



**Universidade Federal do Rio de Janeiro
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT**

Adriel Pereira do Nascimento

**Trabalhando Problemas de Otimização Determinística e Estocástica no Ensino
Médio**

Rio de Janeiro
2024

Adriel Pereira do Nascimento

**TRABALHANDO PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA E
ESTOCÁSTICA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao corpo docente do programa PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

2024

CIP - Catalogação na Publicação

N244t Nascimento, Adriel Pereira do
Trabalhando Problemas de Otimização Determinística
e Estocástica no Ensino Médio / Adriel Pereira do
Nascimento. -- Rio de Janeiro, 2024.
74 f.

Orientador: Nei Carlos dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional,
2024.

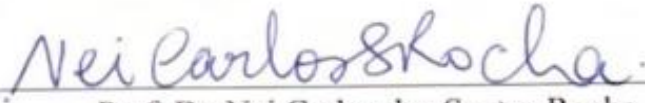
1. Problemas de otimização. I. Santos, Nei Carlos
dos, orient. II. Título.

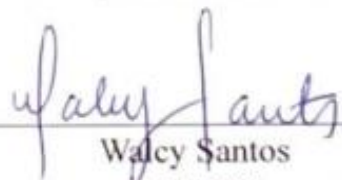
Adriel Pereira do Nascimento

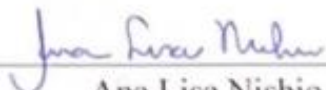
**TRABALHANDO PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA E
ESTOCÁSTICA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao corpo docente do programa PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 26 / 08 / 2024


Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
(Orientador/Presidente da banca)
IM/UFRJ


Walcy Santos
IM/UFRJ


Ana Lisa Nishio
IM/UFRJ

*Dedico este trabalho aos meus pais,
minha esposa e meu irmão, que sempre
me apoiaram e incentivaram em todas as
circunstâncias.*

AGRADECIMENTOS

Rendo graças a Deus por tudo, pois sem Jesus Cristo nada sou. Não há como começar este agradecimento sem exaltar o nome de Jesus, aquele que me deu forças e sustentou em todos os momentos de minha caminhada. Por isso, a ele rendo Graças.

Aos meus pais, que mesmo sem uma formação acadêmica, sempre compreenderam a importância do conhecimento, me incentivaram e proporcionaram as condições mínimas para que eu tivesse condições de trilhar o caminho do conhecimento. Sou eternamente grato e admirador de vocês.

Ao meu irmão, uma pessoa espetacular, que me apoiou nos momentos de incerteza. Você é uma referência, o melhor amigo que Deus poderia me dar.

À minha esposa, que esteve ao meu lado em cada etapa, suportando comigo os longos dias de estudo e pesquisa. Sempre compreensiva e incentivadora, você foi um dos pilares fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, pelos grupos de estudos, conversas e risadas. Vocês ajudaram a caminhada ser mais leve, tranquila e divertida.

A todos os professores do PROFMAT, meu sincero agradecimento. Em especial, ao meu orientador, Nei Rocha, pelas orientações, paciência e suporte sempre que precisei.

RESUMO

O estudo das médias, muitas vezes iniciado ainda no Ensino Fundamental, pode e deve ser abordado com um olhar mais lógico e cognitivo, em vez de se limitar à aplicação de fórmulas genéricas. Partindo desse raciocínio, o presente trabalho tem como objetivo discutir diferentes tipos de médias, sempre tomando como ponto de partida a necessidade de cada situação, para então generalizar e formalizar o conceito, permitindo seu uso de forma mais ampla. Além disso, é realizada uma breve discussão sobre a desigualdade das médias, método de Lagrange, método dos mínimos quadrados e esperança matemática aplicados a problemas de otimização que podem ser estudados por alunos do Ensino Médio, evidenciando, assim, a importância da matemática na resolução de problemas práticos.

Palavras-chave: Médias, Desigualdade, Problemas de otimização.

Abstract

The study of averages, often introduced in elementary school, can and should be approached with a more logical and cognitive perspective, rather than being limited to the application of generic formulas. Based on this reasoning, the present work aims to discuss different types of averages, always considering the specific needs of each situation, in order to then generalize and formalize the concept, allowing its broader use. Additionally, a brief discussion is provided on the inequality of averages, Lagrange's method, the least squares method, and mathematical expectation applied to optimization problems that can be studied by high school students, thus highlighting the importance of mathematics in solving practical problems.

Keywords: Averages, Inequality, Optimization problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação da Média Aritmética	19
Figura 2: Representação da Média Geométrica	20
Figura 3: Representação da Média Harmônica	21
Figura 4: Representação da Média Quadrática	22
Figura 5: Representação geral das médias	23
Figura 6: Caixa de base quadrada	26
Figura 7: Cilindro inscrito em uma esfera	30
Figura 8: Paralelepípedo	36
Figura 9: Retângulo inscrito em um semicírculo	38
Figura 10: Tabela que relaciona grandezas A e B	41
Figura 11: Diagrama que relaciona as grandezas A e B	41
Figura 12: Diagrama que relaciona as grandezas A e B com a reta obtida pelo método dos mínimos quadrados	42
Figura 13: Tabela que relaciona Dose(mg) e Pressão Arterial(mm Hg)	46
Figura 14: Diagrama que relaciona Dose(mg) e Pressão Arterial(mm Hg)	46
Figura 15: Tabela com valores para utilização do Método dos Mínimos Quadrados	48
Figura 16: Diagrama de dispersão dos pares ordenados	50
Figura 17: Tabela com valores do exercício 5.2	52
Figura 18: Diagrama de dispersão dos valores do exercício 5.2	52
Figura 19: Gráfico da função de ajuste $y = 0,61x$	54
Figura 20: Tabela que relaciona o número de contratos assinados e sua respectiva probabilidade.....	56
Figura 21: Tabela que relaciona o número de contratos assinados, comissão e a probabilidade de assinatura do contrato.....	56

Figura 22: Tabela que relaciona o número de notebooks produzidos e a probabilidade de produção	57
Figura 23: Tabela que relaciona o número de flores vendidas e a probabilidade de venda	57
Figura 24: Tabela que relaciona o lucro para venda de 1 flor	58
Figura 25: Tabela que relaciona o lucro para venda de 2 flores	58
Figura 26: Tabela que relaciona o lucro para venda de 3 flores	58

SUMÁRIO

Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de ilustrações	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. ESTUDO DAS MÉDIAS (ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA, HARMÔNICA, QUADRÁTICA, PONDERADA)	3
2.1 Conceito de Média	3
2.2 Média Aritmética Simples	3
2.3 Média Aritmética Ponderada	5
2.4 Média Geométrica	7
2.5 Média Harmônica	8
2.6 Média Quadrática	10
3. DESIGUALDADE DAS MÉDIAS	12
3.1 Teorema – Desigualdade das médias	12
3.2 Representação geométrica para a desigualdade das médias	18
3.2.1 Representação da média Aritmética	19
3.2.2 Representação da média Geométrica	19
3.2.3 Representação da média Harmônica	20
3.2.4 Representação da Média Quadrática	22
3.2.5 Conclusão	23

4. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA E MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	25
4.1 Multiplicadores de Lagrange	25
4.2 Problemas de Otimização	26
5. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E A MÉDIA QUADRÁTICA	41
5.1 Fundamentação matemática do Método dos Mínimos Quadrados	42
5.2 Método dos Mínimos Quadrados – Uma possível abordagem no Ensino Médio	48
6. ESPERANÇA MATEMÁTICA OU MÉDIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA	55
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
8. BIBLIOGRAFIA	62

1. INTRODUÇÃO

O assunto das médias, pode ser estudado já no Ensino Fundamental, mas é no Ensino Médio que este assunto ganha mais destaque e notoriedade. Os grandes vestibulares como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), também cobram frequentemente este assunto em suas provas. Entretanto, ainda existem livros e professores que insistem em trabalhar, não somente este, mas diversos assuntos no contexto escolar baseado apenas em fórmulas. Frequentemente, os alunos demonstram uma predileção por fórmulas ou estratégias simplificadas e acabam por não compreender de maneira profunda os conceitos matemáticos ali presente. Esta preferência por atalhos pode, a curto prazo, trazer resultados satisfatório, entretanto prejudica o desenvolvimento de habilidades mais sofisticadas. Uma abordagem focada apenas em fórmulas limita a interlocução entre os diferentes tipos de médias, restringindo o potencial dos alunos de desenvolverem raciocínio crítico e a habilidade de resolver problemas complexos que demandam interpretação de dados e compreensão das condições em que cada tipo de média melhor se aplica.

As médias trazem consigo a ideia de substituição de todos os valores da lista, por um único valor que, estando atrelado a uma certa operação, possa substituir todos os elementos desta lista sem distorcer estes valores.

Desta forma, neste trabalho o objetivo é trazer as fórmulas apenas como generalização de conceitos já entendidos e trabalhados através de exemplos, apenas para trazer celeridade na resolução de problemas.

No capítulo 2, o conceito geral de média é apresentado e é trabalhado também as médias mais usuais, sempre trazendo aplicações a cada conceito. Ainda neste capítulo são tratados médias um pouco menos trabalhadas no ensino médio, como é o caso das médias harmônica e quadrática.

Já no capítulo 3, é apresentada a desigualdade das médias, ferramenta que servirá como base para a resolução de problemas envolvendo máximos e mínimos. A demonstração de tal ferramenta surge neste capítulo como um diálogo com professores e alunos que já tenham estudo algumas técnicas de demonstração. Neste

capítulo, também é realizada a demonstração da desigualdade das médias via geometria quando se tem 2 termos.

O capítulo 4 apresenta um resumo do Método de Lagrange, tema estudado em alguns cursos de nível superior, e que serve como ferramenta para a resolução de problemas relacionados a máximos e mínimos. A partir daí, são propostos exercícios que são resolvidos via Método de Lagrange, um assunto de nível superior, e via Desigualdade das Médias, um assunto de nível médio.

Já o capítulo 5 traz um breve relato sobre o método dos mínimos quadrados, com uma possível sugestão de aplicação deste conceito ao ensino médio.

Finalizando, o capítulo 6 apresenta uma breve relação entre a esperança matemática e a média ponderada, mostrando sua aplicação a resolução de alguns exercícios.

2. ESTUDO DAS MÉDIAS (ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA, HARMÔNICA, QUADRÁTICA, PONDERADA)

Este capítulo tem por objetivo discorrer e discutir o ensino e estudo das médias, visto que estas desempenham um amplo papel em problemas de diversos campos da ciência como Física, Geometria e Estatística, apenas para citar alguns. Além disso, as médias desempenham um papel fundamental nas chamadas medidas-resumo de dados, algo hoje essencial na era dos *Big Data*, com a evolução da chamada Ciência de Dados.

2.1 Conceito de Média

Antes de adentrar na especificidade de algumas médias, podemos destacar uma conceituação geral que vai nortear todos os outros conceitos específicos.

Definição 2.1 Seja $x_1, x_2, \dots, x_n$ uma sequência finita de números reais e $*$ uma operação sobre os elementos desta lista. A média dos elementos desta lista com respeito a operação $*$, é um número M , que possa substituir (em outras palavras, representar) todos os elementos dessa lista no que diz respeito a operação $*$, ou seja,

$$x_1 * x_2 * \dots * x_n = \underbrace{M * M * \dots * M}_{n \text{ termos}}$$

No geral, as médias estão associadas a uma mesma operação $*$ sobre os elementos desta lista. Nos casos em que iremos trabalhar, a média é sempre um valor intermediário entre o menor e o maior valor da sequência. Isto é,

$$\min\{x_i\} \leq M \leq \max\{x_i\}, \text{ onde } 1 \leq i \leq n$$

Se o menor valor e o maior valor forem iguais, então as médias M será igual a estes números.

2.2 Média Aritmética Simples

Dentre as médias que iremos trabalhar, a média aritmética é a medida de tendência central mais conhecida e utilizada. Neste tipo de média a operação * utilizada entre os elementos é a soma. Ela é calculada pela soma de todos os valores de um conjunto de dados e dividindo este resultado pela quantidade de elementos que se tem no conjunto. Esta média proporciona uma visão ampla do valor central dos dados, sendo especialmente útil quando os elementos estão distribuídos de forma simétrica ou aproximadamente simétrica.

Considere a seguinte situação:

Exemplo 2.2.1 Em um carro há cinco passageiros com as seguintes idades: 15 anos, 18 anos, 32 anos, 26 anos e 19 anos. Qual a idade média dos passageiros deste veículo?

Solução: Desejamos obter um valor M tal que, se a idade dos ocupantes do veículo fosse sempre igual a M , então a idade de todos os passageiros seria a mesma. A idade de todos os passageiros do veículo é de $15 + 18 + 32 + 26 + 19 = 110$. Se todos os passageiros tivessem a mesma idade M , então a idade de todos os passageiros do veículo seria $5M$. Portanto, $5M = 15 + 18 + 32 + 26 + 19$ e

$$M = \frac{15 + 18 + 32 + 26 + 19}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

A média desejada era a média aritmética.

Resposta: 22 anos.

