

# INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT

AUGUSTO RIBEIRO DE ALMEIDA

## **A Matemática das Imagens Digitais: uma abordagem para o Ensino de Matrizes na Educação Básica**

São Paulo/SP  
2021

Augusto Ribeiro de Almeida

## **A Matemática das Imagens Digitais: uma abordagem para o Ensino de Matrizes na Educação Básica**

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Aparecido Magrini

São Paulo/SP  
2021

A ficha catalográfica será fornecida pela biblioteca



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO  
DIRETORIA GERAL/CAMPUS SAO PAULO  
Câmpus São Paulo, (11) 2763-7520, Rua Pedro Vicente, 625, CEP 01109-010, São Paulo (SP)

## ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Dissertação intitulada "A Matemática das Imagens Digitais: uma abordagem para a Educação Básica" apresentada pelo aluno **Augusto Ribeiro de Almeida** (SP3021114) do Curso **MESTRADO PROFISSIONAL DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT** (Câmpus São Paulo). Os trabalhos foram iniciados às **16:00** pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença	Aprovação/Conceito (quando exigido)
<b>Luciano Aparecido Magrini</b> (Orientador)	IFSP	Presente	Aprovado
<b>Amari Goulart</b> (Examinador Interno)	IFSP	Presente	Aprovado
<b>Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni</b> (Examinadora Interna)	IFSP	Presente	Aprovado
<b>Ivair Fernandes de Amorim</b> (Examinador Interno)	IFSP	Presente	Aprovado
<b>Marta Cilene Gadotti</b> (Examinador Externo)	UNESP	Presente	Aprovado
<b>Henrique Marins de Carvalho</b> (Suplente Interno)	IFSP	Presente	--
<b>Juliana Cestari Lacerda</b> (Suplente Externo)	INPE	Ausente	--

### Observações:

Banca à Distância, realizada em 02/12/2021, utilizando a Plataforma Zoom na defesa do referido aluno de Pós Graduação. O Presidente da banca assinou este documento por todos os demais (conforme Instrução Normativa PRP 02/2020). Os pareceres dos membros avaliadores da banca foram anexados a este documento e todas as correções/sugestões indicadas serão incorporadas à versão final do texto a ser depositado respeitando-se o tempo legalmente estabelecido pelos documentos internos do IFSP. O título do trabalho será alterado para "A Matemática das Imagens Digitais: uma Abordagem para o Ensino de Matrizes na Educação Básica" (sugestão da banca).

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à arguição do candidato. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

Aprovado

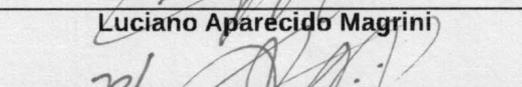
Reprovado

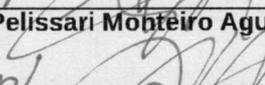
Nota (quando exigido): \_\_\_\_\_

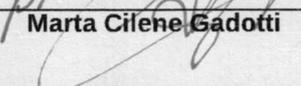
Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

SÃO PAULO / SP, 02/12/2021

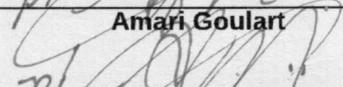
  
\_\_\_\_\_  
**Luciano Aparecido Magrini**

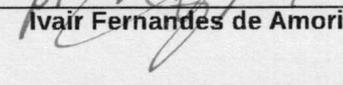
  
\_\_\_\_\_  
**Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni**

  
\_\_\_\_\_  
**Marta Cilene Gadotti**

  
\_\_\_\_\_  
**Juliana Cestari Lacerda**

  
\_\_\_\_\_  
**Amari Goulart**

  
\_\_\_\_\_  
**Ivair Fernandes de Amorim**

  
\_\_\_\_\_  
**Henrique Marins de Carvalho**

*Este trabalho é dedicado aos meus pais que  
me apoiam em todas os desafios que enfrento.*

# Agradecimentos

Agradeço ...

... primeiramente a Deus e demais forças não materiais, que me dão forças para continuar lutando mesmo com as adversidades.

... aos meus pais e minhas irmãs, que estiveram comigo durante o desenvolvimento desse trabalho, respeitando minhas limitações de tempo para fins de estudos.

... ao meu orientador Professor Doutor Luciano Aparecido Magrini, que foi fundamental para meu ingresso e permanência no curso, se tornando um verdadeiro pai acadêmico.

... à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), ao PROFMAT e ao IFSP, que permitem através dessa parceria que os professores da Educação Básica tenham acesso a uma formação de qualidade com o programa de mestrado.

... aos professores do IFSP ligados ao PROFMAT.

... à banca examinadora, pela disponibilidade de tempo para avaliar e acrescentar na pesquisa.

... ao Eduardo que sempre se mostrou disponível para revisar os aspectos gramaticais e ortográficos dos resumos e os artigos intermediários que resultaram na dissertação.

... a Gabriela e a Rosana, que ouviram minhas diversas lamentações no decorrer do processo de escrita.

... aos meus amigos de trabalho Andreia, Rogério, Maria Helena, Elaine, Mirian e Márcio Aranha, que me apoiaram nas situações mais complicadas. Junto a isso acrescento toda a equipe de profissionais da EMEFM Antônio Alves Veríssimo, que acreditam que a escola é sim um ambiente de transformação.

... aos colegas do programa que acreditam no trabalho coletivo para que todos consigam atingir a linha de chegada. Destacando aos colegas da turma de 2018 que sempre foram atenciosos, mesmo eu não sendo integrante da turma inicial.

... a todos que cederam imagens autorais para o trabalho, por acreditarem em meu trabalho e na Educação. Dentre eles: Amanda Teixeira, Atila Ramos, Danilo Mendes, Elaine Borbas, Gabriela Sena, Maria Helena Barros, Mariana Hora, Mariana Baroni, Marina Gabriel, Priscila Santos, Rafael Azevedo, Renata Rodrigues, Renata Santos, Rogerio Ishii, Roseli Orbolato, Tamires Fontoura, Wallace Nascimento e Wesley.

... aos meus alunos, que são essenciais para que eu continue acreditando na Educação como ferramenta de transformação.

*“Você não pode ensinar as pessoas  
tudo o que elas precisam saber.  
O máximo que você pode fazer é  
situá-las onde elas possam encontrar  
o que elas precisam saber  
e quando elas precisam saber.”*

Seymour Papert

# RESUMO

Com a universalização das tecnologias digitais diversas práticas docentes tradicionais no ensino da Matemática têm sido modificadas e aperfeiçoadas. Com as alterações em documentos oficiais, cada vez mais faz-se necessário que os professores incorporem essas tecnologias no dia a dia da sala de aula. Neste trabalho propomos algumas possibilidades de atividades para o ensino de matrizes considerando o uso da tecnologia e seus recursos com o intuito de modificar a prática docente geralmente observada. Para isso realizamos uma revisão bibliográfica sobre processamento digital de imagens e sobre tecnologias digitais em contextos educacionais. Como resultado apresentamos sugestões de atividades para diferentes ciclos escolares com o cuidado de oferecer ao leitor todos os detalhes necessários para que se possa reproduzir o que é apresentado sem a necessidade de uma formação específica em tecnologia.

**Palavras-chave:** Imagens Digitais. Tecnologias. Matrizes. Ensino de Matemática.

# ABSTRACT

With the universalization of digital technologies several traditional teaching practices on Mathematics teaching have been modified and improved. With the changes in official documents, it is necessary for teachers to incorporate these technologies into the daily routine of the classroom. In this work, we proposed some possibilities of activities for teaching matrices considering the use of technology and its resources in order to modify the teaching practice generally observed. For this, we carried out a literature review on digital image processing and digital technologies in educational contexts. As result, we present suggestions for activities for different school levels, taking care to offer the reader all the necessary details so that they can reproduce what is presented without the need for specific training in technology.

**Keywords:** Digital Images, Technologies, Matrices, Mathematical Teaching

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Fotografias transmitidas entre Londres e Nova Iorque, nos anos de 1920 e 1929, respectivamente. . . . .	22
Figura 2 – Imagem do solo lunar capturado em 1964. . . . .	23
Figura 3 – Exemplo do processo de aquisição de uma imagem digital . . . . .	24
Figura 4 – Exemplo de imagem ampliada até a identificação dos pixels . . . . .	25
Figura 5 – Detalhes de uma imagem armazenada no <i>Windows 10</i> . . . . .	26
Figura 6 – Imagem com diferentes dimensões. . . . .	27
Figura 7 – Imagem $5 \times 5$ na escala P/B . . . . .	29
Figura 8 – Imagem convertida para escala P/B . . . . .	30
Figura 9 – Imagens com os <i>bits</i> variando entre 8 e 2 . . . . .	31
Figura 10 – Esquema exemplificando a escala RGB . . . . .	32
Figura 11 – Imagem com os canais separados. . . . .	32
Figura 12 – Gráfico de ponto cruz . . . . .	34
Figura 13 – Imagens geradas pelas matrizes A, B e C, respectivamente . . . . .	36
Figura 14 – Imagens geradas pela soma de A+B, por truncamento e normalização. . . . .	37
Figura 15 – Soma de imagens por truncamento e normalização. . . . .	38
Figura 16 – Uma imagem e a suas variações do processo de normalização de brilho. . . . .	39
Figura 17 – Uma imagem e a sua variação de normalização de brilho. . . . .	39
Figura 18 – Subtração de imagens por truncamento e normalização. . . . .	40
Figura 19 – Imagem original e sua transposta. . . . .	40
Figura 20 – Relação entre matrizes e tecnologias no livro didático. . . . .	48
Figura 21 – Malha para construção de imagens dadas as coordenadas. . . . .	50
Figura 22 – Figura a ser gerada após preenchimento dos quadrados da atividade. . . . .	50

# Lista de tabelas

Tabela 1 – As dimensões das imagens e os tamanhos dos arquivos . . . . .	28
Tabela 2 – Pontos para construção da imagem na malha quadriculada. . . . .	50

# Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CMY	Ciano, magenta e amarelo
CMYK	Ciano, magenta, amarelo e preto
CNMAC	Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ERE	Ensino remoto emergencial
ERMAC-MS	Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GIMP	<i>GNU Image Manipulation Program</i>
HSV	Matiz, saturação e valor
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
NASA	Administração Nacional Aeronáutica e Espacial
OC	Objetos de conhecimento
P/B	Preto e branco
PDI	Processamento Digital de Imagens
PNA	Política Nacional de Alfabetização
PPP	Projeto Político Pedagógico
ProInfo	Programa Nacional de Tecnologia Educacional
PRONINFE	Programa Nacional de Informática Educativa
RGB	Vermelho, verde e azul

SME-SP Secretaria Municipal de Educação de São Paulo

TIC Tecnologias da informação e comunicação

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES: MATRIZES E OPERAÇÕES</b>	<b>18</b>
2.1	Matrizes e suas operações básicas	18
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS</b>	<b>21</b>
3.1	Breve histórico	21
3.2	O processo de discretização do contínuo	23
3.3	As resoluções de uma imagem	26
3.3.1	Dimensão e resolução espacial de uma imagem	26
3.3.2	Resolução de Intensidade	28
3.3.2.1	Escala Preto e Branco	28
3.3.2.2	Escala Cinza	30
3.3.2.3	Escala RGB	30
3.3.2.4	Outras escalas de cores	33
<b>4</b>	<b>OPERAÇÕES MATRICIAIS E IMAGENS</b>	<b>35</b>
4.1	Adição de matrizes	35
4.2	Outras operações matriciais	38
<b>5</b>	<b>ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>41</b>
5.1	Documentos oficiais e as TIC	43
5.1.1	Os <i>softwares</i> utilizados na construção das atividades	45
<b>6</b>	<b>PROPOSTAS DIDÁTICAS COM IMAGENS DIGITAIS</b>	<b>48</b>
6.1	Aplicação no Ensino Fundamental II	49
6.2	Aplicação no Ensino Médio	51
6.3	Aplicação na Educação de Jovens e Adultos	55
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Não é de hoje que pesquisadores em Ensino de Matemática estudam sobre a relação de tecnologias no ensino da disciplina. Entretanto com a implementação do ensino remoto e do ensino híbrido, associados aos novos documentos oficiais da Educação fizeram com que essas discussões se acentuassem em virtude da pandemia do COVID-19, uma vez que os professores tiveram que migrar para o ensino remoto. Dessa forma, o uso da tecnologia aumentaram consideravelmente, assim como soluções para uma aprendizagem significativa em virtude dessa nova organização escolar.

Nos tópicos de Matemática ensinados na Educação Básica, as Matrizes entrariam facilmente nos conteúdos em que os alunos questionam “Onde vou usar isso?”, mesmo tendo grande aplicabilidade no processamento de imagens digitais e em edição de fotos. Assim, é visto no ensino de matrizes uma possibilidade de trabalho dentro da escola, de forma que tecnologia e currículo estejam alinhados.

Com isso esse trabalho tem como objetivo principal indicar ferramentas ao professor de matemática da Educação Básica para trabalhar com Processamento Digital de Imagens dentro do Ensino de Matrizes. Para conseguir alcançar o objetivo listado são necessários alguns processos intermediários, que podem ser resumidos em alguns objetivos secundários: apresentar uma formalização dos conceitos que relacionam Imagens e Matemática; relacionar as operações matriciais e o processamento de imagens digitais; apresentar possibilidades de trabalho relacionando Imagens e Matrizes dentro da Educação Básica; e indicar o leitor o passo a passo para repetir os processos descritos no decorrer do texto.

