Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Análise de temas recorrentes sobre Sequências Numéricas nas Olimpíadas de Matemática

por

Marcus Vinícius Gonçalves Dutra

Orientador: Matheus Bernardini de Souza

Brasília
2022

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Análise de temas recorrentes sobre Sequências Numéricas nas Olimpíadas de Matemática

por

Marcus Vinícius Gonçalves Dutra

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 22 de Fevereiro de 2022.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Vinícius de Carvalho Rispoli - FGA/UnB

Prof. Dr. Bruno Dias Amaro - UFMS

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ga

Gonçalves Dutra, Marcus Vinícius
Análise de temas recorrentes sobre Sequências Numéricas nas Olimpíadas de Matemática / Marcus Vinícius Gonçalves Dutra; orientador Matheus Bernardini de Souza. -- Brasília, 2022.
59 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Olimpíadas de Matemática. 2. Sequências Numéricas. 3. Teoria dos Números. 4. BNCC. 5. OBMEP. I. Bernardini de Souza, Matheus, orient. II. Título.

Àqueles que são minha base

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço aos meus pais, por sempre me mostrarem a importância da educação e me darem força para que trilhasse meu sonho de lecionar.

Aos meus amigos, que foram apoio nos momentos de provação. Seja no momento de cansaço ou de acúmulo de prazos, estiveram comigo incondicionalmente.

Ao professor Matheus Bernardini de Souza, por ter me aceitado como orientando de mestrado. Agradeço por acreditar em mim desde o Ensino Médio, dizendo que um dia ainda seríamos colegas de profissão. Agradeço pela sua paciência, seu comprometimento e compreensão em me orientar durante um período tão turbulento.

Aos demais membros da banca examinadora, formada pelos professores Vinícius de Carvalho Rispoli, Bruno Dias Amaro e Victor do Nascimento Martins por terem aceitado avaliar o meu trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Em especial, aos professores que lecionaram no programa PROFMAT em 2019 e 2020.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT 2019, por toda parceria de estudos, pelas conversas e dicas que foram fundamentais para aprovação nas provas e no exame de qualificação.

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar as diretrizes postas pela Base Nacional Comum Curricular quanto aos conteúdos da teoria dos números, especialmente as Sequências Numéricas, assim como destacar o espaço que o documento dá para a maior valorização das olimpíadas de matemática. O trabalho se inclina a mostrar como os assuntos pertinentes à aritmética dos números inteiros são frequentes nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, sugerindo então, àqueles interessados na preparação para tal prova, alguns dos assuntos principais e resultados importantes a serem compreendidos. Além disso, dada a análise da Base Nacional Comum Curricular, o trabalho visa dar apoio aos professores da Educação Básica que buscam aproximar sua atividade docente daquilo proposto pela nova estrutura curricular. Com esse trabalho, busca-se fornecer material àqueles professores que buscam introduzir a seus estudantes temas outrora pertinentes apenas às disciplinas de Ensino Superior que versavam sobre aritmética.

Palavras-chave: Olimpíadas de Matemática, Sequências Numéricas, Teoria dos Números, BNCC, OBMEP.

Abstract

The goal of this work is to analyze the guidelines set by the Common National Curricular Base regarding the contents of number theory, especially number sequences, as well as highlighting the space that the document gives for the greater appreciation of mathematical olympiads. The work shows how the pertinent themes to the arithmetic of whole numbers are frequent in the tests of the Brazilian Mathematical Olympiad for Public Schools, suggesting then, to those interested in preparing for such tests, some of the main subjects and important results to be understood. In addition, given the analysis of the Common National Curricular Base, the work aims to support teachers of Basic Education who seek to bring their teaching activity closer to what is proposed by the new curricular structure. This work seeks to provide material to those teachers who seek to introduce their students to topics that were once only pertinent to the disciplines of Higher Education that dealt with arithmetic.

Keywords: Mathematics Olympiad, Number Sequences, Number Theory, BNCC, OBMEP.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como tema principal a presença da teoria dos números na Educação Básica. A teoria dos números é a área da Matemática que estuda propriedades, relações e aplicações sobre os números inteiros. O objetivo desta dissertação é fornecer meios para o que o professor e o estudante da Educação Básica possam, por meio de um processo de preparação para provas olímpicas de Matemática, trabalhem resultados sobre sequências numéricas, propiciando ao estudante um primeiro contato com a teoria dos números. Além disso, pretende-se contribuir com a aproximação da processo de ensino-aprendizagem real àquele visado pela Base Nacional Comum Curricular, documento que prevê mudanças substanciais na estrutura do Ensino Médio. Para iniciar, é importante conhecer brevemente a história da teoria dos números.

A teoria dos números, também conhecida como aritmética dos inteiros, é tão antiga quanto a Matemática como conhecemos. A palavra aritmética tem seu radical oriundo da palavra grega *arithmos*, que significa número, indicando então a origem dessa área da Matemática. Na Grécia antiga, a Matemática e a Filosofia eram indistinguíveis, a ponto da aritmética dos inteiros ter como uma de suas primeiras questões o próprio conceito de número. A teoria dos números tem seus primeiros resultados e demonstrações creditados a filósofos e matemáticos gregos famosos como Pitágoras, Euclides e Diofantos.

Nos séculos XVII e XVIII, a teoria dos números contou com os mais ilustres matemáticos da época debruçando-se sobre ela. Primeiramente, Pierre de Fermat, um reservado juiz da França de Luis XIII, contribuiu para a Aritmética com potentes resultados e conjecturas como o "Teste de primalidade de Fermat"e o famigerado "Último Teorema de Fermat", problema resolvido apenas nos tempos contemporâneos. Em sequência, o brilhante Leonhard Euler, matemático suiço e indiscutivelmente um dos mais prolíficos da história, apresentou dentre seus trabalhos a "Função de Euler"e a "Função Gama". A primeira estuda a coprimalidade entre números inteiros e contribuiu muito para o avanço da Aritmética da época, enquanto a segunda expande a ideia de fatorial e somente séculos depois percebeu-se que essa função estava intrinsicamente ligada a problemas de teoria dos números.

Por fim, mas não menos importante, deve-se falar de Carl Friedrich Gauss, um alemão que ficou conhecido como “O Príncipe da Matemática”. Gauss talvez tenha seus trabalhos mais conhecidos voltados para a álgebra, mas contribuiu fortemente para o desenvolvimento da aritmética, principalmente em se tratando da resolução de equações. Tanto o “método de Gauss” quanto a “lei da reciprocidade quadrática”são grandissísimos avanços na teoria dos números proporcionados por esse brilhante cientista. Assim, esse trabalho busca despertar nos estudantes a chama, ou mesmo uma centelha dela, que habitou esses grandes nomes da Matemática.

Após esse panorama histórico, é importante falar sobre a disposição desse trabalho:

- **Capítulo 1: A Base Nacional Comum Curricular**. Neste capítulo, será feita a análise de alguns aspectos da Base Nacional Comum Curricular. Indo do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, observar-se-á os detaques dados Á teoria dos números no documento, correlacionando-os com o contexto das olimpíadas de Matemática.

- **Capítulo 2: As Sequências Numéricas**. Neste capítulo, serão enunciadas e demonstradas algumas sequências e suas propriedades. Trabalhar-se-á sobre relações de recorrência e as sequências notáveis que elas originam, tal qual a sequência de Fibonacci.

- **Capítulo 3: Os Números Poligonais e as Recorrências Lineares Não Homogêneas**. Neste capítulo, o trabalho volta-se para a exploração de definições e resultados a respeito dos números poligonais. Ao explorar tal tema, surge a possibilidade de estudar conceitos relacionados às recorrências lineares não homogêneas, inclusive expandindo a ideia dos números poligonais para obter alguns números poliédricos.

- **Capítulo 4: Questões sobre Sequências Numéricas**. Neste capítulo, apresentar-se-á resoluções de questões oriundas da Olimpíada Brasiliera de Matemática para Escolas Públicas a fim de mostrar os resultados apresentados nos capítulos anteriores sendo aplicados.

Capítulo 1

A Base Nacional Comum Curricular e as Olimpíadas de Matemática

Neste capítulo, analisar-se-á o texto da Base Nacional Comum Curricular referente tanto ao Ensino Fundamental, anos finais, quanto ao Ensino Médio. O objetivo da análise é salientar a presença de tópicos da teoria dos números nas habilidades e competências enunciadas no documento assim mostrando a sua consonância com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Esse capítulo tem como base os trabalhos [2], [3], [4].

1.1 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), proposta inicialmente em 2017, é um documento normativo a respeito das aprendizagens essenciais que o estudante deve aflorar durante o período da Educação Básica. Para tal, a BNCC estabelece competências gerais, competências específicas por área e habilidades pertinentes a cada competência, os dois últimos em observância às singularidades de cada etapa do Ensino Básico.

Sem menção direta às olimpíadas de Matemática, a BNCC mesmo assim conduz a Educação Matemática do país à crescente valorização dessas provas. Isso se dá devido a dois principais fatores: o grande potencial das Olimpíadas no aumento da autonomia do estudante e seu forte estímulo das capacidades de análise e argumentação. Para ilustrar essa necessidade do estudante de dilatar sua autonomia como estudante, observa-se que mais de 15% das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) da 1ª fase, entre os anos de 2012 e 2019, como ilustram as Figuras 1.1, 1.2 e 1.3, tratam de assuntos pertencentes à teoria dos números, tópico esse trabalhado de maneira superficial nos Ensinos Fundamental e Médio.

Antes de buscar pela presença da teoria dos números, é necessário saber como a BNCC estrutura suas considerações a respeito da Matemática. Há duas separações transversais entre si, uma considerando as etapas da Educação Básicas e outra as áreas do conhecimento. A Matématica é representada por duas áreas do conhecimento distintas, "A área da Matemática"e "A área de Matemática e suas tecnologias". O que as difere é a etapa na qual cada uma das duas se aplica, sendo a primeira pertencente ao Ensino Fundamental e a segunda ao Ensino Médio.

Ao ser introduzida "A área da Matemática", vê-se a disciplina ser caracterizada como uma ciência baseada em hipóteses e dedução cujas experimentações desempenham papel heurístico. Isso é transcrito diluidamente de maneira quase biunívoca dentre os enunciados das competências específicas da área. Além disso, o documento particiona tal área do conhecimento em quatro campos distintos: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade (as duas últimas caracterizando um único campo).

Já "A área da Matemática e suas tecnologias", representante da Matemática para o Ensino Médio, volta-se para um modelo de educação integral, preparando o estudante para analisar e atuar sobre problemas do cotidiano. Suas competências versam sobre investigação de situações reais, construção de modelos e estabelecimento de conjecturas, o que mostra a importância do desenvolvimento da autonomia crítico-cognitiva do estudante para a BNCC.

É de notória importância buscar meios de, desde o Ensino Fundamental, estimular tais habilidades nos estudantes, dadas as diretrizes da BNCC. Assim sendo, há grande ganho no estímulo do estudante da Educação Básica a estudar temas como a teoria dos números visando a preparação para provas olímpicas. Uma vez que a BNCC trata tal tema de maneira tangente em suas habilidades, é aberto espaço para que o estudante exercite sua autonomia estudando-o.

Assim sendo, é necessário que o professor conheça os pontos da BNCC que fazem menção à aritmética dos inteiros e aqueles que deixam possibilidade para correlação. Por isso, a próxima seção desse trabalho se ocupa em fazer essa inspeção, dando ferramentas para que o professor atue na preparação de seus estudantes.

