

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ



UFRJ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA -
PROFMAT

DYKES ARAUJO DE BARROS

**PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR
NA APRENDIZAGEM DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NATURAIS
EM DIFERENTES BASES DE CONTAGEM**

RIO DE JANEIRO – RJ

2024

DYKES ARAUJO DE BARROS

**PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR
NA APRENDIZAGEM DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NATURAIS
EM DIFERENTES BASES DE CONTAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat - Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Processos educativos – Tecnologias.

Orientadora: Prof.^a Dra. Maria Helena Cautiero Horta Jardim.

RIO DE JANEIRO – RJ

2024

Dedico essa dissertação à minha mãe, protetora e incentivadora quando necessário. À minha esposa Karla, mentora e companheira de jornadas e descobertas. Aos meus filhos João Pedro e Gabriel Dykes, a quem respeito e incentivo para que este trabalho possa ser por eles ultrapassado academicamente. Aos meus professores que me permitiram construir este valoroso caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelos aprendizados. Momentos de angústias ou de alegrias são sempre poderosas lições de vida, desenvolvendo nossa resiliência, nos tornando melhores.

À minha mãe, que apesar de não ter tido a oportunidade dos bancos escolares, obteve através da vida, a sabedoria e a energia necessárias para educar e instruir seus filhos.

À minha esposa, companheira e mentora de jornadas Karla Brito. Presente de Deus para minha vida que incentivou e apoiou em todos os momentos esta seara de construção.

Aos meus filhos João Pedro e Gabriel Dykes pelo entusiasmo pela trajetória do papai.

A todos os meus colegas de turma, em especial aos queridos Gabriel, Lucilene e Luiz, em particular aos amigos Junior (Altamir) e Alex Araujo pela parceria e disponibilidade. Conviver com um grupo tão especial trouxe alegria ao curso.

Aos professores, Nei Rocha, brilhante e inspirador, Maria Agueiras sempre generosa e pedagógica, Walcy Santos, organizada em todos os sentidos, Maria Darcy, Monique, Marisa Leal e André, pela oportunidade de aprender. Obrigado!

À professora e orientadora deste trabalho Maria Helena Cautiero por conduzir minha caminhada. Gratidão pelo incentivo e compreensão através de uma trajetória efetivamente não linear.

À UFRJ e aos professores da banca que aceitaram o convite e contribuíram para o sucesso deste trabalho.

Aos meus diretores das escolas municipais de Teresópolis, Cláudia Ventura e Cláudio Jacques, que permitiram a participação dos estudantes que participaram desse trabalho.

À Capes, pelo apoio através da bolsa.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste projeto de pesquisa.

“Não basta ensinar, é preciso, sobretudo, que os alunos aprendam. Não é ensinar que faz o aluno gostar. O que ele gosta é de aprender.” (Sérates, 1998)

RESUMO

BARROS, D. A. **Proposta para Visualização Circular na aprendizagem de adição e subtração de naturais em diferentes bases de contagem.** 2024. 120f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

Este trabalho propõe a utilização de uma proposta para visualização operacional simples para operações de adição e subtração, diferenciado em sua aplicação e uso, ou seja, um procedimento de cálculo não usual. A proposta foi desenvolvida com uma perspectiva pedagógico-matemático e não o contrário, e pretende proporcionar aos estudantes uma ferramenta inovadora para a realização dessas operações. O principal objetivo é amenizar para os alunos, os desafios enfrentados na compreensão e operacionalização dos números naturais durante o processo de aprendizagem escolar e foram categorizados como “alunos com grande dificuldade”. O foco está nas operações que envolvem duas quantidades e pode ser ampliado para incluir mais de dois valores no caso de adição. Também pode ser utilizado no ensino médio, cursos técnicos e ensino superior, principalmente em cursos que exijam o trabalho com bases não decimais, como os relacionados à tecnologia de informática e eletrônica. Esta proposta para visualização é baseada na estrutura posicional dos símbolos e seus valores lógicos que compõem os sistemas de contagem, sejam eles numéricos ou não.

Palavras-Chave: Proposta Visualização Operação Circular; Educação Matemática; Educação Cidadã; Matemática Básica; Ensino Fundamental; Ensino Médio; Ensino Técnico; Ensino Superior; Bases Numéricas; Bases Simbólicas; Adição; Subtração; Dificuldade no aprendizado; Adequação idade/ano de escolaridade;

ABSTRACT

BARROS, D. A. Proposal for Circular Visualization in learning addition and subtraction of naturals in different counting bases. 2024. 120f. Dissertation (Master's Degree) - Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024.

This work proposes the use of a simple operational device for addition and subtraction operations, differentiated in its application and use, that is, an unusual calculation procedure. The visualization device was developed from a pedagogical-mathematical perspective, rather than the other way around, and aims to provide students with an innovative tool for carrying out these operations. The main objective is to alleviate the challenges faced by students in understanding and operating natural numbers during the school learning process and they have been categorized as "students with great difficulty". The focus is on operations involving two quantities and can be extended to include more than two values in the case of addition. It can also be used in high school, technical courses and higher education, especially in courses that require working with non-decimal bases, such as those related to computer technology and electronics. This device is based on the positional structure of the symbols and their logical values that make up counting systems, whether numerical or not.

Key words: Operation Visualization Circular Proposal; Mathematics Education; Citizen Education; Basic math; Elementary School; High school; Technical education; University education; Numerical Bases; Symbolic Bases; Addition; Subtraction; Learning Difficulties. Age/grade appropriateness;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Estátua de Fibonacci no Camposanto Monumental de Pisa.....	24
Figura 2: Estátua de Fibonacci (detalhe).....	24
Figura 3: Página do Liber Abaci da Biblioteca Nazionale di Firenze.....	26
Figura 4: Espiral de Fibonacci.....	27
Figura 5: Construção dos números de 0 a 99.....	32
Figura 6: Construção dos números de 100 a 199.....	33
Figura 7: Construção dos números de 200 a 1099.....	33 e 34
Figura 8: Exemplo de aplicação do Quadro Valor de Lugar (QVL).....	44
Figura 9: Exemplo de aplicação do método das somas parciais.....	44
Figura 10: Exemplo de aplicação do Algoritmo da adição usando a expansão na base 10.....	44
Figura 11: Exemplo de aplicação Algoritmo de diferenças parciais.....	45
Figura 12: Exemplo de aplicação Algoritmo de diferenças parciais.....	46
Figura 13: Exemplo de aplicação Algoritmo de igualdade de adições.....	46
Figura 14: Sequência exibindo a subtração no algarismo de 3ª ordem base binária – ex 2.....	72
Figura 15: Diagrama de Venn para um conjunto.....	116
Figura 16: Diagrama de Venn para dois conjuntos.....	117
Figura 17: Diagrama de Venn para três conjuntos.....	117
Figura 18: Diagrama de Venn para três conjuntos.....	117
Figura 19: Diagrama de Venn para quatro conjuntos.....	118
Figura 20: Diagrama de Venn para cinco conjuntos.....	118
Figura 21: Divisão clássica pelo Algoritmo da Chave – Divisão Euclidiana.....	119
Figura 22: Divisão através do Dispositivo de Briot-Ruffini.....	119

LISTA DE DIAGRAMAS

Diagrama 1: Adição 1ª ordem base decimal.....	48
Diagrama 2: Adição 1ª ordem base decimal.....	49
Diagrama 3: Adição 2ª ordem base decimal.....	49
Diagrama 4: Subtração 1ª ordem base decimal.....	50
Diagrama 5: Subtração 1ª ordem base decimal.....	51
Diagrama 6: Subtração 2ª ordem base decimal.....	52
Diagrama 7: Adição 1ª ordem base decimal – Exemplo 1.....	53
Diagrama 8: Adição 2ª ordem base decimal – Exemplo 1.....	54
Diagrama 9: Adição 1ª ordem base decimal – Exemplo 2.....	54
Diagrama 10: Adição 2ª ordem base decimal – Exemplo 2.....	55
Diagrama 11: Subtração 1ª ordem base decimal– Exemplo 1.....	55
Diagrama 12: Subtração 2ª ordem base decimal– Exemplo 1.....	56
Diagrama 13: Subtração 1ª ordem base decimal– Exemplo 2.....	57
Diagrama 14: Subtração 2ª ordem base decimal – Exemplo 2.....	57
Diagrama 15: Subtração 1ª ordem base decimal – Exemplo 3.....	58
Diagrama 16: Subtração 2ª ordem base decimal – Exemplo 3.....	59
Diagrama 17: Subtração 3ª ordem base decimal – Exemplo 3.....	59
Diagrama 18: Subtração 4ª ordem base decimal – Exemplo 3.....	60
Diagrama 19: Adição 1ª ordem base octal – Exemplo 1.....	61
Diagrama 20: Adição 2ª ordem base octal – Exemplo 1.....	61
Diagrama 21: Adição 1ª ordem base octal – Exemplo 2.....	62
Diagrama 22: Adição 2ª ordem base octal – Exemplo 2.....	63
Diagrama 23: Subtração 1ª ordem base octal – Exemplo 1.....	63
Diagrama 24: Subtração 2ª ordem base octal – Exemplo 1.....	64

Diagrama 25: Subtração 1ª ordem base octal – Exemplo 2.....	64
Diagrama 26: Subtração 2ª ordem base octal – Exemplo 2.....	65
Diagrama 27: Subtração 3ª ordem base octal – Exemplo 2.....	65
Diagrama 28: Adição 1ª ordem base binária – Exemplo 1.....	66
Diagrama 29: Adição 2ª ordem base binária – Exemplo 1.....	67
Diagrama 30: Adição 3ª ordem base binária – Exemplo 1.....	67
Diagrama 31: Adição 1ª ordem base binária – Exemplo 2.....	68
Diagrama 32: Adição 2ª ordem base binária – Exemplo 2.....	68
Diagrama 33: Adição 3ª ordem base binária – Exemplo 2.....	69
Diagrama 34: Adição 4ª ordem base binária – Exemplo 2.....	69
Diagrama 35: Subtração 1ª ordem base binária – Exemplo 1.....	70
Diagrama 36: Subtração 2ª ordem base binária – Exemplo 1.....	70
Diagrama 37: Subtração 3ª ordem base binária – Exemplo 1.....	71
Diagrama 38: Subtração 1ª ordem base binária – Exemplo 2.....	71
Diagrama 39: Subtração 2ª ordem base binária – Exemplo 2.....	72
Diagrama 40: Adição 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1.....	73
Diagrama 41: Adição 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1.....	74
Diagrama 42: Adição 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1.....	74
Diagrama 43: Adição 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2.....	75
Diagrama 44: Adição 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2.....	75
Diagrama 45: Adição 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2.....	76
Diagrama 46: Subtração 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1.....	77
Diagrama 47: Subtração 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1.....	77
Diagrama 48: Subtração 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1.....	78
Diagrama 49: Subtração 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2.....	78

Diagrama 50: Subtração 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2.....	79
Diagrama 51: Subtração 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2.....	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Códigos associados aos tipos de falhas na aplicação da Proposta para Visualização Circular e sua interpretação.....	84
---	----

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
MA	Matemática
MEC	Ministério da Educação
N	Conjunto dos números Naturais
N_b	Número qualquer escrito na base b
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PVC	Proposta para Visualização Circular
SND	Sistema Numérico Decimal (SND)
QVL	Quadro Valor de Lugar
R	Conjunto dos números Reais
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
Z	Conjunto dos números Inteiros

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
2	MOTIVAÇÃO.....	21
3	CONVERSANDO SOBRE OS NÚMEROS.....	22
3.1	Leonardo de Pisa e os números que utilizamos nos dias de hoje.....	24
3.2	O currículo de matemática e as operações de adição e subtração.....	28
3.3	As diferentes bases numéricas ou não numéricas.....	30
3.3.1	Reconhecimento das premissas. Justificativa.....	30
3.3.2	Uma possível construção da sequência dos números na contagem de base decimal e sua Ciclicidade.....	32
4	BASES DE NUMERAÇÃO.....	35
4.1	Bases de Numeração posicionais.....	36
5	PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR E SUA JUSTIFICATIVA.....	37
5.1	E como fica isso na sala de aula?.....	38
5.2	Entendendo as operações de adição e subtração.....	41
5.2.1	Na adição.....	41
5.2.2	Na subtração.....	42
6	ALGORITMOS. DIFERENTES CAMINHOS PARA OBTER O MESMO RESULTADO!	43
6.1	Para a adição.....	43
6.1.1	Quadro Valor de Lugar (QVL)	43
6.1.2	Método das somas parciais	44
6.1.3	Algoritmo da adição usando a expansão na base 10	44
6.2	Para a subtração.....	45
6.2.1	Algoritmo de diferenças parciais	45

6.2.2	Algoritmo Adding Up	46
6.2.3	Algoritmo de igualdade de adições ou algoritmo de compensação.....	46
7	A PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR, SUA ESTRUTURA E OPERAÇÃO.....	47
7.1	Descrição gráfica da PVC	47
7.2	Para a adição.....	48
7.3	Para a subtração.....	50
8	APLICANDO A PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR	53
8.1	Base 10 (decimal).....	53
8.1.1	Adição - Exemplo 1 $54 + 32 = 86$	53
8.1.2	Adição - Exemplo 2 $54 + 38 = 92$	54
8.1.3	Subtração - Exemplo 1 $86 - 54 = 32$	55
8.1.4	Subtração - Exemplo 2 $95 - 57 = 38$	56
8.1.5	Subtração - Exemplo 3 $1002 - 657 = 345$	58
8.2	Base 8 (octal).....	61
8.2.1	Adição - Exemplo 1 $54 + 21 = 75$	61
8.2.2	Adição - Exemplo 2 $74 + 41 = 115$	62
8.2.3	Subtração - Exemplo 1 $76 - 54 = 22$	63
8.2.4	Subtração - Exemplo 2 $264 - 57 = 205$	64
8.3	Base 2 (binário).....	66
8.3.1	Adição - Exemplo 1 $101 + 10 = 111$	66
8.3.2	Adição - Exemplo 2 $101 + 11 = 1000$	68
8.3.3	Subtração - Exemplo 1 $110 - 10 = 100$	70
8.3.4	Subtração - Exemplo 2 $101 - 11 = 10$	71
8.4	Base 16 (hexadecimal).....	73
8.4.1	Adição - Exemplo 1 $8A4 + 12B = 9CF$	73

8.4.2	Adição - Exemplo 2	$AB9 + 28C = D45$	75
8.4.3	Subtração - Exemplo 1	$9CF - 12B = 8A4$	76
8.4.4	Subtração - Exemplo 2	$D45 - 28C = AB9$	78
9	APLICANDO A PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR (PVC) EM SALA DE AULA		80
9.1	METODOLOGIA		80
10	CONCLUSÃO		85
11	ANEXOS		86
	Anexo 1:	Pesquisa de campo - Orientações de aplicação	86
	Anexo 2:	Pesquisa de Campo – Ficha 1– Contas propostas antes da PVC	87
	Anexo 3:	Pesquisa de Campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC .	88
	Anexo 4:	Círculos de Adição – Ficha 3	89
	Anexo 5:	Círculos de Subtração – Ficha 4	90
	Anexo 6:	Pesquisa de Campo – Ficha 5 – Avaliação geral do grupo	91
	Anexo 7:	Respostas Padrão – Ficha 1	92
	Anexo 8:	Respostas Padrão – Ficha 2	93
	Anexo 9:	Respostas Padrão – Ficha 3	94
	Anexo 10:	Respostas Padrão – Ficha 4	95
		Participação pesquisa aluna Lorrana – 6º ano	96
	Anexo 11.1:	Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC	96
	Anexo 11.2:	Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC ...	97
	Anexo 11.3:	Círculos de Adição – Ficha 3	98
	Anexo 11.4:	Círculos de Subtração – Ficha 4	99
	Anexo 11.5:	Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5	100
		Participação pesquisa aluno Wendel – 8º ano	101
	Anexo 12.1:	Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC	101

Anexo 12.2:	Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC..	102
Anexo 12.3:	Círculos de Adição – Ficha 3.....	103
Anexo 12.4:	Círculos de Subtração – Ficha 4.....	104
Anexo 12.5:	Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5.....	105
	Participação pesquisa aluno M^a Vitória – 8º ano	106
Anexo 13.1:	Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC..	106
Anexo 13.2:	Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC..	107
Anexo 13.3:	Círculos de Adição – Ficha 3.....	108
Anexo 13.4:	Círculos de Subtração – Ficha 4.....	109
Anexo 13.5:	Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5.....	110
	Participação pesquisa aluno Mirella – 8º ano	111
Anexo 14.1:	Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC.....	111
Anexo 14.2:	Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC..	112
Anexo 14.3:	Círculos de Adição – Ficha 3.....	113
Anexo 14.4:	Círculos de Subtração – Ficha 4.....	114
Anexo 14.5:	Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5.....	115

1 INTRODUÇÃO

Avançar na formação em Matemática e devolver aos estudantes algum saber.

As primeiras aulas do curso (ProfMat) trouxeram uma salutar discussão sobre a aplicabilidade do aprendizado a ser desenvolvido para a aplicação cotidiana nas muitas escolas de atuação do professor de Matemática. Afinal, objetiva a formação profissional.

Este trabalho que propõe uma visualização de cálculo diferenciada, ou seja, um procedimento de cálculo não usual. Importante destacar que foi elaborado com olhar Pedagógico-Matemático e não o contrário.

Como imaginar a vida no mundo moderno sem a matemática?

Como viver no mundo moderno sem apreender a matemática necessária ao menos para o exercício básico da cidadania? Pagamentos e recebimentos cotidianos nos mercados, lojas e para os serviços, transações bancárias e financiamentos ganham mais clareza a partir do domínio das operações aritméticas e, em sua base, a adição e a subtração, ferramentas de inclusão social.

O primeiro contato com a formalização destas operações ocorre de maneira sutil, adicionando quantidades de objetos concretos como dedos e balas. Objetos comuns ao universo infantil. Após o estudo na base decimal, das ordens e classes de numeração, ainda de forma superficial, apresentam-se em algumas adições, dos algarismos de mesma ordem, os resultados que excedem a uma dezena gerando desta forma o reagrupamento ou ainda, o famoso “vai um” nas “continhas” com duas parcelas. Neste momento, para algumas crianças já se inicia um momento de ruptura com correto entendimento do significado da operação de adição.

Como o profissional que conduz aquele momento de construção pedagógica, normalmente não possui formação especializada ou treino adequado para sanar determinadas situações ou ainda, não possui recursos concretos como as barras de Cuisenaire ou um ábaco simples e precisa “avançar o conteúdo”, pode não oportunizar os caminhos e argumentos

adequados para a correção desta falha de aquisição operacional tão importante e, neste momento, fragiliza o aprendizado do educando. Não é difícil extrapolar o surgimento de outros obstáculos nas etapas seguintes de apresentação das operações com três ou mais parcelas.

Na prática docente o estudante apresenta grande dificuldade nas contas de subtração. O cotidiano em sala de aula ainda revela que, apesar de os primeiros cálculos apresentarem maior facilidade, o reagrupamento agora como “pegar emprestado”, traz muita dificuldade para algumas crianças que não tem a compreensão adequada da operacionalização da subtração e, para muitos, a dificuldade se mantém até a idade adulta.

O presente texto propõe o uso de uma visualização prática desenvolvida e organizada para estas operações, de adição e subtração, extremamente simples em sua aplicação e uso e que tem como objetivo inicial, mitigar as dificuldades ou impedimentos daqueles alunos que tiveram maiores entraves na operacionalização nos números naturais, durante o processo de ensino aprendizagem e que, de alguma forma, sentiram-se ou foram segregados à categoria dos “estudantes com muita dificuldade”. Visa às operações envolvendo apenas duas quantidades, mas pode ser estendido, no caso da adição, a mais de dois valores.

Pode ser usado também como instrumento de inovação pedagógica e apresentado aos educandos como ferramenta de operação de adição e subtração.

Também pode ser utilizado nos ensinos Médio e Superior particularmente naqueles cursos onde o trabalho com bases diferentes da decimal se faz necessário como os ligados à tecnologia da área de informática, eletrônica dentre outros.

Esta proposta tem caráter prático baseia-se na estrutura posicional dos símbolos e de seus valores lógicos que compõem os sistemas de contagem, numéricos ou não. Pode também ser aplicado para a adição e subtração em bases não decimais e também simbólicas, ou seja, que não utilizam algarismos para o processo de contagem. Não traz novação no significado das

operações e sim na concepção de como efetuar-las. O empilhamento dos valores a serem operados, segundo suas ordens relativas, ainda pode ser feito pelo estudante, se assim desejar.

Há outros algoritmos e dispositivo práticos na matemática que simplificam o trabalho dos estudiosos que efetivamente são, fazendo referência aos atores objetivo, os alunos e professores.

Poderíamos, para exemplificar, fazer o paralelo entre a divisão regular de um polinômio qualquer por um polinômio do primeiro grau através do algoritmo da divisão euclidiana que pode ser visualmente organizada através do “método da chave” e sua versão mais prática através da aplicação do “Dispositivo de Ruffini” que a torna extremamente simples e ágil.

Ou ainda a representação dos elementos de dois ou mais conjuntos para operá-los na união, interseção e outras mais, através do uso do “Diagrama de Venn-Euler”.

São ferramentas, algoritmos e dispositivo práticos, simples e de grande utilidade. No apêndice deste trabalho são apresentadas ambas para referência do leitor.

Há breve abordagem histórica sobre Leonardo de Pisa mais conhecido “Leonardo Fibonacci” e sua importância na apresentação e difusão dos algarismos hindu-arábicos no mundo ocidental em substituição ao sistema Romano.

O desenvolvimento e a popularização do uso dos números que utilizam os algarismos que hoje estão em nosso cotidiano sofreram grande resistência pela Igreja Europeia que concentrava grande influência, naquele momento, nos séculos X e XI.

A Proposta para Visualização Circular (PVC) traz, como base operacional, simplicidade e aplicabilidade. Objetiva auxiliar tantas pessoas que ainda possuam dificuldades nas operações aritméticas cidadãos de adição e subtração após, ou de modo concomitante, ao momento escolar, em qualquer idade e atividade no mundo do trabalho ou não.

Aos que acessarem este trabalho e identificarem o não ineditismo da proposta **como apresentada**, façam contato (profdykes@hotmail.com) para que os devidos créditos sejam dados.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.” (Descartes)

2 MOTIVAÇÃO

A experiência em sala de aula vislumbra múltiplos objetivos, dentre eles a aquisição intelectual, associada ao processo de ensino-aprendizagem, e a interação social que vem permeada pela infinidade de origens e matizes familiares.

De modo geral, proporciona formação da cidadania e à preparação do educando para o chamado “mundo do trabalho” associado à sua participação durante seu período produtivo, onde colabora com a sociedade como um todo, entregando sua força laborativa e recebendo a contrapartida do Estado.

Neste sentido, apresentar-se ao seu momento de contribuição laborativa com formação e informações adequadas tornará não somente sua força de trabalho utilizada plena e em condições de desenvolvimento, mas também contribuirá para fortalecer sua autoestima e percepção de utilidade para com o grupo social com que convive e troca experiências.

[...] a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (Brasil, 1997. p. 15)

A aquisição de um ferramental mínimo de conhecimento e habilidades matemáticas que propicie ao cidadão inserir-se de forma produtiva na sociedade passa, dentre outras necessidades básicas, pela adição e subtração, sua operação e interpretações, incluindo aí suas

aplicações cotidianas. Assegurar-se do total gasto em uma compra feita no mercado e ser capaz de conferir seu troco, quando aplicado, são tarefas corriqueiras e não deveriam despertar desconfortos.

A proposta inicial deste trabalho consolida esta abordagem.

No caminho escolar, nem todos os que o percorrem apresentam o mesmo entendimento e domínio sobre conceitos e operacionalizações. É particular a cada indivíduo.

Este trabalho propõe um caminho alternativo para sanar essas dificuldades operacionais, oferecendo outra visualização capaz de entregar o resultado de adições e subtrações, contidas nos Naturais, onde a necessidade ou entendimento do cálculo formal é diminuída.

É necessário reiterar que a necessidade da correta interpretação da estrutura do número, reconhecendo nos seus algarismos, suas ordens e classes. O adequado empilhamento de seus representantes equivalentes (algarismos que possuam a mesma ordem em cada número) em valores relativos ainda pode ser feito com os números a serem operados e eventualmente leva a quem realiza o cálculo, percepção de segurança, por semelhança ao “montar da conta” no dispositivo regular.

3 CONVERSANDO SOBRE OS NÚMEROS

Uma das maiores preocupações que todos os pesquisadores têm ao publicar na área da Educação Matemática, em geral, é que essas produções possam ser de fato utilizadas por professores e alunos.

(...). A ideia não é fazer pesquisa pela pesquisa, mas de disponibilizar materiais utilizáveis, acessíveis, viáveis que possam realmente “chegar às salas de aula” e, com isso, possibilitar interações mais interessantes entre professores e alunos no sentido de aprender os conteúdos de Matemática. (Miguel Chaquiam, 2017. p.4)

Os símbolos numéricos utilizados hoje representam a evolução da representação da necessidade de registrar a contagem de objetos ou acontecimentos relevantes à humanidade ao longo de seu desenvolvimento.

Tais escritas passaram por diferentes momentos de muitas civilizações.

Diversos povos contribuíram para esta evolução.

O caminho inicial utilizado foi a correspondência um a um, ou biunívoca, que permitiu comparar com facilidade duas coleções, sem ter que recorrer à contagem abstrata. “Foi sem dúvida graças a este princípio que, durante milênios, o homem pré-histórico pôde praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato” (IFRAH, 1989. p.29).

O pastor primitivo, segundo relatos históricos, utilizava pedrinhas para controlar seu rebanho. Cada pedrinha estaria associada a cada um dos animais que cuidava. Caracterizando a correspondência biunívoca. A BNCC (Brasil, 2018) traz esta associação já no primeiro ano do ensino fundamental (EF01MA02).

As escritas numéricas receberam maior significado conforme evoluíram. Registros foram documentados nas Ilhas Novas Hébridas, noroeste do Reino Unido, houve uma das primeiras relações com a quantidade de dedos da mão humana.