Definição 2.2 A média aritmética simples de um conjunto de n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ tem sua gênese, portanto, na expressão

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \underbrace{M_a + M_a + M_a}_{n \text{ termos}} = n \cdot M_a$$

Assim, sua definição, dada quase sempre de forma direta em livros didáticos, é

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

O teorema a seguir nos garante que existe pelo menos um valor no conjunto de dados que seja superior ou igual à média aritmética.

Teorema 2.2.1 Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é igual a M_a , pelo menos um dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é maior que ou igual a M_a .

Demonstração: suponha que $x_1 < M_a, x_2 < M_a, \dots, x_n < M_a$, então teríamos,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < n \cdot M_a$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < M_a$$

$$M_a < M_a$$

O que é absurdo. Logo, pelo menos um dado é superior ou igual à média aritmética.

Vejamos um problema de existência que pode ser resolvido a partir do teorema anterior:

Exemplo 2.2.2 Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, há sempre pelo menos 5 pessoas que nasceram no mesmo mês.

Solução: Se em um ano temos 12 meses, então o número médio de pessoas que fazem aniversário por mês é $\frac{50}{12} \cong 4,1$. Logo, em algum mês o número de nascidos nesse mês (que é um número inteiro) é maior ou igual a 4,1, ou seja, é maior ou igual a 5.

A média ponderada a seguir é uma variante da média aritmética quando existe reprodutibilidade de valores no conjunto de dados, ou quando a determinados valores são imputados pesos. Além disso, como veremos posteriormente, no contexto das probabilidades, há uma relação estreita entre o conceito de média ponderada e o conceito de Esperança Matemática, conceito esse importante na tomada de decisão em ambiente de incerteza.

2.3 Média Aritmética Ponderada

Neste caso a operação $*$ utilizada entre os elementos da lista continua sendo a soma, entretanto há elementos repetidos. Essa repetição de elementos é comumente chamada de peso, isto é, quando se tem elementos $x_1 = x_2 = x_3$, por exemplo, dizemos que o elemento x_1 tem peso 3, pois há 3 elementos iguais. Logo, se temos uma lista com elementos repetidos, podemos simplesmente agrupar os fatores iguais e multiplicar pela frequência de cada um deles. Valores com maior peso na lista têm uma influência maior na média final, ao passo que valores com menor

peso terão uma influência menor. Em resumo, a média aritmética ponderada é uma maneira de calcular uma média que reflete a importância relativa de cada elemento, permitindo que sejam tomadas decisões mais precisas e justas com base nos pesos atribuídos.

Observemos o caso a seguir:

Exemplo 2.3.1 Em uma escola a média anual de um aluno é calculada a partir das 4 notas bimestrais, com peso 1 para o 1° bimestre, 2 para o 2° bimestre, 2 para o 3° bimestre e 3 para o 4° bimestre. Qual a média anual do aluno que tirou notas 8 no 1° bimestre, 5 no 2° bimestre, 7 no 3° bimestre e 6 no 4° bimestre?

Solução: Considerando o peso de cada nota, temos a seguinte distribuição:

$$8 - 5 - 5 - 7 - 7 - 6 - 6 - 6$$

Perceba que cada elemento aparece na lista a quantidade de vezes respectivamente relativa ao seu peso.

Então, desejamos obter um valor M tal que, se a nota bimestral do aluno fosse sempre igual a M , então a nota anual seria a mesma. A pontuação geral deste aluno durante o ano foi de $8 + 5 + 5 + 7 + 7 + 6 + 6 + 6 = 50$. Se em todos os bimestres o aluno tivesse obtido um anota M , então a sua pontuação anual seria $8M$. logo, $8M = 8 + 5 + 5 + 7 + 7 + 6 + 6 + 6$ e

$$M = \frac{8 + 5 + 5 + 7 + 7 + 6 + 6 + 6}{8} = \frac{8 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6}{8}$$

$$M = \frac{50}{8} = 6,25$$

A média desejada é dada pela média ponderada.

Resposta: 6,25.

A definição a seguir expressa a gênese da formulação da média aritmética ponderada.

Definição 2.3 A média aritmética ponderada de um conjunto de n números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com pesos $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é o número M_p , tal que:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = M_p p_1 + M_p p_2 + \dots + M_p p_n$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = M_p (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

$$M_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

A próxima média a ser contemplada é de ampla aplicação na Matemática Financeira, pois está relacionada à taxa média de juros no regime de juros compostos, além de outras aplicações relevantes da Geometria.

2.4 Média Geométrica

Quando se tem n números positivos em uma lista, e a operação $*$ entre eles for de multiplicação, então temos a média geométrica. A média geométrica é calculada multiplicando todos os valores e, em seguida, tira-se a raiz n -ésima do produto, onde n é a quantidade de elementos da lista. Algumas situações em que a média geométrica é aplicada incluem o cálculo de taxas de crescimento ou taxas médias de retorno ao longo do tempo, em que os fatores multiplicativos são mais relevantes do que os valores absolutos.

Por exemplo, se tivermos uma série de valores que representam o crescimento percentual anual de um investimento nos últimos cinco anos, a média geométrica nos fornecerá uma taxa média de crescimento anual que leva em conta os efeitos cumulativos dos aumentos ou diminuições ao longo do período.

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.4.1 Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foi de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?

Solução: Suponha que a produção anterior a este aumento tenha sido x . Após os 2 aumentos sucessivos, teremos:

$$x \cdot 1,21 \cdot 1,08 = 1,3068 \cdot x$$

Ou seja, o aumento bimestral foi de 30,68%

O objetivo do problema é encontrar uma taxa média i , tal que, se em todos os meses a taxa de aumento fosse igual a i , o aumento bimestral seria o mesmo. Isto é,

$$x \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = x \cdot (1 + i)^2$$

$$x \cdot (1 + i)^2 = 1,3068 \cdot x$$

$$(1 + i) = \sqrt[2]{1,3068}$$

$$(1 + i) \cong 1,1432$$

$$i = 1,1432 - 1 = 0,1432 = 14,32\%$$

A média desejada era a média geométrica.

Resposta: 14,32%.

Definição 2.4 A média geométrica de n números reais positivos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o número M_g , tal que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \underbrace{M_g \cdot M_g \cdot \dots \cdot M_g}_{n \text{ termos}} = (M_g)^n$$

$$\text{Logo, } M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Observação: É fundamental ressaltar aos alunos que a média geométrica só faz sentido ser aplicada em valores positivos. Embora o produto de números negativos possa resultar em um valor positivo, o resultado não tem uma interpretação válida como média. Considere, por exemplo, dois valores -2 e -8 , cujo produto é 16 , e cuja raiz quadrada está bem definida como 4 . Esse valor não possui qualquer significado de média, pois não se encontra entre -2 e -8 . Isso se aplica a qualquer outra situação, inclusive quando o produto de números negativos, em um conjunto de cardinalidade ímpar, é negativo, pois, embora a raiz ímpar de um número negativo também está bem definida, ela não tem um valor que possa ser interpretado como média.

Vejamos agora a média harmônica, que se presta a várias aplicações da Física.

2.5 Média Harmônica

A média harmônica é a média em que a operação * utilizada será a soma dos inversos de números reais não nulos (emulação da série harmônica da Matemática). A média harmônica é útil quando se quer calcular uma média que leve em consideração a relação inversamente proporcional entre os valores. Por exemplo, se tivermos uma série de velocidades e queremos determinar a velocidade média real em todo o percurso, a média harmônica nos fornecerá um valor que considera o tempo total percorrido em relação à soma dos inversos das velocidades. Em resumo, a média harmônica é uma medida importante para contextos onde relações inversamente proporcionais precisam ser consideradas no cálculo de uma média.

Consideremos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.5.1 Um veículo vai da cidade A para cidade B com uma velocidade média de 50km/h, e volta pelo mesmo caminho, da cidade B para cidade A com velocidade média de 60km/h. Qual a velocidade média em todo percurso?

Solução: Seja d a distância entre as cidades A e B, t_1 o tempo de ida e t_2 o tempo de volta. O tempo de ida será, $t_1 = \frac{d}{50}$. O tempo de volta será $t_2 = \frac{d}{60}$. Precisamos encontrar uma velocidade v_m , tal que, se a velocidade fosse a mesma tanto na ida quanto na volta gastaria o mesmo tempo para conclusão do trajeto.

$$v_m = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{50} + \frac{d}{60}}$$

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{50} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{110}{3000}}$$

$$v_m = \frac{6000}{110} = 54,54 \text{ km/h}$$

A média desejada era a média harmônica.

Resposta: 54,54 km/h.

A definição a seguir ilumina a gênese da formulação da média harmônica.

Definição 2.5 A média harmônica dos n números reais positivos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é número M_h , tal que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{M_h} + \frac{1}{M_h} + \dots + \frac{1}{M_h}}_{n \text{ termos}} = \frac{n}{M_h}$$

$$\text{Logo, } M_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

A última média a ser contemplada neste trabalho possui uma relevância extrema na estimação de funções que se ajustem a conjuntos de pares ordenados e na avaliação da variabilidade de dados na Estatística.

2.6 Média Quadrática

A média quadrática é a média em que a operação * utilizada é a soma dos quadrados, ou seja, que calcula a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos valores da lista.

A média quadrática é uma forma de calcular uma média que dá mais peso a valores extremos em relação à média aritmética, já que o quadrado de valores maiores tende a contribuir mais significativamente para o resultado final. Isso a torna uma medida mais sensível a picos ou valores discrepantes no conjunto de dados.

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.6.1 Calcule a média quadrática entre os números 1 e 7.

Solução: O objetivo do problema é encontrar um número M , tal que se elevarmos M ao quadrado multiplicarmos pela quantidade de elementos que temos, encontraremos o resultado de $1^2 + 7^2$, ou seja

$$\begin{aligned} 2 \cdot M^2 &= 1^2 + 7^2 \\ M^2 &= \frac{1^2 + 7^2}{2} = \frac{1 + 49}{2} \\ M &= \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Resposta: 5.

A definição a seguir nos informa a origem da formulação da média quadrática.

Definição 2.6 A média quadrática de uma lista de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o número M_q , tal que,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \underbrace{M_q^2 + M_q^2 + \cdots + M_q^2}_{n \text{ termos}} = n \cdot M_q^2$$

$$M_q^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}$$

$$\text{Portanto, } M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Postergaremos a ilustração da utilidade da Média Quadrática quando do tratamento do Método de Mínimos Quadrados. Cabe ressaltar que essa média desempenha também um papel fundamental na Estatística, pois dela emana o conceito de variância e desvio padrão de variáveis aleatórias.

3. DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

No capítulo anterior discorreremos sobre as médias Aritmética Simples (M_a), Ponderada (M_p), Geométrica (M_g), Harmônica (M_h) e Quadrática (M_q). Nesta seção faremos uma comparação entre elas com o objetivo trabalharmos com a desigualdade fundamental das médias.

3.1 Teorema – Desigualdade das médias

Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma lista de números reais positivos e sejam (M_h) média harmônica, (M_g) média geométrica, (M_a) média aritmética, (M_q) média quadrática. Então temos as seguintes desigualdades:

$$M_h \leq M_g \leq M_a \leq M_q$$

Além disso, a igualdade em qualquer ponto acima só ocorre, se e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$; neste caso teremos a igualdade de todas as médias.

Demonstração 3.1 Vamos demonstrar as desigualdades acima por etapas.

Primeiro vamos provar que $M_g \leq M_a$, ou seja, dada uma lista de números reais positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$, tem-se que:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Antes, porém, precisamos do auxílio do lema a seguir.

Lema 3.1.1 Seja m um número natural. Suponha que M_a e M_g , sejam respectivamente a média aritmética e média geométrica de uma lista de números reais positivos $y_1, y_2, \dots, y_m$, a qual vamos supor já devidamente ordenada, isto é, $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m$.

Ao substituírmos o menor elemento desta lista, y_1 , por M_g e o maior elemento, y_m , por $\frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}$, tem-se:

- A média aritmética dos elementos da nova lista é menor do que ou igual a M_a .

- E só será igual, quando todos os números $y_1, y_2, \dots, y_m$ forem iguais.
- A média geométrica dos números da nova lista permanece igual à M_g .

Demonstração 3.1.1 Vamos chamar de L a lista de números reais positivos $y_1, y_2, \dots, y_m$. Desta forma, as médias aritmética, M_a , e geométrica, M_g , dos números da lista L , são:

$$M_a = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m} \text{ e } M_g = \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_m}, \quad (i)$$

Chamaremos de L_1 a lista resultante ao substituirmos y_1 por M_g e y_m por $\frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}$.

Sendo assim, temos:

$$L_1 : M_g, y_2, y_3, \dots, y_{m-1}, \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}.$$

Portanto, sejam M_{a1} e M_{g1} respectivamente as médias aritmética e geométrica da lista L_1 . Desta forma:

$$M_{a1} = \frac{M_g + y_2 + y_3 + \dots + y_{m-1} + \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}}{m} \quad (ii)$$

$$M_{g1} = \sqrt[m]{M_g \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}} \quad (iii)$$

Ao analisar M_{g1} ,

$$M_{g1} = \sqrt[m]{M_g \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}}$$

$$M_{g1} = \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot y_m}$$

Por (i) concluímos que $M_{g1} = M_g$. Uma parte do nosso Lema 3.1.1 já está provada.