A pesquisa tem em sua estrutura uma revisão bibliográfica dos temas, acompanhada de algumas possibilidades de intervenção dentro da Educação Básica. No que se refere ao processamento de imagens o texto tem como base as obras de Gonzales e Woods (2010), Marques Filho e Vieira Neto (1999) e Scuri (1999). Na parte de tecnologias no ensino temos como referências Almeida (2009), Cupani (2016), Nunes (2020) e Papert (1980), além de Fiorentini e Lorenzato (2012) para relacionar as diversas áreas.

No levantamento de referencial teórico foram identificadas cinco dissertações já

defendidas no programa do PROFMAT que relacionam Matemática e Imagens Digitais. Cada um com seus objetivos próprios e suas particularidades, mas apenas dois apresentavam sugestões de atividades para ser aplicadas efetivamente dentro da sala de aula da Educação Básica. Porém, nenhuma delas exemplificava os processos, de modo que alguém sem conhecimento técnico consiga reproduzir os resultados descritos no trabalho.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos:

No Capítulo (2) são apresentados alguns conceitos preliminares de Matrizes e suas operações, que são pré requisitos para compreensão do restante do trabalho.

No Capítulo (3) são apresentados alguns tópicos sobre processamento digital de imagens, situando como é realizada a aquisição de uma imagem do mundo real para formato digital. No capítulo também são apresentados conceitos básicos de imagens que possuem uma estrutura matricial (*bitmaps*), as resoluções desse tipo de imagem e algumas escalas de cores.

No Capítulo (4) são feitas conexões com os conteúdos dos dois capítulos anteriores, mostrando como as operações matriciais podem ser utilizadas no processamento de imagens digitais, em especial nos programas de tratamento de imagens.

No Capítulo (5) são realizadas algumas reflexões sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação no contexto da Educação Matemática, destacando o aumento das discussões relacionando o tema por conta do Ensino Remoto.

No Capítulo (6) são propostas algumas atividades que relacionam Imagens Digitais e Matemática, para serem aplicadas dentro da Educação Básica em diferentes ciclos, respeitando a faixa etária e currículo de cada grupo.

Nos Apêndices são apresentados, em detalhes, os passos para que o leitor possa reproduzir as diversas manipulações de imagens realizadas ao longo do texto.

Ao longo da pesquisa realizada obtivemos retornos positivos da comunidade acadêmica com a publicação de um resumo no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), de um resumo expandido no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC-MS) e de um artigo completo na Revista Eletrônica Paulista de Matemática. Sendo que os resumos estão apresentados nos Anexos deste trabalho e o artigo está listado nas Referências.

## Capítulo 2

# Conceitos preliminares: Matrizes e operações

Antes da discussão sobre os conceitos básicos de processamento digital de imagens e sua relação com as matrizes, faz-se necessário uma revisão sobre o conceito de matrizes e algumas propriedades que serão abordadas no decorrer deste trabalho. Para isso nosso referencial base são as obras de Anton e Rorres (2012) e Iezzi e Hazzan (2013).

### 2.1 Matrizes e suas operações básicas

**Definição 1.** *Dados dois números,  $m$  e  $n$ , naturais e não nulos, chama-se matriz  $m$  por  $n$  (indica-se  $m \times n$ ) toda tabela  $A$  formada por números reais distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.*

Cada elemento da matriz  $A$  é indicado como  $a_{ij}$ , onde o índice  $i$  indica em qual linha da matriz o elemento está e o índice  $j$  indica a coluna, sendo que a contagem de linhas ocorre de cima para baixo e a contagem de colunas ocorre da esquerda para a direita. Assim, podemos representar a matriz  $A$  como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tratamos como elemento genérico de uma matriz o elemento  $a_{ij}$  tal que  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . É comum escrever simplesmente  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

**Definição 2.** *Duas matrizes  $A$  e  $B$  são iguais quando  $a_{ij} = b_{ij}$ , para todo  $a_{ij}$  pertencente a  $A$  e para todo  $b_{ij}$  pertencente a  $B$ .*

**Definição 3.** *Chama-se de **matriz nula** toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero. Sua notação pode ser feita por  $0$ .*

**Definição 4.** Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , chama-se **transposta de A** a matriz  $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$  tal que  $a'_{ji} = a_{ij}$  para todo  $i$  e para todo  $j$ . Isso significa que, por exemplo,  $a'_{11}, a'_{21}, a'_{31}, \dots, a'_{n1}$  são respectivamente iguais a  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ ; vale dizer que a 1ª coluna de  $A^t$  é igual à 1ª linha de  $A$ . Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de  $A^t$  são ordenadamente iguais às linhas de  $A$ .

**Definição 5.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes de mesma dimensão, então a **soma**  $A + B$  gera uma matriz  $C$ , onde  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

**Exemplo 1.** Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , temos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 3+2 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

A adição entre matrizes admite quatro propriedades básicas. Considerando  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes de mesma dimensão, são válidas as seguintes propriedades:

- Associativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
- Comutativa:  $A + B = B + A$ .
- Tem elemento neutro: Existe um  $M_0$  tal que  $A + M_0 = A$ , sendo que  $M_0$  tem a mesma dimensão que a matriz  $A$ .
- Toda matriz admite uma matriz oposta, isto é, existe uma matriz  $A'$ , tal que  $A + A' = M_0$ .

**Definição 6.** Chama-se de **matriz oposta** de  $A$ , a matriz que somada a  $A$  resulta na matriz nula. Sua notação é  $-A$ .

**Definição 7.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes de mesmo tamanho, então a **diferença**  $A - B$  é a soma de  $A$  com  $-B$ .

**Exemplo 2.** Tomemos as mesmas matrizes do Exemplo (1), vamos calcular  $A - B$ :

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-3 & 2-1 \\ 3-2 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Definição 8.** Dado um número real  $k$  e uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , chama-se **produto  $kA$  (produto de um escalar com uma matriz)** a matriz  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  tal que  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  e para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

**Exemplo 3.** Seja uma matriz  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0,5 \end{pmatrix}$  e um escalar  $k = 3$ .

Temos que o produto  $k \cdot C = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -3 & 12 & 1,5 \end{pmatrix}$ .

O produto de um escalar por uma matriz também admite algumas propriedades. Considerando que  $a$  e  $b$  são números reais e  $A$  e  $B$  são matrizes de mesma dimensão, temos que:

- $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$
- $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- $1 \cdot A = A$

## Capítulo 3

# Elementos de processamento digital de imagens

O objetivo desse trabalho é indicar ferramentas ao professor de matemática da Educação Básica para trabalhar com Processamento Digital de Imagens (PDI) dentro do Ensino de Matrizes. Para isso, neste capítulo trazemos alguns conceitos básicos para compreender o PDI.

Para tanto, entende-se que “o campo do processamento digital de imagens se refere ao processamento de imagens digitais por um computador digital” (GONZALES; WOODS, 2010, p.1). É aceitável dizer que a imagem digital tem em sua composição um número finito de elementos, associados a uma localização e valores específicos. Entretanto, existem divergências sobre o que cabe ou não a área de PDI, como nos é apresentado por Gonzales e Woods (2010):

Não existe um acordo geral entre os autores em relação ao ponto em que o processamento de imagens termina e outras áreas relacionadas, como a análise de imagens e a visão computacional, começam. Algumas vezes, uma distinção é traçada definindo o processamento de imagens como uma disciplina na qual tanto a entrada quanto a saída de um processo são imagens. (p.1)

Dessa forma, no escopo deste trabalho, será tratado como PDI o tratamento de imagens digitais feito em computadores ou outros dispositivos digitais.

### 3.1 Breve histórico

Não é de hoje que o ser humano tem a necessidade de registrar ideias, momentos e fatos em imagens. Ainda no Período Paleolítico já existiam os registros de acontecimentos através de gravuras nas paredes. Segundo Justamand *et al.* (2017), esse processo de captura e registro de imagens através das pinturas rupestres serviam para transmitir e depositar informações. Com o avanço da tecnologia e o surgimento das primeiras câmeras analógicas,

o processo de captura de imagens se tornou mais sofisticado, criando imagens cada vez mais próximas da realidade. Mas foi a pouco mais de cem anos atrás que as imagens começaram a ter algum tratamento digital.

Segundo Gonzales e Woods (2010), no início da década de 1920 ocorreu uma transmissão de imagem entre duas empresas de jornalismo, via cabeamento marinho. Mcfarlane (1972) reforça que foi possível diminuir para pouco mais de três horas uma troca de imagens que gastavam-se semanas. Entretanto o resultado obtido nesse processo não tinha uma boa qualidade. Para isso foi necessária uma revisão nos processos de impressão e distribuição dos níveis de intensidade da figura. Passado pouco menos de uma década das primeiras transmissões, as imagens já conseguiam ter até 15 tons de cinza. É possível verificar a mudança na qualidade das imagens na Figura 1.

Figura 1 – Fotografias transmitidas entre Londres e Nova Iorque, nos anos de 1920 e 1929, respectivamente.



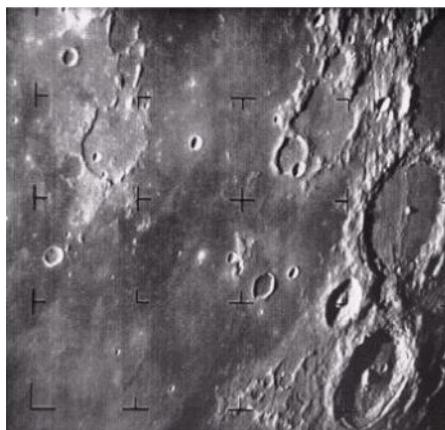
Fonte: Mcfarlane (1972).

Gonzales e Woods (2010) reforçam que, apesar da transmissão ocorrer com imagens digitais, tais processos não estavam ligados ao processamento de imagens digitais, pois não envolviam computadores (onde temos as funções de armazenamento de dados, visualização e transmissão).

Os primeiros processamentos de imagens de forma digital, ocorreram na década de 1960, em meio a Guerra Fria. Para isso foi necessário a utilização de computadores com alta capacidade de processamento para a época. Em 1964, com transformações que alteravam os realces da imagem, a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) conseguiu capturar e transmitir uma foto de solo lunar, como apresentado na Figura (2).

Paralelo a Corrida Espacial, o PDI começou a ser utilizado em diversas outras áreas. Como Marques Filho e Vieira Neto (1999) esclarecem, na Medicina o PDI serviu para os diagnósticos médicos que contavam com o auxílio de equipamentos mais eficientes e com imagens laboratoriais ainda mais detalhadas. Os autores destacam que na Biologia, as imagens microscópicas obtidas puderam ser analisadas de forma mais rápida e eficiente. Já

Figura 2 – Imagem do solo lunar capturado em 1964.



Fonte: NASA (2021).

na Geografia e Meteorologia, as imagens obtidas por satélites tiveram diversas aplicações. O PDI também foi utilizado pelas áreas de Arqueologia, Astronomia, Segurança e Publicidade.

Conforme apresentado, o PDI tem impacto direto nas mais diversas áreas do conhecimento. Nas Seções seguintes apresentaremos alguns conceitos básicos necessários para entender a estrutura básica de uma imagem digital.

## 3.2 O processo de discretização do contínuo

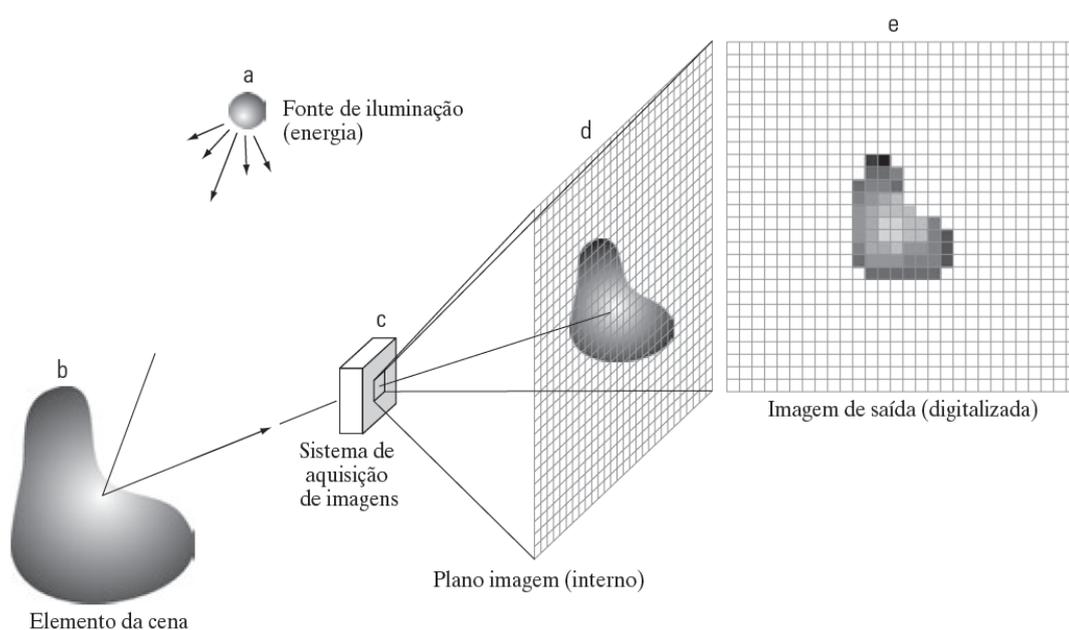
Ao olhar para qualquer paisagem é possível identificar inicialmente três pontos importantes: (i) ela possui 3 dimensões (3D), ou seja, possui largura, altura e profundidade; (ii) uma quantidade imensa de cores e tons possíveis de serem enxergados e; (iii) o que compõe o cenário possui detalhes até microscópicos, ou seja, algo contínuo, sem espaços vagos.