1.2 Teoria dos Números na BNCC e nas Olimpíadas de Matemática

Dada a finalidade desse trabalho, a análise a ser feita limitar-se-á ao campo da aritmética. Apesar da nomenclatura utilizada pela BNCC e não mencionar diretamente a teoria dos números, é possível observar seus teoremas e resultados sendo amplamente abordados nas competências e habilidades referentes à Aritmética no Ensino Fundamental do $6^{\underline{o}}$ ao $9^{\underline{o}}$ ano. Apesar de presente em habilidades de todo o período supracitado, é ao olhar para habilidades referentes ao $6^{\underline{o}}$ e ao $7^{\underline{o}}$ ano que se vê menção mais clara à teoria dos números, como exposto abaixo:

> **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
>
> **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
>
> **(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
>
> **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

As operações entre números naturais recebem grande destaque durante o Ensino Fundamental, mas é no $6^{\underline{o}}$ ano que se vê o início da sua aproximação com os tratados da Aritmética estudada no Ensino Superior. Ao estabelecer a divisão Euclidiana dentre as temáticas de tal ano, a BNCC abre as portas para temas como o teorema fundamental da aritmética, equações Diofantinas, congruência modular, teorema chinês dos restos, os quais são fundantes para a teoria dos números.

Temas esses que tem sua importância amplamente reconhecida no contexto olímpico. Nas provas do Nível 1 da OBMEP, cujo público alvo inclui os estudantes de $6^{\underline{o}}$ e $7^{\underline{o}}$ anos, não houve um ano, de 2012 a 2019, no qual nenhum desses temas tenha sido abordado. Vê-se, então, essa abertura dada pela BNCC sendo vastamente explorada, o que evidencia a real necessidade do professor dominar tais temas, caso busque preparar seus estudantes para a realização de olimpíadas de Matemática.

Dentre as habilidades referentes ao 7º ano, há nova menção direta a temas pertencentes à aritmética dos números inteiros. Nesse ponto, o documento cita explicitamente o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. A respeito dessas duas entidades, pode-se fazer um módulo inteiro de um curso voltado para graduandos, tamanha sua importância para a teoria dos números. Porém, é no 7º ano que se deflagra a primeira menção às sequências numéricas, que outrora só viriam a ser estudadas no Ensino Médio.

A BNCC se vale das sequências numéricas para expor o estudante à natureza periódica ou recursiva observada em diversos aspectos da sociedade. Ao tratar os múltiplos positivos de um determinado inteiro como uma sequência numérica, o estudante pode observar e estudar amplamente o comportamento de uma relação de recorrência de 1º grau. Por outro lado, observando os possíveis restos que os números naturais apresentam na divisão por um dado inteiro, é nítido o caráter cíclico apresentado ali.

A noção de sequência numérica ganha expressivo destaque na aurora do estudo da álgebra para os estudantes do Ensino Fundamental, mas é no Ensino Médio que a BNCC se dispõe a trabalhar tal conteúdo de maneira formal. Dentre as citações diretas às sequências, é notória a importância das progressões aritméticas e geométricas dada pelo documento. Seja estabelecendo sua correlação com funções contínuas definidas sobre os reais ou estudando as propriedades inerentes a essas sequências, como presente nas habilidades destacadas abaixo:

> **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
>
> **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
>
> **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
>
> **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções

afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Tal destaque dado pela BNCC se reflete diretamente na maior prova olímpica do Brasil. Analisando as provas da 1ª fase da OBMEP, de 2012 a 2019, as questões sobre sequências numéricas destacam-se como as mais frequentes dentre aquelas de temática dentro da aritmética dos inteiros e até mesmo fora dela. Por conseguinte, o estudo das sequências númericas, suas propriedades e resultados a respeito delas torna-se tarefa essencial para aquele que busca se preparar para as provas olímpicas.

Em levantamento realizado na produção desse trabalho, as questões da primeira fase da Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas de 2012 a 2019 foram categorizadas em cinco grandes áreas. A fim de quantizar a frequência com que a teoria dos números aparece nessas provas, as questões foram divididas entre álgebra, teoria dos números, geometria, combinatória e raciocínio lógico. As frequências discriminadas pro nível da prova olímpica estão expressos nos gráficos a seguir.

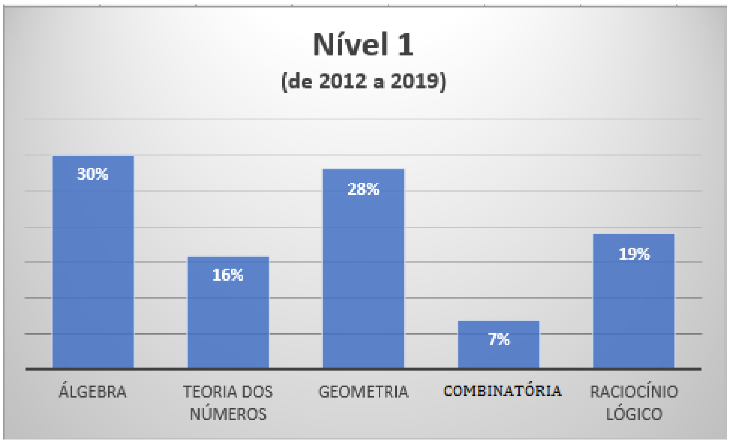


Figura 1.1: Distribuição de Questões por Área - Nível 1.

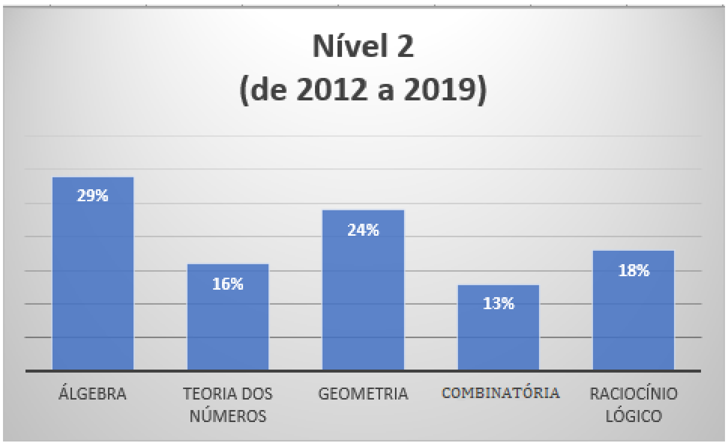


Figura 1.2: Distribuição de Questões por Área - Nível 2.

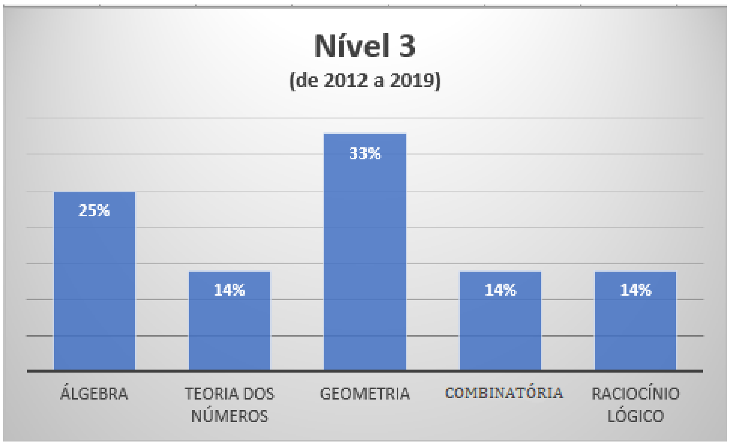


Figura 1.3: Distribuição de Questões por Área - Nível 3.

Observa-se então que as questões acerca das temáticas pertinentes à Aritmética dos Inteiros representam, em média, $15,33\%$ das questões de primeira fase da Olimpíada. Essa porcentagem considerável se torna ainda mais importante quando aliada à profundidade dos temas da teoria dos números históricamente presentes na Educação Básica. Dessa forma, há de se destacar o trabalho da Base Nacional Comum Curricular em reaproximar o currículo dos Ensinos Fundamental e Médio dos temas pertinentes a essa importante área da Matemática.

A estrutura curricular do "novo Ensino Médio" propicia que as escolas possam aprofundar temas já vistos e introduzir novos temas pertinentes, assim, abrindo espaço para a teoria dos números chegarem a aos estudantes. A flexibilidade temática fornecida pelos Itinerários Formativos e pelas Eletivas, previstas na BNCC para o Ensino Médio, faz com que seja natural a busca por temas que não recebiam tanto destaque outrora, mas tem importância latente. O levantamento supracitado mostra que é proveitoso aproveitar tal espaço para cobrir objetos do conhecimento relacionados à teoria dos números.

Seja um tópico já pertencente à Formação Geral Básica, ou algo mais profundo teoricamente, há possibilidade de trabalho nesse novo panorama. As sequências numéricas, por exemplo, estão presentes dentre os objetos de conhecimento fundantes para a 1ª série, o que indica sua presença na Formação Geral Básica. Isso não impede que o tema seja aprofundado em uma Itinerário Formativo que vise a preparação do estudante para provas olímpicas ou de vestibular. Daí, se observa a gama de possibilidades que a Base Nacional Comum Curricular apresenta para a maior valorização da teoria dos números na Educação Básica.

Além disso, as sequências numéricas são tema abundantemente presente em problemas cotidianos, explicitamente ou não. Daí, seguindo o vies da BNCC de aprendizagem e desenvolvimento ético, social e ambiental por parte do estudante, esse trabalho decidiu reclinar-se especificamente sobre as sequências dentro da teoria dos números. Por sua capilaridade no dia a dia, esse objeto de conhecimento possibilita que desenvolva-se atividades, ou ementas inteiras, pautadas na aprendizagem baseada em problemas (ABP).

A aprendizagem baseada em problemas, segundo [2], visa tornar o estudante "capaz de construir o aprendizado conceitual, procedimental e atitudinal por meio de problemas propostos (...)". Assim, torna-se ferramenta útil para buscar um ambiente escolar cujo protagonismo encontra-se no estudante, como prega a BNCC. Tal método vai de encontro à proposta desse trabalho de por os jovens frente a problemas desafiadores, tais quais aqueles presentes em Olimpíadas de Matemática. Não obstante, tal método, por ser tão rico e vasto, não será amplamente discutido nessa dissertação.

Outro tema já semeado no Ensino Fundamental que ganha destaque no Ensino Médio é o estudo das equações polinomiais do 1º grau e dos sistemas de equações. Tais equações são citadas em habilidades que visam estabelecer correlação entre elas e as progressões aritméticas, modelar problemas cotidianos fazendo uso delas, associar as mesmas a retas representadas no plano Cartesiano, dentre outras menções. Nesse ponto, as equações Diofantinas e os sistemas que as utilizam crescem em importância, uma vez que tais equações modelam diversos problemas cotidianos.

As equações Diofantinas do 1º grau estão presentes na descrição de eventos periódicos, fazendo com a modelagem de diversas situações problema transite pelo seu arcabouço teórico. Tendo em vista a formação integral visada pela BNCC, é pertinente que o estudante seja exposto a mais elementos a respeito das Equações Diofantinas e sistemas de equações de soluções inteiras, para que o estudante possa dilatar sua capacidade crítico-analítica e, então, exerça seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, o estudante do Ensino Médio, ao estudar determinados tópicos da teoria dos números para se preparar para provas olímpicas, está investindo em sua educação integral e indo de encontro ao desenvolvimento das habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular. Sob uma perspectiva moderadora, é importante que o professor domine os principais resultados e teoremas a respeito dos assuntos que o estudante estudará, para que possa desempenhar plenamente sua função dentro do processo de ensino-aprendizagem pretendido pela BNCC.

Capítulo 2

As Sequências Numéricas

Neste capítulo, serão analisada questões oriundas de olimpíadas de Matemática que trabalham conceitos e propriedades das sequências numéricas. Baseado na resolução de tais questões, enunciar-se-á os principais resultados da teoria ali presente assim como suas demonstrações. Este capítulo tem como base os capítulos 1 e 3 de [1], algumas definições presentes em [7], o texto de [8], o apêndice B de [9] e o capítulo 6 de [10].