Supomos devidamente que $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m$. Então:

$$y_1 \leq y_1$$

$$y_1 \leq y_2$$

$$\vdots$$

$$y_1 \leq y_{m-1}$$

$$y_1 \leq y_m$$

Assim,

$$y_1^m \leq y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot y_m$$

Como a lista é formada por números reais positivos, então:

$$y_1 \leq \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot y_m} = M_g \quad (iv)$$

Ainda temos:

$$y_1 \leq y_m$$

$$y_2 \leq y_m$$

$$\vdots$$

$$y_{m-1} \leq y_m$$

$$y_m \leq y_m$$

Então:

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot y_m \leq y_m^m$$

Como a lista é formada por números reais positivos, então

$$M_g = \sqrt[m]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{m-1} \cdot y_m} \leq y_m \quad (v)$$

De (iv) e (v) concluímos que $y_1 \leq M_g \leq y_m$ e daí podemos concluir que:

$$y_1 - M_g \leq 0 \text{ e também que } 1 - \frac{y_m}{M_g} \leq 0, \text{ portanto } (y_1 - M_g) \cdot \left(1 - \frac{y_m}{M_g}\right) \geq 0$$

Analisando $(y_1 - M_g) \cdot \left(1 - \frac{y_m}{M_g}\right) \geq 0$, temos:

$$y_1 - \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g} - M_g + y_m \geq 0$$

$$y_1 + y_m \geq M_g + \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}$$

$$y_1 + (y_2 + \dots + y_{m-1}) + y_m \geq M_g + (y_2 + \dots + y_{m-1}) + \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}$$

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1} + y_m}{m} \geq \frac{M_g + (y_2 + \dots + y_{m-1}) + \frac{y_1 \cdot y_m}{M_g}}{m}$$

Portanto, de (i) e (ii) podemos concluir que $M_a \geq M_{a1}$, isto é, a média aritmética dos números da nova lista é menor que a média aritmética dos números da lista original.

Para terminar, perceba que se $M_a = M_{a1}$, então $(y_1 - M_g) \cdot \left(1 - \frac{y_m}{M_g}\right) = 0$ e, portanto, $(y_1 - M_g) = 0$ e $y_1 = M_g$ ou $\left(1 - \frac{y_m}{M_g}\right) = 0$ e $y_m = M_g$, mas isto só ocorre quando todos os números da lista L forem iguais.

Observe que se algum elemento y_i da lista L for diferente de y_1 (ou de y_m), então teremos $y_1 < y_i$ (ou $y_1 < y_m$), logo $y_1^m < y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_m$ (ou $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_m < y_m^m$, ou seja, $y_1 < M_g$ (ou $M_g < y_m$). Assim, teríamos $y_1 \neq M_g$ (ou $y_m \neq M_g$). Com isso, concluímos a prova completa do lema 3.1.1 e podemos avançar para a demonstração da desigualdade das médias. Como dito, faremos uma demonstração por parte.

Para todo número natural n , se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Seja L uma lista de números reais positivos $L: x_1, x_2, \dots, x_n$ e sejam M_a e M_g , respectivamente as médias aritmética e geométrica da lista L . Ao substituir o menor elemento desta lista L , x_1 por M_g e o maior elemento x_n por $\frac{x_1 \cdot x_n}{M_g}$, surge então, uma nova lista, digamos L_1 que terá média aritmética M_{a1} e média geométrica M_{g1} . Pelo lema 3.1.1 essas medias são tais que:

- $M_{a1} \leq M_a$ e a igualdade entre as médias só ocorre quando todos os elementos da lista L forem iguais.
- $M_{g1} \leq M_g$.

Considerando ainda a lista L_1 , sejam o menor e o maior elemento respectivamente, y_1 e z_1 . Vamos substituir o menor elemento y_1 por M_g e o maior elemento z_1 por $\frac{y_1 \cdot z_1}{M_g}$, surge então, uma nova lista, digamos L_2 que terá média aritmética M_{a2} e média geométrica M_{g2} . Pelo lema 3.1.1 essas médias são tais que:

- $M_{a2} \leq M_{a1}$ e a igualdade entre as médias só ocorre quando todos os elementos da lista L_1 forem iguais.
- $M_{g2} \leq M_{g1}$.

Observe que na lista L_2 , tem se pelo menos dois elementos iguais a M_g .

Considerando agora a lista L_2 , sejam o menor e o maior elemento respectivamente, y_2 e z_2 . Vamos substituir o menor elemento y_2 por M_g e o maior elemento z_2 por $\frac{y_2 \cdot z_2}{M_g}$, surge então, uma nova lista, digamos L_3 que terá média aritmética M_{a3} e média geométrica M_{g3} . Pelo lema 3.1.1 essas médias são tais que:

- $M_{a3} \leq M_{a2}$ e a igualdade entre as médias só ocorre quando todos os elementos da lista L_2 forem iguais.
- $M_{g3} \leq M_{g2}$.

Observe que na lista L_3 , tem se pelo menos três elementos iguais a M_g .

Seguindo este padrão por n vezes, teremos então uma lista L_* , com n números iguais a M_g . Esta lista terá média aritmética M_{a*} e média geométrica M_{g*} . Aplicando sucessivamente o lema 3.1.1 essas médias são tais que:

- $M_{a*} \leq \dots \leq M_{a3} \leq M_{a2} \leq M_{a1} \leq M_a \quad (vi)$
- $M_{g*} = \dots = M_{g3} = M_{g2} = M_{g1} = M_g$

Entretanto, na lista L_* todos os n elementos são iguais a M_g . Portanto,

$$M_{a*} = \frac{\overbrace{M_g + M_g + \dots + M_g}^{n \text{ vezes}}}{n} = \frac{n \cdot M_g}{n} = M_g \quad (vii)$$

Por (vi) e (vii) temos que $M_g = M_{a*} \leq M_a$, ou seja, $M_g \leq M_a$.

Perceba que só ocorre $M_g = M_a$, se em cada uma das n etapas a média aritmética se mantiver inalterada. E isso só poderia acontecer se todas as listas tivessem elementos iguais.

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, geram duas consequências diretas. São elas:

- Se a soma de n números positivos for uma constante, então o produto destes n números será máximo quando eles forem iguais.
- Se o produto de n números positivos for uma constante, então a soma destes n números será mínima quando eles forem iguais.

Agora vamos a segunda etapa da demonstração da desigualdade das médias e vamos provar que $M_g \geq M_h$, isto é, se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais positivos, então:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

A igualdade só se dá quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Considerando a lista, $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ e usando a desigualdade $M_a \geq M_g$, temos:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}}$$

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}$$

Logo,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (viii)$$

Observe em (viii) que a igualdade $M_g = M_a$ só ocorre quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

A terceira etapa da demonstração consiste em provar que $M_a \geq M_h$

Sendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos, então:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Já foi provado que $M_a \geq M_g$ e $M_g \geq M_h$, logo, por transitividade, $M_a \geq M_h$, isto é:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Para finalizar, vamos provar que $M_q \geq M_a$. Sendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos, então:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Para isso, observemos que

$$(x_1 - M_a)^2 + (x_2 - M_a)^2 + \cdots + (x_n - M_a)^2 \geq 0$$

$$x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot M_a + M_a^2 + x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot M_a + M_a^2 + \cdots + x_n^2 - 2 \cdot x_n \cdot M_a + M_a^2 \geq 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2 \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot M_a + n \cdot M_a^2 \geq 0$$

Sabemos por definição que $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = M_a \therefore x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \cdot M_a$

Portanto,

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - 2 \cdot n \cdot M_a \cdot M_a + n \cdot M_a^2 \geq 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - n \cdot M_a^2 \geq 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq n \cdot M_a^2$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq M_a^2$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq M_a$$

Assim, podemos concluir que $M_q \geq M_a$. A igualdade só ocorre quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = M_a$.

3.2 Representação geométrica para a desigualdade das médias

Tendo demonstrado a desigualdade das médias no caso geral com n termos positivos, vamos agora focar na situação com apenas dois elementos. Esse caso específico proporciona uma interessante conexão entre a teoria dos números e a geometria.

Para isto, faremos uso de conceitos e construções geométricas, representando as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática.

3.2.1 Representação da média Aritmética

Consideremos dois segmentos distintos x_1 e x_2 . Vamos construir uma circunferência, de centro c , tal que o diâmetro desta circunferência seja igual a $x_1 + x_2$.

Assim, o diâmetro D da circunferência será:

$$D = x_1 + x_2$$

Mas o diâmetro é o dobro do raio R ,

$$D = 2 \cdot R = x_1 + x_2$$

Logo, $R = \frac{x_1 + x_2}{2}$ que é a média aritmética entre x_1 e x_2 .

Portanto, o raio da circunferência é a média aritmética M_a .

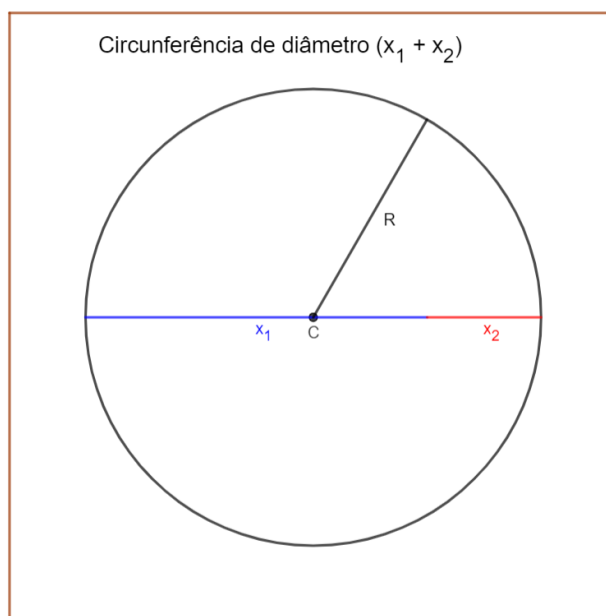


Figura 1: Representação da Média Aritmética

3.2.2 Representação da média Geométrica

Tomando como base a circunferência da figura 1.1, traçaremos um segmento H perpendicular ao diâmetro, passando pela interseção dos segmentos x_1 e x_2 . Esse segmento H irá definir um ponto na circunferência, de modo que esse ponto formará, junto com as extremidades do diâmetro, um triângulo retângulo. Vale notar que este

triângulo será retângulo, pois o diâmetro é um de seus lados; desta forma, podemos aplicar as relações métricas próprias do triângulo retângulo.

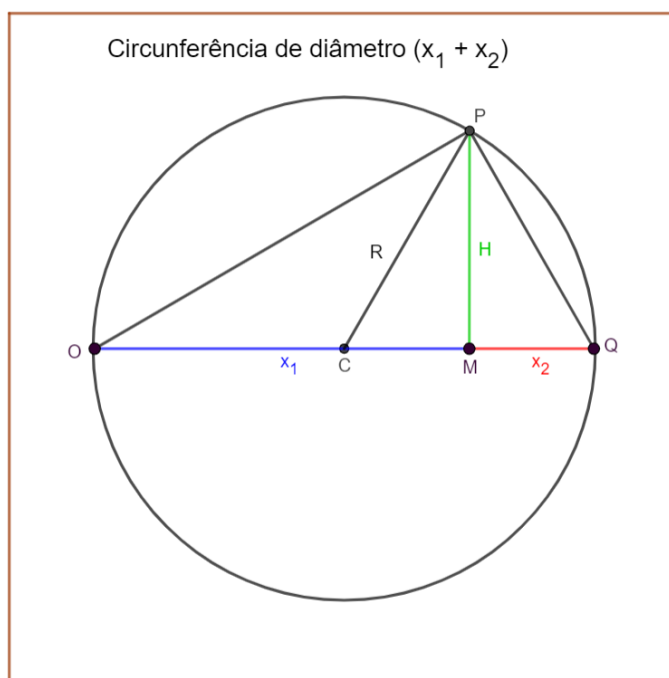


Figura 2: Representação da Média Geométrica

A relação que iremos usar será entre a altura H e a projeção dos catetos deste triângulo. Da relação métrica, temos:

$$H^2 = x_1 \cdot x_2$$

$$H = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Portanto, H é a média geométrica M_g entre x_1 e x_2 , isto é, H é a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo.

3.2.3 Representação da média Harmônica

Tomando por base a figura 1 e o triângulo construído na figura 2 observe que o triângulo CPM é retângulo em M. Neste triângulo traçaremos a altura relativa à hipotenusa CP e chamaremos este segmento de e .