“A mão do homem se apresenta, assim, como a "máquina de contar" mais simples e mais natural que existe. E é por isso que ela exercerá um papel considerável na gênese do nosso sistema de numeração...” (IFRAH, 1989. p.51)

Surgiram então no continente europeu os sistemas Sumério, o Egípcio, o Mesopotâmico e o Romano que ainda reconhecemos hoje. O sistema Grego também exerceu grande importância em sua época.

No continente americano os Maias tiveram grande influência no registro dos números, assim como os chineses na Ásia Oriental.

Os sistemas de numeração posicionais por serem mais eficientes ofuscaram os não posicionais, como o Romano. Dentre os posicionais, os de base dez, particularmente o desenvolvido pelos hindu-arábicos, se solidificou no mundo.

“Pelo número de dedos e graças a sua relativa autonomia e grande mobilidade, ela constitui a coleção de conjuntos padrão mais simples de que o homem dispõe”. (IFRAH, 1989, p. 50). Contar com os dedos tornou-se bastante natural, o que provavelmente resultou na escolha pela base dez.

Essa opção ainda está presente em nossos dias, “De fato, como a humanidade aprendeu a contar nos dez dedos da mão, esta preferência quase geral pelos grupos de dez foi comandada por este acidente da natureza que é a anatomia das nossas duas mãos”. (IFRAH, 1989, p. 58).

3.1 Leonardo de Pisa e os números que utilizamos nos dias de hoje

Leonardo Fibonacci nasceu em 1170 na cidade de Pisa, foi um matemático italiano, de grande influência na idade média. Muitos consideram Fibonacci como o maior matemático de seu tempo. Introduziu os algarismos arábicos na Europa e descobriu uma sequência bastante peculiar a que hoje conhecemos como “Sequência de Fibonacci”.

Como prestou grandes serviços a cidade de Pisa, o matemático possui uma estátua em sua homenagem, localizada na galeria ocidental do Camposanto.



Figura 1



Figura 2

Estátua de Fibonacci no Camposanto Monumental de Pisa (com detalhe)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Leonardo Fibonacci, nasceu Leonardo Pisano em Pisa. Filho de Guglielmo dei Bonacci, um próspero mercador. Acompanhou as atividades do pai no porto de Pisa, que mantinha grande influência no comércio do Mediterrâneo. Era representante dos comerciantes da República de Pisa (*publicus scriba pro pisanis mercatoribus*) em Bugia, na região de Cabília em Bejaia, hoje conhecida como Argélia. Leonardo passou alguns anos naquela cidade. Na época, Pisa mantinha uma importante atividade comercial nos portos do Mediterrâneo, e seu pai atuava como uma espécie de fiscal alfandegário neste importante porto exportador de velas de cera, situado a leste de Argel, no Califado Almóada. Através das atividades de comércio alfandegário, Fibonacci tomou contato com a matemática hindu e árabe, praticada no comércio oriental.

Ao reconhecer que a aritmética, com algarismos árabes, era mais simples e eficiente do que com os algarismos romanos, Fibonacci viajou por todo o mundo mediterrâneo, chegando até Constantinopla, para estudar com os matemáticos árabes mais importantes de então, alternando os estudos com a atividade comercial. Muito do seu aprendizado deve ser creditado às obras de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, de Abu Kamil e de outros mestres árabes. Mas Fibonacci não foi um mero difusor dessas obras.

De volta à Itália, em torno de 1200, sua fama chega à corte do imperador Frederico II, sobretudo depois de ter resolvido alguns problemas matemáticos da corte. Por essa razão, foi atribuído a ele um rendimento vitalício, o que permitiu dedicar-se completamente aos estudos.

Em 1202, aos 32 anos, publicou o *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), introduzindo os numerais hindu-árabes na Europa, com a frase:

“Os números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove algarismos, e com o símbolo 0 (zero), qualquer número pode ser escrito”.

É um livro histórico sobre aritmética que introduziu na Europa a numeração árabe, a notação posicional esclarecendo o funcionamento desta numeração e o zero, aprendido por

Fibonacci com os árabes enquanto viveu com o seu pai, no Norte de África. Tal obra foi responsável por apresentar à Europa o sistema numérico indiano, que usamos até hoje.

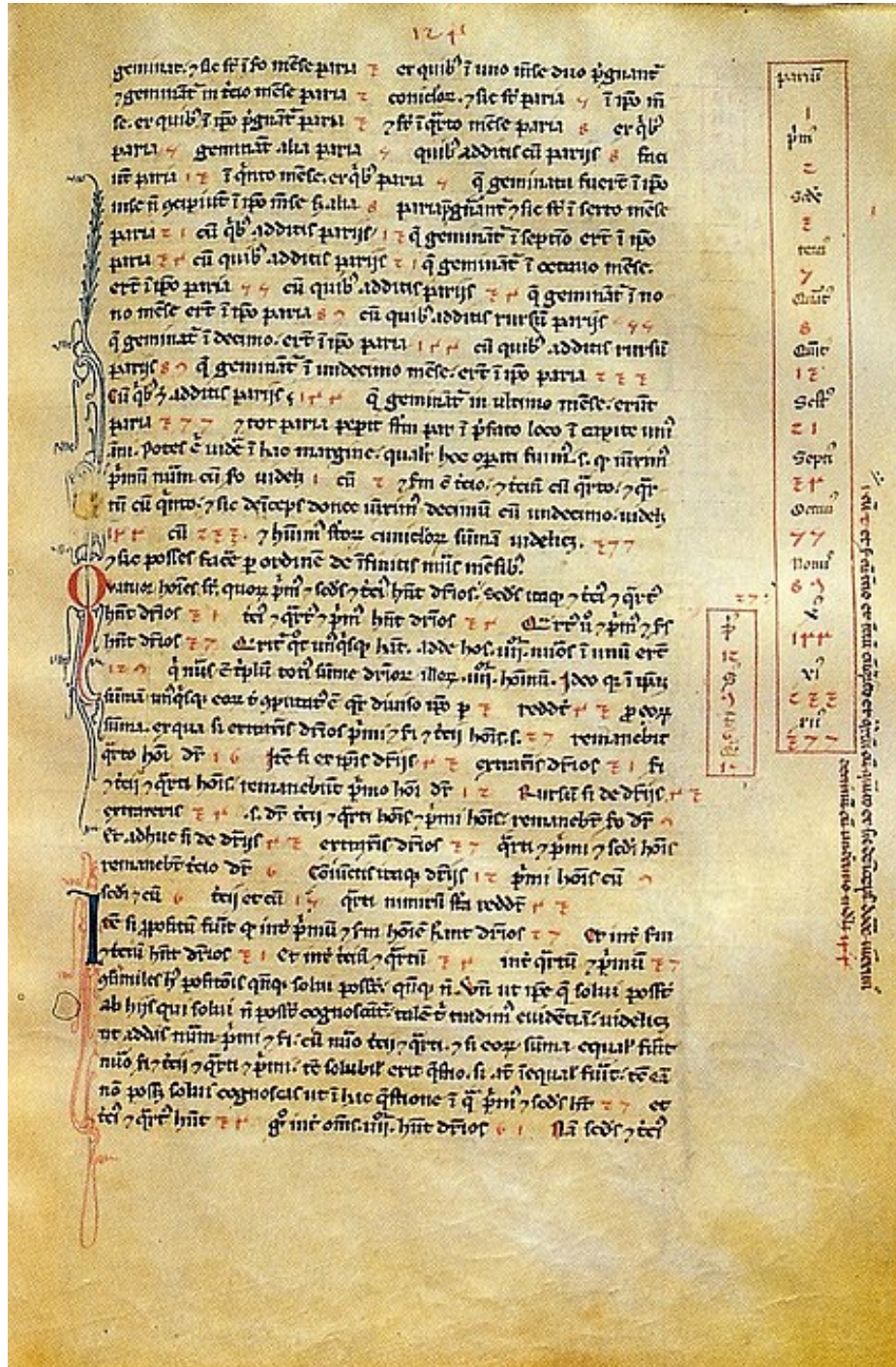


Figura 3: Uma página do Liber Abaci da Biblioteca Nazionale di Firenze.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci

Sob a proteção do imperador Frederico II, e por ter resolvido problemas matemáticos da corte, Fibonacci aprofundou seus estudos sobre matemática, avaliando que os algarismos arábicos seriam mais eficientes que os números romanos para cálculos aritméticos. Isso fez com que o matemático pudesse viver apenas dos estudos e pesquisas.

Outros livros importantes do matemático: "Practica Geometriae" (1220), "Di minor guisa", sobre aritmética comercial e "Commentário ao Livro X" de "Os Elementos", de Euclides.

Dentre as inúmeras contribuições de Fibonacci, destaca-se a famosa sequência de Fibonacci. Contribuição esta que deu origem a muitas pesquisas sobre padrões numéricos e geométricos presentes na natureza. Esta sequência possibilita a construção da famosa Espiral de Fibonacci que aparece quando construímos uma série de quadrados cujos lados são os números da Sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)

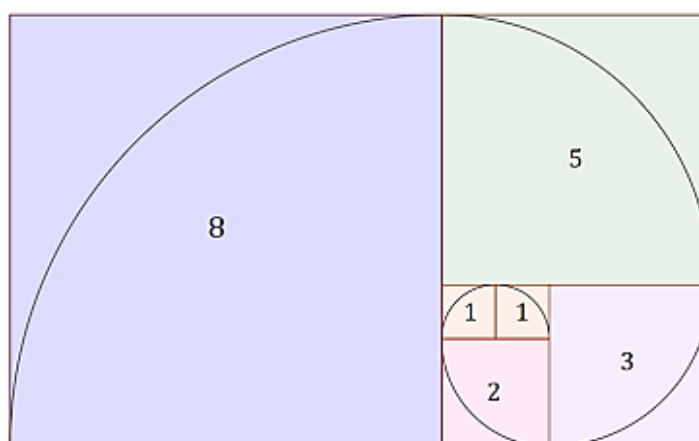


Figura 4: Espiral de Fibonacci

Fonte: infoescola.com/biografias/leonardo-fibonacci/

Não se tem informações comprovadas da vida de Fibonacci depois de 1228. Presume-se que tenha falecido em 1250 com cerca de 80 anos de idade.

“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas, ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana”.

Carl Gustav Jung. (MOREIRA, 2018, p. 206)

3.2 O currículo de matemática e as operações de adição e subtração

As operações de adição e subtração são fundamentais na matemática e fazem parte do currículo de matemática em muitos países, incluindo o Brasil, em suas diferentes regiões.

No contexto do sistema de base dez, a adição é a operação de combinar dois ou mais números para obter uma soma. No ensino fundamental, as crianças geralmente aprendem a adição usando estratégias como contar nos dedos, contar em voz alta ou usar representações visuais, como blocos de contagem. À medida que avançam, aprendem a realizar adições mentalmente, usando algoritmos convencionais e propriedades numéricas, como a comutatividade e a associação.

A subtração, por sua vez, é a operação inversa da adição e envolve retirar um número de outro para obter uma diferença. Também são ensinadas estratégias para realizar subtrações, começando com representações concretas e progredindo para a subtração mental e o uso do algoritmo convencional.

Os PCNs fornecem orientações para o ensino da matemática em diferentes níveis de ensino, incluindo os conteúdos que devem ser abordados, os objetivos educacionais e as competências esperadas dos estudantes. Eles podem incluir tópicos específicos relacionados às operações de adição e subtração, como a introdução das operações no início do ensino fundamental, a exploração das propriedades das operações e o desenvolvimento de estratégias eficientes de cálculo mental.

No âmbito dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que estabelecem diretrizes para o ensino da matemática, as operações de adição e subtração são consideradas conteúdos essenciais em diferentes etapas da educação básica. Esses conteúdos são trabalhados progressivamente, conforme os estudantes avançam em seus níveis de aprendizado.

No início da educação básica, por exemplo, as crianças são apresentadas à adição e subtração por meio de atividades lúdicas e manipulativas, com o objetivo de desenvolver a compreensão dos conceitos básicos e a habilidade de contar e combinar quantidades. Os PCNs enfatizam a importância de explorar diferentes estratégias de cálculo, como o uso de material concreto, desenhos, representações pictóricas e até mesmo o cálculo mental, para que os alunos possam compreender as operações de forma concreta e visual.

À medida que os estudantes avançam para séries mais avançadas, as operações de adição e subtração se tornam mais complexas. Os PCNs sugerem que os alunos ampliem seu conhecimento sobre a estrutura do sistema de numeração decimal, a fim de realizar cálculos com números maiores e decimais. Nesse estágio, os estudantes são incentivados a desenvolver estratégias eficientes de cálculo, como o uso do algoritmo convencional da adição e subtração, além de técnicas de estimativa e arredondamento.

Além disso, os PCNs destacam a importância de relacionar as operações de adição e subtração a situações do cotidiano, de modo a tornar a matemática mais significativa para os alunos. Isso pode envolver a resolução de problemas envolvendo dinheiro, medidas, tempo e outras situações práticas que exigem o uso das operações.

Relacionar, através da adequada interpretação e entendimento, a uma situação do cotidiano ao cálculo da adição ou subtração, realizar a operação obtendo um resultado que traga solução coerente e aplicável reflete, na verdade, o resultado de tempo de aprendizado e treino. Infelizmente alguns, estudantes ou não, têm extrema dificuldade para concretizar tais etapas.

3.3 As diferentes bases numéricas ou não numéricas

3.3.1 Reconhecimento das premissas. Justificativa.

“A pesquisa debruça-se sobre um objeto reconhecível e definido de tal modo que seja igualmente reconhecível pelos outros.” (Umberto Eco, 2008. 21ed., p.52)

Tomando um conjunto de símbolos que podem ser ou não numéricos (algarismos), sua combinação e valor posicional relativo poderão representar determinado valor. A quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração é chamada de base.

Particularmente, em relação às bases exclusivamente numéricas, ao tomarmos uma base k , $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, teremos $k - 1$ símbolos que podem ser indefinidamente combinados em suas possibilidades, para representar distintos valores.

Atendendo ao escopo deste trabalho, como objeto inicial de estudo, apenas os elementos e operações no conjunto dos números naturais serão considerados.

Deve-se a *Giussepe Peano (1858-1932)* o estudo inicial mais estruturado que trouxe à matemática maior organização e lógica a este conjunto, caracterizando seus elementos e que trazem seu nome: Axiomas de Peano.

Uma de suas escritas mais simples é:

1. Todo número natural n possui um único sucessor que é um número natural.
2. Se dois números naturais têm o mesmo sucessor então são iguais.
3. No conjunto dos números naturais existe um único número, denotado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. Seja um subconjunto N de números naturais que verifica
 - $1 \in N$;
 - dado um número natural $n \in N$ o sucessor de n também está em N .

Então N é o conjunto de todos os números naturais.

O modo como Peano escreveu o sucessor de 1 foi como $1 + 1$, onde o símbolo “+” não significa a *adição* de 1 mais 1, mas o *seguinte* de 1 ou o *sucessor* de 1.

É justamente a ideia intuitiva de acrescentar elementos de 1 em 1 a um conjunto inicial que tem um elemento.

Esta intenção possibilitou a cristalização de caminhos ou métodos que auxiliaram muito a demonstração de inúmeros teoremas, propriedades e igualdades na matemática através do Princípio da Boa Ordenação o que levou à Indução Finita.

O conjunto dos números naturais é um conjunto indutivo.

No dia a dia utilizamos a base decimal que possui dez símbolos para representar as quantidades usuais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Por ser a base numérica de uso mais comum, segue uma breve análise de sua construção.

A sequência de contagem se faz através do valor atribuído a um símbolo dependente da posição em que ele se encontra no conjunto de símbolos que representa uma quantidade. O valor do número que se deseja obter para representar determinada quantidade é a soma dos valores relativos de cada algarismo (decimal).

Apenas para contrapor a notação posicional, há aquela que não é posicional, onde o valor atribuído a um símbolo é inalterável, independentemente da posição em que se encontre no conjunto de símbolos que representam uma quantidade. O sistema de numeração romana é um exemplo desta notação não posicional.

Tal sistema, o romano, que dominava a escrituração do comércio naquele momento dificultava o fluxo das mercadorias nos portos. O uso do ábaco tornava-se imprescindível para os necessários cálculos contábeis. Daí o título dado à primeira grande obra de Fibonacci, *Liber Abaci* significa o "Livro do Cálculo", que também foi traduzido como "Livro do Ábaco". Registre-se que Sigler (2002) escreve que a intenção do livro é descrever os métodos de calcular sem recorrer ao referido instrumento.

3.3.2 Uma possível construção da sequência dos números na contagem de base decimal e sua Ciclicidade

Iniciamos esta contagem através dos números que podem ser representados apenas com um algarismo, a partir do zero.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dado que o algarismo ‘9’ é o algarismo de maior valor numérico disponível nessa base, para poder representar um número maior do que 9 é necessário adicionar mais um dígito ao número original, sendo que esse dígito deve ter um peso igual ao peso do número representado até então mais um. Para o caso da base decimal, se o último número representado foi 9 então o peso do próximo dígito é $9 + 1 = 10$, ou seja, utilizamos a justaposição, no início, do sucessor do primeiro algarismo (zero) utilizado em toda a sequência anterior já registrada.

Este procedimento denota a ciclicidade no uso dos algarismos de acordo com a construção no quadro seguinte:

0	1 0	2 0	3 0	. . .	8 0	9 0
1	1 1	2 1	3 1	. . .	8 1	9 1
2	1 2	2 2	3 2	. . .	8 2	9 2
3	1 3	2 3	3 3	. . .	8 3	9 3
4	1 4	2 4	3 4	. . .	8 4	9 4
5	1 5	2 5	3 5	. . .	8 5	9 5
6	1 6	2 6	3 6	. . .	8 6	9 6
7	1 7	2 7	3 7	. . .	8 7	9 7
8	1 8	2 8	3 8	. . .	8 8	9 8
9	1 9	2 9	3 9	. . .	8 9	9 9

Figura 5: Construção dos números de 0 a 99

Fonte: produzida pelo autor

E depois:

.
9 0 0	9 1 0	9 2 0	9 3 0	. . .	9 8 0	9 9 0
9 0 1	9 1 1	9 2 1	9 3 1	. . .	9 8 1	9 9 1
9 0 2	9 1 2	9 2 2	9 3 2	. . .	9 8 2	9 9 2
9 0 3	9 1 3	9 2 3	9 3 3	. . .	9 8 3	9 9 3
9 0 4	9 1 4	9 2 4	9 3 4	. . .	9 8 4	9 9 4
9 0 5	9 1 5	9 2 5	9 3 5	. . .	9 8 5	9 9 5
9 0 6	9 1 6	9 2 6	9 3 6	. . .	9 8 6	9 9 6
9 0 7	9 1 7	9 2 7	9 3 7	. . .	9 8 7	9 9 7
9 0 8	9 1 8	9 2 8	9 3 8	. . .	9 8 8	9 9 8
9 0 9	9 1 9	9 2 9	9 3 9	. . .	9 8 9	9 9 9
1 0 0 0	1 0 1 0	1 0 2 0	1 0 3 0	. . .	1 0 8 0	1 0 9 0
1 0 0 1	1 0 1 1	1 0 2 1	1 0 3 1	. . .	1 0 8 1	1 0 9 1
1 0 0 2	1 0 1 2	1 0 2 2	1 0 3 2	. . .	1 0 8 2	1 0 9 2
1 0 0 3	1 0 1 3	1 0 2 3	1 0 3 3	. . .	1 0 8 3	1 0 9 3
1 0 0 4	1 0 1 4	1 0 2 4	1 0 3 4	. . .	1 0 8 4	1 0 9 4
1 0 0 5	1 0 1 5	1 0 2 5	1 0 3 5	. . .	1 0 8 5	1 0 9 5
1 0 0 6	1 0 1 6	1 0 2 6	1 0 3 6	. . .	1 0 8 6	1 0 9 6
1 0 0 7	1 0 1 7	1 0 2 7	1 0 3 7	. . .	1 0 8 7	1 0 9 7
1 0 0 8	1 0 1 8	1 0 2 8	1 0 3 8	. . .	1 0 8 8	1 0 9 8
1 0 0 9	1 0 1 9	1 0 2 9	1 0 3 9	. . .	1 0 8 9	1 0 9 9

Figura 7: Construção dos números de 200 a 1099

Fonte: produzida pelo autor

E assim sucessivamente.

Este processo pode ser usado de modo recorrente para a construção dos números naturais de modo crescente.

É justamente este mecanismo de construção que indica a ciclicidade dos algarismos utilizados que usaremos na construção e justificativa da *Proposta para Visualização Circular*.

4 BASES DE NUMERAÇÃO

O ato de numerar refere-se à atribuição de números a objetos, quantidades ou posições com o objetivo de organizar, contar, identificar e representar informações de forma sistemática e eficiente.

A numeração desempenha um papel fundamental na matemática e na vida cotidiana. Ela nos permite realizar contagens, cálculos matemáticos, identificar posições em uma sequência, entre outras aplicações. Através da numeração, podemos expressar quantidades e relações numéricas de maneira universalmente compreendida.

Para numerar necessitamos de um sistema adequado e organizado de numeração e estes são organizados segundo sua característica particular a que chamamos de base.

Há diferentes bases de numeração, numéricas e não-numéricas.

Para nosso estudo, símbolos numéricos ou não, são utilizados para registrar valores. Uma vez ordenados formam o número. Seu ordenamento caracteriza para cada um destes símbolos, da direita para a esquerda, as ordens crescentes. Um número com um símbolo possui uma ordem, com dois símbolos, duas ordens, com três símbolos, três ordens e assim sucessivamente.

Podemos representar, sem perda de generalidade, um número qualquer por $N = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_2 n_1 n_0$ onde k representa o símbolo de ordem $k + 1$, $k \geq 0$.

Como dito, há diferentes bases de numeração, numéricas e não-numéricas. Este trabalho aborda, para serem operacionalizadas pelo público alvo apenas as bases ditas posicionais, ou seja, aquelas onde a ordem ocupada pelo símbolo possui valor relativo.

Para exemplificar, na base dez, no número 555 formado por três algarismos, o primeiro deles tem valor relativo de 500, o segundo 50 e o terceiro 5. Temos o mesmo algarismo assumindo diferentes valores de acordo com sua posição relativa no número a que pertence.

Veremos à frente mais informações a respeito dos sistemas de numeração posicionais.

Nos sistemas não posicionais, o mesmo símbolo permanece com seu valor absoluto independentemente de sua posição no número a que pertence.

4.1 Bases de Numeração posicionais

Para estabelecer uma base de numeração se faz necessário um conjunto de símbolos para representar quantidades e de regras que definem a forma como esta representação será feita.

Cada sistema de numeração é peculiar e traz em si apenas um método diferente de representar quantidades. As quantidades propriamente ditas não mudam; mudam apenas os símbolos usados para representá-las.

A quantidade de algarismos ou símbolos disponíveis em um dado sistema de numeração é chamada de base e a representação que as diferentes ordenações podem caracterizar diferentes “números” e mais empregada é a notação posicional.

O valor atribuído a um símbolo depende da posição em que ele se encontra no conjunto de símbolos que representa uma quantidade.

O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo relativamente à sua base.

A formação dos números depende da quantidade de algarismos disponíveis no referido sistema e, naturalmente, quanto maior a quantidade de símbolos pertencentes à base em questão, menor será a quantidade deles para representar um determinado valor e também menor será a quantidade de repetições de seus símbolos.

Denotaremos um número N escrito na base b por $(N)_b$ ou mais simplesmente N_b .

Para exemplificar:

$$12345_{10} = 3039_{16} = 3007_{18} = 133053_6 = 3000321_4 = 11000000111001_2$$

As bases de numeração têm características gerais e comuns.

Observações a respeito dos números representados na base dez.

- Símbolos: o sistema de numeração decimal tem apenas dez símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. Com eles podemos escrever qualquer número, por maior que seja.

- Base: O sistema de numeração indo-arábico é de base dez, por que os agrupamentos são feitos de dez em dez.

- Posicional: O sistema de numeração indo-arábico é posicional porque o mesmo símbolo representa valores diferentes, dependendo da posição que ocupa no numeral. No número 224, o algarismo 2 tem valor posicional duzentos e valor posicional vinte.

- Zero: Além de ser posicional, o sistema indo-arábico utiliza o zero para indicar uma posição vazia, dentre os agrupamentos de dez do número considerado.

As operações de adição e subtração dos números representados em uma mesma base numérica podem ser realizadas observando-se as ordens relativas aos seus algarismos.

A base dez é particularmente importante pois a conversão entre bases diferentes da decimal a utiliza como base de apoio.

5 A PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR E SUA JUSTIFICATIVA

As operações de adição e subtração dos números representados em uma mesma base numérica podem ser realizadas observando-se as ordens relativas aos seus algarismos associadas às potências da referida base. Lembramos uma vez mais que o objetivo são as operações cujos operandos e resultados são elementos dos números naturais.

Doravante, para facilitar a representação entre os valores que serão apresentados como exemplo nas operações de adição e subtração, denotaremos um número “ N_b ” pertencente à base b , numérica ou não, tal que $N_b = n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_2 n_1 n_0$, $k \geq 0$, onde n_0 é o algarismo ou símbolo de menor valor posicional relativo, n_1 é o algarismo ou símbolo de segundo menor valor posicional relativo e assim sucessivamente até chegarmos ao algarismo de posição n_k que deve representar o maior valor posicional relativo.

É sempre possível representar um número qualquer escrito na base “ b ” através do somatório:

$$\begin{aligned} N_b &= n_k n_{k-1} n_{k-2} \dots n_2 n_1 n_0 \\ &= n_k b^k + n_{k-1} b^{k-1} + n_{k-2} b^{k-2} + \dots + n_2 b^2 + n_1 b^1 + n_0 b^0 \\ &= \sum_{j=0}^k n_j b^j \end{aligned}$$

Isto justifica o fato de um mesmo algarismo possuir diferente valor relativo devido à sua posição no número. Sua posição está associada a uma determinada potência da base na qual o número foi representado.