2.1 Contextualização teórica

Nesta seção, será trabalhada a definição de sequência numérica e alguns resultados necessários para a análise dos itens oriundos de provas olímpicas. Para iniciar esse antelóquio, é necessário expor a definição de sequência numérica que, segundo [7], é:

Definição 2.1 *Uma sequência de números reais é uma função x:* $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$*, definida no conjunto* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *dos números naturais e tomando valores no conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. O valor* $x(n)$*, para* $n \in \mathbb{N}$*, será representado por* x_n *e chamado de termo de ordem* n*, ou* n*-ésimo termo da sequência.*

A definição acima caracteriza perfeitamente as **sequências infinitas**, porém ainda é necessário definir o que são as **sequências finitas**.

Definição 2.2 *Uma sequência finita de números reais é uma função x:* $I_n \mapsto \mathbb{R}$*, para* $I_n = \{i \in \mathbb{N} | i \leq n\}$*, em que* $n \in \mathbb{N}$*. A notação adotada para representar os termos das sequências finitas coincide com a notação estabelecida para as sequências infinitas.*

Vale destacar que tal definição pode sofrer flexibilizações quanto ao seu índice, dado o contexto do problema. Não é incomum que se defina sequências com índice inicial nulo ou negativo, por isso há casos em que adota-se o primeiro índice como um número inteiro.

Daí, é possível então iniciar o estudo de sequências numéricas notáveis e alguns tipos de sequências citados diretamente na BNCC. Além das já citadas progressões aritméticas e progressões geométrica, também serão definida as sequências dos números de Fibonacci e dos números poligonais.

2.2 Os Números de Fibonacci e as Relações de Recorrência Lineares Homogêneas

A sequência dos números de Fibonacci, como exposto em [11], é comumente definida por meio de uma relação de recorrência, como segue.

Definição 2.3 *A sequência dos números de Fibonacci, (F_n), é tal que*

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \end{cases}$$

Os números de Fibonacci tem ampla presença na natureza, nas artes e Matemática, mas é a respeito da sua relação de recorrência linear que o trabalho se debruçará. As relações de recorrência, apesar de não pertencerem robustamente ao currículo da Educação Básica, são assunto frequente nas provas olímpicas. Daí, há a necessidade de definir esse essas relações e enunciar resultados a respeito delas.

Definição 2.4 *Considere uma sequência (x_n) de números reais. Diz-se que há relação de recorrência linear homogênea de ordem $k \in \mathbb{N}$ entre seus elementos caso existam $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$ tais que*

$$x_n + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i} = 0.$$

Uma relação de recorrência linear é dita ***não homogênea*** *quando existem $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$ e uma função não nula na variável n tais que*

$$x_n + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i} = f(n).$$

Dessa forma, tem-se que (F_n) é classificada como uma recorrência linear homogênea de segunda ordem. A sequência apresenta propriedades e identidades justificadas por essa classificação, daí a importância do leitor conhecê-la. Antes de demonstrar tais resultados, é proveitoso observar alguns exemplos de relações de recorrência linear de primeira ordem.

Exemplo 2.1 *Considere a sequência* (x_n) *tal que* $x_n - x_{n-1} = r$*, para algum* $r \in \mathbb{R}$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$*. Dessa maneira, é possível perceber que*

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = r \\ x_3 - x_2 = r \\ x_4 - x_3 = r \\ \ldots \\ x_n - x_{n-1} = r \end{cases}$$

Somando todas essas equações, tem-se que

$$x_n - x_1 = (n-1) \cdot r$$

Ou, equivalentemente,

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot r$$

À sequência (x_n) *chama-se de* ***progressão aritmética de 1ª ordem*** *e à constante* r *chama-se de razão da progressão aritmética.*

Exemplo 2.2 *A sequência* $(x_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ *é tal que* $x_n - x_{n-1} = 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Logo, essa sequência, que é formada pelos números naturais não nulos dispostos em ordem crescente, é uma progressão aritmética de 1ª ordem cuja razão é igual a 1.*

Exemplo 2.3 *A sequência* $(x_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ *é tal que* $x_n - x_{n-1} = 2$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Essa sequência, que representa os números naturais pares dispostos em ordem crescente, é uma progressão aritmética de 1ª ordem cuja razão é igual a 2.*

Agora, há de se definir as **equações características das recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem**, para então obter-se as soluções desse tipo de recorrência.

Definição 2.5 *Dada uma recorrência linear homogênea de 2ª ordem* $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$*, diz-se que sua equação característica associada é* $r^2 + pr + q = 0$*, com* $p \in \mathbb{R}$ *e* $q \in \mathbb{R} - \{0\}$*.*

Teorema 2.1 *Dada a equação característica* $r^2 + pr + q = 0$ *associada à recorrência linear homogênea de 2ª ordem* $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$*, as soluções* r_1 *e* r_2 *da equação, sabe-se que*

(i) Se $r_1 \neq r_2$, então $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$
(ii) Se $r_1 = r_2$, então $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 n \cdot r_1^n$,

em que C_1 e C_2 são constantes quaisquer, a depender das condições iniciais.

Demonstração: **(i)** Primeiramente, analisar-se-á o caso onde $r_1 \neq r_2$. Fazendo $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, tem-se que

$$C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n + p \cdot (C_1 \cdot r_1^{n-1} + C_2 \cdot r_2^{n-1}) + q(C_1 \cdot r_1^{n-2} + C_2 \cdot r_2^{n-2})$$
$$C_1 \cdot r_1^{n-2} \cdot (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 \cdot r_2^{n-2} \cdot (r_2^2 + pr_2 + q)$$

Como r_1 e r_2 são soluções de $r^2 + pr + q = 0$, obtém-se

$$C_1 \cdot r_1^{n-2} \cdot 0 + C_2 \cdot r_2^{n-2} \cdot 0 = 0$$

Logo, se $r_1 \neq r_2$, $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$ é solução da relação de recorrência.

(ii) Agora, com $r_1 = r_2$, toma-se $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 n \cdot r_1^n$ e, analogamente, obtém-se

$$C_1 \cdot r_1^{n-2} \cdot (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 \cdot n \cdot r_1^{n-2} \cdot (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 \cdot r_1^{n-2} \cdot (pr_1 + 2q)$$

Como $r_1 = r_2$, sabe-se que $r = -\frac{p}{2}$ e $q = r_1^2$, portanto

$$C_1 \cdot r_1^{n-2} \cdot 0 + C_2 \cdot n \cdot r_1^{n-2} \cdot 0 + C_2 \cdot r_1^{n-1} \cdot 0 = 0$$

Assim, para $r_1 = r_2$, $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 n \cdot r_1^n$ é solução da relação de recorrência.

■

É natural surgir o questionamento se existe outro tipo de solução para as relações de recorrência homogêneas de 2ª ordem. Porém, é possível provar a unicidade dessa solução, conforme segue. A demonstração se ocupará em mostrar para o caso $r_1 \neq r_2$, uma vez que a demonstração para $r_1 = r_2$ é análoga.

Corolário 2.1 *Considere uma recorrência linear $x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$, com $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R} - \{0\}$, condições iniciais fixadas e equação característica $r^2 + pr + q = 0$ cuja soluções distintas são r_1 e r_2. Dessa forma, a solução $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$ dessa recorrência é única.*

■

Considere x_n e y_n soluções dessa recorrência, tal que $y_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, conhecidas suas condições iniciais y_1 e y_2. Fazendo uso do mesmo sistema linear apresentado na demonstração do **Teorema 2.1**, é possível determinar os valores de C_1 e C_2, ocasionando que $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Assim, buscando uma demonstração por indução finita, supõe-se que existe um natural k tal que, para todo n natural de 2 a k, vale que $x_n = y_n$. Da definição de x_n, sabe-se que

$$x_{k+1} + px_k + qx_{k-1} = 0.$$

Como $x_k = y_k$ e $x_{k-1} = y_{k-1}$, tem-se que

$$x_{k+1} + py_k + qy_{k-1} = 0,$$

que é equivalente a

$$x_{k+1} - y_{k+1} + y_{k+1} + py_k + qy_{k-1} = 0.$$

Já que a sequência (y_n) obedece à relação de recorrência posta, vale que $y_{k+1} + py_k + qy_{k-1} = 0$. Isso implica que

$$x_{k+1} - y_{k+1} = 0,$$

ou seja

$$x_{k+1} = y_{k+1}.$$

Concluindo assim, por indução finita, que $x_n = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Exemplo 2.4 *A sequência de Fibonacci, como enunciada anteriormente, apresenta equação característica* $r^2 - r - 1 = 0$, *cujas soluções são* $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *e* $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Logo, sabe-se que existe* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *tais que* $F_n = C_1 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

Como $F_1 = F_2 = 1$, *tem-se*

$$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \\ C_1 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 + C_2 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = 1 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

A sequência dos números de Fibonacci possui inúmeras propriedades e identidades interessantes envolvendo seus termos. Demonstrar novas propriedades dessa sequência é uma tarefa que até hoje inspira trabalhos matemáticos, tamanha a vastidão dessas relações. Algumas dessas relações serão demonstradas a seguir.

Teorema 2.2 *Dada a sequência de Fibonacci (F_n), valem as cinco identidades abaixo.*

$$\textbf{\textit{(i)}}\ F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1} = F_n^2\ ;$$

$$\textbf{\textit{(ii)}}\ \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1;$$

$$\textbf{\textit{(iii)}}\ \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1};$$

$$\textbf{\textit{(iv)}}\ \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1;$$

$$\textbf{\textit{(v)}}\ \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Demonstração:

(i) Seja $n \in \mathbb{N}$ e a sequência de Fibonacci (F_n), tome $F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}$. É possível fatorar F_n, obtendo

$$F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}).$$

Da definição da sequência de Fibonacci, tem-se que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, daí

$$F_n \cdot (F_n + F_{n-1} - F_{n-1}).$$

Portanto,

$$F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1} = F_n^2.$$

(ii) Seja $n \in \mathbb{N}$ e a sequência de Fibonacci (F_n), sabe-se que

$$\begin{cases} F_3 = F_1 + F_2 \\ F_4 = F_2 + F_3 \\ \dots \\ F_{n-1} = F_{n-3} + F_{n-2} \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases}.$$

Somando todas essas equações, obtém-se

$$\sum_{i=3}^{n} F_i = 2 \cdot \sum_{i=2}^{n-2} F_i + F_1 + F_{n-1}.$$

Somando F_1 e F_2 a ambos os membros, sabendo que $F_1 = F_2$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-2} F_i + F_1 + F_{n-1}.$$

Somando e subtraindo F_{n-1} ao membro da direita, obtém-se

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} F_i + F_1 - F_{n-1}.$$

Daí,

$$F_n + \sum_{i=1}^{n-1} F_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} F_i + F_1 - F_{n-1}.$$

Subtraindo $\sum_{i=1}^{n-1} F_i$ de ambos os membros, resta

$$F_n + F_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} F_i + F_1.$$

Como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ e $F_1 = 1$, observa-se que

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

(iii) Usando da relação **(i)**, sabe-se que

$$\begin{cases} F_2^2 = F_2 \cdot F_3 - F_2 \cdot F_1 \\ F_3^2 = F_3 \cdot F_4 - F_3 \cdot F_2 \\ \ldots \\ F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1} \end{cases}.$$

Somando todas essas equações, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_1^2 - F_2 \cdot F_1 + F_n \cdot F_{n+1}.$$

Uma vez que $F_1 = F_2 = 1$, conclui-se que

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = 1 - 1 + F_n \cdot F_{n+1},$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

(iv) Da relação de recorrência associada à sequência de Fibonacci, sabe-se que

$$\begin{cases} F_4 = F_3 + F_2 \\ F_6 = F_5 + F_4 \\ F_8 = F_7 + F_6 \\ \ldots \\ F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2} \end{cases}.$$

Somando todas essas equações, tem-se

$$\sum_{i=2}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n-1} F_i - F_1.$$

Somando F_2,

$$\sum_{i=2}^{n} F_{2i} + F_2 = \sum_{i=1}^{2n-1} F_i - F_1 + F_2.$$

Como $F_1 = F_2 = 1$, é tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n-1} F_i.$$

Usando da relação **(ii)**, sabe-se que $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} F_i = F_{2n+1} - 1$. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

(v) Como deseja-se a soma dos termos de ordem ímpar, é natural pensar que essa soma é igual à diferença da soma de todos os termos para a soma dos termos de ordem par, como segue

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i}.$$

Usando a relação **(ii)**, sabe-se que $\sum\limits_{i=1}^{2n} F_i = F_{2n+2} - 1$. Enquanto a relação **(iv)** implica que $\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n+1} + 1.$$

Da relação de recorrência associada à sequência de Fibonacci, sabe-se que $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$. Assim, observa-se que

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n+1} + F_{2n} - 1 - F_{2n+1} + 1,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

■

As propriedades acima demonstradas podem ser interessantes ao leitor que se prepara para provas olímpicas de Matemática, uma vez que sua demonstração encontra-se num escopo de dificuldade intelegível para o estudante do Ensino Básico. Porém, ater-se a uma abordagem puramente algébrica da sequência de Fibonacci é subaproveitar o potencial que ela tem de resolver problemas diversos.