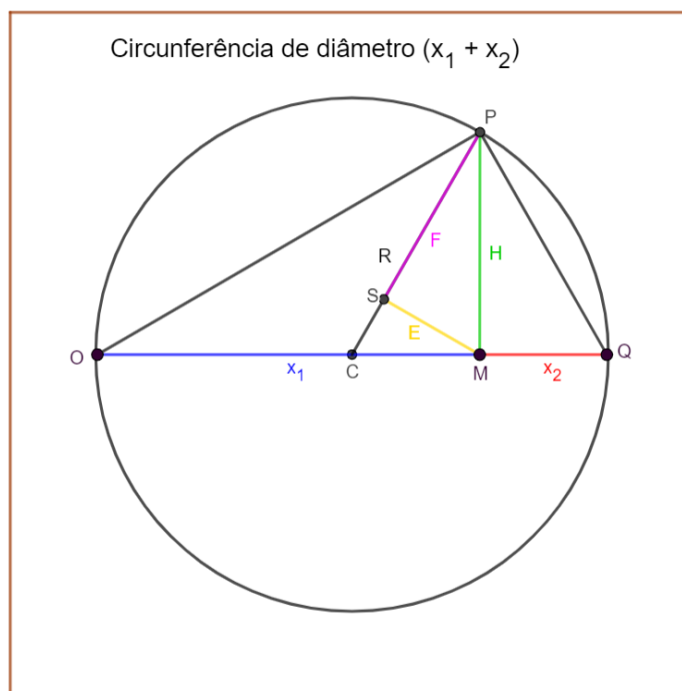


Figura 3: Representação da Média Harmônica

Perceba que os triângulos PMC e PSM são semelhantes pelo caso ângulo – ângulo. Feito isto, podemos montar a seguinte proporção entre os lados dos referidos triângulos.

$$\frac{F}{H} = \frac{H}{R}$$

$$F = \frac{H^2}{R}$$

Da figura 2 concluímos que:

$$H^2 = x_1 \cdot x_2.$$

Da figura 1 concluímos que:

$$R = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Logo,

$$F = \frac{x_1 \cdot x_2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2}{1/x_1 + 1/x_2}.$$

Portanto, F é a média harmônica M_h entre x_1 e x_2 . Isto é, F é o cateto do triângulo retângulo cuja hipotenusa coincide com a altura H da figura 3.

3.2.4 Representação da Média Quadrática

Tomando por base a figura 1, traçaremos o raio R , perpendicular ao diâmetro. Construiremos também o segmento G de extremidades na interseção entre R e a circunferência e a outra extremidade na interseção entre x_1 e x_2 .

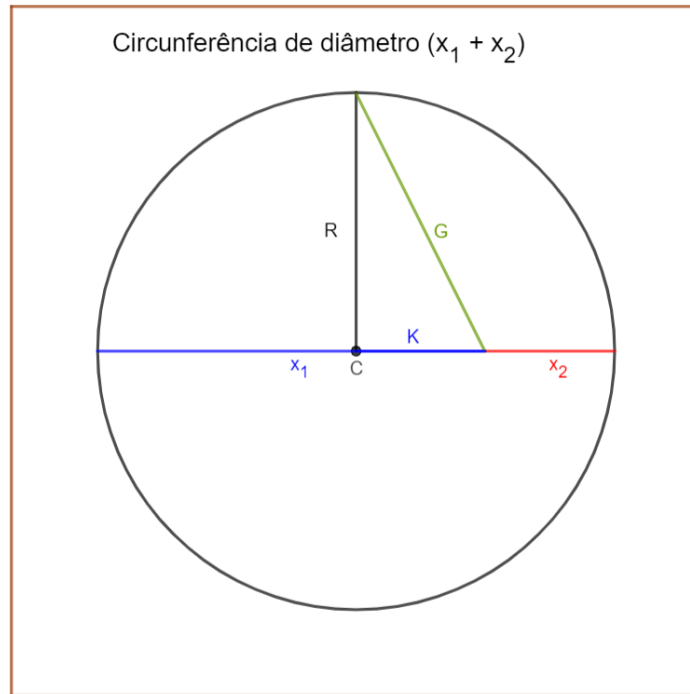


Figura 4: Representação da Média Quadrática

Perceba que G é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos R e K . Aplicando teorema de Pitágoras neste triângulo, temos:

$$G^2 = R^2 + K^2$$

Da figura 1, temos que $R = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Entretanto, $K = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$

Logo,

$$\begin{aligned} G^2 &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 \\ G^2 &= \frac{x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2}{4} \\ G^2 &= \frac{2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)}{4} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \end{aligned}$$

$$G = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

Portanto, G é a média quadrática entre x_1 e x_2 , isto é, G é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos R e K .

3.2.5 Conclusão

Tomando por base as construções que fizemos foi possível chegar as seguintes conclusões:

- R é a média aritmética M_a .
- H é a média geométrica M_g .
- F é a média harmônica M_h .
- G é a média quadrática M_q .

Veja a imagem abaixo.

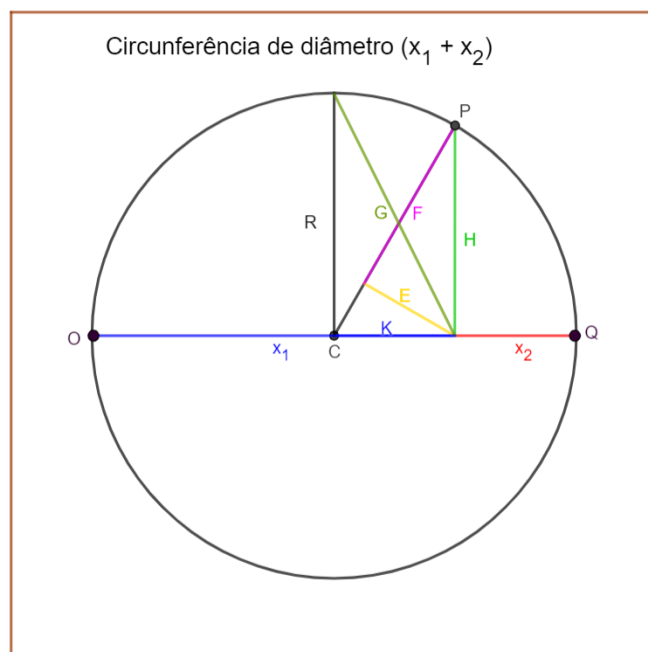


Figura 5: Representação Geral das Médias

A desigualdade das médias visto no capítulo anterior pode ser observada de forma geométrica, observe:

- $R > H$ então $M_a \geq M_g$.

- $H > F$ então $M_g \geq M_h$.
- $G > R$ então $M_q \geq M_a$.

Em todos os casos acima a igualdade só se dá quando $x_1 = x_2$.

Com isso, $M_q \geq M_a \geq M_g \geq M_h$, valendo a igualdade apenas quando $x_1 = x_2$.

4. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA E MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Neste capítulo, nosso objetivo é resolver alguns problemas utilizando as desigualdades das médias em contextos de otimização que envolvem “máximos e mínimos” sob restrições, sem desconsiderar o Cálculo Diferencial com o aparato dos Multiplicadores de Lagrange. No entanto, para assegurar o domínio do conteúdo por parte do professor, faremos inicialmente uma breve introdução ao Método dos Multiplicadores de Lagrange. Nosso intuito é demonstrar, em cada problema resolvido pelas desigualdades das médias, como a solução poderia ser obtida também por meio dos Multiplicadores de Lagrange. Entendemos que o tema da otimização (quase sempre negligenciado no Ensino Básico) é de grande importância para mostrar aos nossos alunos a força da Matemática na resolução de problemas práticos.

4.1 Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange servem para nos ajudar a minimizar ou maximizar uma função f , que esteja sujeita à restrição de uma função g . Para isto, vamos relembrar o gradiente do Método dos Multiplicadores de Lagrange.¹

Definição 4.1: Se f é uma função multivariável, o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x, y, z, \dots) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots \right)$$

Exemplo 4.1: Se $f(x, y) = x^2 - y^2$, então

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$$

¹ Para um estudo detalhado dos Multiplicadores de Lagrange, sugerimos a referência: STEWART, JAMES. Cálculo, Volume II. 5 ed. Tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

Método dos multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores mínimos e máximos de uma função $f(x, y, z, \dots)$ que estão sujeitos as restrições de $g(x, y, z, \dots) = k$, supondo que estes valores extremos existam e que $\nabla g(x, y, z, \dots) \neq 0$, precisamos determinar todos os valores de $(x, y, z, \dots)$ tais que:

$$\nabla f(x, y, z, \dots) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z, \dots) \quad (4.1.1)$$

Os pontos de mínimo e máximo de f são encontrados pelas soluções da equação (4.1.1).

Os resultados de λ acima, são os chamados Multiplicadores de Lagrange.

4.2 Problemas de Otimização

Nesta seção, abordaremos alguns problemas de otimização determinística, que podem ser amplamente explorados no Ensino Médio a partir do uso das desigualdades das médias. Como proposto anteriormente, também os resolveremos utilizando Método dos Multiplicadores de Lagrange, com o objetivo de destacar ainda mais a importância do uso de uma álgebra relativamente simples no contexto das médias.

Exemplo 4.2.1 Para construir uma caixa de base quadrada e sem tampa, estão disponíveis 1200 cm^2 de material. Qual o maior volume possível para esta caixa e quais suas dimensões?

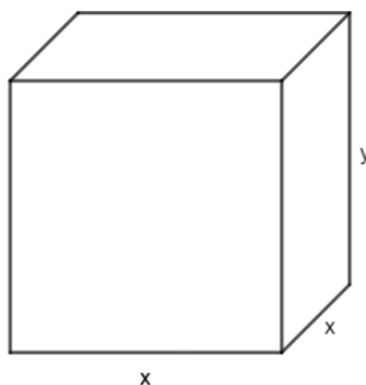


Figura 6: Caixa de base quadrada

Solução via desigualdade das médias:

Seja A a área da caixa e V o volume da caixa. Sendo x as dimensões da base quadrada e y a altura desta caixa, temos então:

$$A = x^2 + 4xy = 1200$$

$$V = x^2y$$

Perceba que $A = x^2 + 2xy + 2xy = 1200$, podemos então aplicar a desigualdade das médias ($M_a \geq M_g$) aos elementos ($x^2, 2xy, 2xy$). Logo,

$$\frac{x^2 + 2xy + 2xy}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy}$$

$$\frac{1200}{3} = 400 \geq \sqrt[3]{4x^4y^2} = \sqrt[3]{4 \cdot (x^2y)^2} = \sqrt[3]{4 \cdot V^2}$$

$$\text{Portanto, } 4 \cdot V^2 \leq 400^3 \therefore V^2 \leq \frac{64.000.000}{4} = 16.000.000 \therefore V \leq 4000$$

Este resultado garante que o volume é menor ou igual a 4000, ou seja, o máximo volume será 4000, isto ocorrerá quando ocorrer a igualdade. A igualdade ocorre quando os elementos forem iguais, isto é,

$$x^2 = 2xy \therefore x = 2y \quad (i)$$

Da condição inicial tínhamos que

$$A = x^2 + 4xy = 1200 \quad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii), temos:

$$(2y)^2 + 4 \cdot 2y \cdot y = 1200$$

$$4y^2 + 8y^2 = 12y^2 = 1200$$

$$y = 10$$

De (i) $x = 20$. Isto confirma o fato do máximo volume ser 4000cm^3 para estes valores.

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange:

Considere novamente, A a área da caixa e V o volume da caixa. Sendo x as dimensões da base quadrada e y a altura desta caixa, temos então:

$$A = x^2 + 4xy = 1200$$

$$V = x^2y$$

Queremos calcular o máximo valor da função $f(x, y) = x^2y$ que está sujeita a restrição da função $g(x, y) = x^2 + 4xy - 1200$.

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\begin{aligned}\nabla g(x, y) &= \lambda \cdot \nabla f(x, y) \\ (2x + 4y, 4x) &= \lambda \cdot (2xy, x^2)\end{aligned}$$

Temos então,

$$2x + 4y = \lambda \cdot 2xy \quad (i)$$

$$4x = \lambda \cdot x^2 \quad (ii)$$

De (ii), temos que $\lambda = \frac{4}{x}$, substituindo esta informação em (i):

$$2x + 4y = \frac{4}{x} \cdot 2xy \therefore x = 2y \quad (iii)$$

Da condição inicial tínhamos que

$$A = x^2 + 4xy = 1200 \quad (iv)$$

Portanto, substituindo (iii) em (iv)

$$(2y)^2 + 4 \cdot 2y \cdot y = 1200$$

$$4y^2 + 8y^2 = 12y^2 = 1200$$

$$y = 10$$

De (iii), $x = 20$. Portanto, o máximo volume será $V = 20^2 \cdot 10 = 4000 \text{ cm}^3$.

Exemplo 4.2.2 Uma lata no formato de um cilindro circular reto tem volume de $16\pi \text{ cm}^3$. Determine o raio e a altura deste cilindro para que a quantidade de material usada seja a menor possível.

Solução via desigualdade das médias:

Seja V o volume deste cilindro e A a área da superfície deste cilindro. Considerando que o raio da base deste cilindro seja x , e a altura deste cilindro seja y , temos:

$$V = \pi \cdot x^2 \cdot y = 16\pi \therefore x^2y = 16.$$

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

Perceba que $A = 2\pi x^2 + \pi xy + \pi xy$; podemos então aplicar a desigualdade das médias ($M_a \geq M_g$) aos elementos $(2\pi x^2, \pi xy, \pi xy)$

$$\frac{2\pi x^2 + \pi xy + \pi xy}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi x^2 \cdot \pi xy \cdot \pi xy}$$

$$\frac{A}{3} \geq \sqrt[3]{2\pi^3 (x^2 y)^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (16)^2} = \sqrt[3]{2^9 \pi^3} = 8\pi.$$

Logo, $\frac{A}{3} \geq 8\pi \therefore A \geq 24\pi$.

