



UFRJ

**UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT**

**INTEGRAÇÃO DE TEORIA DOS GRAFOS E O DESENVOLVIMENTO DE
HABILIDADES DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

ROBERTA GRECO RODRIGUES

Rio de Janeiro

2023

UFRJ

**INTEGRAÇÃO DE TEORIA DOS GRAFOS E O DESENVOLVIMENTO DE
HABILIDADES DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

ROBERTA GRECO RODRIGUES

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFRJ como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Maria Helena Cautiero Horta Jardim

Rio de Janeiro

2023

Dedico essa dissertação aos meus pais, meu
companheiro e meu filho por me incentivarem a
perseguir meus sonhos e me apoiarem em todos os
momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a minha mãe, meu porto seguro, que sempre esteve ao meu lado me dando forças para superar meus medos e angústias, apoiando todas as minhas escolhas e decisões, oferecendo o suporte para que eu pudesse seguir o caminho que me realizasse.

Ao meu pai, por quem tenho grande admiração, em função de ter me dado as ferramentas necessárias para me tornar a pessoa que sou hoje, ensinado a ser perseverante, objetiva e a analisar as opções que encontrei ao longo da vida.

Ao meu companheiro, uma pessoa sensacional, que está sempre me incentivando e me apoiou durante os momentos difíceis de elaboração dessa dissertação. Sem ele esse projeto jamais teria sido possível.

Ao meu filho, razão do meu viver, minha fonte de inspiração e força. Meu suporte inabalável durante os desafios desta dissertação. Seu apoio e carinho foram fundamentais para superar os momentos difíceis.

Aos meus amigos de turma, em especial Alex, Antônio, Joana e Lucilene, por todo apoio, pelos grupos de estudo, por compartilharem comigo as risadas e angústia. Sem vocês, essa jornada não teria sido tão divertida.

Aos professores Nei Rocha, Maria Aguietas, Maria Darcy, Walcy, Monique, Marisa, André, pela diferença que fizeram em minha formação com todos os ensinamentos e o carinho dedicado.

Em especial, a minha orientadora Maria Helena por aceitar esse desafio e acreditar na minha proposta. Por todo carinho e dedicação, por me passar segurança e me tranquilizar nos momentos de angústia, por toda a motivação e paciência nesse momento tão delicado. Mesmo com todas as dificuldades da pandemia, foi sempre muito presente e, com certeza, tornou esse processo muito mais leve e menos cansativo.

Aos professores da banca que aceitaram o convite e contribuíram com valiosas sugestões para a finalização deste trabalho.

Para não correr o risco de cometer a injustiça de deixar alguém de fora, agradeço, de forma geral, a todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste projeto de pesquisa.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

Paulo Freire

RESUMO

Esta dissertação explora possibilidades que a matemática discreta, especificamente na área de teoria dos grafos, oferece para apoiar o raciocínio, a resolução de problemas e o pensamento computacional no contexto do currículo de matemática na educação básica. Para ilustrar esse trabalho, discutem-se exemplos de grafos aplicados em nível de educação básica, integrando o desenvolvimento de competências relacionadas ao Pensamento Computacional. A proposta é que este estudo se torne um recurso educacional, contribuindo para a formação continuada de professores da educação básica. Além disso, pretende-se que seja aplicável como ferramenta pedagógica, utilizando instrumentos metodológicos em um processo de aprendizagem ativa e significativa. Todas as tarefas sugeridas foram concebidas com a intenção de envolver os alunos na exploração e utilização das estruturas de grafos e do pensamento computacional.

Palavras-chave: Pensamento Computacional; Teoria dos Grafos; Educação Básica; Resolução de Problemas; Reflexão Didática; Matemática Discreta;

ABSTRACT

This dissertation explores the possibilities that discrete mathematics, specifically in the field of graph theory, offers to support reasoning, problem-solving, and computational thinking in the context of the mathematics curriculum in basic education. To illustrate this work, examples of graphs applied at the basic education level are discussed, integrating the development of competencies related to Computational Thinking. The proposal is for this study to become an educational resource, contributing to the continuous professional development of basic education teachers. Additionally, it is intended to be applicable as a pedagogical tool, using methodological instruments in a process of active and meaningful learning. All suggested tasks were designed with the intention of engaging students in the exploration and utilization of graph structures and computational thinking.

Key Words: Computational Thinking; Graph Theory; Basic Education; Problem Solving; Didactic Reflection; Discrete Mathematics;

SUMARIO

INTRODUÇÃO.....	13
1 METODOLOGIA DE PESQUISA	17
1.1 SOBRE AS ATIVIDADES	17
2 O PENSAMENTO COMPUTACIONAL (PC)	20
2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO.....	20
2.2 O CONCEITO	21
2.3 A INTEGRAÇÃO DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA:	24
2.4 METODOLOGIAS EDUCACIONAIS STEM/STEAM E O PC	25
2.5 O PENSAMENTO COMPUTACIONAL E A INOVAÇÃO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	26
3 SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS	28
3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO.....	28
3.2 SOBRE A ORIGEM DA TEORIA DOS GRAFOS: PONTES DE KÖNIGSBERG	29
3.3 REFERENCIAL TEÓRICO	30
3.4 TEORIA DOS GRAFOS E A INOVAÇÃO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO	36
4 ATIVIDADES SUGERIDAS.....	38
4.1 AS ATIVIDADES SOB A PERSPECTIVA DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC.....	38
4.2 PROBLEMA DAS 4 CORES.....	39
4.3 APERTOS DE MÃOS	44
4.4 AS PONTES DE KONIGSBERG	46
4.5 CONEXÃO DE AMIGOS EM UMA REDE SOCIAL.....	49
4.6 ROTAS PELA CIDADE	54
CONSIDERAÇÕES FINAIS	59

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	61
ANEXOS	64

INDICE DE IMAGENS

Figura 1 - Pensamento Computacional (adaptado pela autora).....	24
Figura 2 - Pontes de Königsberg.....	29
Figura 3 – Representação por Grafo Pontes de Königsberg.....	30
Figura 4 Exemplo de Grafo	31
Figura 5 - Grafo Simples	31
Figura 6 - Multigrafo	32
Figura 7 - Grafo Orientado Simples	32
Figura 8 - Multigrafo Orientado	33
Figura 9 - Multigrafo Misto.....	33
Figura 10 - Grafo Bipartido	34
Figura 11 - Pseudografo.....	34
Figura 12 - Mapa do Brasil com as Regiões (3 Cores).....	41
Figura 13 - Mandala (2 Cores).....	41
Figura 14 - Mandala (4 Cores).....	41
Figura 15 - Mandala (4 Cores).....	42
Figura 16 - Sistema Digestório Humano (3 Cores)	42
Figura 17 - Pontes de Königsberg.....	46
Figura 18 - Kaliningrado atualmente	47
Figura 19 - Rede Social em grafos.....	49
Figura 20 - Rede de amigos em Grafos	51
Figura 21 - Rede de Amigos em Grafos com peso	52
Figura 22 - Exemplo de Grafo	53
Figura 23 - Parte do Bairro Flamengo no Rio de Janeiro	55
Figura 24 - Rotas.....	56
Figura 25 - Grafo com os locais de interesse e possíveis rotas.....	57

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACM	<i>Association for Computing Machinery</i>
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CSTA	<i>Computer Science Teachers Association</i>
ISTE	<i>International Society for Techonology</i>
NSF	<i>National Science Foundation</i>
ODS	Objetivos de Desenvolvimento Sustentável
ONU	Organização das Nações Unidas
PC	Pensamento Computacional
PNE	Plano Nacional de Educação
STEAM	<i>Science</i> (Ciência) , <i>Technology</i> (Tecnologia), <i>Engineering</i> (Engenharia), <i>Arts</i> (Artes) e <i>Mathematics</i> (Matemática)
STEM	<i>Science</i> (Ciência) , <i>Technology</i> (Tecnologia), <i>Engineering</i> (Engenharia) e <i>Mathematics</i> (Matemática).
TDICs	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

INTRODUÇÃO

A motivação para escolher o tema da minha pesquisa, que envolve a Teoria dos Grafos e o Pensamento Computacional, surgiu durante meu período de mestrado e através da minha experiência como professora particular. Ao observar as dificuldades que alguns alunos enfrentam ao tentar compreender e aplicar conceitos matemáticos no seu cotidiano, percebi a importância de abordagens que integrem esses conceitos de forma mais acessível e prática.

Embora minha formação seja em matemática e eu atualmente trabalhe como professora particular, minha trajetória profissional se estende por cerca de 15 anos na área da ciência da computação, o que me proporcionou maior familiaridade com os temas em questão.

Acredito que a incorporação desses temas na educação básica pode contribuir para reduzir as dificuldades dos alunos e facilitar o aprendizado dos conceitos matemáticos abordados.

A visão de um sistema educacional de ensino fundamental e médio do século XXI centra-se na missão de proporcionar aos alunos as competências de que necessitam para uma participação ativa em uma sociedade baseada no conhecimento. Há necessidade de mudanças nos currículos de escolas de educação básica, para que haja reflexos positivos em nossa sociedade.

Para essa inovação curricular, é preciso levar em consideração o fato de que, na educação básica, a Ciência, a Matemática e a Tecnologia são frequentemente consideradas de difícil compreensão por parte dos alunos, bem como a Computação, uma área que permeia todas as demais áreas do conhecimento.

O Plano Nacional de Educação (PNE) que determina diretrizes, metas e estratégias para a política educacional no período de 2014 a 2024, em sua meta 7 item 12 estabelece:

incentivar o desenvolvimento, selecionar, certificar e divulgar tecnologias educacionais para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio e incentivar práticas pedagógicas inovadoras que assegurem a melhoria do fluxo escolar e a aprendizagem, assegurada a diversidade de métodos e propostas pedagógicas, com preferência para softwares livres e recursos educacionais abertos, bem como o acompanhamento dos resultados nos sistemas de ensino em que forem aplicadas;(BRASIL, 2015)

O enfrentamento do desafio da transmissão de informações, que muitas vezes é ineficaz e produz distorções conceituais, é imperativo. O aprendizado em campos conceitualmente ricos não passa apenas por aprender novas informações e procedimentos, mas por um processo envolvido na construção de sentido e significado, capacidade de análise crítica e construção de um raciocínio dedutivo. Ajudar os alunos a entenderem ideias muitas vezes contraintuitivas é

desafiador, mas é necessário para ajudá-los a desenvolver entendimentos de ideias focadas principalmente nas áreas de ciências, matemática e tecnologia.

Cabe também observar a necessidade do processo de ensino e aprendizagem dar espaço para situações que privilegiam as ideias dos alunos e interações nelas baseadas.

Desta forma, para que os alunos se tornem proficientes em uma sociedade baseada no conhecimento, certas competências devem ser aplicadas de diferentes formas. Dentre elas se destacam: a capacidade de compreender como aplicar conceitos matemáticos à resolução de problemas e à vida cotidiana, a capacidade de aprender com o que leem; as competências de pensamento crítico para sistematizar informações, representar e analisar e as competências de resolução de problemas necessárias para utilizar eficazmente essas informações.

Por último, mas não menos importante, deve-se buscar contemplar numa reforma curricular o desenvolvimento da criatividade e inovação, gerar ideias e conceitos, refletir sobre uma informação de forma crítica.

Indo ao encontro disso, uma série de compromissos, tanto do governo brasileiro, quanto da Organização das Nações Unidas (ONU), foram firmados nos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Segundo a meta 4.c da ODS adaptada para o Brasil (BRASIL, 2015b, p.5), o país se comprometeu a, até 2030, assegurar a todos os professores da educação básica a formação específica na área de conhecimento em que atuam, promovendo a oferta de formação continuada, em regime de colaboração entre União, estados e municípios, inclusive por meio de cooperação internacional.

Como forma de garantir esse compromisso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define em suas competências gerais:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p.11)

Ninguém subestima esse desafio e vale destacar o profundo respeito pelo profissionalismo dos professores nesse enfrentamento. Não é uma tarefa fácil, pois novo vocabulário precisa ser aprendido, novas habilidades adquiridas e novas formas de ensino adotadas.

Em destaque nesse processo está o papel que a compreensão do pensamento computacional tem a desempenhar para alunos do século XXI. Ressalta-se também a necessidade de mudança curricular. No âmbito da matemática, é feita uma proposta de inclusão da teoria dos grafos e aplicações na educação básica.

Nessa dissertação é abordada uma estrutura conceitual para entender o pensamento computacional, bem como uma abordagem com intencionalidade pedagógica usando a teoria dos grafos como um conteúdo programático.

Assim, a dissertação tem como objetivo geral apresentar sugestões de atividades envolvendo a teoria dos grafos, ramo da matemática discreta de significativo crescimento nas últimas décadas com aplicações em uma ampla gama de áreas do conhecimento, de forma integrada ao pensamento computacional.

Nessa integração proposta, será destacada a conexão entre a teoria dos grafos e o pensamento computacional, que não se restringe apenas ao âmbito da matemática, mas também se estende às investigações críticas em diversas áreas de conhecimento. Essa integração surge com a perspectiva de tornar o pensamento computacional uma parte essencial do currículo escolar diário.

Para alcançar este objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

1. Analisar o potencial da aplicação dos conceitos e etapas do pensamento computacional na resolução de problemas em geral, bem como sua utilização como ferramenta no processo de ensino.
2. Analisar alguns conceitos e resultados teóricos de teoria de grafos que podem ser abordados no ensino básico.
3. Desenvolver um conjunto de sugestões de atividades utilizando teoria dos grafos e pensamento computacional, apresentando possíveis desdobramentos e objetivos a serem alcançados. Essas atividades podem ser adotadas diretamente ou servir de inspiração para outros educadores.

O trabalho foi desenvolvido com o intuito de agregar valor no campo da formação de professores, por convicção de que esta é uma contribuição primordial para a melhoria da qualidade da educação.

Cabe evidenciar que as possibilidades de atividades relacionadas à teoria dos grafos e ao pensamento computacional são apresentadas não como um modelo a ser aplicado, mas como uma contribuição para dar significado ao professor sobre maneiras de integrar soluções computacionais a partir da oportunidade de ressignificar sua prática docente.

A partir dessas perspectivas, esse trabalho visa a explorar diversas formas de se utilizar o pensamento computacional como processo na construção de uma aprendizagem mais significativa. As atividades propostas envolvem o pensamento computacional e a teoria dos grafos e servem de base para elaboração de outras.

O texto da dissertação foi estruturado em cinco capítulos, além desta introdução:

No primeiro capítulo é descrita a metodologia que foi utilizada no trabalho.