Quando esse cenário é capturado e transformado em algo digital, parte das informações existentes no real são perdidas, já que, segundo Costa e Cesar Jr (2001), como os computadores trabalham com informações discretas é necessário que as imagens também se tornem objetos discretos, para assim passar por qualquer procedimento computacional, inclusive armazenamento de informação. No processo de discretização da imagem o aparelho que está sendo usado (câmera, *scanner*, etc.) influencia diretamente no resultado da imagem digital, no qual não detalharemos neste trabalho tendo em vista que nosso objetivo é a compreensão básica do PDI, e não um estudo aprofundado sobre fotografia digital. Entretanto, em todos esses meios de captura de imagens alguns fatores devem ser considerados. Costa e Cesar Jr (2001) indicam que as resoluções máximas da imagem, a dimensão da imagem, o formato de saída e os controle de recursos do aparelho são essenciais para definir quão próxima das imagens reais a figura digital será.

No processo de captura de imagem existem várias formas dela ser processada, porém neste texto o foco é a aquisição de imagem através de sensores matriciais, já que esse é o predominante em câmeras digitais e celulares. Para esse processo são dispostos sensores eletromagnéticos na forma matricial, conforme apresentado por Gonzales e Woods (2010). Como a distribuição dos sensores ocorre de forma matricial, os sinais recebidos são organizados de forma bidimensional, fazendo com que “a imagem completa pode ser obtida projetando o padrão de energia na superfície da matriz”. (GONZALES e WOODS, 2010, p. 32)

De um modo simples, o processo pode ser representado no esquema indicado na Figura 3.

Figura 3 – Exemplo do processo de aquisição de uma imagem digital



Fonte: Gonzales e Woods, 2010, p. 32.

Com o processo realizado, é gerada uma figura digital estruturada em uma malha quadriculada (conforme a etapa *e* da Figura 3). Durante a captura da imagem, que pode durar de centésimos de segundos a minutos, duas etapas são bem importantes: a amostragem e a quantização.

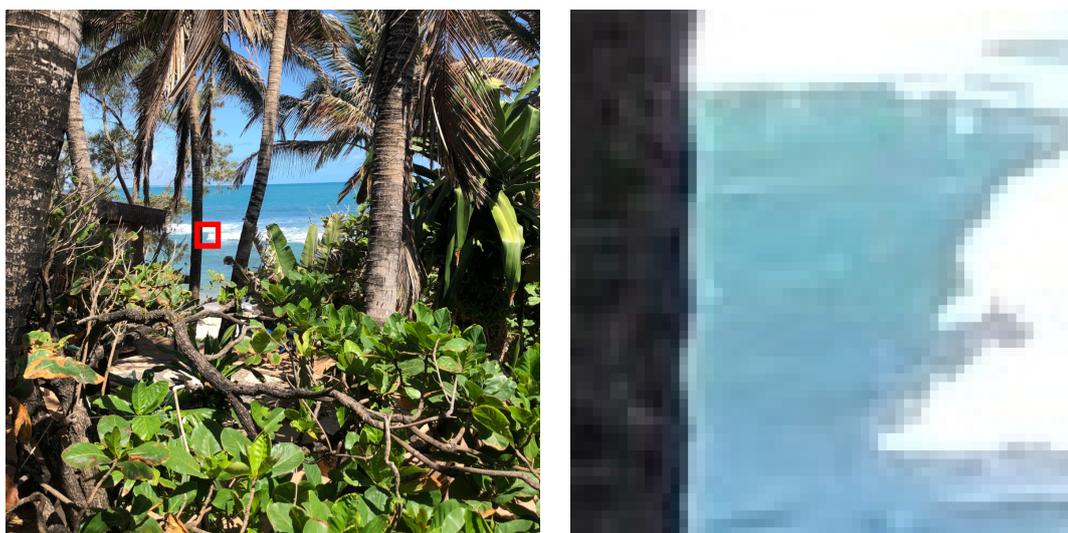
Segundo Marques Filho e Vieira Neto (1999) e Gonzales e Woods (2010) a amostragem é o processo de transformar a imagem que está sendo capturada em uma matriz  $A_{m \times n}$ , com  $m$  e  $n$  sendo números naturais, onde cada elemento  $a_{i,j} \in A$  é associado a um número natural (ou um conjunto de números naturais) que representa uma cor ou tonalidade. Em outras palavras, podemos escrever uma imagem digital como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A discretização determina qual a amplitude da variação de valores que os elementos  $a_{i,j}$  podem assumir, na prática indica a quantidade de tons possíveis em uma imagem. O processo de discretização será melhor detalhado na Subseção 3.3.2. Cabe aqui uma nota, pois dentro do contexto das matrizes, normalmente os índices dos elementos variam entre 1 e  $m$  e, 1 e  $n$ . Quando utilizamos o conceito de matrizes para imagens digitais é usual que a contagem dos índices se inicie no zero, conforme a Expressão Matemática (3.1).

A imagem gerada através da captura na forma matricial é chamada de *bitmap* e foi realizada de forma computacional pela primeira vez por Russel Kirsch no *National Institute of Standards and Technology*, em 1957. Utilizando uma malha quadriculada, Russel reproduziu de forma digital uma fotografia de seu filho, conforme apresentado por Falcão (2019). Com o avanço a tecnologia nos dispositivos de captura de imagens, os resultados obtidos estão cada vez com mais detalhes, ficando mais próximo da imagem real. Mas ao dar um *zoom* em uma imagem ainda podemos ver que o resultado do processo são imagens formadas por uma malha quadriculada colorida <sup>1</sup>.

Figura 4 – Exemplo de imagem ampliada até a identificação dos pixels



Fonte: Renata Rodrigues dos Santos (imagem original cedida ao autor).

Na Figura 4 vemos isso de forma mais clara: no lado esquerdo temos uma fotografia capturada com um celular. A figura foi ampliada na região em vermelho, como

<sup>1</sup> Para melhor visualização do processo sugerimos não utilizar o visualizador de imagens nativo do *Windows*.

resultado temos o recorte do lado direito, onde podemos ver o tronco da árvore e a água do mar montados em quadrados coloridos.

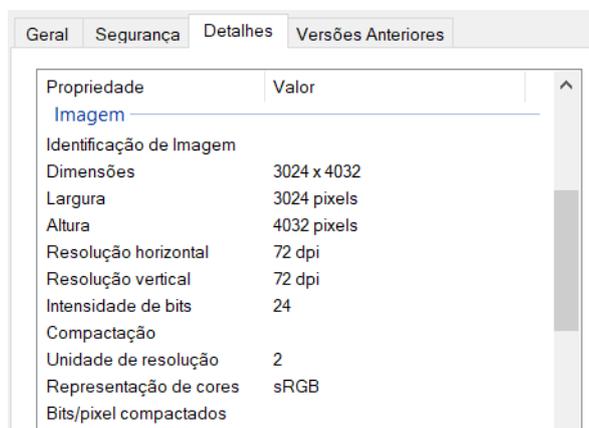
Cada um dos elementos da matriz da Expressão Matemática (3.1) ou cada um dos pequenos quadrados apresentados na Figura 4 recebe o nome de *pixel*. Então, uma imagem do tipo *bitmap* é a combinação de uma quantidade limitada de *pixels*, conforme Gonzales e Woods (2010) esclarecem.

Quando falamos de imagens digitais existem variados tipos de imagens. Para desenvolvimento deste trabalho usaremos apenas as imagens do tipo *bitmap* (com extensão do tipo *.bmp*, *.jpg*, *.png*, etc). As definições apresentadas no decorrer do texto são válidas dentro do contexto do grupo de imagens matriciais.

### 3.3 As resoluções de uma imagem

Dada uma imagem digital, seja em um celular ou em um computador, é possível verificar algumas propriedades dela, como suas dimensões, suas resoluções e até sistema de cor utilizado. Essas informações são essenciais para saber quão próximo da realidade as cores e os detalhes são. Na Figura 5 temos o exemplo dos detalhes de uma das figuras utilizadas no trabalho.

Figura 5 – Detalhes de uma imagem armazenada no *Windows 10*.



Fonte: O autor.

Nas Subseções a seguir, será detalhado cada item listado na imagem.

#### 3.3.1 Dimensão e resolução espacial de uma imagem

São chamadas de dimensões de uma imagem, ou, popularmente de resolução de uma imagem, as dimensões da matriz que representa a imagem discretizada.

Já a resolução espacial é “a medida do menor detalhe discernível em uma imagem” (GONZALES e WOODS, 2010, p. 38). Essa medida relaciona a quantidade

de *pixels* que a imagem gerada tem, com o tamanho da imagem real no dispositivo. Scuri (2002) indica que essa relação é normalmente medida por pontos por polegada ou dpi (*dots per inch*). Ele ainda esclarece que esse valor pode ser relacionado com a pergunta “Dado o tamanho da imagem (em cm, in, etc...), quantos valores discretos vão ser tomados?” (SCURI, 2002, p. 21) e ela pode ser respondida pela equação:

$$\text{número de pixels} = \text{resolução} \times \text{tamanho real} \quad (3.2)$$

Quando é feita a associação da dimensão e a resolução espacial da imagem no processo de captura de uma foto, temos uma imagem com mais detalhes. Na medida em que algum desses valores são reduzidos, a imagem resultante perde a qualidade de detalhes. Isso é justificável já que em uma imagem de dimensão pequena, existem menos espaços para inserir detalhes na figura digital, e em uma imagem de baixa resolução espacial poucos detalhes são registrados na captura. Na Figura 6 conseguimos identificar os detalhes que foram perdidos conforme a dimensão da imagem era diminuída.

Figura 6 – Imagem com diferentes dimensões.



Imagens com dimensões  $899 \times 1186$ ,  $270 \times 356$ ,  $81 \times 107$  e  $24 \times 32$ , respectivamente. Fonte: Elaine Borbas (imagem original cedida ao autor).

Para repetir o processo de redimensionamento da imagem apresentado na Figura (6) é possível consultar o Apêndice (??), no final do trabalho.

Conforme visto, para uma imagem com mais detalhes precisamos de mais *pixels*. E quanto mais *pixels* uma imagem possui, mais espaço de armazenamento ela necessita, já que para cada pixel o computador necessita armazenar um número.

Tomando como base a Figura 6, com quatro quadros de dimensões diferentes, podemos ver na Tabela 1 como o espaço necessário para armazenamento diminui significativamente conforme a imagem tem uma dimensão menor.

Dessa forma, é necessário achar um equilíbrio entre tamanho do arquivo e detalhes da imagem, de acordo com a necessidade de cada um.

Tabela 1 – As dimensões das imagens e os tamanhos dos arquivos

Posição da Figura	Dimensão	Espaço de armazenamento
1	$899 \times 1186$	365 kB
2	$270 \times 356$	65 kB
3	$81 \times 107$	11 kB
4	$24 \times 32$	3 kB

Fonte: Produzida pelo autor.

### 3.3.2 Resolução de Intensidade

A resolução de intensidade é a “menor variação discernível de nível de intensidade na imagem” (GONZALES e WOODS, 2010, p. 39). Em modo mais simples, a resolução de intensidade é o número que determina a variação de tons possíveis dentro de uma imagem. Essa quantidade de tons possíveis também está associada ao sistema de cor utilizado na imagem.

Conforme citado por Gonzales e Woods (2010) e Costa e Cesar Jr. (2001), normalmente o número de níveis de intensidade uma imagem é definido da forma  $2^k$ , com  $k$  sendo um número natural e sua unidade é em *bits*. Assim podemos dizer que uma imagem com 8 *bits* de resolução de intensidade possui  $2^8 = 256$  níveis ou tons de cores. O processo de definir a quantidade de níveis que uma imagem tem é chamado quantização; no exemplo dado no parágrafo podemos dizer que a imagem foi quantizada em 256 níveis.

A resolução de intensidade tem ligação direta com o sistema de cores utilizado na captura de alguma imagem, dessa forma, para melhor visualização dos conceitos envolvidos, será tratada a influência dos níveis de intensidade em diferentes escalas de cores.

#### 3.3.2.1 Escala Preto e Branco

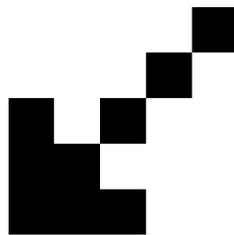
Uma imagem criada no sistema de cores preto e branco (P/B) possui todos seus *pixels* preenchidos com preto ou sem preenchimento (em branco). Quando relacionamos as cores com a matriz  $A$  geradora da imagem, temos que cada elemento  $a_{i,j}$  é tomado fixo igual 1 se o *pixel* relacionado for preto e tomado igual a 0 se o *pixel* for branco. Em algumas referências é apresentado o oposto, onde o 1 representa o branco; cabe reforçar que tal proposta também está correta se analisada da proposta de uma imagem monocromática de 1 *bit* ao invés de uma imagem P/B.