Este resultado garante que a área será maior ou igual a $24\pi \text{ cm}^2$, ou seja, a área mínima será $24\pi \text{ cm}^2$, e isto ocorrerá quando ocorrer a igualdade. A igualdade ocorre quando os elementos forem iguais, isto é,

$$\pi xy = 2\pi x^2 \therefore y = 2x \quad (i)$$

Da condição inicial tínhamos que:

$$x^2 y = 16 \quad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii)

$$x^2 \cdot 2x = 16 \therefore x = 2$$

De (i) $y = 4$. Este resultado confirma que a área mínima será $24\pi \text{ cm}^2$.

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange:

Seja V o volume deste cilindro e A a área da superfície deste cilindro. Considerando que o raio da base deste cilindro seja x , e a altura deste cilindro seja y , temos:

$$V = \pi \cdot x^2 \cdot y = 16\pi \therefore x^2 y = 16.$$

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

Queremos calcular o máximo valor da função $f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ que está sujeita a restrição da função $g(x, y) = x^2 y - 16$.

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x, y) = \lambda \cdot \nabla f(x, y)$$

$$(2xy, x^2) = \lambda \cdot (4\pi x + 2\pi y, 2\pi x)$$

Temos então,

$$2xy = \lambda \cdot (4\pi x + 2\pi y) \quad (i)$$

$$x^2 = \lambda \cdot 2\pi x \quad (ii)$$

De (ii) temos que $\lambda = \frac{x}{2\pi}$, substituindo esta informação em (i)

$$2xy = \frac{x}{2\pi} \cdot (4\pi x + 2\pi y) \therefore y = 2x \quad (iii)$$

Da condição inicial tínhamos que

$$V = x^2 y = 16 \quad (iv)$$

Substituindo (iii) em (iv)

$$x^2 \cdot 2x = 16 \therefore x = 2$$

De (iii), $y = 4$.

Portanto, a área mínima será $A = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 24\pi \text{ cm}^2$.

Exemplo 4.2.3 Determine o raio e a altura de um cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito em uma esfera de raio 6cm.

Solução via desigualdade das médias:

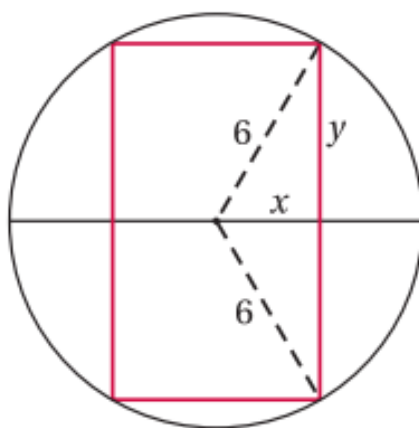


Figura 7: Cilindro inscrito em uma esfera

A figura acima nos mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Sendo A a área lateral de um cilindro, temos:

$$A = 2\pi x(2y) = 4\pi xy$$

Observando a imagem, podemos relacionar os elementos da seguinte forma:

$$36 = x^2 + y^2$$

Podemos então aplicar a desigualdade das médias ($M_a \geq M_g$) aos elementos (x^2, y^2) .

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{36}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy$$

$$18 \geq xy = \frac{A}{4\pi}$$

$$A \leq 72\pi$$

Este resultado nos garante que a área será menor ou igual a $72\pi \text{ cm}^2$, ou seja, o maior valor da área será 72 cm^2 , isto ocorrerá quando ocorrer a igualdade. A igualdade ocorre quando os elementos forem iguais, isto é,

$$x^2 = y^2 \therefore x = y \quad (i)$$

Da condição inicial tínhamos que

$$x^2 + y^2 = 36 \quad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii)

$$x^2 + x^2 = 36 \therefore x = 3\sqrt{2}$$

De (i), $y = 3\sqrt{2}$. Logo, raio vale $3\sqrt{2} \text{ cm}$ e a altura tem medida de $6\sqrt{2} \text{ cm}$.

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange:

Considere novamente a figura 7 que nos mostra a interseção do sólido com o plano que contém o eixo do cilindro. Sendo A a área lateral de um cilindro, temos:

$$A = 2\pi x(2y) = 4\pi xy$$

Observando a imagem, podemos relacionar os elementos da seguinte forma:

$$36 = x^2 + y^2$$

Queremos calcular o máximo valor da função $f(x, y) = 4\pi xy$ que está sujeito a restrição da função $g(x, y) = x^2 + y^2 - 36$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x, y) = \lambda \cdot \nabla f(x, y)$$

$$(2x, 2y) = \lambda \cdot (4\pi y, 4\pi x)$$

Temos então,

$$2x = \lambda \cdot 4\pi y \quad (i)$$

$$2y = \lambda \cdot 4\pi x \quad (ii)$$

De (i) e (ii) temos que $x = y$. Da condição inicial tínhamos que:

$$x^2 + y^2 = 36$$

Logo, $x^2 + x^2 = 36 \therefore x = 3\sqrt{2} = y$.

Portanto o raio deste cilindro é $3\sqrt{2} \text{ cm}$ e a altura $6\sqrt{2} \text{ cm}$.

Exemplo 4.2.4 Sejam $x > 0$ e $y > 0$ números reais tais que $x + y = 2$. Qual o máximo valor do produto $x \cdot y$?

Solução via desigualdade das médias:

Podemos aplicar a desigualdade das médias ($M_q \geq M_a$) aos termos (x, y) .

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$$

Da condição inicial tínhamos que $x + y = 2$, então

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{2}{2} = 1$$

$$x^2 + y^2 \geq 2 \quad (i)$$

Usando produtos notáveis sabemos que:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$2^2 - 2xy = x^2 + y^2 \quad (ii)$$

Por (i) e (ii)

$$2^2 - 2xy \geq 2 \therefore 2xy \leq 2$$

$$xy \leq 1$$

Este resultado afirma que o produto é menor ou igual a 1, ou seja, o máximo valor do produto é 1. A igualdade só ocorre, isto é, $xy = 1$, quando $x = y = 1$.

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange:

Precisamos calcular o máximo valor da função $f(x, y) = xy$ que está sujeito a restrição $g(x, y) = x + y - 2$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x, y) = \lambda \cdot \nabla f(x, y)$$

$$(1, 1) = \lambda \cdot (y, x)$$

Temos então:

$$1 = \lambda \cdot y \quad (i)$$

$$1 = \lambda \cdot x \quad (ii)$$

De (i) e (ii) temos que $x = y$. Portanto, da condição inicial temos:

$$x + x = 2 \therefore x = 1 = y$$

Logo, o máximo valor do produto xy será 1.

Exemplo 4.2.5 Qual é o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente a circunferência $x^2 + y^2 = 50$ pode assumir?

Solução via desigualdade das médias:

Queremos calcular o máximo valor da soma das coordenadas $P(x, y)$ de um ponto pertencente à circunferência, isto é $x + y$. Para isso, devemos considerar que o ponto P pertence ao primeiro quadrante, onde x e y são positivos.

Podemos aplicar a desigualdade das médias ($M_q \geq M_a$) aos termos (x, y) .

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$$

Da condição inicial tínhamos que $x^2 + y^2 = 50$, então

$$\sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \geq \frac{x + y}{2}$$

$$10 \geq x + y$$

Assim, a soma das coordenadas terá valor máximo de 10 e este se dará somente se $x = y = 5$. Portanto, $P(5,5)$ e a soma das coordenadas será 10.

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange:

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente a circunferência $x^2 + y^2 = 50$, pela equação da circunferência, sabemos que esta circunferência está centrada na origem, desta forma iremos assumir que $P(x, y)$ seja um ponto do primeiro quadrante. Pelo enunciado, precisamos identificar o máximo valor da soma das coordenadas do ponto $P(x, y)$.

Sendo assim, queremos calcular o máximo valor da função $f(x, y) = x + y$ que está sujeito à restrição da função $g(x, y) = x^2 + y^2 - 50$.

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x, y) = \lambda \cdot \nabla f(x, y)$$

$$(2x, 2y) = \lambda \cdot (1, 1)$$

Temos então,

$$2x = \lambda \quad (i)$$

$$2y = \lambda \quad (ii)$$

Por (i) e (ii) concluímos que $x = y$.

Dá condição inicial $x^2 + y^2 = 50$, então

$$x^2 + x^2 = 50 \therefore x = \pm 5$$

Como o ponto $P(x, y)$ precisa estar no primeiro quadrante, então $x = -5$ não satisfaz a esta condição. Portanto, $x = y = 5$ e a soma das coordenadas será 10.

Exemplo 4.2.6 Qual maior valor possível para a soma $S = \sin x + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$?

Solução via desigualdade das médias:

Podemos aplicar a desigualdade das médias ($M_q \geq M_a$) aos termos $(\sin x, \cos x)$.

$$\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} \geq \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

Da relação fundamental da trigonometria, temos que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Então:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

$$\sqrt{2} \geq \sin x + \cos x = S$$

O resultado acima garante que a soma S é menor ou igual a $\sqrt{2}$. Ou seja, o máximo valor pra esta soma é $\sqrt{2}$. Este resultado só ocorre quando os termos $(\sin x, \cos x)$ são iguais, isto é $\sin x = \cos x$. Então:

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Solução via método dos multiplicadores de Lagrange:

Precisamos calcular o máximo valor da função $f(x) = \sin x + \cos x$, que está sujeita a restrição da relação fundamental da trigonometria $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1$

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x) = \lambda \cdot \nabla f(x)$$

$$(2\sin x \cos x, -2\sin x \cos x) = \lambda \cdot (\cos x, -\sin x)$$

$$2 \sin x \cos x = \lambda \cdot \cos x \therefore 2 \sin x = \lambda \quad (i)$$

$$-2\sin x \cos x = \lambda \cdot (-\sin x) \therefore 2 \cos x = \lambda \quad (ii)$$

De (i) e (ii) temos então que, $\cos x = \sin x$.

Da relação fundamental, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Então:

$$2\sin^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Então o máximo valor de $f(x)$ será:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Exemplo 4.2.7 Determine o menor valor possível da diagonal de um paralelepípedo, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as suas arestas é 12.

Solução via desigualdade das médias:

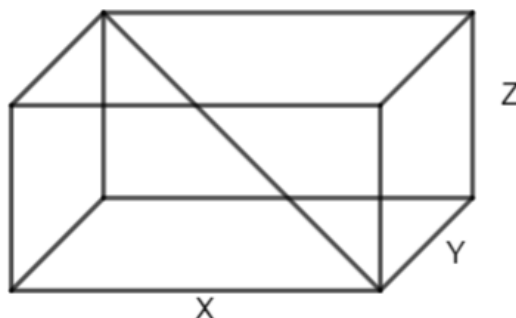


Figura 8: Paralelepípedo

Sejam x, y e z as dimensões de um paralelepípedo com o comprimento de todas as suas diagonais igual a 12. Com isto podemos então escrever:

$$4x + 4y + 4z = 12 \therefore x + y + z = 3$$

A diagonal d de um paralelepípedo pode ser calculada por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Aplicando então a desigualdade das médias ($M_q \geq M_a$) aos elementos x, y e z . Temos:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$$

Portanto a diagonal d do paralelepípedo será, $d \geq \sqrt{3}$. Desta forma, o menor valor para a diagonal d será $\sqrt{3}$ que só ocorre quando $x = y = z = 1$.

Solução via Multiplicadores de Lagrange:

De acordo com a informação do anunciado, temos que:

$$4x + 4y + 4z = 12 \therefore x + y + z = 3$$

A diagonal d de um paralelepípedo pode ser calculada por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Sendo assim, queremos calcular o mínimo valor da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que está sujeita a restrição da função $g(x, y, z) = x + y + z - 3$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x) = \lambda \cdot \nabla f(x)$$

$$(1, 1, 1) = \lambda \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$1 = \frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (i)$$

$$1 = \frac{\lambda \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (ii)$$

$$1 = \frac{\lambda \cdot z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (iii)$$

Por (i), (ii) e (iii) conclui-se que $x = y = z = 1$.

Portanto, a diagonal d será

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Exemplo 4.2.8 Determine a maior área do retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio 3.

A imagem abaixo representa a situação descrita pelo enunciado.