5.1 E como fica isso na sala de aula?

Os algarismos que compõem o número podem ser obtidos, individualmente, através de divisões sucessivas deste mesmo número pela base na qual está representado. O resto da primeira divisão representa o algarismo a que se refere à potência zero desta base, ou seja, ao algarismo de primeira ordem.

Dividindo o primeiro quociente novamente pela mesma base, o próximo resto representa o algarismo que se refere à potência “um” desta base, ou seja, ao algarismo de segunda ordem.

Este processo pode ser repetido recursivamente até que resulte um quociente que seja menor que a base em questão. Este será o algarismo a que se refere à maior potência desta base.

Formalmente:

$$N_b = n_k b^k + n_{k-1} b^{k-1} + n_{k-2} b^{k-2} + \dots + n_2 b^2 + n_1 b^1 + n_0 b^0$$

Dividindo por b ambos os membros:

$$\frac{N_b}{b} = n_k b^{k-1} + n_{k-1} b^{k-2} + n_{k-2} b^{k-3} + \dots + n_2 b^1 + n_1 b^0 + n_0 b^{-1}$$

Necessariamente n_0 representa um valor menor que a unidade pois $n_0 < b$ e sendo um dos elementos pertencentes à base b seu maior valor seria $b - 1$. Desta forma $b n_0 b^{-1}$ representa um natural e, portanto, o resto inteiro desta divisão.

A abordagem que será oferecida ao educando depende, naturalmente, do nível escolar que se encontra e deve encontrar respaldo pedagógico no correspondente planejamento normalmente feito pela equipe gestora do núcleo escolar.

Nos ensinos médio e superior a escrita formal será melhor compreendida.

No ensino fundamental, quando abordado, a divisão clássica é mais adequada.

A composição e a decomposição de um número, no chamado Sistema Numérico Decimal (SND) para a identificação dos algarismos das ordens que o compõem encontra na BNCC orientação de apresentação durante o terceiro ano de escolaridade.

“(EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.” (Brasil, 2018).

O tema volta a ser indicado no sexto ano do Ensino Fundamental.

“(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a

sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.” (Brasil, 2018).

Tais orientações demonstram o cuidado que o Ministério da Educação, gestor maior das políticas públicas neste segmento, entregou a estes conceitos matemáticos.

Para exemplificar. Tomando $N_{10} = 345$ desejamos representá-lo, na base decimal.

$$\begin{array}{r} 345 \overline{)10} \\ \underline{5} \\ 5 \overline{)10} \\ \underline{4} \\ 4 \overline{)10} \\ \underline{3} \\ 3 \end{array}$$

Assim, este um número que possui $n_2 = 3$, três centenas, $n_1 = 4$, quatro dezenas e $n_0 = 5$, cinco unidades ou seja $N_{10} = 345 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Para a conversão do número N_b em outro valor representado em base numérica distinta t , de tal modo que $N_b = M_t$ basta dividir N_b por t recursivamente obtendo os restos associados ao algarismo de primeira ordem, de segunda ordem e assim sucessivamente até não ser mais possível a divisão, ou seja, que resulte um quociente menor que a base em questão.

O último quociente, será o algarismo que se refere à maior ordem deste número M_t .

Tomando $N_{10} = 345$, representá-lo, na base octal (base 8) ou seja $M_8 = N_{10}$.

$$\begin{array}{r} 345 \overline{)8} \\ \underline{1} \\ 1 \overline{)43} \\ \underline{3} \\ 3 \overline{)5} \\ \underline{5} \\ 5 \end{array}$$

Assim, este um número que possui $n_2 = 5$, $n_1 = 3$ e $n_0 = 1$, ou seja $M_8 = 531$ daí $M_8 = 531 = 5 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0$

5.2 Entendendo as operações de adição e subtração

Para atender ao objetivo deste trabalho apenas quaisquer dois valores naturais, incluído o zero, serão usados.

Situações exibindo operações de adição e subtração dos números de mesma base N_b e M_b tais que:

$$N_b = \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{k-1} \mathbf{n}_{k-2} \dots \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_0 \text{ e}$$

$$M_b = \mathbf{m}_k \mathbf{m}_{k-1} \mathbf{m}_{k-2} \dots \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_0, \quad k \geq 0.$$

onde os algarismos \mathbf{n}_k e \mathbf{m}_k a serem operados têm, necessariamente, a mesma posição relativa, ou seja, ocupam a mesma ordem em N_b e M_b .

Se as quantidades de ordens de N_b e M_b forem distintas é possível justapor zeros em quantidade suficiente à frente daquele que tem a menor quantidade de ordem, para torná-las iguais, em quantidade.

Admitem-se também as seguintes hipóteses:

5.2.1 Na adição

Sem prejuízo à generalização, façamos N_b a primeira parcela e M_b a segunda parcela.

No primeiro caso, operamos no sentido usual, iniciando pelos algarismos de primeira ordem de ambas as parcelas de N_b e M_b , passando para os algarismos de segunda ordem e assim sucessivamente, quaisquer dois termos, \mathbf{n}_k e \mathbf{m}_k , somados, resultam num valor menor ou igual ao maior algarismo representante da base numérica em questão, ou seja, $\mathbf{n}_k + \mathbf{m}_k \leq b - 1$. Neste caso não temos o reagrupamento devido à soma ter ultrapassado o valor da base comumente chamado “vai um” pelos professores e estudantes. Isso será discutido adiante.

No segundo caso, existe algum $k, k \geq 0$ que somados, resultam num valor maior que o maior representante da base numérica em questão, ou seja, $\mathbf{n}_k + \mathbf{m}_k \geq b$.

Nesta situação, $n_k + m_k = b + s$, $s \in \{0, 1, \dots, b - 2\}$. O valor “s” será colocado na mesma posição relativa de n_k e m_k e “b” será reagrupado na ordem imediatamente superior e irá gerar o “+1” na posição associada aos algarismos n_{k+1} e m_{k+1} que continuam ocupando a mesma posição ou ordem relativa.

5.2.2 Na subtração

Sem prejuízo à generalização, façamos N_b minuendo e M_b subtraendo, admitindo obviamente que $N_b \geq M_b$, atendendo ao escopo deste trabalho.

Esta hipótese é satisfeita nas seguintes situações:

1º caso) Se $n_k \geq m_k$, $\forall k > 0$.

2º caso) Se $n_k < m_k$, para algum $k > 0 \exists n_k > m_k$.

onde n_k é um algarismo de maior valor relativo que m_k .

No primeiro caso, quaisquer dois termos, n_k e m_k de mesma posição relativas, quando subtraídos, resultam num valor menor ou igual ao maior representante da base numérica em questão, ou seja, $0 < n_k - m_k \leq b - 1$. É importante ressaltar que, neste caso em questão, se a quantidade de ordens de N_b for maior que a quantidade de ordens de M_b a subtração é trivial pois para algum k , $0 < n_k \leq b - 1$, haverá $m_k = 0$.

No segundo caso, há algum, n_k e m_k , de mesma posição relativas, que subtraídos, resultam num valor maior que o menor representante da base numérica em questão, ou seja, $n_k - m_k \geq 0$.

6 ALGORITMOS. DIFERENTES CAMINHOS PARA OBTER O MESMO RESULTADO!

De acordo com Ifrah (1989, p.299), é “todo procedimento matemático que consiste em passar automaticamente e num encadeamento rigoroso de uma etapa à seguinte”. Naturalmente estes procedimentos devem se ater a resolução de problemas que pertencem a um mesmo grupo de problemas a serem resolvidos com um número finito de etapas.

Há inúmeros algoritmos estudados e propostos por matemáticos estudiosos.

Cada um dos procedimentos e estruturas mostradas a seguir representam diferentes contribuições que encontram maior ou menor uso de acordo com a etapa de formação escolar.

Trazem “raciocínios” nem sempre lineares e, normalmente, pressupõem ou pretendem que o estudante tenha domínio de determinado conceito ou propriedade operacional além da capacidade de representação adequada à redação matemática.

As especificidades aumentam bastante na operação de subtração onde são propostos caminhos distintos para a operacionalização.

6.1 Para a adição

O chamado “algoritmo convencional” é o mais tradicional. Também conhecido “adição sem transporte” e “adição com transporte” fazendo referência à necessidade ou não de reagrupamento a partir da adição de dois algarismos de mesma ordem em cada uma das parcelas. A partir deste, desenvolvem-se reorganizações para operar. Dentre os apresentados, nenhum inova seu procedimento.

6.1.1 “Quadro Valor de Lugar (QVL)” encontra grande aderência na utilização pelos professores da primeira etapa do Ensino Fundamental pois utiliza a organização das ordens dos algarismos que formam os números a serem operados.

258 + 141		
C	D	U
2	5	8
1	4	1
□	□	□

312 + 57		
C	D	U
3	1	2
□	5	7
□	□	□

Figura 8: Exemplos de aplicação do Quadro Valor de Lugar (QVL)
Fonte: produzida pelo autor

6.1.2 “Método das somas parciais” traz outra forma de representar o processo de adição. Faz a decomposição do número em seus valores relativos à cada uma das ordens que o compõem (unidades, dezenas, centenas, ...) e os visualiza em notação vertical, empilhando os valores correspondentes.

$ \begin{array}{r} 312 = 300 + 10 + 2 \\ + 57 = \quad \quad 50 + 7 \\ \hline 300 + 60 + 9 = 369 \end{array} $
--

Figura 9: Exemplo de aplicação do método das somas parciais
Fonte: produzida pelo autor

6.1.3 “Algoritmo da adição usando a expansão na base 10” reescreve o anterior utilizando as potências de acordo com as ordens de cada algarismo envolvido. Utiliza a associatividade e o reagrupamento quando necessário. Necessita de bom domínio conceitual, mas não inova. Os estudantes, de modo geral, o consideram “longo e cansativo”.

$ \begin{aligned} 347 + 272 &= (3 + 2) \times 100 + (4 + 7) \times 10 + (7 + 2) \times 1 \\ &= (3 + 2) \times 100 + (11) \times 10 + 9 \times 1. \\ \text{Reagrupando: } &11 \times 10 = 10 \times 10 + 1 \times 10 = 1 \times 100 + 1 \times 10 \\ \text{Temos: } &(3 + 2 + 1) \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1 \\ &= 619 \end{aligned} $

Figura 10: Exemplo de aplicação do Algoritmo da adição usando a expansão na base 10
Fonte: produzida pelo autor

6.2 Para a subtração

O “**Algoritmo convencional da subtração**” é o mais tradicional e utilizado. Traz em seu procedimento, se necessário, o “recurso a uma ordem superior” através do reagrupamento, inadvertidamente chamado de “pegar emprestado”.

Há outros algoritmos que se propõem ao mesmo objetivo.

Abordam a operação de subtração através de variações de organização e procedimentos diferenciados entre si. Neste sentido, enriquecem as possibilidades de modo mais contundente que aqueles apresentados na adição.

6.2.1 “Algoritmo de diferenças parciais” é operado da esquerda para a direita, ou seja, inicia-se pelas ordens superiores, e tem semelhança, na organização, ao das somas parciais.

Não é adequado aos estudantes das séries iniciais pois alguns dos cálculos parciais podem ser negativos ou ainda exigem “mecanização” de situações para determinar resultados positivos ou negativos.

Subtrações parciais		Aplicação efetiva do Algoritmo
Decomposição inicial		“Única Etapa”
$\begin{array}{r} 349 \\ - 158 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 349 = 300 + 40 + 9 \\ - 158 = 100 + 50 + 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 300 \\ - 100 \\ \hline 200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ - 50 \\ \hline -10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ - 8 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 349 \\ - 158 \\ \hline + 200 \\ - 100 \\ + 1 \\ \hline 191 \end{array}$

Figura 11: Exemplo de aplicação Algoritmo de diferenças parciais

Fonte: produzida pelo autor

6.2.2 “Algoritmo Adding Up” produz por adição, de baixo para cima, o resultado da subtração. Se justifica através do entendimento que subtração é a operação inversa da adição. Se aproxima bastante do cálculo mental feito ao procurarmos o valor do troco (resto ou diferença) para uma determinada despesa partindo do valor da mesma (subtraendo), adicionando valores até obter um outro valor pretendido (minuendo).

Pergunta norteadora: Quanto devemos somar a 167 para obter 349 ?

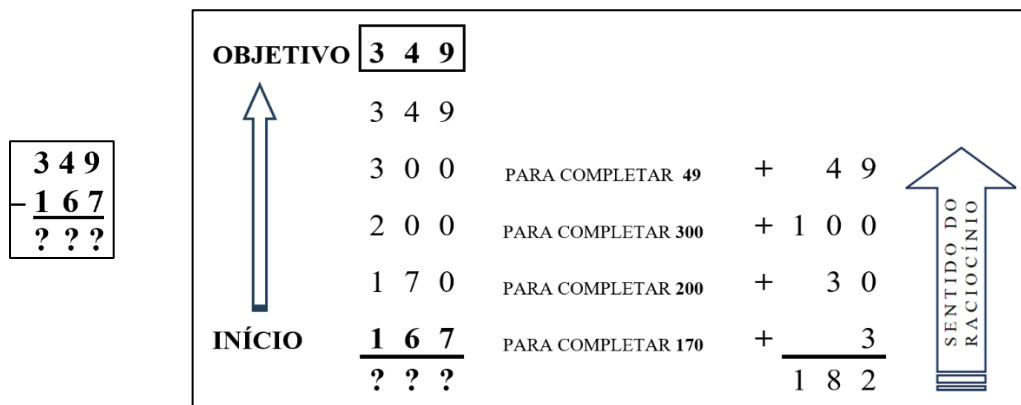


Figura 12: Exemplo de aplicação Algoritmo de diferenças parciais
 Fonte: produzida pelo autor

6.2.3 “Algoritmo de igualdade de adições ou algoritmo de compensação” baseia-se na invariância dos restos onde a diferença é mantida quando adicionamos um mesmo número aos dois termos da subtração. Não dispensa o reagrupamento, sendo necessário fazê-lo de forma conveniente na adição, preferencialmente de uma dezena, aos algarismos do minuendo e do subtraendo. Ao estudante é necessária “antecipação e estratégia” ao realizar o cálculo.

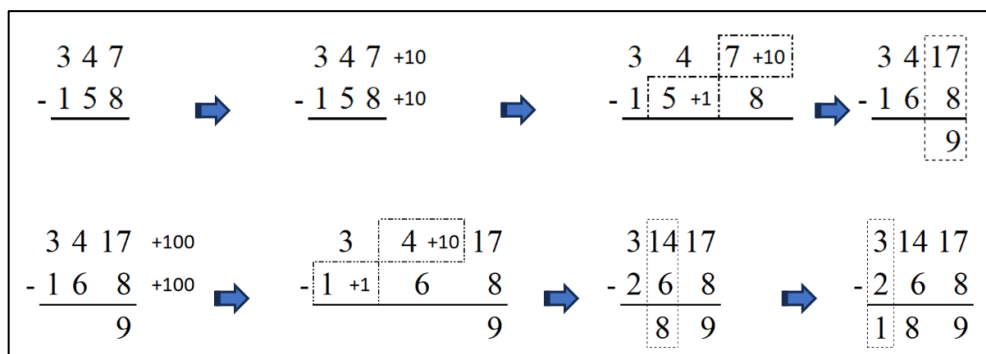


Figura 13: Exemplo de aplicação Algoritmo de igualdade de adições
 Fonte: produzida pelo autor

7 A Proposta para Visualização Circular, sua estrutura e operação. Ser simples!

Diferentemente do algoritmo pretende-se oferecer ao operador, aquele que realiza o cálculo, uma representação gráfica que pretende entregar outra visualização possível para o cálculo da adição e da subtração dos números naturais. O chamaremos de “*Proposta para Visualização Circular*”.

7.1 Descrição gráfica do Proposta para Visualização Circular

Escolhida a base numérica onde será realizado o cálculo, adição ou subtração, seus representantes devem ser distribuídos sobre uma circunferência de forma crescente no sentido horário, a partir daquele que possuir menor valor absoluto até o de maior valor absoluto. Não há rigor nesta distribuição. Por razões estéticas, a distribuição será feita de forma equidistante e o símbolo de menor valor que, no caso em discussão, é o elemento neutro da adição e da subtração “zero”, será posicionado na parte superior (referenciada à posição de 90° trigonométricos).

Além da ordem crescente dos números, necessário à visualização, onde iniciar o posicionamento é somente uma questão estética e em nada influencia a aplicação da PVC. Nem mesmo é necessário a circunferência, mas somente uma curva fechada preferencialmente convexa.

De acordo com o nível escolar do operador e de sua vontade, a adição ou subtração de dois valores poderá ser representada através da “armação da conta”. A organização do algoritmo tradicional pode ser usada, opcionalmente ao operador para sua visualização, para a montagem desta conta, ou seja, com o empilhamento, de acordo com as ordens e classes dos algarismos que compõem os números envolvidos para a adição das parcelas e do minuendo e do subtraendo para a subtração.

7.2 Para a adição

Há duas situações para se considerar. A mais simples, por padrão, a partir do algarismo das unidades (associado à menor ordem da primeira parcela), avança-se a quantidade relativa ao algarismo das unidades (associado à menor ordem da segunda parcela). Esta quantidade está relacionada ao ordenamento dos símbolos que compõem a base numérica em questão a partir de seu representante de menor valor absoluto e o resultado é uma posição representada por um símbolo menor que o maior dos representantes da base em questão.

Para exemplificar, para o procedimento da adição “4+2”, a partir do símbolo (numeral) 4 avançam-se **duas** posições atingindo o símbolo (numeral) 6. É preciso ter em mente que a primeira posição de qualquer base é representada por seu elemento neutro.

A adição descrita está representada no diagrama abaixo. Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que partindo do símbolo 4, avançamos **duas** posições alcançando a posição 6.

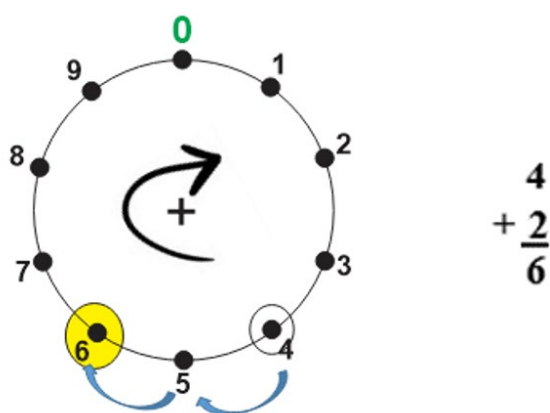


Diagrama 1: Adição 1ª ordem base decimal – Fonte: produzida pelo autor

Apresentamos em seguida, a segunda situação que discute o caso onde a adição dos números de uma mesma ordem é superior ao maior representante da base utilizada.

Graficamente, se neste deslocamento for atingido ou ultrapassado o elemento neutro registrado sobre a circunferência, uma unidade deve ser somada à ordem seguinte.

Por procedimento padrão, na apresentação do cálculo através da PVC, os algarismos de mesma ordem das parcelas que estejam sendo operados serão inicialmente adicionados para,

em seguida, se houver, adicionar a unidade que foi produzida pela adição aos algarismos da ordem imediatamente anterior.

Para exemplificar, para o procedimento da adição “4+8”.

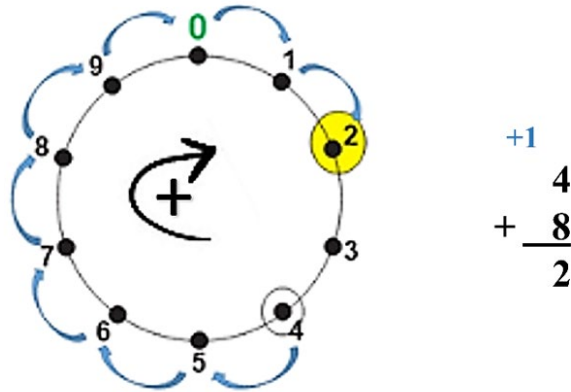


Diagrama 2: Adição 1ª ordem base decimal – Fonte: produzida pelo autor

Lembramos que, na ausência de algarismos nas ordens imediatamente superiores, podemos justapor o algarismo “zero” em sua posição.

Adicionamos os algarismos de segunda ordem, $0 + 0 = 0$ mostrado pela seta que, partindo do “zero” e retornando a ele mesmo e, finalmente $0 + 1 = 1$

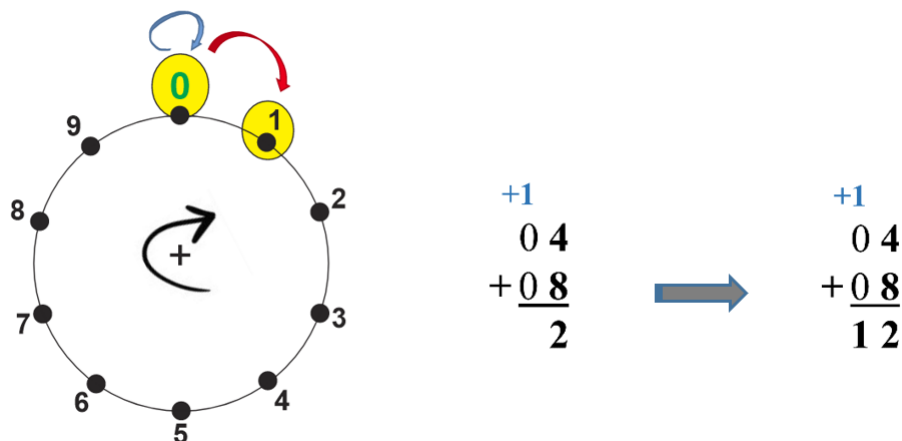


Diagrama 3: Adição 2ª ordem base decimal – Fonte: produzida pelo autor

Em ambas as situações descritas acima, repete-se o procedimento, ordenadamente, para os símbolos de todas as ordens imediatamente superiores até o último deles.

É importante salientar que o símbolo que representa “uma unidade” possui valor imediatamente superior ao elemento neutro.

7.3 Para a subtração

Novamente, há duas situações básicas para se considerar.

Levando em consideração que a subtração é a operação inversa da adição, os procedimentos serão contrários aos propostos anteriormente, com as mesmas considerações operacionais.

Por padrão, a partir do primeiro símbolo associado à menor ordem do minuendo, retorna-se à quantidade relativa do primeiro símbolo associado à menor ordem do subtraendo.

O exemplo abaixo mostra a primeira situação onde o subtraendo é menor que o minuendo.

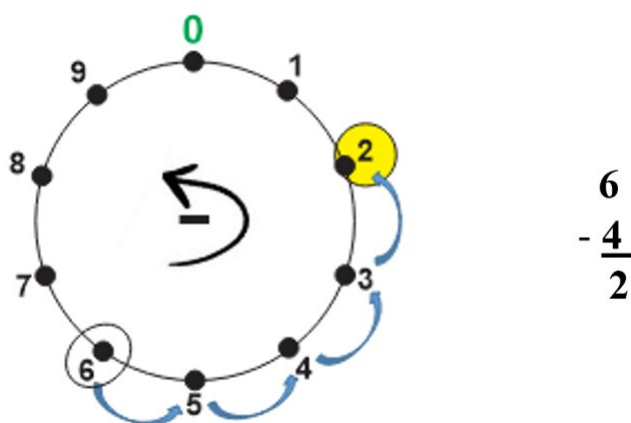


Diagrama 4: Subtração 1ª ordem base decimal – Fonte: produzida pelo autor

Repete-se o procedimento, ordenadamente, para os símbolos de todas as ordens imediatamente superiores até o último deles.

Outra situação ocorre quando o subtraendo for maior que o minuendo em alguma das ordens inferiores. Cabe lembrar que este trabalho aborda apenas casos onde o resto ou diferença entre os números envolvidos seja positiva. Desta forma, existirá obrigatoriamente alguma ordem superior no minuendo que seja maior que a equivalente no subtraendo.

Em relação à PVC, se neste deslocamento for iniciado ou ultrapassado o elemento neutro registrado sobre a circunferência, uma unidade deve ser subtraída da ordem seguinte.

Exceção se faz se os algarismos do minuendo e do subtraendo de mesma ordem forem representados pelo elemento neutro.

Por procedimento padrão, na apresentação do cálculo, os algarismos de mesma ordem do minuendo e do subtraendo serão inicialmente operados para em seguida, se houver, subtrair a unidade que foi produzida pela diferença dos algarismos da ordem imediatamente anterior.

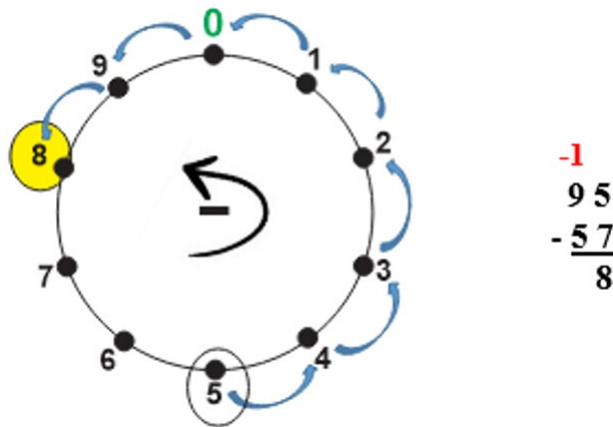


Diagrama 5: Subtração 1ª ordem base decimal – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair as dezenas.

Na ordem em que aparecem, temos o **9** como minuendo e o **5** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **9**, retornamos **cinco** posições alcançando o símbolo **4**. Retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero”, que é o elemento neutro, foi ultrapassada na etapa anterior.

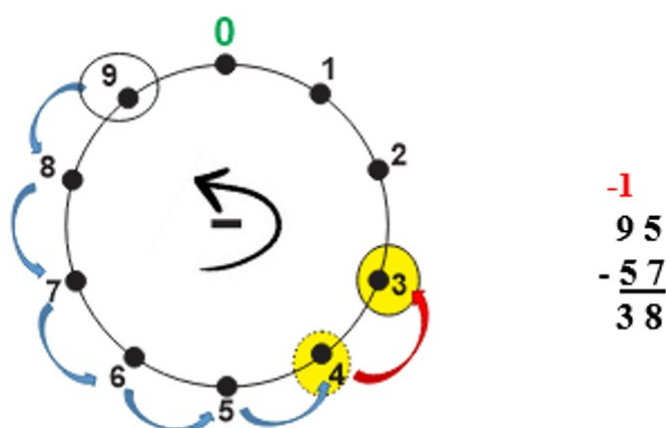


Diagrama 6: Subtração 2ª ordem base decimal – Fonte: produzida pelo autor

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trazem algumas reflexões a respeito dos números decimais.