O segundo capítulo aborda o pensamento computacional, fazendo uma breve introdução histórica, seu conceito e etapas, uma reflexão sobre sua integração na educação básica, seu uso combinado com a metodologia STEAM, além do seu potencial como inovação no ensino da matemática.

O terceiro capítulo aborda a teoria de grafos, através de uma breve introdução ao tema, abordagem histórica para contextualização, seguida de uma referência teórica sobre grafos, onde são apresentados os conceitos e resultados que serão utilizados nas atividades sugeridas nesse trabalho, sendo finalizado com uma reflexão a respeito da inovação que o ensino de grafos pode representar no ensino básico.

Já o quarto capítulo diz respeito ao desenvolvimento da dissertação, apresentando detalhadamente as atividades sugeridas e sua perspectiva a partir da BNCC.

O último capítulo apresenta as considerações finais com as reflexões acerca dos próximos passos e do que se espera alcançar a partir da aplicação das atividades sugeridas nessa pesquisa.

1 METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, serão delineados os procedimentos metodológicos adotados na condução da pesquisa, que consistiram, basicamente, em pesquisas bibliográfica e documental. O trabalho abrangeu uma revisão da literatura pertinente aos tópicos Teoria dos Grafos e Pensamento Computacional, englobando livros, artigos científicos, dissertações, teses e outras fontes acadêmicas relevantes, envolvendo também coleta e análise de outros documentos correlatos aos temas em estudo.

Na identificação e seleção de fontes, foram conduzidas buscas em bases de dados acadêmicas, utilizando palavras-chave relacionadas aos temas da pesquisa, como “teoria dos grafos”, “pensamento computacional”, “resolução de problemas”, “pontes de *Königsberg*” dentre outras. Paralelamente, documentos pertinentes como BNCC, ODS e PNE, além de livros didáticos abordando a Teoria dos Grafos foram identificados e selecionados.

As fontes e documentos selecionados foram submetidos a análise crítica, avaliando-se sua relevância e contribuição para o desenvolvimento das atividades sugeridas, com o intuito de extrair informações pertinentes.

As ideias e informações obtidas a partir da literatura foram sintetizadas e organizadas de modo a fundamentar teoricamente o estudo e posterior desenvolvimento das atividades propostas, bem como interpretações e discussões que contribuíram para o desenvolvimento das atividades propostas.

1.1 SOBRE AS ATIVIDADES

As atividades foram elaboradas com base em artigos e teoremas estudados, os quais apresentavam potencial para uma abordagem interdisciplinar e uma representação gráfica facilitada por meio de grafos. Em alguns casos, também foi considerada a relevância histórica desses conceitos para o desenvolvimento da teoria dos grafos. Para cada atividade proposta, realizou-se uma análise dos conceitos a serem abordados, sua complexidade e alinhamento com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a fim de sugerir o segmento do ensino básico mais adequado.

Em todas as atividades sugeridas, é possível utilizar recursos tecnológicos, o que está alinhado com uma das competências gerais da BNCC, que ressalta a necessidade de usar e desenvolver Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) na Educação Básica.

A primeira atividade baseou-se no Teorema das Quatro Cores, que, embora pareça simples à primeira vista, revelou-se extremamente complexo em sua demonstração, demandando mais de 100 anos de estudo e o avanço da capacidade computacional para ser comprovado. Consiste na coloração de mapas e na construção de grafos a partir dessas

colorações. Dada a complexidade do teorema, o objetivo da atividade é introduzir conceitos básicos de grafos, como vértices, arestas e sua representação gráfica, sendo apropriada para ser abordada a partir dos anos finais do Ensino Fundamental.

As segunda e a terceira atividades, “Aperto de Mãos” e “Pontes de *Konigsberg*”, foram selecionadas por sua relevância histórica. Tanto o teorema do aperto de mãos quanto o problema das pontes de *Königsberg* foram demonstrados no artigo de Leonard Euler intitulado “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes*”, de 1741, considerado o trabalho seminal que deu origem à teoria dos grafos.

Considerando a complexidade de alguns conceitos envolvidos nessas atividades, elas são mais indicadas para serem trabalhadas a partir do 8º ano do Ensino Fundamental.

Na segunda atividade, os alunos serão divididos em grupos e realizarão apertos de mãos entre si, representando essas interações por meio de grafos. Já na terceira atividade, será apresentado o problema das pontes de *Königsberg*, explicando sua importância histórica na matemática, e os alunos trabalharão na representação desse problema por meio de grafos.

A quarta atividade foi concebida especialmente para alunos a partir do 9º ano do ensino fundamental até o ensino médio. Por envolver uma rede social, essa atividade tem o potencial de despertar um grande interesse, já que reflete a realidade cotidiana dos alunos. Essa atividade consiste em representar uma rede de amigos por meio de grafos e trabalhar conceitos de menor caminho, melhor caminho, peso em uma aresta, entre outros.

Na quinta atividade, intitulada "Rotas pela Cidade", uma região específica da cidade será selecionada e alguns pontos de interesse serão marcados para posterior representação em grafos. Nessa atividade, serão abordados caminhos eulerianos, além dos conceitos de menor caminho e melhor caminho. Essa atividade é indicada para ser aplicada a partir do 8º ano do ensino fundamental.

Nas atividades propostas, foram incluídas seções comuns a todas elas:

1. Introdução: uma breve contextualização da atividade proposta, incluindo seu contexto histórico ou as inspirações por trás dela.
2. Objetivo: Apresentação dos objetivos a serem alcançados em cada atividade, delineando o que se espera que os alunos aprendam ou desenvolvam.
3. Montando os Grafos: Sugestões de mediações para os professores introduzirem a representação por meio de grafos, juntamente com questionamentos pertinentes para estimular a compreensão.
4. Conceitos e Nomenclaturas: Identificação dos conceitos e terminologias que serão abordados em cada atividade.

5. Etapas do Pensamento Computacional: Exemplos de como as etapas do pensamento computacional podem ser desenvolvidas e identificadas durante a realização da atividade.

Dada a complexidade que a análise do grafo pode adquirir, dependendo dos questionamentos feitos pelo professor em sala de aula, cada atividade oferece sugestões sobre os segmentos em que podem ser utilizadas. Cabe ao professor adaptá-las conforme a realidade de sua turma e/ou segmento pretendido, caso decida utilizá-las.

Vale ressaltar que por esse trabalho não ter intenção de fazer uma proposta a respeito de uma ementa e conteúdo programático da teoria dos grafos que devam ser inseridos no currículo da educação básica, e sim mostrar a adequação do tema por meio de atividades que possam ser utilizadas.

As indicações a respeito dos anos e/ou segmentos do ensino básico indicados para cada atividade são sugestões que, através de um trabalho a ser realizado posteriormente com professores, poderão ser revistas.

Além das cinco seções destacadas, as atividades podem possuir outras de acordo com as suas particularidades.

2 O PENSAMENTO COMPUTACIONAL (PC)

Este capítulo aborda o conceito e as etapas do pensamento computacional, sua integração à educação básica, às metodologias educacionais STEM/STEAM e seu potencial como inovação no ensino da matemática.

Ele é dividido em cinco seções: a primeira apresenta uma introdução sobre o tema do capítulo e sua relevância; a segunda discute o conceito e os pilares do pensamento computacional; a terceira aborda a integração do pensamento computacional à educação básica; a quarta reflete sobre a utilização do pensamento computacional em conjunto com metodologias como a STEAM; e, por fim, a quinta seção analisa a relação entre o pensamento computacional e a inovação no currículo de matemática na educação básica.

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A computação tornou-se essencial no mundo da cultura digital, sendo hoje a alfabetização computacional necessária para a prática em diversas áreas de conhecimento. Porém, na educação básica, o ensino não refletiu essa mudança computacional. É necessário um avanço na reflexão e prática sobre de que forma as tecnologias digitais são integradas ao currículo de aprendizagem dos alunos em suas instituições de ensino.

O pensamento computacional (PC) na educação básica se apresenta como um caminho para desenvolver a alfabetização computacional. Essa integração envolve o uso de ferramentas e métodos computacionais com o objetivo de entender fenômenos e resolver problemas.

Embora esteja ganhando espaço, a generalização dessa incorporação do PC à educação básica ainda é bastante limitada. Várias barreiras se apresentam no ensino básico e, dentre elas, está a constatação de que a maioria dos professores não tem experiência com abordagem computacional e não se sente suficientemente preparado para integrar o PC em sua prática pedagógica.

Este trabalho teórico apresenta uma abordagem instrucional para integrar a educação disciplinar com PC usando atividades conectadas ou desconectadas (sem computador).

Estamos interessados nas formas como as atividades de aprendizagem baseadas na teoria dos grafos apoiam o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos.

Nossa proposta visa a contribuir com uma estratégia pedagógica acessível. Começamos com uma visão geral e crítica das abordagens atuais que integram PC, matemática e outras áreas. Em seguida apresentamos também possibilidades de novos conteúdos que têm por objetivo mostrar a viabilidade da inovação tão necessária nos currículos da educação básica.

Neste trabalho pretendemos estabelecer uma estrutura conceitual para entender o pensamento computacional nos inovadores programas de estudo.

Em seguida, apresentamos uma abordagem instrucional do Pensamento Computacional com explicações algorítmicas.

2.2 O CONCEITO

Pensamento computacional é um conceito que tem recebido atenção considerável nos últimos anos, mas há pouco acordo sobre o que este abrange, e menos ainda sobre estratégias para avaliar o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos.

A motivação para escolher esse tema como foco central foi por acreditar que o pensamento computacional permite, tanto aos professores, como aos alunos, desenvolverem habilidades que podem ser utilizadas, não somente em sala de aula, como em outros aspectos da vida, além de sua implementação não prescindir necessariamente da utilização de recursos tecnológicos, por mais que eles sejam desejáveis.

Essa integração vem ao encontro de práticas inovadoras que possibilitam o ensino e a aprendizagem de matemática, incluindo a investigação, experimentação, produção e desempenho de conhecimento, aprendizagem baseada em projetos; bem como práticas de aprendizagem.

O termo Pensamento Computacional foi utilizado inicialmente por Seymour Papert em 1980; posteriormente Jeannette Wing, em 2006, cunhou esse mesmo termo, mas dando ênfase a um diferente aspecto.

Para Papert, o PC é o resultado de sua abordagem construcionista da educação, onde as relações sociais e afetivas e suas dimensões são tão importantes quanto o conteúdo técnico. E, enquanto metodologias ativas, com um percurso que passa por propósito, ação, reflexão, compreensão e conceito, para o desenvolvimento de habilidades por meio do engajamento socioemocional, cognitivo e acadêmico.

Já Jeannette Wing, em março de 2006, tornou o termo pensamento computacional conhecido em seu artigo *Computational Thinking* publicado no periódico da *Association for Computing Machinery* (ACM).

Nesse artigo, Wing diz que “Pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, não somente para cientistas da computação. À leitura, escrita e aritmética, deveríamos incluir pensamento computacional na habilidade analítica de todas as crianças.” (WING, 2006, p.1).

Até hoje ainda não há consenso sobre o conceito do PC, como enfatiza Valente: “encontrar uma definição para o pensamento computacional que todos concordam tem sido uma tarefa difícil, mesmo para a comunidade da Ciência da Computação e para pesquisadores e organizações interessadas nesse tema.” (VALENTE, 2016, p.6)

Em 2009, Lu e Fletcher (2009, p.1) complementam Wing e definem o Pensamento computacional como uma série de ferramentas mentais necessárias para resolver de forma eficiente problemas humanos complexos.

No artigo *Shut down or Restart*, publicado em 2012 pela *Royal Society* britânica, o PC é descrito como o “processo de reconhecer aspectos de computação no mundo que nos cerca, e aplicar ferramentas e técnicas da ciência da computação para entender e raciocinar sobre sistemas e processos naturais e artificiais” (ROYAL SOCIETY, 2012, p.10).

Por fim, Brackmann, em sua tese, após refletir a respeito de diversas definições e divergências, propõe que:

“O [PC] é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente” (BRACKMANN, 2017, p.31).

Apesar de ainda existirem divergências a respeito de sua definição, pode-se afirmar que além do PC ser necessário para a programação de computadores, a aplicação de seus elementos pode ser utilizada no dia a dia, ou seja: é um processo que se caracteriza por uma estratégia para modelar soluções e resolver problemas de forma eficiente, encontrando assim soluções genéricas para classes inteiras de problemas, podendo ser usado por todos, em diversas áreas de conhecimento e de contextos cotidianos.

Essa estratégia é dividida em etapas que variam de acordo com o autor, segundo Grover; Pea (2013, p. 3) por exemplo, o PC pode ser dividido nas seguintes etapas:

- Síntese e Generalização de Padrões (incluindo modelos e simulações)
- Processamento sistemático de informação
- Representação e símbolos de sistemas
- Noção algorítmica do fluxo de controle
- Decomposição estruturada do problema (modularização)
- Pensamento interativo, recursivo e paralelo
- Restrições de eficiência e performance
- Análise e detecção de erros

Em 2011, organizações que visam a acelerar o uso de tecnologias para resolver problemas e inspirar inovações na comunidade educacional global, assim como formar e dar suporte ao uso de tecnologias em salas de aula por professores do ensino básico, tais como o *International Society for Technology* (ISTE) e a *Computer Science Teachers Association* (CSTA), divulgaram uma definição operacional para o PC que foi avaliada e aprovada por cerca de 700 professores e pesquisadores de ciência da computação. (ISTE; CSTA, 2011, p.1).

De acordo com essa definição, o PC é um processo de resolução de problemas que inclui (mas não é limitado por) as seguintes características:

- Formular problemas de forma que se possa utilizar computadores e outras ferramentas para resolvê-los
- Organizar e analisar as informações de forma lógica
- Representar as informações através de sínteses, como modelos e simulações
- Automatizar soluções através de algoritmos (série de passos a serem seguidos)
- Identificar, analisar e implementar possíveis soluções para o problema a fim de encontrar a melhor e mais eficiente delas
- Generalizar e transferir esse processo de resolução de problema para uma série de outros problemas.

Essas etapas foram condensadas e existe hoje um consenso de que o pensamento computacional pode ser dividido em pelo menos quatro etapas, mas em nem todas as situações essas as quatro etapas serão utilizadas.

São elas:

- a) **Decomposição:** capacidade de dividir um problema maior e mais complexo em vários problemas menores interligados que, uma vez solucionados, têm suas resoluções combinadas para resolver o problema inicial.