Por isso, a próxima etapa desse trabalho ocupar-se-á em construir os números de Fibonacci a partir de uma situação problema envolvendo cobertura de tabuleiros quadriculados.

2.3 Uma Interpretação Geométrica da Sequência de Fibonacci

Nesta seção, será apresentada uma maneira alternativa de definir a sequência de Fibonacci. Tal maneira apresenta um caráter geométrico, como será apresentado abaixo, e possibilita uma abordagem mais combinatória sobre a sequência.

Considere um tabuleiro quadriculado 1×n e peças 1×1 e 1×2, conforme ilustra figura abaixo.

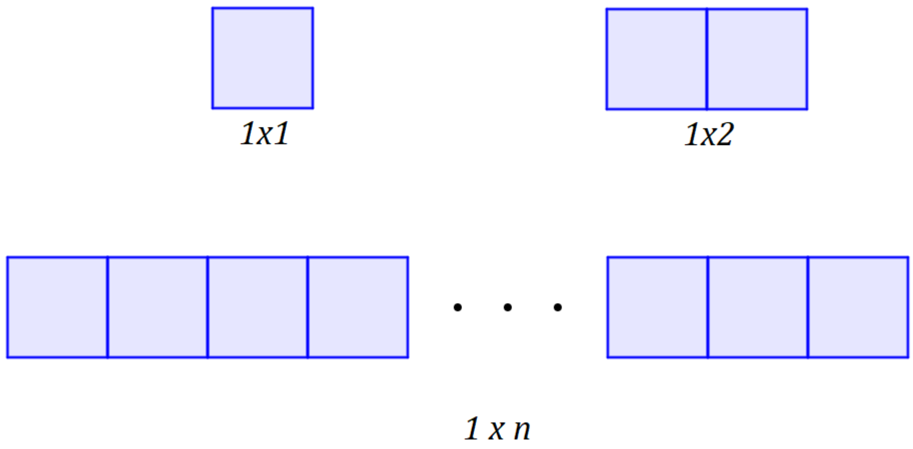


Figura 2.1: Tabuleiro 1×n e peças 1×1 e 1×2.

Teorema 2.3 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e (f_n) a quantidade de maneiras possíveis de cobrir um tabuleiro 1×n usando as peças 1×1 e 1×2. Então, $f_n = F_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, em que (F_n) é a sequência de Fibonacci.*

Demonstração: A fim de mostrar por indução finita, veja que, para $n = 1$, é trivial que há apenas uma maneira de cobrir o tabuleiro, que é usando uma peça 1×1. Agora, assuma que para um tabuleiro 1×n há $f_n = F_{n+1}$ formas de cobrí-lo com as peças 1×1 e 1×2.

Dado um tabuleiro 1×(n+1), coberto da esquerda para a direita, há duas possibilidades para a cobertura da primeira posição. Caso esteja coberta por uma peça 1×1, restam n peças descobertas no tabuleiro, que podem ser cobertas de F_{n+1} maneiras. Se a primeira posição estiver coberta por uma peça 1×2, então há F_n maneiras de cobrir as $n - 1$ peças restantes.

Assim, o tabuleiro 1×(n+1) pode ser coberto de $F_{n+1}+F_n$ maneiras. Pela definição dos números de Fibonacci, tem-se que a quantidade de maneiras de cobrí-lo é igual a F_{n+2}. Portanto, por indução, tem-se que, para todo n natural, o tabuleiro 1×n pode ser coberto de $f_n = F_{n+1}$ maneiras usando peças 1×1 e 1×2.

■

Dessa forma, é possível afirmar que a sequência de Fibonacci e o problema de coberturas apresentado remetem à mesma relação de recorrência,$f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$. Note que, dada $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)$, pode-se dizer que $F_n = f_{n-1}$ para $n \geq 2$. Vale ressaltar que F_1 está bem definido uma vez que $F_1 = F_3 - F_2 = 2 - 1 = 1$.

Tal interpretação geométrica possibilita uma abordagem combinatória a respeito da sequência de Fibonacci, uma vez que está sendo trabalhada a quantidade de maneiras de se executar uma tarefa. Dessa perspectiva combinatória, obtém-se uma interessante propriedade da sequência.

Teorema 2.4 *Dadas as f_n maneiras de cobrir um tabuleiro 1×n, com peças 1×1 e 1×2, e a combinação de n elementos tomados k a k, $\binom{n}{k}$, tem-se que*

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Para cobrir um tabuleiro 1×n com k peças 1×2, tem-se que o número de peças 1×1 usada é $n-2k$, para $k \leq \frac{n}{2}$. Assim, o total de peças utilizadas é $n-k$.

Dentre essas $n-k$ peças, são tomadas k peças 1×2, o que resulta em $\binom{n-k}{k}$ maneiras de dispor as peças nessa configuração. Note que, para $k > \frac{n}{2}$, $\binom{n-k}{k} = 0$.

Então o total de maneiras de cobrir o tabuleiro 1×n, f_n, é igual ao somatório $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k}$.

■

Olhando para a sequência de Fibonacci agora, tem-se que

$$F_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k-1}{k}.$$

Uma vez estabelecido o problema da cobertura do tabuleiro 1×n com peças 1×1 e 1×2, é natural expandi-lo pensando em aumentar a variedade de peças usadas para a tarefa. Caso estejam à disposição para a cobertura as peças de 1×1, 1×2 até 1×k, com $k < n$, essa generalização está associada às **sequências de Fibonacci k-generalizadas** , regidas pela relação de recorrência

$$F_n{}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} F_{n-i}{}^{(k)}$$

e com termos iniciais $F_1{}^{(k)} = 1$ e $F_n{}^{(k)} = 0$, para $n \in [-k+2, 0] \cap \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.5 *Os números de Tribonacci,* $(F_n{}^{(3)}) = (1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, ...)$, *conforme [12], podem ser obtidos por meio da sequência do total de possibilidades para a cobertura de um tabuleiro 1×n dispondo das peças 1×1, 1×2 e 1×3. Vale destacar que a sequência obtida com a cobertura de tal tabuleiro é* $(1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, ...)$, *por isso, para associá-la a Tribonacci, deve-se definir que*

$$\begin{cases} F_1{}^{(3)} = F_2{}^{(3)} = 1 \\ F_3{}^{(3)} = 2 \\ F_n{}^{(3)} = a_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

onde (a_n) *é a sequência obtida a partir da cobertura em questão.*

2.4 Atividade: Outro problema de cobertura de tabuleiros

Nessa seção, apresentar-se-á um problema de coberturas de tabuleiro que busca verificar o impacto da escolha das peças usadas para cobrir. Além disso, essa seção traz uma proposta de atividade para que os estudantes da Educação Básica conjecturem a respeito das relações de recorrência homogênea e tenham um contato breve com o raciocínio envolto no processo de indução finita.

Vale destacar também que essa atividade, assim como aquela presente no capítulo seguinte desse trabalho, buscam se aproximar do formato apresentado por boa parte das questões da 2ª fase da OBMEP. As questões dessa fase apresentam uma estrutura característica de conduzir o estudante à construção de um resultado dividindo a obtenção do mesmo em passos menores que, concatenados, integram a linha de raciocínio da demonstração.

Dos problemas de cobertura de tabuleiros previamente apresentados surge o questionamento dos efeitos à sequência associada à cobertura do tabuleiro 1×n caso não estejam disponíveis todas as peças de 1×1 até 1×k. Para estudar tal efeito, propõe-se a cobertura desse tabuleiro dispondo apenas das peças 1×1 e 1×3. Esse problema pode ser apresentado a uma turma de Ensino Médio no formato de oficina a fim de estudar relações de recorrência, conforme roteiro que será apresentado posteriormente.

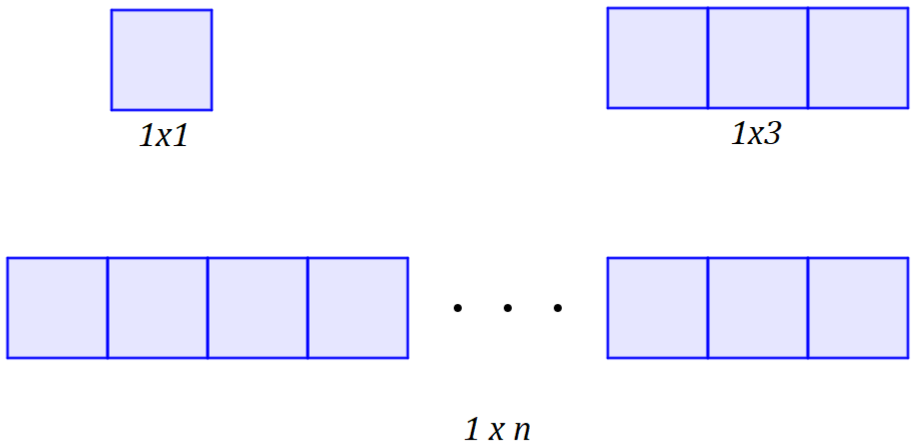


Figura 2.2: Tabuleiro 1×n e peças 1×1 e 1×3.

Teorema 2.5 *A quantidade de maneiras possíveis de cobrir o tabuleiro 1×n usando peças 1×1 e 1×3 constitui a sequência* (a_n) *tal que*

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 3 \end{cases}$$

Demonstração: Demonstra-se-á tal fato por meio de indução finita. Para isso, repare que, para $n = 1$ e $n = 2$ só é possível a cobertura com peças 1×1, logo $a_1 = a_2 = 1$. Quando $n = 3$, é possível cobrir o tabuleiro com três peças 1×1 ou uma peça 1×3, o que implica em $a_3 = 2$.

Assuma que até certo $n \in \mathbb{N}$, com $n > 3$, vale que o tabuleiro 1×n pode ser coberto de a_n maneiras, com $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$. Para cobrir um tabuleiro 1×(n+1), é possível começar com uma peça 1×1 ou com uma peça 1×3. Caso a primeira peça seja 1×1, o restante pode ser coberto de a_n maneiras, enquanto a cobertura iniciada pela peça 1×3 pode ser feita de a_{n-2}.

Dessa forma, tem-se que $a_{n+1} = a_n + a_{n-2}$ e, por indução, está provado que $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 3$.

■

Para apresentar tal fato aos estudante de Ensino Médio, o professor pode fazer uso da situação concreta da cobertura, estimulando seu raciocínio dedutivo para construção da sequência apresentada. Para aquele que busca mais resultados a respeito dessa sequência, indica-se a leitura de [18]. Para aplicação em sala, segue roteiro de atividade concreta.