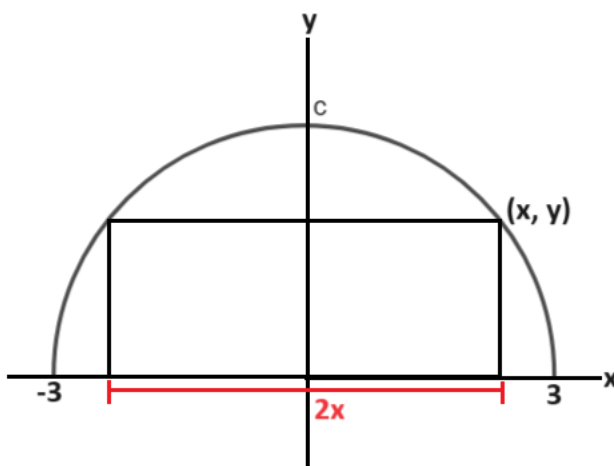


Figura 9: Retângulo inscrito em um semicírculo

Solução via desigualdade das médias:

A equação do semicírculo será $x^2 + y^2 = 9$. Como consideramos o centro do semicírculo na origem do plano cartesiano, então podemos garantir que $y \geq 0$.

Portanto, o retângulo inscrito deverá ter dois vértices sobre o semicírculo.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. Logo, os lados do retângulo serão $2x$ e y e sua área será $A = 2xy$.

Se um dos vértices (x, y) pertencem ao semicírculo $x^2 + y^2 = 9$, então:

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

Desta forma:

$$A = 2x\sqrt{9 - x^2} \therefore A^2 = 4x^2(9 - x^2)$$

Aplicando a desigualdade das médias ($M_a \geq M_g$) aos termos x^2 e $9 - x^2$, temos:

$$\frac{x^2 + 9 - x^2}{2} \geq \sqrt{x^2(9 - x^2)}$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 \geq x^2(9 - x^2)$$

$$81 \geq 4x^2(9 - x^2)$$

$$81 \geq A^2$$

$$\sqrt{81} \geq \sqrt{A^2}$$

$$9 \geq A$$

Desta forma, concluímos que o máximo valor da área será 9 unidades de área.

Observe que ainda é possível calcular os valores de x e y que tornam esta área máxima. O par ordenado do vértice do retângulo no primeiro quadrante (x, y) , desta forma temos $x = y$. Substituindo na equação do semicírculo $x^2 + y^2 = 9$, temos então:

$$x^2 + x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Como estamos considerando o primeiro quadrante, então

$$x = y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Solução via multiplicadores de Lagrange:

A equação do semicírculo será $x^2 + y^2 = 9$. Como consideramos o centro do semicírculo na origem do plano cartesiano, então podemos garantir que $y \geq 0$.

Portanto, o retângulo inscrito deverá ter dois vértices sobre o semicírculo.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. Logo, os lados do retângulo serão $2x$ e y e sua área será $A = 2xy$.

Sendo assim, precisamos calcular o máximo valor da função $f(x, y) = 2xy$ que está sujeita a restrição da função $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$

Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, equação 4.1.1, temos que:

$$\nabla g(x) = \lambda \cdot \nabla f(x)$$

$$(2x, 2y) = \lambda \cdot (2y, 2x)$$

$$2x = \lambda \cdot 2y \quad (i)$$

$$2y = \lambda \cdot 2x \quad (ii)$$

Por (i) e (ii) concluímos que $x = y$.

Da equação do semicírculo tínhamos que $x^2 + y^2 = 9$. Logo,

$$x^2 + x^2 = 9$$

$$2x^2 = 9$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} = y$$

Portanto, $A = 2xy = 2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 9$ unidades de área.

5. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E A MÉDIA QUADRÁTICA

O método dos mínimos quadrados apresenta-se como uma ferramenta eficaz para o estudo de ajustes de funções a conjuntos de pares ordenados que compõem uma relação, mas que não necessariamente constituem uma função. Para isso, utilizaremos o conceito do ajuste de curvas, ou seja, um procedimento matemático em que, a partir de uma série de pontos representativos das variáveis que descrevem um determinado fenômeno, torna-se possível determinar uma curva que possa representá-lo matematicamente. No nosso caso, iremos nos ater aos ajustes em que a curva representativa da situação seja uma reta, visto que o estudo das funções afins é de extrema importância no Ensino Básico.

Para exemplificar o exposto, considere que, em um determinado experimento que relaciona duas grandezas A e B, foram obtidos resultados que deram origem à seguinte tabela:

A	1	2	3	4	5
B	2	4	3	5	5

Figura 10: Tabela que relaciona grandezas A e B.

Ao representar os pontos obtidos em um plano cartesiano, obtemos o seguinte diagrama:

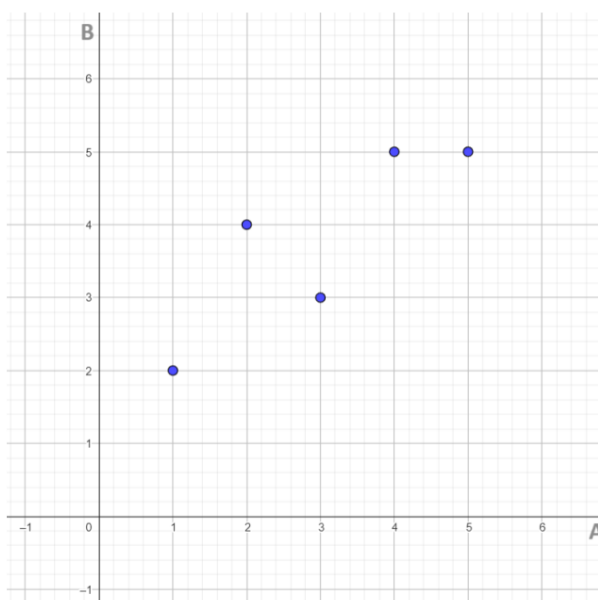


Figura 11: Diagrama dos pontos que relacionam as grandezas A e B

O objetivo então, passar ser, encontrar uma reta que melhor expresse os valores tabelados, com boa aproximação e, além disso, que nos permita projetar com certa margem de segurança, valores que estejam fora do intervalo definido.

Ao usar o Método dos Mínimos Quadrados (que trataremos a seguir) sobre os valores tabelados, a reta que melhor se ajusta aos pontos é dada por $y = 0,7x + 1,7$.

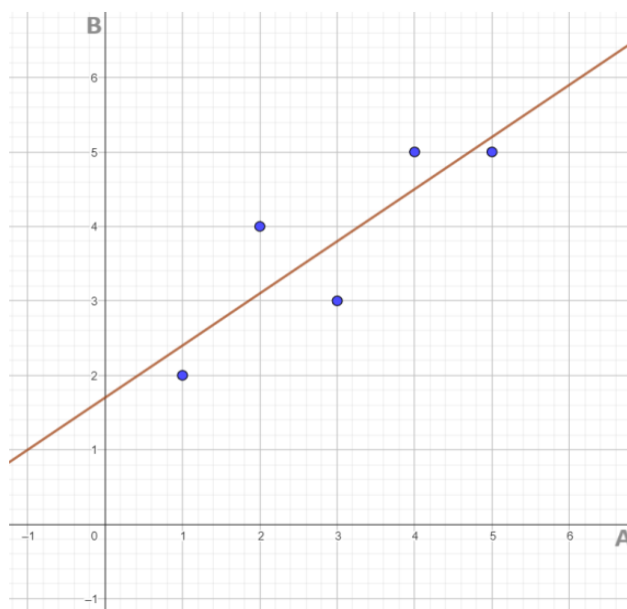


Figura 12: Diagrama dos pontos que relacionam as grandezas A e B com a reta obtida pelo Método dos Mínimos Quadrados

Podemos, assim, tomar a função $y = 0,7x + 1,7$ como uma boa aproximação dos valores tabelados, e desta forma podemos fazer estimativas que envolvam este fenômeno.

5.1 Fundamentação matemática do Método dos Mínimos Quadrados

Como explicitado anteriormente, neste trabalho vamos lidar com os casos em que seja possível encontrar uma curva de ajuste do tipo $y = ax + b$. Desta forma, nosso objetivo é encontrar os valores de a e b , que tornam a função afim a melhor que se ajusta aos pares ordenados. A reta encontrada não necessariamente precisa passar pelos pontos que representam os dados (até porque os pontos podem não ser

colineares e nem sequer representar uma função); entretanto a reta deve servir como boa aproximação do processo de otimização, cujo objetivo é minimizar a distância entre essa reta e o conjunto de pontos dados.

Para isso, seja f a função que buscamos encontrar, de modo que $y = f(x)$, e seja (x_i, y_i) , $i \leq 1 \leq n$, o par ordenado que representa o i -ésimo ponto dado. Para cada par ordenado, podemos definir como resíduo, o valor:

$$\Delta y_i = y_i - f(x_i)$$

Este resíduo gerado pela diferença entre cada ordenada do i -ésimo ponto e a ordenada obtida pela aplicação da função f sobre a abscissa $x = x_i$ representa o erro h na aproximação de y_i através de $f(x_i)$.

Desta forma, o desvio total poderia ser representado pelo somatório de todos estes desvios em cada ponto, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))$$

Esta estratégia se mostra ineficiente pois aritmeticamente a soma poderia zerar, sem que a reta fosse a melhor.

Dado isso, iremos então trabalhar com o quadrado destes resíduos, pois desta forma eliminamos as incoerências aritméticas do somatório e obteremos assim a função de ajustes. Sendo assim, podemos partir para o erro quadrático (Δy_i^2).

O erro quadrático consiste em substituir o valor de cada ordenada y_i pelo valor aproximado correspondente $f(x_i)$ para encontrar a função que otimize o ajuste. Sendo assim, o i -ésimo ponto, pode ser associado ao desvio quadrático da seguinte forma:

$$\Delta y_i^2 = (y_i - f(x_i))^2$$

O erro total quadrático S , pode ser definido pelo somatório de todos os desvios quadráticos individuais referentes a cada ponto (x_i, y_i) , sendo assim:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

Desta forma, o valor S representa a soma dos quadrados das distâncias, na vertical, de cada ponto (x_i, y_i) à curva, ou seja, o desvio quadrático total provocado pelo ajuste. Com isso, a incerteza média σ associado ao ajuste é dada pela equação

$$\sigma = \sqrt{\frac{S}{n}}$$

A otimização do ajuste passa pela otimização do erro quadrático médio σ , porém matematicamente falando, isto equivale a minimizar apenas a função S , visto que n é um número inteiro e positivo.

Uma observação válida é de que a equação de σ na verdade é uma média quadrática, vide a seção 2.6, onde os termos são exatamente $y_i - f(x_i)$.

Como já sabemos que a função ajuste procurada será do tipo $f(x) = ax + b$, então:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Teorema 5.1 Seja a função $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $z = F(x, y)$ e seja o ponto $(x_0, y_0) \in U$. Se f é diferenciável no intervalo aberto U e tem um máximo local ou mínimo local em (x_0, y_0) , então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Em virtude disto, podemos dizer que para o desvio total S , os parâmetros a e b da função ajuste precisam satisfazer o Teorema 5.1, isto é:

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = 0$$

E

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = 0$$

Usando as regras de derivação, neste caso usando derivadas parciais, temos respectivamente:

$$\sum_{i=1}^n (y_i x_i - a x_i^2 - b x_i) = 0$$

E

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b) = 0$$

Que podem ser reescritos da seguinte forma, respectivamente:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)$$

E

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + n b = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Essas duas equações formam um sistema de equações lineares de variáveis a e b , podendo ser reescrita na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema usando a regra de Cramer, temos:

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Observe o exemplo a seguir que será resolvido pelo método dos mínimos quadrados.

Exercício 5.1 A fim de se avaliar a influência da dose (em mg) de um fármaco na pressão arterial (em mm Hg) em pacientes com uma dada patologia, conduziu-se um estudo com 5 pacientes e obteve-se a seguinte tabela de dados amostrais:

Dose (mg)	7	12	15	20	22
Pressão Arterial (mm Hg)	10	18	20	25	25

Figura 13: Tabela que relaciona Dose(mg) e Pressão Arterial(mm Hg)

- a) Construa um gráfico dos pares ordenados (dose, pressão arterial) e verifique que os pontos não são colineares e que nenhuma função pode pelos pontos dados, embora estes tenham comportamento aproximadamente linear.
- b) A partir da análise feita no item (a), utilizando o critério do erro quadrático médio mínimo, verifique qual dos modelos abaixo melhor se ajusta aos dados, onde x é a dose e y é a resposta estimada pelo modelo.
- Modelo 1: $y = 0,9x + 4$
 - Modelo 2: $y = x + 4,5$
- c) Com base nos resultados obtidos qual seria reta que minimizasse o erro quadrático médio?