“Assim como outros procedimentos de cálculo, as técnicas operatórias usualmente ensinadas na escola também apoiam-se nas regras do sistema de numeração decimal e na existência de propriedades e regularidades presentes nas operações. Porém, muitos dos erros cometidos pelos alunos são provenientes da não-disponibilidade desses conhecimentos ou do não-reconhecimento de sua presença no cálculo.”
(PCN - Introdução aos parâmetros curriculares nacionais, 1997, p. 78)

Exemplos de aplicação.

Os exemplos a seguir mostram aplicação da PVC para algumas bases numéricas envolvendo diferentes situações. Iniciamos pela base decimal e, em seguida, exploramos as bases octal, binária e hexadecimal bastante comuns nos cursos técnicos e superiores nas áreas de informática.

Após os exemplos nas bases numéricas a adição e a subtração foram apresentadas, nos casos mais simples, para as bases não numéricas, chamadas por simplicidade de simbólicas.

8 APLICANDO A PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR

8.1 BASE 10 (decimal)

A base 10 tem por elementos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

8.1.1 ADIÇÃO - Exemplo 1

$$54 + 32 = 86$$

Inicialmente vamos adicionar as unidades. As operações de adição e subtração nos Naturais estão sendo apresentadas.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **4**, avançamos **duas** posições alcançando a posição **6**.

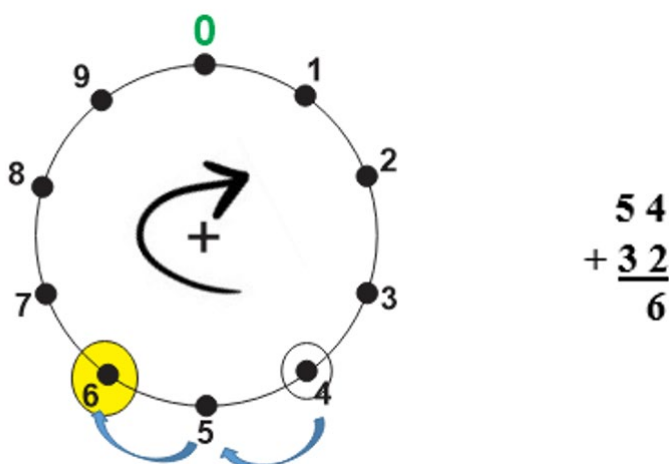


Diagrama 7: Adição 1ª ordem base decimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar as dezenas.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **5**, avançamos **três** posições alcançando o símbolo **8**.

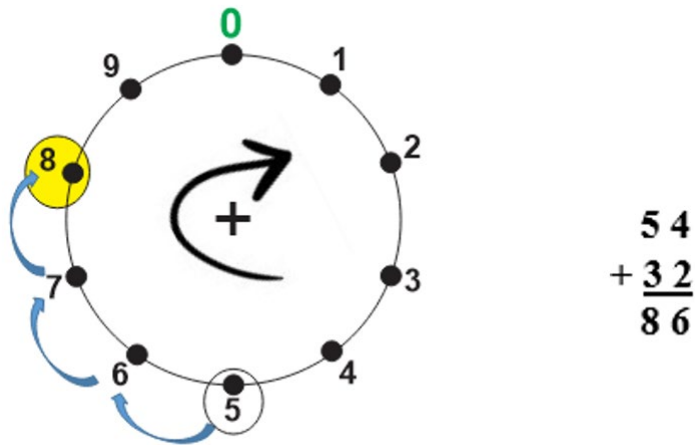


Diagrama 8: Adição 2ª ordem base decimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

As duas operações realizadas têm resultado com valores menores que o maior representante da base 10. Deste modo não há correções nos valores dos algarismos obtidos para aqueles de ordem imediatamente superior.

8.1.2 ADIÇÃO - Exemplo 2 $54 + 38 = 92$

Inicialmente vamos adicionar as unidades. Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que partindo do símbolo 4, avançamos **oito** posições, alcançando o símbolo 2. Observe que, nesta situação, a posição “zero” foi ultrapassada. Desta forma, **uma unidade** será adicionada à próxima ordem que é das dezenas. Faremos esta indicação por “+1”.

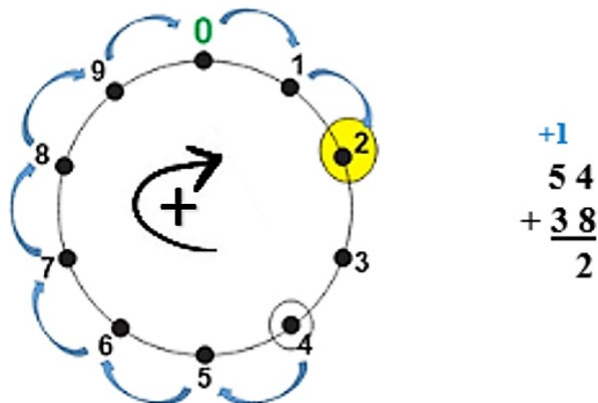


Diagrama 9: Adição 1ª ordem base decimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar as dezenas.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que partindo do símbolo **5**, avançamos **três** posições alcançando o símbolo **8** e, em seguida, **mais uma posição** por ter ultrapassado o zero. Obtemos a posição final representada pelo símbolo **9**.

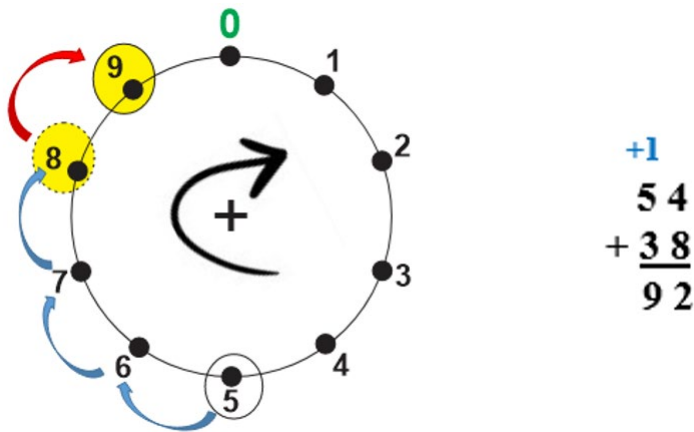


Diagrama 10: Adição 2ª ordem base decimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

8.1.3 SUBTRAÇÃO - Exemplo 1

$$86 - 54 = 32$$

Inicialmente vamos subtrair as unidades.

Na ordem em que aparecem, temos o **6** como minuendo e o **4** como subtraendo.

Partindo do símbolo **6**, retornamos **quatro** posições alcançando o símbolo **2**.

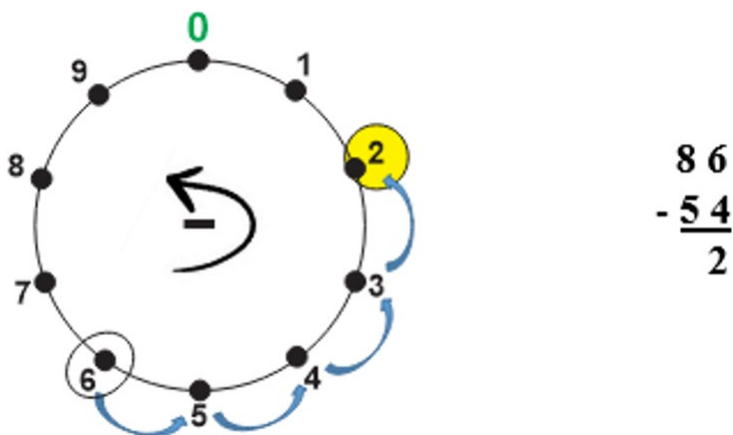


Diagrama 11: Subtração 1ª ordem base decimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair as dezenas.

Na ordem em que aparecem temos o **8** como minuendo e o **5** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **8**, retornamos **cinco** posições alcançando o símbolo **3**.

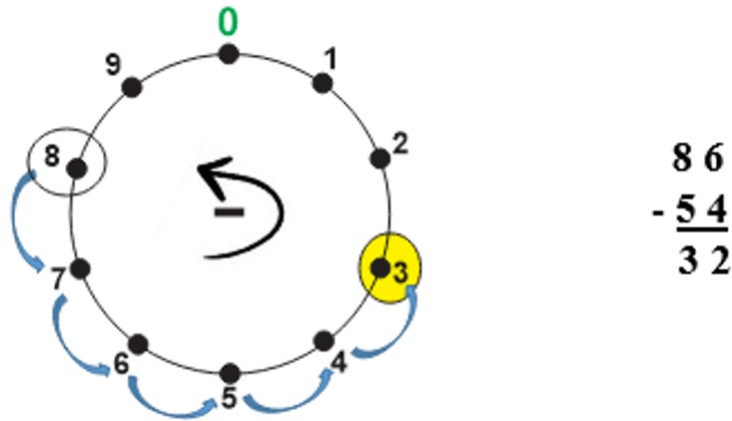


Diagrama 12: Subtração 2ª ordem base decimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

As duas operações realizadas têm resultado com valores maiores que o menor representante da base 10 ou seja o “zero”. Deste modo não há correções nos valores dos algarismos obtidos para aqueles de ordem imediatamente superior.

8.1.4 SUBTRAÇÃO - Exemplo 2

$$95 - 57 = 38$$

Inicialmente vamos subtrair as unidades.

Na ordem em que aparecem, temos o **5** como minuendo e o **7** como subtraendo.

Partindo da posição **5**, retornamos **sete** posições alcançando o símbolo **8**.

Observe que, nesta situação, a posição “zero” foi ultrapassada. Desta forma, conforme visto anteriormente, **uma unidade** será subtraída à próxima ordem. Neste caso, à ordem das dezenas.

Faremos esta indicação por “-1”.

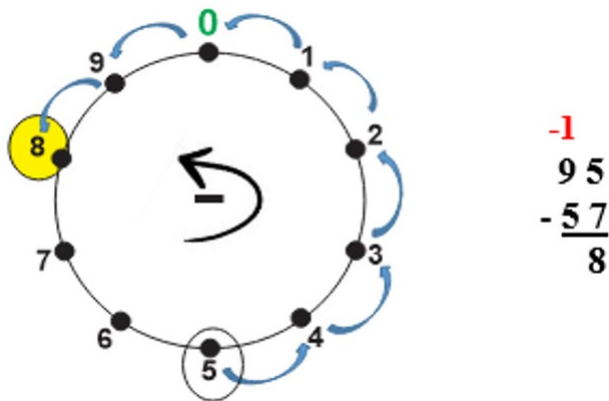


Diagrama 13: Subtração 1ª ordem base decimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair as dezenas.

Na ordem em que aparecem, temos o **9** como minuendo e o **5** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **9**, retornamos **cinco** posições alcançando o símbolo **4**. Retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero” foi ultrapassada na etapa anterior.

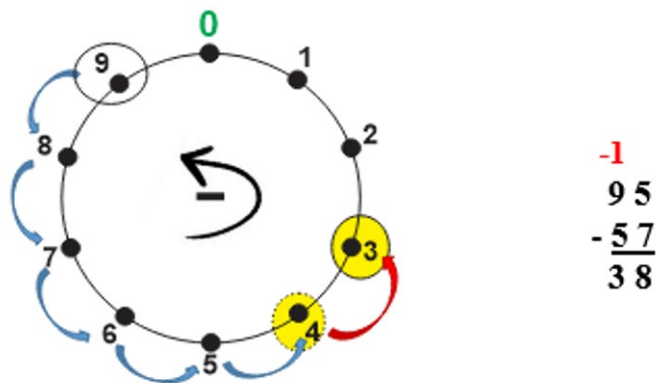


Diagrama 14: Subtração 2ª ordem base decimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

As duas operações realizadas têm resultado com valores menores que o maior representante da base 10. Deste modo não há correções nos valores dos algarismos obtidos para aqueles de ordem imediatamente superior e o resultado é **38**.

8.1.5 SUBTRAÇÃO - Exemplo 3

$$1002 - 657 = 345$$

Nesta situação teremos a oportunidade de explorar um caso onde geralmente o aluno mostra grande dificuldade em função da presença do “zero” no minuendo.

Inicialmente vamos subtrair as unidades.

Na ordem em que aparecem, temos o **2** como minuendo e o **7** como subtraendo.

Partindo do símbolo **2**, retornamos **sete** posições alcançando o símbolo **5**.

Observe que, nesta situação, a posição “zero” foi ultrapassada. Desta forma, conforme visto anteriormente, **uma unidade** será subtraída à próxima ordem. Neste caso, à ordem das dezenas.

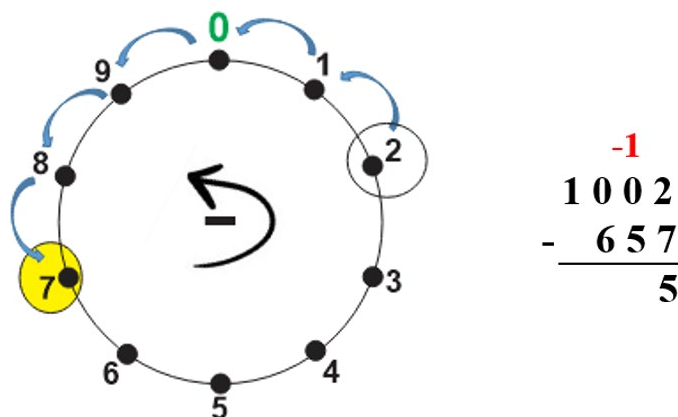


Diagrama 15: Subtração 1ª ordem base decimal – Exemplo 3 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair as dezenas, ou seja, os algarismos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem temos o **0** como minuendo e o **5** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **0**, retornamos **cinco** posições, alcançando o símbolo **5**.

Nesta situação, a posição “zero” foi ultrapassada novamente. Retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero” foi ultrapassada, chegando ao símbolo **4**.

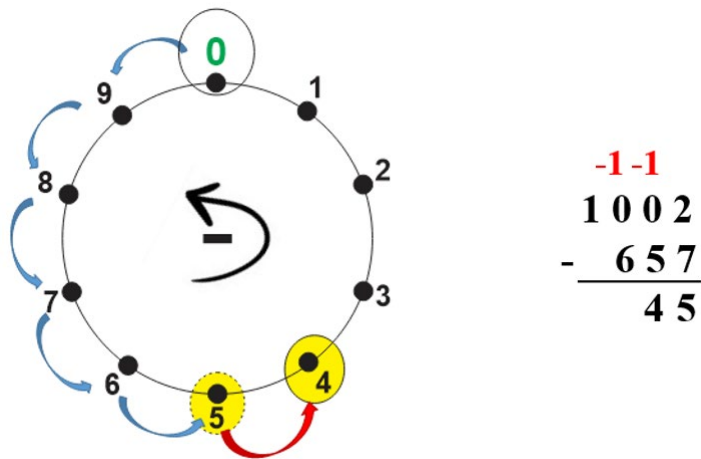


Diagrama 16: Subtração 2ª ordem base decimal – Exemplo 3 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair as centenas.

Na ordem em que aparecem temos o **0** como minuendo e o **6** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **0** retornamos **seis** posições alcançando o símbolo **4**. Observe que a posição “zero” foi ultrapassada novamente. Retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero” foi ultrapassada, chegando ao símbolo **3**.

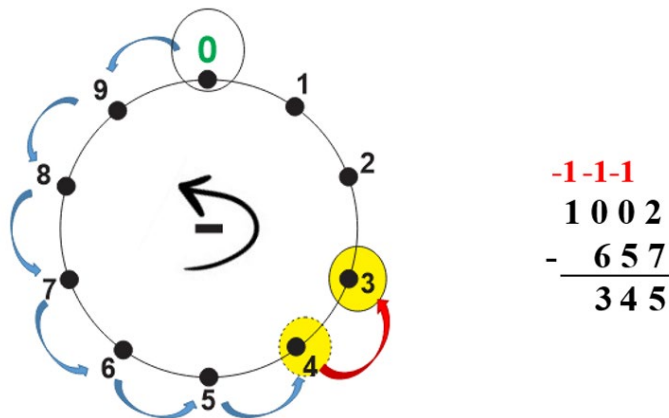


Diagrama 17: Subtração 3ª ordem base decimal – Exemplo 3 – Fonte: produzida pelo autor

Finalmente vamos subtrair as unidades de milhar.

Observe que temos o algarismo **1** como minuendo e, por não termos a unidade de milhar no subtraendo, podemos considerá-la “zero”. Deste modo, partindo do símbolo **1**, retornamos **zero** posições, permanecendo na posição **1**. Retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero” foi ultrapassada no deslocamento anterior. A posição final será então **0** (zero).

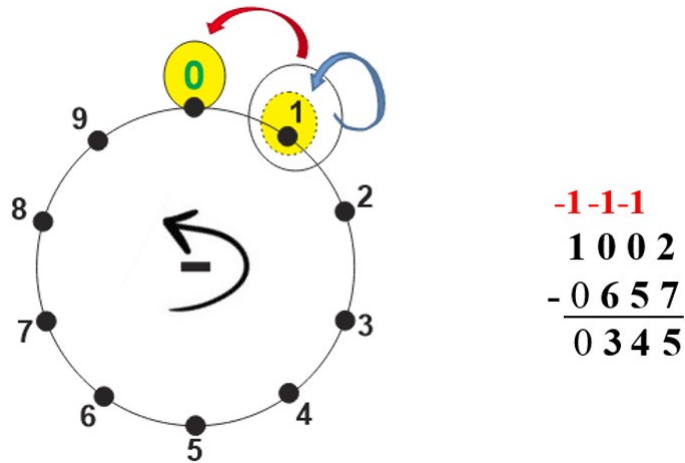


Diagrama 18: Subtração 4ª ordem base decimal – Exemplo 3 – Fonte: produzida pelo autor

O resultado final da subtração será 0345, ou seja 345.

O processo é o mesmo para as demais situações independentemente da quantidade de ordens que compõem os números envolvidos.

É possível explorar diferentes bases numéricas tanto para a adição quanto para subtração. Como o objetivo é operar apenas com números naturais, a premissa para a subtração onde o minuendo deve ser menor ou igual ao subtraendo deve sempre ser observado.

Exemplos de adição e subtração em bases numéricas não decimais

Os casos apresentados anteriormente mostram algumas possibilidades do cálculo de adição e subtração na base decimal. Os demais exemplos são aplicações que não estão presentes, normalmente, no ensino fundamental.

São frequentes nos cursos técnicos nas áreas de informática, eletrônica e afins.

É importante ressaltar que a justificativa teórica e a PVC continuam válidas.

8.2 BASE 8 (octal)

A base 8 tem por elementos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

8.2.1 ADIÇÃO - Exemplo 1

$$54 + 21 = 75$$

Inicialmente vamos adicionar os termos de 1ª ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **4**, avançamos **uma** posição alcançando o símbolo **5**.

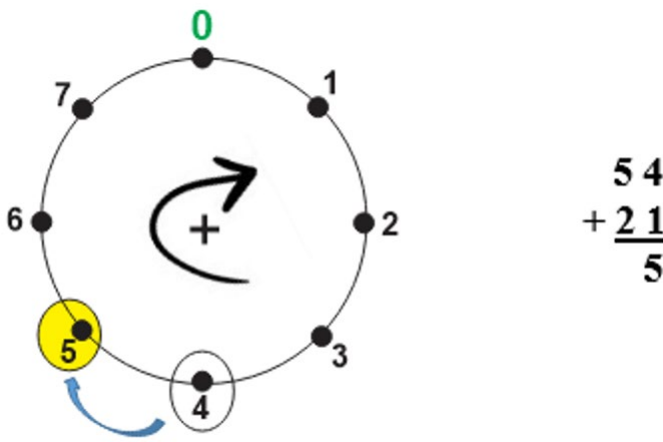


Diagrama 19: Adição 1ª ordem base octal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar os termos de 2ª ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **5**, avançamos **duas** posições alcançando o símbolo **7**.

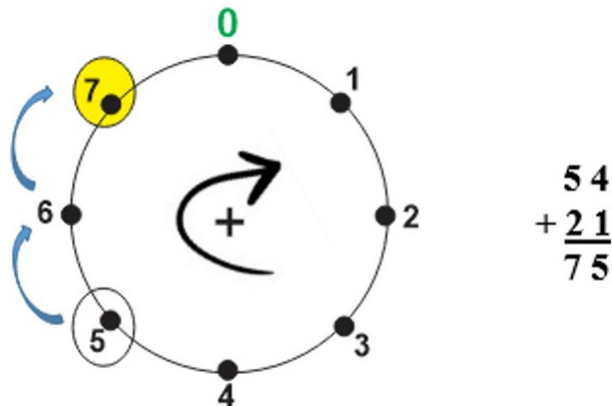


Diagrama 20: Adição 2ª ordem base octal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

As duas operações realizadas têm resultados com valores menores que o maior representante da base 8. Deste modo não há correções nos valores dos algorismos obtidos para aqueles de ordem imediatamente superior.

8.2.2 ADIÇÃO - Exemplo 2

$$74 + 41 = 115$$

Inicialmente vamos adicionar os termos de 1ª ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **4**, avançamos **uma** posição alcançando a posição **5**.

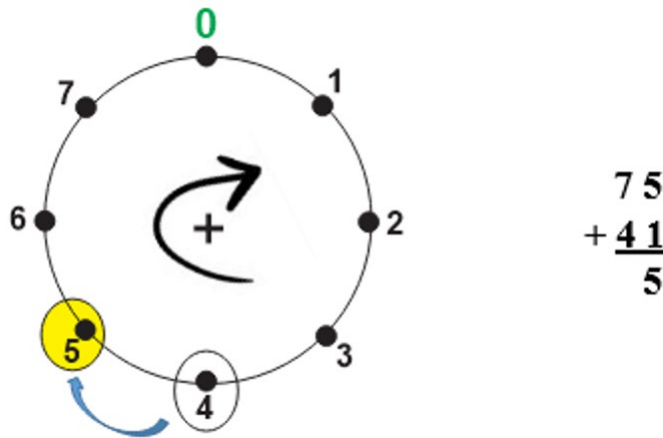


Diagrama 21: Adição 1ª ordem base octal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar os termos de 2ª ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo da posição **7**, avançamos **quatro** posições alcançando a posição **3**. Observe que o “zero” foi ultrapassado e, neste caso, uma unidade deverá ser adicionada à próxima ordem. Como as parcelas da adição proposta não possuem o algorismo de terceira ordem, justapomos o algorismo “zero” no início de cada um deles. De acordo com a PVC, para finalizar a adição, a partir da posição **1** avançamos “zero” posições devido às parcelas e, desta forma obtemos **1** como resultado final.

Acompanhe as etapas:

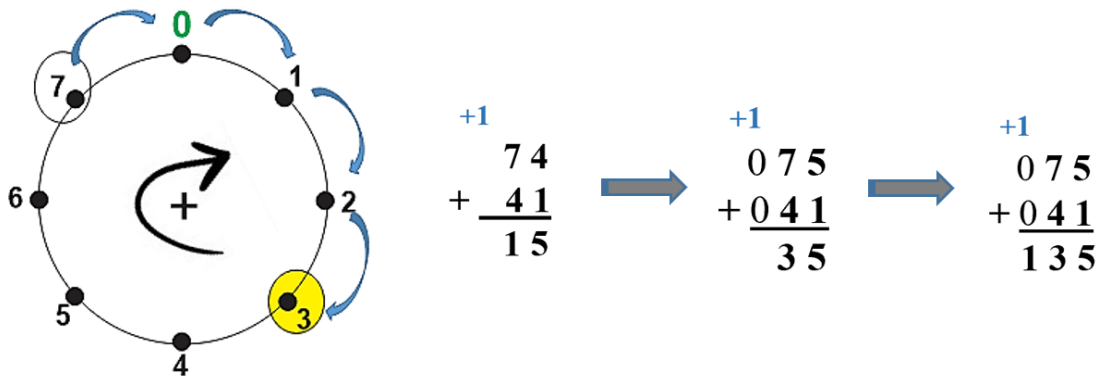


Diagrama 22: Adição 2ª ordem base octal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

8.2.3 SUBTRAÇÃO - Exemplo 1

$$76 - 54 = 22$$

Inicialmente vamos subtrair os algarismos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem, temos o **6** como minuendo e o **4** como subtraendo.

Partindo do símbolo **6**, retornamos **quatro** posições, alcançando o símbolo **2**.

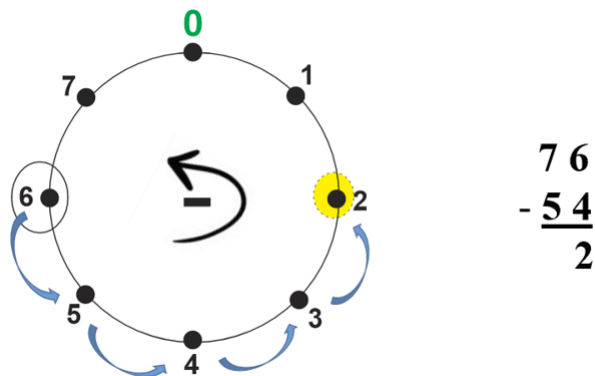


Diagrama 23: Subtração 1ª ordem base octal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair os algarismos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem temos o símbolo **7** como minuendo e o **5** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **7** retornamos **cinco** posições, alcançando a posição **2**.