Dessa forma, dado a matriz apresentada na Equação (3.3), temos como sua representação na escala P/B a Figura (7). Caso o leitor tenha interesse em construir uma

imagem como a realizada abaixo, indicamos a leitura do Apêndice (??).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Figura 7 – Imagem  $5 \times 5$  na escala P/B



Fonte: O autor.

É possível observar que neste caso a escala de cores tem 1 nível de intensidade, ou seja,  $2^1 = 2$  cores disponíveis para preencher os *pixels* que compõem a figura. No caso listado temos uma figura com poucas possibilidades de detalhes, devido às dimensões da matriz original. Já na Figura 8, temos à esquerda uma imagem com dimensões  $1140 \times 1140$  colorida e à direita uma reprodução da imagem em P/B. Era comum obter resultados parecidos ao utilizar máquinas fotocopadoras antigas, que possuíam apenas uma cor

Para repetir o processo apresentado na Figura 8 basta seguir os passos apresentados no Apêndice ??.

Figura 8 – Imagem convertida para escala P/B



Fonte: Maria Helena Barros (imagem original cedida ao autor).

### 3.3.2.2 Escala Cinza

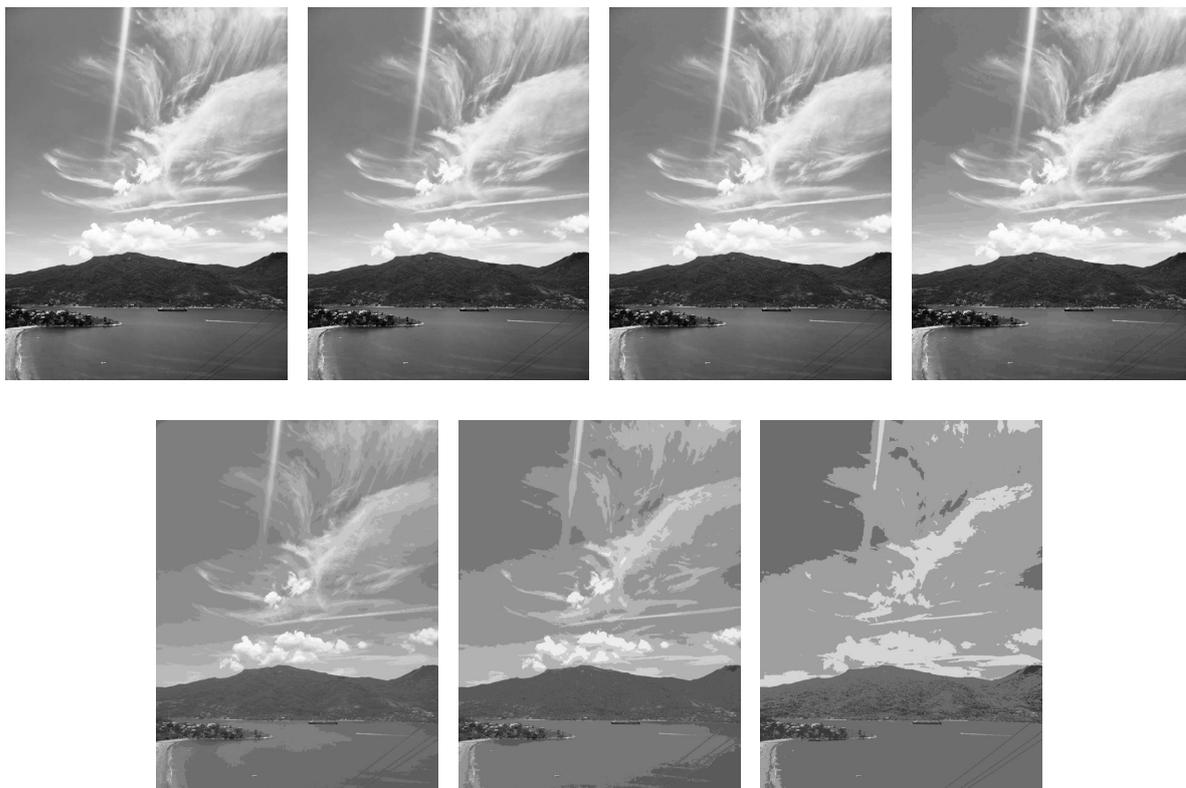
Uma imagem em escala cinza possui seus *pixels* variando entre o branco e preto, passando por vários tons de cinza que são determinados pela resolução de intensidade determinada na imagem. Em um sistema de cores de 8 *bits* em escala cinza o preto é representado pelo número 0, já o branco pelo número 255, e os demais números são as 254 tonalidades de cinza que a imagem pode ter.

No caso da escala cinza, uma imagem gerada com 8 *bits* de resolução costuma ser suficientes para que o resultado possa ser visualizado com bastante detalhes e sem deixar a imagem bloqueada, já que a quantidade maior de tons permite uma suavização na transição de elementos de uma imagem. Rosenfeld e Kak (1982) reforça que uma imagem deve ter uma quantização de, no mínimo, 100 níveis para que a imagem não crie falsos contornos causados pela pouca variação de tonalidades.

No quadro montado na Figura 9 é exibida uma imagem em escala cinza de 8 *bits* de resolução de intensidade (na linha superior, à esquerda). Em seguida são apresentadas cópias da mesma imagem com indexação em 7, 6, 5, 4, 3 e 2 *bits*. É possível notar da 3<sup>a</sup> para a 4<sup>a</sup> imagem que o céu vai perdendo a fluidez na transição de tons, corroborando com a ideia de Rosenfeld e Kak (1982) em relação a quantidade de níveis de intensidade necessários.

### 3.3.2.3 Escala RGB

É comum que em algum momento do Ensino Fundamental os professores expliquem que o azul, o vermelho e o amarelo são consideradas cores primárias e que elas

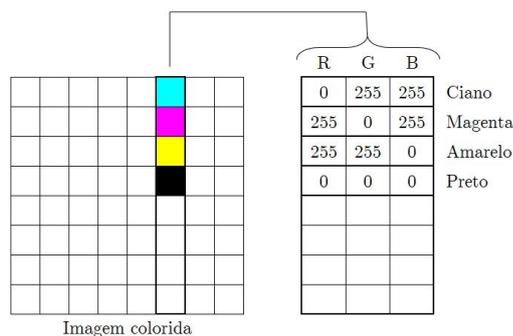
Figura 9 – Imagens com os *bits* variando entre 8 e 2

Fonte: Gabriela de Souza Sena (imagem original cedida ao autor).

formam as outras cores, como o verde, o laranja e o roxo. Mota (2017) esclarece que isso se deve porque na construção de desenhos nessa etapa escolar são utilizados tintas e lápis, que pertencem ao grupo de iluminados, ou seja, “absorvem parte da luz que sobre eles incide e refletem ou transmitem (no caso de serem transparentes) a restante” (MOTA, 2017, p. 2).

Quando cita-se uma imagem digital, gerada em computadores e celulares, o tratamento é diferente, já que eles são objetos que emitem luz. Como consequência disso o sistema de cores utilizado tem uma outra terna de cores como as primárias. Costa e Cesar Jr. (2001) esclarecem que para a composição de uma imagem colorida é necessário a combinação de uma terna cores-luz: vermelho, verde e azul, no inglês *red, green, blue* (abreviando temos RGB). Com isso, uma imagem colorida pode ser escrita como uma matriz onde cada entrada possui uma terna de números naturais, sendo que a primeira entrada apresenta os níveis de intensidade do vermelho na figura, a segunda entrada mostra os níveis de verde e a terceira entrada indica os níveis de azul. A cada uma das três cores utilizadas também denominamos de canais.

Figura 10 – Esquema exemplificando a escala RGB



Fonte: Almeida e Magrini, 2021, no prelo. Adaptado de Gonzales e Woods (2010).

Conforme o esquema apresentado na Figura 10, é possível observar que cada pixel é representado por uma terna ordenada. É comum se utilizar 256 níveis de intensidade para cada uma das entradas. Por conta disso, em uma imagem de 8 *bits* são exibidas até  $256^3 = 16.777.216$  cores ou tons diferentes. Isso é muito importante, já que “o sistema de visão humano é muito mais sensível às variações de cores do que às variações dos níveis de cinza” (COSTA; CESAR JR., 2001, p. 203).

Na Figura 11 é exibido um esquema com uma imagem original e a divisão dela nos três canais do RGB. Para cada uma das três cores existe uma matriz associada. Tomando a quarta placa para análise, é verificável que na imagem original ela possui muito azul com alguns detalhes em verde, no canal do vermelho a parte equivalente a quarta placa está quase totalmente preto, mostrando que naqueles *pixels* foram utilizados tons de azul e verde, e pouco vermelho.

Figura 11 – Imagem com os canais separados.



Fonte: Renata Rodrigues dos Santos (imagem original cedida ao autor).

Caso o leitor tenha interesse em fazer a divisão de canais conforme apresentado, sugerimos consultar o Apêndice (??).

### 3.3.2.4 Outras escalas de cores

#### CMY e CMYK

Conforme já apresentado, as cores se comportam de forma diferente se são iluminadas ou emissoras de luz. Quando a imagem digital vai ser impressa em um dispositivo de impressão comum, ela passa por uma transformação digital para que suas cores digitais sejam transformadas em cores que podem ser formadas com as tintas de cores ciano, magenta e amarelo (do inglês *cyan*, *magenta*, *yellow* – CMY).

Em teoria a terna de cores CMY deveria ser suficiente para produzir todas as cores impressas, mas, segundo Gonzales e Woods (2010), nesse processo o preto produzido possui uma tonalidade turva, e como o preto é a cor mais utilizada nas impressões surgiu a necessidade de adicionar o preto na escala, ficando ciano, magenta, amarelo e preto (do inglês *cyan*, *magenta*, *yellow*, *black* – CMYK). Esse tipo de impressão é conhecido como impressão a quatro cores.

#### HSV

Esse modelo de cor é dividido em matiz, saturação e valor (*hue*, *saturation*, *value* - HSV) da cor em uma imagem. Nele a matiz define a cor, a saturação determina a pureza da cor e o valor determina o nível de brilho, sendo o brilho igual a zero quando queremos representar o preto.

#### Outros padrões de cores

Apesar de toda a formulação teórica utilizada na construção de uma imagem do tipo *bitmap*, a ideia da relação entre cores, números e quadrados a serem preenchidos é comum no meio de pessoas ligados ao artesanato. Quando abrimos uma revista de bordado do tipo “ponto em cruz”, por exemplo, nos deparamos com imagens montadas em uma malha quadriculada que tentam detalhar um objeto ou imagem (algo parecido com a discretização da imagem digital). Cada revista adota uma escala de cor já conhecida no meio, na escala cada tonalidade de linha é associada a um número natural, e as cores (de linha) a serem utilizadas para construir o bordado são apresentadas na legenda da imagem da revista.

Para os mais jovens o conceito de construção de imagens já se expandiu para a utilização de cubos de cores sólidas através do jogo digital *Minecraft*. Lançado em 2009, o jogo consiste em utilizar blocos coloridos e construir um mundo para que o jogador possa se aventurar. Na página oficial do jogo ele é apresentado como:

Um jogo sobre montar blocos e sair em aventuras. Ele se passa em mundos infinitamente gerados de terreno aberto repleto de segredos, maravilhas e perigos! Não existe uma maneira única de jogar *Minecraft*. Ele é um jogo aberto onde os jogadores decidem por conta própria o que querem fazer! Mas nós oferecemos diversos modos: o Modo Criativo e o Modo Sobrevivência. (MOJANG, 2021)

Figura 12 – Gráfico de ponto cruz



Fonte: Revista Ponto de Cruz e Crochê - Nº 26. Disponível em <[http://www.artmanuais.com.br/revistas/arquivo.pdf/PC\\_croche.n26.pdf](http://www.artmanuais.com.br/revistas/arquivo.pdf/PC_croche.n26.pdf)>. Acesso em 02/07/2021.

Com a popularização do jogo entre os mais jovens e com o apoio da *Microsoft*, a Mojang (responsável pela criação do *Minecraft*) disponibilizou o *Minecraft Education Edition*<sup>2</sup>. A plataforma tem como proposta a aprendizagem baseada em jogos, com estímulos a criatividade, a colaboração e a solução de problemas.

Após a explicação sobre a estrutura básica de uma imagem digital na forma matricial, é natural que o leitor se questione se as operações que são trabalhadas dentro do universo de matrizes também funcionam dentro das imagens. Para isso, no próximo capítulo temos um detalhamento dessas operações no contexto digital e quais restrições esse conjunto assume.

<sup>2</sup> Disponível em: <<https://education.minecraft.net/pt-pt/homepage>>, acesso em: 14 set. 2021

## Capítulo 4

# Operações matriciais e imagens

Conforme apresentado no Capítulo (2), as matrizes possuem operações próprias que dependem de condições específicas para serem realizadas, por exemplo a adição entre duas matrizes só existe quando ambas possuem a mesma dimensão. Nas operações e exemplos a serem listados nesta Seção consideraremos que todos os requisitos para que a operação seja definida estão sendo cumpridos.