Roteiro 2.1 *Roteiro - Teoremas 2.3 e 2.5*

Nessa atividade, o estudante construirá tanto a sequência de Fibonacci, quanto a sequência apresentada no Teorema 2.5 fazendo uso das peças 1×1, 1×2 e 1×3 para cobrir o tabuleiro tabuleiros de 1×1 a 1×5.

Parte 1 - Teorema 2.3

1) Fazendo uso das peças 1×1 e 1×2, faça todas as coberturas possíveis dos seguintes tabuleiros, registrando a quantidade de coberturas possíveis para cada um deles
a) 1×1;
b) 1×2;
c) 1×3;
d) 1×4.

2) Construa uma sequência crescente com os valores encontrados. É possível relacionar um termo a um ou mais termos anteriores, estabelecendo uma relação de recorrência?

3) Conjecture com seus colegas o total de maneiras possíveis de cobrir o tabuleiro 1×5 com as peças 1×1 e 1×2. Após o debate, faça as coberturas com as peças à disposição e confira com a quantia conjecturada.

4) Usando os itens anteriores, argumente a validade da afirmação: "Para todo $n \in \mathbb{N}$*, tal que* $n > 2$*, vale que* $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$*", onde* f_n *é o número de coberturas possíveis para o tabuleiro 1×*n*. Conhecer os resultados para* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *é suficiente para assegurar tal afirmação?*

5) Sob a hipótese da afirmativa anterior ser verdadeira, de quantas maneiras é possível cobrir um tabuleiro 1×(n+1)? Para tal, considere as duas possibilidades para a primeira peça da cobertura.

Parte 2 - Teorema 2.5

1) Agora, usando as peças 1×1 e 1×3, faça todas as coberturas possíveis dos tabuleiros disponíveis, 1×1 a 1×5, registrando a quantidade de coberturas possíveis para cada um deles.

2) Nessas condições, é possível determinar a quantidade de maneiras de cobrir um tabuleiro 1×n, para $n > 3$*?*

3) O que a situação apresentada na Parte 1 da situação apresentada na Parte 2? Qual impacto pode ser observado nas respectivas relações de recorrência?

4) Conjecture com seus colegas sobre o impacto da escolha das peças para a cobertura do tabuleiro.

5) Apresente um exemplo inédito de cobertura que confirme a conjectura anterior.

Com tal atividade o professor pode explorar as conjecturas levantadas pelos estudantes para introduzir o conceito de relação de recorrência, já apresentando a sequência de Fibonacci. Essa sugestão vai de encontro à valorização que a BNCC dá à Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), nesse caso, norteada pelo eixo estruturante de Investigação Científica.

Além disso, essa atividade também semeia uma estrutura embrionária de demonstração por indução finita. Assim, aquele que aplicá-la pode explorar esse vislumbre que a atividade propõe para apresentar aos estudantes esse importante método de demonstração. Sendo assim, a atividade pode ser aplicada tanto no Ensino Básico regular, quanto em um contexto de preparação olímpica.

A atividade também explora o potencial criativo do estudante ao pedir que ele elabore exemplos que confirmem sua tese. Apesar de tal prática não constituir um método válido de demonstração para a Matemática, é notório seu valor ao chamar o estudante para distanciar-se da tentativa e erro. Além disso, torna mais aprazível a iniciação científica do estudante ao habituá-lo à busca pela demonstração da validade de suas teses, possibilitando com que o estudante compreenda melhor os processos que constituem o método científico, principalmente o princípio da falseabilidade.

Capítulo 3

Os Números Poligonais e as Recorrências Lineares Não Homogêneas

Nesse capítulo, estudar-se-á sequências que se relacionam a construções geométricas. As mais conhecidas são as sequências dos números poligonais, que abrangem construções em $\mathbb{R}^2$. Além disso, esse capítulo apresenta ao leitor sequências relacionadas a construções em $\mathbb{R}^3$, aqui chamadas de números poliédricos. Este capítulo tem como base os textos [5] e [6].

3.1 Os Números Poligonais

Agora que já se conhece sobre as relações de recorrência lineares homogêneas, especialmente as de segunda ordem, é pertinente trabalhar um tipo de sequências comumente presente em questões de Olimpíadas de Matemática, as sequências dos números poligonais. Em análise etimológica, percebe-se que de alguma forma esses números estão relacionados aos polígonos, logo, nada mais natural que começar estudando aqueles que estão associados aos triângulos.

Deseja-se construir um triângulo cujo lado possui n "pontos"obedecendo a condição de que tais pontos devem estar dispostos de maneira equidistante sobre retas paralelas, como ilustra a imagem abaixo, que, para facilitar a visualização, apresenta um triângulo equilátero.

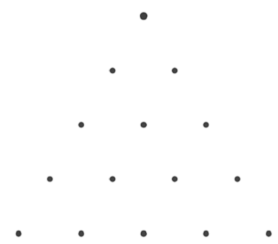


Figura 3.1: Construção associada a um Número Triangular.

Definição 3.1 *O n-ésimo Número Triangular, T_n, é dado pela quantidade de pontos necessários para construir um triângulo cujo lado tem n pontos, segundo o processo ilustrado acima.*

Dessa forma, é possível perceber que, para obter o número T_n a partir do número T_{n-1}, basta acrescentar uma linha de contendo n pontos ao triângulo associado a T_{n-1}. Assim, tem-se que

$$T_n = T_{n-1} + n$$

Essa relação é classificada como uma **relação de recorrência linear não homogênea**, como definiu o capítulo 2. Obter o termo geral de sequências que apresentam esse tipo de relação pode ser muito trabalhoso, mas abaixo mostrar-se-á que o processo de obtenção do termo geral de (T_n) é simples.

Teorema 3.1 *Seja T_n o n-ésimo Número Triangular, tem-se que*

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Demonstração: Para formar o triângulo associado a T_n, são necessárias n linhas, onde a primeira contém apenas um ponto e a *n-ésima* contém n pontos. Repare que a quantidade de pontos por linha da figura constitui uma progressão aritmética de razão 1.

Portanto, o total de pontos T_n é igual à soma dos n primeiros termos dessa progressão. Assim, tem-se que

$$T_n = \frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

■

A relação recém demonstrada pode ser observada quando escreve-se a sequência de forma explícita, na qual $(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...)$. Alguns resultados presentes em [13] serão trabalhados a seguir, daí a leitura fica sugerida para aqueles que desejam aprofundamento.

Os números triangulares são muito importantes para a construção dos demais números poligonais, assim como os polígonos regulares podem ser decompostos em triângulos. Mas, antes de partir para os números quadrados, pentagonais e hexagonais, vale salientar duas propriedades dos números triangulares.

Primeiramente, observe a imagem abaixo onde T_7 está representado e dividido em três regiões distintas, duas triangulares e uma quadrangular.

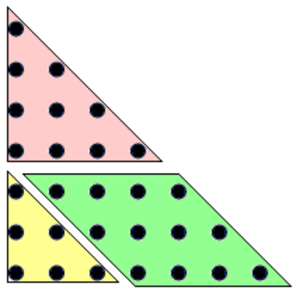


Figura 3.2: Construção associada a um número triangular seccionada.

Há uma região triangular correspondente a T_4, outra correspondente a T_3 e a região quadrangular que possui 12 pontos. Assim, é possível dizer que $T_7 = T_3 + T_4 + 3 \cdot 4$. Na imagem seguinte, está representado T_{12}, dividido em regiões triangulares correspondentes a T_3 e T_4.

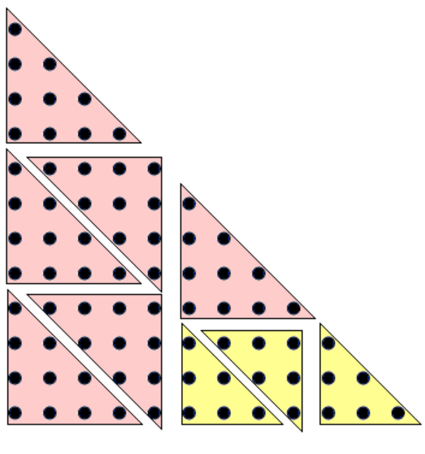


Figura 3.3: Construção associada a T_{12} seccionada em regiões associadas a T_3 e T_4.

Há seis regiões correspondentes a T_4 e três regiões correspondentes a T_3. Percebendo que $T_3 = 6$ e $T_2 = 3$, tem-se então que $T_{12} = T_3 \cdot T_4 + T_2 \cdot T_3$. Esses processos fornecem maneiras visuais de mostrar o seguinte resultado, o qual demonstrar-se-á algebricamente.

Teorema 3.2 *Dada a sequência (T_n) dos números triangulares, vale que*

$$\textbf{\textit{(i)}}\ T_{a+b} = T_a + T_b + a \cdot b$$

$$\textbf{\textit{(ii)}}\ T_{a \cdot b} = T_a \cdot T_b + T_{a-1} \cdot T_{b-1}$$

*Com a e b naturais e, especificamente para **(ii)**, $a, b > 1$.*

Demonstração: (i) Do termo geral dos números triangulares, sabe-se que

$$T_{a+b} = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$$

Desenvolvendo esse produto e rearranjando os termos, tem-se

$$T_{a+b} = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2} + \frac{2a \cdot b}{2}$$

Assim,

$$T_{a+b} = T_a + T_b + a \cdot b$$

(ii) Do termo geral dos números triangulares, sabe-se que

$$T_{a \cdot b} = \frac{a \cdot b(a \cdot b + 1)}{2}$$

Desenvolvendo esse produto e rearranjando os termos, tem-se

$$T_{a \cdot b} = 2 \cdot \frac{a^2b^2}{4} + 2 \cdot \frac{ab}{4} + \frac{a^2b}{4} - \frac{a^2b}{4} + \frac{ab^2}{4} - \frac{ab^2}{4}$$

Arranjando os termos de maneira conveniente e fatorando a expressão, tem-se

$$T_{a \cdot b} = \left(\frac{a^2+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b^2+b}{2}\right) + \left(\frac{a^2-a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b^2-b}{2}\right)$$

Dessa forma,

$$T_{a \cdot b} = T_a \cdot T_b + T_{a-1} \cdot T_{b-1}$$

■

Os números quadrados (Q_n), também conhecidos como quadrados perfeitos, já são amplamentes trabalhados durante a Educação Básica, tornando trivial obter que $Q_n = n^2$. De forma geral, é possível considerar números poligonais como se segue.

Definição 3.2 *Um número poligonal $P(s,n)$ é o n-ésimo número da sequência associada a um polígono de s lados.*

Na geometria Euclidiana, é comum relacionar polígonos mais complexos aos triângulos. Nos números poligonais não é diferente, uma vez que os números triangulares podem ser relacionados a $P(s,n), \forall s \geq 3$.

Usando dos conhecidos números quadrados, $(Q_n) = (1,4,9,16,25,36,49,64,...)$, pode-se perceber uma maneira de relacionar outros números poligonais com os números triangulares. A sequência está presente em [14] e vários resultados relacionados a ela. A imagem a seguir apresenta o quadrado associado a Q_7 dividido em três porções, sendo duas delas triângulares.

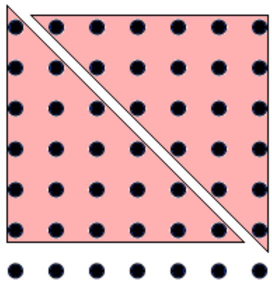


Figura 3.4: Construção associada a Q_7.

