b.$$

Ainda,

$$a \cdot b' = a \cdot b - \frac{a \cdot b}{a \cdot a}a \cdot a = a \cdot b - a \cdot b = 0,$$

de modo que

$$a \wedge b = a \wedge b' = ab'$$

e assim,

$$\|A\| = \|a \wedge b\| = \|a \wedge b'\| = \|ab'\| \stackrel{4.21}{=} \|a\| \|b'\|.$$

Isso nos dá que a norma de A é justamente a área do paralelogramo definido pelos vetores a e b .

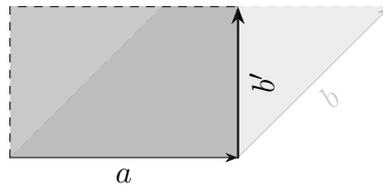


Figura 21: Interpretação geométrica do cálculo de $\|a \wedge b\|$.

Em suma: $a \wedge b$ é uma porção de plano orientado de módulo igual a área do paralelogramo definido pelos vetores a e b e com orientação definida pela ordem desses.

Durante nosso capítulo 2, em especial na seção 2.1, dissemos que a perda de comutatividade teria um sentido geométrico que poderia ser percebido ao considerarmos o produto exterior. De fato, notemos que o produto exterior de dois vetores nos dá um bivetor cuja orientação é definida pela ordem em que os vetores foram tomados para o produto, assim, temos que $b \wedge a = -a \wedge b$; como mostra a Figura 22.

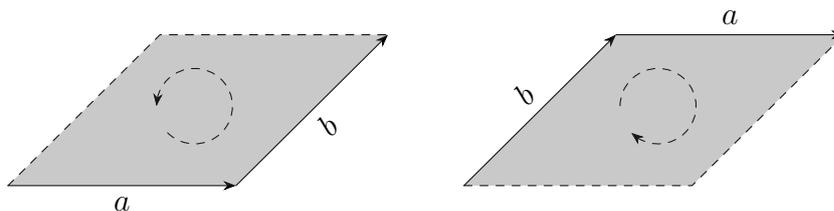


Figura 22: $b \wedge a = -a \wedge b$.

Ainda, notemos que um bivector não tem forma, apenas um módulo (área igual a área do paralelogramo definido pelos vetores) e orientação (sentido da rotação determinado pela ordem dos vetores). A figura a seguir mostra diferentes representações de um mesmo bivector.

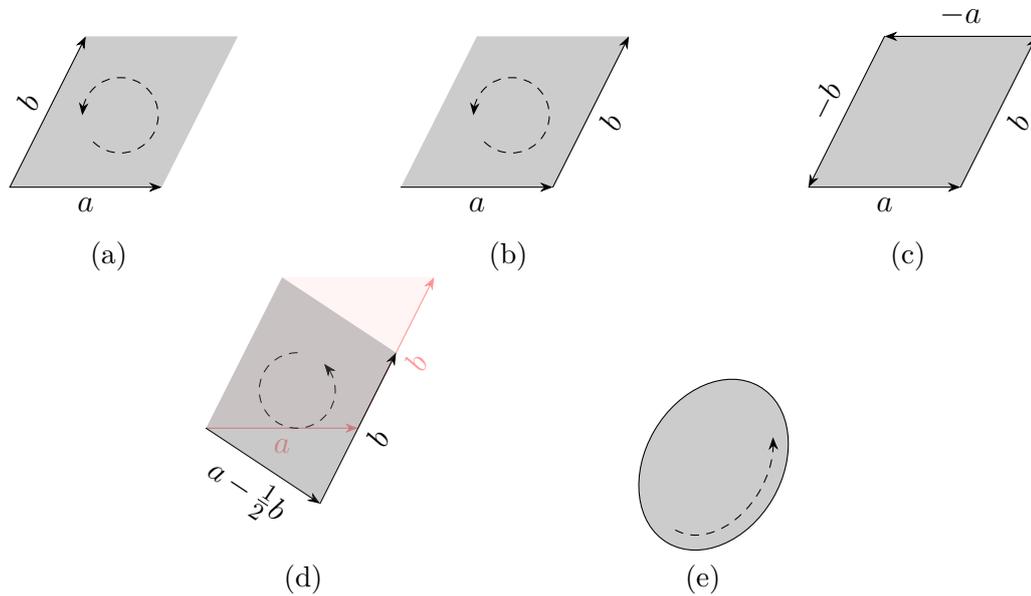


Figura 23: Representações distintas de um mesmo bivector $a \wedge b$.

Observemos que a representação apresentada em Figura 23e faz sentido uma vez que, ao computarmos $a \wedge b$, não temos mais informações sobre a e b ; temos apenas um valor de área e sua orientação. Também, atentemo-nos para uma possível confusão sobre a Figura 23a, tal representação pode nos levar a conclusão equivocada de que o produto exterior é comutativo por não deixar evidente a ordem em que os vetores foram tomados.

Para a obtenção desse bivector, usamos o produto exterior expandindo um subespaço 1-dimensional por outro, afim de obter um subespaço 2-dimensional. Mas o que ocorre ao expandirmos um subespaço 2-dimensional por um outro 1-dimensional?

Novamente, pela Definição 4.29, tomemos o bivector $A_2 = a \wedge b$ e o vetor c linearmente independente a a e b , temos

$$A_2 \wedge c = \langle A_2 c \rangle_{2+1} = \langle A_2 c \rangle_3,$$

um trivector.

Na Figura 24 temos uma porção do espaço tridimensional representado pelo trivector $a \wedge b \wedge c$ obtido expandindo-se o bivector $a \wedge b$ pelo vetor c . Por um processo análogo ao que fizemos para o produto exterior de dois vetores, temos que o módulo de $a \wedge b \wedge c$ é igual ao volume desse paralelepípedo definido por a , b e c . A orientação de $a \wedge b \wedge c$ será dada pela ordem em que os vetores foram tomados, notemos que a orientação obedecerá a regra da mão direita ou da mão esquerda e pode ser representada por uma espiral orientada.