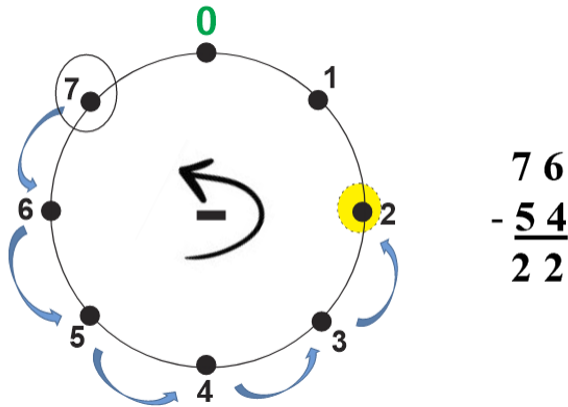


Diagrama 24: Subtração 2ª ordem base octal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

As duas operações realizadas têm resultado com valores maiores que o menor representante da base 8 ou seja o “zero”. Deste modo não há correções nos valores dos algarismos obtidos para aqueles de ordem imediatamente superior.

8.2.4 SUBTRAÇÃO - Exemplo 2

$$264 - 57 = 205$$

Inicialmente vamos subtrair os algarismos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem, temos o 4 como minuendo e o 7 como subtraendo. Partindo do símbolo 4, retornamos **sete** posições alcançando o símbolo 5. Observe que, nesta situação, a posição “zero” que representa o elemento neutro foi ultrapassada. Desta forma, conforme visto anteriormente, **uma unidade** será subtraída à próxima ordem. Neste caso, na segunda ordem. Faremos esta indicação por “-1”.

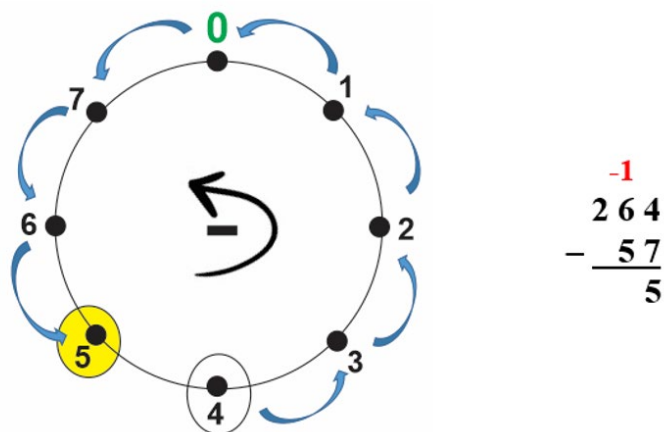


Diagrama 25: Subtração 1ª ordem base octal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair os algarismos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem temos o **6** como minuendo e o **5** como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **6**, retornamos **cinco** posições alcançando o símbolo **1**. Retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero” foi ultrapassada anteriormente, chegando ao símbolo **0**.

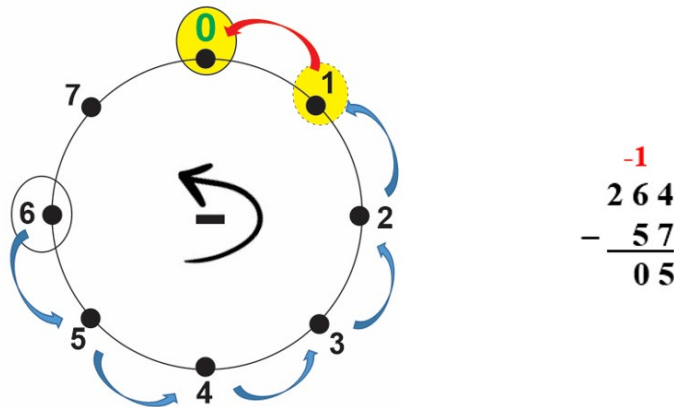


Diagrama 26: Subtração 2ª ordem base octal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Note que nesta etapa, a posição “zero” foi alcançada, não ultrapassada.

Neste caso não devemos subtrair uma unidade à próxima ordem.

Vamos, em seguida, subtrair os algarismos de terceira ordem.

Na ordem em que aparecem temos o **2** como minuendo e o “zero”, justaposto na terceira ordem do subtraendo. Deste modo, partindo da posição **2**, retornamos **zero** posições, permanecendo na posição **2**.

Acompanhe as etapas:

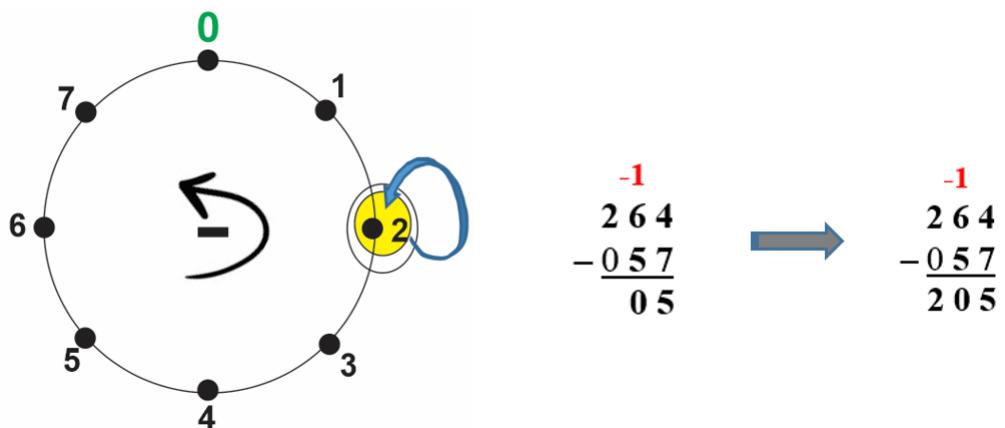


Diagrama 27: Subtração 3ª ordem base octal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

A seta que parte do algarismo dois retornando a ele mesmo indica, graficamente, a neutralidade do “zero” na subtração.

8.3 BASE 2 (binário)

A base 2 tem por elementos os algarismos de 0 e 1.

A adição e a subtração na base dois apresentam grande simplicidade pois há somente dois algarismos que são utilizados sendo um deles, o elemento neutro destas operações.

8.3.1 ADIÇÃO - Exemplo 1

$$101 + 10 = 111$$

Inicialmente vamos adicionar os termos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **1**, avançamos **zero** posições permanecendo na posição cujo símbolo é **1**.

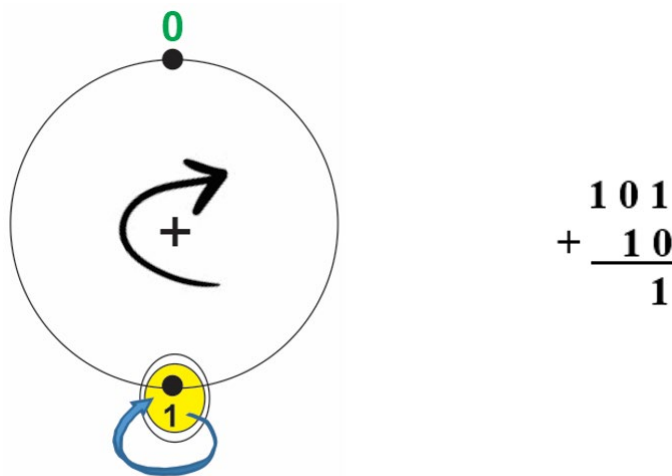


Diagrama 28: Adição 1ª ordem base binária – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar os termos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas partimos do símbolo “zero” avançamos **uma** posição alcançando o símbolo **1**.

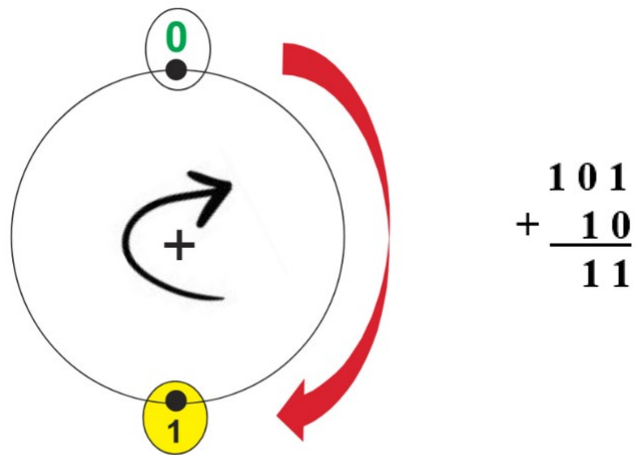


Diagrama 29: Adição 2ª ordem base binária – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Finalmente vamos adicionar os algoritmos de terceira ordem.

Como a segunda parcela não possui o algoritmo de terceira ordem, vamos justapor o algoritmo “zero” em seu início.

Então, uma vez mais, partindo do símbolo **1**, avançamos **zero** posição permanecendo na posição cujo símbolo é **1**.

Acompanhe as etapas:

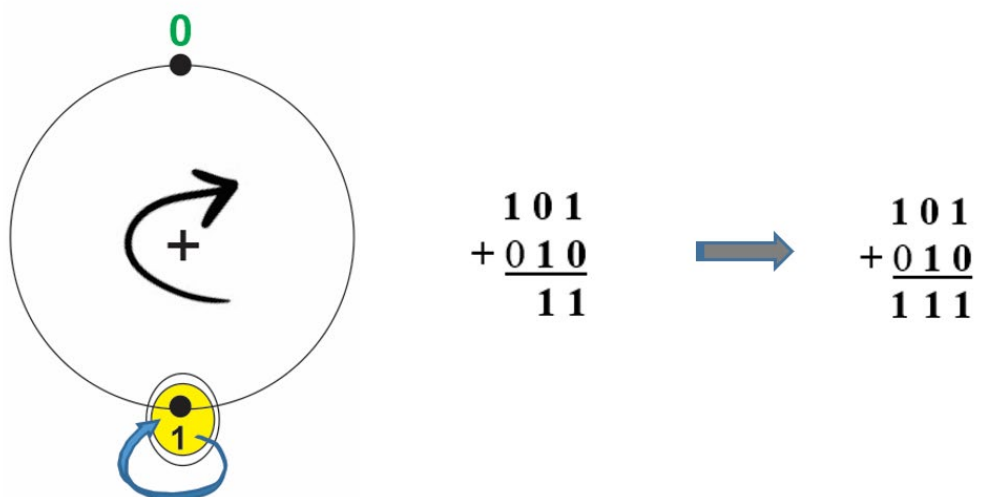


Diagrama 30: Adição 3ª ordem base binária – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

8.3.2 ADIÇÃO - Exemplo 2

$$101 + 11 = 1000$$

Inicialmente vamos adicionar os termos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo do símbolo **1**, avançamos **uma** posição alcançando a o símbolo **0**.

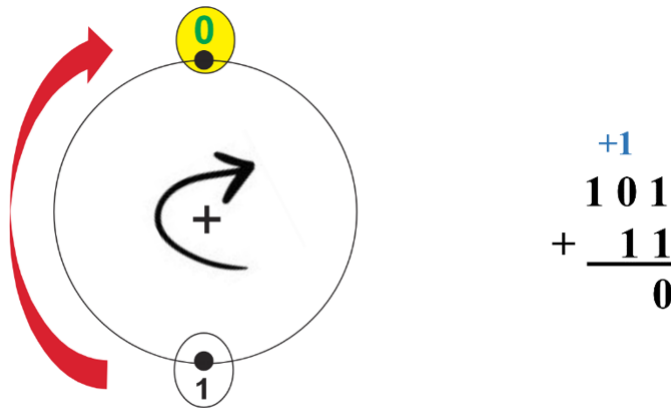


Diagrama 31: Adição 1ª ordem base binária – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Observe que, nesta situação, a posição “zero” foi ultrapassada. Desta forma, **uma unidade** foi adicionada à próxima ordem e indicado por “+1”.

Em seguida vamos adicionar os termos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas partimos do símbolo “zero” avançamos **uma** posição alcançando o símbolo **1** e, em seguida, avançamos mais uma posição devido ao “+1”.

Observe que, nesta situação, a posição “zero” mais uma vez foi alcançada. Desta forma, pelo mesmo motivo, uma **unidade** foi adicionada à próxima ordem e indicado por “+1”.

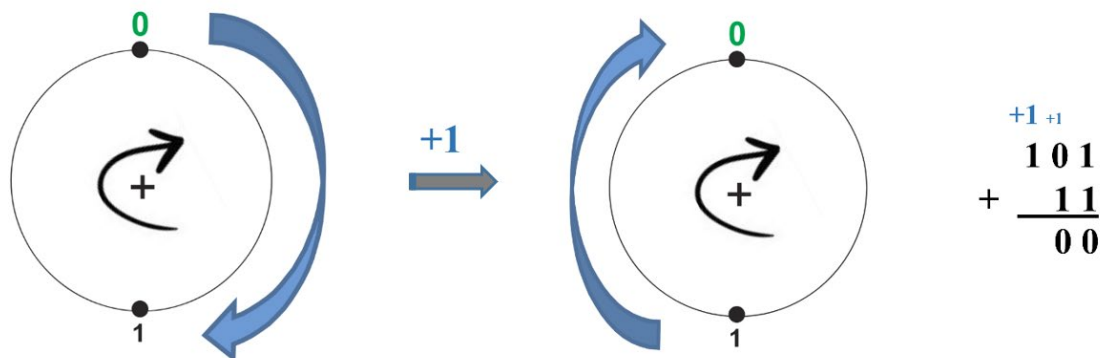


Diagrama 32: Adição 2ª ordem base binária – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar os termos de terceira ordem.

Pela ausência do algarismo de terceira ordem da segunda parcela justapomos, em seu início, o algarismo “zero”.

Na ordem em que aparecem nas parcelas partimos do símbolo “1” e avançando “zero” posições permanecemos no símbolo “1” e, em seguida, avançamos mais uma posição devido ao “+1”.

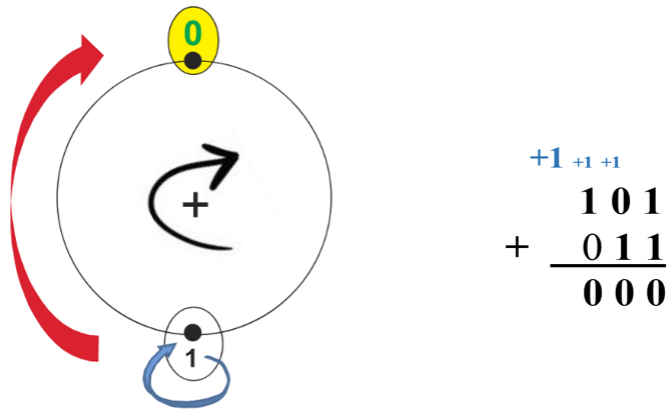


Diagrama 33: Adição 3ª ordem base binária – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Observe que, nesta situação, a posição “zero” foi alcançada. Desta forma, mais uma vez, **uma unidade** foi adicionada à próxima ordem (quarta ordem) e indicado por “+1”.

O mesmo procedimento anterior será feito ao justapor, na frente, o algarismo “zero” às parcelas para preencher as posições anteriormente vazias na quarta ordem e, em seguida, realizar sua adição com o “+1”.

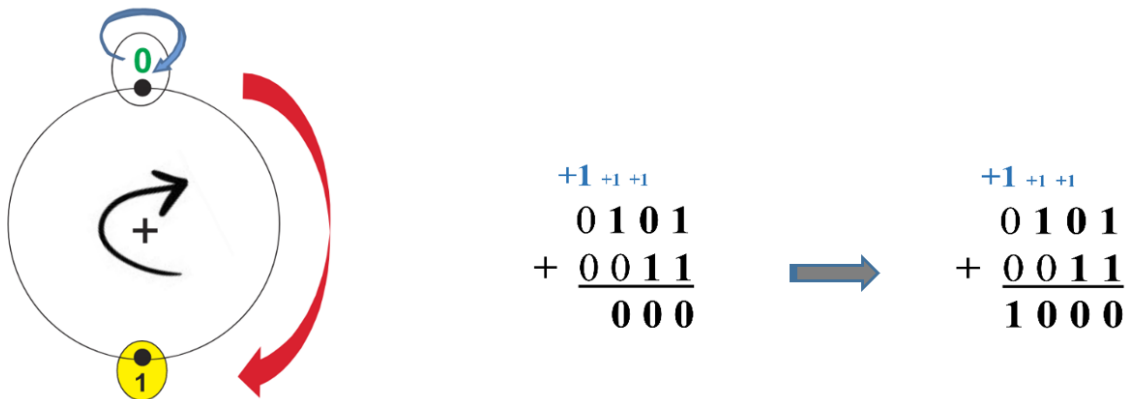


Diagrama 34: Adição 4ª ordem base binária – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

8.3.3 SUBTRAÇÃO – Exemplo 1

$$110 - 10 = 100$$

Inicialmente vamos subtrair os algarismos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem, temos o **0** simultaneamente como minuendo e subtraendo.

Partindo do símbolo **0**, retornamos **zero** posições, alcançando o símbolo **0**.

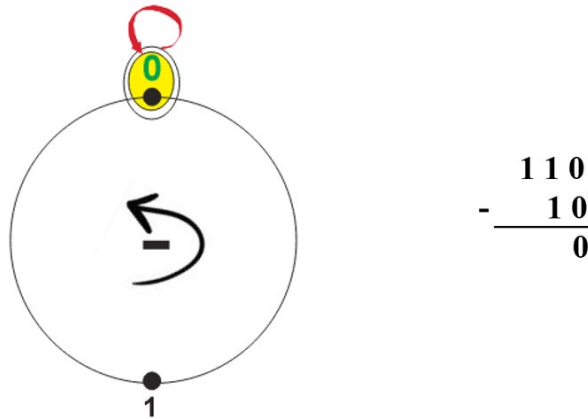


Diagrama 35: Subtração 1ª ordem base binária – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair os algarismos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem temos o símbolo **1** como minuendo e também como subtraendo. Deste modo, partindo do símbolo **1**, retornamos **uma** posição alcançando desta forma a posição **0**.

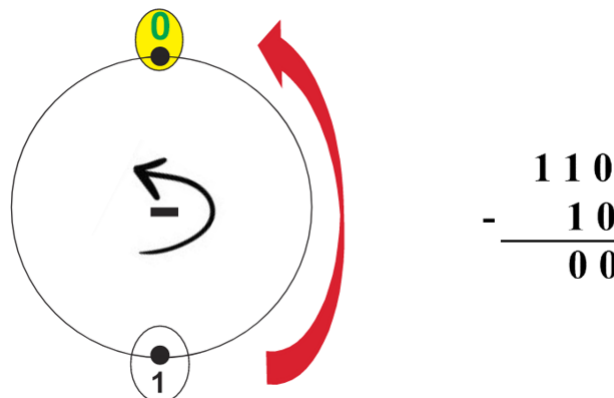


Diagrama 36: Subtração 2ª ordem base binária – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Note que nesta etapa, a posição “zero” foi alcançada, não ultrapassada.

Neste caso não devemos subtrair uma unidade à próxima ordem.

Vamos, em seguida, subtrair os algarismos de terceira ordem.

Na ordem em que aparecem temos o **1** como minuendo e o “zero”, justaposto na terceira ordem do subtraendo. Deste modo, partindo da posição **1**, retornamos “zero” posições, permanecendo na posição **1**. Acompanhe as etapas:

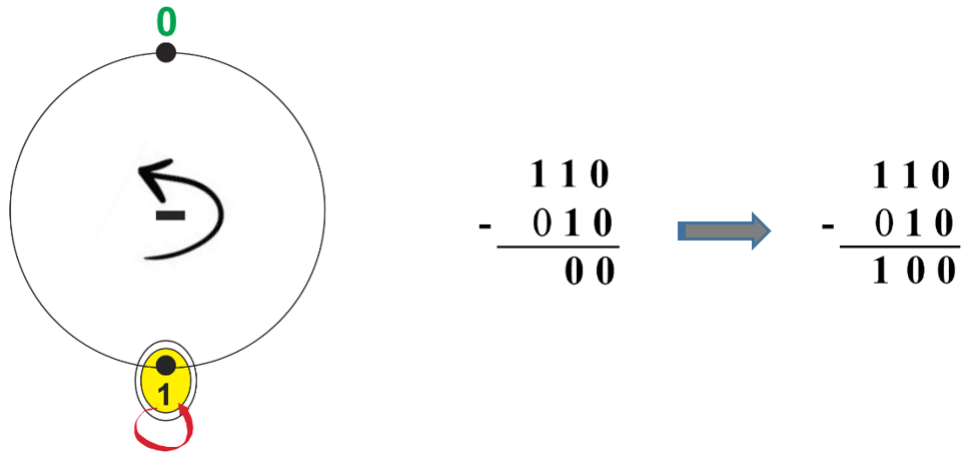


Diagrama 37: Subtração 3ª ordem base binária – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

A seta que parte do algarismo dois retornando a ele mesmo indica, graficamente, a neutralidade do “zero” na subtração.

8.3.4 SUBTRAÇÃO – Exemplo 2 $101 - 11 = 10$

Inicialmente vamos subtrair os algarismos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem, temos o **1** simultaneamente como minuendo e subtraendo.

Partindo do símbolo **1**, retornamos **uma** posição, alcançando o símbolo **0**.

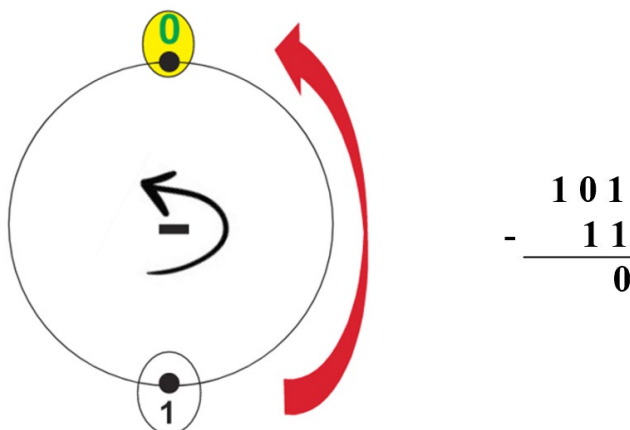


Diagrama 38: Subtração 1ª ordem base binária – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair os algarismos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem temos o símbolo **0** como minuendo e **1** como subtraendo.

Deste modo, partindo do símbolo **0**, retornamos **uma** posição, alcançando a posição **1**.

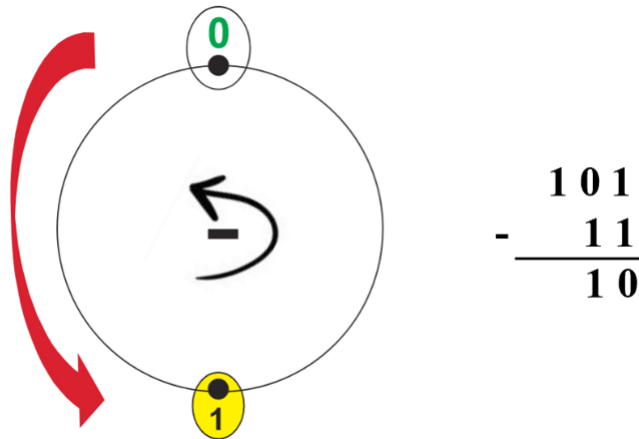


Diagrama 39: Subtração 2ª ordem base binária – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Como o elemento neutro foi ultrapassado subtraímos **uma unidade** à próxima ordem.

Neste caso, à segunda ordem. Faremos esta indicação por “-1”.

Na ordem em que aparecem temos o **1** como minuendo e o “zero”, justaposto na terceira ordem do subtraendo. Deste modo, partindo da posição **1**, retornamos “zero” posições, permanecendo na posição **1**.

Em seguida, retornaremos mais uma unidade pois a posição “zero” foi ultrapassada no deslocamento anterior. A posição final será então “zero”.

O resultado final é 010 ou seja, 10.

Seguem os registros dos cálculos:

$$\begin{array}{r} -1 \\ 101 \\ - 11 \\ \hline 10 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -1 \\ 101 \\ - 011 \\ \hline 10 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -1 \\ 101 \\ - 011 \\ \hline 010 \end{array}$$

Figura 14: Sequência exibindo a subtração no algarismo de 3ª ordem base binária – Exemplo 2
Fonte: produzida pelo autor

8.4 BASE 16 (hexadecimal)

A base 16 tem por elementos os algarismos de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 além das letras maiúsculas A, B, C, D, E e F. Usam-se essas letras em substituição aos números 10, 11, 12, 13, 14 e 15 respectivamente que possuem dois algarismos.

8.4.1 ADIÇÃO – Exemplo 1 $8A4 + 12B = 9CF$

Inicialmente vamos adicionar os termos de 1ª ordem.

Na ordem em que aparecem as parcelas temos que, partindo da posição **4**, avançamos **onze** posições, representada pelo símbolo “**B**”.

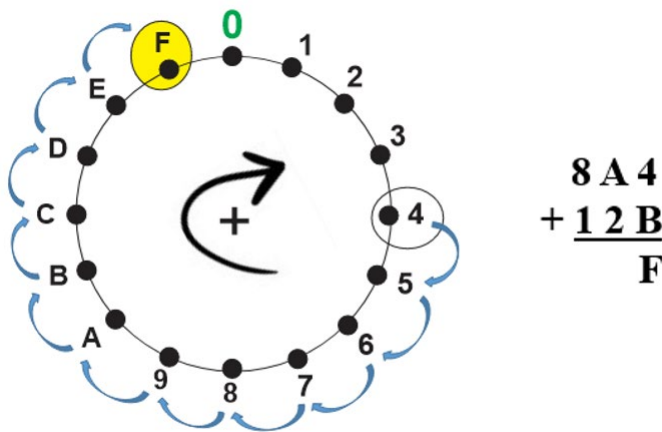


Diagrama 40: Adição 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos adicionar os termos de 2ª ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que partindo da posição **A** avançamos **duas** posições alcançando a posição **C**.

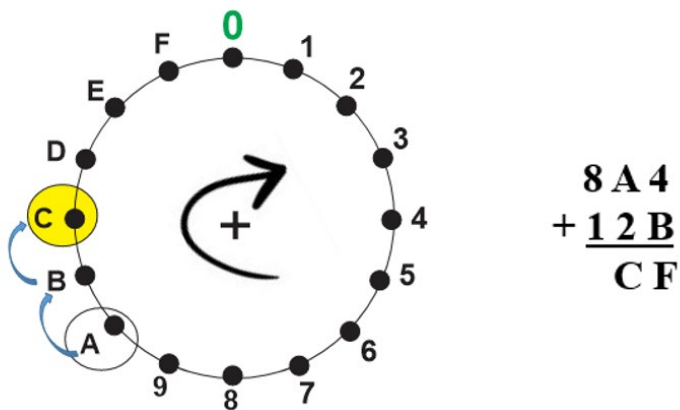


Diagrama 41: Adição 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Finalmente vamos adicionar os termos de 3ª ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo da posição **8**, avançamos **uma** posição alcançando a posição **9**.