Exemplo: Em uma organização de uma festa de aniversário é comum que esta seja dividida em tarefas menores, como escolha do buffet, seleção de músicas, escolha de locais, preparar a lista de convidados, escolha de brindes etc.

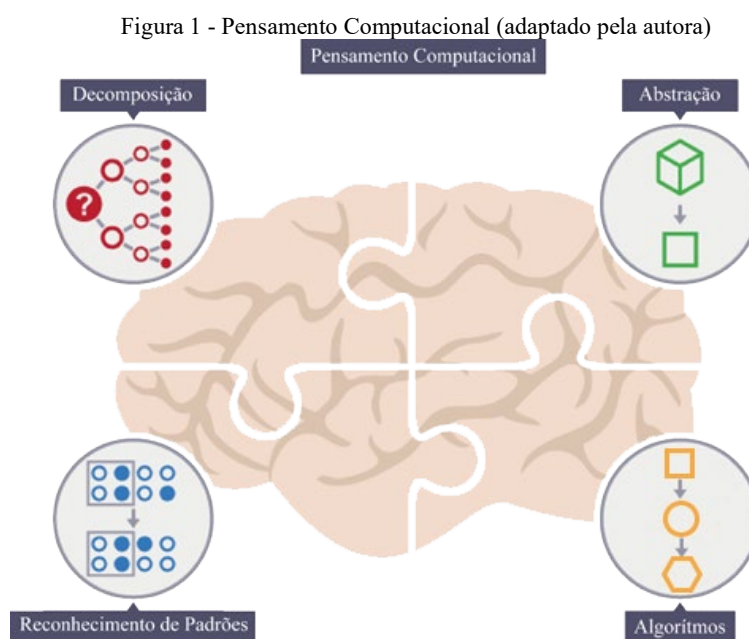
- b) **Reconhecimento de Padrões:** reconhecer dentro do que foi abstraído, os padrões, as ações que se repetem, os comportamentos comuns. O problema a ser resolvido e a busca de semelhanças com problemas resolvidos anteriormente, visando uma simplificação na busca da solução, podendo assim trazer resultados mais eficientes. Usando ainda o exemplo anterior, é possível perceber que a escolha de buffet ou de local pode ser reaproveitada para um outro evento social.

- c) Abstração: capacidade de focar e priorizar o que é principal, suficiente e indispensável para a resolução do problema, identificando o que é relevante e simplificações cabíveis.

Quando uma festa de aniversário é organizada existem determinadas tarefas que são necessárias, como a escolha de um local ou de um buffet, porém outras como a escolha de brindes não são indispensáveis para a realização do evento.

- d) Algoritmo: organizar um plano de solução na forma de um passo a passo que pode ou não ser escrito através de linguagem de programação, pseudocódigo ou fluxograma para solução do problema.

A figura 1 representa as etapas do pensamento computacional descritas acima.



Fonte: Adaptado de BBC Learning (2015)

Através dos exemplos fornecidos na descrição das etapas do PC, torna-se evidente sua vasta aplicabilidade em diversas áreas, o que o torna uma excelente ferramenta para permitir que os professores de matemática adotem uma abordagem interdisciplinar.

2.3 A INTEGRAÇÃO DO PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA:

Como já citado anteriormente, segundo Valente (2016, p.5):

A ideia que a programação de computadores ajuda a pensar melhor não é nova. Desde que a linguagem Logo foi criada em meados dos anos 1960, Papert já mencionava a importância dessa atividade para o processo de construção de conhecimento e para o desenvolvimento do pensamento. Em 1971, ele argumentou que a computação pode

ter "um impacto profundo por concretizar e elucidar muitos conceitos anteriormente sutis em psicologia, linguística, biologia, e os fundamentos da lógica e da matemática" (PAPERT, 1971, p. 2). Isso é possível pelo fato de proporcionar a uma criança a capacidade "de articular o trabalho de sua própria mente e, particularmente, a interação entre ela e a realidade no decurso da aprendizagem e do pensamento" (p. 3).

De acordo com Namukasa, Patel e Miller (2017, p.6), ensinar PC e matemática é o mesmo que ensinar matemática através das etapas do PC e na mesma atividade ensinar o PC através da matemática.

Aplicando essas reflexões à educação, o PC permite que os alunos desenvolvam uma série de ferramentas mentais que podem ser utilizadas em diversas áreas de aprendizagem, em especial a matemática. Em outras palavras, o pensamento computacional é um processo composto por conjunto de técnicas para simplificação e resolução de problemas a ser desenvolvido podendo ser aplicada em todas as áreas de conhecimento e interesse humano.

O PC pode contribuir para que o aluno deixe de ser somente um consumidor de tecnologia e passe a ter a habilidade de construir ferramentas que possam ter impacto significativo sobre a capacidade de ser um cidadão criativo.

Ademais, sua utilização pode ser integrada a metodologias que, por si só, representam uma inovação no ensino.

2.4 METODOLOGIAS EDUCACIONAIS STEM/STEAM E O PC

Muitas metodologias e estratégias de aprendizagem têm surgido na Educação como forma de promover mudanças no sistema educacional e contribuir para o enfrentamento dos desafios contemporâneos.

O projeto educacional público Ginásios Educacionais Tecnológicos (GET) que vem sendo desenvolvido pela Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro serviu de motivação para uma seção dedicada a esse tema.

Esses Ginásios têm como objetivo desenvolver competências e habilidades através de atividades dinâmicas, abordagens interdisciplinares utilizando a metodologia STEAM, abordando o conteúdo didático a partir das necessidades reais trazidas pelos alunos de forma colaborativa.(SME, 2023)

O STEM, metodologia educacional, sigla em inglês para S(*Science*), T(*Technology*), E(*Engineering*), M(*Mathematics*), tem origem nos anos 90 quando a *National Science Foundation* (NSF) a utilizou pela primeira vez para propor uma reforma educacional enfatizando que a multidisciplinaridade entre essas áreas teria um papel fundamental para a formação do indivíduo. Posteriormente o termo foi alterado para STEAM, incluindo as artes como a quinta área necessária.

A metodologia STEAM busca incentivar o desenvolvimento de habilidades como criatividade, pensamento crítico, colaboração e adaptabilidade, através de projetos onde os alunos trabalharão de forma autônoma tendo os professores a função de atuar como mediadores dessas atividades, utilizando como pilares:

- a) Investigação: Problema a ser solucionado.
- b) Descoberta: Pesquisa a respeito do problema e suas possíveis soluções.
- c) Conexão: aplicar hipóteses de solução.
- d) Criação: concretização da solução do problema com a aprendizagem das etapas anteriores.
- e) Reflexão: considerar o sentido de todo esse processo e revisar o seu resultado.

2.5 O PENSAMENTO COMPUTACIONAL E A INOVAÇÃO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O pensamento computacional relaciona-se com as competências consideradas essenciais para o século XXI, como resolução de problemas, habilidades de colaboração, pensamento crítico, produtividade, criatividade, inclusive como o valor acrescentado fundamental da literacia digital dos cidadãos.

Como já mencionado, a ideia de usar o PC no dia a dia e em especial na Educação Básica não é nova e pode ser de grande auxílio em diversas áreas, em especial a matemática, já fazendo parte inclusive da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) brasileira.

O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

O uso combinado da metodologia STEAM com o pensamento computacional tem um papel fundamental no desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, de acordo com as habilidades já destacadas da BNCC, PNE e ODS.

É importante frisar que os temas escolhidos: pensamento computacional e teoria dos grafos estão presentes em 5 das 8 habilidades específicas de matemática da BNCC (BRASIL, 2018, p.269):

Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Portanto, observa-se a ampla aplicabilidade do PC em diversas áreas, não apenas acadêmicas ou computacionais, inclusive quando combinado com metodologias como a STEAM. Isso nos leva a crer que sua implementação na educação básica pode gerar inovações no ensino da matemática, proporcionando aos alunos uma aprendizagem mais significativa.

Durante a pesquisa realizada, surgiram questionamentos sobre os benefícios derivados do desenvolvimento do PC, tais como:

1. Qual o nível de dificuldade enfrentado pelos alunos ao representar a DECOMPOSIÇÃO e relacionar suas partes?
2. Em relação à ABSTRAÇÃO, a tarefa de chegar a uma representação abstrata a partir da omissão de informações redundantes causou alguma dificuldade entre os alunos? Isso também ocorreu com aqueles que já possuíam alguma habilidade em programação?
3. No que diz respeito ao RECONHECIMENTO DE PADRÕES, os alunos encontraram dificuldades em estabelecer relações entre os problemas apresentados e problemas previamente resolvidos?
4. Em que medida o nível de abstração está relacionado com a capacidade de resolver problemas por meio de uma abordagem algorítmica?

Um caminho promissor para o desenvolvimento do PC é através da Teoria dos Grafos, uma vez que ela oferece conceitos e representações gráficas de fácil compreensão.

3 SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS

Neste capítulo, são apresentados conceitos utilizados nas atividades sugeridas acerca dos grafos que estão divididos em três seções: a primeira seção oferece uma introdução ao ensino de grafos e sua possível relevância no contexto do ensino básico. A segunda seção aborda o aspecto histórico dos grafos, apresentando o problema que originou a Teoria dos Grafos. A terceira seção explora o referencial teórico a respeito dos grafos que podem ser trabalhados nas atividades sugeridas, como a definição de um grafo, alguns tipos e representações, terminologias, e resultados teóricos. Por fim, na terceira seção realiza-se uma reflexão sobre o potencial de inovação no ensino da matemática a partir da inclusão da teoria dos grafos no ensino básico.

3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Atualmente, ao pensarmos sobre as estruturas matemáticas presentes nas tecnologias utilizadas todos os dias, nos deparamos com os Grafos: objetos matemáticos cuja definição é bem simples e que possuem aplicações em um campo bem vasto. Eles se encontram na interface entre as ciências matemáticas e da computação e apresentam complexidade variada.

Atualmente no Brasil a Teoria dos Grafos é ensinada somente nos níveis superiores. Sua introdução no ensino básico, na representação e resolução de diversos problemas em várias áreas de conhecimento, pode ser um valioso recurso para a interdisciplinaridade da Matemática com por exemplo Biologia, Geografia, Artes etc., bem como viabilizar metodologias ativas para uma aprendizagem significativa.

Ainda no campo da matemática discreta no ensino básico, a análise combinatória e a probabilidade têm sido consideradas, por professores do ensino médio, como sendo de difícil compreensão por parte dos alunos, como também apontado por Morgado (2016, p.1) em seu livro *Análise Combinatória e Probabilidade*. Essa dificuldade serviu também como motivação para a proposta de introdução de conceitos de teoria dos grafos no ensino básico, como uma vertente da matemática discreta.

Segundo Braicovich (2013, p.2) os grafos são aplicáveis em diversas áreas, são acessíveis uma vez que, em determinadas situações, é necessário somente o conhecimento de álgebra elementar e, em outras, aritmética. Possuem um certo atrativo para os alunos e possibilitam a alunos que não possuem facilidade ou familiaridade com a matemática alcançar resultados de maneira adequada.

Essa abordagem já faz parte do ensino básico vários lugares do mundo.

Sem a pretensão de apresentar uma proposta de conteúdo programático de grafos na educação básica, mas somente uma referência teórica que permita o desenvolvimento de algumas possibilidades de sua abordagem a partir de metodologias ativas, serão introduzidos conceitos, teoremas e definições que se fazem necessários para a realização das atividades propostas.

3.2 SOBRE A ORIGEM DA TEORIA DOS GRAFOS: PONTES DE KÖNIGSBERG

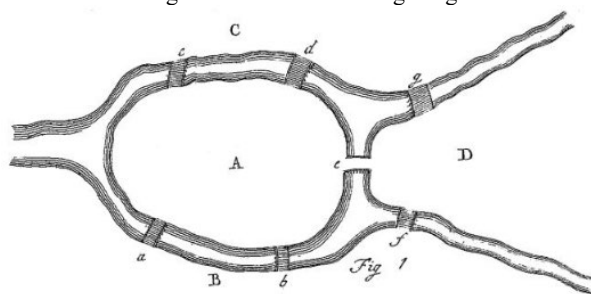
Königsberg é uma ilha situada atualmente na cidade de Kaliningrado, onde Leonard Euler em 1736 propôs e resolveu o problema que é considerado o início da teoria dos grafos.

Portanto, a relevância desse problema é enorme, segundo Lopes e Táboas (2015, p.2), o artigo de Euler com a resolução desse problema é “um brilhante exemplo de como surge uma nova teoria matemática, e como age o chamado pensamento matemático: observar, selecionar, abstrair e codificar elementos do problema em símbolos adequados. E, por fim, solucionar o problema através de uma reflexão sobre esses mesmos símbolos.”

O problema, conforme descrito por Euler (LOPES; TÁBOAS, 2015, p.3):

“Existe uma ilha em Königsberg, na Prússia, dita der Kneiphof, e que o rio que a cerca é dividido em dois ramos, como se pode ver na figura. Sobre os ramos deste rio foram construídas sete pontes, *a, b, c, d, e, f* e *g*, e acerca dessas pontes era proposta a questão, se alguém poderia estabelecer um curso tal que passe por cada uma das pontes uma vez e não mais que uma vez. Disseram-me que uns negam, outros duvidam, e que ninguém afirma que isso possa ser feito.”

Figura 2 - Pontes de Königsberg



Fonte: <http://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/29iew/82>

Para resolver esse problema, Euler considerou as quatro regiões separadas por rios como os vértices e as pontes como as arestas. Sua solução deu origem ao que hoje conhecemos como caminho euleriano.

Os conceitos de vértices, arestas e caminho euleriano, bem como a representação por grafo ilustrada na figura 3 serão abordados mais adiante na seção sobre referencial teórico.

Figura 3 – Representação por Grafo Pontes de Königsberg

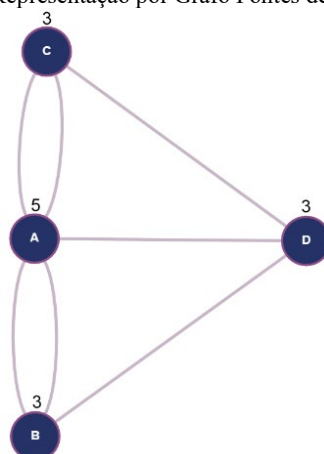


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Considerando a importância histórica desse problema, ele será revisitado nas atividades sugeridas.

3.3 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta seção aborda o referencial teórico a respeito de grafos e está dividida em subseções que tratam sobre a definição, tipos e representações, terminologia e alguns resultados teóricos que serão relevantes nas atividades sugeridas.