De acordo com o que foi exposto, uma imagem que usa escala RGB possui 3 canais de entrada enquanto uma monocromática possui apenas um. Para reduzir a quantidade de processos a serem realizados, os exemplos desta Seção serão realizados apenas com imagens monocromáticas, para realizar com uma imagem colorida basta repetir o processo em cada canal.

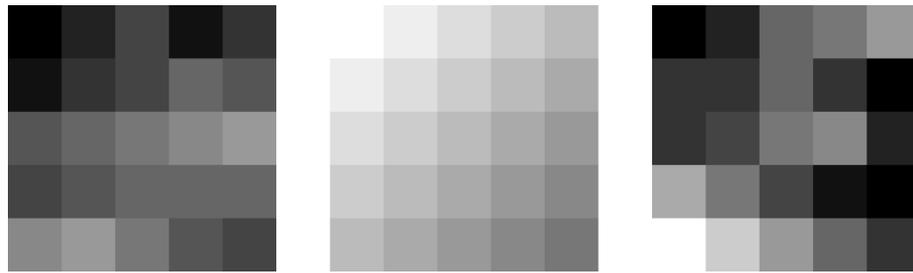
### 4.1 Adição de matrizes

Seja  $A_5$  o conjunto das matrizes quadradas de dimensão  $5 \times 5$ , onde cada matriz representa uma imagem indexada em 16 tons de cinza, ou seja, cada entrada numérica varia entre 0 e 15. Deste conjunto  $A_5$ , a título de exemplo, tomemos três matrizes A, B e C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 8 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 10 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Dentro do contexto no qual as matrizes estão inseridas, elas geram as seguintes imagens, respectivamente:

Figura 13 – Imagens geradas pelas matrizes A, B e C, respectivamente



Fonte: O autor.

Dentro de  $A_5$  as matrizes indicadas na Expressão Matemática estão bem definidas, entretanto, ao calcular a soma de duas dessas matrizes os valores de algumas entradas ultrapassam o limite permitido para  $a_{i,j}$ . Tomemos como exemplo  $A + B$ :

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 8 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 16 & 17 & 15 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 16 & 16 & 16 & 15 & 14 \\ 19 & 19 & 16 & 13 & 11 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

É possível observar que a matriz resultante não pertence ao conjunto  $A_5$ , já que alguns de seus elementos são superiores a 15. Dentro da perspectiva do PDI, ao trabalhar com representações matriciais é comum deparar com esse tipo de problema. Segundo Marques Filho e Vieira Neto (1999), podemos dividir esse tipo de problema em duas categorias: (i) *underflow*: que é quando as entrada assumem valores negativos (seria possível se calculássemos  $A - B$ ) e; (ii) *overflow*: que é quando as entradas assumem valores superiores ao permitido, que foi o que ocorreu na Equação (4.2).

Considerando uma matriz  $A$ , onde  $0 \leq a_{i,j} \leq L-1$  (ou seja, de  $L$  tons possíveis), os problemas de *underflow* e *overflow* podem ser resolvidos de dois modos básicos.

**Por truncamento:** quando  $a_{i,j} \leq 0$ , é feita a substituição de  $a_{i,j}$  por 0, assim, todos os números negativos assumem o valor zero. Já quando  $L-1 \leq a_{i,j}$ , são trocados os valores de  $a_{i,j}$  por  $L-1$ . Esse recurso é simples de ser efetuado, entretanto ele apresenta limitações técnicas, já que os truncamentos causaria uma grande quantidade de *pixels* pretos ou brancos na imagem, diminuindo os detalhes das imagem.

**Por normalização:** Nesse processo a ideia é fazer a equivalência proporcional de um intervalo em um intervalo que não cause problemas de *overflow* e *underflow*. Sejam  $a_{min}$  e  $a_{max}$  o menor e o maior elemento de  $A$ , respectivamente, de um conjunto que sofre de *overflow* ou *underflow*. Na normalização fazemos com que  $a_{min}$  vire 0 e  $a_{max}$  vire  $L-1$ . Considerando que  $a_{i,j}$  é um elemento da matriz que precisa ser normalizada e  $a'_{i,j}$  o

elemento normalizado, temos que:

$$a'_{i,j} = \frac{L - 1}{a_{max} - a_{min}} \cdot (a_{i,j} - a_{min}) \quad (4.3)$$

Diferente do processo de truncamento, na normalização todos os elementos devem ser normalizados, inclusive os que já pertencem ao intervalo  $[0, L - 1]$

Conforme referencial, as situações de *underflow* e *overflow* são utilizadas “para melhorar e aprofundar o contraste, para corrigir iluminação não homogênea, e para realizar calibração radiométrica” (JÄHNE, 2005, p. 257).

Tomando como base a matriz  $A + B$ , apresentada na Expressão Matemática (4.1), e aplicando o processo de truncamento e normalização, temos como resultado as matrizes:

$$A+B_{truncada} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 & 13 & 14 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 14 \\ 15 & 15 & 15 & 13 & 11 \end{bmatrix} \quad A+B_{normalizada} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 11 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 9 & 11 & 8 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 5 \\ 15 & 15 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

No processo de normalização é esperado que sucedam alguns problemas nos dados, pois no processo é comum que os valores resultantes sejam números racionais não inteiros. Com isso, é necessário estabelecer algum critério de arredondamento dos valores. No decorrer do trabalho, assim como na Expressão Matemática (4.4) os valores serão arredondados para o inteiro imediatamente anterior quando a parte decimal for menor do que 0,5, caso contrário o valor será arredondado para o próximo inteiro.

Para evidenciar a diferença da utilização do truncamento e da normalização das matrizes, podemos observar na Figura 14 que a imagem à esquerda (gerada pelo truncamento de  $A + B$ ) possui uma variação inferior de tons, se comparada a imagem à direita ( $A + B$  após normalização).

Figura 14 – Imagens geradas pela soma de  $A+B$ , por truncamento e normalização.



Fonte: O autor.

No processo da soma por truncamento e normalização é destacado através das Figura (15). Na parte superior temos duas imagens distintas (uma paisagem e uma

rampa em formato oval), já na parte inferior são apresentadas a soma dessas duas imagens utilizando o truncamento (à esquerda) e a normalização (à direita). Através da imagem gerada é possível observar que o resultado que utilizou o truncamento possui quantidade excessiva de exposição ao branco, isso se deve a quantidade de valores superiores a 255 que foi obtido na soma, enquanto isso na normalização, ainda que com menos detalhes, é possível identificar as duas imagens que a compõe.

Figura 15 – Soma de imagens por truncamento e normalização.



Fonte: Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni e Maria Helena Barros (imagens originais cedidas ao autor).

## 4.2 Outras operações matriciais

Além da soma entre duas matrizes o tratamento de imagens digitais também pode ser realizado através de outras operações matriciais. Com base em Marques Filho e Vieira Neto (1999), sejam  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $U$  matrizes de mesma ordem, sendo que todos elementos de  $U$  são iguais a 1, e  $\lambda \in \mathbb{R}$  um escalar real qualquer. Com isso é realizável a aplicação de três operações e verificação dos resultados em imagens monocromáticas.

**Soma de matriz com um escalar real:**  $X_1 + \lambda U = X_2$ . Como resultado dessa operação a imagem tem a normalização do seu brilho. Se  $\lambda > 0$  a imagem ganha

luminosidade, se  $\lambda < 0$  a imagem perde luminosidade e se  $\lambda = 0$  a imagem se mantém (já que  $X_1 = X_2$ ).

Figura 16 – Uma imagem e a suas variações do processo de normalização de brilho.



Considerando  $M$  como a matriz representante da imagem original, temos da esquerda para à direita as imagens geradas por:  $M - 100$ ,  $M - 50$ ,  $M$ ,  $M + 50$  e  $M + 100$ . Fonte: Amanda Teixeira (imagem original cedida ao autor).

Na Figura 16 é verificável como a soma de um escalar negativo escurece toda a imagem, enquanto o escalar positivo a esbranquiça.

**Produto de uma matriz com um escalar real:**  $\lambda \cdot X_1 = X_2$ . Essa operação é responsável pela calibração do brilho de uma imagem, conforme apresentado, “A calibração de brilho é um processo semelhante à normalização de brilho, mas que pode estar relacionado à adequação a diferentes valores de iluminância sobre uma mesma cena, por exemplo”(MARQUES FILHO; VIEIRA NETO, 1999, p. 30). De um modo menos formal, a calibração possibilita retirar o excesso ou a falta de exposição de luz, sem causar a sensação de névoa na imagem.

Figura 17 – Uma imagem e a sua variação de normalização de brilho.



Considerando  $M$  como a matriz representante da imagem original, temos da esquerda para à direita as imagens geradas por:  $0,25 \cdot M$ ,  $0,50 \cdot M$ ,  $M$ ,  $2 \cdot M$  e  $4 \cdot M$ . Fonte: Elaine Borbas (imagem original cedida ao autor).

**Subtração entre matrizes:**  $X_1 - X_2 = X_3$ . Essa operação é responsável pela detecção das diferenças entre duas imagens em relação às intensidades de cores presentes em cada uma delas. Dada as imagens originais apresentadas na Figura 15, vamos verificar a subtração entre elas, utilizando os processos de truncamento e normalização.

Figura 18 – Subtração de imagens por truncamento e normalização.



Fonte: Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni e Maria Helena Barros (imagens originais cedidas ao autor).

**Transposição de matrizes:** Essa operação faz com que a imagem sofra um espelhamento horizontal, seguido de uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti horário.

Figura 19 – Imagem original e sua transposta.



Fonte: Rafael dos Santos (imagens originais cedidas ao autor).

No próximo capítulo são apresentadas algumas discussões sobre a aplicação das tecnologias digitais dentro do contexto escolar. Essas discussões são essenciais para entender a capacidade de impacto de tais recursos dentro da Educação Básica. Além disso ele serve como ponto norteador para a construção de objetos de aprendizagem que auxiliem no ensino dos conteúdos apresentados neste capítulo.

## Capítulo 5

# Algumas reflexões sobre as tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática

Com a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e com as demandas que surgiram durante o ensino remoto emergencial (ERE) utilizado durante o período de pandemia mundial provocado pelo COVID-19, foi evidenciado a necessidade de que professores utilizassem as ferramentas digitais a favor do processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, não é recente a discussão da aplicação das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no Ensino de Matemática.

Para entender a relação das TIC na Educação, podemos verificar o conceito de tecnologia e como elas tem se relacionado com os seres humanos. Soffner (2013) e Cupani (2016) apresentam que todo recurso que aumenta as capacidades humanas pode ser classificado como tecnologia. Dessa forma, desde os instrumentos feitos por pedras e ossos utilizados na Pré-História até os óculos que utilizamos podem ser classificados como tecnologia. Ainda dentro das definições de tecnologia, elas podem ser identificadas em quatro tipos de manifestações: “como objetos, como um modo de conhecimento, como uma forma específica de atividade e como volição (isto é, como determinada atitude humana perante a realidade)” (CUPANI, 2016, p. 16).

No Ensino de Matemática as discussões efetivos sobre o uso de tecnologias para o ensino e a aprendizagem da matemática surgiu a partir dos anos de 1970. Como Fiorentini e Lorenzato (2012) apontam, a utilização de calculadoras e audiovisuais foram uns dos principais objetos de investigação da época. Fora do Brasil, Seymour Papert, Cynthia Solomon e Wally Feurzeig desenvolviam e lançavam um dos primeiros *softwares* educacionais de Geometria: o Logo, que ficou conhecido no Brasil como o jogo da tartaruga.

Cysneiros (2007) indica que após uma conversa com Jean Piaget, Papert

sentiu a necessidade de criação de uma ferramenta simples que possibilitasse os alunos trabalhar com a Matemática dentro do meio tecnológico. Com uma abordagem simples, o aplicativo permitia a exploração de linguagem de programação e conceitos de geometria plana. Almeida (2009) ainda reforça que, por conta da popularização do Logo, essa fase ficou conhecida como geração dos loguistas, e que o destaque estava principalmente no pensamento lógico matemático e a valorização da estrutura formal da Matemática.

Papert (1980) reforça que o modelo de ensino apresentado na época (e que segue sendo utilizado até hoje na maioria dos sistemas escolares) causava a matemafobia<sup>1</sup> nos estudantes, tanto pela necessidade de uma capacidade de abstração que exige uma maturidade psicológica, tanto pela rigidez do processo de ensino de matemática. Em seu texto é defendido a utilização de computadores como ferramenta para auxiliar na instrução dos alunos, tornando mais visual um processo que era apenas abstrato. É evidente que para aquele tempo a ideia de todas as escolas possuírem computadores equipados para fins pedagógicos ainda estava um pouco distante.

Durante o processo de uso das TIC dentro do Ensino de Matemática, observou-se que muitas das ferramentas que estavam sendo sugeridas para o uso educacional demandava de conhecimento técnico, dificultando o alcance dos professores da Educação Básica e dos estudantes. Por conta disso, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), foi necessário que o foco dos desenvolvedores e investigadores de tecnologia direcionassem o trabalho para ferramentas que pudessem ser utilizadas por alunos ou por professores, sem a necessidade de alguém com domínio técnico específico para utilizar o recurso.