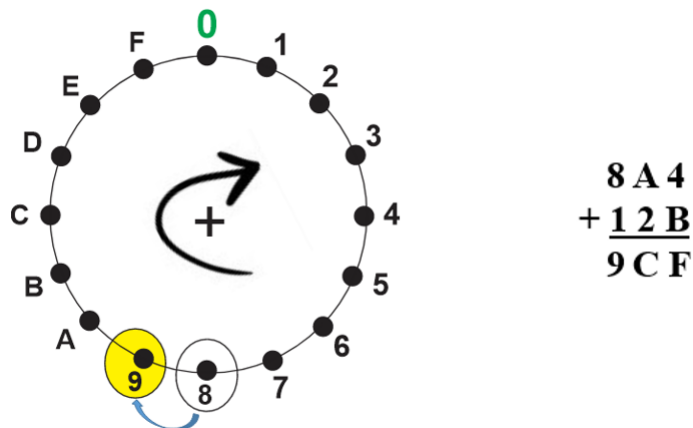


Diagrama 42: Adição 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

As três operações realizadas têm resultados com valores menores que o maior representante da base hexadecimal. Deste modo não há correções nos valores dos algarismos obtidos para aqueles de ordem imediatamente superior.

8.4.2 ADIÇÃO – Exemplo 2

$$AB9 + 28C = D45$$

Inicialmente vamos adicionar os termos de 1ª ordem.

Na ordem em que aparecem as parcelas temos que, partindo da posição 9, avançamos **doze** posições, representada pelo símbolo “C”.

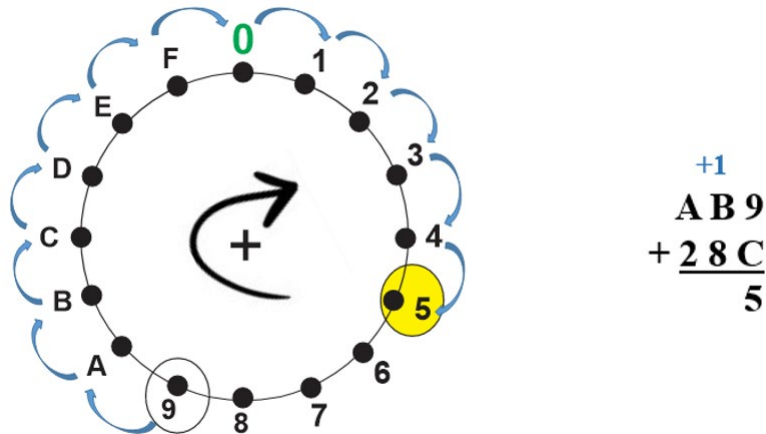


Diagrama 43: Adição 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Observe que, nesta situação, a posição “zero” foi ultrapassada. Desta forma, **uma unidade** será adicionada à próxima ordem.

Em seguida vamos adicionar os símbolos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo da posição “B”, avançamos **oito** posições alcançando a posição 3 e, em seguida, mais uma posição por ter ultrapassado o zero. Obtemos a posição final 4.

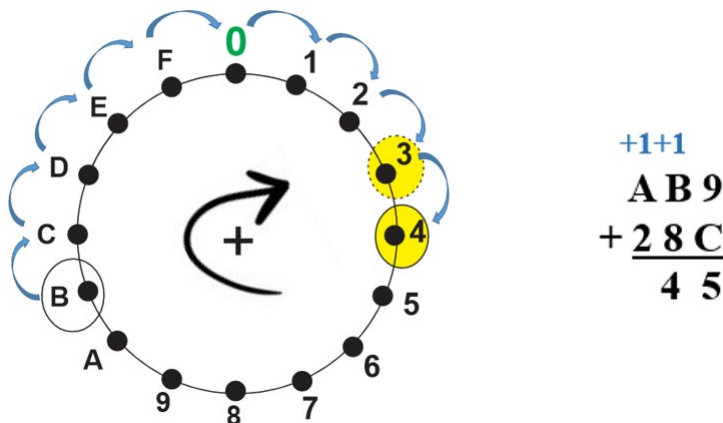


Diagrama 44: Adição 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Observe que, uma vez mais, a posição “zero” foi ultrapassada. Desta forma, **uma unidade** será adicionada à próxima ordem.

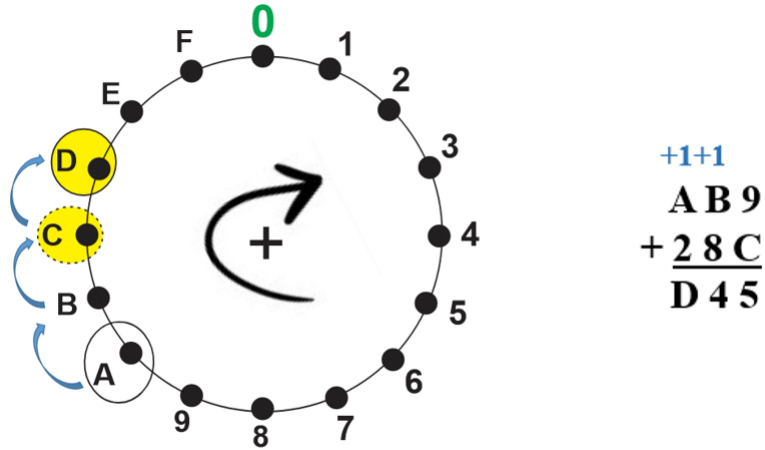


Diagrama 45: Adição 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Na ordem em que aparecem nas parcelas temos que, partindo da posição “A”, avançamos **duas** posições alcançando a posição “C” e, em seguida, mais uma posição por ter ultrapassado o zero. Obtemos a posição final “D”.

O resultado obtido é D45.

8.4.3 SUBTRAÇÃO – Exemplo 1 $9CF - 12B = 8A4$

Inicialmente vamos subtrair os algarismos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem, temos o **F** como minuendo e o **B** como subtraendo.

Partindo do símbolo **F**, retornamos **onze** posições, representada pelo símbolo “**B**”, alcançando o símbolo **2**.

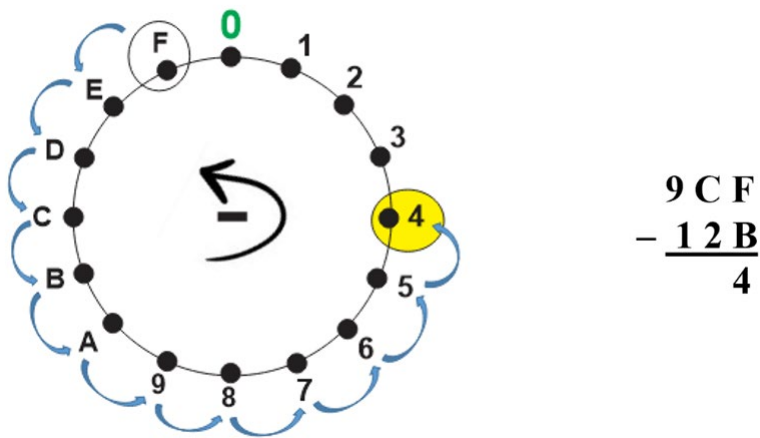


Diagrama 46: Subtração 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair os algarismos de segunda ordem.

Na ordem em que aparecem temos o símbolo **C** como minuendo e o **5** como subtraendo.

Deste modo, partindo do símbolo **C**, retornamos **duas** posições, alcançando a posição **A**.

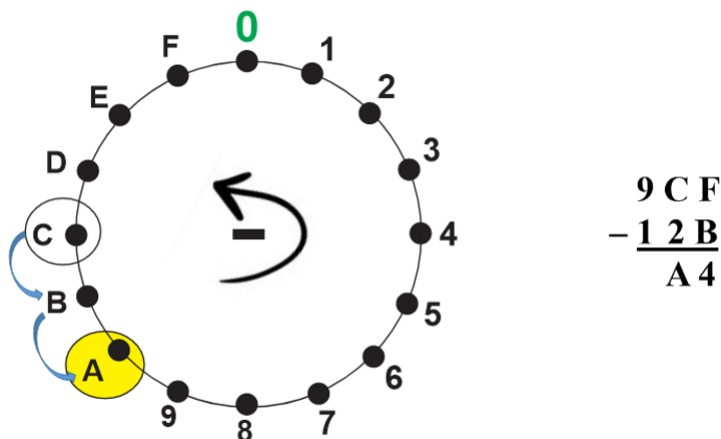


Diagrama 47: Subtração 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Em seguida vamos subtrair os algarismos de terceira ordem.

Na ordem em que aparecem temos o símbolo **9** como minuendo e o **1** como subtraendo.

Deste modo, partindo do símbolo **9**, retornamos **uma** posição alcançando a posição **8**.

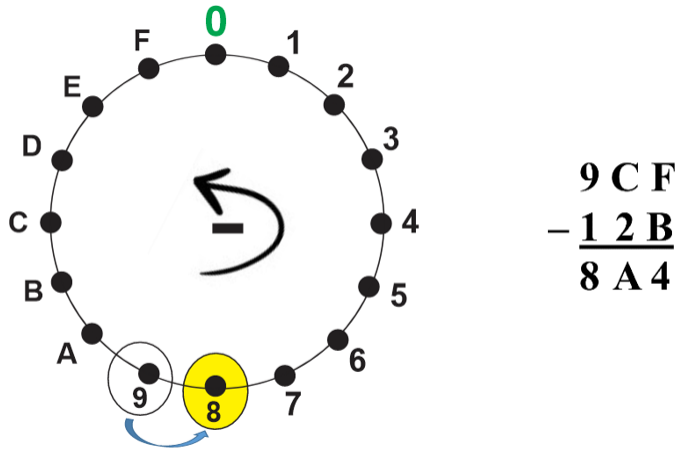


Diagrama 48: Subtração 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 1 – Fonte: produzida pelo autor

Observe que nenhuma das diferenças feitas entre os algarismos de mesma ordem obteve resto menor que o elemento neutro “zero”. Não há, portanto, nenhum ajuste a fazer.

O resultado final é 8A4.

8.4.4 SUBTRAÇÃO – Exemplo 2

$$D45 - 28C = AB9$$

Inicialmente vamos subtrair os algarismos de primeira ordem.

Na ordem em que aparecem, temos o **5** como minuendo e o **C** como subtraendo.

Partindo do símbolo **5**, retornamos **doze** posições, representada pelo símbolo “**C**”, alcançando o símbolo **2**.

Como o elemento neutro foi ultrapassado subtraímos **uma unidade** à próxima ordem.

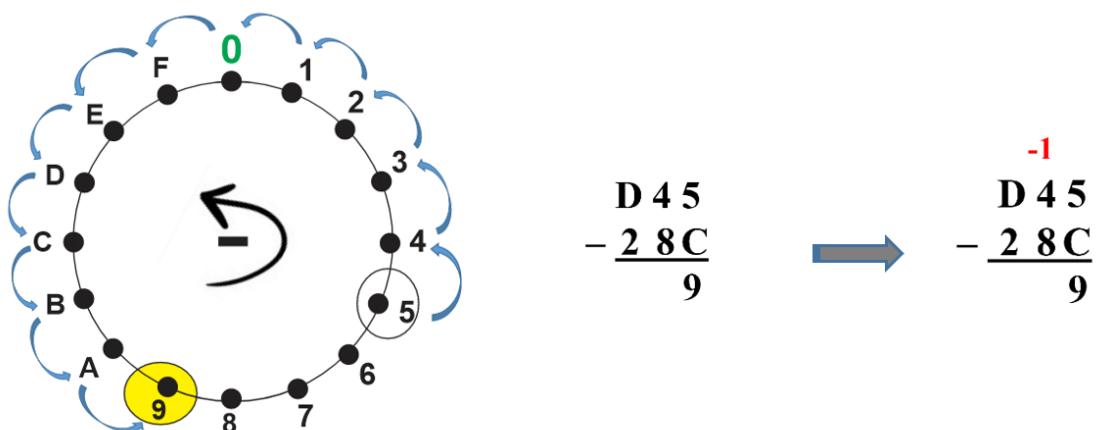


Diagrama 49: Subtração 1ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Vamos subtrair os algarismos de segunda ordem. Na ordem em que aparecem, temos o 4 como minuendo e o 8 como subtraendo.

Partindo do símbolo 4, retornamos **oito** posições, alcançando o símbolo C.

Como o elemento neutro foi ultrapassado retornamos mais **uma posição** alcançando o símbolo B.

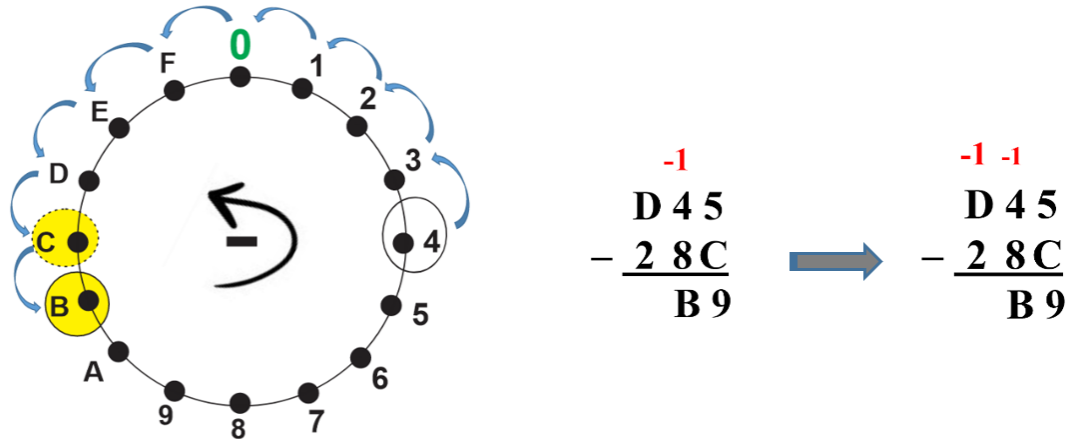


Diagrama 50: Subtração 2ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

Como o elemento neutro foi ultrapassado subtraímos **uma unidade** à próxima ordem.

Vamos subtrair os algarismos de terceira ordem. Na ordem em que aparecem, temos o D como minuendo e o 2 como subtraendo.

Partindo do símbolo D, retornamos **duas** posições, alcançando o símbolo B.

Como o elemento neutro foi ultrapassado retornamos mais **uma posição** alcançando o símbolo A.

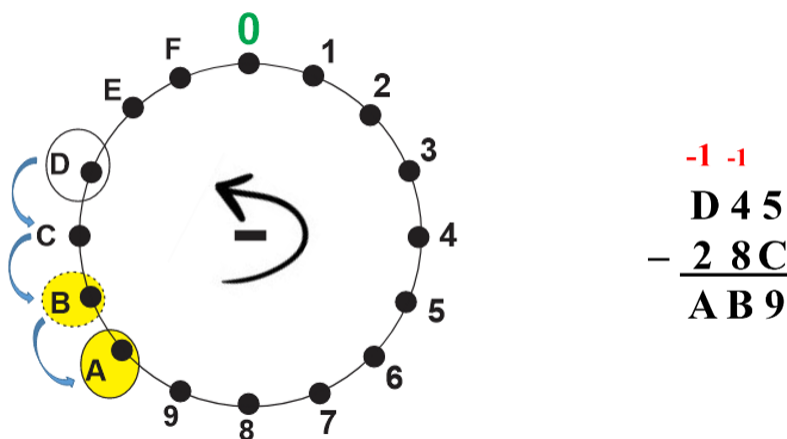


Diagrama 51: Subtração 3ª ordem base hexadecimal – Exemplo 2 – Fonte: produzida pelo autor

9 APLICANDO A PROPOSTA PARA A VISUALIZAÇÃO CIRCULAR EM SALA DE AULA

A Proposta para Visualização Circular foi apresentada inicialmente para turmas dos anos iniciais e finais de duas escolas públicas na área urbana do município de Teresópolis, região serrana do Estado do Rio de Janeiro.

Trata-se de uma cidade com cerca de 160 mil habitantes e com grande extensão territorial, dividida administrativamente em três distritos onde a região mais urbanizada está no primeiro deles.

As turmas com média de lotação de 28 alunos são bastante heterogêneas e apresentam quase sempre dois ou três alunos com necessidades especiais e quatro ou cinco fora da adequação idade/ano de escolaridade.

9.1 METODOLOGIA

Após formalizar e organizar a aplicação da PVC proposta, a etapa seguinte consistiu em estruturá-la metodologicamente para ser utilizada em sala de aula.

Como um dos pressupostos é o reconhecimento efetivo das ordens que compõem uma representação numérica com relativa maturidade operacional, o nível de escolaridade mais básico escolhido foi o quinto ano do ensino fundamental. Os estudantes que, após a atividade, se mostraram deficientes nos pré-requisitos foram encorajados a solicitar ao seu professor regular, que foi também informado, revisar aquele conteúdo. Note-se que a BNCC já traz orientação de atividades envolvendo as ordens de um número no primeiro ano do ensino fundamental, “(EF01MA05) Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica.” (Brasil, 2018).

A metodologia proposta inclui a orientação do professor titular através da ficha de **“PESQUISA DE CAMPO - ORIENTAÇÕES DE APLICAÇÃO”** (anexo 1) e, no momento

da aplicação, o grupo pesquisado recebe a ficha “**Pesquisa de Campo – Ficha 1**” (anexo 2) que envolve cálculos com e sem a necessidade do reagrupamento das ordens de numeração seja nas adições ou nas subtrações em ordem crescente de dificuldade.

Inicialmente, a proposta de aplicação da Ficha 1 visou fundamentalmente identificar aqueles estudantes que apresentavam grandes dificuldades na aplicação regular e natural das operações de adição e subtração de acordo com seu nível de escolaridade. Uma vez identificados, estes seriam os elementos-alvo prioritários para balizar o “antes” e o “depois” que tivessem contato com a Proposta para Visualização Circular.

De forma proposital, um curto tempo (dez minutos) foi oferecido aos estudantes na primeira etapa da pesquisa, ou seja, estariam utilizando apenas seus próprios conhecimentos e habilidades.

As fichas (Ficha 1) inicialmente preenchidas pelo grupo pesquisado foram então recolhidas e iniciou-se, por parte do aplicador, a orientação de como utilizara a PVC. Um exemplo de cada situação foi apresentado ao grupo e então foi distribuída a Ficha 2 (anexo 3) com novas contas propostas dentro das mesmas condições anteriores. Para apoio pedagógico e maior agilidade à aplicação, também a Ficha 3 - **Círculos de Adição** (anexo 4) e a Ficha 4 - **Círculos de Subtração** (anexo 5) com a apresentação gráfica da PVC, foram distribuídas.

Novamente o tempo de dez minutos foi oferecido para que os estudantes realizassem os seis cálculos, três envolvendo adição e três envolvendo subtração.

Após todo o material ser recolhido, foi indagado ao grupo pesquisado a respeito de sua percepção de facilidade de aplicação e também da utilidade da PVC, ou seja, se auxiliou ou não e em que medida. De modo geral, parte do grupo pesquisado não conseguiu, pelo célere contato com as orientações de como usar a PVC, aplicá-la de modo adequado. As contas de subtração em sua maioria sequer foram alcançadas.

É importante reiterar que os estudantes participantes, foram apresentados à proposta de atividade, receberam brevíssima orientação e foram, imediatamente, instigados a fazerem uso da PVC. Observou-se que as percepções de facilidade de entendimento e de utilidade da proposta na realização dos cálculos foram maiores quanto maior a idade do estudante e ano de escolaridade.

Ao final das atividades de cada grupo pesquisado o professor aplicador foi convidado a preencher a “**PESQUISA DE CAMPO – AVALIAÇÃO GERAL DO GRUPO**” (anexo 6) sendo preenchidas uma para cada ano de escolaridade ou grupo avaliado.

Esta avaliação objetivou identificar características gerais dos grupos que participaram da atividade.

Cabe ressaltar que o a Proposta para Visualização Circular foi formalmente aplicada em duas escolas no Ensino Fundamental em oito turmas de anos finais do sexto e oitavo anos outras quatro turmas pertencentes aos quartos e quintos anos de escolaridade.

Não houve oportunidade para aplicação para alunos do Ensino Médio, seja na modalidade regular ou técnico ou ainda em estudantes do Ensino Superior.

Identificou-se na avaliação também o ano de escolaridade dos estudantes bem como a adequação da idade ao ano escolar em que se encontravam assim como procurou-se registrar a percepção do professor aplicador antes e depois da aplicação da PVC nas operações propostas de adição e subtração, com e sem reagrupamento nas ordens dos algarismos dos números envolvidos.

A documentação de orientação e todas as “Fichas de Trabalho”, sem preenchimento, estão disponíveis nos anexos de 1 a 6 e poderão ser utilizadas em atividades futuras. Cabe registrar que durante as orientações fornecidas pelo professor instrutor, foram utilizadas “setas” como as representadas nos exemplos de aplicação anteriores. A intenção foi de indicar deslocamento contínuo e orientado, o que foi bem compreendido pelos estudantes.

Entretanto, quando alguns destes estudantes fizeram suas indicações gráficas, alguns utilizaram linhas contínuas, outros usaram apenas pequenas marcações junto aos algarismos impressos sem efetivamente riscá-los enquanto que um pequeno grupo usou uma mesma circunferência para representar mais de um cálculo tornando bastante confusa a interpretação

As contas propostas com a utilização da PVC estão reproduzidas em seguida nos anexos de 7 a 10, com o padrão de respostas juntamente com a parte gráfica de uso das circunferências de soma e de subtração, para melhor visualização de sua aplicação.

Na sequência são reproduzidas algumas participações de estudantes nos diferentes anos de escolaridade pesquisados. Estão nos anexos de 11 a 30.

O uso das Fichas 3 e 4 que traziam, já de forma organizada, oito circunferências contendo os símbolos do sistema de base decimal, simplificada e chamadas de “Círculos de Adição” e de “Círculos de Subtração”, não foram aproveitados por parte dos alunos. Outros fizeram as marcações pretendidas com maior ou menor grau de adequação visual.

Note-se que ambas as fichas objetivam poupar o tempo de operação do participante da pesquisa fornecendo melhor qualidade e organização em seus registros gráficos.

No primeiro destes registros, foram destacadas falhas relativamente comuns na aplicação da PVC. Infere-se de modo natural que foram ocasionadas fundamentalmente devido à efetiva inexistência do treino no uso da ferramenta.

Qualquer dispositivo que seja aplicado de modo recursivo requer treino por parte do operador. Isto permite maior fluidez e segurança na realização dos cálculos. A oportunidade de um tempo mais elástico com os estudantes que participaram da pesquisa ou até mesmo um retorno às suas turmas para reforçar a Proposta para Visualização Circular não ocorreu.

Alguns tipos de erro foram mais comuns entre os estudantes que tiveram entendimento satisfatório ou muito satisfatório segundo a **“PESQUISA DE CAMPO – AVALIAÇÃO GERAL DO GRUPO”** (anexo 6).

As falhas mais comuns foram reunidas de acordo com sua tipologia.

Foram feitas indicações abreviadas no documento relacionadas ao tipo de falha que têm os seguintes significados. Estes códigos foram colocados junto aos cálculos feitos por um dos alunos e objetivam apenas a exemplificação do registro simplificado na aplicação da PVC. Estão nos anexos 11.2, 11.3 e 11.4.

CÓDIGO	SIGNIFICADO da FALHA	INTERPRETAÇÃO
IEN	Interpretação do Elemento Neutro (EN)	<ul style="list-style-type: none"> • Atingindo ou ultrapassando o EN (na adição) uma unidade não foi adicionada à próxima ordem ou; • Partindo ou ultrapassando o EN (na subtração) uma unidade não foi adicionada à próxima ordem.
IC	Início de Contagem	A contagem das quantidades adicionadas ou subtraídas partiu do próprio símbolo e não do próximo assim, a quantidade de deslocamentos diferiu de uma unidade atingindo, portanto, o símbolo anterior ao pretendido.
OP	Operacional (ou de Operação)	A aplicação da PVC não foi executada conforme as orientações de uso.

Tabela 1: Códigos associados aos tipos de falhas na aplicação na aplicação da Proposta para Visualização Circular e sua interpretação

Fonte: produzida pelo autor

10 CONCLUSÃO

As operações de adição e subtração, principalmente aquelas que ocorrem no primeiro segmento do ensino fundamental não necessariamente são suficientemente compreendidas por todos os estudantes e alguns apresentam grande dificuldade na operacionalização dos cálculos, principalmente quando envolvem os reagrupamentos das ordens dos algarismos que compõem os números e que são eventualmente necessários.

A produção deste trabalho demandou enorme esforço no sentido de fazê-lo o mais simples possível seja em sua redação, leitura ou interpretação.

Durante o processo de pesquisa e construção não foram identificadas em outras fontes consultadas como livros, artigos, trabalhos acadêmicos já publicados e dispositivos ou operacionalização semelhantes. O objetivo do presente trabalho é apresentar um outro caminho para os cálculos de adição e subtração com ou sem reagrupamentos.

Ao analisar os resultados fica claro que a Proposta para a Visualização Circular deve ser apresentado aos estudantes, exemplificado e devidamente treinado para que seja corretamente executado. Apesar de sua simplicidade operacional, duas foram as falhas mais observadas. A primeira, mais frequente, foi incluir o símbolo de partida na contagem, seja na adição ou na subtração. Assim, para exemplificar, o cálculo $4 + 3$, que “a partir do símbolo 4 avançaria três posições alcançando o resultado sete”, comumente nas respostas erradas, aparecia como “partindo do símbolo 4, avançando três posições, finalizaria no resultado seis”, ou seja, o símbolo 4 era erroneamente incluído na contagem. A segunda faz referência à correta interpretação operacional do elemento neutro da base de contagem.