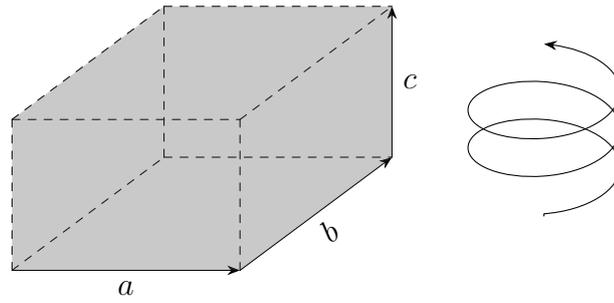


Figura 24: Trivector $a \wedge b \wedge c$.

Tal como ocorre com os bivectores, também os trivetores não têm forma específica, ainda que o paralelepípedo nos auxilie a compreender sua natureza intuitivamente, esses poderiam ter qualquer outra forma. (SUTER, 2003)

Até o momento, vimos que vetores, bivectores e trivetores representam, respectivamente, subespaços 1-dimensionais, 2-dimensionais e 3-dimensionais. Podemos generalizar essa compreensão para subespaços de dimensão arbitrária. (SUTER, 2003; FERNANDES; LAVOR; NETO, 2017)

Usando o produto externo, podemos expandir subespaços orientados k -dimensionais, para $0 \leq k \leq n$, a partir de k vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n .

Teorema 5.1. *Toda r -blade é o produto exterior de r -vetores linearmente independentes e todo produto exterior de r vetores linearmente independentes é uma r -blade.*

Demonstração. (\Rightarrow) Observemos que A_k uma k -blade, então A_k é o produto de k vetores ortogonais, mas, como o produto interno de vetores ortogonais é 0 o produto geométrico se resume ao produto exterior.

(\Leftarrow) Seja $B_k = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$, então é possível obter um conjunto $\{v_1, v'_2, \dots, v'_k\}$ de vetores ortogonais de modo que $v_1 \wedge v'_2 \wedge \cdots \wedge v'_k = v_1 v'_2 \cdots v'_k$. \square

5.1.1 A soma de bivectores em $\mathcal{C}\ell_3$

Podemos interpretar geometricamente a soma de blades em $\mathcal{C}\ell_3$, tal como fazemos com a soma de vetores.

Primeiramente, consideremos dois 2-vetores $a \wedge b$ e $c \wedge d$ em um mesmo plano. Para fazermos a soma de $a \wedge b$ e $c \wedge d$, primeiramente fazemos $c \wedge d$ da forma $(\gamma c) \wedge -b$; colocamos eles lado a lado de modo que o lado $-b$ de $a \wedge b$ coincida com o lado b de $(\gamma c) \wedge -b$; fazemos agora $(\gamma c) \wedge -b$ da forma $(\delta a) \wedge b$; por fim, a soma é $(1 + \delta)a \wedge b$. Obviamente, poderíamos trocar a ordem dos argumentos e não, necessariamente, ficar reescrevendo $c \wedge d$; a soma de 2-vetores em um mesmo plano é, apenas, uma questão de colocar áreas orientadas juntas e isso pode ser interpretado algebricamente por somar os coeficientes desses 2-vetores relativos ao 2-vetor básico.

Agora, consideremos dois 2-vetores quaisquer em $\mathcal{C}\ell_3$. A interpretação da adição de 2-vetores é mais fácil de ser compreendida quando esses bivectores são expressos em termos

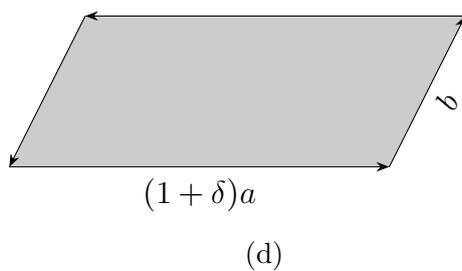
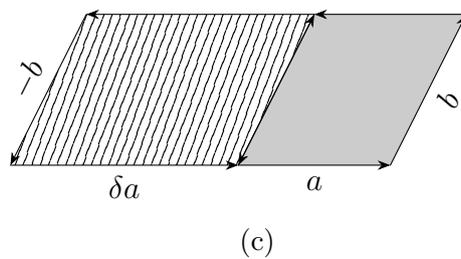
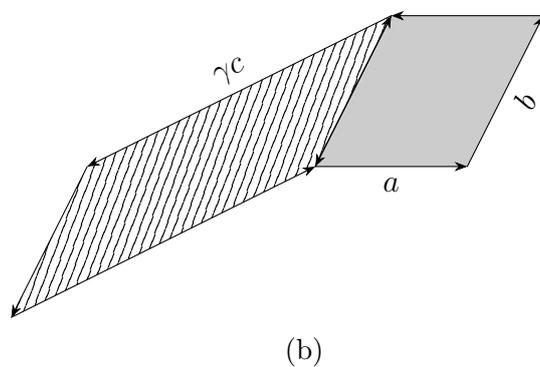
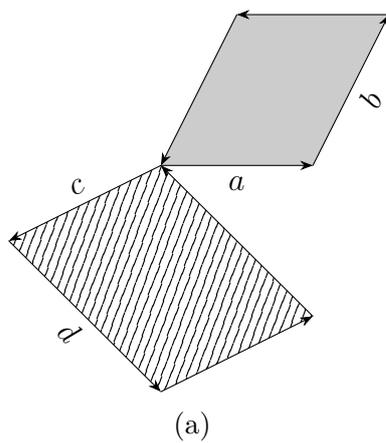


Figura 25: Interpretação geométrica da soma de 2-vetores coplanares em $\mathcal{Cl}_{3,0}$.

do produto exterior com um fator em comum. Escrever bivectores dessa maneira é sempre possível em \mathcal{Cl}_3 pois em três dimensões dois planos ou são paralelos (e a soma pode ser feita como na Figura 25) ou têm uma reta em comum (e, por conseguinte, um vetor). Tomemos dois 2-vetores e c o vetor em comum entre eles, podemos reescrever os 2-vetores tomados de modo a terem c como um dos fatores, de modo que a adição dos 2-vetores se reduz à adição de vetores (Figura: 26).