Na década de 1990, com o avanço das tecnologias digitais e a possibilidade de aplicação de tais recursos na educação, surge uma nova terminologia: as TIC.

As TIC resultam da fusão das tecnologias de informação, antes referenciadas como informática, e as tecnologias de comunicação, denominadas anteriormente como telecomunicações e mídia eletrônica. Elas envolvem a aquisição, o armazenamento, o processamento e a distribuição da informação por meios eletrônicos e digitais, como rádio, televisão, telefone e computadores. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 45).

No Brasil o uso das TIC se tornou algo mais próximo da Educação Básica após a criação do Programa Nacional de Informática Educativa (PRONINFE) em 1994. Criado pelo Ministério de Educação e Desporto, o PRONINFE trazia como destaques a importância da formação continuada para professores e demais integrantes do ambiente escolar, o desenvolvimento de recursos digitais que pudessem ser utilizados de forma pedagógica, a criação ou melhoria de laboratórios de informática dentro das escolas e a relação das escolas de nível básico com as instituições de ensino superior (Brasil, 1994). Apesar das propostas serem relevantes, o documento não apresentava um plano de implementação dessas ideias.

<sup>1</sup> Fobia ou aversão aos conteúdos ligados à Matemática.

Em 2007, com a criação do Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo) pelo Ministério da Educação (MEC), o uso da informática dentro das escolas públicas do país se tornou algo mais próximo de se tornar real. Com vários pontos semelhantes aos que foram apresentados no PRONINFE, o ProInfo tinha como diferencial a indicação que as escolas que participassem do programa deveriam ter em seu Projeto Político Pedagógico (PPP) o uso das TIC, além disso, estipulavam a origem das verbas para implementação do programa, assim como a distribuição dos valores em seu Art. 5:

Art. 5º As despesas do ProInfo correrão à conta das dotações orçamentárias anualmente consignadas ao Ministério da Educação e ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE, devendo o Poder Executivo compatibilizar a seleção de cursos e programas com as dotações orçamentárias existentes, observados os limites de movimentação e empenho e de pagamento da programação orçamentária e financeira definidos pelo Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. (BRASIL, 2007).

Com o aumento de escolas equipadas com laboratórios de informática, a parte de pesquisa de uso das TIC dentro do contexto escolar se tornou mais frequente, já que a formação dos professores precisava ser reconsiderada, assim como a relação de desigualdade social e o acesso a esses recursos digitais. De acordo com Nunes (2020):

Discutir a temática “informática na educação” leva-nos a reflexão sobre questões como a implantação de computadores dentro das escolas, políticas públicas que visam à inclusão digital, como também o desenvolvimento alcançado pela utilização desse instrumento como um método pedagógico. Sendo que, ao analisar como se dá o processo de ensino/aprendizagem como a inserção da informática pelos alunos é importante também indagar quanto à preparação dos professores para lidar com novos métodos. (p.28)

Conforme apresentado, as discussões acerca das relações entre as TIC e o ensino de matemática não é algo recente, mas a situação pandêmica causada pelo COVID-19 e o ERE fizeram com que as reflexões pedagógicas e legais em relação ao tema se tornassem mais frequentes. Dessa forma, na Seção (5.1) são apresentados alguns pontos da parte legal desse tipo de abordagem dentro do ambiente escolar.

## 5.1 Documentos oficiais e as TIC

Com toda a discussão em torno das TIC na Educação, os currículos, os documentos legais e a BNCC tem dado destaque cada vez maior ao uso dessas ferramentas como motivadores do processo investigativo, assim como grande aliada para o processo de ensino e aprendizagem.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) já apresenta em seu texto alguns importantes destaques que servem de base para outros documentos legais. Em seu 32º artigo indica que é direito do aluno do Ensino Fundamental ter em sua formação

mecanismos que o auxiliem na compreensão de tecnologias (Brasil, 1996). Em seu 35º artigo, indica que uma das finalidades do Ensino Médio é a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos.

A BNCC segue o mesmo caminho que a LDB e apresenta como competências gerais da Educação Básica dois itens que reforçam o uso das tecnologias dentro do ambiente escolar. No item 2 aponta o papel desses recursos no processo investigativo e na resolução de problemas:

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2017, p. 9).

Já no 5º item da lista a BNCC reforça o uso das TIC como ferramenta para disseminação de informações e produção de conhecimento:

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017, p. 9).

Junto com os apontamentos da BNCC geral, ainda existem destaques para a área específica da Matemática. Na seção de Competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental é abordado de imediato dois itens que citam sobre a importância das TIC dentro da aula de Matemática:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

(...)

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2017, p. 267).

Tais orientações também tem se repetido dentro dos currículos estaduais e municipais. No Currículo de Matemática da Secretaria Municipal de Educação de São Paulo (SME-SP) é apresentada uma seção específica relacionando a disciplina com as tecnologias digitais. São Paulo (2019a) aponta que a construção do Currículo de Tecnologias para Aprendizagem foi realizada através de um diálogo entre as variadas áreas, em especial a Matemática.

Ainda dentro do currículo é exemplificado o que deve ser trabalhado dentro de cada faixa escolar:

Jogos e desafios digitais são indicados em todos os ciclos de aprendizagem<sup>2</sup> e estão contemplados nos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento. No Ciclo de Alfabetização, eles apontam para o uso de recursos digitais em situações de leitura e ditado de números, por exemplo. No Ciclo Interdisciplinar, indicam para a realização de tarefas em que os estudantes possam reconhecer figuras planas ou espaciais, além de desenhar figuras planas e observar algumas de suas características. Já no Ciclo Autoral, sugerem o uso de softwares/aplicativos para resolver equações, construir gráficos, entre outras tarefas. (SÃO PAULO, 2019a, p. 74)

Para efetivação do texto apresentado pela SME-SP existe um documento complementar ao currículo chamado de Orientações Didáticas para o Currículo. Nele é apresentado um tópico chamado Conexões Extramatemática, onde o professor é orientado de que forma é possível desenvolver uma relação entre TIC e Matemática. São Paulo (2019b) aponta que é com esse trabalho entre áreas que é possível uma compreensão mais completa da nosso mundo e possibilitar ao estudante uma Educação Integral.

Conforme apresentado, é cada vez mais necessário que o professor de Matemática tenha a TIC como sua aliada, pois é esperado que cada vez mais a inserção desses recursos na sala de aula. Com isso, no Capítulo 6 apresentamos algumas possibilidades de relacionar os conteúdos dos Capítulos 3 e 4 com as TIC. Entretanto, conforme já apresentado, para que o professor consiga propor esse trabalho de tecnologias e ensino é necessário que ele tenha acesso às ferramentas e que essas ferramentas tenha uma estrutura simples e acessível. Então, antes das atividades faz-se necessário apresentar a escolha dos *softwares* utilizados na construção das mesmas.

### 5.1.1 Os *softwares* utilizados na construção das atividades

Ao elaborar as atividades propostas no próximo capítulo, foram necessários alguns apontamentos para a escolha dos *softwares*, já que os professores necessitam de algo prático e eficiente. Para efetuar o levantamento dos aplicativos utilizamos de três critérios básicos para a escolha, que seguiam a seguinte prioridade:

**1º) Disponibilidade pela SME-SP<sup>3</sup>:** Dentro do contexto da pandemia do COVID-19, a rede municipal de educação de São Paulo fechou algumas parcerias com empresas de tecnologias, e isso se repetiu em diversas outras redes de ensino. Dentre as novas parcerias destacamos a *Microsoft*, tanto na questão de sistema operacional (*Windows*), quanto na questão de aplicativos de escritório (*Microsoft Office*), além dos programas nativos no próprio *Windows*, como calculadora, bloco de notas e *paint*. Outra parceira importante foi a *Google* com os aplicativos do *Google for Education*, com um pacote de aplicativos de escritório próprio, do *Google Sala de Aula* e do *drive*.

<sup>2</sup> A SME-SP segue uma organização estudantil dentro do Ensino Fundamental por ciclos, então, no documento apresentado entenderemos como Ciclo de Alfabetização do 1º ao 3º ano, como Ciclo Interdisciplinar do 4º ao 6º ano e como Ciclo Autoral do 7º ao 9º ano.

<sup>3</sup> A escolha pensando na SME-SP se deve ao autor pertencer ao quadro permanente de funcionários da rede.

**2º) Ser um *software* livre:** Excluindo os aplicativos englobados no primeiro item, os demais deveriam ser *softwares* livres, de forma que sua utilização não gere nenhum custo adicional ao usuário, além de possibilitar modificações em sua base. “Por software livre devemos entender aquele software que respeita a liberdade e senso de comunidade dos usuários. Grosso modo, isso significa que os usuários possuem a liberdade de executar, copiar, distribuir, estudar, mudar e melhorar o software” (GNU, 2021)<sup>4</sup>.

**3º) Não exigir equipamentos de alto desempenho:** É comum que dentro das escolas de Educação Básica a sala de informática seja equipada com aparelhos com uma memória interna e capacidade de processamento mais reduzidos. Assim, a capacidade do *software* funcionar em computadores básicos se tornou nosso terceiro critério.

Respeitando os critérios elencados, alguns aplicativos foram definidos para serem utilizados nas atividades.

***Paint:*** *Software* nativo no sistema *Windows*, é um dos mais básicos editores de imagem. Ele possui uma interface simples e intuitiva, facilitando o trabalho até com aqueles que possuem pouco domínio de computadores. Apesar de sua facilidade, sua utilização não é recomendada para visualizar as imagens criadas nas atividades, pois ele não apresenta uma quantidade significativa de *plugins* para visualizar as imagens, em especial aquelas com poucos *pixels*.

**Bloco de notas:** Outro aplicativo nativo do sistema operacional *Windows*, conta com uma tela simples, poucas funcionalidades, se tornando um editor de textos simples. Porém esse editor serve para construção de códigos de programação, no nosso projeto ele tem utilidade para construir imagens do tipo monocromáticas ou P/B, pois ele dificilmente sobrecarrega o sistema operacional e funciona até mesmo sem conexão com a *internet*.

***Excel* ou outra planilha eletrônica:** Em muitos computadores do sistema operacional *Windows* o *Excel* vem pré instalado ou com disponibilidade da versão para testes, nos computadores de redes de ensino é comum existir uma parceria com a *Microsoft* para disponibilizar o pacote *Office* nos computadores da rede. Como alternativa ao *Excel* temos o *Calc*, que pertence ao pacote *LibreOffice*<sup>5</sup> que pertence a um pacote de aplicativos para escritório similar ao da *Microsoft*, porém livres. No momento em que o trabalho foi escrito, alguns aplicativos *online*, como a planilha *on-line* da *Google* apresentavam recursos limitados, impossibilitando o desenvolvimento das atividades nas plataformas.

A escolha da planilha eletrônica foi dada pela agilidade em realizar os cálculos das operações indicadas nas atividades. Quando o aluno efetua uma operação corretamente na planilha ele já está mostrando que compreendeu os conceitos por trás daquela operação. Outro ponto de destaque para a escolha é que os dados de uma planilha eletrônica podem ser transportados facilmente para outros programas, como o Bloco de Notas.

<sup>4</sup> Para entender melhor a filosofia do *software* livre indicamos a visita a página <<https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.pt-br.html>>.

<sup>5</sup> Pacote disponível para *download* em <<https://pt-br.libreoffice.org/>>.

**GIMP:** O GIMP<sup>6</sup> (*GNU Image Manipulation Program*) é um *software* de criação, tratamento e manipulação de imagem livre e multiplataforma. Apesar de possuir uma grande quantidade de ferramentas disponíveis, seu uso para as atividades propostas se tornou suficiente e eficiente. Além da edição ele foi o que apresentou melhores resultados de visualização em imagens pequenas (dimensões menores do que 50 *pixels*), pois ao aplicar o *zoom* não faz nenhum tratamento de interpolação na imagem.

**FIJI:** Também pertencente ao grupo de *softwares* livres, o FIJI<sup>7</sup> apresenta milhares de *plug-ins* que auxiliam no processamento e análise de imagens científicas. Ele pertence ao pacote de aplicativos difundidos pela *ImageJ*. Com fácil instalação e atualizações automáticas, o programa é desenvolvido por colaboradores espalhados pelo mundo e tem parceria com os projetos *ImageJ2*, *Bio-Formats*, *OME*, *μManager*, *KNIME* e *ESTRADO*.

Para utilização do FIJI no trabalho, foi realizado um comparativo com algum *software* mais difundido no meio acadêmico. Para essa análise foram realizados testes de processamento com três imagens via FIJI e via MatLab, nas três imagens os resultados foram idênticos. Por conta disso consideramos o FIJI confiável para a proposta descrita nesse trabalho, além de possuir uma interface mais simples e intuitiva, essencial para o trabalho dentro da Educação Básica.

---

<sup>6</sup> *Software* disponível para *download* em <<https://www.gimp.org/>>

<sup>7</sup> *Software* disponível para *download* em <<https://fiji.sc/>>.