3.3.1 Definição

Um grafo $G = (V, A)$ consiste em V , um conjunto não vazio de vértices (ou nós), e A , um conjunto de arestas. Cada aresta tem um ou dois vértices associados a ela, chamados de suas extremidades. Dizemos que uma aresta liga ou conecta suas extremidades. (ROSEN, 2010. p. 589)

Nesse trabalho os exemplos serão todos com grafos finitos, isto é, aqueles que possuem um conjunto finito de vértices, mas cabe ressaltar que um grafo pode ter infinitos vértices.

Em resumo, um grafo pode ser utilizado para representar as diversas relações entre elementos de um determinado conjunto. No exemplo da figura 4 são representadas as relações sociais entre um grupo de amigos.

Figura 4 Exemplo de Grafo

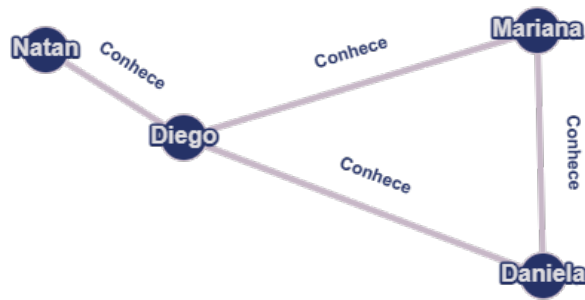


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Em aplicações do dia a dia, o grafo pode ser utilizado para representar mapas rodoviários, relacionamentos entre pessoas, torneios esportivos, interação entre espécies de animais, representação de teia alimentar, entre outros.

3.3.2 Tipos e Representações

Os grafos podem ser classificados pela quantidade de arestas que os ligam e pelo direcionamento ou falta de direcionamento dessas arestas.

Pode-se representar por meio de grafos a relação social entre um grupo de pessoas, por exemplo pelo grafo da figura 5: o Paulo conhece a Júlia, o João e o Luiz. Já o Luiz conhece o Paulo, o João e o Diego. Nota-se também que se Paulo conhece Luiz, então Luiz também conhece Paulo.

Figura 5 - Grafo Simples

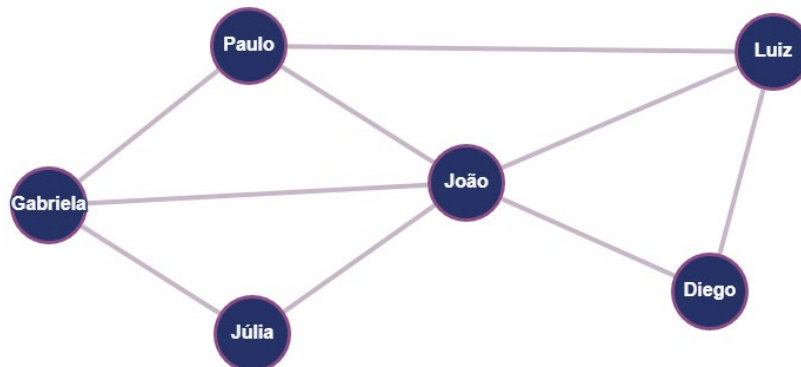


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Esse exemplo descrito é um grafo em que cada aresta conecta um par de vértices não ordenados diferentes e que duas arestas nunca conectam o mesmo par de vértices e é chamado de grafo simples.

Um outro exemplo é a representação de rotas ligando lojas em um bairro, de acordo com a situação representada no grafo explicitado na figura 6, algumas lojas possuem mais de uma

rota entre elas, como as Lojas C e B. Em outros casos, como a Loja D, só existe rota a partir da Loja A.

Figura 6 - Multigrafo

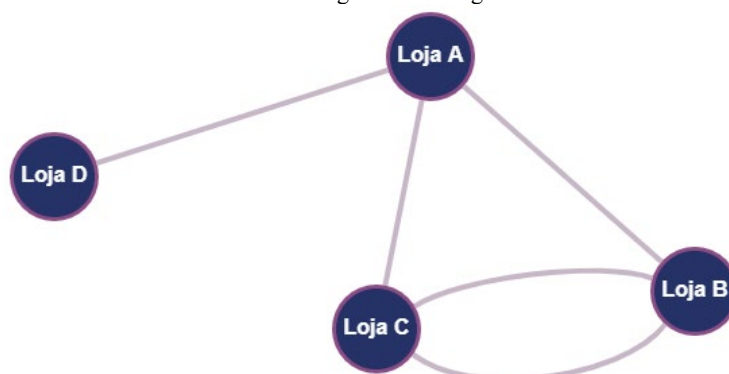


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Os grafos que apresentam múltiplas arestas conectando o mesmo par não ordenado de vértices são chamados de multigrafos. Neste caso, podemos pensar no conjunto de arestas que liga um determinado par de vértices como n cópias de uma delas e associamos a ela uma multiplicidade.

Nos dois casos acima as arestas não eram orientadas, ou seja, podemos dizer que a ligação do vértice A ao vértice B era a mesma ligação do vértice B ao vértice A.

Um grafo é chamado de grafo orientado ou digrafo quando as arestas deste grafo forem orientadas: a ligação do vértice A ao vértice B é diferente da ligação do vértice B ao vértice A, podendo inclusive não existir uma delas.

Por exemplo, na figura 7 foi representado através de grafos que time ganhou de qual em cada jogo. Pode-se notar que o Flamengo ganhou do Fluminense, Botafogo e Vasco. Já o Botafogo perdeu do Flamengo, Vasco e Palmeiras, mas ganhou do Grêmio.

Figura 7 - Grafo Orientado Simples

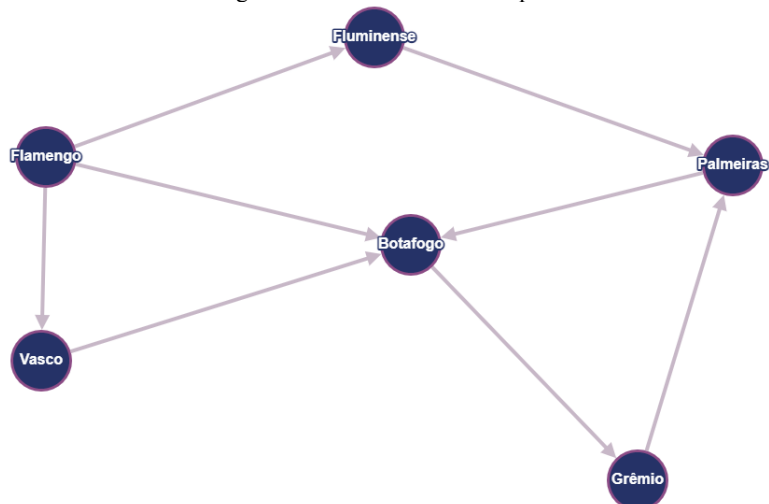


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Já no exemplo da figura 8, vemos as possíveis conexões aéreas entre algumas capitais. É possível ir e voltar para qualquer lugar descrito a partir de São Paulo. Já partindo do Rio de Janeiro não. Por exemplo é possível ir diretamente do Rio de Janeiro para Vitória, porém para retornar é preciso fazer uma escala em São Paulo.

Figura 8 - Multigrafo Orientado

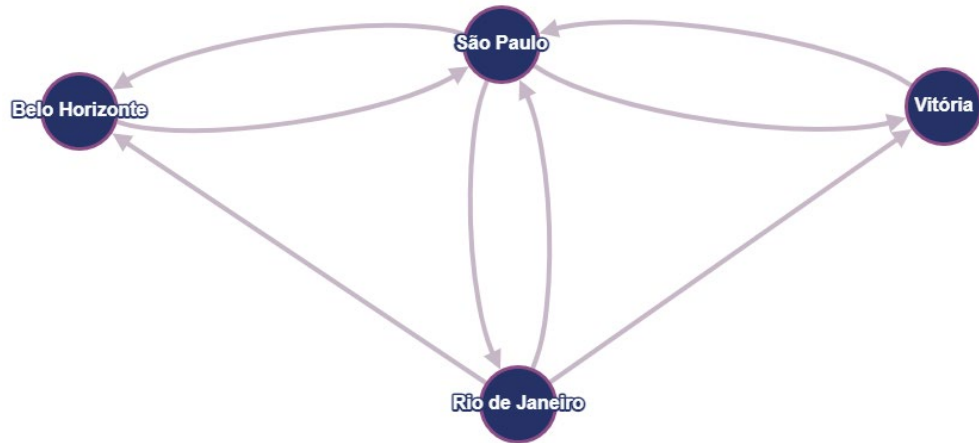


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Um outro exemplo é a representação de rotas ligando cidades, de acordo com a situação hipotética representada no grafo da figura 9, algumas cidades possuem estradas de mão dupla assim como estradas de mão única, como por exemplo as estradas entre o Rio de Janeiro e São Paulo. Em outros casos, como a estrada que liga o Rio de Janeiro a Vitória, só existe uma e de mão dupla.

Figura 9 - Multigrafo Misto

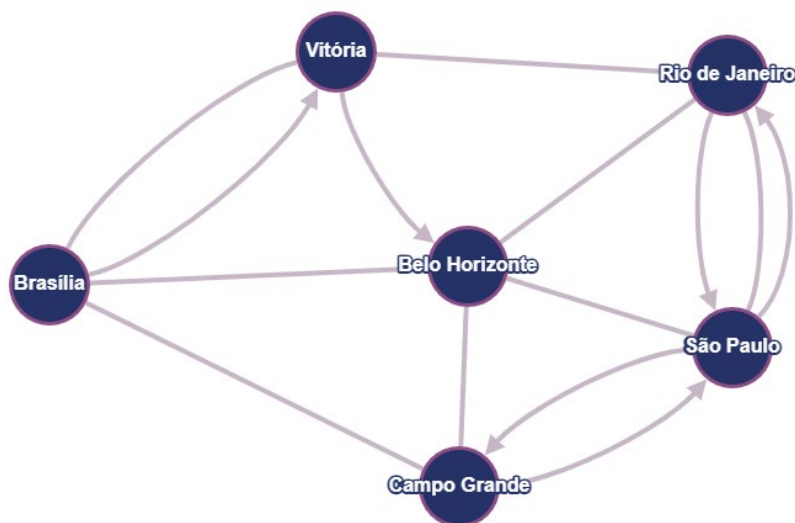


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

O exemplo acima apresenta arestas orientadas e não orientadas, quando isso acontece, o grafo é chamado de grafo misto.

Existem ainda os grafos bipartidos. Esses grafos podem ser de qualquer um dos tipos acima descritos. Consiste em um grafo $G = (V, A)$ onde o conjunto dos vértices V pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que os vértices do subconjunto V_1 só possuam ligações com vértices do subconjunto V_2 .

No exemplo da figura 10 há a representação dos estilos de filmes preferidos de um grupo de pessoas. Nesse exemplo representamos as pessoas e os estilos de filmes como vértices de um grafo e os dividimos em dois subconjuntos. O subconjunto V_1 contém os vértices que representam as pessoas e o subconjunto V_2 representam os estilos de filmes. Pode-se notar os conjuntos são disjuntos e que só existem relações entre os vértices do subconjunto V_1 com o subconjunto V_2 .

Figura 10 - Grafo Bipartido

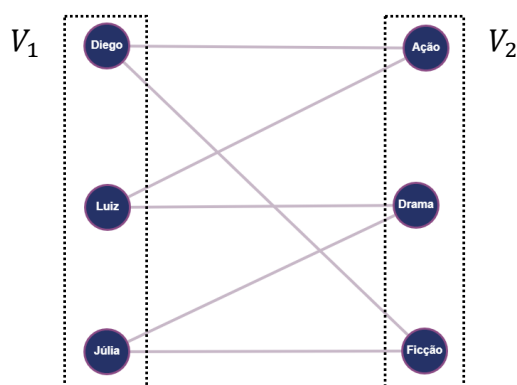


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Além dos modelos acima, existe o Pseudografo, exemplificado na figura 11. Neste tipo de grafo uma aresta liga um vértice a ele mesmo. Esta aresta é chamada de laço.

Figura 11 - Pseudografo

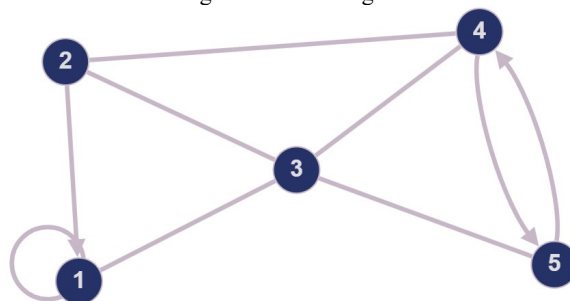


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

3.3.3 Terminologia

- **Vértices adjacentes:** Um vértice a é dito adjacente a um vértice b quando ambos são extremidades de uma mesma aresta $\{a, b\}$;

- Grau de um Vértice ($gr(v)$): número de arestas incidentes em um grafo.
Observação: caso o vértice possua um laço não orientado, ele contará duas vezes;
- Vértice Isolado: vértice de grau zero ($gr(v) = 0$), conseqüentemente um vértice isolado não é adjacente a nenhum outro.
- Vértice Pendente: vértice de grau um ($gr(v) = 1$);
- Vértice Inicial/ Final: Seja $\{a, b\}$ uma aresta orientada ligando os vértices adjacentes a e b . a é dito vértice inicial e b é chamado vértice final.
Observação: em um laço os vértices inicial e final são os mesmos.
- Grau de Entrada de um Vértice ($gr^-(a)$): número de arestas que tem a como vértice final;
- Grau de Saída de um Vértice ($gr^+(a)$): número de arestas que tem a como vértice inicial;
- Subgrafo: dados os grafos $G = (V, A)$ e $H = (U, B)$, H é subgrafo de G se: $U \subseteq V$ e $B \subseteq A$;
Observação: H é dito subgrafo próprio de G quando $H \neq G$
- Caminho: seqüência de arestas que começam em um determinado vértice e segue de vértice em vértice através das arestas ao longo do grafo.

3.3.4 Resultados Teóricos

Nessa seção são dispostos alguns resultados teóricos que podem ser trabalhados nas atividades sugeridas.

As demonstrações dos teoremas a seguir podem ser encontradas no livro: Matemática Discreta e suas Aplicações (ROSEN, 2010).

Lema do Aperto de Mãos:

“Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par.”(ARAÚJO, 2015)

Esse lema será utilizado na atividade proposta 3.22 : “aperto de mãos”.