Apresentar aos estudantes e professores um olhar diferenciado na realização destes cálculos não constitui inovação no resultado ou resposta às inúmeras situações-problema que surgem nas salas de aula e no cotidiano das pessoas, mas pretende como já dito, entregar nova forma de realizar o cálculo oferecendo um novo caminho.

11 ANEXOS

Anexo 1: PESQUISA DE CAMPO - ORIENTAÇÕES DE APLICAÇÃO



PESQUISA DE CAMPO - ORIENTAÇÕES DE APLICAÇÃO

Condição necessária para a participação do aluno:

- ✓ Reconhecer as ordens dos algarismos que compõem um número natural;
- ✓ Ser capaz de alinhar as ordens equivalentes em dois quaisquer números naturais com o objetivo de realizar a adição ou subtração usuais.

Converse com seu público alvo orientando que a atividade ocorrerá em três etapas:

1ª) A **FICHA 1** será distribuída para TODO o grupo participante e então será solicitado que a identifique, completando o cabeçalho, e realizem os cálculos nela propostos. São três adições e três subtrações. Não haverá orientação de como realizar as operações solicitadas.

O tempo proposto para sua devolução é, propositalmente, de **dez minutos**, no máximo.

Atenção: Os alunos que eventualmente não atendam às condições necessárias propostas acima, identificados durante a atividade, deverão ser incentivados posteriormente a procurar orientação de seu professor regular e este, se possível, deverá ser comunicado da demanda do aluno em questão.

2ª) A **FICHA 1** será então recolhida e o instrutor utilizará a lousa da sala de aula para orientar seu grupo a respeito da aplicação da Proposta para Visualização Circular. Deverá exemplificar sua aplicação através da resolução dos cálculos propostos neste mesmo questionário.

O instrutor deverá perguntar ao seu grupo se compreendeu o processo (algoritmo) oferecendo, se for o caso, no máximo mais dois exemplos. Uma adição e uma subtração com o grau de dificuldade que julgar adequado.

3ª) A **FICHA 2** será distribuída para TODO o grupo participante juntamente com a **FICHA 3** (círculos para adição) e a **FICHA 4** (círculos para subtração), produzidos e disponibilizadas aos participantes para agilizar a aplicação, então será solicitado que o identifique completando o cabeçalho e realizem os cálculos **UTILIZANDO A PROPOSTA PARA VISUALIZAÇÃO CIRCULAR**. Não haverá orientação de como realizar as operações solicitadas. O tempo proposto para sua devolução é, propositalmente, de **dez minutos**. Finalizado o tempo, as fichas 2, 3 e 4 deverão ser recolhidas. Agradeça a participação do grupo.

Anexo 2: Pesquisa de Campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC

UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

**PESQUISA DE CAMPO – FICHA 1**

Aluno(a): _____ Turma: _____

Cálculos ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $502 + 34$

b) $46 + 37$



c) $257 + 164$

a) $653 - 21$


b) $46 - 28$

c) $304 - 156$


Anexo 3: Pesquisa de Campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC

	UFRJ UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO	
PESQUISA DE CAMPO – FICHA 2		
Aluno(a): _____ Turma: _____		
Cálculos APÓS a apresentação da Proposta para Visualização Circular.		
Arme e efetue:		
a) $704 + 42$	b) $57 + 35$	c) $368 + 173$
a) $546 - 34$	b) $57 - 28$	c) $304 - 276$

Anexo 4: Círculos de Adição – Ficha 3



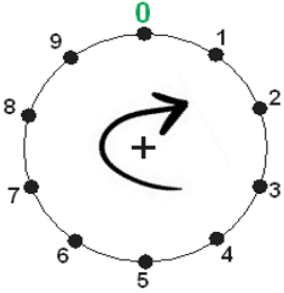
UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

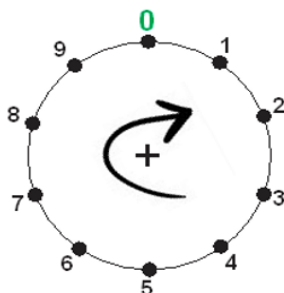


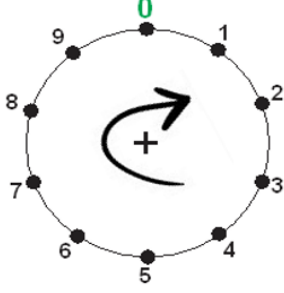
PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

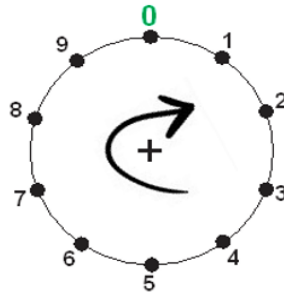
PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE ADIÇÃO - FICHA 3

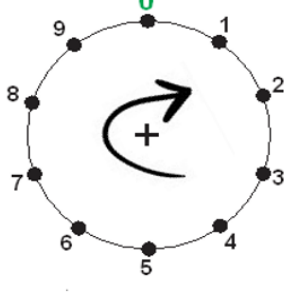
Aluno(a): _____ Turma: _____

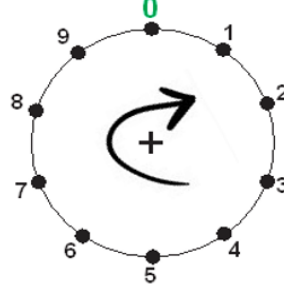


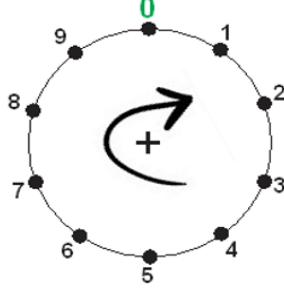


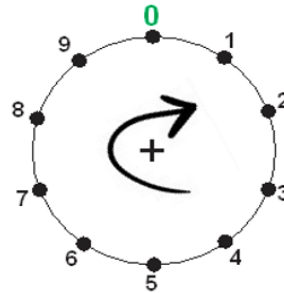












Fonte: produzida pelo autor

Anexo 5: Círculos de Subtração – Ficha 4

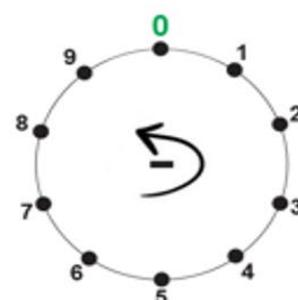
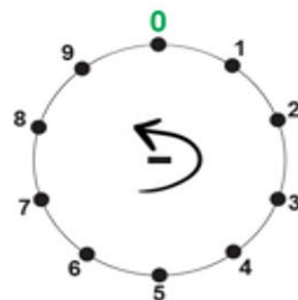
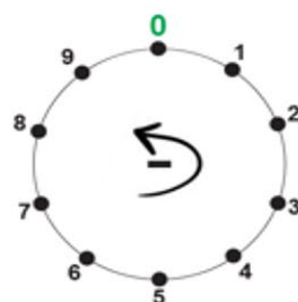
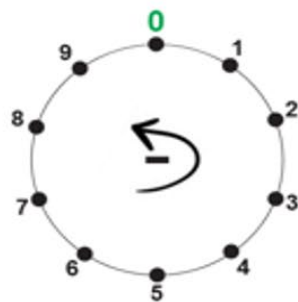
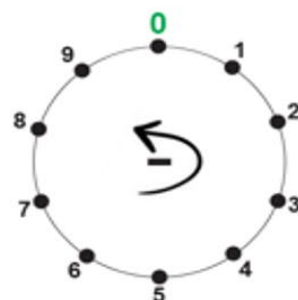
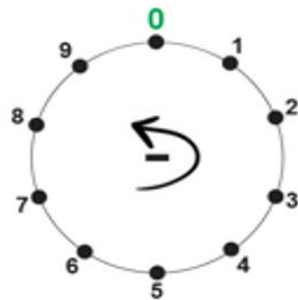
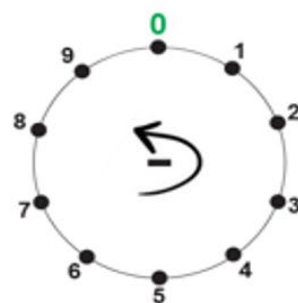
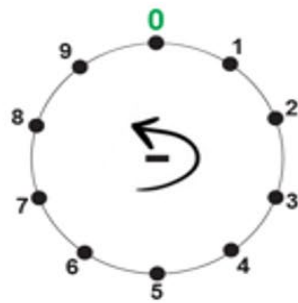


UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO






PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE SUBTRAÇÃO - FICHA 4

Aluno(a): _____ Turma: _____





Anexo 6: Pesquisa de Campo – Ficha 5 – Avaliação geral do grupo

		
PESQUISA DE CAMPO – AVALIAÇÃO GERAL DO GRUPO		
Escola: _____		Cidade / UF: _____
<input type="checkbox"/> Público	<input type="checkbox"/> Particular	Ano de escolaridade: _____
ANTES da aplicação da Proposta para Visualização Circular		
Domínio das operações		
Adição:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório	<input type="checkbox"/> Satisfatório
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade	<input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório	<input type="checkbox"/> Satisfatório
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade	<input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Assimilou as operações necessária à aplicação da Proposta para Visualização Circular?		
	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório	<input type="checkbox"/> Satisfatório
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade	<input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
APÓS da aplicação da Proposta para Visualização Circular		
Domínio das operações		
Adição:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório	<input type="checkbox"/> Satisfatório
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade	<input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório	<input type="checkbox"/> Satisfatório
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade	<input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 7: Respostas Padrão – Ficha 1





PESQUISA DE CAMPO – FICHA 1

Aluno(a): RESPOSTAS PADRÃO Turma: _____

Cálculos ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $502 + 34$

$$\begin{array}{r} 502 \\ + 34 \\ \hline 536 \end{array}$$

b) $46 + 37$

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 37 \\ \hline 83 \end{array}$$

c) $257 + 164$

$$\begin{array}{r} 257 \\ + 164 \\ \hline 421 \end{array}$$

a) $653 - 21$

$$\begin{array}{r} 653 \\ - 21 \\ \hline 632 \end{array}$$

b) $46 - 28$


$$\begin{array}{r} 46 \\ - 28 \\ \hline 18 \end{array}$$

c) $304 - 156$


$$\begin{array}{r} 304 \\ - 156 \\ \hline 148 \end{array}$$

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 8: Respostas Padrão – Ficha 2



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 2

Aluno(a): PADRÃO DE RESPOSTAS Turma: —

Cálculos APÓS a apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $704 + 42$

$$\begin{array}{r} 704 \\ + 42 \\ \hline 746 \end{array}$$

b) $57 + 35$

$$\begin{array}{r} +1 \\ 57 \\ + 35 \\ \hline 92 \end{array}$$

c) $368 + 173$

$$\begin{array}{r} +1 +1 \\ 368 \\ + 173 \\ \hline 541 \end{array}$$

a) $546 - 34$

$$\begin{array}{r} 546 \\ - 34 \\ \hline 512 \end{array}$$

b) $57 - 28$

$$\begin{array}{r} -1 \\ 57 \\ - 28 \\ \hline 29 \end{array}$$

c) $304 - 276$

$$\begin{array}{r} -1 -1 \\ 304 \\ - 276 \\ \hline 028 \end{array}$$

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 9: Respostas Padrão – Ficha 3



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE ADIÇÃO - FICHA 3

Aluno(a): RESPOSTAS PADRÃO Turma: -

$\begin{array}{r} 704 \\ +42 \\ \hline 746 \end{array}$		$\begin{array}{r} 4 \\ +2 \\ \hline 6 \end{array}$
		$\begin{array}{r} 0 \\ +4 \\ \hline 4 \end{array}$


$\begin{array}{r} +1 \\ 57 \\ +35 \\ \hline 92 \end{array}$		$\begin{array}{r} 7 \\ +5 \\ \hline 12 \end{array}$
		$\begin{array}{r} +1 \\ 5 \\ +3 \\ \hline 9 \end{array}$

$\begin{array}{r} +1 +1 \\ 368 \\ +173 \\ \hline 541 \end{array}$		$\begin{array}{r} 8 \\ +3 \\ \hline 11 \end{array}$
		$\begin{array}{r} +1 \\ 6 \\ +7 \\ \hline 14 \end{array}$


$\begin{array}{r} +1 \\ 3 \\ +1 \\ \hline 5 \end{array}$		$\begin{array}{r} 3 \\ +1 \\ \hline 5 \end{array}$

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 10: Respostas Padrão – Ficha 4

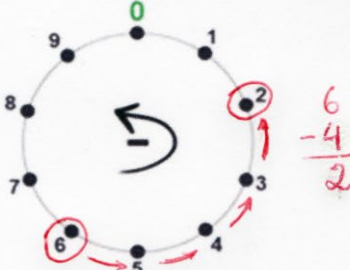
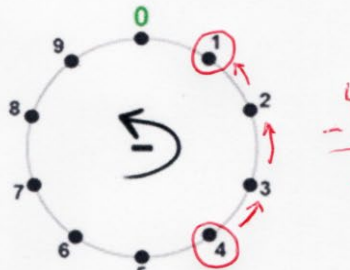
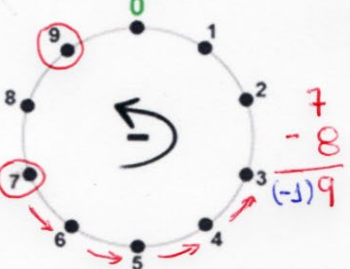
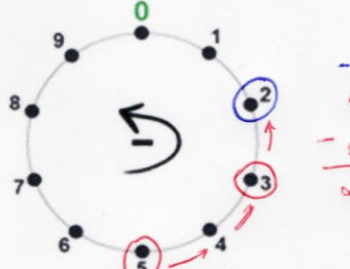
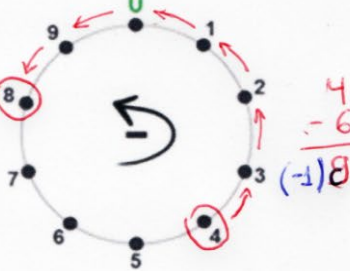
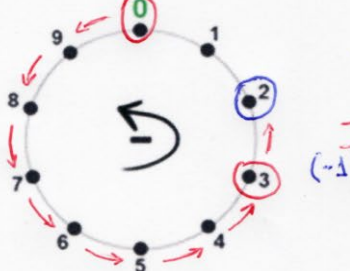
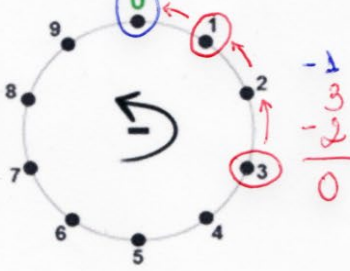
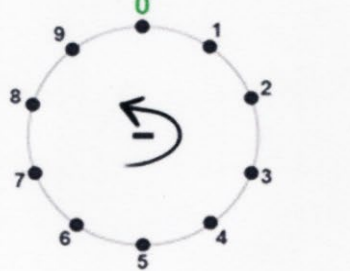


UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE SUBTRAÇÃO - FICHA 4


Aluno(a): PADRÃO DE RESPOSTAS Turma: —

$\begin{array}{r} 546 \\ - 34 \\ \hline 512 \end{array}$		$\begin{array}{r} 6 \\ -4 \\ \hline 2 \end{array}$		$\begin{array}{r} 4 \\ -3 \\ \hline 1 \end{array}$
$\begin{array}{r} -1 \\ 57 \\ -28 \\ \hline 29 \end{array}$		$\begin{array}{r} 7 \\ -8 \\ \hline (-)9 \end{array}$		$\begin{array}{r} -1 \\ 5 \\ -2 \\ \hline 2 \end{array}$
$\begin{array}{r} -1-1 \\ 304 \\ -276 \\ \hline 028 \end{array}$		$\begin{array}{r} 4 \\ -6 \\ \hline (-)2 \end{array}$		$\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ -7 \\ \hline (-)2 \end{array}$
		$\begin{array}{r} -1 \\ 3 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array}$		


Fonte: produzida pelo autor

PARTICIPAÇÃO PESQUISA ALUNA LORRANA – 6º ANO

Anexo 11.1: Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 1

Aluno(a): Lorrana [REDACTED] Turma: 602


Cálculos ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:


<p>a) $502 + 34$</p> $\begin{array}{r} 502 \\ + 34 \\ \hline 536 \end{array}$ <p style="text-align: right; color: red;">✓</p>	<p>b) $46 + 37$</p> $\begin{array}{r} 46 \\ + 37 \\ \hline 83 \end{array}$ <p style="text-align: right; color: red;">✓</p>	<p>c) $257 + 164$</p> $\begin{array}{r} 11 \\ 257 \\ + 164 \\ \hline 421 \end{array}$ <p style="text-align: right; color: red;">✓</p>
<p>a) $653 - 21$</p> $\begin{array}{r} 653 \\ - 21 \\ \hline 674 \end{array}$ <p style="text-align: right; color: red;">✗</p>	<p>b) $46 - 28$</p> $\begin{array}{r} 46 \\ - 28 \\ \hline 74 \end{array}$ <p style="text-align: right; color: red;">✗</p>	<p>c) $304 - 156$</p> $\begin{array}{r} 304 \\ - 156 \\ \hline 460 \end{array}$ <p style="text-align: right; color: red;">✗</p>

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 11.2: Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 2

Aluno(a): Isayana Turma: 602

Cálculos APÓS a apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue

a) $704 + 42$

$$\begin{array}{r} 704 \\ + 42 \\ \hline 836 \end{array}$$

IEN → (pointing to the tens place)
IC (under the 6)

b) $57 + 35$

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 35 \\ \hline 92 \end{array}$$

IC (under the 2)

c) $368 + 173$

$$\begin{array}{r} 368 \\ + 173 \\ \hline 541 \end{array}$$

a) $546 - 34$

$$\begin{array}{r} 546 \\ - 34 \\ \hline 512 \end{array}$$

OP (under the 1), IC (under the 2)

b) $57 - 28$

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 28 \\ \hline 29 \end{array}$$

OP (under the 2), IC (under the 9)


c) $304 - 276$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 276 \\ \hline 28 \end{array}$$


IEN → (pointing to the tens place)
IC (under the 8), OP (under the 2)

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 11.3: Círculos de Adição – Ficha 3



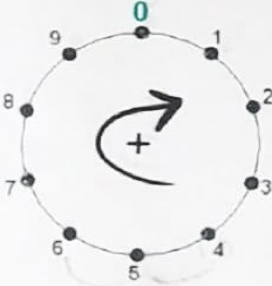
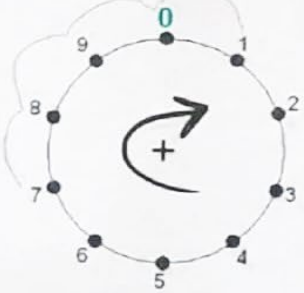
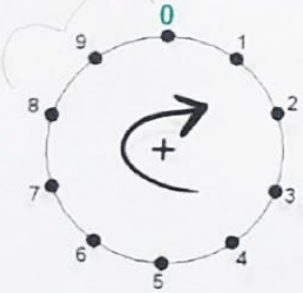
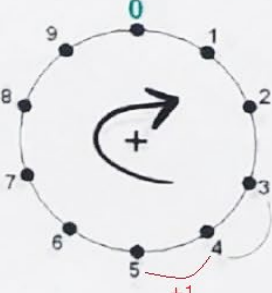
UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE ADIÇÃO - FICHA 3

Aluno(a): Jaysson Turma: 602

$4 + 2$		$0 + 4$ IC
$7 + 5$ IC		$5 + 3 + (1)$
$8 + 3$		$6 + 7 + (1)$ IC
$3 + 1$		

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 11.4: Círculos de Subtração – Ficha 4



PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE SUBTRAÇÃO - FICHA 4

The figure displays eight circular diagrams, each representing a subtraction operation. Each diagram consists of a circle with numbers 0 through 9 arranged around its perimeter. A green '0' is positioned at the top of each circle. A minus sign with a curved arrow pointing to the left is located in the center of each circle. The operations and their corresponding labels are as follows:

- Top-left:** Operation $6 - 4$ (OP). Arrows show a path from 6 to 4.
- Top-right:** Operation $7 - 8$ (IC). Arrows show a path from 7 to 8.
- Middle-left:** Operation $5 - 2 - (1)$ (OP). Arrows show a path from 5 to 2, and then a separate path from 1 to 2.
- Middle-right:** Operation $0 - 7$ (IC, OP). Arrows show a path from 0 to 7.
- Bottom-left:** Operation $4 - 6$ (IC, OP). Arrows show a path from 4 to 6.
- Bottom-right:** Operation $3 - 2$ (IC, OP). Arrows show a path from 3 to 2.

Fonte: produzida pelo autor


Anexo 11.5: Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5

	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO	
FORMULÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO		
Escola: CENTRO EDUCACIONAL N S DE FÁTIMA		Cidade: TERESÓPOLIS / RJ
X Público <input type="checkbox"/> Particular	Ano de escolaridade: <u>6^o</u>	
Estudante: Idade: <u>12</u> anos	Adequado idade/Ano de escolaridade: <input checked="" type="checkbox"/> S <input type="checkbox"/> N	
ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.		
Domínio das operações		
Adição:	<input checked="" type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório	
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório	
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input checked="" type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	
Assimilou as operações necessária à aplicação da Proposta para Visualização Circular?		
<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório	<input checked="" type="checkbox"/> Satisfatório	
<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade	<input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	
APÓS da aplicação da Proposta para Visualização Circular		
Domínio das operações		
Adição:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input checked="" type="checkbox"/> Satisfatório	
	<input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório	
	<input checked="" type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	


Fonte: produzida pelo autor

PARTICIPAÇÃO PESQUISA ALUNA WENDEL – 8º ANO

Anexo 12.1: Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 1

Aluno(a): Wendel [REDACTED] Turma: 280J

Cálculos ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $502 + 34 = 536$

$$\begin{array}{r} 502 \\ + 34 \\ \hline 536 \end{array}$$

✓

b) $46 + 37 = 83$

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 37 \\ \hline 83 \end{array}$$

✓

c) $257 + 164 = 421$

$$\begin{array}{r} 257 \\ + 164 \\ \hline 421 \end{array}$$

✓

a) $653 - 21 = 632$

$$\begin{array}{r} 653 \\ - 21 \\ \hline 632 \end{array}$$

✓

b) $46 - 28 = 18$

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 28 \\ \hline 18 \end{array}$$

✓


c) $304 - 156 = 148$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 156 \\ \hline 148 \end{array}$$


✓

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 12.2: Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 2

Aluno(a): Wendel [REDACTED] Turma: 2803

Cá Cálculos APÓS a apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $704 + 42 =$

$$\begin{array}{r} 704 \\ + 42 \\ \hline 746 \end{array}$$

✓

b) $57 + 35$

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 35 \\ \hline 92 \end{array}$$

✓

c) $368 + 173$

$$\begin{array}{r} 368 \\ + 173 \\ \hline 541 \end{array}$$

✓

a) $546 - 34$

$$\begin{array}{r} 546 \\ - 34 \\ \hline 512 \end{array}$$

✓

b) $57 - 28$

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 28 \\ \hline 29 \end{array}$$

✓


c) $304 - 276$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 276 \\ \hline 28 \end{array}$$


(OP)

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 12.3: Círculos de Adição – Ficha 3



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

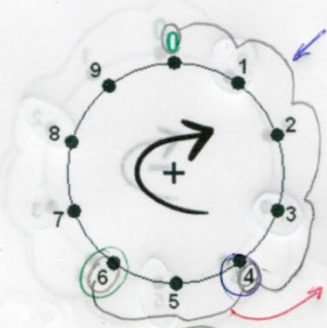


PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

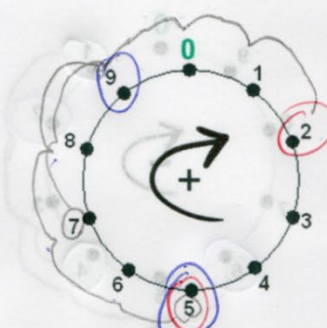
PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE ADIÇÃO - FICHA 3

Aluno(a): Wendell [REDACTED] Turma: 2803

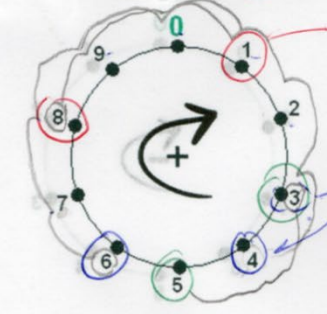
$$\begin{array}{r} 704 \\ + 42 \\ \hline 746 \end{array}$$




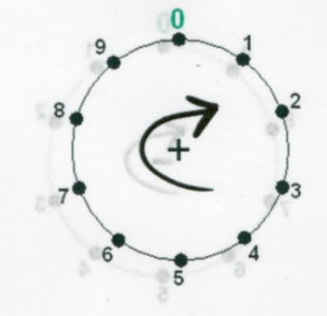
$$\begin{array}{r} +1 \\ 57 \\ + 35 \\ \hline 92 \end{array}$$

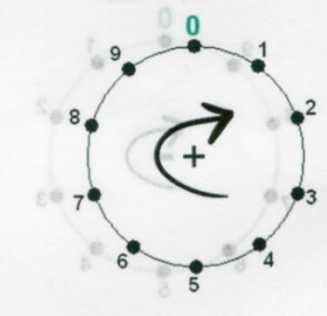


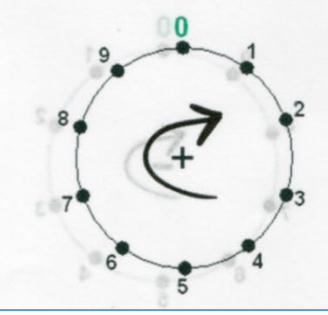
$$\begin{array}{r} +1 +1 \\ 368 \\ + 173 \\ \hline 4 \end{array}$$

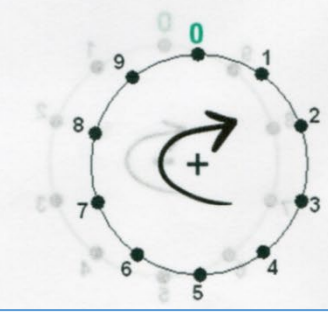












Fonte: produzida pelo autor

Anexo 12.4: Círculos de Subtração – Ficha 4

PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE SUBTRAÇÃO - FICHA 4

546
- 34

512

57
- 28


29

304
- 276


138
↑
FALTA OP

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 12.5: Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5



UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

FORMULÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

Escola: C.E. HELENA DE PAULA TAVARES Cidade: TERESÓPOLIS
 Público Particular Ano de escolaridade: 8º

Estudante: Idade: 14 anos Adequado idade/Ano de escolaridade: S N

ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Domínio das operações

Adição: Muito Satisfatório Satisfatório
 Apresenta dificuldade Apresenta muita dificuldade

Subtração: Muito Satisfatório Satisfatório
 Apresenta dificuldade Apresenta muita dificuldade

Assimilou as operações necessária à aplicação da Proposta para Visualização Circular?