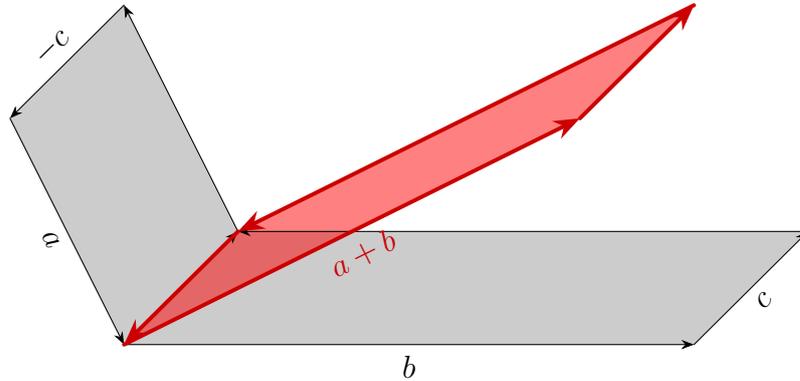


Figura 26: Interpretação geométrica da soma de 2-vetores não coplanares em \mathcal{Cl}_3 .

Notemos que, em dimensões mais altas, essa interpretação geométrica pode falhar. Isso decorre do fato de que, em geral, podemos não encontrar uma dimensão em comum para dois planos. Algebricamente, isso corresponde ao fato de que nem toda soma de bivectores é, de fato, uma blade em \mathcal{Cl}_n , i.e., nem toda soma de bivectores pode ser fatorada como o produto exterior de dois vetores. Observemos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.2. Consideremos \mathcal{Cl}_4 e a base canônica. A soma dos elementos $e_1 \wedge e_2$ e $e_3 \wedge e_4$ não pode ser escrita como uma 2-blade $C_2 = a \wedge b$.

ALGUMAS APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentaremos pequenos exemplos de aplicações da Álgebra Geométrica tangíveis aos conhecimentos do Ensino Médio.

Para as aplicações aqui apresentadas, é suficiente conhecer a Álgebra Geométrica \mathcal{Cl}_2 . Assim, fazemos uma sumarização de conceitos já definidos anteriormente, porém com respeito a \mathcal{Cl}_2 :

- A Álgebra Geométrica \mathcal{Cl}_2 é um espaço vetorial de dimensão 4 (Definição 4.1);
- o conjunto $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$ forma a base canônica de \mathcal{Cl}_2 .
- Um elemento de \mathcal{Cl}_2 é dito um *multivetor* e é da forma

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_{12}.$$

- O produto geométrico é associativo e distributivo, mas não necessariamente comutativo.
- O produto $e_i e_j = 1$ se $i = j$. O produto $e_i e_j = -e_j e_i$ se $i \neq j$. Logo a tabela de multiplicação dos elementos da base é

	1	e_1	e_2	e_{12}
1	1	e_1	e_2	e_{12}
e_1	e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

Tabela 2: Tábua de multiplicação do produto geométrico em \mathcal{Cl}_2 .

Tomando dois vetores $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ e $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$. Calculemos o produto ab :

$$\begin{aligned}
 ab &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = \\
 &= \alpha_1 e_1 \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_1 \beta_2 e_2 + \alpha_2 e_2 \beta_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \beta_2 e_2 = \\
 &= \alpha_1 \beta_1 e_1 e_1 + \alpha_1 \beta_2 e_1 e_2 + \alpha_2 \beta_1 e_2 e_1 + \alpha_2 \beta_2 e_2 e_2 = \\
 &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 e_1 e_2 - \alpha_2 \beta_1 e_1 e_2 = \\
 &= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_{12}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

O primeiro termo $(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)$ é justamente o produto interno usual de a e b : $a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta$. Já o segundo membro $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_{12}$ é, de acordo

com Definição 4.29, o produto exterior de u e v e, como visto na seção 5.1, $a \wedge b = \|a\| \|b\| \sin \theta e_{12}$. De modo que o produto de dois vetores a e b pode ser escrito da forma

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

- Como mostrado na seção 5.1, o produto exterior $a \wedge b$ é interpretado como uma porção do plano orientada de módulo igual à área do paralelogramo definido pelos vetores a e b e sua orientação é definida pela ordem em que os vetores foram tomados no produto.

6.1 NÚMEROS COMPLEXOS

De acordo com a Tábua de multiplicação (Tabela 2), temos e_{12} um elemento cujo quadrado é um número negativo. De fato,

$$e_{12}^2 = e_{12}e_{12} = e_1e_2e_1e_2 = e_1e_2(-e_2e_1) = -e_1e_2e_2e_1 = -e_1e_1 = -1. \quad (6.2)$$

Podemos denotar $e_{12} = \mathbf{i}$ e obtermos $\mathbf{i}^2 = -1$. O que torna a igualdade ainda mais familiar àquela que define a unidade imaginária.

Assim, podemos interpretar o multivetor $A = a + b\mathbf{i}$ de grau misto como um número complexo $a + bi$. A soma geométrica bem como o produto geométrico correspondem exatamente a soma e multiplicação complexa; de modo que \mathbf{C} é uma subálgebra comutativa de \mathcal{Cl}_2 gerada por $\{1, e_{12}\}$ e, portanto, com dimensão 2.