Seja $G = (V, A)$ um grafo não orientado com a arestas. Então, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro das arestas:

$$2a = \sum_{v \in V} gr(v)$$

Consequências do Lema do Aperto de Mãos:

Em qualquer grafo, a soma dos graus de todos os vértices é par;

Teorema 2:

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado. Então:

$$\sum_{v \in V} gr^-(v) = \sum_{v \in V} gr^+(v) = |A|$$

Teorema 3:

Um grafo não orientado possui um número par de vértices de grau ímpar.

Caminhos Eulerianos

São chamados caminhos Eulerianos aqueles em que se passa por todas as arestas do grafo somente uma vez.

Esse nome foi dado em homenagem a Leonard Euler que em 1736 resolveu o problema histórico das pontes de Königsberg, já descrito.

Outros exemplos de aplicações de caminhos Eulerianos: rotas de entregas, jogos para desenhar figuras sem repetir traços e nem retirar o lápis do papel, entre outros.

Teorema:

Um grafo conexo $G = (V, A)$ admite caminho euleriano se e somente se, todas as arestas tiverem grau par ou, apenas duas tiverem grau ímpar.

3.4 TEORIA DOS GRAFOS E A INOVAÇÃO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

Por tudo que foi apresentado acima, pode-se notar o potencial para promoção de uma aprendizagem significativa do uso da teoria dos grafos no ensino básico.

Esse potencial e a possível integração da teoria dos grafos no ensino básico precisam ser analisados levando em consideração alguns questionamentos como os elencados a seguir:

1. Quais são os obstáculos e desafios da integração da teoria dos grafos no currículo escolar de matemática?
2. Como está o desenvolvimento da competência profissional dos professores no ensino da teoria dos grafos em nível de educação básica?

3. Em que parte do conteúdo programático do currículo escolar de matemática a teoria dos grafos pode ser integrada?
4. Caberia buscar a utilização de diferentes representações de grafos durante o curso?
Ou ainda uma representação criada e ou sugerida pelos alunos além de grafos de dados?

Levando esses fatores em consideração, o presente trabalho apresenta algumas sugestões de atividades utilizando a teoria dos grafos integrada ao pensamento computacional para servir de inspiração para que outros professores desenvolvam suas próprias atividades de acordo com o conteúdo trabalhado.

4 ATIVIDADES SUGERIDAS

Esse capítulo aborda as atividades sugeridas acerca dos grafos e PC e está dividido em seis seções: a primeira seção aborda as competências e habilidades descritas na BNCC que são atendidas em todas as atividades. As demais seções dizem respeito às atividades sugeridas.

As atividades estão ordenadas de acordo com o grau de dificuldade de entendimento por parte dos alunos e não pela complexidade de demonstração de alguns teoremas que podem ser trabalhados, tendo em vista que alguns deles, como por exemplo o Teorema das 4 cores demorou mais de 100 anos para ser comprovado.

4.1 AS ATIVIDADES SOB A PERSPECTIVA DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC

Como visto anteriormente a Teoria dos Grafos oferece uma outra forma de representação e resolução de problemas, não só didáticos, como também problemas do cotidiano, além de apresentar uma grande capacidade de interdisciplinaridade entre a matemática e demais áreas do conhecimento.

Também foi identificado o grande potencial que o pensamento computacional oferece de auxiliar e tornar eficiente o processo de resolução de problemas nas mais diversas áreas de conhecimento.

Portanto, o uso integrado da teoria de grafos e do pensamento computacional está em sintonia com competências específicas da área de matemática na BNCC (Brasil, 2018, p. 267), dentre elas:

Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Em relação às habilidades descritas na BNCC (Brasil, 2018, p. 307), as atividades sugeridas abaixo atendem, entre outras, as seguintes:

EF07MA05- Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

EF07MA06- Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura, podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

EF07MA07- Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas

Tais conceitos foram escolhidos pois, apesar da BNCC ressaltar, em suas competências gerais e habilidades específicas, o desenvolvimento do pensamento computacional, bem como a utilização de grafos, como uma ferramenta para representação gráfica para a solução de problemas, seu emprego ainda não se encontra difundido no ensino básico brasileiro.

Todas as atividades descritas abaixo têm como objetivos gerais que, ao final das atividades propostas, os alunos sejam capazes de criar modelos de grafos simples, conhecer as principais estruturas e suas nomenclaturas formais e resolver, mesmo que intuitivamente, problemas semelhantes apresentados em forma de grafo, propondo uma interação entre os alunos, o trabalho em grupo e estimulando que os alunos, através de seu envolvimento na construção do conhecimento, se apropriem dos conceitos de forma interativa ao invés de expositiva, tornando a aprendizagem mais significativa, pois, quando há um envolvimento do aluno na construção do conhecimento e uma reflexão a respeito desse conhecimento há uma maior chance de ele ser transferido para outras áreas da vida.

É desejável também que os alunos sejam capazes de estabelecer estratégias para solução de problemas similares utilizando essa ferramenta.

4.2 PROBLEMA DAS 4 CORES

Essa seção está dividida em oito subseções. Na primeira é feita uma introdução a respeito do Teorema que dá origem à atividade e uma contextualização a respeito da complexidade de sua comprovação. A segunda subseção trata dos objetivos da atividade, na terceira traz a preparação que precisa ser feita antes da aula. A quarta subseção, colorindo imagens, trata da pintura das imagens e dos questionamentos a serem feitos sobre a quantidade de cores utilizadas por cada aluno. Na quinta subseção, a representação através de grafos é abordada. A sexta subseção traz alguns conceitos que podem ser trabalhados nessa atividade. Na sétima subseção são tratadas as etapas do pensamento computacional que podem ser desenvolvidas nessa atividade e por último, na oitava são feitas sugestões de jogos.

4.2.1 Introdução:

É possível colorir qualquer mapa, utilizando no máximo 4 cores para pintar suas regiões de forma que regiões vizinhas não tenham a mesma cor, considerando como região vizinha, aquelas tenham uma fronteira maior do que um ponto.

Essa atividade foi inspirada no Teorema das 4 cores, conjecturado em 1852 por Francis Guthrie que, ao tentar colorir os vários distritos da Inglaterra percebeu que seria possível colorir qualquer mapa usando no máximo 4 cores e que só foi comprovado em 1976 por Appel e Haken,

que para essa demonstração usaram mais de mil horas de trabalho de computadores de alta velocidade, o que tornava uma tarefa impossível a conferência manual de tal demonstração.

Em 1994, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas conseguiram demonstrar o teorema de forma mais simples, apesar disso ainda foi necessário o uso maciço de cálculos computacionais.

Esse problema teve um papel fundamental no desenvolvimento da teoria dos grafos, e na solução de outros problemas, pois durante todos os anos em que se tentou comprová-lo muito se foi produzido acerca da Teoria dos Grafos.

4.2.2 Objetivo:

Tendo em vista a complexidade de comprovação desse teorema, o ideal é que ele seja proposto como uma atividade de desafio para os alunos, não com o intuito de demonstrá-lo. Como o foco dessa atividade é apresentar conceitos iniciais de grafos, como por exemplo: vértice, arestas e vértices adjacentes, ela pode ser trabalhada a partir do 6º ano do ensino fundamental.

Mostrar que é possível colorir qualquer mapa dividido em regiões usando no máximo 4 cores, de modo que as regiões vizinhas não tenham a mesma cor.

Essa atividade pode ser feita de forma interdisciplinar, trabalhando em conjunto com outras disciplinas, como por exemplo Geografia (usando mapas territoriais), Artes (usando mandalas), Biologia (usando sistemas do corpo humano, como o sistema digestório), entre outras.

É esperado que ao final da atividade os alunos sejam capazes de identificar os vértices e arestas em situações similares e apresentar estratégias para resolução de problemas parecidos.

4.2.3 Preparação:

Imprimir as imagens que serão utilizadas na atividade. Abaixo tem-se algumas opções de imagens que podem ser utilizadas. Elas também constam do Anexo em tamanho real.

Figura 12 - Mapa do Brasil com as Regiões (3 Cores)



Figura 13 - Mandala (2 Cores)

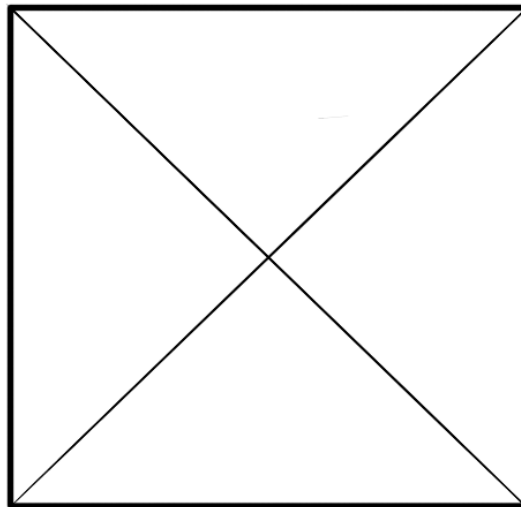


Figura 14 - Mandala (4 Cores)

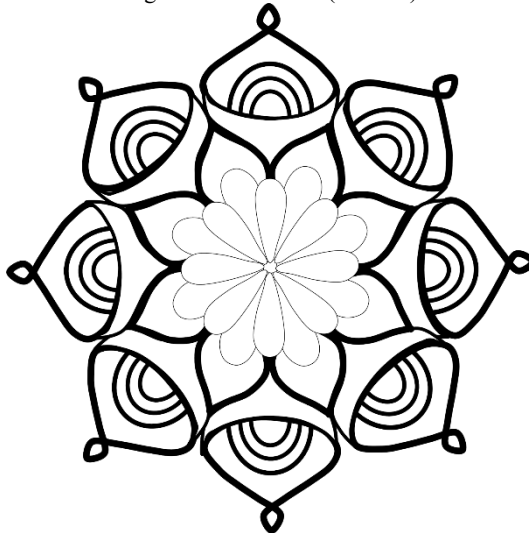


Figura 15 - Mandala (4 Cores)

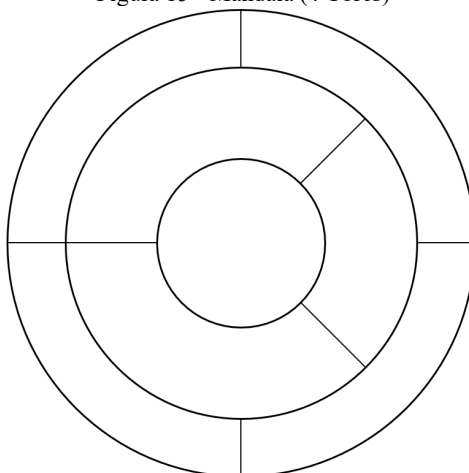
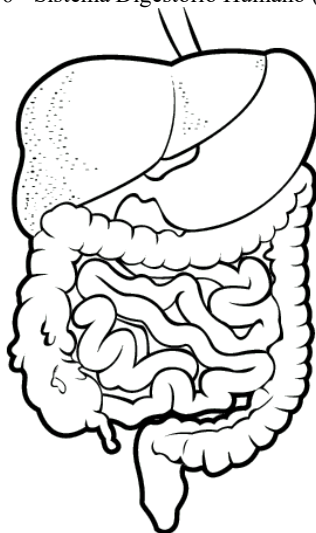


Figura 16 - Sistema Digestório Humano (3 Cores)



4.2.4 Colorindo Imagens

Desafiar os alunos a pintar as imagens impressas utilizando o número mínimo de cores possível, sabendo que regiões que fazem fronteira não podem ter a mesma cor.

Uma vez que as imagens estejam pintadas, discutir quantas cada um encontrou e por quê.

Ressaltar que em alguns casos, como no mapa com as regiões do Brasil, é possível utilizar somente três cores, enquanto para pintar a mandala apresentada na figura 15 o mínimo de cores necessárias são quatro.

4.2.5 Montando os grafos

Utilizando as imagens pintadas anteriormente, criar grafos onde cada região seja um vértice e que as fronteiras sejam as arestas.

Estimular os alunos a pintarem os vértices e identificarem através dos grafos porque foi possível em alguns casos utilizar no máximo 3 cores e em outros 4 cores, fazendo um paralelo com o conteúdo já trabalhado.

4.2.6 Conceitos e nomenclaturas a serem trabalhadas:

- a) Grafo Simples
- b) Vértices
- c) Arestas
- d) Vértices adjacentes (vizinhos)
- e) Grau de Vértice

4.2.7 Etapas do Pensamento Computacional:

Nessa atividade pode-se trabalhar alguns pilares do PC apresentados inicialmente, como por exemplo o reconhecimento de padrões: uma vez que os alunos tenham concluído a atividade de pintar a imagem e depois construir o grafo respectivo, o professor pode dar uma nova imagem para que ele, utilizando as estratégias desenvolvidas na imagem anterior, consiga representar através de grafos a nova imagem e sem colorir, dizer quantas cores são necessárias para pintá-la.

Os alunos podem então fazer um passo a passo descrevendo a estratégia utilizada para montar o grafo e para se chegar ao número de cores utilizados, fazendo assim uso da etapa do algoritmo.

Eles podem ainda utilizar da etapa da decomposição desenhando primeiro todos os vértices para depois desenhar todas as arestas e por fim os graus de cada vértice.

4.2.8 Sugestões de jogos:

Lurdes Sousa (Sousa, 2001, p.4) propôs alguns jogos sobre coloração de mapas interessantes para serem utilizados em sala de aula:

Jogo 1: Dois jogadores recebem 4 lápis de cor diferentes, dois lápis para cada um, e um mapa não colorido. Cada um dos jogadores pinta sucessivamente uma região do mapa, seguindo as regras do teorema das cores. Perde o primeiro que não conseguir pintar uma região seguindo as regras.

Jogo 2: Dois jogadores, A e B, recebem 4 lápis de cor diferentes, dois lápis cada um, e uma folha em branco. O jogador A desenha um país. O jogador B pinta esse país e desenha um outro que faça fronteira com o anterior. E assim sucessivamente. Perde o primeiro que não conseguir pintar o país de acordo com as regras do teorema das 4 cores.

4.3 APERTOS DE MÃOS

Essa seção está dividida em sete subseções. Na primeira é feita uma introdução a respeito do Teorema que dá origem a atividade. A segunda subseção trata dos objetivos da atividade, na terceira traz a atividade propriamente dita. Na quarta subseção a representação através de grafos é abordada. Já na quinta é feita uma sugestão de atividade extra. A sexta subseção traz alguns conceitos que podem ser trabalhados nessa atividade e, na última, são tratadas as etapas do pensamento computacional que podem ser desenvolvidas nessa atividade.