Solução item (a)

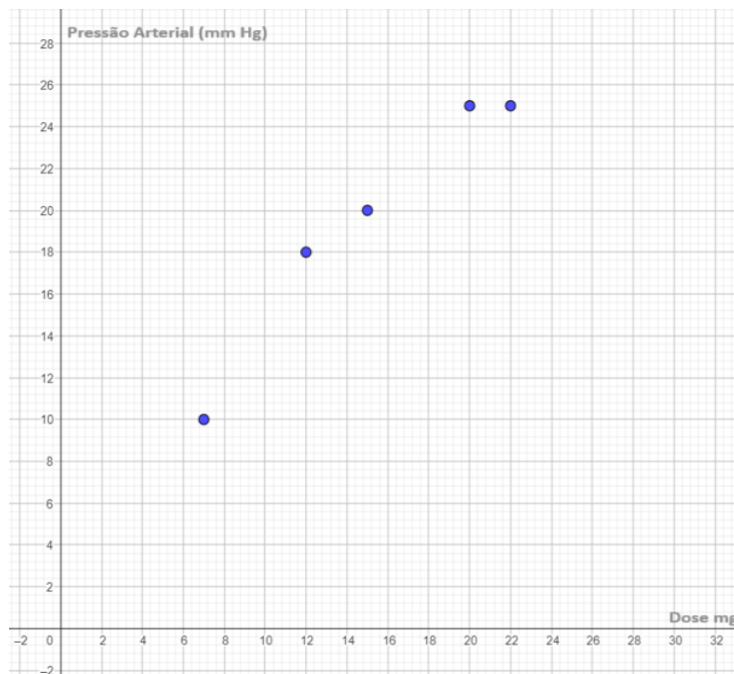


Figura 14: Diagrama que relaciona Dose (mg) e Pressão Arterial (mm Hg)

Os pontos não são colineares, visto que temos dois pontos com a mesma ordenada 25 e outros pontos com ordenadas diferente.

Solução item (b)

Precisamos analisar qual das retas minimiza o erro quadrático médio. Vimos que a soma dos erros pode ser dada por:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$$

Iremos avaliar esta soma para cada um dos modelos.

Chamemos de S_1 a soma dos erros para o modelo 1.

$$\begin{aligned} S_1 &= (10 - (0,9 \cdot 7 + 4))^2 + (18 - (0,9 \cdot 12 + 4))^2 + (20 - (0,9 \cdot 15 + 4))^2 \\ &\quad + (25 - (0,9 \cdot 20 + 4))^2 + (25 - (0,9 \cdot 22 + 4))^2 \\ S_1 &= (-0,3)^2 + (3,2)^2 + (2,5)^2 + (3)^2 + (1,2)^2 \\ S_1 &= 0,09 + 10,24 + 6,25 + 9 + 1,44 \\ S_1 &= 27,02 \end{aligned}$$

Chamemos de S_2 a soma dos erros para o modelo 2.

$$\begin{aligned} S_2 &= (10 - (7 + 4,5))^2 + (18 - (12 + 4,5))^2 + (20 - (15 + 4,5))^2 \\ &\quad + (25 - (20 + 4,5))^2 + (25 - (22 + 4,5))^2 \\ S_2 &= (-1,5)^2 + (1,5)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2 + (-1,5)^2 \\ S_2 &= 2,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25 \\ S_2 &= 7,25 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $S_1 > S_2$. Como queremos minimizar o erro, temos então que o modelo 2 melhor se ajusta aos dados.

Solução item (c)

Para encontrar a reta que minimiza o erro usaremos o Método dos Mínimos Quadrados, e tomaremos como base de solução obtida via Método de Cramer. Para facilitar as contas, pode-se construir uma tabela dos pontos dados com os valores necessários, observe:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
-----	-------	-------	---------	-----------	---------

1	7	10	49	70	100
2	12	18	144	216	324
3	15	20	225	300	400
4	20	25	400	500	625
5	22	25	484	550	625
Σ	76	98	1302	1636	2074

Figura 15: Tabela com valores para utilização do Método dos Mínimos Quadrados

Usando as equações obtidas pelo método de Cramer, temos:

$$a = \frac{5 \cdot 1636 - 76 \cdot 98}{5 \cdot 1302 - 76^2} = \frac{8180 - 7448}{6510 - 5776} = 0,997$$

$$b = \frac{98 \cdot 1302 - 76 \cdot 1636}{5 \cdot 1302 - 76^2} = \frac{127596 - 124336}{6510 - 5776} = 4,441$$

Portanto, temos que a reta que minimiza o erro será dada por:

$$y = 0,997x + 4,44$$

5.2 Método dos Mínimos Quadrados – Uma possível abordagem no Ensino Médio

O conceito do método do Mínimos Quadrados geralmente não é abordado no Ensino Médio. Isso ocorre porque o método exige domínio básico e preciso de temas como polinômios, funções, resolução de sistemas de equações lineares e determinantes, além claro, de assuntos que estão reservados a alguns cursos de graduação, como as derivadas. Desta forma, a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados no Ensino Médio torna-se um verdadeiro desafio.

Para essa apresentação, torna-se necessária a apresentação do conceito de derivada, ainda que de forma superficial, para que o aluno possa compreender a fundamentação teórica do método.

Uma possível abordagem introdutória, adequada com alunos do Ensino Médio, surge do cálculo do mínimo valor de uma função quadrática. Para isso,

Seja,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a > 0$$

Com a restrição de $a > 0$ sabemos então que a parábola possui concavidade voltada para cima, portanto tem-se um ponto mínimo no seu vértice. Nosso objetivo será exatamente encontrar o valor deste ponto mínimo.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, que pode ser reescrita, completando quadrados, como:

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = \left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Mas perceba que o termo $-\frac{b^2}{4a} + c$ não depende da variável x , apenas o termo $\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$ depende de x , $\forall x \in \mathbb{R}$.

Desta maneira, podemos concluir que o menor valor da função ocorrerá quando $\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$ for mínimo, ou seja, quando $\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 = 0$.

Para isto temos então:

$$\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 = 0$$

$$\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} = 0$$

$$\sqrt{a}x = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{5.2}$$

Esta é a equação que muito se vê no Ensino Médio quando se estuda o vértice de uma parábola. Chegamos ao mesmo resultado, porém, usando o conceito do

Método dos Mínimos Quadrados. Com isso, concluímos que o ponto mínimo da função f ocorrerá quando o termo quadrático $\left(\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ for mínimo, ou seja, igual a zero. Este resultado que é de tamanha importância, será o ponto inicial para a abordagem do método dos mínimos quadrados no ensino médio.

Por ser uma abordagem a nível ensino médio, para efeito de uma educação do método dos mínimos quadrados, seria interessante o professor propor um ajuste de funções lineares que passem pela origem, pois isso motivará o uso e a importância de se reconhecer o vértice da parábola em problemas práticos. O caso geral de funções afins (regressão linear completa a uma variável) torna-se um pouco mais complicado para esse nível, uma vez que a função quadrática resultante da soma de quadrados dos erros depende de duas variáveis (o coeficiente angular da reta e o seu intercepto). Assim, iremos considerar aqui apenas uma situação em que a curva de ajuste passe pela origem do plano cartesiano.

Dada uma sequência de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, considerando o que foi explicitado na sessão 5.1 na utilização do erro quadrático médio, buscamos encontrar uma função que melhor ajuste esta sequência de pares ordenados sabendo que erro quadrático cometido entre o previsto para a curva e o valor real dos pares ordenados, ao ser somado em todos os pontos, seja mínimo. Por hipótese, esta relação se dá através de uma relação linear.

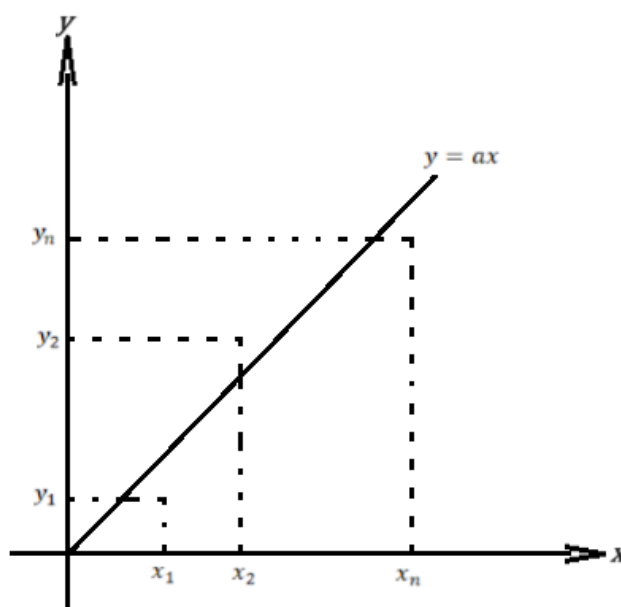


Figura 16: Diagrama de dispersão dos pares ordenados

Temos então a seguinte relação linear de ajuste:

$$y = ax + \text{erro}$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ o parâmetro que precisamos encontrar. Para isto, consideremos a soma dos desvios quadráticos de cada ordenada y_i observada e o seu correspondente valor estimado pela abscissa x_i através da reta, isto é:

$$\begin{aligned} f(a) &= (y_1 - ax_1)^2 + (y_2 - ax_2)^2 + \dots + (y_n - ax_n)^2 \\ f(a) &= y_1^2 - 2y_1ax_1 + a^2x_1^2 + y_2^2 - 2y_2ax_2 + a^2x_2^2 + \dots + y_n^2 - 2y_nax_n + a^2x_n^2 \\ f(a) &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)a^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)a + y_1^2 + y_2^2 + \dots \\ &\quad + y_n^2 \quad (5.2) \end{aligned}$$

Podemos fazer nossos alunos observar que se trata de uma parábola em a , uma vez que conhecemos os valores dos pares ordenados.

Portanto, para minimizar o erro quadrático, conforme a equação (5.2), é necessário determinar a abscissa de seu vértice, a saber:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-(-2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n))}{2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\ a &= \frac{(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \end{aligned}$$

O professor deve observar que o valor encontrado equivale também ao valor que minimiza a função:

$$f(a) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)a^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)a + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2,$$

a partir do uso de sua derivada primeira igualada a zero.

Observe que a proposta de um ajuste de funções lineares com intercepto nulo se faz importante, pois, como dito anteriormente, se a relação fosse $y = ax + b + \text{erro}$ encontraríamos para a soma dos erros quadráticos uma equação com duas variáveis, a e b , e, portanto, deveríamos trabalhar com uma função a duas variáveis, em que cada uma olhada separadamente representaria uma parábola, assunto não trabalhado no Ensino Médio e de maior desafio cognitivo para o aluno.

Consideremos então agora o seguinte problema de estimação da função linear cujo intercepto é nulo, situação essa pródiga para os alunos de Ensino Médio:

Exercício 5.2 Uma pequena fábrica, visando ao controle de sua produção, analisou por quatro meses a produção e o consumo de certo item no primeiro quadrimestre de um dado ano:

Mês	Produção	Consumo
Janeiro	40	15
Fevereiro	50	40
Março	50	25
Abril	60	40

Figura 17: Tabela com valores do exercício 5.2

Com base nesses dados, determine a curva que melhor ajusta estes dados e faça uma estimativa de produção e consumo para os meses seguintes a partir de valores de produção dados.

Solução: Observe o diagrama para a dispersão do conjunto de dados do problema:

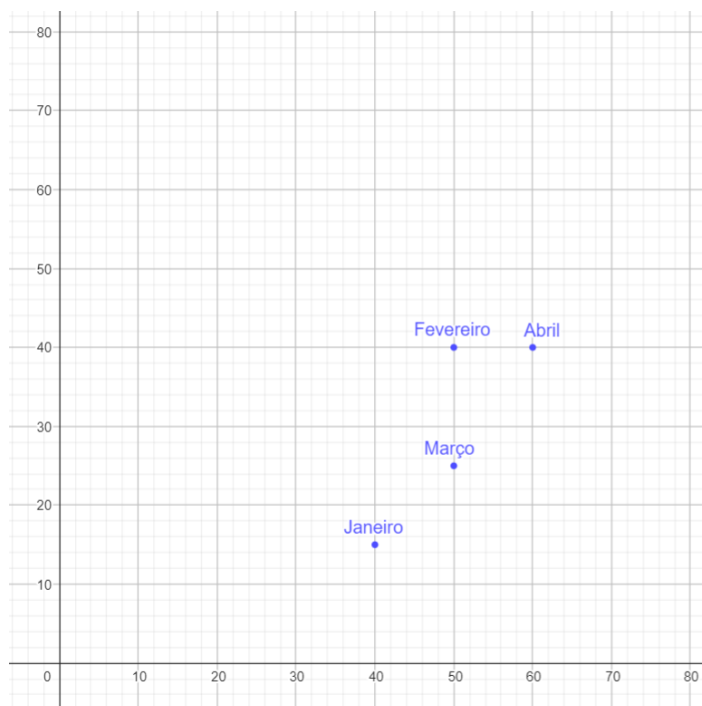


Figura 18: Diagrama de dispersão com os valores do exercício 5.2

Perceba que os valores listados sequer representam uma função, visto que para a abscissa 50 temos duas ordenadas diferentes, mesmo assim é mister encontrar a curva linear que melhor se ajuste a estes dados de tal forma que, se a equação da curva obtida for $y = f(x)$, a soma dos erros quadráticos entre o previsto pela curva e o valor real do quadrimestre seja mínimo.

O diagrama nos induz a hipótese de que o volume de produção (x) e a quantidade consumida (y) se dá através de uma relação linear, visto que, sem produção não há consumo. Temos então o seguinte modelo proposto:

$$y = ax + erro$$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ o parâmetro a ser determinado.