Vale salientar que as regiões triangulares são construídas de tal forma a não terem pontos em comum, além de que ambas representam T_6. Dessa forma, acaba surgindo a seguinte relação

$$Q_7 = 2 \cdot T_6 + 7.$$

Como $Q_7 = P(4,7)$, tem-se que

$$P(4,7) = (4-2) \cdot T_6 + 7.$$

Teorema 3.3 *Dado o número poligonal $P(s,n)$, tem-se que $P(s,n) = (s-2) \cdot T_{n-1} + n$.*

Demonstração: Todo polígono de s lados pode ser decomposto em $s-2$ triângulos sem área interna comum, traçando suas diagonais. Fazer essa divisão partindo dos vértices gera o problema de que há pontos partilhados por mais de um triângulo.

Por isso, dado um polígono de s lados, cada um contendo n pontos em sua construção, considere $s-2$ triângulos cujos lados contém $n-1$ pontos. Sabe-se que estes triângulos não contemplam todos os pontos de $P(s,n)$. É necessário descobrir quantos pontos faltam para completar o polígono associado a $P(s,n)$, em outros termos, procura-se o valor da diferença $P(s,n) - (s-2) \cdot T_{n-1}$.

Para tal, basta construir o polígono associado a $P(s,n)$ a partir de um de seus vértices usando os $s-2$ triângulos de lado $n-1$. Dessa maneira, a figura obtida é o polígono desejado, com exceção de um de seus lados, que possui n pontos. Portanto,

$$P(s,n) - (s-2)\cdot T_{n-1} = n,$$

isto é,

$$P(s,n) = (s-2)\cdot T_{n-1} + n.$$

■

A relação demonstrada acima reforça mais ainda a proximidade entre as relações de recorrência não homogêneas com os números figurados. Para polígonos de 5 ou mais lados, é crucial o uso dessa relação com os números triangulares para obter a relação de recorrência que os caracteriza.

A partir da relação $P(s,n) = (s-2)\cdot T_{n-1} + n$, lembrando que $T_{n+1} = T_n + n$, obtem-se as seguintes relações:

$$\textbf{(i)}\ P(s+1,n) - P(s,n) = T_{n-1}$$

$$\textbf{(ii)}\ P(s,n+1) - P(s,n) = (s-2)\cdot n + 1$$

Assim, **(i)** estabelece relação entre números poligonais associados a polígonos distintos que possuem a mesma quantidade de pontos em seus lados e **(ii)** estabelece relação entre números poligonais associados a um mesmo polígono, porém com lados de medidas distintas. Vale ressaltar que ambas relações são recursivas, sendo **(i)** em relação a s e **(ii)** em relação a n.

A relação **(ii)** está ilustrada abaixo para $s = 6$ e n de 1 a 4.

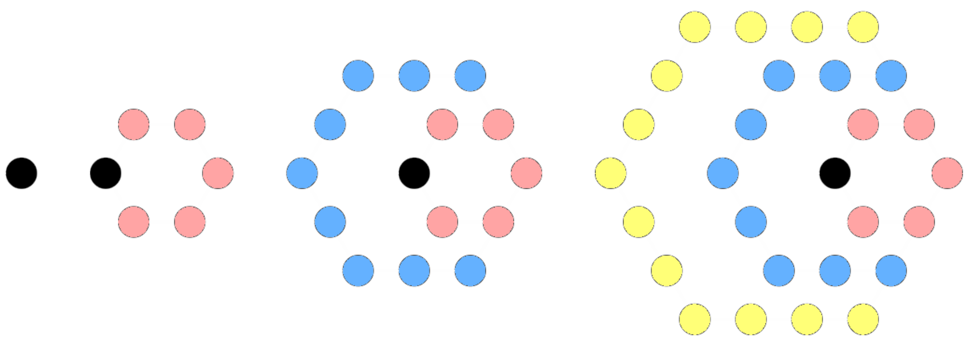


Figura 3.5: Construções associadas a $P(6,1)$, $P(6,2)$, $P(6,3)$ e $P(6,4)$ respectivamente.

A sequência $P(6,n) = (1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, ...)$ está presente em [16] juntamente de resultados sobre a mesma.

A relação entre polígonos e sequências, muito explorada nesse capítulo, passa invariavelmente por relações de recorrência não homogêneas. Daí, assim como no capítulo 2, surge a pergunta se o padrão se repetiria em uma situação análoga.

Nesse caso, surge o questionamento se, ao invés de trabalhar com polígonos, seria possível relacionar os poliedros de Platão com sequências. Usando processo semelhante, a próxima sessão explorará a construção das sequências de alguns números poliédricos.

3.2 Alguns Números Poliédricos

Nessa seção desse trabalho, tratar-se-á das sequências numéricas associadas aos tetraedros, cubos e octaedros. Além disso, a seção propõe uma atividade para que os estudantes conheçam tais sequências.

Definição 3.3 *Um número tetraédrico, t_n, corresponde ao número de pontos necessários para construção de um tetraedro regular. Tal construção é feita de maneira análoga à utilizada para obter os números poligonais ja apresentados. A sequência é dada por* $(t_n) = (1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ...)$, *como em [15].*

A imagem a seguir mostra a construção associada ao número t_4, ou seja, a construção de um tetraedro regular contendo quatro pontos em sua aresta.

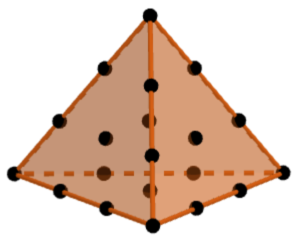


Figura 3.6: Construção associada a um número tetraédrico.

Sabendo que T_n é o n-ésimo número triangular, é possível observar que

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = 3 = T_2 \\ t_3 - t_2 = 6 = T_3 \\ t_4 - t_3 = 10 = T_4 \\ ... \end{cases},$$

Para observar melhor essas diferenças, a imagem abaixo salienta os diferentes números triangulares inseridos no número tetraédrico t_4.

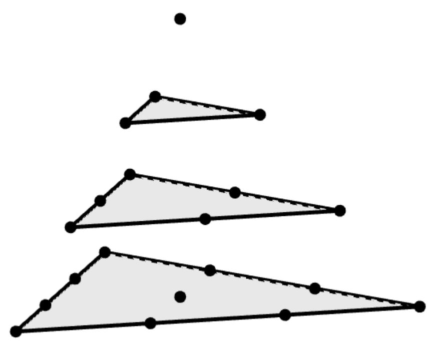


Figura 3.7: Construção associada a um número tetraédrico seccionada.

Observar tais diferenças é a estratégia que será adotada para obter o termo geral da sequência (t_n), presente no teorema a seguir.

Teorema 3.4 *Dada a sequência (t_n) dos números tetraédricos, tem-se que*

$$t_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}.$$

Demonstração: Pela construção dos números tetraédricos, tem-se que, para $n > 1$, $t_n - t_{n-1} = T_n$, em que T_n é o n-ésimo número triangular. Como $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, pode-se afirmar que

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\ t_3 - t_2 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} \\ t_4 - t_3 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2} \\ \ldots \\ t_n - t_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{cases}.$$

Somando todas as equações, sabe-se que

$$t_n - t_1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{i \cdot (i+1)}{2}.$$

Como $t_1 = T_1 = 1$, segue que

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot (i+1)}{2}.$$

Agora, por indução finita, demonstrar-se-á que $t_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$. Primeiramente, tem-se que $t_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. Assuma que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot (i+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}.$$

Por hipótese de indução, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i \cdot (i+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} + \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Como $\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{3\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$, conclui-se que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i \cdot (i+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{6}$$

Logo, está provado por indução finita que

$$t_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}.$$

■

Já os números cúbicos, $(c_n) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512...)$, vide [17], tem sua forma geral mais trivial, uma vez que sabe-se que $c_n = n^3$. Usar-se-á da imagem abaixo, que ilustra c_4, para mostrar uma propriedade desses números.

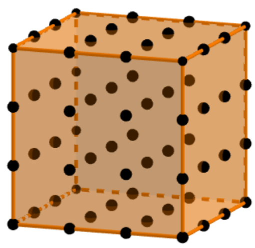


Figura 3.8: Construção associada a um número cúbico.

Pode-se pensar na construção da figura associada ao número c_4 como quatro planos paralelos e equidistantes, cada um contendo um quadrado que representa o número quadrado Q_4. Sob essa ótica, demonstrar-se-á uma relação envolvendo os números cúbicos e os números quadrados.

Teorema 3.5 *Dada a sequência* (c_n) *dos números cúbicos, tem-se que* $c_n = c_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$, *para* $n \geq 2$.

Demonstração: Primeiramente, para $n = 2$, algebricamente obtém-se $c_2 = 8 = c_1 + 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$, uma vez que $c_1 = 1$. Agora, considere a figura abaixo como representação da construção associada a c_n, com $n \geq 2$.

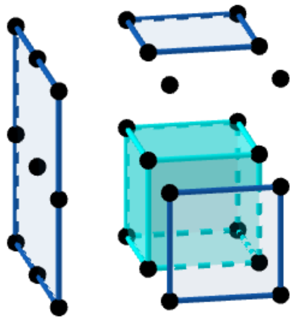


Figura 3.9: Construção associada a c_n seccionada.

Observa-se então que o cubo pode ser decomposto em um cubo de aresta uma unidade menor e três quadrados, sobrando alguns pontos. Dessa forma, é possível pensar a expressão como $c_n = c_{n-1} + Q_n + 2 \cdot Q_{n-1} + (n-1)$, sendo Q_n o n-ésimo número quadrado. Assim, tem-se que

$$c_n = c_{n-1} + n^2 + 2 \cdot (n-1)^2 + (n-1),$$

isto é,

$$c_n = c_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1.$$

■

A essa altura, já é do conhecimento do leitor as relações $t_n = t_{n-1} + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ e $c_n = c_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$. Ambas são relações de recorrência não homogêneas, seguindo a tendência já posta pelos números poligonais. A próxima, e última, sequência a ser estudada nesse capítulo é a dos números octaédricos, ficando a sugestão da construção das sequências associadas aos demais sólidos de Platão para futuros trabalhos.

Os números octaédricos, [19], constituem a sequência

$$(o_n) = (1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, ...),$$

sendo eles associados à construção, nos mesmos padrões apresentados, de octaedros. O teorema a seguir apresenta a relação recursiva relacionada a esses números.

Teorema 3.6 *Dada a sequência* (o_n) *dos números octaédricos, tem-se que* $o_n = o_{n-1} + 2n^2 - 2n + 1$*, para* $n \geq 2$.

Demonstração: A estratégia para demonstrar tal relação se assemelha muito àquela usada para demonstrar a relação de recorrência dos números cúbicos. Para iniciar a demonstração, deve-se verificar se tal relação vale para o_2.

Sabe-se que $o_1 = 1$ e $o_2 = 6$, com isso, tem-se

$$o_2 = 1 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 6$$

Dessa forma, assuma que as construções abaixo representam graficamente as construções associadas a o_{n-1} e o_n, respectivamente.

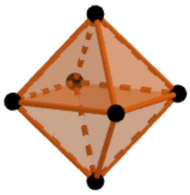


Figura 3.10: Construção associada a o_{n-1}.

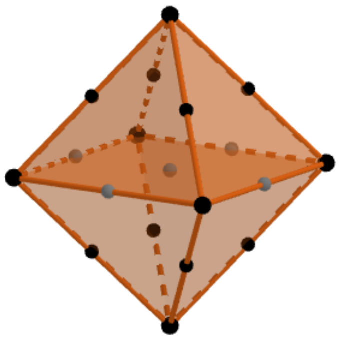


Figura 3.11: Construção associada a o_n.

Note que, pode-se seccionar a construção associada a o_n como ilustra a figura abaixo.

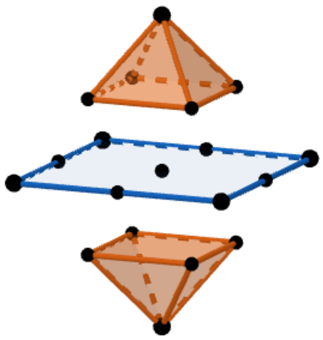


Figura 3.12: Construção associada a o_n seccionada.