4.3.1 Introdução:

Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par.

Ou seja, em um grafo não orientado, a soma do grau de todos os vértices é igual a dobro do número de arestas deste mesmo grafo.

4.3.2 Objetivo:

Através de uma atividade prática fazer com que os alunos se familiarizem com o Lema do aperto de mãos e reforcem o conceito de grafo não orientado, vértices e arestas.

Levando em consideração a complexidade de demonstração desse teorema, o ideal é que ele seja proposto de forma que os alunos, intuitivamente a partir das experimentações em sala de aula, cheguem a ele.

Como essa atividade envolve, além da representação através de grafo, a apresentação de um teorema e sua comprovação, mesmo que de forma intuitiva, ela é indicada inicialmente para ser trabalhada com os anos finais do ensino fundamental.

4.3.3 Apertando as mãos:

Dividir os alunos em grupos menores de tamanhos distintos (maiores que 3), uns com um número par de integrantes e outros ímpar, dispostos em círculo.

Pedir para que todos eles fiquem em círculo e apertem as mãos dos demais integrantes do grupo e anotem em um papel quem apertou a mão de quem, quantas mãos cada um apertou e quantos apertos foram feitos no final, assim como a posição de todos eles.

Uma vez finalizado, discutir com eles a respeito dos totais de apertos de mão que eles chegaram, estabelecer uma relação entre a quantidade de apertos dados e quantas mãos cada um apertou. Pedir para que cada grupo mostre aos demais como escolheu anotar as informações e perguntar por que escolheram fazer dessa forma.

4.3.4 Montando os Grafos:

Falar sobre a utilização dos grafos para representar as informações recolhidas.

Reforçar que nessa situação as arestas não são orientadas, pois não há diferença na ordem com que o aperto de mão será feito. Perguntar se eles conseguem pensar em situações em que a ordem fará diferença.

4.3.5 Sugestão Extra:

Pode-se fazer um paralelo com as diagonais de um polígono, considerando somente os apertos de mãos dados nos colegas que não são vizinhos, demonstrando a fórmula da diagonal de um polígono.

Nesse momento, pode-se trabalhar o conceito de subgrafo, mostrando que o grafo das diagonais é um subgrafo do grafo com todos os apertos de mão.

4.3.6 Conceitos e nomenclaturas a serem trabalhadas:

- a) Grafo Simples Não Orientado
- b) Vértices
- c) Grau de um vértice
- d) Arestas não orientadas
- e) Vértices adjacentes (vizinhos)
- f) Subgrafo
- g) Lema do Aperto de Mãos

4.3.7 Etapas do Pensamento Computacional:

Abaixo são listadas algumas formas como as etapas do pensamento computacional podem ser trabalhadas durante a execução da atividade.

A etapa da abstração pode ser trabalhada por exemplo na sugestão extra, uma vez que nem todas as informações que eles possuem são necessárias para a resolução do problema das diagonais.

A habilidade de reconhecer padrões pode ser desenvolvida redividindo os alunos em outros grupos para que eles possam reaproveitar as estratégias usadas anteriormente com essa nova divisão.

A fórmula da diagonal de um polígono que pode ser alcançada a partir da sugestão extra é um exemplo de algoritmo.

4.4 AS PONTES DE KONIGSBERG

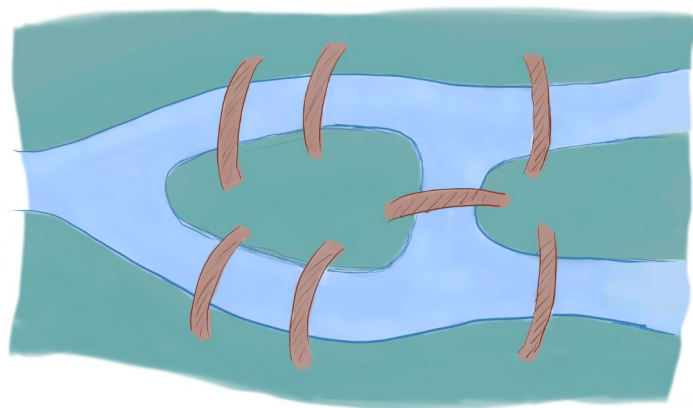
Essa seção está dividida em seis subseções. Na primeira é feita uma introdução a respeito do problema que dá origem a atividade, além de sua origem e valor histórico. A segunda subseção traz os objetivos da atividade, a terceira subseção trabalha a montagem dos grafos. Na quarta subseção são apresentadas sugestões extras que podem ser utilizadas. A quinta subseção trata de alguns conceitos que podem ser trabalhados nessa atividade e, na última, são tratadas as etapas do pensamento computacional que podem ser desenvolvidas nessa atividade.

4.4.1 Introdução:

Conforme já foi dito anteriormente, o problema das Pontes de Königsberg possui uma relevância histórica para a matemática, em especial a matemática discreta, tendo em vista que foi a partir da resolução apresentada por Leonard Euler em 1736 que a Teoria dos Grafos surgiu.

O professor pode iniciar a atividade apresentando esse contexto histórico, falando sobre a origem do problema, como era a região na época em que o problema foi resolvido e como é a região agora, o que contribui para dar significado ao que será aprendido.

Figura 17 - Pontes de Königsberg



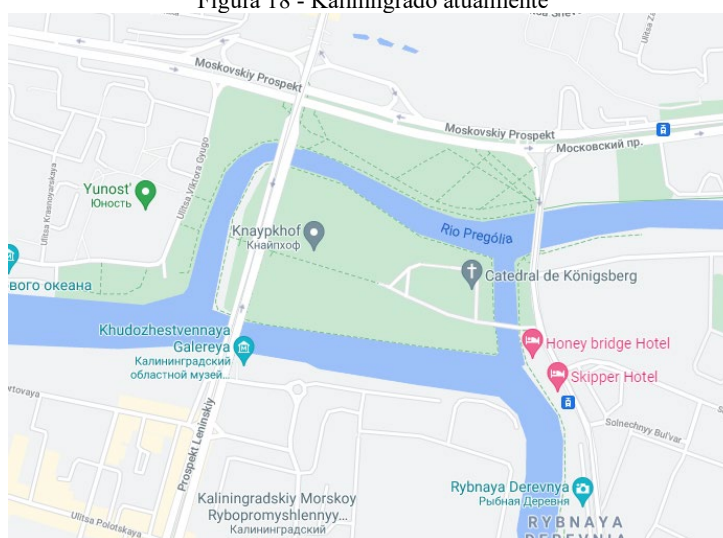
Fonte: Desenvolvido pela autora

Problema conforme foi proposto por Leonard Euler:

“Existe uma ilha em Königsberg, na Prússia, dita der Kneiphof, e que o rio que a cerca é dividido em dois ramos, como se pode ver na figura. Sobre os ramos deste rio foram construídas sete pontes, *a, b, c, d, e, f* e *g*, e acerca dessas pontes era proposta a questão, se alguém poderia estabelecer um curso tal que passe por cada uma das pontes uma vez e não mais que uma vez. Disseram-me que uns negam, outros duvidam, e que ninguém afirma que isso possa ser feito.”

A cidade de Königsberg fez parte do território da Prússia até 1945, atualmente se chama Kaliningrado. Das sete pontes originais, somente duas ainda existem, das demais: uma foi demolida e reconstruída em 1935, duas foram destruídas durante a Segunda Guerra Mundial e outras duas foram demolidas para a construção de uma única ponte (Taylor, 2000).

Figura 18 - Kaliningrado atualmente



Fonte: <https://www.google.com/maps>

4.4.2 Objetivo:

Essa atividade tem como objetivo apresentar aos alunos o caminho Euleriano e o problema que deu origem à teoria dos grafos, para sua execução é necessário que os alunos já estejam familiarizados com o conceito de grafos não orientados.

É desejável que, ao final da atividade, os alunos sejam capazes de responder, mesmo que intuitivamente, os questionamentos que serão apresentados pelo professor.

Além de apresentar o caminho Euleriano e o problema das pontes de Königsberg, também serão reforçados conceitos aprendidos anteriormente como o conceito de vértices, arestas, arestas orientadas, vértices adjacentes, entre outros.

Portanto essa atividade é indicada inicialmente para ser trabalhada com os anos finais do ensino fundamental e ensino médio.

4.4.3 Montando o Grafo:

Apresentar a ponte como é hoje e a história dela para os alunos.

Fazer o seguinte desafio para os alunos: É possível que um morador da cidade consiga atravessar todas as 7 pontes originais e retornar ao ponto de destino sem repetir nenhuma delas, não importando qual o ponto de partida?

Depois dos alunos discutirem um pouco sobre o problema, induzir o uso dos grafos, colocando as pontes como arestas.

Discutir com os alunos qual a melhor estratégia para lidar com o problema, mediando para que eles percebam que para retornar ao mesmo ponto de origem é necessário que exista um número par de pontes.

4.4.4 Sugestões Extras:

Uma vez que a atividade tenha terminado e os conceitos tenham sido absorvidos, propor uma mudança no desafio: agora o morador da cidade deverá atravessar todas as pontes, mas não há mais a obrigatoriedade de terminar no ponto de partida.

Usar a mesma abordagem anterior para concluir que não é possível.

Outra sugestão de atividade trabalhando com as pontes, seria perguntar aos alunos se, com a atual quantidade de pontes na cidade as indagações anteriores se tornam possíveis.

Pode-se ainda questionar se há diferença na resposta quando se utiliza um carro para atravessar as pontes que existem atualmente ao invés de percorrê-las a pé.

4.4.5 Conceitos e nomenclaturas a serem trabalhadas:

- a) Multigrafo Orientado
- b) Vértices
- c) Arestas
- d) Arestas orientadas
- e) Vértices adjacentes (vizinhos)
- f) Grau de Vértice

4.4.6 Etapas do Pensamento Computacional:

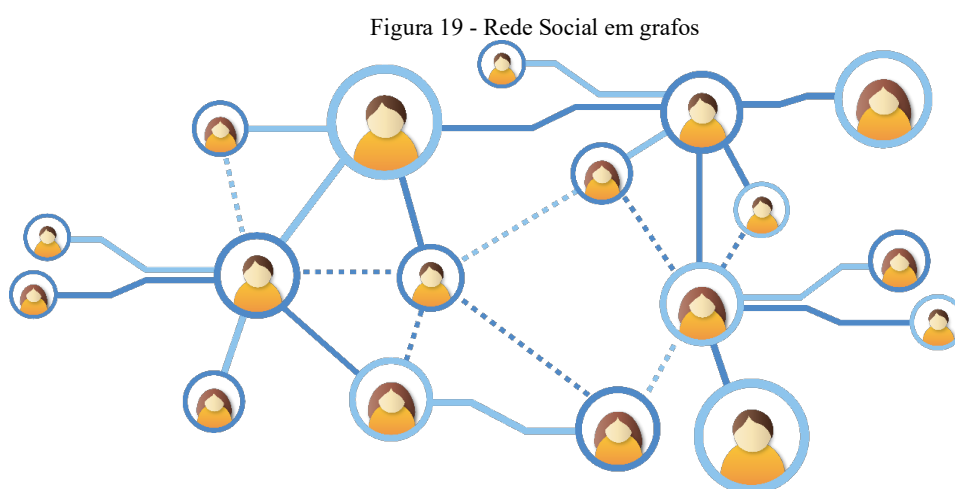
Nessa atividade pode-se trabalhar algumas etapas do pensamento computacional como por exemplo a abstração, tendo em vista que em um mapa podem ser exibidas diversas informações e elementos que não são pertinentes para a resolução do problema.

Já no que diz respeito ao reconhecimento de padrões, se o professor altera o número de pontes do problema original, os alunos podem identificar e reaproveitar a estratégia utilizada inicialmente, para chegar à resposta desse novo problema.

4.5 CONEXÃO DE AMIGOS EM UMA REDE SOCIAL

Essa seção está dividida em sete subseções. Na primeira é feita uma introdução a respeito da inspiração para a atividade. A segunda traz os objetivos da atividade, na terceira subseção temos a preparação necessária para o desenvolvimento da atividade. Na quarta subseção, Montando Grafos, são abordadas as ações necessárias para a realização da atividade. A quinta subseção, trata de alguns questionamentos que podem ser feitos a partir dos grafos montados, a sexta subseção traz os conceitos e nomenclaturas que podem ser trabalhados nessa atividade e na última são tratadas algumas das etapas do pensamento computacional que podem ser desenvolvidas.

4.5.1 Introdução:



Fonte: <https://www.stockphotosecrets.com/free-photos/free-vectors/social-network-grid.html>

Essa aplicação, inspirada no artigo intitulado Aprendendo Grafos Através Do Facebook, publicado por Monego; Nascimento; Kozakevicius (2017).

Como as redes sociais são muito utilizadas pelos alunos, essa atividade possui um grande potencial de despertar o interesse deles.

As atividades descritas podem ser feitas com o uso de ferramentas tecnológicas.

4.5.2 Objetivo:

A atividade tem como objetivo ensinar aos alunos como utilizar a representação através de grafos para solucionar questões simples do dia a dia.

É esperado que ao final da aplicação os alunos sejam capazes de criar modelos de grafos simples, conhecer as principais estruturas e suas nomenclaturas formais e resolver, mesmo que intuitivamente, problemas apresentados em forma de grafo.

É desejável que os alunos sejam capazes de estabelecer estratégias para solução de problemas similares utilizando essa ferramenta.

Levando em consideração a complexidade de alguns conceitos que podem ser utilizados nessa atividade, o ideal é que ele seja proposto de forma que os alunos, intuitivamente a partir das experimentações em sala de aula, cheguem às suas respostas.

Dada a complexidade que pode surgir a partir de algumas questões que podem ser trabalhadas nos grafos desenvolvidos, essa atividade é indicada inicialmente para o ensino médio, podendo ser trabalhada nos anos finais do ensino fundamental.

4.5.3 Preparação:

Nessa etapa os alunos recolherão as informações que serão utilizadas na construção do grafo. Para isso cada aluno deverá escolher 2 amigos que pertençam ao seu ano, mas não à sua turma. Uma vez escolhidos os amigos, eles deverão pedir para que esses amigos também escolham 2 amigos que pertençam à sua série, mas não à sua turma. Essas quantidades podem ser mudadas de acordo com a quantidade de alunos, para que a construção não fique muito complexa.

A forma que eles escreverão essas informações é livre, cada um deve anotar suas informações da forma que achar mais conveniente.

4.5.4 Montando os grafos

Dividir os alunos em grupos menores que deverão, com o auxílio do professor, unir suas informações. Nesse momento, a forma de disposição da informação será um problema, pois uma lista não será tão eficiente.

Eles identificarão que muitos escolheram as mesmas pessoas e precisarão exibir essas relações. O professor então mediará a elaboração do trabalho incentivando e direcionando para o uso de grafos.

Além de explicar o que é um grafo, o professor pode apresentar um vídeo que aborde os conceitos de grafos e como representá-los. Outra sugestão é fazer a relação com as amizades nas redes sociais.

Nesse momento o professor começa a apresentar aos alunos as nomenclaturas utilizadas, como vértice, arestas, relações etc.

Nessa aula eles colocarão em prática a decomposição, pois precisarão dividir e organizar as informações para elaborar um único gráfico e começarão a reconhecer padrões, como, por exemplo, colocar todos os nomes de alunos em círculos e relacionar esses círculos com arestas.

O uso de ferramentas tecnológicas nesse momento é desejável, mas não necessário. Existem programas de computadores específicos para trabalhar com grafos, porém eles não são indicados nesse momento, pois exigem um conhecimento maior a respeito do assunto. Portanto, como sugestão o uso de softwares para construção de mapas mentais pode ser indicado para essa atividade, uma vez que são ferramentas de uso simples e colaborativas.

4.5.5 Trabalhando com o grafo

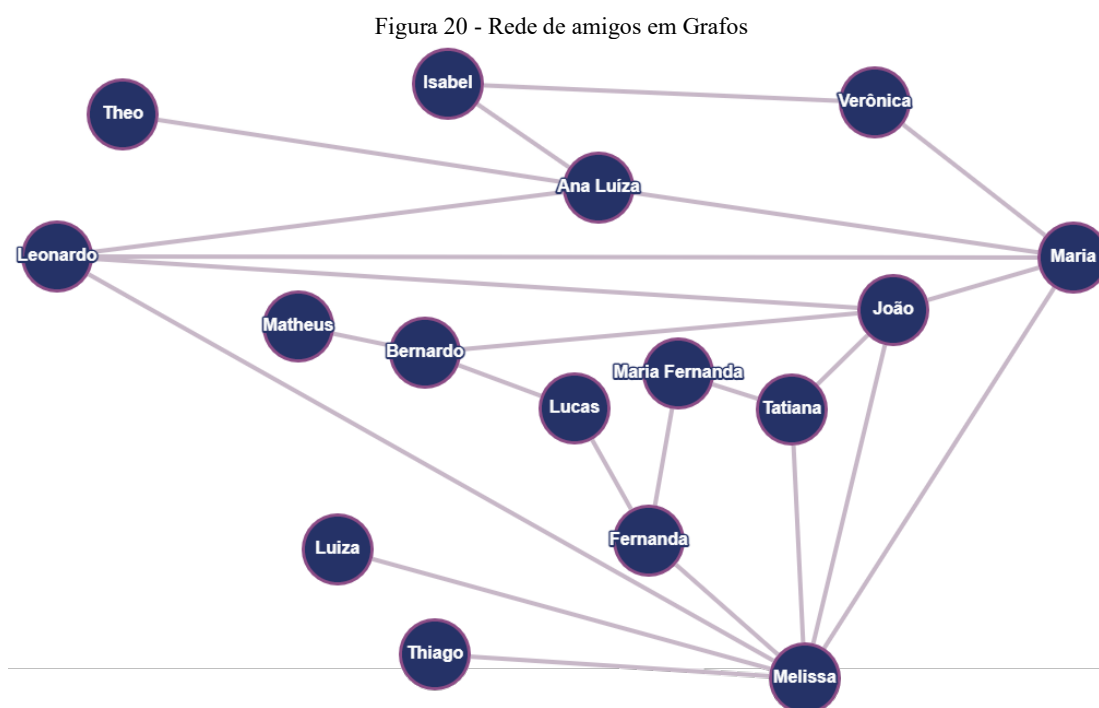


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Iniciar a aula com uma pergunta introdutória, para estimular a criatividade, como por exemplo: De quantas formas “Lucas” pode conhecer “Ana Luíza”?

Uma vez que eles tenham levantado os caminhos, perguntar qual das formas encontradas é a melhor (mais curta).

Deixar claro que nesse cenário as relações são bidirecionais, ou seja: se João conhece Bernardo então Bernardo conhece João e, por isso, a utilização de arestas não orientadas.

Nesse momento eles exercitarão a abstração, precisarão focar no que é necessário para responder às perguntas que foram feitas.

Fazer o mesmo questionamento envolvendo outras pessoas e finalizar perguntando se eles conseguem descrever um passo a passo que possa ser utilizado, independentemente das pessoas escolhidas. Nesse momento os alunos trabalharão o reconhecimento de padrões, percebendo os passos em comum em todos os exercícios e, por fim, construirão o algoritmo, com um passo a passo que funcione para todos os questionamentos.

Estabelecer que dentro do cenário trabalhado, todas as relações têm o mesmo “peso”, no caso: conhecer. Sugerir então mudanças incluindo um “peso” diferente nas relações: melhor amigo(a) ou muito amigo, e representar essas ligações com cores diferentes e colocar um número 2 nas arestas com peso diferente.

Na figura 21 as relações de melhor amigo estão representadas e as arestas com seus devidos pesos.

Figura 21 - Rede de Amigos em Grafos com peso

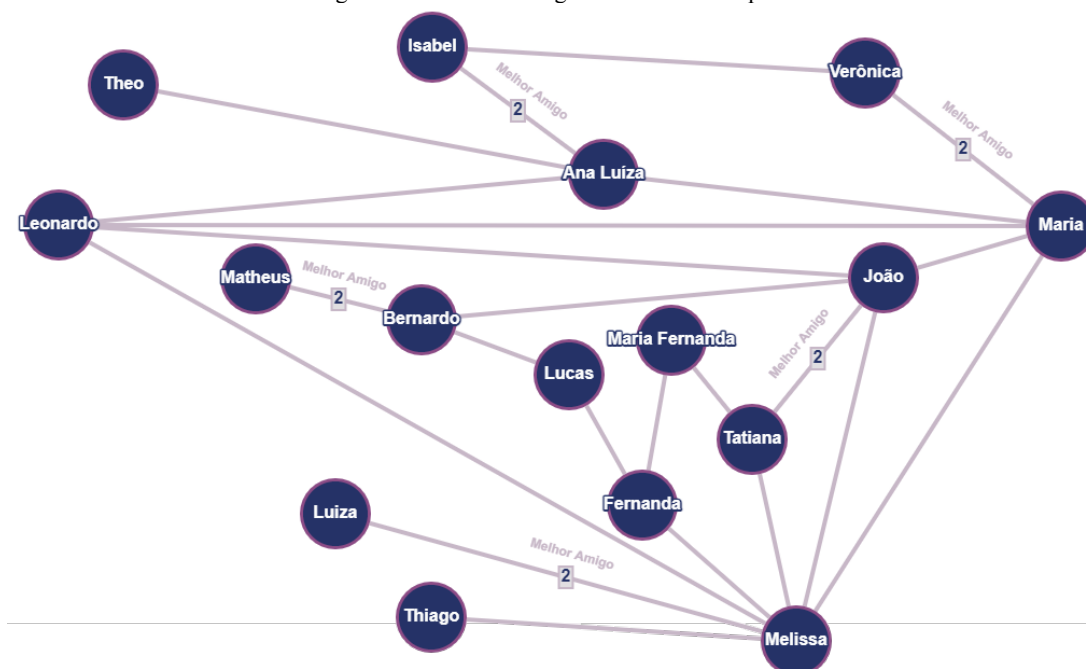
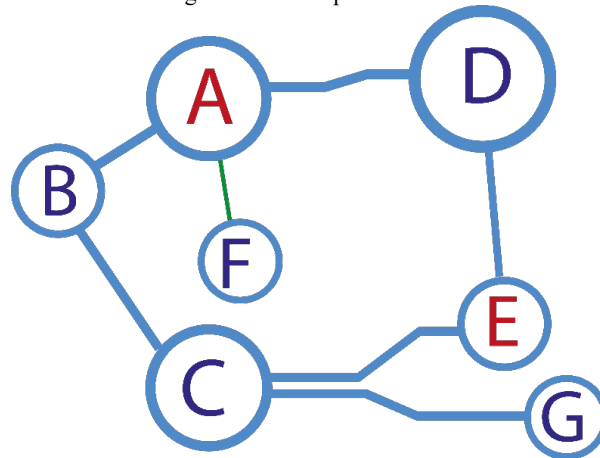


Imagem produzida pela autora em <https://graphonline.ru/pt/>

Refazer os mesmos questionamentos anteriores com base nessa nova relação e ver se houve mudanças. Explicar o que significa esse número 2 nas arestas, explicando o conceito de peso na aresta, reforçando o conceito de menor caminho e melhor caminho, que nem sempre o menor caminho será o melhor caminho, isso depende do questionamento que for feito.

4.5.6 Conceitos e nomenclaturas a serem trabalhadas durante as aulas:

Figura 22 - Exemplo de Grafo



Fonte: Desenvolvido pela autora

- a) Grafo: Conjunto de vértices e arestas, neste caso em específico o conjunto de alunos e suas relações de amizade
- b) Vértice (Nódos): São os objetos ou pessoas a serem relacionados. No caso do exemplo são os alunos. Eles formam um conjunto: $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$
- c) Arestas: São as relações entre dois vértices. São representadas pelo par de vértices. No caso a aresta verde da figura 22, como não há orientação das arestas, a representação pode ser feita pelo par (A, F) ou (F, A) .
- d) Vértices adjacentes (vizinhos): São os vértices ligados por somente uma aresta. Exemplo: A e B são vértices adjacentes
- e) Ordem de um Grafo: é dada pela cardinalidade do conjunto V de vértices, ou seja, é a quantidade de elementos do conjunto V. No exemplo: $\text{Ordem}(V) = 7$;
- f) Grau do vértice: é a quantidade de arestas que um vértice possui. Nesse momento, como as arestas não possuem direcionamento, não há diferenças entre os graus de fora e de dentro. No exemplo: $\text{grau}(A) = 3$; $\text{grau}(G) = 1$;
- g) Ciclo: caminho que vai de um vértice em particular e volta a ele mesmo; nem todo gráfico possui ciclo.
- h) Peso de uma aresta: valor atribuído a uma aresta. Ele influencia na escolha do caminho mais curto.

4.5.7 Etapas do Pensamento Computacional:

As etapas do pensamento computacional podem ser trabalhadas em diversos momentos dessa atividade, por exemplo, quando os alunos estiverem montando o grafo, pode ser colocada em prática a decomposição, pois eles precisarão se dividir e organizar as informações para construir o grafo.

Durante a resolução do questionamento feito pelo professor, eles precisarão abstrair focando somente no que é necessário para responder à pergunta feita.

Quando o professor trabalhar o conceito de melhor amigo e refizer perguntas feitas anteriormente, os alunos poderão trabalhar o reconhecimento de padrões, reaproveitando as estratégias utilizadas anteriormente e fazendo os ajustes que forem necessários devido ao peso das arestas.

Por último, a etapa do algoritmo pode ser alcançada caso os alunos construam um passo a passo de resolução para todos os questionamentos feitos.

4.6 ROTAS PELA CIDADE

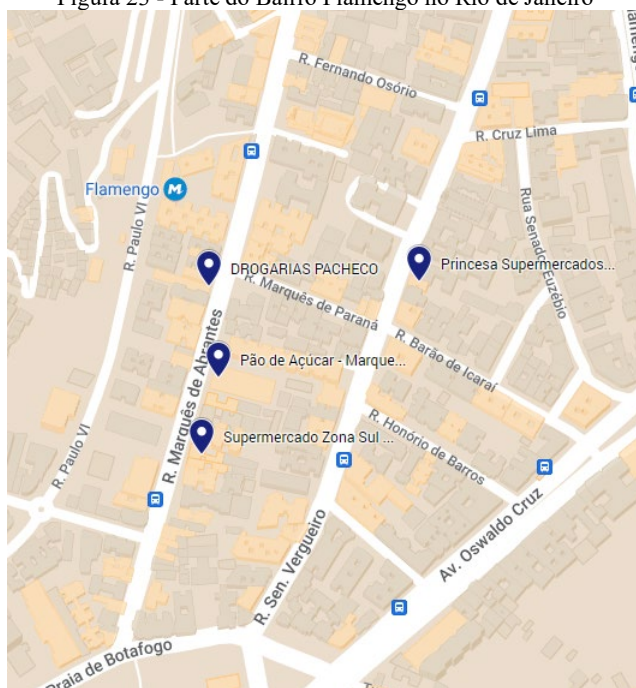
Essa seção está dividida em sete subseções. Na primeira é feita uma introdução a respeito da inspiração para a atividade. A segunda subseção traz os objetivos da atividade, na terceira subseção temos a preparação necessária para o desenvolvimento da atividade, utilizando recursos como o *Google Maps* ou outro similar. Na quarta subseção é abordada a representação do mapa através de grafos. A quinta subseção trata de sugestões extras para o desenvolvimento da atividade. A sexta subseção traz os conceitos e nomenclaturas que podem ser trabalhados nessa atividade e por fim, na última subseção são tratadas algumas das etapas do pensamento computacional que podem ser desenvolvidas.

4.6.1 Introdução:

Essa atividade foi desenvolvida pensando inicialmente no quanto as pessoas se utilizam e são dependentes de rotas como as fornecidas pelo *Google Maps* para se deslocar pela cidade.

Tendo isso em vista, foi escolhida uma determinada região do bairro do Flamengo, situado na cidade do Rio de Janeiro, para exemplificar a atividade.

Figura 23 - Parte do Bairro Flamengo no Rio de Janeiro



Fonte: https://www.google.com/maps/d/u/0/edit?mid=1_zdK_LtfZSbAYqFyZxte0Nwk1HjjWzM&usp=sharing

Essa atividade pode ser feita junto com Geografia.

4.6.2 Objetivo:

Para essa atividade é necessário que os alunos já estejam familiarizados com alguns conceitos de grafos, como vértices, arestas, arestas orientadas, entre outros.

Essa aplicação tem como objetivo ampliar a utilização dos grafos na resolução de problemas um pouco mais complexos do que os das aplicações anteriores.

É esperado que ao final da atividade os alunos tenham compreendido que as relações entre os vértices podem ter orientação e isso influencia diretamente no algoritmo final e que eles sejam capazes de desenvolver um novo algoritmo para solucionar os problemas apresentados.

É desejável que eles consigam estabelecer um algoritmo que sirva para outras atividades semelhantes.

Considerando a complexidade de demonstração do caminho euleriano, o ideal é que ele seja proposto de forma que os alunos, intuitivamente a partir das experimentações em sala de aula, cheguem a ele.

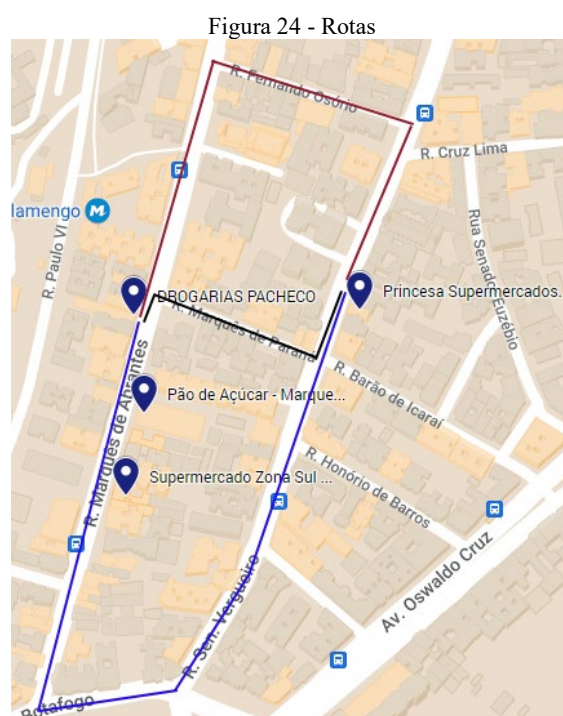
Levando em consideração algumas questões que podem ser trabalhadas nos grafos desenvolvidos, essa atividade é indicada inicialmente para o ensino médio, podendo ser trabalhada nos anos finais do ensino fundamental.

4.6.3 Rotas com o Google Maps.

Utilizando o laboratório de informática ou o celular dos alunos, acessar o *Google Maps* e criar um mapa de uma determinada região, marcando os pontos que serão utilizados na atividade.

No exemplo da figura 24 foi utilizada uma parte do bairro do Flamengo na cidade do Rio de Janeiro e foram marcados os pontos de interesse para a atividade.

Mostrar que entre dois locais de interesse, como por exemplo o Princesa Supermercados e a Drogarias Pacheco existem diversas rotas, algumas delas passando por outros pontos de interesse, outras que só são possíveis a pé.



Fonte: Desenvolvido pela autora

Ressaltar que o Google Maps exibe inicialmente a melhor rota, levando em consideração alguns fatores como distância e trânsito no local, e perguntar se esses fatores podem ser representados no grafo e como os alunos os representariam.

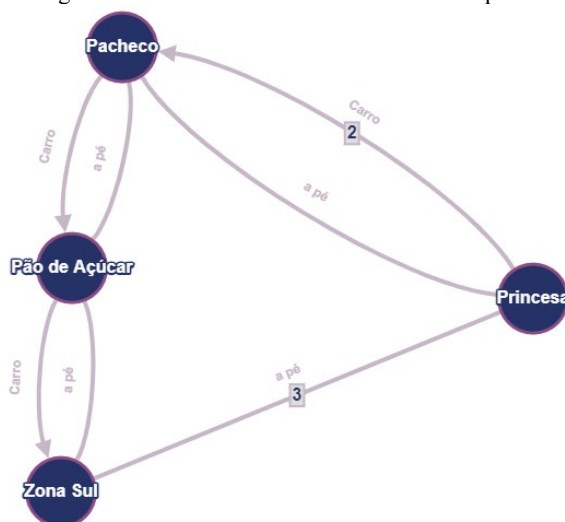
Comentar que fatores, como trânsito, são dinâmicos e que, apesar de poderem ser representados no gráfico, para efeitos da aula, eles serão desconsiderados.

4.6.4 Montando os grafos.

Discutir com os alunos quais locais da cidade seriam bons vértices do grafo. Incentivar a utilização de locais em cruzamentos para posteriormente perceberem que os cruzamentos em si podem representar vértices do grafo.

Estimular os alunos a perceberem que, apesar do mapa ser o mesmo, existirão diferenças nas arestas ao pensar no trajeto da pessoa a pé e da pessoa de carro, questionar os alunos a respeito dessas diferenças e se elas serão relevantes na solução dos problemas.

Figura 25 - Grafo com os locais de interesse e possíveis rotas



Fonte: Desenvolvido pela autora

Questionar os alunos a respeito do tamanho das ruas, se a distância percorrida é um fator a ser levado em consideração. Relembrar o conceito de peso de uma aresta.

Estimular a percepção que nesse caso o melhor caminho não necessariamente é aquele com menos vértices e sim o com menor percurso.

Se a atividade de conexão de amigos em uma rede social tiver sido utilizada anteriormente pode-se relembrar que naquela atividade o peso na aresta de melhor amigo era tratado de forma diferente do peso da aresta nessa atividade. Levando os alunos a refletirem a respeito do peso na aresta e o que ele pode representar em situações diferentes.

4.6.5 Sugestões Extras:

Uma variação que pode ser utilizada é através da realização de uma atividade interdisciplinar com a História. O professor de História do Brasil pode selecionar, junto com os alunos, pontos de relevância histórica em uma determinada região para realização de uma visita guiada com os alunos, como por exemplo o centro histórico do Rio de Janeiro.

Uma vez que a seleção de pontos seja feita, os alunos podem então, na aula de matemática, traçar as possíveis rotas e caminhos desejados, levando em consideração informações passadas pelo professor de História.

4.6.6 Conceitos e nomenclaturas a serem trabalhadas:

- a) Aresta direcionada: Arestas com sentido único, exemplo: Aresta (A,B), ela sai do vértice A e entra no vértice B e é diferente da aresta (B,A) que sai do vértice B e entra no vértice A
- b) Grau de dentro: número de arestas que entram em um vértice.
- c) Grau de fora: número de arestas que saem de um vértice.
- i) Peso de uma aresta: valor atribuído a uma aresta. Ele influencia na escolha do caminho mais curto.
- j) Multigrafo Misto.

4.6.7 Etapas do Pensamento Computacional:

As etapas do pensamento computacional podem ser trabalhadas em diversos momentos dessa atividade, por exemplo, quando os alunos estiverem montando o grafo, pode ser colocada em prática a abstração, pois eles precisarão identificar e focar nos elementos apresentados no mapa que são realmente relevantes para a solução do problema proposto.

A depender da quantidade de pontos de interesse, os alunos podem trabalhar a decomposição ao dividirem um grafo em subgrafos ou ainda ao dividirem as rotas a pé e rotas de carro.

Uma vez que os alunos estabeleçam rotas a pé, as estratégias utilizadas podem ser reaproveitadas com as devidas adequações ao estabelecerem as rotas possíveis de carro, exercitando a capacidade de reconhecimento de padrões.

O passo a passo contendo as estratégias utilizadas na resolução dessa atividade podem ser reaproveitados, por exemplo, na resolução da sugestão extra com os pontos de relevância histórica.

O professor também pode questionar os alunos a respeito de outras situações semelhantes em que os alunos possam aproveitar as estratégias desenvolvidas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Teorias da psicologia e da aprendizagem sustentam que o conhecimento é ativamente construído ou reconstruído pelos alunos e não transmitido a eles. Também não há comprovação de que haja uma transferência direta das competências adquiridas em atividades computacionais para situações cotidianas e por isso é fundamental uma análise profunda a respeito da diferença entre o uso da tecnologia como novidade e como inovação no ensino.

Essa dissertação teve como motivação trazer uma reflexão sobre a necessidade de inovação no currículo da educação básica. A escolha feita foi a inclusão de Teoria dos Grafos, pelos seguintes motivos: a importância que tem assumido a Matemática Discreta, num mundo dos dados; e a contribuição estratégica para implantação do pensamento computacional, por meio de atividades da teoria dos grafos que exploram conceitos do pensamento computacional. Cabe ressaltar que embora a BNCC, mesmo de forma equivocada- não o propõe para diferentes disciplinas do currículo, faça referência ao Pensamento Computacional, este não tem sido sistematicamente explorado na Educação Básica do Brasil.

Acreditamos que os temas abordados nessa dissertação tragam uma contribuição para o desenvolvimento das chamadas habilidades do Século XXI, tais como criatividade, pensamento crítico, comunicação e colaboração.

Pelo entendimento que a formação dos professores é crucial em qualquer política educacional, a ênfase privilegiou a colaboração para o processo de formação de professores, visando contribuir para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem por meio de sugestões de atividades, para uso em salas de aula do ensino fundamental, com utilização do da Teoria dos Grafos e do Pensamento Computacional. Essa proposta das oficinas de formação continuada para professores visa, principalmente, colocar os professores como profissão nos debates e decisões sobre educação

Como esse trabalho teve início ainda durante os efeitos da pandemia não foi possível o uso do material didático aqui sugerido, uma vez que, por ocasião do retorno das aulas, as escolas se depararam com outras prioridades que dificultaram reflexões no campo do ensino e da aprendizagem.

Portanto, como continuidade do trabalho, esse objetivo deve ser perseguido, com a intencionalidade de compreender e aferir sobre essa integração entre a teoria dos grafos e o pensamento computacional.

Para finalizar, no que concerne aos professores de matemática, uma realidade preocupante é o quão desconectada a matemática parece ser de qualquer coisa presente na vida prática para os alunos. Além do desperdício humano de estudantes aprendendo cálculo manual,

é preciso um diálogo de saberes onde a matemática que se aprende na escola tenha alguma relevância na vida do aluno, mesmo porque este é um dos conhecimentos mais fundamentais para a abordagem de resolução dos problemas que se apresentam no mundo.

Além do diálogo, é necessário um esforço em conjunto para a aplicação dessas sugestões e com isso fazer uma análise crítica consistente a respeito dessas atividades e seus possíveis desdobramentos.

Dessa forma, como próximos passos, a partir desse trabalho em conjunto com professores, tanto da rede pública, quanto privada, será preciso avaliar em que medida o PC auxilia na mudança de atitude ao se resolver problemas em geral. Além disso, compreender e aferir sobre a integração da teoria dos grafos e o pensamento computacional, através de pesquisas que abordem questões identificadas no decorrer da elaboração e aplicação das atividades, bem como outras que possam surgir durante o trabalho colaborativo.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ARAÚJO, A. **As pontes de Königsberg**. Coimbra, 2015. Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/>. Acesso em: 21 fev. 2023.

BBC LEARNING. **What is computational thinking?**. UK, 2015. Disponível em: <http://www.bbc.co.uk/education/guides/zp92mp3/revision>. Acesso em: 11 jul. 2023.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 10 out. 2023.

BRAICOVICH, T. C. Una propuesta: incorporar algunos conceptos de grafos en distintos niveles de escolaridad. *In*: XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MAT, 2013, Málaga. **Anais XIV CEAM**. Málaga: Sociedade Andaluza de Educación matemática THALES, 2013. p. 291–295.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://www.bts.senac.br/bts/article/view/664>. Acesso em: 13 fev. 2023.

BRASIL. **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)**. Brasília: Ministério das Relações Exteriores, 2015. Disponível em: <https://www.gov.br/mre/pt-br/arquivos/documentos/clima/20160119ODS.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.

BRASIL. **Plano Nacional de Educação PNE 2014-2024: Linha de Base**. Brasília: Ministério da Educação, 2015. Disponível em: <http://pne.mec.gov.br/>. Acesso em: 23 jan. 2023.

GROVER, S.; PEA, R. Computational Thinking in K–12. **Educational Researcher**, Washington, v. 42, n. 1, p. 38–43, 2013. Disponível em: <http://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0013189X12463051>.

ISTE; CSTA. **Operational Definition of Computational Thinking**. Alexandria: ISTE/CSTA, 2011. Disponível em: https://cdn.iste.org/www-root/Computational_Thinking_Operational_Definition_ISTE.pdf.

LOPES, F. J. A.; TÁBOAS, P. Z. Euler E As Pontes De Königsberg. **Revista Brasileira**

de **História da Matemática**, Rio Claro, v. 15, n. 30, p. 23–32, 2015. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/82>. Acesso em: 14 jan. 2023.

LU, J. J.; FLETCHER, G. H. L. Thinking about computational thinking. **ACM SIGCSE Bulletin**, Nova Iorque, v. 41, n. 1, p. 260–264, 2009. Disponível em: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/1539024.1508959>. Acesso em: 10 fev. 2023.

MONEGO, V. S.; NASCIMETO, M. R.; KOZAKEVICIUS, A. Aprendendo Grafos Através Do Facebook. **Experiências em Ensino de Ciências**, Cuiabá, v. 12, n. 2, p. 53–65, 2017.

MORGADO, A. C. *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Disponível em: www.sbm.org.br.

NAMUKASA, K. I.; PATEL, M.; MILLER, M. Tools for Integrating Computational Thinking and Mathematics in the Middle Grades. **Math + Code ‘Zine**, Ontario, v. 2, n. 2, p. 1–13, 2017. Disponível em: <http://researchideas.ca/mc/ct-and-math-in-middle-grades/>.

ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações**. 6^aed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

ROYAL SOCIETY. Shut down or restart?. **British Journal of Educational Technology**, Londres, p. 789–801, 2012. Disponível em: <https://royalsociety.org/-/media/education/computing-in-schools/2012-01-12-summary.pdf%0Ahttp://dx.doi.org.ezproxy.elib10.ub.unimaas.nl/10.1111/bjet.12453>.

SME. **Ginásio Educacional Tecnológico**. Rio de Janeiro, 2023. Disponível em: <https://educacao.prefeitura.rio/get/>. Acesso em: 20 jul. 2023.

SOUSA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Millenium - Journal of Education Technologies and Health**, Viseu, v. 24, p. 125–151, 2001.

TAYLOR, P. What Ever Happened to Those Bridges?. **Australian Mathematics Trust**, Camberra, 2000. Disponível em: <https://web.archive.org/web/20120319074335/http://www.amt.canberra.edu.au/koenigs.html>. Acesso em: 2 maio 2021.

VALENTE, J. A. Integração do pensamento computacional no currículo da educação

básica: Diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864–897, 2016.

WING, J. M. Computational thinking. **Communications of the ACM**, Nova Iorque, v. 49, n. 3, p. 33–35, 2006. Disponível em: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/1118178.1118215>.

ANEXOS