Muito Satisfatório Satisfatório
 Apresenta dificuldade Apresenta muita dificuldade

APÓS da aplicação da Proposta para Visualização Circular

Domínio das operações


Adição: Muito Satisfatório Satisfatório
 Apresenta dificuldade Apresenta muita dificuldade



Subtração: Muito Satisfatório Satisfatório
 Apresenta dificuldade Apresenta muita dificuldade

Fonte: produzida pelo autor

PARTICIPAÇÃO PESQUISA ALUNA MARIA VITÓRIA – 8º ANO

Anexo 13.1: Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 1

Aluno(a): Maria Vitória Almeida Freitas Turma: 802

Cálculos ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $502 + 34$

$$\begin{array}{r} 502 \\ + 34 \\ \hline 536 \end{array}$$

b) $46 + 37$

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 37 \\ \hline 83 \end{array}$$

c) $257 + 164$

$$\begin{array}{r} 257 \\ + 164 \\ \hline 421 \end{array}$$

a) $653 - 21$

$$\begin{array}{r} 653 \\ - 21 \\ \hline 632 \end{array}$$

b) $46 - 28$

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 28 \\ \hline 18 \end{array}$$


c) $304 - 156$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 156 \\ \hline 148 \end{array}$$


Fonte: produzida pelo autor

Anexo 13.2: Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando da PVC

MAIS FÁCIL



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 2

Aluno(a): Maria Gabriela Laimoto Freitas Turma: 802

Cálculos APÓS a apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $704 + 42$

$$\begin{array}{r} 704 \\ + 42 \\ \hline 746 \end{array}$$

b) $57 + 35$

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 35 \\ \hline 92 \end{array}$$

c) $368 + 173$

$$\begin{array}{r} 368 \\ + 173 \\ \hline 541 \end{array}$$

a) $546 - 34$

$$\begin{array}{r} 546 \\ - 34 \\ \hline 512 \end{array}$$

b) $57 - 28$


$$\begin{array}{r} 57 \\ - 28 \\ \hline 29 \end{array}$$

c) $304 - 276$


$$\begin{array}{r} 304 \\ - 276 \\ \hline 28 \end{array}$$

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 13.3: Círculos de Adição – Ficha 3



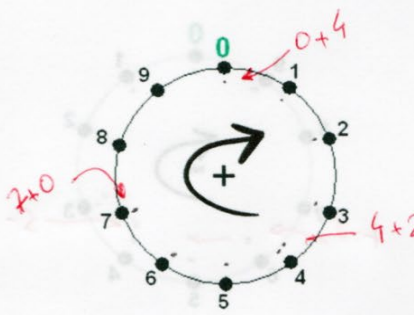
UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

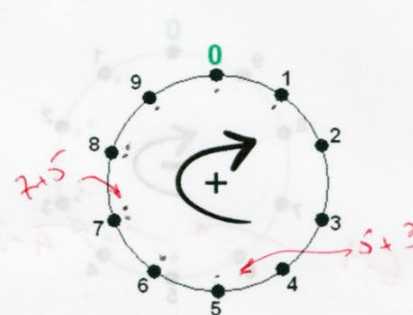


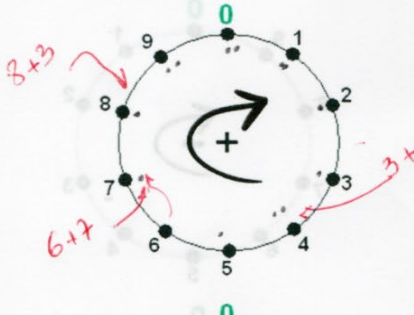
PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional


PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE ADIÇÃO - FICHA 3

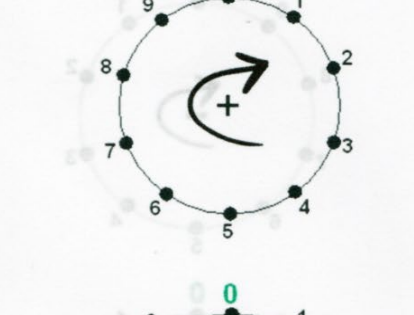
Aluno(a): Maria Cibria Laimon Santos Turma: 802




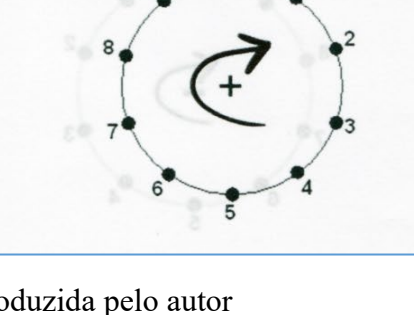


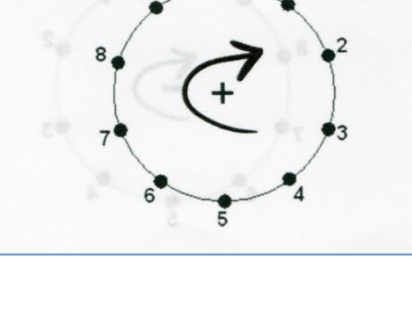














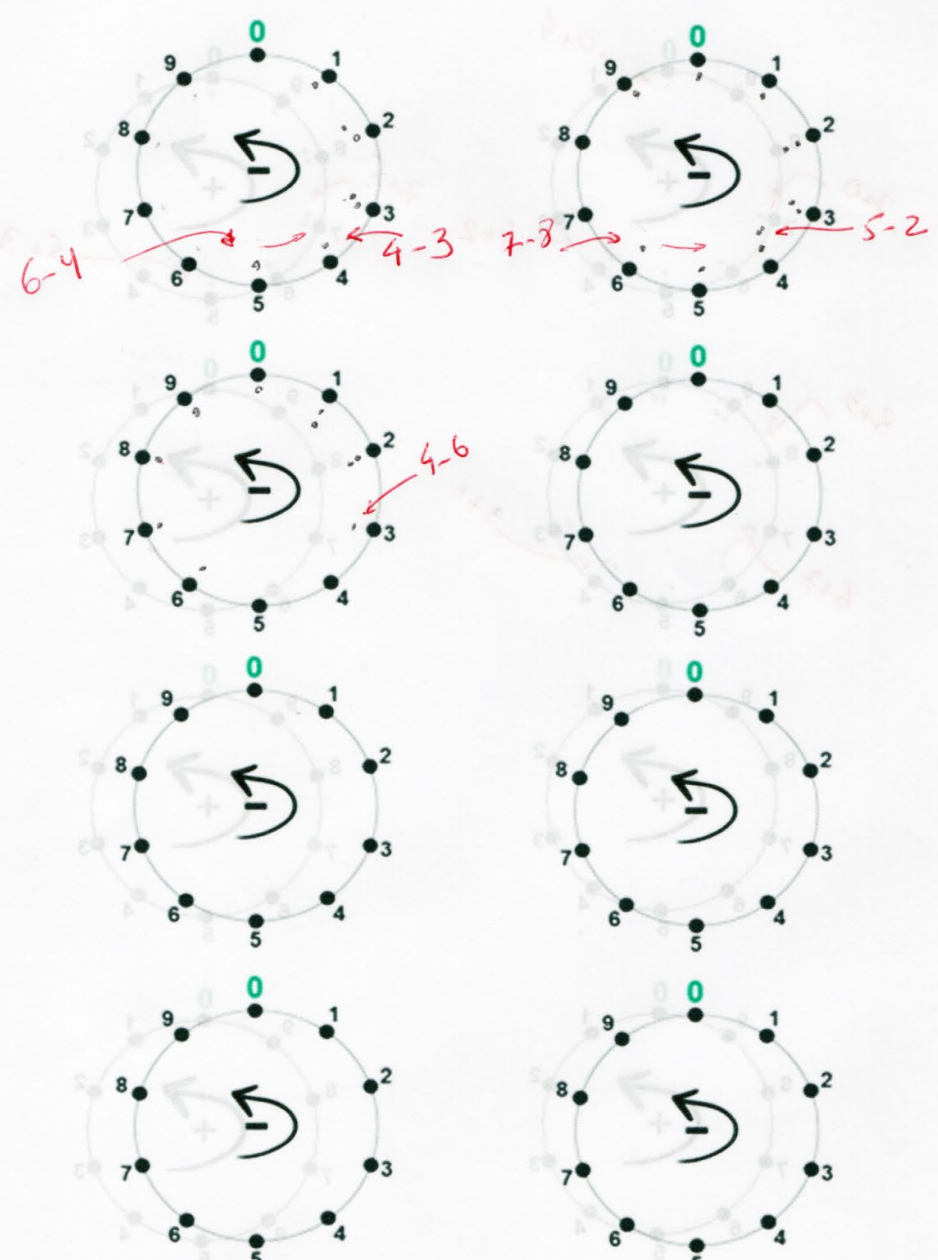
Fonte: produzida pelo autor

Anexo 13.4: Círculos de Subtração – Ficha 4

PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE SUBTRAÇÃO - FICHA 4



Aluno(a): Mariana Gabriela Lacerda Santos Turma: 802



The image displays eight circular subtraction charts arranged in a 4x2 grid. Each chart features a central minus sign and a curved arrow pointing counter-clockwise. The numbers 0 through 9 are arranged around the perimeter of each circle. Handwritten red annotations include arrows and numbers indicating subtraction operations: $6-4$, $4-3$, $7-3$, $5-2$, and $4-6$.

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 13.5: Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5


 <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> UFRJ UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO </div>	
PESQUISA DE CAMPO – AVALIAÇÃO GERAL DO GRUPO	
Escola: <u>C. E. HELENA DE PAULA TAVARES</u> Cidade / UF: <u>TERESÓPOLIS/RJ</u>	
<input checked="" type="checkbox"/> Público <input type="checkbox"/> Particular Ano de escolaridade: <u>8º</u>	
ANTES da aplicação da Proposta para Visualização Circular	
Domínio das operações	
Adição:	<input checked="" type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input checked="" type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Assimilou as operações necessária à aplicação da Proposta para Visualização Circular?	
<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input checked="" type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	
APÓS da aplicação da Proposta para Visualização Circular	
Domínio das operações	
Adição:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input checked="" type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade

Fonte: produzida pelo autor


PARTICIPAÇÃO PESQUISA ALUNA MIRELLA – 8º ANO

Anexo 14.1: Pesquisa de campo – Ficha 1 – Contas propostas antes da PVC

mais fácil



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PESQUISA DE CAMPO – FICHA 1

Aluno(a): Mirella [REDACTED] Turma: 802

Cálculos ANTES da apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $502 + 34 = 536$

$$\begin{array}{r} 502 \\ + 34 \\ \hline 536 \end{array}$$

b) $46 + 37 = 83$

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 37 \\ \hline 83 \end{array}$$

c) $257 + 164 = 421$

$$\begin{array}{r} 257 \\ + 164 \\ \hline 421 \end{array}$$

a) $653 - 21 = 632$

$$\begin{array}{r} 653 \\ - 21 \\ \hline 632 \end{array}$$

b) $46 - 28 = 18$

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 28 \\ \hline 18 \end{array}$$


c) $304 - 156 = 148$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 156 \\ \hline 148 \end{array}$$


Fonte: produzida pelo autor

Anexo 14.2: Pesquisa de campo – Ficha 2 – Contas propostas usando a PVC

Mais fácil



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO



PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PESQUISA DE CAMPO – FICHA 2

Aluno(a): Mirella [REDACTED] Turma: 802

Cálculos APÓS a apresentação da Proposta para Visualização Circular.

Arme e efetue:

a) $704 + 42 = 746$

$$\begin{array}{r} 704 \\ + 42 \\ \hline 746 \end{array}$$

✓

b) $57 + 35 = 92$

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 35 \\ \hline 92 \end{array}$$

✓

c) $368 + 173$

$$\begin{array}{r} 368 \\ + 173 \\ \hline 541 \end{array}$$

✓

a) $546 - 34 = 512$

$$\begin{array}{r} 546 \\ - 34 \\ \hline 512 \end{array}$$

✓

b) $57 - 28 = 15$

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 28 \\ \hline 15 \end{array}$$

✗


c) $304 - 276 = 172$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 276 \\ \hline 172 \end{array}$$


✓

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 14.3: Círculos de Adição – Ficha 3



UFRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO

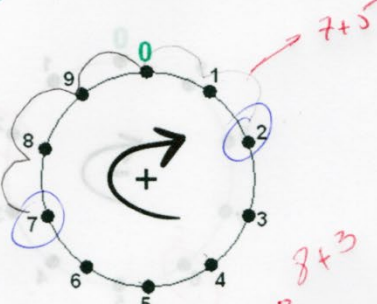


PROFMAT
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

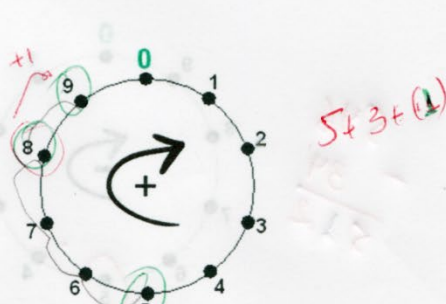
PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE ADIÇÃO - FICHA 3

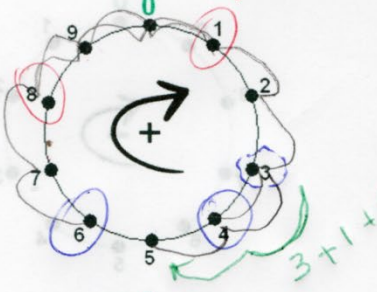
Aluno(a): Mirabella [REDACTED] Turma: 802

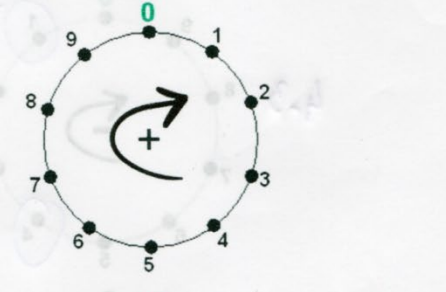
$$\begin{array}{r} +1 \\ 57 \\ +33 \\ \hline 90 \end{array}$$





$$\begin{array}{r} +1 \\ 368 \\ +173 \\ \hline 541 \end{array}$$

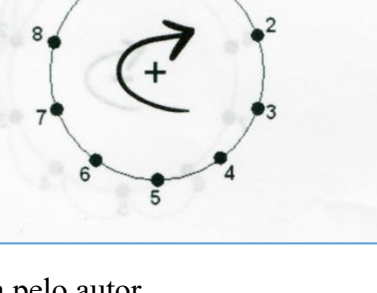


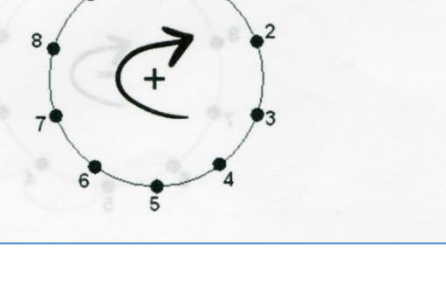












Fonte: produzida pelo autor

Anexo 14.4: Círculos de Subtração – Ficha 4

PESQUISA DE CAMPO – CÍRCULOS DE SUBTRAÇÃO - FICHA 4

Aluno(a): _____ Turma: _____

546
 $- 34$

 512

$6-4$

$4-3$

57
 $- 28$



 57

$7-8 = 5$
ERRO!

MÚLTIPLO USO ?

Fonte: produzida pelo autor

Anexo 14.5: Formulário de Pesquisa de Campo – Ficha 5

 UFRJ UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO	 PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PESQUISA DE CAMPO – AVALIAÇÃO GERAL DO GRUPO	
Escola: <u>CE Helena de Paula TAVARES</u>	Cidade / UF: <u>TERESSÓPOLIS / RJ</u>
<input checked="" type="checkbox"/> Público <input type="checkbox"/> Particular	Ano de escolaridade: <u>8^o</u>
ANTES da aplicação da Proposta para Visualização Circular	
Domínio das operações	
Adição:	<input checked="" type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Subtração:	<input checked="" type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Assimilou as operações necessária à aplicação da Proposta para Visualização Circular?	
<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input checked="" type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade	
APOS da aplicação da Proposta para Visualização Circular	
Domínio das operações	
Adição:	<input checked="" type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade
Subtração:	<input type="checkbox"/> Muito Satisfatório <input type="checkbox"/> Satisfatório <input checked="" type="checkbox"/> Apresenta dificuldade <input type="checkbox"/> Apresenta muita dificuldade

Fonte: produzida pelo autor

APÊNDICE

Nos exemplos abaixo são exibidos diagramas e dispositivos cujas aplicações facilitam a determinação ou o cálculo de determinadas situações matemáticas.

Objetivam, sobretudo, à simplificação das etapas para a obtenção dos resultados. Sua aplicação mais comum traz procedimentos gráficos ou algébricos bastante intuitivos tornando mais fluida a execução e a interpretação dos resultados.

1 – DIAGRAMA DE VENN ou VENN-EULER

Poderosa ferramenta para a representação de conjuntos o Diagrama de Venn ou sua referência histórica conhecido como Diagrama de Venn-Euler (John Venn, matemático inglês que viveu entre 1834 até 1923 e Leonhard Paul Euler, matemático e físico suíço que viveu entre 1707 até 1783).

Podemos pensar no diagrama como um dispositivo de abordagem gráfica que auxilia de forma intuitiva, a organização e identificação de elementos de determinado conjunto e de como estes elementos interagem ou não com outros conjuntos.

As diversas operações possíveis de se realizar entre dois ou mais conjuntos podem, observadas as questões práticas, serem representadas através dos diagramas de Venn. Cálculos e relações envolvendo até três conjuntos encontram maior simplicidade de representação e aplicação pois não demandam representações gráficas elaboradas.

Sem o aprofundamento pertinente, seguem alguns possíveis exemplos do uso do Diagrama de Venn para representar operações com um, dois, três e quatro conjuntos.

Conjunto $A = \{ a, b, c, d, e \}$

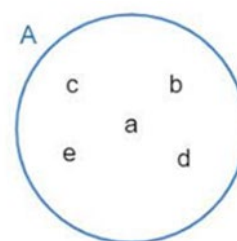


Figura 15: Diagrama de Venn para um conjunto
Fonte: produzida pelo autor

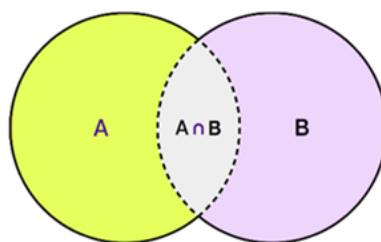


Figura 16: Diagrama de Venn para dois conjuntos
Fonte: produzida pelo autor

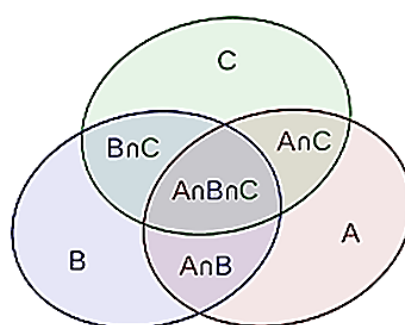


Figura 17: Diagrama de Venn para três conjuntos
Fonte: casadamatematica.com.br/conjuntos-entendendo-sua-linguagem-basica/

Nos exemplos a seguir as interseções, entre os conjuntos A e B, formalmente denotado por $A \cap B$, foi representada por simplicidade de escrita, AB. Entre A, B e C, formalmente denotado por $A \cap B \cap C$, foi representada por simplicidade de escrita, ABC e assim sucessivamente.

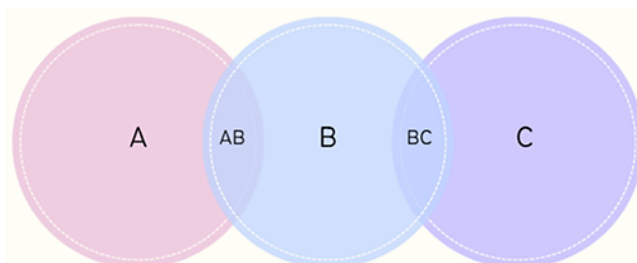


Figura 18: Diagrama de Venn para três conjuntos
Fonte: produzida pelo autor

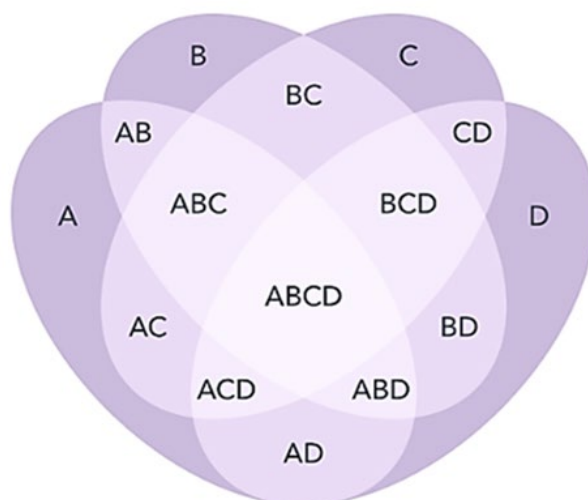


Figura 19: Diagrama de Venn para quatro conjuntos
 Fonte: Internet – adaptada pelo autor

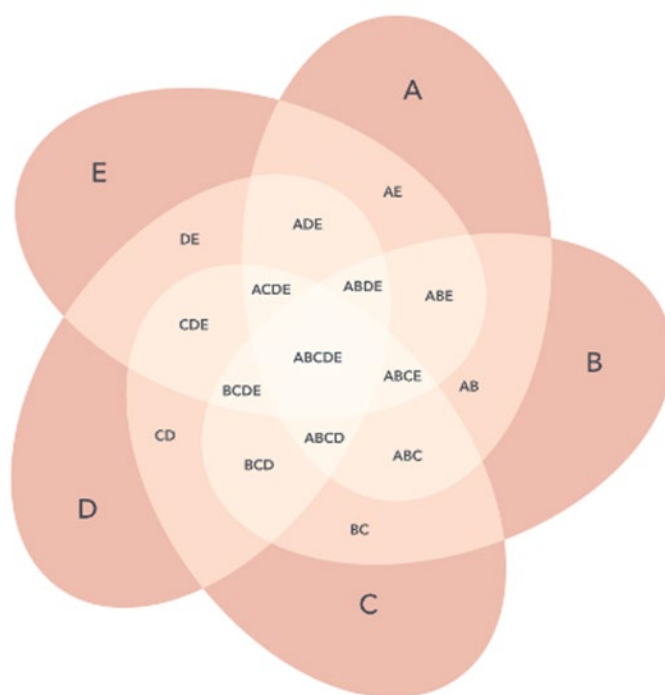


Figura 20: Diagrama de Venn para cinco conjuntos
 Fonte: Internet – adaptada pelo autor

2 – DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

Concebido para dinamizar e facilitar a divisão de um polinômio qualquer de $P(x)$ por um binômio $(x - a)$, o dispositivo de Briot-Ruffini (Briot foi um matemático francês que viveu de 1812 a 1882 e Paolo Ruffini, médico e matemático italiano que viveu de 1765 a 1822) é um poderoso algoritmo para o cálculo deste quociente além de possibilitar a aplicação prática do Teorema do Resto.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nos exemplos abaixo o objetivo é dividir $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ pelo binômio $D(x) = x - 1$. Note que o uso do Dispositivo de Briot-Ruffini confere maior agilidade e simplicidade no cálculo.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3 \\
 -5x^4 + 5x^3 \\
 \hline
 2x^3 + 2x^2 \\
 -2x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 4x^2 - 7x \\
 -4x^2 + 4x \\
 \hline
 -3x + 3 \\
 +3x - 3 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x-1 \\
 \hline
 5x^3 + 2x^2 + 4x - 3
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 21: Divisão clássica pelo Algoritmo da Chave – Divisão Euclidiana

Fonte: mathematural.blogspot.com/

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\
 1 & & 5 & 2 & 4 & -3 \\
 \hline
 & 5 & 2 & 4 & -3 & 0 \\
 & 5x^3 & +2x^2 & +4x & -3
 \end{array}$$

Figura 22: Divisão através do Dispositivo de Briot-Ruffini

Fonte: mathematural.blogspot.com/

BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1988.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temático: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

IFRAH, Georges. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução: Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

HEFEZ, Abramo. **Polinômios e Equações Algébricas**. Abramo Hefez, Maria Lúcia Torres Villela. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM – Coleção PROFMAT, 2022.

HOWARD, E. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM – Coleção PROFMAT, 2013.

MOREY, Bernadete. **Os sistemas de numeração antigos na formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. São Paulo: Zahar, 2012.

SÉRATES, J. **Métodos Cuca Legal de efetuar operações no conjunto dos números naturais**. 6ª ed. Brasília: Jonofon, 1998.

WALL, E.S. **Teoria dos Números para Professores do Ensino Fundamental**. Tradução: Roberto Carlos Mota. São Paulo: AMGH, 2014.

<https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/rj/teresopolis.html> acesso em 11/04/2024

https://pt.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci/ acesso em 15/10/2021

https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/ acesso em 04/10/2021

https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci/ acesso em 04/10/2021

<https://www.infoescola.com/biografias/leonardo-fibonacci/> acesso em 15/10/2021