Notemos que para tal abordagem, não há necessidade do uso de eixos reais e imaginários.

Ainda, façamos θ o ângulo entre os vetores u e v , logo

$$uv = u \cdot v + u \wedge v = \|u\| \|v\| \cos \theta + \mathbf{i} \|u\| \|v\| \sin \theta = \|u\| \|v\| (\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta),$$

fazendo $\rho = \|u\| \|v\|$ temos

$$uv = \rho(\cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta) \quad (6.3)$$

a conhecida forma trigonométrica de um número complexo.

6.2 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Tomando a e b vetores unitários e α o ângulo entre eles, podemos escrever

$$uv = \cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha \text{ com } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Proposição 6.1. *Sejam α e β ângulos tais que $0 \leq \alpha + \beta < 2\pi$. Então são válidas:*

$$i) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$ii) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha;$$

$$iii) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Demonstração. Sejam a e b vetores unitários tais que α é o ângulo orientado entre a e b , então o ângulo orientado entre b e a é $-\alpha$ e, assim,

$$ba = \cos(-\alpha) + \mathbf{i} \sin(-\alpha) = \cos \alpha - \mathbf{i} \sin \alpha.$$

Logo,

$$1 = \|a\|^2 \|b\|^2.$$

Pela Proposição 4.11, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \|a\|^2 \|b\|^2 \stackrel{4.19}{=} aabb = \\ &= abba = \\ &= (\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)(\cos \alpha - \mathbf{i} \sin \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - \mathbf{i}^2 \sin^2 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Agora, tomemos c um vetor unitário tal que α é o ângulo orientado de a a b e β é o ângulo orientado de b a c . Então $\gamma = \alpha + \beta$ é o ângulo orientado de a a c e assim

$$\begin{aligned} \cos \gamma + \mathbf{i} \sin \gamma &= ac = \\ &= a1c = \\ &\stackrel{4.19}{=} ab^2c = \\ &= abbc = \\ &= (\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)(\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{i} \cos \alpha \sin \beta + \mathbf{i} \sin \alpha \cos \beta + \mathbf{i}^2 \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{i} \cos \alpha \sin \beta + \mathbf{i} \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \mathbf{i}(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta), \end{aligned}$$

logo

$$\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

e

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.$$

□

6.3 LEI DOS SENOS E COSSENOS

Consideremos um triângulo com lados de tamanhos a , b e c e ângulos internos α , β e γ . Façamos a representação de tal triângulo usando vetores em $\mathcal{C}\ell_2$, para tanto tomemos os vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} tais que $\|\mathbf{a}\| = a$, $\|\mathbf{b}\| = b$ e $\|\mathbf{c}\| = c$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

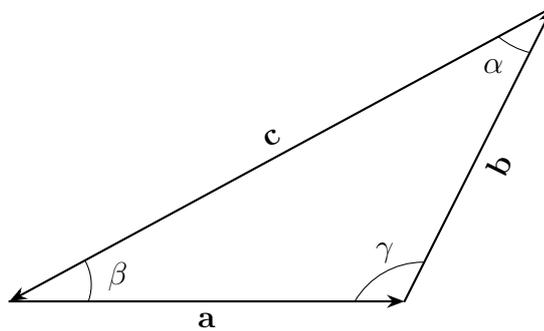


Figura 27: Triângulo

Podemos escrever

$$-\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

elevando ao quadrado temos

$$\begin{aligned} (-\mathbf{c})^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \\ \mathbf{c}^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \\ \mathbf{c}^2 &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.11,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} \\ c^2 &= a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - \gamma) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

e esta é a conhecida lei dos cossenos.

Agora, tomemos a equação $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ e façamos o produto exterior por \mathbf{a} , então

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \wedge 0 \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} &= 0 \\ 0 + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} &= 0 \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} &= 0 \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Novamente, tomemos a equação $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ e façamos agora o produto exterior por \mathbf{b} , então

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \wedge 0 \\ \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= 0 \\ \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + 0 + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= 0 \\ \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= 0 \\ \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \\ ab \sin(\pi - \gamma) I_2 &= bc \sin(\pi - \alpha) I_2 = ca \sin(\pi - \beta) I_2 \\ ab \sin \gamma &= bc \sin \alpha = ca \sin \beta \\ \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},\end{aligned}$$

a conhecida lei dos senos.

6.4 GEOMETRIA ANALÍTICA

Na linguagem da Álgebra Geométrica, cada ponto geométrico é representado por um vetor. Podemos ainda considerar o ponto e o vetor que o representa como os mesmos. Também, o ponto que será representado pelo vetor 0 (a origem) é, apenas, uma questão de escolha e problemas podem, muitas vezes, ser simplificados pela escolha sagaz desse.

Sabemos que o produto exterior de dois vetores paralelos é zero. Podemos usar esse fato para escrevermos uma reta pela origem. Dado um vetor u de direção, então todo ponto x na reta satisfaz

$$x \wedge u = 0$$

Para retas por um ponto a qualquer, podemos escrever

$$(x - a) \wedge u = 0$$

de modo que podemos escrever

$$(x \wedge u) - (a \wedge u) = 0$$

$$(x \wedge u) = (a \wedge u)$$

$$(x \wedge u) = U,$$

em que u é o vetor de direção e U é o bivetor $a \wedge u$. O bivetor U define indiretamente a distância da reta à origem.

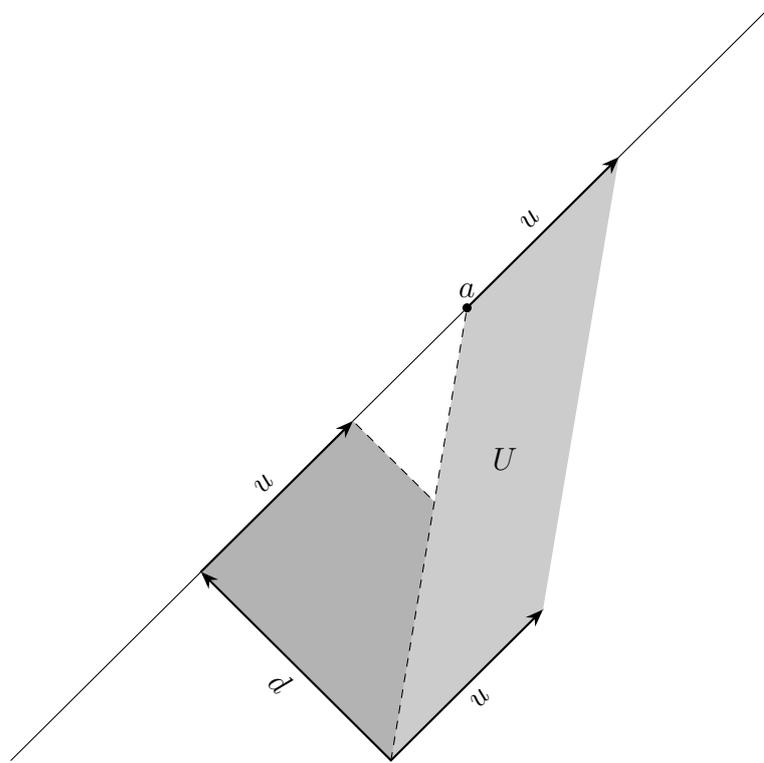


Figura 28: Reta no plano.

Podemos obter a distância entre a reta e a origem percebendo que tal distância é a distância da origem ao ponto d na reta cujo vetor que o representa é ortogonal à reta e, conseqüentemente, ao vetor u . Tal interpretação pode ser transcrita como $u \cdot d = 0$ e $d \wedge u = U$. Logo

$$ud = u \cdot d + u \wedge d$$

$$ud = 0 + U$$

$$ud = U$$

$$d = Uu^{-1}$$

e a distância da reta à origem é $\|d\|$.

Ainda, se u é um vetor unitário, então podemos escrever $d = Uu$ uma vez que o inverso de um vetor unitário é ele mesmo e assim $\|U\| = \|d\|$.

Dada reta \mathcal{R} passando por a com vetor direção u e a reta \mathcal{S} passando por b com vetor direção v , temos que \mathcal{R} e \mathcal{S} são concorrentes se, e somente se, $u \wedge v \neq 0$.

6.4.1 Áreas

No estudo de geometria analítica, a área de triângulos é trabalhada a partir de uma fórmula envolvendo o módulo de um determinante que é apresentado aos discentes muitas vezes sem ao menos justificar o seu uso. Apresentamos, a seguir, a abordagem usual e sua justificativa.

Proposição 6.2. *Sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ pontos não colineares. Então a área A do triângulo ABC é*

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Consideremos ΔABC como na figura a seguir.

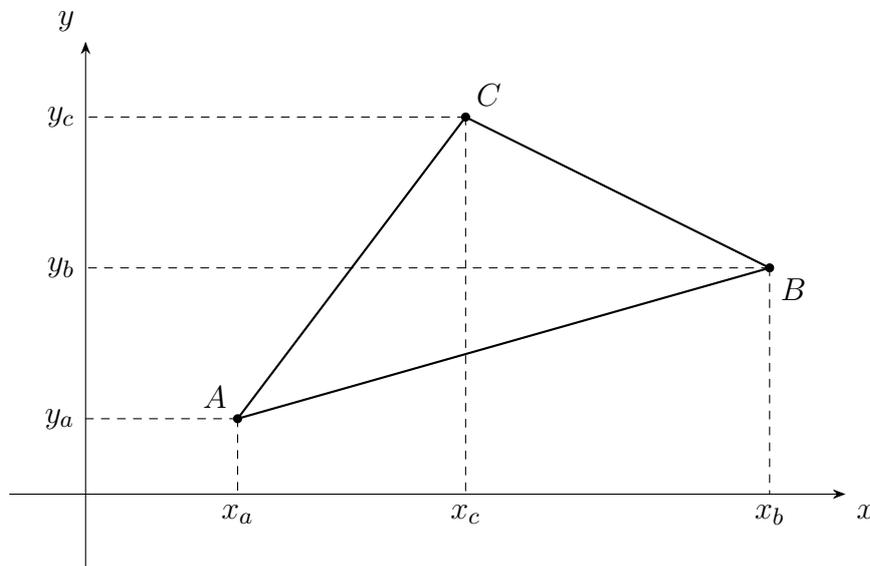


Figura 29: Área de um triângulo a partir de trapézios.

A área A é tal que $A = |A_1 + A_2 - A_3|$, sendo

- A_1 a área do trapézio formado pelos pontos $(x_a, 0)$, $(x_c, 0)$, C e A ;
- A_2 a área do trapézio formado pelos pontos $(x_c, 0)$, $(x_b, 0)$, B e C ;
- A_3 a área do trapézio formado pelos pontos $(x_a, 0)$, $(x_b, 0)$, B e A .

Assim,

$$\begin{aligned}
 A &= \left\| \left(\frac{(y_c + y_a)(x_c - x_a)}{2} \right) + \left(\frac{(y_c + y_b)(x_b - x_c)}{2} \right) - \left(\frac{(y_b + y_a)(x_b - x_a)}{2} \right) \right\| = \\
 &= \left\| \frac{1}{2} \left((y_c + y_a)(x_c - x_a) + (y_c + y_b)(x_b - x_c) - (y_b + y_a)(x_b - x_a) \right) \right\| = \\
 &= \frac{1}{2} \left\| (y_c x_c - y_c x_a + y_a x_c - y_a x_a) + (y_c x_b - y_c x_c + y_b x_b - y_b x_c) - (y_b x_b - y_b x_a + y_a x_b - y_a x_a) \right\| = \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \cancel{y_c x_c} - y_c x_a + y_a x_c - \cancel{y_a x_a} + y_c x_b - \cancel{y_c x_c} + y_b x_b - y_b x_c - \cancel{y_b x_b} + y_b x_a - y_a x_b + \cancel{y_a x_a} \right\| = \\
 &= \frac{1}{2} \left\| x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a \right\| = \\
 &= \frac{1}{2} \|D\|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_c & y_c & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Notemos que, nessa abordagem, o uso do determinante surge da facilidade em denotar a soma $x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a$. Ainda que propriedades do determinante facilitam a discussão sobre a ordem em tomar os pontos A , B e C não há interpretação geométrica imediata para seu uso.

Agora, apresentemos uma proposta da Álgebra Geométrica para áreas de triângulos.

Proposição 6.3. *Sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ pontos não colineares. Tomemos os vetores \vec{AB} e \vec{AC} , então a área A do triângulo ABC é*

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|.$$

Demonstração. Posto que a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo formado por dois de seus lados, a demonstração é direta ao observarmos que $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ é justamente o bivector que representa a porção orientada com módulo igual à área do paralelogramo determinado por \vec{AB} e \vec{AC} . □

Exemplo 6.4. *Determinemos a área do triângulo definido pelos pontos $A(2, 2)$, $B(8, 3)$ e $C(3, 6)$.*

Temos $\vec{AB} = (6, 1)$ e $\vec{AC} = (1, 4)$. Façamos $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$:

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} \wedge \vec{AC} &\stackrel{6.1}{=} (6 \cdot 4 - 1 \cdot 1)e_{12} = \\
 &= (24 - 1)e_{12} = \\
 &= 23e_{12}.
 \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 23 = \\ &= 11,5. \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Álgebra Linear é abordada principalmente em dois momentos no Ensino Médio: o uso de vetores para representação de grandezas em Física (sobre tudo no estudo da mecânica) e no estudo de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Ao discente do EM, esses conceitos lhes parecem desconexos ainda que façam parte de um mesmo formalismo matemático: a Álgebra Linear. Também, até o estudo da Geometria Analítica, no fim do Ensino Médio, os discentes sequer conseguem estabelecer uma relação entre a Geometria e a Álgebra. Alguns poucos podem o fazer ao recordar o estudo de polinômios (mais especificamente: fatoração e produtos notáveis) durante o Ensino Fundamental, quando, numa tentativa de tornar um estudo extremamente algébrico mais tangível a uma criança, seu(ua) professor(a) pode ter optado por utilizar representações geométricas para 1 , x , x^2 e x^3 .

Trabalhar as Álgebras Geométricas durante essa etapa corrobora para uma compreensão mais profunda da Matemática e lida com questões como as apontadas no parágrafo anterior.

Durante o presente trabalho, buscamos enfatizar as Álgebras Geométricas como poderoso formalismo capaz de correlacionar conceitos algébricos e geométricos. Demonstrações, outrora complexas, tornam-se mais simples e compreensíveis ao discente do Ensino Médio com o auxílio das Álgebras Geométricas.

Além disso, compreender a matemática como um produto do conhecimento humano nos faz perceber que processos/fatos históricos influenciam no desenvolvimento da ciência. Um dos prováveis motivos para que as Álgebras de Clifford não se tornarem tão populares quando foram desenvolvidas é a infeliz morte de Clifford pouquíssimo tempo depois de sua descoberta.

O uso das Álgebras Geométricas no Ensino Médio não fica restrito à disciplina de Matemática. De fato, o uso das Álgebras Geométricas permite uma interdisciplinaridade com a Física, permitindo uma maior compreensão de conceitos físicos. Nesse sentido, próximos trabalhos podem se apoiar em [Hestenes \(2003a\)](#) e propor uma reformulação da Física no Ensino Médio com o uso das Álgebras Geométricas.

A seguir, algumas reflexões pessoais que desejo compartilhar com o leitor.

Durante meus estudos para esse trabalho, diversas vezes, estive a realizar computações extensas para a verificação de resultados e maior compreensão do tema. Nesse momento, experimentei contato com bibliotecas e módulos para linguagens de programação tais como: *clifford*; *GAlgebra* e *Ganja.js*. Nesse processo, me surgiram inquietações sobre o ensino da matemática na educação básica e o desenvolvimento dessa ciência. O uso de computação performa um papel notável no desenvolvimento da Matemática, no entanto,

no ensino dessa ciência, o uso da computação se restringe, basicamente, a: plotagem de gráficos; uso de planilhas eletrônicas e calculadora. Por que não fazer como fazem os cientistas: se preocupar em compreender/interpretar resultados e processos, mas deixar que máquinas (cuja capacidade de processamento é, evidentemente, maior que a nossa) façam o trabalho “chato”?

Por fim, nessa dissertação, apresentamos as Álgebras Geométricas a partir de um conjunto de axiomas. Entretanto, outras definições são possíveis, algumas com o uso de conceitos algébricos mais elaborados. Uma questão que ecoa em mim é: quais os ganhos nessas abordagens? Para responder isso, será necessário expandir meus conhecimentos em Álgebra.

OUTRAS ASSINATURAS

Toda essa dissertação foi dedicada ao estudo sobre VGA (*Vanilla Geometric Algebra* ou *Vector space Geometric Algebra*), i.e. Álgebra Geométrica sobre um espaço vetorial e uma forma bilinear simétrica positiva definida.

Os resultados apresentados nesta dissertação foram obtidos considerando a norma usual de vetores e o produto de Clifford. O leitor pode perguntar-se se há outras soluções do problema proposto na Seção 2.3. De fato, com certa flexibilização da propriedade *iii*), outras soluções são possíveis. Essas derivam da adaptação da Equação 4.1 do Axioma 1, de modo a permitir $aa = -1$ ou ainda $aa = 0$.