## Capítulo 6

# Propostas didáticas com imagens digitais

Com a reformulação dos currículos e a necessidade de uso das TIC no contexto educacional apresentados no Capítulo 5, os livros didáticos também precisaram passar por algumas modificações, dentre elas está a apresentação de algumas possibilidades de trabalhos relacionando TIC e Matemática. Na Figura 20 temos um trecho do início de um capítulo, onde os autores citam brevemente sobre as tecnologias.

Figura 20 – Relação entre matrizes e tecnologias no livro didático.



Fonte: Bonjorno; Giovanni Jr.; Sousa, 2016, p. 62.

Entretanto as discussões ocorrem sempre de forma curta e sem apresentar ao professor e ao aluno como fazer essas conexões. Devido a isso, apresentamos neste Capítulo algumas sugestões de atividades que relacionem matrizes e tecnologias, para serem aplicadas em três ciclos escolares: Ensino Fundamental II (do 6º ao 9º ano), Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA). Para os grupos do ciclo regular de ensino tomaremos como base os objetos de conhecimentos (OC) e as habilidades apresentados na BNCC, assim como as habilidades apresentadas nos itinerários formativos da SME-SP.

Reforçamos que o passo a passo das manipulações digitais utilizadas estão disponíveis nos Apêndices e serão referenciadas em cada atividade, assim como os conceitos estão expostos nos Capítulos anteriores.

## 6.1 Aplicação no Ensino Fundamental II

Proposta de atividades 1: Construindo imagens por coordenadas.

**Duração:** 2 aulas.

**Objetivos:** Identificar objetos dentro da malha quadriculada de acordo com as coordenadas utilizadas em matrizes. Construir imagens de acordo com as coordenadas dadas.

Essa atividade está alinhada a habilidade EF06MA21 da BNCC (Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais).

**Recursos necessários:** Lápis de cor preto, cópias da tabela para ser pintada, lista das coordenadas apresentadas na descrição da atividade.

**Descrição da atividade:** Devido a quantidade de informações a serem inseridas na tabela, para essa atividade sugerimos a realização em duplas. O professor entregará a cada dupla de alunos uma malha quadriculada com 20 colunas e 21 linhas, com coordenadas externas à malha, exemplificado na Figura (21).

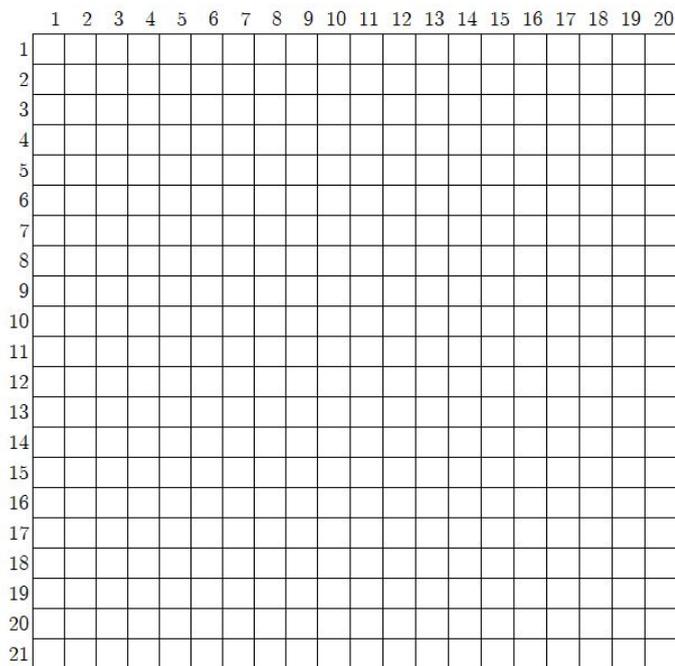
Para desenvolvimento dessa atividade o professor fará uma revisão dos conceitos de localização de objetos em malha quadriculada, reforçando que em imagens digitais uma coordenada  $(X, Y)$  indica que o quadrado em questão está na  $x$ -ésima linha e  $y$ -ésima coluna.

Em seguida o professor entregará a cada dupla uma lista de coordenadas com os *pixels* que deverão ser preenchidos de preto na malha quadriculada. Para auxiliar na organização dos alunos optamos por deixar as coordenadas na Tabela (2). É esperado que os alunos consigam construir uma figura semelhante a apresentada na Figura (22).

**Avaliação:** Como avaliação do processo o professor deve identificar se os alunos localizaram as coordenadas corretamente e se a imagem gerada se assemelha à Figura (22).

É importante que no final do processo o professor verifique com os alunos quais as dificuldades encontradas para a construção da imagem, em especial com aqueles que formaram a figura incorretamente ou não a formaram.

Figura 21 – Malha para construção de imagens dadas as coordenadas.



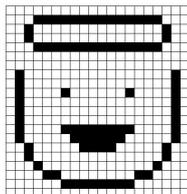
Fonte: O autor.

Tabela 2 – Pontos para construção da imagem na malha quadriculada.

(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)	(8, 2)	(9, 2)	(10, 2)	(11, 2)	(12, 2)
(13, 2)	(14, 2)	(15, 2)	(16, 2)	(17, 2)	(3, 3)	(18, 3)	(3, 4)	(18, 4)
(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)	(7, 5)	(8, 5)	(9, 5)	(10, 5)	(11, 5)	(12, 5)
(13, 5)	(14, 5)	(15, 5)	(16, 5)	(17, 5)	(2, 8)	(19, 8)	(2, 9)	(19, 9)
(3, 10)	(8, 10)	(15, 10)	(20, 10)	(3, 11)	(20, 11)	(3, 12)	(20, 12)	(3, 13)
(20, 13)	(3, 14)	(8, 14)	(9, 14)	(10, 14)	(11, 14)	(12, 14)	(13, 14)	(14, 14)
(15, 14)	(20, 14)	(3, 15)	(9, 15)	(10, 15)	(11, 15)	(12, 15)	(13, 15)	(14, 15)
(20, 15)	(4, 16)	(10, 16)	(11, 16)	(12, 16)	(13, 16)	(19, 16)	(4, 17)	(19, 17)
(5, 18)	(18, 18)	(6, 19)	(7, 19)	(16, 19)	(17, 19)	(9, 20)	(10, 20)	(11, 20)
(12, 20)	(13, 20)	(14, 20)	(15, 20)	(16, 20)				

Fonte: Produzida pelo autor.

Figura 22 – Figura a ser gerada após preenchimento dos quadrados da atividade.



Fonte: O autor.

## Proposta de atividades 2: Construindo imagens do tipo *bitmap*.

**Duração:** 2 aulas.

**Objetivos:** Construir uma imagem P/B em uma malha quadriculada e fazer a transposição para a forma digital, relacionando cada elemento da malha a um elemento matricial.

**Recursos necessários:** Papel com uma malha quadriculada, lápis de cor preto, computador com bloco de notas.

**Descrição da atividade:** Na primeira aula cada aluno deve receber duas malhas quadriculadas do tamanho  $15 \times 15$ . Na primeira malha ele deve construir uma imagem seguindo algumas regras básicas: (i) cada quadrado deve ser preenchido completamente ou deixado totalmente em branco; (ii) não é permitido fazer contorno na figura; (iii) a figura deve ser preenchida apenas com um tom, não deve ocorrer a variação de tonalidades.

Na segunda malha será feita a conversão da malha quadriculada para uma matriz binária, onde cada quadrado pintado receberá o número 1 e os vazios receberão 0.

No bloco de notas os alunos devem transformar sua imagem física em imagem digital, através da construção de arquivos `.pbm`. No Apêndice (??) é apresentado o passo a passo dessa construção, para que o professor e o aluno possa construir a imagem sem dificuldade. Ao finalizar a construção da imagem sugerimos a visualização via GIMP, onde o aluno pode facilmente exportar para formatos mais comuns (ex: `.jpg`).

**Avaliação:** O professor deve criar algum ambiente colaborativo, como o *padlet*<sup>1</sup> ou outro ambiente disponível na rede de ensino. Os alunos irão inserir as imagens criadas no mural, identificando sua criação.

## 6.2 Aplicação no Ensino Médio

As atividades indicadas para o Ensino Médio servem como ferramentas para relacionar o conhecimento específico de Matemática com as tecnologias presentes. Elas estão alinhadas com as seguintes habilidades da BNCC:

EM13MAT405 - Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

EM13MAT315 - Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

EM13MAT105 - Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

<sup>1</sup> Mural colaborativo na nuvem, que permite ao usuário inserir textos e recursos multimídia. Disponível em <https://pt-br.padlet.com/dashboard>

EM13MAT103 - Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Tais atividades não devem ser limitadas exclusivamente às Ciências Exatas, pois é possível fazer um relacionando as imagens digitais com conceitos da Arte e da Filosofia.

## Proposta de atividades 1: A aquisição de imagens e as redes sociais

**Duração:** 3 aulas.

**Objetivos:** Identificar os processos de captura de uma imagem digital. Entender aspectos gerais de uma imagem digital como *pixels*, resolução, dimensão e formato. Estabelecer a relação de grandezas diretamente proporcionais entre as dimensões de uma imagem e o tamanho do arquivo gerado.

**Recursos necessários:** Computadores, dispositivos com câmeras digitais (celulares, câmeras, *tablets*).

**Descrição da atividade:** Na primeira aula o professor deve apresentar aos alunos como é realizada a captura de uma imagem digital, a importância da luz na aquisição de uma figura e levar a discussão para o resultado obtido no processo. Em seguida os alunos devem escolher alguma imagem própria ou tirar uma nova fotografia para utilizar na atividade.

Com os dispositivos em mãos o professor deve explicar algumas propriedades básicas das imagens, mostrando aos alunos como interpretar a resolução das imagens disponíveis para serem utilizadas bem como as proporções em cada caso. Com a imagem gerada, através da função propriedades ou detalhes o professor deve elencar outros conceitos básicos da imagem, como as dimensões, a intensidade e a escala de cores.

Como tarefa os alunos devem pesquisar para a próxima aula quais dimensões são aceitas nas redes sociais que eles utilizam e se elas suportam o *upload* das imagens originais que eles tiraram. Mas é esperado que a resposta deles seja um valor bem inferior ao valor da imagem que eles capturaram. Com isso a discussão deve ser conduzida para o redimensionamento de imagens.

No laboratório de informática os alunos devem abrir sua imagem no GIMP e através da função **Redimensionar**, apresentado no Apêndice (??). A imagem deve ser salva em três proporções com base na original: 75%, 50% e 25% da imagem original.

Com os resultados obtidos os alunos devem preencher o seguinte quadro:

Dados das imagens geradas pelo redimensionamento.

Na terceira aula, com os resultados apresentados no quadro é possível estabelecer uma relação entre o produto das dimensões e o tamanho do arquivo. Levando os alunos

Imagem	Dimensões	Produto das dimensões	Tamanho do arquivo (em KB)	A imagem mantém qualidade suficiente para redes sociais?
Original				
Redimensionada em 75%				
Redimensionada em 50%				
Redimensionada em 25%				

a pensar em possibilidades para liberar espaço de armazenamento em seus dispositivos móveis.

**Avaliação:** Com base no quadro construído os alunos devem construir um pequeno relatório, indicando qual o destino apropriado das quatro imagens (como stories, postagem, impressão).

Proposta de atividades 2: Construindo *bitmaps* em escala cinza.

**Duração:** 4 aulas.

**Objetivos:** Utilizar a malha quadriculada para construção de uma imagem e utilizar recursos digitais para criar a mesma imagem na forma digital.

**Recursos necessários:** Papel com uma malha quadriculada, lápis de cor preto, computador com bloco de notas.

**Descrição da atividade:** Essa atividade tem como base a mesma estratégia da Atividade 2 para o Ensino Fundamental II, mas considerando que esse grupo de alunos costumam ter um maior domínio das tecnologias. Assim, na primeira aula cada aluno deve receber duas malhas quadriculadas do tamanho  $20 \times 20$ . Na primeira malha ele deve construir uma imagem seguindo algumas regras básicas: (i) cada quadrado deve ser preenchido por preto, por até duas tonalidades de cinza ou deixado em branco; (ii) não é permitido fazer contorno na figura; (iii) é importante que o aluno deixe claro a diferença entre um cinza claro e um cinza escuro.

Na segunda malha será feita a conversão da malha quadriculada para uma matriz cujas entradas variam entre 0 e 3. Sendo que o preto será representado pelo 0, o cinza mais escuro por 1, o cinza mais claro por 2 e o branco pelo 3.

Na segunda aula, através bloco de notas os alunos devem transformar sua imagem física em imagem digital. No Apêndice (??) é apresentado o passo a passo de construção de imagens monocromáticas, é importante que o aluno identifique na imagem que o 3 é o maior valor possível. Ao finalizar a construção da imagem sugerimos a visualização via GIMP.

Como tarefa para casa os alunos devem criar uma outra imagem utilizando as cores iluminadas primárias e secundárias, além do branco e preto. Sugerimos um arquivo pequeno, no máximo  $10 \times 10$ , pois em escala RGB a quantidade de entradas é triplicada. Na aula seguinte eles devem criar uma pequena imagem em RGB, conforme apresentado no Apêndice (??).

**Avaliação:** O professor deve criar algum ambiente colaborativo, como o *padlet* ou outro ambiente disponível na rede de ensino. Os estudantes devem inserir as imagens criadas no mural, identificando suas criações.