Dessa forma, tem-se duas pirâmides de base quadrada, cuja aresta mede $n-1$ e um quadrado cujo lado mede n. A união de ambas pirâmides gera o sólido associado a o_{n-1}, porém com a dupla contagem do quadrado de lado $n-1$ que é base das pirâmides. Assim, a construção associada a o_n também corresponde à representação abaixo

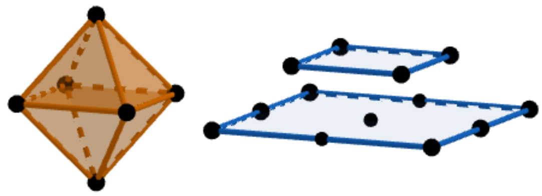


Figura 3.13: Construções associadas a o_{n-1}, Q_{n-1} e Q_n.

Por isso, sabendo que Q_n é o n-ésimo número quadrado, pode-se dizer que

$$o_n = o_{n-1} + Q_{n-1} + Q_n.$$

Como $Q_n = n^2$, fazendo as reduções necessárias obtém-se que

$$o_n = o_{n-1} + 2n^2 - 2n + 1.$$

■

Com esse resultado em mãos, é possível obter o termo geral dos números octaédricos, como propõe o corolário a seguir.

Corolário 3.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$, vale que o número octaédrico o_n é dado por*

$$o_n = \frac{n \cdot (2n^2+1)}{3}.$$

Demonstração: Do teorema anterior, sabe-se que

$$\begin{cases} o_2 - o_1 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \\ o_3 - o_2 = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 \\ o_4 - o_3 = 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 \\ \ldots \\ o_n - o_{n-1} = 2n^2 - 2n + 1 \end{cases}.$$

Então, somando todas as equações, tem-se que

$$o_n - o_1 = \sum_{i=2}^{n} (2i^2 - 2i + 1).$$

Como $o_1 = 1$, tem-se que

$$o_n = 1 + 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} i^2 - 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} i + n - 1.$$

Sabe-se que

(i) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Dessa forma, a expressão anterior pode ser escrita como

$$o_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} - 2 - n \cdot (n+1) + 2 + n.$$

Reduzindo a expressão, tem-se então

$$o_n = \frac{n \cdot (2n^2 + 1)}{3}.$$

■

Postos os resultados até aqui apresentados, vê-se a variedade de relações que podem ser exploradas em sala de aula no processo de aprendizagem dos estudantes. Portanto, na seção a seguir, este trabalho apresentará uma sugestão de atividade para apresentação das relações de recorrência linear não homogêneas e dos números poligonais.

3.3 Atividade: Números Poligonais e algumas de suas propriedades

Nessa seção, apresentar-se-á uma atividade, para aplicação em sala de aula do Ensino Básico, cujo objetivo é evidenciar relações e propriedades já demonstradas nesse trabalho, estimulando sua capacidade de construção e visualização. A atividade explora as definições de número triangular, número quadrado e constrói o termo geral dos triangulares a partir da sua relação com os quadrados.

Para a atividade, é necessário que cada grupo de alunos possua acesso a um geoplano, seja ele físico ou virtual. A atividade consiste de propor aos estudantes, divididos em duplas ou trios, construções no geoplano que os levem a perceber as relações $P(4, n) = n^2$, $P(4, n) = 2 \cdot T_{n-1} + n$ e $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, nessa ordem.

Roteiro 3.1 *Roteiro - Visualizando os números triangulares e os números quadrados*

Para iniciar a atividade, ponha cada grupo de estudantes em contato com seu geoplano e exemplifique construções de triângulos e quadrados para que eles se familiarizem. Após a familiarização e a tirada de dúvidas, prossiga para a atividade.

Parte 1 - Os números quadrados

1) Construa concomitantemente no geoplano quadrados cujos lados contém 2, 3, 4 e 5 pontos do geoplano. Quantos pontos contém a região interna de cada quadrado?

2) Quantos pontos conteria um quadrado cujo lado possui um ponto do geoplano?

3) Conjecture com seus colegas se há uma relação que dê a quantidade de pontos do quadrado sabendo a quantidade de pontos do seu lado.

4) Usando os itens anteriores, argumente a validade da afirmação: "Para todo n natural, o quadrado de lado $n+1$ possui $2n+1$ pontos a mais que o quadrado cujo lado mede n."

Chamamos de números quadrados à sequência crescente composta pela quantidade de pontos contidos na região interna de um quadrado cujo lado contém n pontos, sendo n natural.

Parte 2 - Os números triangulares

Os números triangulares, por sua vez, são a sequência crescente composta pela quantidade de pontos contidos na região interna de um triângulo cujo lado contém n pontos, sendo n natural.

Dos nossos conhecimentos de Geometria, sabemos que um quadrado pode ser dividido em dois triângulos retângulos traçando uma de suas diagonais. Usando dessa ideia, faça o que se pede.

1) Contrua um quadrado cujos lados contém 3 pontos do geoplano.

2) Dentro desse quadrado, contrua dois triângulos retângulos cujos catetos possuem 2 pontos do geoplano.

3) Sobraram pontos do quadrado fora desses triângulos? Se sim, quantos?

4) Repita esse processo construindo um quadrado de lado 4 com triângulos cujos catetos contém 3 pontos. A note a quantidade de pontos do quadrado que ficaram fora dos triângulos.

5) Faça o mesmo com um quadrado de lado 5 e triângulos cujos catetos contém 4 pontos.

6) Baseado nos passos anteriores, discuta com os colegas e tente relacionar algebricamente o número quadrado cuja figura possui $n + 1$ *pontos em cada lado e o número triangular cuja figura possui* n *pontos em cada lado.*

7) Usando os resultados obtidos na parte 1 da atividade, encontre uma fórmula que relacione o total de pontos T_n *contidos em um triângulo com o número de pontos* n *contido no seu lado.*

Essa atividade, assim como a proposta no capítulo anterior, visa estimular o estudante e praticar a investigação científica, um dos eixos estruturantes da BNCC. Os passos da atividade conduzem o estudante a visulizar, analisar, conjecturar e generalizar uma relação a ele exposta.

Seja no Ensino Fundamental ou Médio, trabalhar esse tipo de processo pode estimular a autonomia do estudante na construção de suas aprendizagens. Vale ressaltar que a atividade pode ser aplicada no Ensino Fundamental, uma vez a construção do termo geral dos números triangulares não depende da soma de termos de uma progressão aritmética.

Como anteriormente exposto, a preparação para Olimpíadas de Matemática pode ser um acréscimo significante para a aquisição de autonomia do estudante. Daí, com os principais temas de sequências numéricas presentes em questões da OBMEP dos últimos anos já trabalhados, o trabalho voltar-se-á à resolução de questões. O capítulo 4 apresenta ao leitor a maneira como os objetos de conhecimento relacionados às sequências numéricas são cobrados dos estudantes.

Capítulo 4

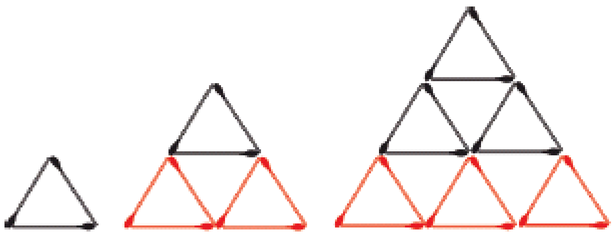
Questões sobre Sequências Numéricas

O capítulo trará questões de provas de Olimpíadas de Matemática e suas resoluções, onde temáticas a cerca de sequências numéricas são abordadas. Tais questões farão uso das definições, teoremas e propriedades trabalhados até aqui.

Questão 4.1 *(OBMEP - 2012 - Fase 1 - Nível 2 - Questão 09)*

9. Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10



Essa questão trata da sequência dos números triangulares, onde o número de triângulos menores que compõe a figura em cada passo constitui os termos da sequência notável. Assim, a sequência do número de palitos é dada por $a_n = 3 \cdot T_n$ onde (T_n) é a sequência dos números triangulares. Dessa forma, tem-se que

$$a_n = 135$$

$$3 \cdot T_n = 135$$

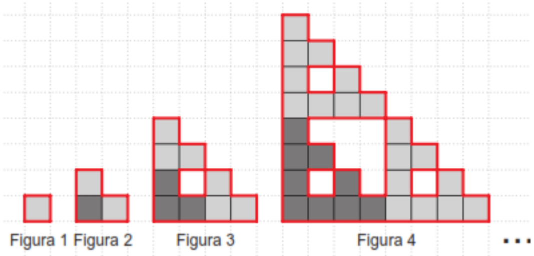
$$\frac{n(n+1)}{2} = 45$$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = 9$.

Questão 4.2 *(OBMEP - 2014 - Fase 1 - Nível 1 - Questão 19)*

19. Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?

A) 88 cm
B) 164 cm
C) 172 cm
D) 488 cm
E) 492 cm



Se a sequência (a_n) denota a quantidade de segmentos que compõe o contorno da Figura n, nota-se que:

$$a_1 = 4, a_2 = 3 \cdot a_1 - 4 = 8, a_3 = 3 \cdot a_2 - 4 = 20$$

De modo geral,

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 4$$

Sendo assim, tem-se

$$a_5 = 3 \cdot a_4 - 4 = 3 \cdot 56 - 4 = 164$$

$$a_6 = 3 \cdot a_5 - 4 = 3 \cdot 164 - 4 = 488$$

Se o contorno a Figura 1 mede $4cm$, cada segmento mede $1cm$. Assim, a medida do contorno da Figura 6 coincide com a_6, logo, mede $488cm$.

Questão 4.3 *(OBMEP - 2015 - Fase 1 - Nível 3 - Questão 11)*

11. Uma sequência de números é definida por $a_1 = 3$ e

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2$$

para todo número natural $n \geq 1$. Por exemplo: $a_2 = a_1 + a_1^2 = 3 + 3^2 = 12$. Qual é o algarismo das unidades de a_{2015}?

A) 2
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Primeiramente, nota-se que a relação de recorrência apresentada não é linear. Logo, faz-se necessário um passo inicial de inspeção sobre a sequência apresentada e seus termos.

Como o comando busca apenas o algarismo as unidades do termo a_{2015}, é pertinente perceber que, em uma adição de dois números naturais, o algarismo das unidades da soma é igual à soma dos algarismos das unidades de cada parcela.

Dessa forma, é suficiente analisar a sequência (u_n) dos algarismos as unidades dos termos correpondentes em (a_n), como está feito abaixo.

$$a_1 = 3 \Rightarrow u_1 = 3$$

$$a_2 = 12 \Rightarrow u_1 = 2$$

$$a_3 = 12 + 12^2 = 156 \Rightarrow u_3 = 6 \equiv 2 + 2^2 \pmod{10}$$

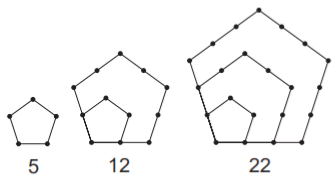
$$a_4 = 156 + 156^2 \Rightarrow u_4 = 2 \equiv 6 + 6^2 \pmod{10}$$

Assim, percebe-se que para n par, tem-se $u_n = 2$ e, para n ímpar e $n > 1$, tem-se que $u_n = 6$. De tal forma, o algarismo das unidades de a_{2015} é igual a 6.

Questão 4.4 *(OBMEP - 2015 - Fase 1 - Nível 3 - Questão 14)*

14. Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

A) 656
B) 695
C) 715
D) 756
E) 769



A questão aborda de maneira direta a sequência $P(5, n)$ dos números pentagonais, caso especial das sequências de números figurados. Sabe-se que

$$P(5, n) = P(5, n - 1) + (5 - 2) \cdot n + 1$$

Como a questão informa que $P_{20} = 651$, facilmente obtém-se que $P_{21} = 651 + 64 = 715$.