O presente apêndice, aborda, muito brevemente, espaços vetoriais com essa adaptação.

Com essas formas quadráticas, outras álgebras se tornam possíveis, tais como: PGA (*Projective Geometric Algebra*); CGA (*Conformal Geometric Algebra*) ou STA (*Spacetime Algebra*); cada qual com suas vantagens e aplicações. Em cada uma delas, a interpretação geométrica do produto exterior pode variar, como nos aponta Dorst, Fontijne e Mann (2009, p. 10).

A.1 FORMA QUADRÁTICA

Definição A.1. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Uma forma bilinear em V é uma função $\mathfrak{b} : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que é linear em cada variável, i.e.*

$$\mathfrak{b}(xv + yw, u) = x\mathfrak{b}(v, u) + y\mathfrak{b}(w, u),$$

$$\mathfrak{b}(u, xv + yw) = x\mathfrak{b}(u, v) + y\mathfrak{b}(u, w),$$

para todos $u, v, w \in V$ e $x, y \in \mathbb{K}$.

Definição A.2. *Uma forma bilinear \mathfrak{b} é dita:*

- simétrica se $\mathfrak{b}(v, w) = \mathfrak{b}(w, v)$;
- anti-simétrica se $\mathfrak{b}(v, w) = -\mathfrak{b}(w, v)$ ou
- alternada se $\mathfrak{b}(v, v) = 0$.

para todo $v, w \in V$.

Definição A.3. *A forma quadrática associada a uma forma bilinear simétrica \mathfrak{b} é uma aplicação $\mathfrak{q} : V \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $\mathfrak{q}(v) = \mathfrak{b}(v, v)$.*

A.2 ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Definição A.4. *Seja V um espaço vetorial real e $\mathfrak{q} : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática relacionada a uma forma bilinear $\mathfrak{b} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simétrica. A Álgebra de Clifford associada a (V, \mathfrak{q}) , denotada como $\mathcal{Cl}(V, \mathfrak{q})$, é a álgebra gerada em V sujeita à relação*

$$u \cdot v + v \cdot u = 2 \cdot \mathfrak{b}(u, v)$$

para todos $u, v \in V$.

Fixemos $V = \mathbb{R}^n$. O teorema de Sylvester nos garante que \mathbb{R}^n possui uma base \mathfrak{q} -ortonormal com p geradores cujo quadrado é 1, q cujo quadrado é -1 e r cujo quadrado é zero. De modo que, podemos denotar a álgebra $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{q})$ por $\mathcal{Cl}_{p,q,r}$.

Então, $\mathcal{Cl}_{p,q,r}$ como espaço vetorial é gerada por monômios tal como foi abordado no Capítulo 4. Para construção de $\mathcal{Cl}_{p,q,r}$ não se faz necessária nenhuma alteração além da adaptação da Equação 4.1. Ao invés de $ee = 1$, temos

$$ee = e \cdot e. \tag{A.1}$$

De modo que o produto dos elementos da base obedecerá às seguintes condições:

- i) $e_i^2 = 1$, se $1 \leq i \leq p$;
- ii) $e_i^2 = -1$, se $p + 1 \leq i \leq p + q$;
- iii) $e_i^2 = 0$, se $p + q + 1 \leq i \leq p + q + r = n$;
- iv) $e_i e_j = -e_j e_i$, se $i \neq j$.

A.3 EXEMPLOS

Exemplo A.5. *Consideremos $\mathcal{Cl}_{1,1,1}$. O conjunto $\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$ é a base canônica para $\mathcal{Cl}_{1,1,1}$ e, pela assinatura $(1, 1, 1)$, temos que $e_1 e_1 = 1$, $e_2 e_2 = -1$ e $e_3 e_3 = 0$.*

Sejam $a = 1 + e_3$ e $b = e_1 + 2e_{123}$ dois multivetores em $\mathcal{Cl}_{1,1,1}$. Calculemos o produto ab .

$$\begin{aligned}
 ab &= (1 + e_3)(e_1 + 2e_{123}) = \\
 &= 1e_1 + 2e_{123} + e_3e_1 + e_32e_{123} = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_3e_{123} = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_3e_1e_2e_3 = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_1e_2e_3e_3 = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_1e_2(0) = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 = \\
 &= e_1 - e_{13} + 2e_{123}.
 \end{aligned}$$

Façamos a tábua de multiplicação para $\mathcal{Cl}_{1,1,1}$.

	1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{123}
1	1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{123}
e_1	e_1	1	e_{12}	e_{13}	e_2	e_3	e_{123}	e_{23}
e_2	e_2	$-e_{12}$	-1	e_{23}	e_1	$-e_{123}$	$-e_3$	e_{13}
e_3	e_3	$-e_{13}$	$-e_{23}$	0	e_{123}	0	0	0
e_{12}	e_{12}	$-e_2$	$-e_1$	e_{123}	1	$-e_{23}$	$-e_{13}$	e_3
e_{13}	e_{13}	$-e_3$	$-e_{123}$	0	e_{23}	0	0	0
e_{23}	e_{23}	e_{123}	e_3	0	e_{13}	0	0	0
e_{123}	e_{123}	e_{23}	e_{13}	0	e_3	0	0	0

Tabela 3: Tábua de multiplicação para $\mathcal{Cl}_{1,1,1}$.

Exemplo A.6. Consideremos $\mathcal{Cl}_{0,3,1}$. O conjunto

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}, e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}, e_{1234}\}$$

é a base canônica para $\mathcal{Cl}_{0,3,1}$ e, pela assinatura $(0, 3, 1)$, temos que $e_1e_1 = -1$, $e_2e_2 = -1$, $e_3e_3 = -1$ e $e_4e_4 = 0$.