### Proposta de atividades 3: Operando com matrizes e as imagens digitais

**Duração:** 3 aulas.

**Objetivos:** Realizar operações matriciais com o uso das tecnologias. Entender o processo de tratamento de imagens como resultado de transformações matriciais.

**Recursos necessários:** Aparelhos com câmeras digitais e computadores.

**Descrição da atividade:** Na duas primeiras aulas os alunos devem escolher uma fotografia de própria autoria e fazer um recorte quadrado no GIMP. Em seguida deve redimensionar a imagem para dimensões  $300 \times 300$ , sugerimos o redimensionamento para evitar que o *software* de planilha eletrônica apresente comportamento inesperado e encerre os processos. Em seguida os alunos devem converter para uma imagem monocromática (em escala cinza).

A imagem gerada deve ser aberta no aplicativo FIJI e ser convertida em tabela. Com as ferramentas de operações matemáticas no aplicativo, os alunos devem explorar as ferramentas de soma, subtração, multiplicação por escalar entre 0 e 1, multiplicação por escalar maior do que 1 e o processo de truncamento. Com o teste de várias operações é esperado que os alunos percebam o impacto de cada transformação na imagem.

Na terceira aula os alunos devem exportar a matriz do FIJI para a planilha eletrônica. Eles devem construir novas imagens geradas a partir de transformações envolvendo as operações conhecidas. Para facilitar a visualização da imagem gerada eles devem usar a formatação condicional.

**Avaliação:** De forma coletiva o professor deve expôr algumas transformações possíveis em imagens e solicitar para que os alunos descrevam o resultado esperado. Por exemplo: “se multiplicarmos uma matriz por 0,5 e somarmos 10, o que acontece com a imagem?”, para responder tais perguntas os alunos devem ter utilizado as aulas para conjecturar algumas possibilidades.

### 6.3 Aplicação na Educação de Jovens e Adultos

Com o objetivo da universalização do acesso à Educação e para atingir as metas de desenvolvimento educacional em nível nacional, cada vez mais o MEC assim como as secretarias de educação tem recorrido a Educação de Jovens e Adultos (EJA) como opção para aqueles que não concluíram a Educação Básica dentro do ciclo regular.

Conforme a Resolução nº1/2021 do MEC com o Conselho Nacional de Educação (MEC), nessa modalidade de ensino a BNCC, a Língua Portuguesa, a Matemática e a Inclusão Digital devem ser prioridade.

Art. 13. Os currículos dos cursos da EJA, independente de segmento e forma de oferta, deverão garantir, na sua parte relativa à formação geral básica, os direitos e objetivos de aprendizagem, expressos em competências e habilidades nos termos da Política Nacional de Alfabetização (PNA) e da BNCC, tendo como ênfase o desenvolvimento dos componentes essenciais para o ensino da leitura e da escrita, assim como das competências gerais e as competências/habilidades relacionadas à Língua Portuguesa, Matemática e Inclusão Digital. (BRASIL, 2021).

Assim, vemos a necessidade de apresentar neste trabalho possibilidades de atividades a serem desenvolvidas na EJA, independente de ser modular, regular ou na forma de itinerários formativos. Essa necessidade vem para respeitar o repertório tecnológico que os alunos dessa modalidade de ensino possuem, muitos não possuem um contato contínuo com computadores e demais recursos tecnológicos.

#### Proposta de atividades 1: Do físico para o digital.

**Duração:** 3 aulas.

**Objetivos:** Mostrar de forma prática como os dispositivos de captura de imagens (câmeras, *scanners*) transformam algo físico em uma imagem digital. Resgatar as memórias afetivas dos alunos, em especial daqueles que utilizaram câmeras analógicas.

**Recursos necessários:** Celulares com câmera, *scanner*, fotografias ou outros registros antigos que os alunos queiram digitalizar, lupa ou lentes que ampliem as imagens e computadores.

**Descrição da atividade:** Para realização das atividades descritas sugerimos que os alunos trabalhem em grupos de dois ou três alunos, de forma que um possa ajudar o outro e todos tenham possibilidade de trabalhar com os recursos digitais.

Na primeira aula o professor deve explicar como é realizada a aquisição de uma imagem digital e quais as diferenças de uma imagem digital para uma imagem analógica. Como tarefa de casa os alunos devem trazer uma foto ou algum registro (carta, documento, dentre outros) que faça parte da sua história.

Na segunda aula, com um *scanner* o material será digitalizado. Esse é o momento para explorar com esse grupo o compartilhamento de arquivos de forma digital, em especial sobre *drives* virtuais ou nuvens. É fundamental que no processo de compartilhamento

virtual o processo seja o mais simplificado possível, encurtadores de *links*, plataformas que não exigem cadastro para *download* são ferramentas que podem facilitar o trabalho.

Nessa etapa que o professor irá introduzir os conceitos básicos de uma imagem digital sejam explicados, dentre eles os *pixels*, a dimensão de uma imagem e a escala de cores. A lupa servirá para que os alunos visualizem o material físico e tenham mais próximo a ideia de continuidade, enquanto na imagem digital devem utilizar a função *zoom* para verificar a imagem na forma quadriculada (ou discretizada).

Na terceira aula será o momento para explorar a edição de imagens, podendo ser realizada no *paint* ou no GIMP. O momento é para que os alunos utilizem sua criatividade, insira balões de falas nas fotografias, *emojis* ou até mude cores de objetos.

#### **Avaliação:**

Proposta de atividades 2: As escalas de cores e a construção de imagens de imagens em malhas quadriculadas.

**Duração:** 2 aulas.

**Objetivos:** Relacionar os conceitos do bordado com a construção da imagem digital. Identificar escalas de cores em diferentes contextos. Dentro do currículo para EJA da SME-SP, temos“(EFEJAECEM17) Interpretar e solucionar problemas que envolvam dados de pesquisas apresentados em tabelas em diversos contextos”(SME, 2019c, p.80).

**Recursos necessários:** Folhas com gráficos de ponto cruz, folhas com malhas quadriculadas em branco, lápis de cor, computadores.

**Descrição da atividade:** Trazendo os conceitos da atividade anterior, o professor deve utilizar os gráficos de bordados e a comparação da escala de cores, de modo que o estudante entenda a relação sobre a parte de artesanato e os conceitos de *bitmap*.

Em seguida cada aluno irá receber uma malha quadriculada do tamanho  $30 \times 30$ , respeitando as regras de construção de imagem em malha quadriculada deve construir um novo gráfico para ponto cruz colorido. É importante que eles se sintam estimulados a desenvolverem variados tipos de desenhos, como letras, personagens, flores, frutas, animais, pessoas, paisagens. A atividade deve ser iniciada na sala de aula e finalizada como tarefa de casa.

Na aula seguinte, no laboratório de informática, o professor deve disponibilizar uma malha  $30 \times 30$  no *paint*. Utilizando como base a imagem construída em casa, os alunos devem reconstruir essa imagem no formato digital. Para isso os alunos devem utilizar a função **Preencher com cor** que é representado pelo balde de tinta, com isso os alunos irão preencher cada quadrado por completo. Nesse caso não é indicado a construção como uma imagem no bloco de notas, pois é esperado que vários alunos ainda não possuam um contato constante com computadores, necessitando de ferramentas mais intuitivas.

**Avaliação:** Os alunos devem compartilhar com o professor as imagens criadas, tendo como critério avaliativo o rendimento do aluno nas etapas desenvolvidas e o produto

criado. Para valorização do trabalho discente o professor pode criar uma revista digital, com esses gráficos criados.

## Capítulo 7

# Considerações Finais

Neste trabalho exploramos as conexões existentes entre imagens digitais e a teoria de matrizes, tópico tradicional nos currículos de matemática da Educação Básica.

Como argumentamos durante a construção do texto, as recentes mudanças nos currículos e a construção da BNCC como documento nacional balizador, a cada dia as TIC estão mais presentes nas discussões sobre práticas de ensino nas escolas afetando inclusive as discussões sobre as práticas dos professores de matemática sendo urgente a necessidade de mudanças nos métodos de ensino, de modo que as aulas de matemática correspondam ao que se espera da nova escola.

Em acordo com o proposto nos objetivos traçados na introdução, o trabalho apresentou algumas propostas de intervenções para a aula de Matemática em diferentes ciclos, respeitando as faixas etárias e os currículos. As atividades são apenas sugestões, cabendo a cada professor selecionar o que é pertinente para seu grupo de alunos fazendo as modificações e alterações que forem necessárias. Esta é, também, uma sugestão de trabalho futuro: aplicação *in loco* na sala de aula com posterior análise à luz das recentes pesquisas acerca do pensamento computacional.

# Referências

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Tradução técnica: Claus Ivo Doering.
- ALMEIDA, Augusto Ribeiro de; MAGRINI, Luciano Aparecido. A matemática das imagens digitais como recurso didático na escola básica. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**: CQD, Bauru, v. 21, dez. 2021.
- ALMEIDA, Doriedson Alves de. TIC e educação no Brasil: breve histórico e possibilidades atuais de apropriação. **Pró-discente**, v. 15, n. 2, 2009.
- BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Matemática Completa**: 2º ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BRASIL. Ministério da Educação. Decreto nº 6.300, de 12 de dezembro de 2007. **Programa Nacional de Tecnologia Educacional**: Proinfo. Brasília, DF, MEC, 2007.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 01, de 25 de maio de 2021. **Diretrizes Operacionais para a Educação de Jovens e Adultos nos aspectos relativos ao PNA e a BNCC**. Brasília, DF, CNE, 2021.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional (LDB)**. Brasília, DF, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 3 jul. 2021.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Programa Nacional de Informática Educativa**: Proninfe. Brasília, DF: MEC, 1994.
- COSTA, Luciano da Fontoura; CESAR JR., Roberto Marconder. **Shape classification and analysis**: theory and practice. Boca Raton: CRC Press, 2001.
- CUPANI, Alberto. **Filosofia da Tecnologia**: um convite. 3 ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2016.

- CYSNEIROS, Paulo Gileno. PAPERT, Seymour. A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática. **Revista Entreideias: educação, cultura e sociedade**, v. 12, n. 12, 2007.
- FALCÃO, David Rodrigues Lima. **Timeline da História da Fotografia**. Escola Superior de Media, Arts e Design, Porto, 2019.
- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2012.
- GNU. Free Software Foundation. **Sistema Operacional GNU**. 2021. Traduzido por Rafael Fontenelle. Disponível em: <<https://www.gnu.org/>>. Acesso em: 22 nov. 2021.
- GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard C.. **Processamento digital de imagens**. 3.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Tradução Cristina Yamagami e Leonardo Piamonte.
- IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar: 4-sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- JÄHNE, Bernd. **Digital Image Processing**. Heidelberg, Alemanha: Springer, 2005.
- JUSTAMAND, Michel; MARTINELLI, Suely Amâncio; OLIVEIRA, Gabriel Frechiani de; SILVA, Soraia Dias de Brito e. A arte rupestre pelo olhar da historiografia brasileira: uma história escrita nas rochas. **Revista Arqueologia Pública**, [S.L.], v. 11, n. 1, p. 130, 13 jul. 2017. Universidade Estadual de Campinas. <http://dx.doi.org/10.20396/rap.v11i1.8648451>.
- MARQUES FILHO, Ogê; VIEIRA NETO, Hugo. **Processamento digital de imagens**. Rio de Janeiro: Brasport, 1999.
- MCFARLANE, Maynard D. Digital pictures fifty years ago. **Proceedings of the IEEE**, v. 60, n. 7, p. 768-770, 1972.
- MOJANG AB Studios (Suécia). Xbox Game Studios. **Minecraft Brasil**. Site oficial. 2021. Disponível em: <https://www.minecraft.net/pt-pt>. Acesso em: 14 set. 2021.
- MOTA, Ana Rita. Cor. **Revista de Ciência Elementar**, Porto, v. 11, n. 5, p. 1-6, 30 jun. 2017. Universidade do Porto. <http://dx.doi.org/10.24927/rce2017.019>
- NUNES, Dimas Elpidio. **O ensino-aprendizagem da matemática através de tecnologias da informação e comunicação para o ensino médio**. 2020. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Uesb, Vitória da Conquista, 2020.

PAPERT, Seymour. **Mindstorms: children, computers, and powerful ideas.** Nova Iorque: Basic Books, 1980.

ROSENFELD, Azriel; KAK, Avanash C. **Digital Picture Processing.** 2. ed. Londres: Academic Press Inc., 1982. 351 p.

SÃO PAULO (Cidade). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da cidade: Ensino Fundamental - componente curricular : Matemática.** – 2.ed. – São Paulo : SME / COPED, 2019.

SÃO PAULO (Cidade). Secretaria Municipal de Educação. **Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática – volume 1.** – 2.ed. – São Paulo : SME / COPED, 2019.

SÃO PAULO (Cidade). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da cidade: Educação de Jovens e Adultos - componente curricular : Matemática.** – 1.ed. – São Paulo : SME / COPED, 2019.

SCURI, Antonio Escaño. **Fundamentos da imagem digital.** Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.

SOFFNER, Renato. Tecnologia e Educação: um diálogo Freire-Papert. **Tópicos Educacionais:** UFPE, Recife, v. 19, n. 1, p. 147-162, jan. 2013.