Questão 4.5 *(OBMEP - 2017 - Fase 1 - Nível 2 - Questão 04)*

4. Na sequência 1, 5, 4, –1, –5, ... cada termo, a partir do segundo, é igual à soma de seus dois vizinhos; por exemplo: $5 = 1 + 4$, $4 = 5 + (-1)$ e $-1 = 4 + (-5)$. Qual é a soma dos 1000 primeiros termos dessa sequência?

A) 0
B) 1
C) 4
D) 9
E) 10

Perceba que a sequência apresentada pode ser definida da seguinte maneira

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 5 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \end{cases}$$

Assim, a soma de 6 termos consecutivos é nula. Com os 1000 primeiros termos, é possível formar 166 grupos de 6 termos, sobrando os termos $a_{997} = 1$, $a_{998} = 5$, $a_{999} = 4$ e $a_{1000} = -1$. Logo, a soma dos 1000 primeiros termos vale 9.

Questão 4.6 *(OBMEP - 2015 - Fase 1 - Nível 3 - Questão 03)*

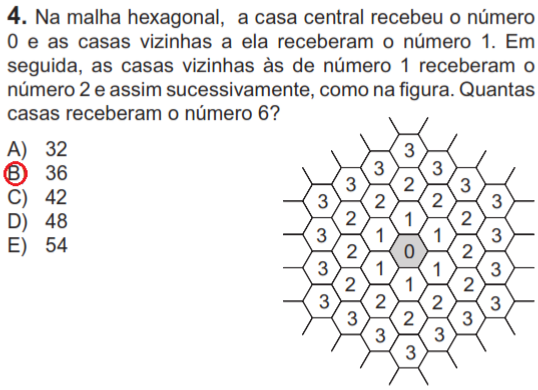
3. Os números inteiros positivos foram escritos em sequência, como indicado na figura. Observe que na primeira linha foi escrito o número 1 e que nas seguintes há dois números a mais do que na linha anterior. Em qual linha foi escrito o número 2015?

A) 43
B) 44
C) 45
D) 46
E) 47

linha 1 ⇨ 1
linha 2 ⇨ 2 3 4
linha 3 ⇨ 5 6 7 8 9
linha 4 ⇨ 10 11 12 13 14 15 16
linha 5 ⇨ 17 18 19 20 21 22 23 24 25
⋮

Note que a quantidade de números por linha forma a sequência dos números ímpares positivos. Como a soma dos n primeiros números ímpares positivos é igual a n^2, então os últimos números de cada linha formam a sequência dos quadrados perfeitos. Assim, basta perceber que $44^2 < 2015 < 45^2$, o que garante que 2015 está na linha 45.

Questão 4.7 *(OBMEP - 2015 - Fase 1 - Nível 2 - Questão 04)*



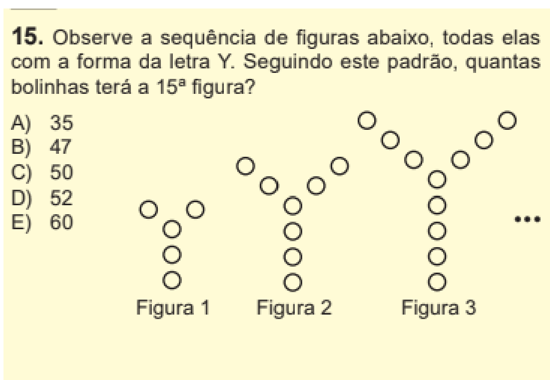
4. Na malha hexagonal, a casa central recebeu o número 0 e as casas vizinhas a ela receberam o número 1. Em seguida, as casas vizinhas às de número 1 receberam o número 2 e assim sucessivamente, como na figura. Quantas casas receberam o número 6?

A) 32
B) 36
C) 42
D) 48
E) 54

Os números estão dispostos em níveis, do centro para fora da imagem. O número zero está no nível 1, o número um está no nível 2 e assim segue. Repare que os hexágonos menores que possuem o mesmo número formam um maior e o nível em questão diz respeito à quantidade de hexágonos menores que compõe o lado do hexágono daquele nível.

Sendo assim, os hexágonos contendo o numeral 6 estão no nível 7, compondo um grande hexágono cujo lado contém 7 hexágonos menores. Como cada um dos vértices pertence a dois lados, esses estão em dupla contagem. Dessa maneira, o total de hexágonos contendo o número seis é $6 \cdot 7 - 7 = 6 \cdot 6 = 36$.

Questão 4.8 *(OBMEP - 2019 - Fase 1 - Nível 1 - Questão 15)*



15. Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

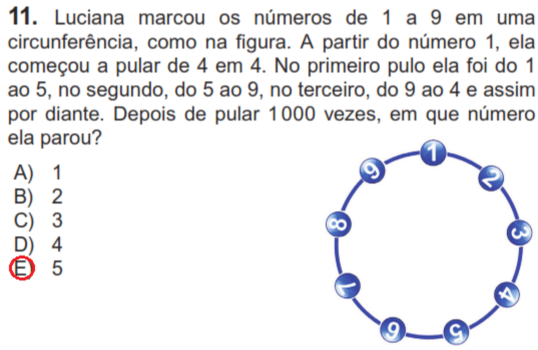
A) 35
B) 47
C) 50
D) 52
E) 60

Note que cada figura nova da sequência é obtida adicionando uma nova bolinha a cada extremidade da figura anterior. Se a quantidade de bolinhas é dada pela sequência (a_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, então

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Porém, tal relação recursiva define uma progressão aritmética de primeira ordem, cuja razão vale 3. Daí, $a_{15} = 5 + 14 \cdot 3 \Rightarrow a_{15} = 47$.

Questão 4.9 *(OBMEP - 2016 - Fase 1 - Nível 2 - Questão 11)*



11. Luciana marcou os números de 1 a 9 em uma circunferência, como na figura. A partir do número 1, ela começou a pular de 4 em 4. No primeiro pulo ela foi do 1 ao 5, no segundo, do 5 ao 9, no terceiro, do 9 ao 4 e assim por diante. Depois de pular 1 000 vezes, em que número ela parou?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Repare que a movimentação descrita é cíclica e o ciclo completo é dado por

$$1 \mapsto 5 \mapsto 9 \mapsto 4 \mapsto 8 \mapsto 3 \mapsto 7 \mapsto 2 \mapsto 6 \mapsto 1$$

Para um ciclo completo, são executados 9 pulos, como denominado na questão. Assim, para saber o resultado após 1000 pulos, primeiramente deve-se resolver a equação $x \equiv 1000 \pmod 9), 0 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{N}$.

Como 999 é múltiplo de 9, então $x = 1$. Assim, foram executados 111 ciclos completos e mais um pulo, o que garante que a posição final é a 5.

4.1 Análise das questões sobre Sequências Numéricas

Assim, percebe-se a tendência que as provas tem de abordar sequências numéricas com comportamento recursivo, muito bem exemplificado pelos números figurados e pelas progressões aritméticas. Resultados a respeito dessas sequências foram importantes para a maioria das questões presentes na sessão anterior.

Pela importância das relações de recorrência para a prova, é crucial que se tenha domínio sobre os resultados principais das sequências recursivas mais famosas. A soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem, a modelagem de uma progressão aritmética de segunda ordem, o termo geral dos números figurados, os resultados a respeito da sequência de Fibonacci, entre outros.

Apesar do direcionamento dado neste capítulo, é aconselhável que o leitor busque fontes complementares para um trabalho robusto e completo. Para aqueles que compreendem a língua inglesa, se sugere então a leitura dos trabalhos referenciados em [11], [18] e [?].

Considerações Finais

Neste trabalho, buscou-se discutir sobre a importância da teoria dos números ainda na Educação Básica e exibir resultados diversos a respeito das sequências numéricas a fim de melhor qualificar a preparação de estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Esta dissertação, que tem como público alvo tanto professores quanto estudantes, intentou também sugerir maneiras de estabelecer uma ponte entre o estudante e objetos de conhecimento outrora presentes apenas no Ensino Superior. Seja na demonstração de resultados pouco explorados nos anos escolares, ou por meio de atividades concretas sugeridas, o texto apresenta ao leitor a Aritmética dos Inteiros.

Ao tratar sobre a BNCC, o trabalho visa evidenciar a importância da liberdade dada pelo documento para que, principalmente no Ensino Médio, haja mudança no do *status quo* curricular do país. Tal debate, muito comum dentre profissionais da educação, é trazido aqui para o estudante leitor desse trabalho. Como protagonista do processo de ensino-aprendizagem, o estudante inteirar-se sobre tais mudanças é de suma importância para que a proposta da BNCC seja alcançada.

Continuando essa perseguição à expansão da autonomia do estudante, este texto reclina-se sobre as sequências numéricas para auxiliar tanto o professor no seu papel de mediador, quanto o estudante em suas empreitadas autodidatas. Os resultados foram apresentados da maneira mais didática possível para que o estudante possa aproveitase dessa dissertação como material de apoio para o estudo. Pensando no professor da Educação Básica que vier a ler este documento, propõe-se atividades para aplicação em sala de aula que põe o estudante frente à investigação da validade de suas conjecturas e apresenta a ele um protótipo do que é a demonstração por Indução Finita. Assim, o trabalho objetiva mostrar maneiras de aproximar o estudante do que é o processo científico de fato, indo de encontro aos eixos estruturantes da Base Nacional Comum Curricular.

Portanto, esta dissertação essencialmente é um convite para que professores instiguem seus estudantes a uma postura de maior protagonismo e um chamado aos estudantes que inclinam-se para as Ciências Exatas para que tomem seu posto como futuro da ciência brasileira.

Referências Bibliográficas

[1] BENJAMIN, A. T., QUINN, J. J., *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, Mathematical Association of America, 2003

[2] BOROCHOVICIUS, E.; TORTELLA, J. C. B., Aprendizagem Baseada em Problemas: um método de ensino-aprendizagem e suas práticas educativas, Revista Ensaios, Rio de Janeiro, v.22, n.83, p. 263-294, Abril/Junho, 2014, Disponível em: https://www.scielo.br/j/ensaio/a/QQXPb5SbP54VJtpmvThLBTc

[3] BRASIL, Base Nacional Comum Curricular, Brasília: MEC, 2017, Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/, (acessado em julho de 2020)

[4] BRASIL, Base Nacional Comum Curricular Leitura Crítica, Rio de Janeiro: SBM, 2017, Disponível em: https://bityli.com/ddFAn, (acessado em julho de 2020)

[5] HEMMERLY, H., *Polyhedral numbers.* The Mathematics Teacher 66, no. 4, 356 – 362 (1973)

[6] HERVEY, M. A., LITWILLER, B. H., *Polygonal Numbers: A Study of Patterns.* The Arithmetic Teacher 17, no. 1 33 – 38 (1970)

[7] LIMA, E. L. *Curso de análise*, v.1, 14.ed., Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

[8] MAIER, R. R. *Teoria dos Números*, Texto de Aula, Brasília, Universidade de Brasília, 2005.

[9] MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E., *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 2.ed., Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[10] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C., *Análise Combinatória*, Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

[11] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000045. https://oeis.org/A000045.

[12] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000073. https://oeis.org/A000073.

[13] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000217. https://oeis.org/A000217.

[14] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000290. https://oeis.org/A000290.

[15] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000292. https://oeis.org/A000292.

[16] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000384. https://oeis.org/A000384.

[17] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000578. https://oeis.org/A000578.

[18] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000930. https://oeis.org/A000930.

[19] SLOANE, N. J. A. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A005900. https://oeis.org/A005900.

Apêndice A

Peças necessárias para a realização do *Roteiro 2.1*: