Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Gislene Lopes da Silva Moretto

Os números de Fibonacci e a representação de Zeckendorf

Campo Grande - MS

2021

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Gislene Lopes da Silva Moretto

Os números de Fibonacci e a representação de Zeckendorf

Orientador Prof. Dr. Elen Viviani Pereira Spreafico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2021

Os números de Fibonacci e a representação de Zeckendorf

Gislene Lopes da Silva Moretto

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca examinadora:

Prof. Dra Elen Viviani Pereira Spreafico
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dra. Elisabete Sousa Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro
Universidade Federal da Grande Dourados-UFGD

Campo Grande - MS, 30 de novembro de 2021

Dedicado aos meus filhos, Daniel e Rafael.

"Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes."

Isaac Newton

Agradecimentos

Ao único que é digno de receber a honra e a glória, Deus.

Aos meus pais, por me ensinar a trilhar o caminho do saber.

Aos meus filhos, meu esposo, meu tio Daniel, à minha irmã, por sempre mostrarem entusiasmo com minhas conquistas.

Agradeço carinhosamente ao meu amigo, André Luiz Goulart Matos, cujo apoio foi fundamental para que eu realizasse esse trabalho.

À minha orientadora, professora Drª Elen Viviane Pereira Spreafico, por sua paciência e disposição.

À todos os demais professores que ministraram aula no PROFMAT, minha Gratidão.

Aos meus colegas de turma, que me apoiaram na realização dos trabalhos.

Um agradecimento especial remeto à minha mãe com quem aprendo todos os dias a prostar-se diante de Deus em busca de sabedoria e discernimento.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é investigar a relação entre a Sequência de Fibonacci e a representação dos números inteiros. Neste contexto, algumas representações dos números inteiros, chamadas bases numéricas, são abordadas. Além disso, exemplos e aplicações são discutidos. O Teorema de Zeckendorf relaciona a representação dos números inteiros e a sequência de Fibonacci, mostrando algo diferente daquilo que geralmente é abordado nos livros didáticos.

Palavras-chave: Bases numéricas, Sequência de Fibonacci, Representação dos números inteiros.

Abstract

The goal of this work is to investigate the relationship between the Fibonacci sequence and the representation of integers. In this context, some representations of whole numbers, called numerical bases, are discussed. Further examples and applications are discussed. The theorem to be presented relates the representation of integers and the Fibonacci sequence, showing something different from what is usually covered in textbooks.

Key words: Numeric base, Fibonacci Sequence, Integer representation.

Sumário

Introdução

O exercício docente, por vezes, revela-se extremamente desafiador. A dificuldade pode ser ainda maior quando o assunto envolve a Matemática. Uma ciência tão bela para alguns e tão complexa para a maioria das pessoas.

Acreditamos que o motivo de tanta dificuldade pode estar associado ao fato de que os alunos geralmente são apresentados, apenas, ao sistema de numeração decimal. Embora que, inevitavelmente, frequentando ou não a escola, aprendemos e utilizamos de forma natural o sistema de numeração sexagesimal quando este está relacionado a medida de hora e seus submúltiplos. Ainda assim, quando trabalhamos, por exemplo, no sétimo ano do Ensino Fundamental, o conteúdo envolvendo as operações com medidas de ângulos e seus submúltiplos, somos tomados por estudantes perplexos pois levam muito tempo para entender como efetuar tais operações.

Motivados por essas dificuldades, buscaremos ao longo do desenvolvimento deste trabalho, investigar alguns dos diversos sistemas de numeração criados pela humanidade afim de promover aos estudantes um conhecimento mais amplo acerca da representação dos números inteiros positivos.

Para a condução dos resultados encontrados em nossa pesquisa, no Capítulo 1, apresentamos uma síntese sobre Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci. Uma de suas obras mais consagrada é o livro Líber Abaci, onde apresenta o Problema de Reprodução dos Coelhos, cujos dados ao ser tabulado apresenta uma recorrência linear conhecida como Sequência de Fibonacci. Esta, por sua vez, possui características peculiares como por exemplo a Espiral de Fibonacci que pode ser facilmente encontrada em elementos da natureza como nos caracóis, flores, folhas, dentre outros. há também uma relação intrigante relacionada à razão entre dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci, conhecida como número de ouro ou razão áurea, que é facilmente encontrada em elementos da natureza, como nas subdivisões dos membros do corpo humano.

No Capítulo 2 resgatamos o processo histórico envolvendo alguns dos sistemas de numeração desenvolvidos pela humanidade até a criação das grandes civilizações. Registros históricos revelam que o Homem primitivo era nômade, ou seja, não possuíam moradia fixa. Sua sobrevivência deu-se basicamente por meio de atividades como a caça e a pesca. O fato é que desde os primórdios a humanidade mostra o anseio de determinar um método de contagem.Entendemos que o ato de contar, é a ação de determinar o número ou quantidade de elementos de um conjunto de objetos.

Quando os povos antigos passaram a migrar da condição nômade para a sedentária, houve o início do processo de plantio e criação de animais. Tais atividades exigiram o aprimoramento dos seus métodos de contagem. Essa nova condição de existência exigiria também o desenvolvimento da geometria desde a construção de suas moradias, armazéns, como também o planejamento dos canteiros das plantaçãos e alimento (pasto) dos animais. Enfim, era necessário tornar mais eficiente o método de mensurar aquilo que possuiam e produziam.

Enfim, nos deparamos com um resultado muito conhecido no campo aritmético envolvendo o Teorema das bases numéricas, revelando que podemos contruir inúmeros sistemas de numeração.

No Capítulo 3, o discurso é direcionado ao estudo específico buscando associar os termos da Sequência de Fibonacci com a representação dos números inteiros positivos. Essa pesquisa resulta na descoberta do *Teorema de Zeckendorf.*

No Capítulo 4, sugerimos ao docente, a realização de algumas atividades onde é possível explorar de forma lúdica os conceitos relacionados ás bases numéricas, como também ao Teorema de Zeckendorf. Jogos clássicos como *nunca dez* e *dominó*, podem ser reelaborados de modo que possibilitem ao educando conhecer outros métodos de representação dos números inteiros positivos.

Capítulo 1

A Sequência de Fibonacci

Neste capítulo realizaremos uma retomada histórica sobre a pessoa de Fibonacci, sequências numéricas e enfim a Sequência de Fibonacci. Para a confecção deste capítulo foram utilizadas as seguintes referências [6, 7, 9, 11].

1.1 Fibonacci - Um pouco de história

Ao propor um trabalho voltado ao estudo da famosa Sequência de Fibonacci, é relevante discorrermos inicialmente sobre quem foi Fibonacci. A literatura nos revela que Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo (nascido em Pisa no ano de 1170, falecido em 1250), mais reconhecido como Fibonacci foi um matemático italiano nomeado como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. Seu reconhecimento deve-se principalmente ao resultado envolvendo uma sequência numérica que mais tarde ficaria conhecida como Sequência de Fibonacci e também, por sua participação na divulgação dos algarismos arábicos na Europa.

Seu pai, Guglielmo dei Bonacci era um mercador pisano e representante dos comerciantes da República de Pisa (publicus scriba pro pisanis mercatoribus) em Bugia, na região de Cabília, Argélia. Ainda muito jovem, influenciado pelas atividades comerciais, Fibonacci aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas no Ocidente, difundidas pelos estudiosos muçulmanos nas várias regiões do mundo islâmico. Alguns desses métodos foram criados por matemáticos da Índia, uma cultura muito distante da praticada no mediterrâneo.

Dentre seus inúmeros trabalhos, Fibonacci destacou-se em 1202 com a publicação do livro “Liber abaci” (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), escrito na linguagem numérica empregada pelos hindus. Uma vez que os europeus tomaram conhecimento desse método de contagem, houve nos séculos seguintes, o pleno desenvolvimento da matemática na Europa.

Em Liber Abaci há um problema específico envolvendo o crescimento hipotético de uma população de coelhos, cuja condição inicial está na existência de um casal de coelhos. A reprodução dos coelhos de geração em geração, partindo de uma lei de formação, origina uma sequência de números, mais tarde conhecida como Sequência de Fibonacci. A sequência registrada e difundida pelo Liber Abaci, já era conhecida por matemáticos indianos no século VI, porém coube à Fibonacci divulgar esse resultado aos estudiosos do Ocidente.

Figura 1.1: Estátua de Fibonacci, [12]

Fibonacci faleceu alguns anos mais tarde, provavelmente em Pisa. No século XIII, em sua homenagem, uma estátua foi erguida em Pisa. Hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico da Piazza dei Miracoli. Veja a Figura 1.1.

1.1.1 A Sequência de Fibonacci

Em Liber Abaci, livro escrito por Fibonacci, encontra-se um dos problemas mais conhecido e estudado pelos matemáticos. A situação é enunciada da seguinte maneira:

Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Iniciando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano, se considerarmos que os coelhos não morrem?

Vejamos os primeiros valores desse problema na Tabela 1.1.

Meses	Casais Adultos	Casais Jovens	Total de Casais
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	1	2	3
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 1.1: Números de Fibonacci

Seja F_n o número de casais de coelhos existentes após n meses. Por hipótese temos que $F_1 = F_2 = 1$. Consequentemente, o número de casais existentes no enésimo mês ,F_n, é igual ao número existente um mês antes, F_{n-1}, mais o número de nascimentos novos. Ora, esse número é precisamente o número de casais existentes há dois meses, F_{n-2}, que têm pelo menos dois meses de vida, portanto em condições de reproduzir. Então, cada elemento da sequência de Fibonacci é a soma dos dois precedentes. As sequências definidas dessa forma são chamadas de *sequências recursivas*. Assim, podemos determinar a Sequência de Fibonacci recursivamente por:

1) $F_1 = F_2 = 1$

2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Logo, os primeiros termos da sequência são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

Podemos notar que os próximos termos serão cada vez maiores. Logo, não é estranho nos questionarmos sobre a dificuldade em determinar, por exemplo, o número total de coelhos existentes, por exemplo, no trigésimo mês. A resposta está em um dos resultados mais importantes envolvendo os termos da Sequência de Fibonacci apresentado a seguir.

Proposição 1.1 *Seja F_n o enésimo termo da Sequência de Fibonacci, então*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \tag{1.1}$$

para todo natural $n \geq 0$, onde $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ e $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

Demonstração 1.2 *Provaremos por indução sobre n que a igualdade* (1.1) *é verdadeira.*

Note que para $n = 1$, a sentença é verdadeira, pois,

$$F_1 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Vamos supor que a validade de (1.1) *para todo número natural $n \leq k+1$, onde $k \geq 0$, logo*

$$F_{k+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^{k+1} - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^{k+1}}{\sqrt{5}} \text{ e } F_k = \frac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^{k} - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^{k}}{\sqrt{5}}.$$

Mostraremos que (1.1) *é válida para $n = k+2$. Como $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, então*

$$F_{k+2} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^{k+1} - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^{k} - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^{k}}{\sqrt{5}}$$

Segue que, $F_{k+2} = \dfrac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^{k+2} - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^{k+2}}{\sqrt{5}}$

Portanto (1.1) *é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.*

Exemplo 1.3 *O sexto termo da Sequência de Fibonacci é dado por:*

$$F_6 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5})}{2})^6 - (\frac{1-\sqrt{5})}{2})^6}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}^3 - (\frac{(3-\sqrt{5})}{2}^3}{\sqrt{5}} = 8.$$

Matemáticos de todo o mundo, ainda nos dias atuais, buscam respostas para diversas questões que envolvem a existência do Homem e a criação da Terra, ocorre que essas pesquisas levam, em alguns casos, ao encontro de resultados oriundos dos termos da Sequência de Fibonacci. A seguir mostraremos uma "coincidência" entre elementos da geometria e até mesmo da Natureza que relacionam -se com a Sequência de Fibonacci.

1.2 Os números de Fibonacci e o número de Ouro φ

No decorrer do ano letivo, independente do ano escolar, os docentes sempre são questionados por certos alunos a respeito da importância de estudar Matemática. Isso, talvez, deve-se ao fato de ser uma das ciências mais complexas e intrigantes que conhecemos.

Geralmente, essa pergunta é respondida da seguinte maneira: porque a Matemática está em todo lugar. Nesse momento muitos estudantes, ainda não convencidos da resposta, continuam a mostrar um semblante de dúvida. No entanto, um estudo mais específico envolvendo a Sequência de Fibonacci pode, de alguma forma, convencê-los de que realmente a Matemática nos rodeia.

Observe o que encontramos ao efetuarmos a divisão entre um termo qualquer da sequência e seu sucessor: $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{2} = 1,5$, $\frac{5}{3} = 1,666...$, $\frac{8}{5} = 1,6$, $\frac{13}{8} = 1,625$, $\frac{21}{13} = 1,61538...$, $\frac{34}{21} = 1,61904...$, $\frac{55}{34} = 1,61764...$, $\frac{89}{55} = 1,61818...$, $\frac{144}{89} = 1,61797...$, $\frac{233}{144} = 1,61805....$

Claramente, percebemos que o resultado tende ao número $1,618$. Esse número irracional é denomidado *número de ouro* e representado pela letra φ, em homenagem a Fídias (Phideas), famoso escultor grego, por ter usado a proporção de ouro em muitos dos seus trabalhos, como por exemplo, no " Partenon de Atenas" e a estátua de "Zeus" no templo de Olímpia.

O *número de ouro* foi fortemente empregado na confeccção de obras artísticas e contruções monumentais, isso porque, proporciona uma inestimável beleza na composição das figuras. Veja na Figura 1.2, a Monalisa, uma das obras mais conhecidas no mundo. Nessa pintura, o autor, Leonardo da Vinci, ao utilizar a razão áurea revela harmonia entre seu tronco e cabeça, assim como nos elementos do rosto.

Definição: O retângulo áureo é um retângulo no qual a razão entre as medidas de seus lados é o número de ouro, ou seja, se x e y são, respectivamente, o maior e o menor lado, tem-se que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Um retângulo áureo pode ser comumente encontrado no formato de livros, cartas, janelas, dentre outros. A explicação pode ser pelo motivo de que o retângulo construído com tal proporção revela harmonia entre seus lados.

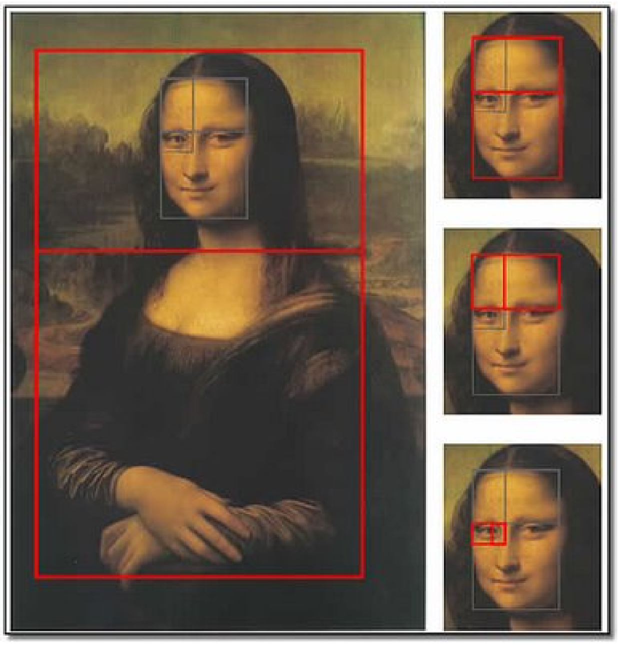

Figura 1.2: Monalisa de Leonardo da Vinci, [13]

A construção de uma espiral áurea é composto dos seguintes passos: tomemos, primeiramente, um quadrado de lado $l = 1$. Em seguida, colocamos dois desses quadrados um ao lado do outro, obtendo um retângulo com dimensões 1 e 2. Agora, no lado maior, construímos um quadrado de lado 2. Note que, o resultado é um retângulo de lados 2 e 3. No lado de medida igual a 3, construa um quadrado de lado 3, cujo resultado é um retângulo de lados 3 e 5.

Ao dar continuidade ao procedimento acima, formaremos outros quadrados de lados 5, 8, 13, 21 e assim por diante, onde cada lado do quadrado é igual ao maior lado do quadrado anterior. Para finalizar, com o auxílio de um compasso, traçamos um quarto de círculo nos quadrados de lados: $l = 1$, $l = 2$, $l = 3$, $l = 5$, $l = 8$, $l = 13$, $l = 21$, obtendo a *espiral áurea*, ver Figura 1.3.

A espiral de Fibonacci pode ser encontrada em caracóis, girassóis, em obras como Paternon e Monalisa, como também na composição do corpo humano, ver Figura 1.4.

Como vimos até agora, a Sequência de Fibonacci é fascinante, tão admirável por sua simplicidade e protagonista de discussões por todo o mundo. No Capítulo 2, realizaremos uma abordagem histórica sobre alguns dos sistemas de numeração utilizados por diversas civilizações espalhadas pelo mundo antigo.

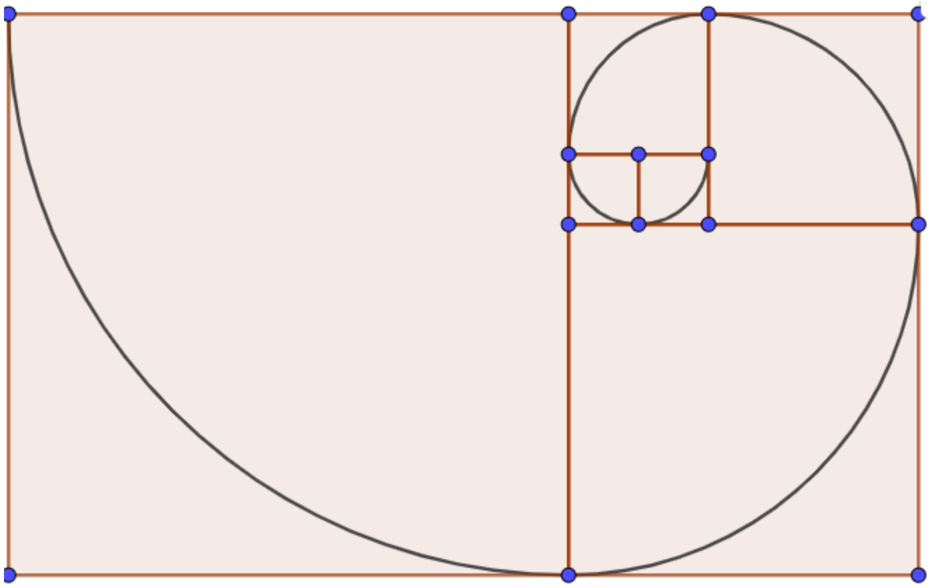

Figura 1.3: Fonte: Produzido pelo autor

Figura 1.4: Fonte: [6]

Capítulo 2

Bases Numéricas

Neste capítulo voltaremos nosso estudo à definição de bases numéricas associado à história do desenvolvimento de alguns dos sistemas de numeração desde a antiguidade. [1, 2, 4, 8, 9, 15, 16, 19, 20, 21].

2.1 Sistemas de Numeração e Bases Numéricas

A história do desenvolvimento da humanidade desde que eram nômades e habitavam em cavernas até o pleno desenvolvimento das civilizações passa por inúmeros capítulos. Uma das características comum nesse processo é a busca do Homem por um método de comunicação escrita. Assim, diversos povos como os maias, hindus e os sumérios, desenvolveram diferentes sistemas de numeração, ou seja, encontraram uma forma única de contar. Um sistema de numeração é um conjunto de princípios constituindo o artifício lógico de classificação em grupos e subgrupos das unidades que formam os números, (veja mais em [21]).

É improvável saber qual foi o primeiro sistema de numeração utilizado, mais provavelmente foi um sistema baseado em contagem. No entanto, uma das premissas dos sistemas desenvolvidos pelas diversas civilizações envolve o conceito de valor posicional, isto é, alguns sistemas de numeração eram posicionais e outros não-posicionais.

Um sistema de numeração recebe o nome de **sistema de numeração posicional** quando a disposição dos algarismos é relevante na composição do numeral como, por exemplo, no sistema de numeração indo-arábico. Observe que ao dispormos os algarismos 1 e 9 um ao lado do outro, nessa ordem, obtemos a representação do número *dezenove*, porém se trocarmos a ordem dos algarismos obtemos o numeral *noventa e um*. Todos os sistemas numéricos posicionais são identificados por uma base numérica, dentre eles citaremos as propriedades pertinentes aos sistemas binário, sexagesimal e decimal.

Em contrapartida, um **sistema de numeração não posicional** é aquele onde o algarismo possui o mesmo valor independente da posição que ocupa no numeral. Enunciaremos as carasterísticas de representação dos números inteiros positivos segundo o sistema de numeração egípcio e romano que são exemplos clássicos dessa forma de registrar os numerais.

2.1.1 Sistema de Numeração Não Posicional

Historicamente, o Homem primitivo buscou ao longo de suas experiências cotidianas, como a atividade de caça e pesca, o desenvolvimento da agricultura concomitante à construção de casas, armazéns, entre outros mecanismos de sobrevivência, estabelecer uma linguagem que favorecesse a contagem daquilo que possuiam e produziam. Com isto, povos como os egípcios e os romanos, aprimoraram suas técnicas de produção baseados em sistemas de numeração não posicionais.

2.1.2 Sistema de Numeração Egípcio

Entre os sistemas de numeração mais elaborados desenvolvidos pelo Homem do mundo antigo, está o ***sistema de numeração egípcio***. Um sistema não posicional, com princípio aditivo, baseado em agrupamentos de *dez* em *dez*. Por volta de 3000 a.C. os egípcios construíram sua escrita e a numeração hieroglífica. Os hieróglifos egípcios são quase todos inspirados na fauna e na flora presentes ao redor do Rio Nilo situado ao nordeste da África. Desde seu surgimento a numeração egípcia permitiu a representação dos números além de um milhão.

A atividades comerciais incentivaram a utilização dos símbolos do sistema matemático utilizado pelos egípcios na época. Os números eram representados por traços e símbolos. Mais especificadamente, os símbolos utilizados para representar qualquer número entre 1 e 99 eram respectivamente, $|$ e $\cap$. Sendo que $|$ refere-se à *uma* unidade e $\cap$ refere-se à *dez* unidades. Assim, por exemplo, para representar o número **seis** e *doze* , utilizava-se respectivamente os símbolos $||||||$ e $\cap\ ||$. Como o sistema egípcio não possui valor posicional, o número *quinze* pode ser representado por $\cap\ |||||$ ou $|||||\ \cap$. Observe na Figura 2.1 os símbolos para representar os valores correspondentes a *cem* e *mil*.

Sistema egípcio	Sistema decimal
	100
	1 000

Figura 2.1: Representação de números egípcios

No sistema de numeração egípcio não havia um símbolo para indicar o zero. Logo, para representação, por exemplo, do número 2001 utilizava-se os símbolos indicados na Figura 2.2.

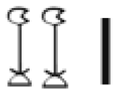

Figura 2.2: Representação de 2001

2.1.3 Sistema de Numeração Romano

O Sistema de Numeração Romano é um dos mais importantes sistemas não posicionais. Embora tenha se desenvolvido no início da era cristã, ainda hoje o utilizamos ao fazer referência à capítulos de livros, nomes de papas, na representação dos algarismos dos relógios como na Figura 2.3 , na citação dos séculos, entre outros.

Nesse sistema os símbolos são representados por sete letras maiúsculas do alfabeto latino. O número *um* é representado por **I**, o *cinco* por **V**, o *dez* por **X**, o *cinquenta* por **L**, o *cem* por **C**, o *quinhentos* por **D**, o *mil* por **M**. O sistema de numeração romano é aditivo, sendo que não é permitido repetir uma mesma letra por mais de três vezes consecutivas, e ainda as letras **V**, **L** e **D** não podem ser repetidas. Assim, os números ***trinta e três*** e ***cento e sessenta e seis*** são representados por **XXXIII**$=10+10+10+1+1+1$ e **CLXVI**$=100+50+10+5+1$, respectivamente.

Consequentemente, o número ***quarenta e quatro*** não pode ser representado por **XXXXIIII**. Seque que, para os números cuja representação excedam de três letras adjacentes e não possuem um letra específica pertencente aos símbolos do sistema de numeração que o represente, utilizamos o princípio da subtração. Isso significa, por exemplo,

Figura 2.3: Big Ben Clock Tower, [17]

que os símbolos **IV**, **IX**, **XL** e **XC** correspondem respectivamente aos números $5 - 1 = 4$, $10 - 1 = 9$, $50 - 10 = 40$ e $100 - 10 = 90$. Dessa maneira temos que o número 44 é representado por **XLIV**.

Em outras palavras temos que, quando colocamos um símbolo de menor valor à direita de um símbolo de maior valor, efetuamos a adição do valor relativo de tais símbolos, em contrapartida, se colocamos um sinal de menor valor à esquerda de um símbolo de maior valor, efetuamos a subtração do valor relativo de tais símbolos.

O sistema de numeração romano, como no sistema de numeração egípcio, não apresenta um símbolo para o numeral *zero*. Porém, em ambos os casos, essa necessidade não é sentida devido a ausência de valor posicional. Assim, os símbolos **CD** e **DC**, representam respectivamente, os números 400 e 600.

2.1.4 Sistema de Numeração Posicional

Embora diversas civilizações da antiguidade tenham desenvolvido isoladamente métodos de contagem empregando o conceito de valor posicional, todos esses sistemas estão intrinsicamente relacionados ao conceito da bases numéricas enunciado a seguir.

Teorema 2.1 *(Teorema de Bases Numéricas) Dados* $a, b \in \mathbb{N}$, *com* $b \geq 2$, *existem números naturais* $c_0, c_1, ..., c_n$ *menores do que* b, *univocamente determinados, tais que* $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + ... + c_n b^n$.

Demonstração 2.2 *Vamos demonstrar o teorema utilizando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre* a.

Se $a = 0$, *ou se* $a = 1$, *basta tomar* $n = 0$ *e* $c_0 = a$. *Supondo o resultado válido para todo natural menor do que* a, *vamos prová-lo para* a. *Pela divisão euclidiana, existem* q *e* r *únicos tais que* $a = bq + r$, *com* $0 \leq r < b$. *Como* $q < a$, *pois fosse o contrário teríamos* $bq \geq a$, *o que é um absurdo, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais* n' *e* $d_0, d_1, ..., d_{n'}$, *com* $d_j < b$, *para todo* j, *univocamente determinados tais que*

$q = d_0 + d_1 b + ... + d_{n'} b^{n'}$.

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que:

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + ... + d_{n'} b^{n'}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r, n = n' + 1$ *e* $c_j = d_{j-1}$ *para* $j = 1, ..., n$.

Esse teorema nos garante que podemos escrever qualquer número inteiro positivo tomando uma base numérica aleatória. A letra b, indica o valor da base., e a_i será cada um dos algarismos do número, ou seja,

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

onde, $0 \leq a_i < b$, para $i = 0, 1, ..., n$.

Logo, se $b \leq 10$, temos $a_i = 0, 1, 2, ..., b - 1$. Caso tenhamos, $b > 10$, usamos os algarismos de 0 a 9, além de acrescentar símbolos especiais para os alagismos entre 10 e $b - 1$.

Essa igualdade nos permite representar um número inteiro positivo na base b, utilizando apenas os algarismos, assim:

$$N = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$$

2.1.5 Sistema de Numeração Decimal

As antigas civilizações viviam isoladamente e muito distantes umas das outras. As atividades rotineiras levaram cada uma a construir seu próprio método de comunicação, incluindo o dialeto e a linguagem escrita. O desenvolvimento da escrita promoveu também o aprimoramento dos métodos de contagem, onde migrou-se da representação com "pedrinhas"para a escrita matemática. Com o passar do tempo e a propagação do comércio, as civilizações iniciaram um processo de troca de suas descobertas.

Foi nesse cenário que os árabes colocaram em prática a utilização do ***sistema de numeração decimal***, também conhecido como sistema de numeração indo-arábico. Esse método foi inventado pelos hindus e espalhou-se pelo mundo principalmente pela atividade comercial. No início do século IX,o matemático *"Al-Khowarizmi"* escreveu um livro em árabe utilizando o sistema de numeração proposto pelos hindus. Em sua homenagem os símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, e 9 são chamados de algarismos.

Aqui nos deparamos com mais uma importante participação de Fibonacci no desenvolvimento da matemática, quando em 1202 publicou o livro Liber Abaci, utilizando o sistema de numeração decimal. Tal feito, proporcionou a difusão desse sistema entre os europeus que, julgando ser mais eficaz que o sistema romano, passaram a praticá-lo em suas atividades comerciais.

Contudo, o sistema de numeração decimal prevaleceu entre os outros sistemas de numeração posicionais existentes. Certamente, uma das hipóteses para esse fato, inclui a existência do *zero* bem como, a condição física da anatomia do corpo humano, pois esse sistema possui exatamente dez algarismos como a quantidade de dedos que temos nas mâos. Talvez esse seja o motivo pelo qual ficamos perplexos ao estudar os conceitos relacionados ao sistema de numeração decimal, pois ainda quando criança aprendemos a contar com tanta naturalidade que nos dá a impressão de que esse método tenha sido criado ao mesmo tempo que o Homem habita a Terra.

Empregando a base decimal segundo a definição de bases numéricas, temos que cada um dos algarismos$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e 9, além do valor absoluto, possui um peso que lhe é atribuído em relação a posição que ele ocupa no número. Esse peso, sempre uma potência de dez, varia da seguinte maneira: O algarismo da extrema direita possui peso um, o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez; o seguinte tem peso cem; o seguinte tem peso mil, e assim por diante.

Portanto, os números de um a nove são representados pelos algarismo de 1 a 9, correspondentes. O número dez é representado por 10, o número cem é representado por 100, o número mil é representado por 1 000.

Exemplo 2.3 *Por exemplo, o número 13 807, na base 10, tem como representação*

$$1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7$$

Cada algarismo de um número possui uma ordem contada da direita para a esquerda. Assim, no Exemplo 2.3 , o 1 é de quinta ordem, o 3 é de quarta ordem, o 8 é de terceira ordem e, o 7 é de primeira ordem. Cada terna de ordens, também contadas da direita para a esquerda, forma uma classe. As classes são, às vezes, separadas umas das outras por meio de um ponto.

Veja na Tabela 2.1 uma descrição contendo as três primeiras classes e ordens:

Classes de Unidades	Ordem
Unidades	1ª ordem
Dezenas	2ª ordem
Centenas	3ª ordem

Tabela 2.1: Primeiras Classes e Ordens

2.1.6 Sistema de Numeração Binário

O sistema de numeração binário é formado pelos algarismos 0 e 1. Registros revelam que este método de representação foi inventado no século XVIII pelo alemão Gottfried Leibniz. Estudos recentes da universidade de Bergen, na Noruega, trás indícios de que 300 anos antes de ser idealizada por Leibniz, habitantes de Mangareva, uma ilha na Polinésia Francesa, também usavam uma espécie de aritmética binária.

Embora contenha apenas dois algarismos, o sistema não mostra eficácia na escrita dos números. Observe, por exemplo, que a representação do número $(123)_{10}$ no sistema binário corresponde a $(1111011)_2$. No entanto, essa terminologia foi essencial para o desenvolvimento do sistema computacional. Para funcionarem, os computadores trabalham por meio de bits. Os bits são representados pelos algarismos 0 e 1. O agrupamento de oito bits corresponde a um byte, assim cada símbolo digitado no teclado alfa-numérico do computador possui um conjunto singular de oito dígitos binários para representá-lo.

2.1.7 Sistema de Numeração Sexagesimal

Por volta de 3 200 a. C. os sumérios já possuiam um tipo de escrita. os registros eram realizados com o auxílio de objetos em forma de cunha. Foi dessa forma que representavam seus números. Basicamente eram utilizados dois símbolos com os quais era possível representar os números de 1 a 59. Observe na Figura 2.4 os símbolos empregados para a representação dos números.

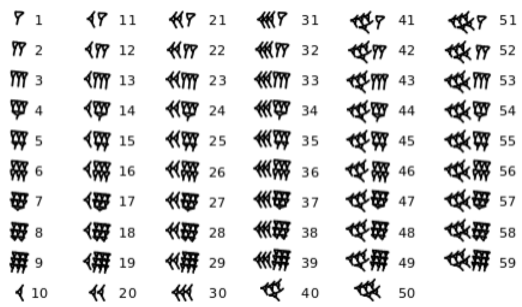

Figura 2.4: Representação dos números 1 ao 59 no sistema sexagesimal

Podemos concluir que esse sistema é posicional , ou seja, cada algarismo tem um determinado valor de acordo com a posição que ocupa. Note ainda que, o número *sessenta* possui o mesmo símbolo do número *um*. Logo, podemos dizer que trata-se de um sistema sexagesimal, [15].

Note que ainda hoje, utilizamos o sistema de numeração sexagesimal, quando, por exemplo, a cada *sessenta* minutos temos *uma* hora, e para cada *sessenta* segundos temos *um* minuto. A mesma equivalência pode ser notada nas subdivisões das medidas dos ângulos.

2.1.8 Conversão de Bases Numéricas

Método das divisões sucessivas

Para realizarmos a conversão de uma determinada base b para uma base c qualquer, efetuamos divisões sucessivas do número representado pela base b pelo valor relativo à base c até chegarmos a um quociente igual a *zero*. Assim, tomando os restos de cada divisão em sequência, exceto do último algarismo que corresponde às unidades, temos a representação no número na base c.

Exemplo 2.4 *Representar* $(216)_{10}$ *na base 8.*

Note que,

$$216 = 27 \times 8$$
$$27 = 3 \times 8 + 3$$

Portanto,

$$216 = 3 \times 8^2 + 3 \times 8$$

Assim, temos que $(216)_{10} = (330)_8$.

Exemplo 2.5 *O número 3 416 está na base 7; escreva-o na base decimal.*

Observe que

$$\begin{aligned}(3416)_7 &= 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 1 \times 7^1 + 6 \times 7^0 \\ &= 3 \times 343 + 4 \times 49 + 7 + 6 \\ &= 1029 + 343 + 49 + 7 + 6 \\ &= 1434\end{aligned}$$

Assim, $(3416)_7 = (1434)_{10}$.

Exemplo 2.6 *Representar* $(1434)_{10}$ *na base* 5.

$$1434 = 286 \times 5 + 4$$
$$286 = 57 \times 5 + 1$$
$$57 = 11 \times 5 + 2$$
$$11 = 2 \times 5 + 1$$

Portanto, $(3416)_7 = (21214)_5$

Exemplo 2.7 *Representar* $(1434)_{10}$ *na base* 12.

Como a base b é maior do que 10*, representaremos por A e B, os números 10 e 11 que se tornam algarismos, respectivamente.*

Assim,

$$1434 = 119 \times 12 + 6$$
$$119 = 9 \times 12 + 11$$

Portanto, $(3617)_7 = (9B6)_{12}$

No Capítulo 3 realizaremos uma discussão sobre a representação de números inteiros positivos e sua relação com os termos da Sequência de Fibonacci.

Capítulo 3

Bases Numéricas e a Sequência de Fibonacci

Nos Capítulos 1 e 2, resgatamos os conceitos básicos relacionados às bases e aos fundamentos da Sequência de Fibonacci. Agora, faremos uma analogia entre esses assuntos. Para a realização deste capítulo foram utilizadas as seguintes referências, [5, 16].

Dessa vez, nos dedicaremos ao estudo de uma "nova"maneira de representar os números inteiros positivos. Como vimos no Capítulo 1, os termos da Sequência de Fibonacci são resultado de uma *sequência recursiva*, isto é, para determinar um certo termo da sequência é necessário conhecer seus precedentes. Como vimos no 1 os termos iniciais da Sequência de Fibonacci são: $F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21$,... . Agora analisaremos se há alguma relação entre os termos dessa sequência com a representação dos números inteiros positivos.

3.1 A Representação de Zeckendorf

Associando os dez primeiros números inteiros com os termos da Sequência de Fibonacci obtemos o seguinte resultado:

$$1 = F_1 = F_2;$$

$$2 = F_3;$$

$$3 = F_4 = F_2 + F_3 = F_2 + F_2 + F_2;$$

$$4 = F_4 + F_2 = F_3 + F_3;$$

$$5 = F_5 = F_3 + F_4;$$

$$6 = F_5 + F_2 = F_4 + F_3 + F_2;$$
$$7 = F_5 + F_3 = F_5 + F_2 + F_2;$$
$$8 = F_6 = F_5 + F_4 = F_5 + F_3 + F_2;$$
$$9 = F_6 + F_2 = F_5 + F_4 + F_2;$$
$$10 = F_5 + F_5 = F_5 + F_4 + F_3 = F_6 + F_3.$$

Intuitivamente nos parece claro que podemos representar os números inteiros positivos realizando a soma de termos da Sequência de Fibonacci.

Assim, ao observarmos, por exemplo, atentamente as representações do número 10 concluímos que, na primeira, os termos não são distintos; na segunda, são distintos porém, consecutivos. E, na terceira, temos números de Fibonacci distintos e não consecutivos: $8 = F_6$ e $2 = F_3$.

Logo, tomando o critério apresentado na terceira forma e expandindo para a representação dos números 11 e 12, temos o seguinte resultado: $11 = F_6 + F_4$ e $12 = F_6 + F_4 + F_2$.

Note ainda que, como $F_7 = 13$, $F_8 = 21$ e $F_9 = 34$, então para escrever os números naturais de 13 a 20 utilizando o mesmo princípio de representação dos números 11 e 12, devemos realizar combinações com os termos da sequência de Fibonacci de F_2 a F_7 como na sequência abaixo.

$$13 = F_7,$$
$$14 = F_7 + F_2,$$
$$15 = F_7 + F_3,$$
$$16 = F_7 + F_4,$$
$$17 = F_7 + F_4 + F_2,$$
$$18 = F_7 + F_5,$$
$$19 = F_7 + F_5 + F_2, \text{ e}$$
$$20 = F_7 + F_5 + F_3.$$

Decorre que , para escrever os números inteiros positivos entre 21 e 33 basta fazermos combinações com os termos da sequência de Fibonacci de F_2 a F_8. Analogamente, como $F_9 = 34$ e $F_{10} = 55$, os números inteiros positivos entre 34 e 54 podem ser escritos por meio das combinações de F_2 a F_9.

Esse resultado nos leva a seguinte conclusão: se o número inteiro positivo x é um termo da Sequência de Fibonacci, então $x = F_k$. Caso contrário, esse número é a combinação linear dos termos F_2 a F_{k-1}, onde F_k é o menor termo tal que $x < F_k$.

Os exemplos elencados fazem referência ao resultado demonstrado em 1972 pelo matemático alemão Édouard Zeckendorf, nascido em Liége, na Bélgica, em 2 de maio de 1901. Inspirado na carreira dentística de seu pai, em 1925 conclui sua qualificação em medicina na Universidade de Liége. Logo, incorporou às fileiras do exército Belga como oficial do corpo médico.

Desde os primeiros anos escolares, Zeckendorf mostrou talento especial voltado ao estudo de matemática e desenho. O matemático ficou conhecido pelos estudos voltados a enigmática Sequência de Fibonacci. Em 1957 foi eleito membro da *Societe Royale des Sciences* de Liége, onde publicou mais de 20 artigos relacionados principalmente à teoria dos números elementares. Antes de sua morte, datada em 16 de maio de 1983, em Liége, Zeckendorf frequentava assiduamente das reuniões mensais da *Societe Royale des Sciences*, [14].

Teorema 3.1 *: (Teorema de Zeckendorf) Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como a soma de termos da Sequência de Fibonacci distintos e não consecutivos.*

Demonstração 3.2 *: Utilizaremos o Segundo Princípio de Indução, para mostrar a existência da representação. Inicialmente temos que:* $1 = F_1 = F_2, 2 = F_3, 3 = F_4, 4 = F_4 + F_2, 5 = F_5, 6 = F_5 + F_2$. *Assim, concluímos que o resultado é válido para* $n \leq 6$.

Agora, vamos supor que o resultado seja válido até um certo $k > 6$. *Mostraremos a validade para* $k + 1$. *Se* $k+1$ *é um termo da Sequência de Fibonacci, então o resultado está provado, pois* $k+1 = F_p$, $p \in \mathbb{N}$. *Caso não seja, então existe um* $j, j \in \mathbb{N}$,*tal que* $F_j < k+1 < F_{j+1}$.

Desta forma, existe $a \in \mathbb{Z}_+$ *tal que* $F_j + a = k+1 < F_{j+1} = Fj + Fj - 1$, *ou seja,* $a < F_{j-1}$.

Como $a = k+1-F_j < k_1$, *tem-se que* $a \leq k$ *e pela hipótese indutiva o resultado é válido para* a. *Logo, como* $k+1 = F_j + a$ *e* $a < F_{j-1}$ *o resultado vale para* $k+1$.

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, todo número natural pode ser escrito como a soma de termos da Sequência de Fibonacci de índices distintos e não consecutivos e maiores do que 2.

A seguir, provaremos a unicidade da representação.

Suponha que a representação seja única até certo k. Considere que para k + 1 existam duas representações, desta forma:

$k+1 = F_{a_0} + F_{a_1} + ... + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + ... + F_{b_s}$, *com* $a_i + 1 < a_{i+1}$ *e* $b_j + 1 < b_{j+1}$

Seque que,

$F_{ar} \leq F_{a_0} + F_{a_1} + ... + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + ... + F_{b_s} \leq F_{b_s} + F_{b_{s-2}} + ... + F_t = F_{bs+1} - 1$, *onde*

$$t = \begin{cases} 2, & se\ b_s\ \acute{e}\ par \\ 3, & se\ b_s\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar. \end{cases}$$

Assim, $F_{a_r} \leq F_{b_{s+1}}$, *isto é,* $a_r < b_s + 1$, *ou equivalentemente* $a_r \leq b_s$.

Analogamente, podemos mostrar que $b_s \leq a_r$. *Portanto* $a_r = b_s$.

Além disso, temos $F_{a_0} + F_{a_1} + ... + F_{a_{r-1}} + F_{a_r} = F_{b_0} + F_{b_1} + ... + F_{b_{r-1}} + F_{b_r} \leq k$, *o que implica* $F_{a_0} + F_{a_1} + ... + F_{a_{r-1}} = F_{b_0} + F_{b_1} + ... + F_{b_{r-1}} = k + 1 - F_{a_r} < k + 1$.

Logo, segue da hipótese de indução e de a_r=b_s *que a representação é única.*

Note que a representação dos números naturais proposta por Zeckendorf não possui relação direta com o conceito de bases numéricas, uma vez que, não há a existência de um valor determinado para base. Adotaremos como método de representação de um número inteiro positivo n utilizando o Teorema de Zeckendorf da seguinte maneira:

$$n = (b_0 b_1 b_2 ... b_{k-2})_F \text{ onde } b_i \in 0, 1, \text{ ou equivalentemente,}$$
$$n = b_0 F_2 + b_1 F_3 + ... + b_{k-2} F_k$$

Dessa forma, como $15 = 1 \times 13 + 0 \times 8 + 0 \times 5 + 0 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = F_7 + F_3 = 13 + 2$ podemos representá-lo por $(100010)_F$ em base Fibonacci. Diante o exposto temos que a representação de um número inteiro positivo na base Fibonacci é uma sequência de números *zeros* e *uns* onde não há dois *uns* consecutivos.

Em [5], há um aplicativo que fornece o resultado para a representação de um número inteiro positivo segundo o Teorema de Zeckendorf. A Figura 3.1 revela a representação de Zeckendorf para os dez primeiros números inteiros não negativos.

Segundo as representações, concluímos que como $F_1 = F_2$, os números são indicados como uma combinação entre 0 e 1, onde os termos da sequência são enumerados da esquerda para a direta começando pelo F_2. Observe na Figura 3.2 a representação do número 1 434 por meio da soma de termos distintos e não consecutivos da Sequência de Fibonacci.

De acordo com o resultado apresentado na Figura 3.2 temos que:

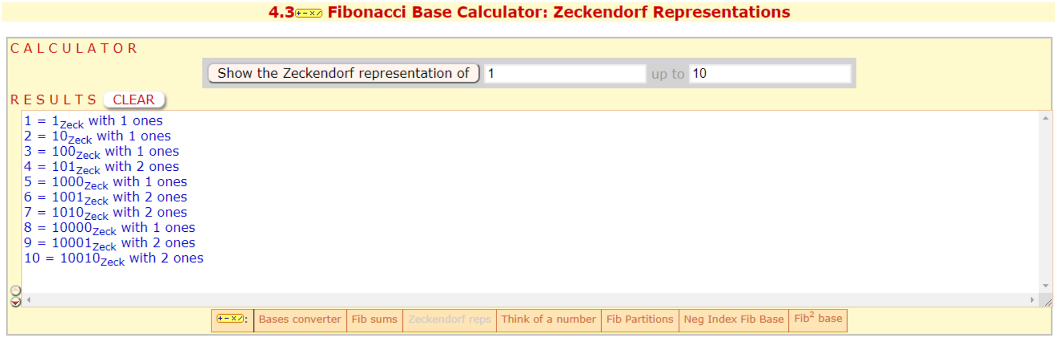

Figura 3.1: [5]

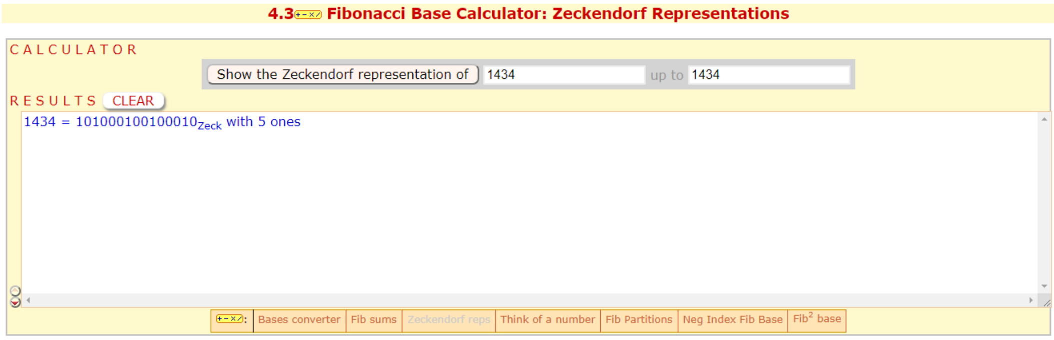

Figura 3.2: [5]

$$1434 = (101000100100010)_F = 1\times F_{16}+0\times F_{15}+1\times F_{14}+0\times F_{13}+0\times F_{12}+0\times F_{11}+1\times F_{10}+0\times F_9+0\times F_8+1\times F_7+0\times F_6+0\times F_5+0\times F_4+1\times F_3+0\times F_2 = 987+377+55+13+2$$

A ferramenta apresentada e disponível em [5] pode ser utilizada no ambiente escolar como forma investigativa relacionada aos termos da Sequência de Fibonacci.

Uma vez que fomos agraciados pelo conhecimento de mais um resultado, digamos "mágico", envolvendo os termos da Sequência de Fibonacci, mostraremos no próximo Capítulo 4, algumas sugestões de atividades envolvendo as diversas maneiras de representação dos números inteiros positivos, incluindo o Teorema de Zeckendorf.

Capítulo 4

Atividades

Nos capítulos anteriores desfrutamos das diversas possibilidades de representar os números inteiros positivos. E, mediante os textos apresentados, acreditamos que a prática docente pode ser enriquecida quando este introduzir algumas dessas formas de representações nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental.

Nesse contexto, a proposta de jogos é uma alternativa plausível pois apresenta, dentre outras características, uma atividade altamente motivacional, visto os desafios enfrentados em cada atividade. E, não menos importante, as atividades escolares com jogos promove o trabalho relacionado à interação dos discentes quando realizam as atividades em grupos. Quanto aos materiais a serem utilizados são indicados tampas de garrafas, canudinhos, pedras, palitos, dentre outros, elementos que permitam ao aluno fazer agrupamentos de acordo com a base do sistema de numeração.

4.0.1 Jogo Nunca Dez

O jogo conhecido como **nunca dez** tem como regra nunca possuir um grupamento de dez elementos. Para iniciar o jogo, os alunos jogam um dado e começa o que obter o maior valor.

A seguir apresentaremos algumas propostas de como trabalhar este jogo. Tome a Figura 4.1, onde os círculos verde, amarelo e rosa correspondem respectivamente aos números 10^2, 10^1 e 10^0.

Para a realização da atividade cada jogador receberá uma tabela como da Figura 4.1. Os dois dados utilizados serão formados cada um da seguinte maneira: um deles terá números de 1 a 6, e o outro terá três faces com a palavra unidades e três faces com a

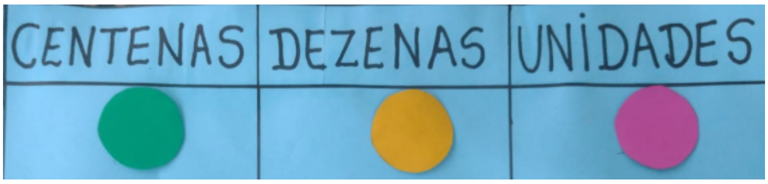

Figura 4.1: Produzido pelo autor

palavra dezenas. Assim, suponha que o primeiro jogador obteve o número 4 e a palavra unidades, então deverá colocar *quatro* círculos rosa na casa correspondente às unidades. Em seguida, o segundo jogador efetuará o mesmo procedimento. O ganhador será o jogador que obtiver primeiro um número correspondente à *cem* unidades, ou seja, aquele que chegar primeiro na casa correspondente às centenas.

Este jogo pode conter diversas configurações quanto à regra para determinar o jogador vencedor. Suponha que a regra seja, vence aquele que obter primeiro *duas* centenas. Assim, considere que um determinado jogador esteja com sua tabela preenchida como a Figura 4.2. Note que, reorganizando os dados obtemos uma representação como da Figura 4.3, onde os *dez* círculos rosa são substituídos por *um* círculo amarelo. Analogamente, o conjunto de *dez* círculos amarelos é substituído por *um* círculo verde, como na Figura 4.4.

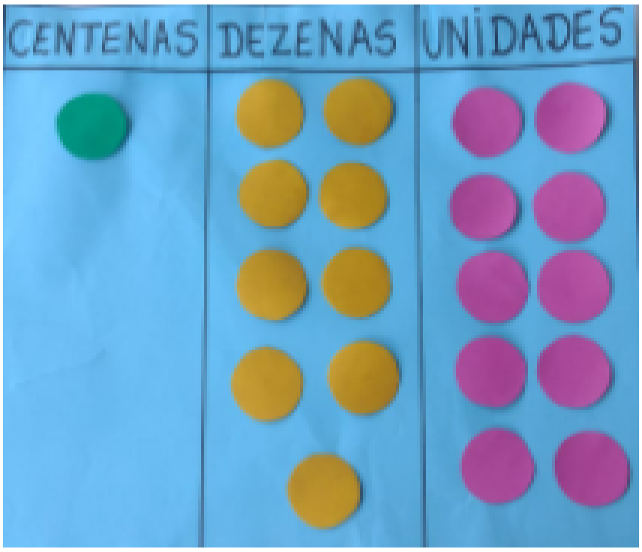

Figura 4.2: Produzido pelo autor

Logo, o número representado inicalmente na Figura 4.2 é igual a $2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 0 \times 10^0 = (100)_{10} = 2 \times 100 = 200$, e este será o jogador vencedor.

Sugerimos o trabalho com jogos do tipo ***"nunca dez"***, para os alunos que estiverem

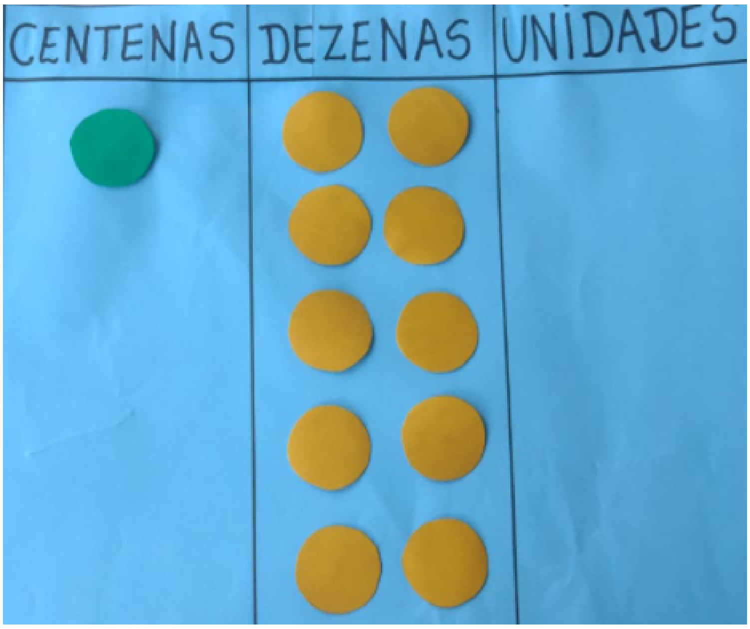

Figura 4.3: Produzido pelo autor

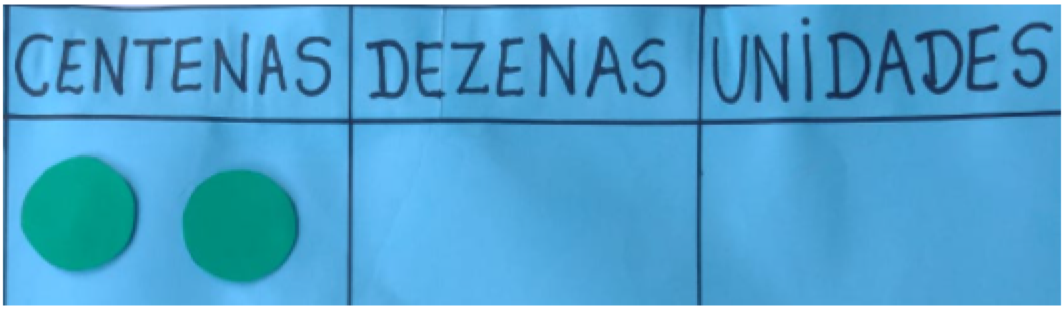

Figura 4.4: Produzido pelo autor

nos primeiros anos escolares do Ensino Fundamental. Cabe ao docente acrescentar à tabela casas correspondentes à unidade de milhar, dezena de milhar, e assim por diante, de acordo com o ano escolar trabalhado.

Sugerimos ao docente que, após trabalhar o sistema de numeração decimal, inicie o processo de aprofundamento do conceito relacionado às bases numéricas por meio da realização de jogos do tipo ***"nunca dois"***, ***"nunca três"***, ***"nunca quatro"***, e assim por diante.

4.0.2 Jogo Nunca Dois

Para a realização de atividades envolvendo a escrita dos números na base binária, sugerimos ao professor que apresente aos alunos uma tabela como da Figura 4.5, onde os círculos amarelo, rosa, verde, azul e preto correspondem respectivamente aos números, $1, 2, 4, 8$ e 16.

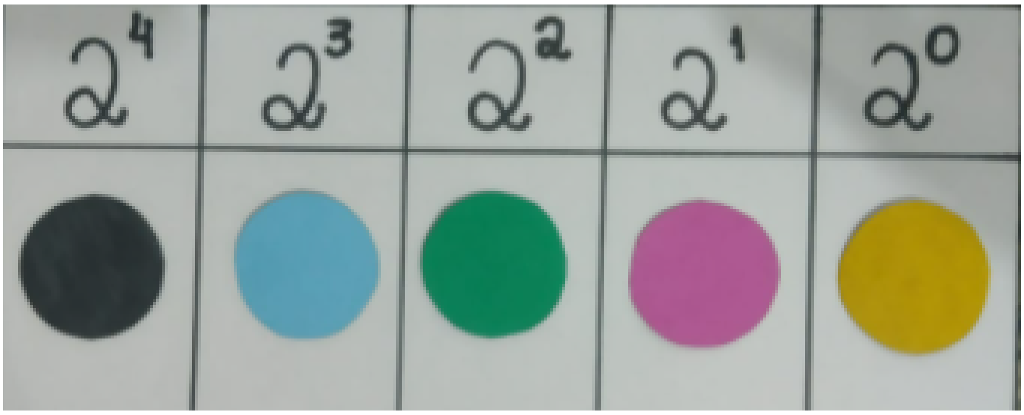

Figura 4.5: Produzido pelo autor

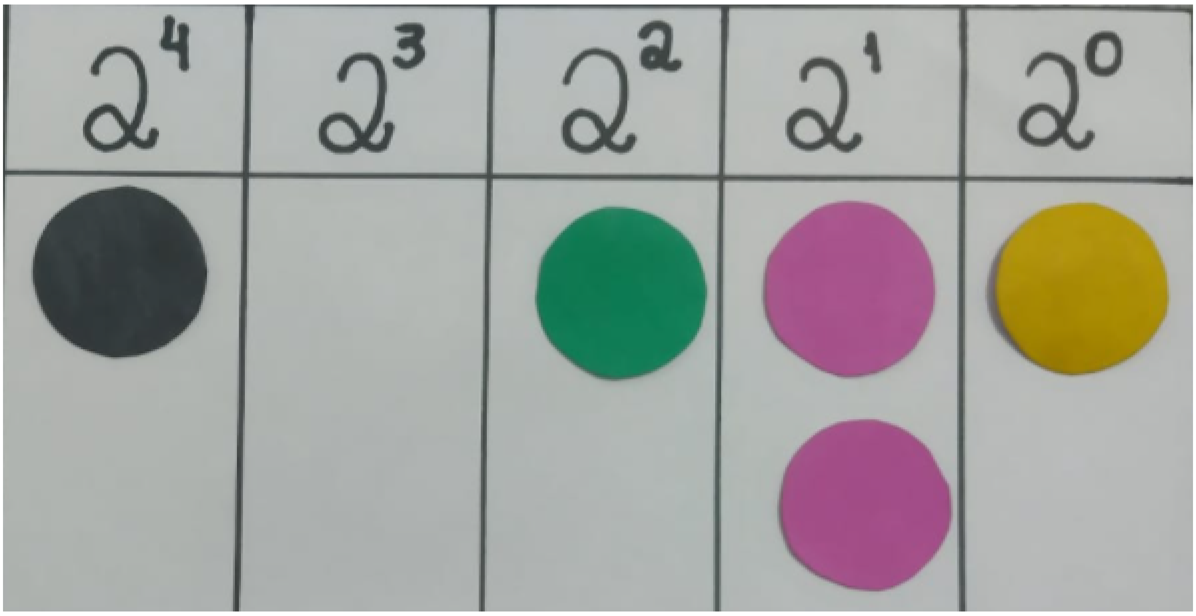

Figura 4.6: Produzido pelo autor

Equivalentemente ao ***Jogo Nunca Dez***, cada aluno receberá uma tabela como da Figura 4.5 vazia. Um dos dados será composto por duas faces com o número 2^0, duas faces com o número 2^1 e duas faces com o número 2^2. Já o outro dado terá duas faces com a palavra *zero*, duas faces com a palavra *um* e duas faces com a palavra *dois*. Assim, suponha que o primeiro jogador obteve o seguinte resultado: 2^1 e a palavra *dois*, assim deverá colocar *dois* círculos rosa na coluna correpondente ao número 2^1. No entanto, como não é possível conter dois círculos em uma mesma coluna, o jogador substituirá por *um* círculo verde que corresponde à coluna cujo valor numérico é igual a 2^2. A regra que determina o jogador vencedor pode ser estabelecida de inúmeras formas. Aqui mostraremos apenas como o aluno procederá quando obter um valor maior ou igual a *dois* círculos em uma mesma coluna.

Na Figura 4.6 temos uma proposta de atividade investigativa onde sempre que houver mais de *dois* círculos de mesma cor em uma única potência o aluno substituirá por *um* círculo da esquerda, imediatamente superior. Seguindo esse procedimento o resultado obtido será equivalente ao da Figura 4.7.

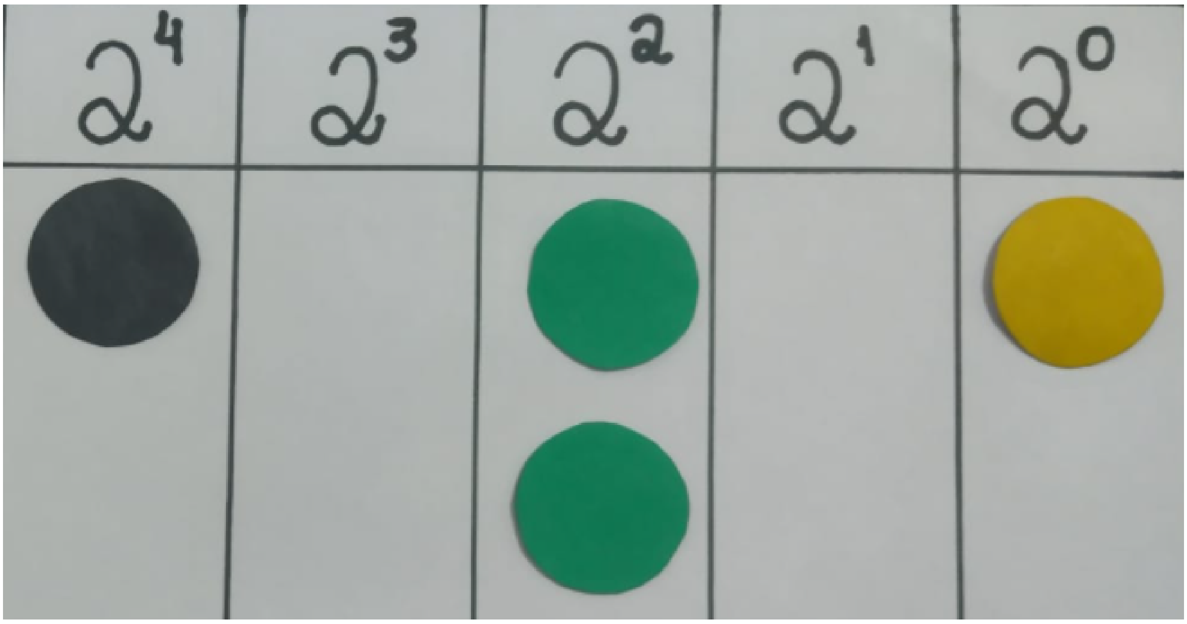

Figura 4.7: Produzido pelo autor

Finalmente na Figura 4.8, temos o resultado do exemplo da Figura 4.5, isto é; $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = (11001)_2 = 16 + 8 + 1 = 25$

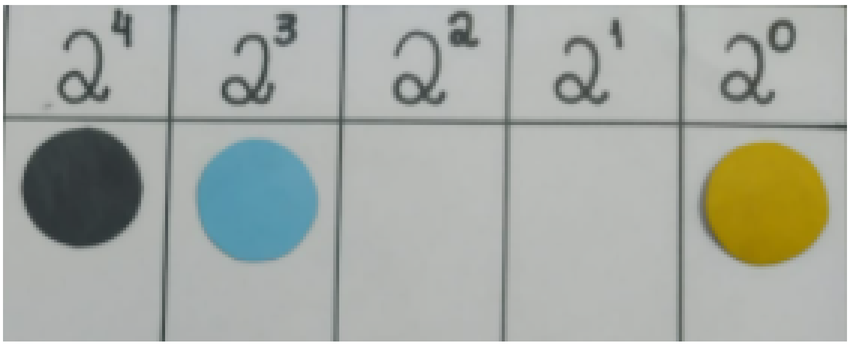

Figura 4.8: Produzido pelo autor

Assim que o discente tiver conhecimento sobre os termos da Sequência de Fibonacci, o professor poderá propor que escrevam determinados números como da Figura 4.9, onde está representado o número $(10101)_F = 1\times8+0\times5+1\times3+0\times2+1\times1 = 8+3+1 = 12$

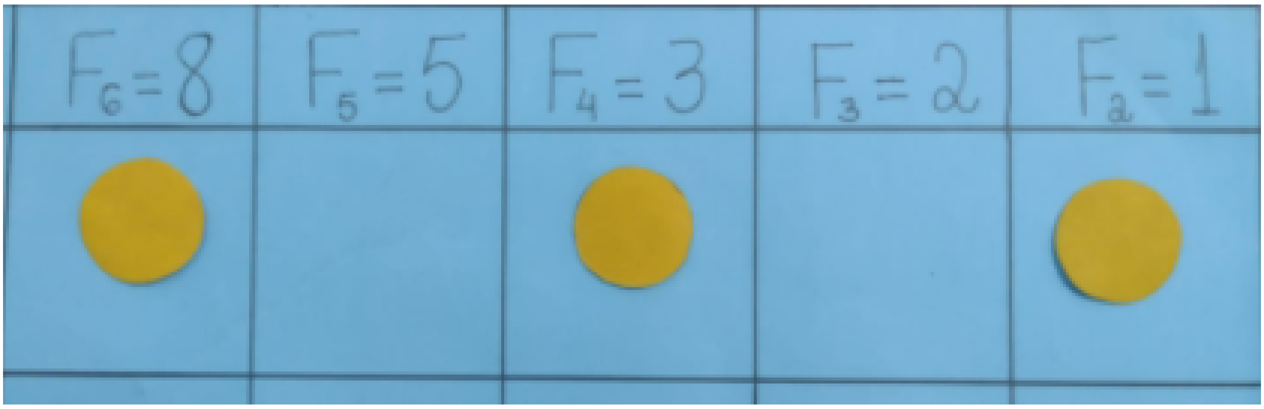

Figura 4.9: Produzido pelo autor

No exemplo da Figura 4.10 há duas representações do número *dez* como soma de termos da Sequência de Fibonacci.A representação amarela pode ser escrita como $(1110)_F = 1\times5+1\times3+1\times2+0\times1$, já a representação rosa corresponde a $(10010)_F = 1\times8+2\times2$. Durante a atividade o professor realizará questionamentos como os seguintes: De quantas maneiras o número *dez* pode ser representado utilizando a soma de termos da Sequência de Fibonacci? Entre essas representações destaque aquela onde os termos não são consecutivos. Esse processo deverá ser repetido para demais exemplos até que o professor conclua a atividade enunciando o *Teorema de Zeckendorf*. Observe que na Figura 4.10, a representação rosa condiz com as condições estabelecidas pelo *Teorema de Zeckendorf*.

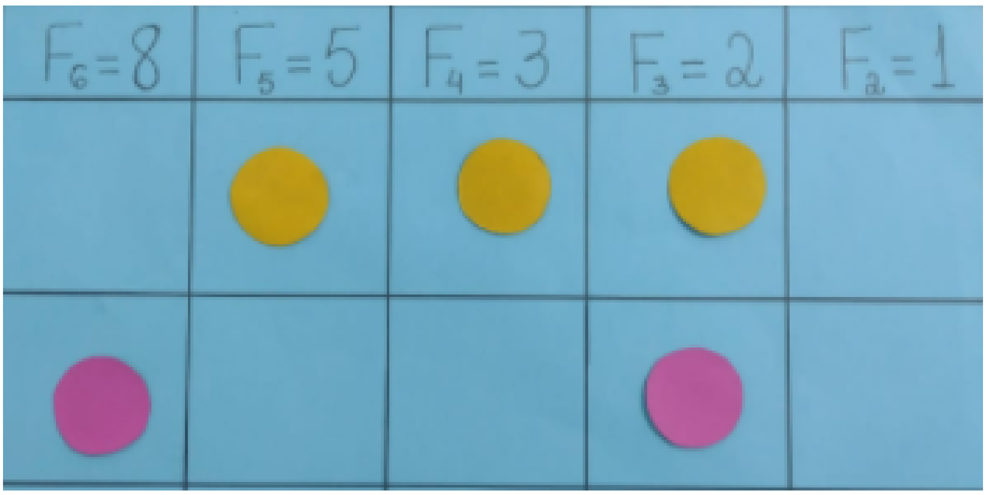

Figura 4.10: Produzido pelo autor

A finalidade das atividades sugeridas é de familiarizar os discentes com as diversas maneiras de representar um número inteiro positivo.

4.0.3 Jogo dos Cartões Mágicos Binários

Outra aplicação relacionada às bases numéricas é a realização do ***Jogo dos Cartões Mágicos Binários***. Como o próprio nome diz, nesse jogo é explorado de forma lúdica o sistema de numeração binário.

A mágica realizada pelo instrutor está fundamentada no Teorema 2.1, para $b = 2$, onde todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de potências distintas de 2.

Portanto, um número inteiro positivo a pode ser escrito como:

$$a = b_n 2^n + b_{n-1} 2^{n-1} + ... + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0$$

O número de cartelas do jogo depende da quantidade de potências de 2 consideradas pelo instrutor. Tomemos, poe exemplo, as potências $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ e 2^5, assim devemos construir 6 cartelas, onde o primeiro número de cada uma será respectivamente, 1, 2, 4, 8, 16 e 32. Somando os primeiros números de cada cartela temos como resultado 63. Logo, o jogador poderá escolher qualquer número entre 1 e 63. Se considerarmos a composição das cartela formadas por potências de 2^0 até 2^6, devemos construir 7 cartelas, onde o jogador poderá escolher qualquer número entre 1 e 127.

Considerando, os números entre 1 e 63, de acordo com o 2.1 podemos representá-los de forma generalizada por:

$$a = b_5 2^5 + b_4 2^4 + b_3 2^3 + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0$$

A construção das cartelas é realizada da seguinte maneira: a cartela 1 deve conter, em ordem crescente, todos os números que possuem a potência 2^0 em sua composição, a cartela 2 conterá, em ordem crescente, todos os números que possuem a potência 2^1 em sua composição, e assim por diante.

Na figura 4.11, podemos verificar a presença de todos os números abaixo cuja composição possui a potência 2^0.

$$1 = 2^0;$$
$$3 = 2^0 + 2^1;$$

$$5 = 2^2 + 2^0;$$
$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$9 = 2^3 + 2^0;$$
$$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0;$$
$$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0;$$
$$15 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$17 = 2^4 + 2^0;$$
$$19 = 2^4 + 2^1 + 2^0;$$
$$21 = 2^4 + 2^2 + 2^0;$$
$$23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$25 = 2^4 + 2^3 + 2^0;$$
$$27 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0;$$
$$29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0;$$
$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$33 = 2^5 + 2^0;$$
$$35 = 2^5 + 2^1 + 2^0;$$
$$37 = 2^5 + 2^2 + 2^0;$$
$$39 = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$41 = 2^5 + 2^3 + 2^0;$$
$$43 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0;$$
$$45 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0;$$
$$47 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$49 = 2^5 + 2^4 + 2^0;$$
$$51 = 2^5 + 2^4 + 2^1;$$
$$53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0;$$
$$55 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$$
$$57 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0;$$
$$59 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0;$$
$$61 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0;$$
$$63 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Para a mágica acontecer, o instrutor inicalmente solicita ao jogador que escolha secretamente um número qualquer entre 1 e 63. Em seguida expõe as *seis* cartelas como da figura 4.11, e então realiza os seguintes questionamentos: O número escolhido está na cartela 1? Está na cartela 2? E assim sucessivamente até a cartela de número 6. No final das perguntas o instrutor revela o número escolhido.

Cartela 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Cartela 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Cartela 3

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Cartela 4

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Cartela 5

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Cartela 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Figura 4.11: Cartelas do jogo cartão mágico binário. [1]

Suponhamos, hipoteticamente, que o número escolhido por um determinado jogador, esteja nos cartões 1 e 6 destacados na Figura 4.12.

Cartela 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Cartela 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Figura 4.12: [1]

Como o número escolhido se encontra nas cartelas 1 e 6, então $a = 1 + 32 = 33$.

4.0.4 Jogo dos Cartões Mágicos - Teorema de Zeckendorf

Agora, de forma análoga ao ***Jogo dos Cartões Mágicos Binários*** propomos a realização do ***Jogo dos Cartões Mágicos - Teorema de Zeckendorf***.

Considerando os números que tenham em sua composição os termos F_2 a F_6. Assim, teremos 7 cartelas onde o primeiro número de cada uma será respectivamente igual a 1, 2, 3, 5 e 8. De acordo com o ***Teorema de Zeckendorf***, não haverá o mesmo número em cartelas subsequentes, então o maior valor atribuído nas cartelas será igual a $8{+}3{+}1 = 12$.

Desta forma, na figura 4.13 podemos verificar os números presentes em cada cartela.

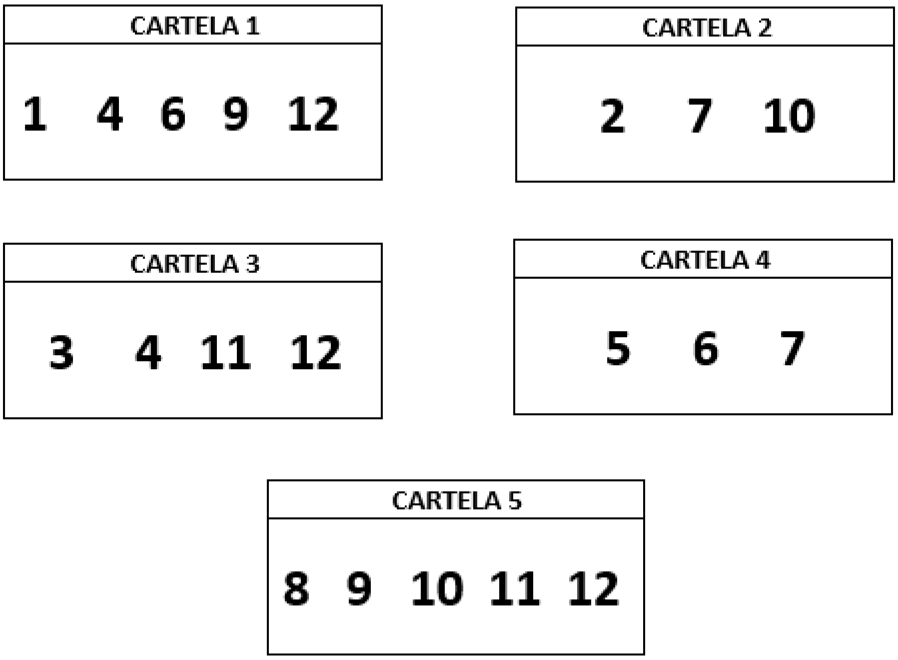

Figura 4.13: Produzido pelo autor.

Note que, na cartela 1 da figura 4.13 há exatamente os números $1 = F_2$, $4 = F_4 + F_2$, $6 = F_5 + F_2$, $9 = F_6 + F_2$ e $12 = F_6 + F_4 + F_2$ que possuem $F_2 = 1$ em sua composição.

Em [8], os autores sugerem a confecção das cartelas como da figura 4.14.A composição dos números das cartelas terá como base a representação dos números inteiros positivos de acordo com o Teorema de Zeckendorf, tomando os termos de F_2 a F_{11}, o que promove a confecção de dez cartelas.

Na Figura 4.15 apresentamos as cartelas onde aparece o número 100. Note que os primeiros termos desses cartões são os números $3, 8$ e 89, cuja soma resulta em $100 = 3 + 8 + 89$.

Os jogos dos cartões Mágicos apresentados são uma ferramenta lúdica de grande importância pois, apesar de ser uma brincadeira, o resultado está fundamentado em resultados matemáticos pouco explorados no ambiente escolar.

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125
130	133	138	143	146	151
154	159	164	172	175	180
185	188	193	198	201	206

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122
126	127	134	135	139	140

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130
141	142	143	149	150	151

8	9	10	11	12	29
30	31	32	33	42	43
44	45	46	63	64	65
66	67	84	85	86	87
88	97	98	99	100	101
118	119	120	121	122	131
132	133	134	135	152	153

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139
140	141	142	143	157	158

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125
126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137
138	139	140	141	142	143

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200
201	202	203	204	205	206

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124
125	126	127	128	129	130

Figura 4.14: [8]

4.0.5 Transformação entre os Sistemas de Numeração

Geralmente, os livros do Ensino Fundamental, mais especificadamente do quinto e sexto anos, trazem em seu conteúdo, histórias sobre os diversos sistemas de numeração utilizados pelo Homem ao longo do desenvolvimento da humanidade.

Uma vez que os diversos sistemas de representação dos números são apresentados aos alunos, orientamos a execução de atividades que envolvam a representação de um mesmo número utilizando diversos sistemas. Como há uma variedade de símbolos é interessante que estes sejam disponibilizados aos alunos, mesmo porque o objetivo compreende apenas no conhecimento de tais sistemas e não em seu pleno domínio.

Cabe ao docente propor a realização de atividades envolvendo o completamento de tabelas como a apresentada na Figura 4.16, onde o número de cada linha é representado por um determinado sistema de numeração, e então, pede-se ao aluno que complete a tabela utilizando os sistemas de numeração indicados nas colunas.

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122
126	127	134	135	139	140

8	9	10	11	12	29
30	31	32	33	42	43
44	45	46	63	64	65
66	67	84	85	86	87
88	97	98	99	100	101
118	119	120	121	122	131
132	133	134	135	152	153

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124
125	126	127	128	129	130

Figura 4.15: [8]

Indo-arábico	Egípcio	Romano	Zeckendorf
			$(1001)_F$
		IX	
13			
			

Figura 4.16: Fonte: Produzido pelo autor.

Na figura 4.17 encontra-se a resposta da tarefa sugerida na figura 4.16. Note que para representar o número $(205)_{10}$ seguindo o critério de *Zeckendorf*, devemos verificar inicialmente se o número 205 corresponde a um termo da Sequência de Fibonacci, caso contrário devemos verificar qual o termo da sequência que se aproxima desse valor. Ao que refere-se ao número 205, temos que $F_{13} = 233$ e $F_{12} = 144$. Assim, o número 205 será composto por termos da sequência entre F_2 e F_{12}, inclusive. Como $F_{10} = 55$, e $144 + 55 = 199$, devemos somar mais 6 para obtermos 205, e $6 = F_5 + F2$. Portanto, $205 = 144 + 55 + 5 + 1 = F_{12} + F_{10} + F5 + F2 = (10100001001)_F$.

4.0.6 Jogo Dominó

O jogo de dominó é composto por 28 peças cujas peças são pares de combinação que variam de (0,0) à (6,6). É possível que até 4 pessoas participem de uma jogada, onde cada um recebe 7 peças. Inicia o jogo aquele que possuir a maior combinação dupla, ou carretão. Caso haja apenas 2 jogadores, cada um também recebe 7 peças e as demais ficam disponíveis para compra. Os jogadores devem encaixar as peças de modo que as extremidades que se encostam sejam semelhantes. Vence aquele que primeiro dispor todas

Indo-arábico	Egípcio	Romano	Zeckendorf
7	IIIIIII	XII	$(1001)_F$
9	IIIIIIIII	IX	$(10001)_F$
13	∩ III	XIII	$(100000)_F$
205	𓍢𓍢 IIIII	CCV	$(10100001001)_F$

Figura 4.17: Fonte: Produzido pelo autor.

suas peças na sequência de peas da mesa. Na Figura 4.18 temos a representação das peças compostas por um jogo cujos números são representados no sistema de numeração romano e decimal.

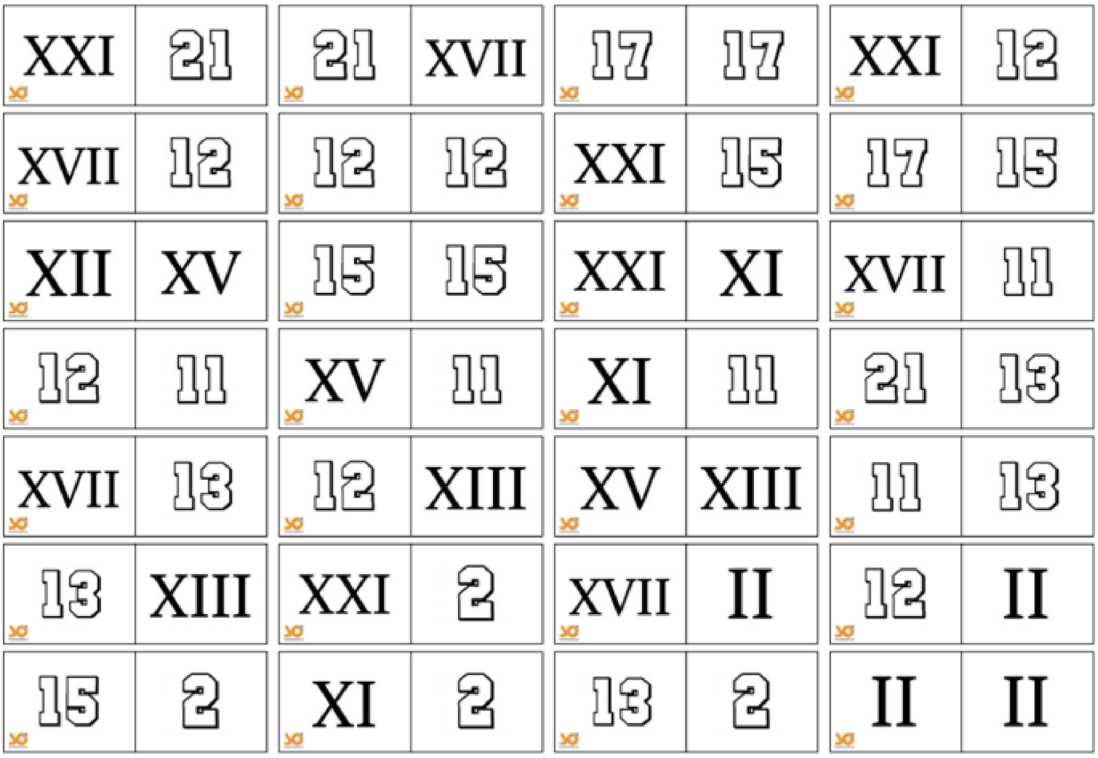

Figura 4.18: Fonte: [10]

Analogamente, desde que o discente conheça a representação dos números inteiros postivos utilizando o critério definido por *Zeckendorf*, sugerimos a realização do tipo dominó, porém com os valores das peças variando de 1 à 7, e escritos segundo o critério do *Teorema de Zeckendorf.* Nas Figuras 4.19, 4.20 e 4.21 temos o molde de representação das peças desse dominó.

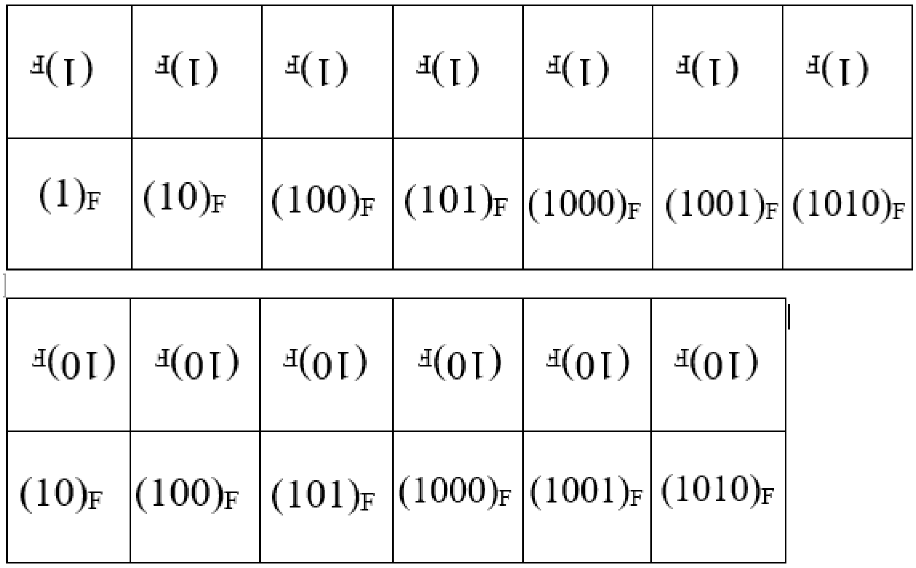

Figura 4.19: Fonte: Produzido pelo autor.

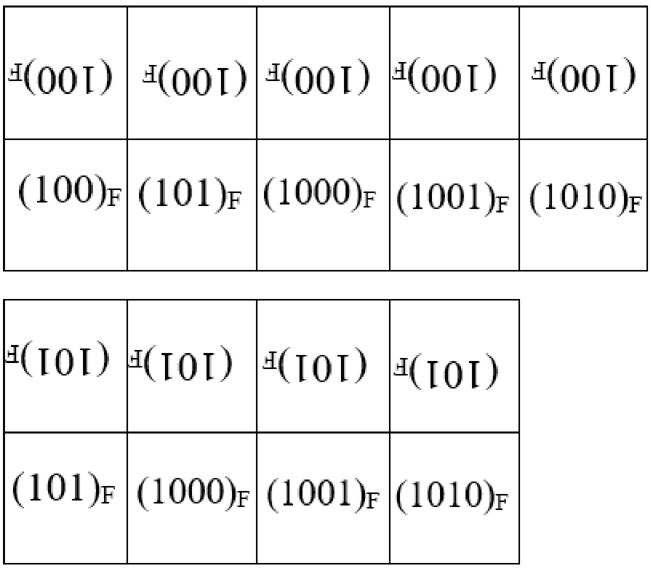

Figura 4.20: Fonte: Produzido pelo autor.

Segundo [2], cabe ao professor elaborar atividades que proporcionem a prática do aluno em relação aos sistemas de numeração estudados. É importante propor atividades pertinentes ao nível escolar dos discentes.

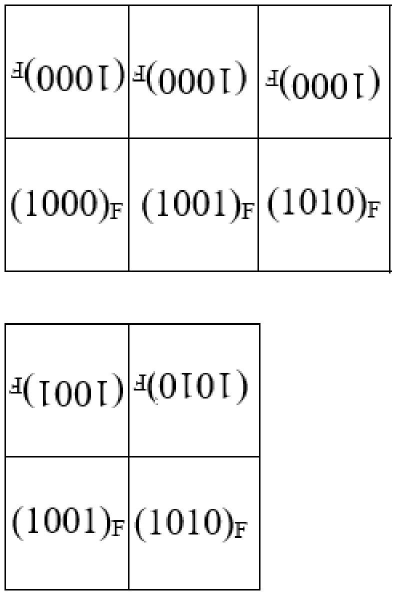

Figura 4.21: Fonte: Produzido pelo autor.

Conclusão e/ ou Trabalhos Futuros

Ao iniciarmos o estudo tínhamos expectativas de que nos surpreenderíamos com o resultado das pesquisas realizadas para a consolidação desse trabalho. De fato, foi o que aconteceu, pois percebemos o quão é valioso a busca pelo conhecimento. Notamos possibilidades de aperfeiçoar o fazer pedagógico propondo atividades que promovam a descoberta de resultados matemáticos, e assim levando os estudantes a perceberem como pode ser empolgante o trabalho de um pesquisador.

No capítulo 1, percebemos que a sequência oriunda de um problema hipotético envolvendo a reprodução de coelhos, mais tarde chamada de Sequência de Fibonacci, possui resultados que vão muito além do que a mente humana possa imaginar. Muito tempo antes de ser enunciada, o número áureo, resultado obtido considerando a razão de termos não consecutivos da Sequência de Fibonacci, já era utilizado por artistas, arquitetos e construtores em suas obras. E, surpreendentemente, quando olhamos ao nosso redor, facilmente nos deparamos com situações que remetem aos termos da Sequência de Fibonacci. Talvez sejam essas regularidades que tenham motivado muitos pensadores procurarem respostas acerca da relação entre a Terra (sua composição e os seres que nela habitam) e a Matemática.

No capítulo 2, realizamos uma breve abordagem sobre o desenvolvimento da representação dos números pela humanidade. Os resultados revelam que desde seu surgimento o Homem tem buscado mecanismos de contagem. Quando o Homem primitivo passou da condição nômade para a sedentária, intensificou-se a necessidade de contar e registrar quantidades. O interessante é a revelação de que os povos inventaram mecanismos de contagem peculiares a cada região. No entanto, todos os sistemas apresentados possuiam uma característica comum, o conceito de base numérica. É interessante ao docente explorar no âmbito escolar a história dos números e apresentar concomitantemente o teorema de bases numéricas. Acreditamos que essa abordagem possibilitará ao aluno a percepção de que a representação dos números inteiros positivos não é limitada ao sistema de numeração decimal.

Já no capítulo 3, coroamos nosso estudo quando relacionamos a representação dos números inteiros positivos com os termos da Sequência de Fibonacci. Mais uma vez nos surpreendemos com essa sequência. Essa curiosidade levou o matemático alemão Zeckendorf a demonstrar e publicar o teorema que relaciona a representação dos números inteiros positivos com os termos da Sequência de Fibonacci, mais conhecido como *Teorema de Zeckendorf* . Impressionantemente, o teorema revela que todo número inteiro positivo pode ser escrito, de forma única, como soma de termos distintos e não consecutivos da Sequência de Fibonacci.

Finalizando, no Capítulo 4, sugerimos a realização de algumas atividades envolvendo o representação dos números inteiros positivos utilizando diversas bases e, inclusive, o *Teorema de Zeckendorf*. Explicamos, sucintamente, o método de realização dos jogos *nunca dez* e *nunca dois*, porém gostaríamos que o docente apresente atividades além daquilo que propomos, ou seja, expandindo para a realização do jogo *nunca quatro*, *nunca cinco*, *nunca doze*, *nunca sessenta*, dentre outros, de forma que os estudantes, de acordo com o nível escolar, compreendam que a representação dos números inteiros positivos não é limitada ao sistema decimal.

O jogo da cartas envolvendo o sistema binário e o *Teorema de Zeckendorf*, também apresentam-se como uma alternativa de trabalhar de forma lúdica a representação dos números inteiros positivos, bem como o jogo de dominó onde os algarismos de 1 à 7 são representados segundo o critério definido por *Zeckendorf*.

Por parecer tão simples e ao mesmo tempo mostrar-se fascinante, estamos certos da necessidade do professor traçar estratégias pedagógicas investigativas, levando o estudante a identificar Matemática em todo lugar e talvez venha a se interessar mais pelo estudo dessa ciência.

O teorema de Zeckendorf se revela como uma proposta didática diferente do que comumente é apresentado na escola. Esperamos que nosso texto possa auxiliar o docente na composição de suas aulas bem como na sua formação a respeito da representação dos números inteiros positivos.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida. V. L. de. Matemática em sala de aula: uma proposta lúdica usando a resolução de problema. Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional. Maceió, 2017.

[2] Bittar, Marilena. Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental / Marilena Bittar, José Luiz Magalhães de Freitas. - 2 ed. - Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2005.

[3] Cerioli, Márcia R. Números de Fibonacci e representação de números inteiros positivos. Revista RPM 53. Disponível em: $https://www.rpm.org.br/cdrpm/53/6.htm$. Acesso em: 12 dez. 2021.

[4] IFRAH, G. História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. [S.l.]: Nova Fronteira, 1997.

[5] Fibonacci Bases and Other Ways of Representing Numbers. Disponível em: $http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibrep.htmlCALC3$. Acesso em 17 ago. 2021.

[6] Fibonacci na natureza. In: Pinterest. 2021. Disponível em: $https://br.pinterest.com/pin/626633735659763494/visual-search/?x = 10y = 10w = 544h = 363cropSource = 6$. Acesso em 11 nov. 2021.

[7] Frazão, Dilva. Biografia de Leonardo Fibonacci, 2017. Disponível em: $https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci$. Acesso em: 12 jun. 2021.

[8] Freitas, O. M. de;Dias, L. D.; Filho, D. C. de M. Termo Geral da Sequência de Fibonacci e os Incríveis Cartões Mágicos. II Encontro de Educação Ciência e Tecnologia. UEPB - Campina Grande, PB. 26 a 28 de março de 2018.

[9] Hefez, A. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[10] Jogo dominó. In: Só Matemática. Gerador de dominó para imprimir. Disponível em $https : //www.somatematica.com.br/softOnline/GeradorDominos/geraDomino.php$. Acesso em 11 nov. 2021.

[11] Leonardo Fibonacci. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: $https : //pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci$. Acesso em:08 jan. 2021.

[12] Leonardo Fibonacci. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: $https : //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a5/Leonardo_Fibonacci _Estatua.JPG$. Acesso em 08 jan. 2021.

[13] Matemática Planetária. Leonardo da Vinci e o Retângulo Áureo, 2009. Disponível em: http://matematicadaelenise.blogspot.com/2009/10/leonardo-da-vinci-e-o-retangulo-aureo.html. Acesso em: 22 ago.2021.

[14] O'Connor, J.J.; Robertson, E.F. e Phillips, G.M.Biografia: Èdouard Zeckendorf. Escola de Matemática e Estatística da Universidade de St. Andrews, Escócia, 2012. Disponível em: mathshistory-st–andrews-ac-uk.translate.goog/Biographies/Zeckendorf/?$_{xt}r_sl = en_{xt}r_tl = pt_{xt}r_hl = pt - BR_{xt}r_pto = nui, sc.Acessoem07out.$2021.

[15] Palomares, A. M. B.Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Tópicos de História da Matemática. Seminários de PMA5631, 2020. Disponível em: sites.icmc.usp.br/wvlnunes/pma5631/1.o$_seminario.pdf.Acessoem : 12jun$2021.

[16] Rebelo, Diana. Diário de Notícias. Polinésios usavam números binários antes da sua invenção, 2013. Disponível em: https://www.dn.pt/ciencia/polinesios-usavam-numeros-binarios-antes-da-sua-invencao-3592682.html. Acesso em: 15 set. 2021.

[17] Relógio Big Ben. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons /a/a6/Big$_{B}en_{C}lock_{F}ace.jpg.Acessoem : 20set.$2021.

[18] Rocha, Katiuce Fernandes. Bases numéricas não usuais: Um breve estudo, 2019. Dourados, MS.

[19] Silva, R. L. A Sequência de Fibonacci e o número de ouro: Contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB. Programa de Mestrado em Matemática - PROFMAT, 2015. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao$_{R}EGINALDO_{L}EONCIO_{S}ILVA.pdf.$ $Acessoem : 28set.$2021.

[20] Steffenon, R.; Guarnieri, F. Belos Problemas de Matemática: Indução e contagem. Sociedade Brasileira de Matemática. 2016.

[21] Santos, A.F. Sistemas de Numeração Posicionais e Não Posicionais. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Campus de São José do Rio Preto. 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122212/ 000809246.pdf?sequence=1isAllowed=y. Acesso em 12 set. 2021.