Sejam $a = 1 + e_3$ e $b = e_1 + 2e_{123}$ dois multivetores em $\mathcal{Cl}_{0,3,1}$. Calculemos o produto ab .

$$\begin{aligned}
 ab &= (1 + e_3)(e_1 + 2e_{123}) = \\
 &= 1e_1 + 2e_{123} + e_3e_1 + e_32e_{123} = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_3e_{123} = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_3e_1e_2e_3 = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_1e_2e_3e_3 = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 + 2e_1e_2(-1) = \\
 &= e_1 + 2e_{123} - e_1e_3 - 2e_1e_2 = \\
 &= e_1 - 2e_1e_2 - e_1e_3 + 2e_{123} = \\
 &= e_1 - 2e_{12} - e_{13} + 2e_{123}.
 \end{aligned}$$

Exemplo A.7. Durante a seção 6.1, foi comentado \mathbf{C} como uma subálgebra de \mathcal{Cl}_2 . No entanto, podemos tomar a álgebra $\mathcal{Cl}_{0,1}$ e obtermos a unidade complexa como um 1-vetor e não o bivector e_{12} .

Exemplo A.8. A álgebra $\mathcal{Cl}_{1,3}$ dita álgebra do espaço-tempo é associada à geometria da Relatividade Restrita. Maiores considerações fogem ao escopo dessa dissertação, no entanto o leitor pode recorrer a *Lasenby, Doran e Gull (1998)* ou *Hestenes (2003b)*.

Exemplo A.9. O modelo conforme de geometria utiliza um espaço métrico $\mathbb{R}^{d+1,1}$ e, nesse modelo, blades podem ser interpretadas geometricamente como circunferências (pares de pontos, círculos, esferas e equivalentes em dimensões mais altas). Mais informações sobre modelos de geometria podem ser encontradas no capítulo 3 de *Fernandes, Lavor e Neto (2017)*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AXLER, S. *Linear Algebra Done Right*. 3. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 978-3-319-11079-0,978-3-319-11080-6.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper & Row, 1980.
- CHAPPELL, J. M. et al. The vector algebra war: A historical perspective. *IEEE Access*, IEEE, v. 4, p. 1997–2004, 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1509.00501v2>>. Acesso em: 06 set. 2021.
- CHISOLM, E. *Geometric Algebra*. 2012. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1205.5935.pdf>>. Acesso em: 27 dez. 2021.
- CORRÊA, L. *A Relação entre Rotações, Quatérnios e Álgebras de Clifford*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2020.
- da ROCHA, R. Álgebras de lie (aula 01). 2013. Disponível em: <<https://goo.gl/IM5SFV>>. Acesso em: 18 nov. 2016.
- DORST, L.; FONTIJNE, D.; MANN, S. *Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry*. Burlington: Elsevier, 2009.
- FERNANDES, L. A. F.; LAVOR, C.; NETO, M. M. de O. *Álgebra Geométrica e Aplicações*. São Carlos: [s.n.], 2017. v. 85. 139 p.
- HESTENES, D. *New Foundations for Classical Mechanics*. 2. ed. Dordrecht/Boston: Kluwer, 1999.
- HESTENES, D. Oersted medal lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 71, n. 2, p. 104–121, 2003. Disponível em: <<http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.1522700>>. Acesso em: 18 nov. 2016.
- HESTENES, D. Spacetime physics with geometric algebra. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 71, n. 7, p. 691–714, 2003.
- HESTENES, D.; SOBCZYK, G. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. [S.l.]: Springer Netherlands, 2012. (Fundamental Theories of Physics). ISBN 9789400962927.
- LASENBY, A.; DORAN, C.; GULL, S. Gravity, gauge theories and geometric algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 356, n. 1737, p. 487–582, Mar 1998. ISSN 1471-2962. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1998.0178>>.
- LIMA, E. L. *Álgebra exterior*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Coleção matemática universitária). ISBN 9788524402371.
- LOUNESTO, P. *Clifford Algebras and Spinors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Handbooks for Language Teachers). ISBN 9780521005517.

- MACDONALD, A. An elementary construction of the geometric algebra. 2016. Disponível em: <<http://www.faculty.luther.edu/~macdonal/GAConstruct.pdf>>. Acesso em: 12 dez. 2021.
- MACDONALD, A. A survey of geometric algebra and geometric calculus. *Advances in Applied Clifford Algebras*, Springer, v. 27, n. 1, p. 853–891, 2017. Disponível em: <<http://www.faculty.luther.edu/~macdonal/GA&GC.pdf>>. Acesso em: 27 dez. 2021.
- MACHADO, N. J. *Matemática e educação: alegorias, tecnologias, jogo, poesia*. São Paulo: Cortez, 2012.
- MUNDIM, K. C.; MUNDIM, M. S. P. Álgebra de grassmann e a teoria quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 19, n. 2, p. 209–233, 1997.
- OLIVEIRA, O. R. B. de. A triangulação da dinamarca e uma grande descoberta matemática. 2015. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~oliveira/CasparWessel.pdf>>. Acesso em: 06 mar. 2022.
- SILVEIRA, M. R. A. da et al. Reflexões acerca da contextualização dos conteúdos no ensino da matemática. *Currículo sem Fronteiras*, v. 14, n. 1, p. 151–172, 2014.
- SUTER, J. Geometric algebra primer. 2003. Disponível em: <<http://www.jaapsuter.com/geometric-algebra.pdf>>. Acesso em: 09 maio 2021.
- VAZ JUNIOR, J. Álgebras geométricas. 1999. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~vaz/algeo.htm>>. Acesso em: 18 dez. 2021.
- VAZ JUNIOR, J.; ROCHA, R. da. *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors*. [S.l.]: Oxford University Press, 2016. ISBN 9780198836285.
- WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2000. ISBN 9788534611091.