A fim de minimizar a soma quadrática dos erros, e considerando a soma dos desvios de cada ordenada y_i e a correspondente estimativa pela abscissa x_i , vimos anteriormente que o parâmetro a pode ser calculado por:

$$a = \frac{(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

$$a = \frac{40 \cdot 15 + 50 \cdot 40 + 50 \cdot 25 + 60 \cdot 40}{40^2 + 50^2 + 50^2 + 60^2} = \frac{6250}{10200}$$

$$a = 0,61$$

Ou, por outra forma, se chamarmos de S a expressão que representa a soma dos erros quadráticos, teríamos então:

$$S(a) = (15 - 40a)^2 + (40 - 50a)^2 + (25 - 50a)^2 + (40 - 60a)^2$$

$$S(a) = 225 - 1200a + 1600a^2 + 1600 - 4000a + 2500a^2 + 625 - 2500a + 2500a^2$$

$$+ 1600 - 4800a + 3600a^2$$

$$S(a) = 10200a^2 - 12500a + 4050$$

O aluno deverá perceber que se trata de uma parábola em a e o valor que a minimiza é dado pela abscissa de seu vértice:

$$a = \frac{-(-12500)}{2 \cdot 10200} = 0,61$$

Com isso, o modelo ajustado obtido é $y = 0,61x + erro$, cujo gráfico será:

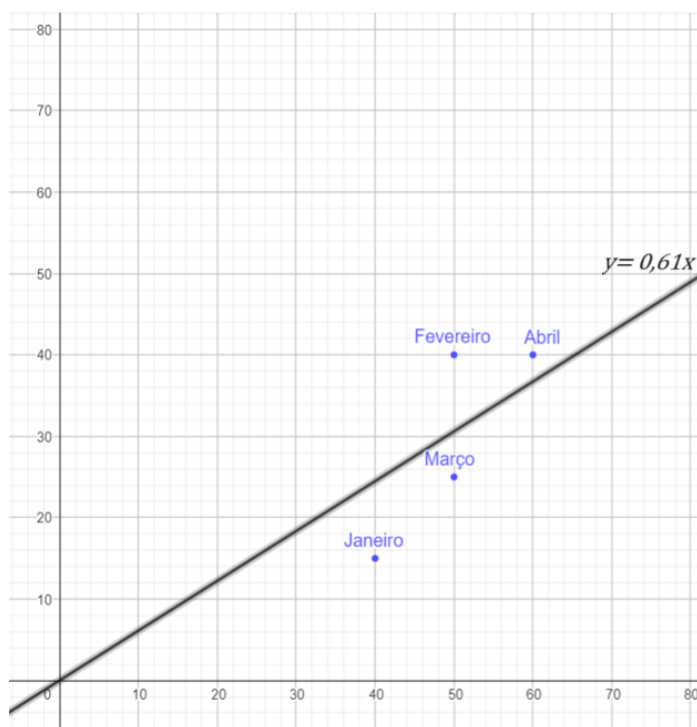


Figura 19: Gráfico da função de ajuste $y = 0,61x$

A partir do modelo estabelecido, podemos estimar o valor do consumo para uma dada produção em determinado mês futuro. Por exemplo, se a produção de maio for 55, então o valor esperado do consumo é da ordem de $y = 0,61(55) = 33,55$.

Concluimos este capítulo com a convicção de que o Método dos Mínimos Quadrados, proposto por Gauss, oferece aos alunos do Ensino Médio uma excelente oportunidade para compreenderem a importância do estudo das parábolas e da modelagem matemática por meio de funções lineares, ao aplicá-los a problemas reais de otimização linear.

6. ESPERANÇA MATEMÁTICA OU MÉDIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Neste capítulo nosso objetivo é mostrar uma das utilidades da média ponderada no cálculo de esperança matemática, mas antes disso vamos relembrar algumas definições.²

Definição 6.1 Uma variável aleatória é uma função real mensurável, ou seja, que assume valores em $\mathbb{R}$, definida no espaço amostral Ω de um experimento aleatório.

Definição 6.2 Uma variável aleatória é discreta se sua imagem é um conjunto finito ou enumerável. Se a imagem é um conjunto não enumerável dizemos que a variável aleatória é contínua.

Dito isto, podemos então definir o que de fato seja a esperança matemática ou média de uma variável aleatória discreta.

Definição 6.3 Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ com probabilidades de ocorrência $p_1, p_2, \dots, p_n$, respectivamente. A média ou esperança matemática de X é definida como

$$E(X) = \sum_i p_i x_i$$

Onde o somatório passa por todos os possíveis valores de X . Neste caso, como a soma das probabilidades é 1, é de fácil percepção que este somatório se trata de uma média aritmética que é ponderada pelas probabilidades respectivamente.

Exercício 6.1 Em uma empresa de telefonia, o número de contratos assinados em um dia por seus agentes de vendas é uma variável aleatória P , com a seguinte distribuição de probabilidades (obtidas com base em vários anos de estudo):

² Para um estudo detalhado da esperança matemática, sugerimos a referência: BUSSAB. W. O. e MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 6 Ed. São Paulo, Editora Saraiva, 2010.

Número de contratos assinados	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade de assinatura do contrato	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Figura 20: Tabela que relaciona o número de contratos assinados e sua respectiva probabilidade.

Cada agente recebe comissões de acordo com o número de contratos assinados no dia, distribuídas da seguinte forma: se o agente assina até 2 contratos em um dia, ele recebe uma comissão de R\$10,00 por contrato. A partir do terceiro contrato, a comissão aumenta para R\$50,00 por contrato adicional. Qual é o número médio de contratos assinados por cada agente e qual a comissão média diária de cada um deles?

Solução: Primeiro vamos calcular a quantidade média do número de contratos assinados. Pela Definição 6.3, temos então

$$E(P) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,05 = 2,05$$

Portanto, este é o número médio de contratos assinados pelos agentes de venda da empresa de telefonia.

Em segundo momento precisamos calcular qual é a comissão média de cada agente de venda, para isso precisamos de saber qual é o valor recebido de comissão de acordo com o número de contratos assinados. Temos então:

Número de contratos assinados	0	1	2	3	4	5	6
Comissão de acordo com o número de contratos assinados	0	10	20	70	120	170	220
Probabilidade de assinatura do contrato	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Figura 21: Tabela que relaciona número de contratos assinados, comissão e a probabilidade de assinatura do contrato.

Pela Definição 6.3, temos então

$$E(C) = 0 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,2 + 70 \cdot 0,1 + 120 \cdot 0,1 + 170 \cdot 0,05 + 220 \cdot 0,05 = 46,5$$

Logo, esta é a comissão média recebia por cada agente de venda.

Exercício 6.2 O número de notebooks produzidos por uma máquina num intervalo de 1h, foi registrado por meses e possibilitou a execução da distribuição do número de aparelhos produzidos em 1h.

Número de notebooks	0	1	2	3	4	5
Probabilidade de produção dos Notebooks	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Figura 22: Tabela que relaciona o número de notebooks produzidos e a probabilidade de produção.

Qual a produção média do número de notebooks produzidos por esta máquina em 1h?

Solução: Pela Definição 6.3, temos então

$$E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 = 2,7$$

Logo, são produzidos em média 2,7 notebooks neste intervalo.

A Esperança Matemática é uma ferramenta muito pródiga na otimização de sistemas estocásticos, isto é, sistemas que incorporam em sua estrutura alguma incerteza. A fim de ilustrar utilidade da Esperança Matemática (enquanto média ponderada de valores discretos), propomos o seguinte problema retirado do livro Estatística Básica de BUSSAB, W. O. e MORETTIN, P. A. (2010).

Exercício 6.3 Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa \$0,50 e que ele vende a \$1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses comprem em um dia casualmente escolhido. O florista descobriu que a função de probabilidade de X é dada pela tabela abaixo.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Figura 23: Tabela que relaciona o número de flores vendidas e a probabilidade de venda

Quantas flores deveria o florista ter em estoque a fim de maximizar a média (valor esperado) do seu lucro?

Solução: Neste caso, é preciso analisar o lucro do vendedor de acordo com a quantidade estocada por ele. O florista pode ter em seu estoque 1, 2 ou 3 flores. Seja L o lucro obtido por ele. Para cada quantidade de flor em seu estoque temos o seguinte esquema:

- Uma flor:

x	0	1
$L(X)$	-0,50	1,00
$p(x)$	0,1	0,9

Figura 24: Tabela que relaciona o lucro para venda de 1 flor

$$E_1(X) = -0,50 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,9 = 0,85$$

- Duas flores:

x	0	1	2
$L(X)$	-1,00	0,50	2,00
$p(x)$	0,1	0,4	0,5

Figura 25: Tabela que relaciona o lucro para a venda de 2 flores

$$E_2(X) = -1,00 \cdot 0,1 + 0,50 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 = 1,10$$

- Três flores:

x	0	1	2	3
$L(x)$	-1,50	0	1,50	3,00
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Figura 26: Tabela que relaciona o lucro para venda de 3 flores

$$E_3(X) = -1,50 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,4 + 1,50 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = 0,90$$

Portanto o estoque em que é possível ter o maior lucro é de 2 flores.

A estrutura deste problema é rica para a construção de outros novos problemas tendo cenários incertos, caracterizados por medida de probabilidade, a fim de revelar aos alunos por que a Probabilidade é hoje a ferramenta por excelência para lidar com os inúmeros fenômenos aleatórios que estão presentes em várias searas do conhecimento humano: robótica, economia, epidemiologia, biologia, medicina, engenharia, finanças, etc.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram discutidos alguns conceitos fundamentais para a técnica de otimização, tanto determinística quanto estocástica, utilizando o conceito de médias - medidas de tendência central que fornecem um resultado resumido de um conjunto de dados. Entretanto, somente a análise das médias, sem a devida avaliação dos dados, pode promover uma interpretação equivocada dos dados, especialmente quando se tem uma disparidade significativa entre eles. A desigualdade das médias possibilita trabalhar problemas de otimização de sistemas, para uma gama de problemas inteligíveis no Ensino Médio, sem a necessidade do cálculo infinitesimal.

Como vimos nesta dissertação, o método de Lagrange se apresenta como uma ferramenta poderosa para a otimização de funções sujeitas a restrições. Embora esse um assunto de nível superior, nem toda estrutura de problemas desse porte pode ser contemplada no Ensino Médio. Entretanto, alguns problemas podem ser trabalhados e resolvidos no ensino básico, utilizando-se o conceito das desigualdades das médias, e, propiciando, assim, um entendimento da importância da matemática na solução de problemas reais. Para evidenciar a importância do saber de conteúdo do professor de Matemática, tivemos a cautela de propor a solução dos problemas de forma dual, a saber, tanto pelo uso da desigualdade das médias (inteligível aos alunos), quanto pelo uso do Método dos Multiplicadores de Lagrange (inteligível aos professores).

Aproveitamos também a oportunidade de fazer uma abordagem, ainda que incipiente, do método dos mínimos quadrados, no que se refere ao ajuste de retas a dados que se comportam de maneira razoavelmente linear, a partir a minimização do erro quadrático médio, emanado do conceito de média quadrática.

Finalmente, de maneira a propor um letramento probabilístico aos alunos de Ensino Médio, fizemos uma breve introdução (e não exaustiva) do conceito de Esperança Matemática, essa ferramenta poderosa da Teoria das Probabilidades, muito usada para a otimização de sistemas corrompidos por incerteza. Ativemo-nos neste trabalho apenas ao valor médio de uma variável aleatória discreta, cuja

correspondência se dá com a média ponderada em que os pesos são suas respectivas probabilidades de ocorrência.

Ao mergulhar nessas duas instâncias de otimização (determinística e estocástica) foi possível reconhecer a relação e a conexão entre esses tópicos e os diferentes conceitos de média, além de destacar sua relevância para um ensino de Matemática que dialogue com problemas do mundo real. Cabe-nos, entretanto, reconhecer que este trabalho representa apenas uma introdução a temas e problemas viáveis para o Ensino Médio, não esgotando, portanto, o estudo de casos mais elaborados que permitem uma maior profundidade e aplicação em diversas áreas, em que o cálculo infinitesimal desempenha um papel fundamental.

Esperamos, ao menos, que este trabalho possa servir como instrumento de motivação a todos os professores e estudantes para essa bela ciência Matemática, contribuindo desta forma para uma educação mais orgânica de seus conteúdos.

8. BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, R. N. de. **O Método dos Mínimos Quadrados: Estudo e Aplicações Para o Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2015.

BARCELAR, R.; ARTOLA, V. H. L. **Médias e Desigualdades – Clubes de Matemática da OBMEP**. Disponível em: <https://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-medias-e-desigualdades/>. Acesso em: 06 jan. 2024.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

FONTE, A. C. da. **Médias, Desigualdades e Problemas de Otimização**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

JÚNIOR, C. A. M. **Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio: Volume 2**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PEREIRA, J. da C. **Médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

SILVA, M. F. T. da. **Médias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

SOUZA, M. H. de. **Estudo do Teorema de Lagrange e Aplicações em Problemas de Otimização**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2019.

STEWART, J. **Cálculo, Volume II**. 5. ed. Tradução de A. C. Moretti; A. C. G. Martins. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

VALLE, M. E. **Aula 8 Multiplicadores de Lagrange**. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA211/Aula8.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2024.