Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto Matemática e Estatística

Gilson Lopes da Silva

Um olhar para as questões de geometria plana da OBMEP dos níveis 1 e 2 com o uso de materiais concretos manipuláveis: o que fazer para levar os problemas para a realidade dos alunos da rede pública de ensino.

Rio de Janeiro

2022

Gilson Lopes da Silva

Um olhar para as questões de geometria plana da OBMEP dos níveis 1 e 2 sob com o uso de materiais concretos manipuláveis: o que fazer para levar os problemas para a realidade dos alunos da rede pública de ensino.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador : Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho.

Rio de Janeiro

2022

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Gilson Lopes
Um olhar para as questões de geometria plana da OBMEP dos níveis 1 e 2 com o uso de materiais concretos manipuláveis: o que fazer para levar os problemas para a realidade dos alunos da rede pública de ensino. / Gilson Lopes da Silva. – 2022.
223 f. : il.

Orientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria - Estudo e ensino - Teses. 2. Resolução de problemas (Matemática) - Teses. 3. Tangram - Teses. I. Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Gilson Lopes da Silva

Um olhar para as questões de geometria plana da OBMEP dos níveis 1 e 2 com o uso de materiais concretos manipuláveis: o que fazer para levar os problemas para a realidade dos alunos da rede pública de ensino.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 15 de julho de 2022.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (Orientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

____
Prof. Dra. Patrícia Nunes Silva
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

____
Prof. Dr. Wallace Vallory Nunes
Instituto Militar de Engenharia - IME

Rio de Janeiro

2022

DEDICATÓRIA

Primeiramente toda a glória a Deus, por ser o verdadeiro e único escritor da minha trajetória na vida.

Ao grande educador e filósofo Paulo Freire, pelos ensinamentos transformadores e mais atuais que nunca.

À minha avó Hortênsia e à minha tia Gilsenir, que em vida derramaram sobre mim amor infindável, sendo que agora, lá do ceu, torcem por mim a cada segundo.

À minha amada esposa Flávia e ao meu filho querido Giovani, que me dão todos os motivos do mundo para seguir lutando na vida em busca de cada sorriso de alegria e de cada olhar de admiração deles.

À minha amada mãe Gilsimar por sempre buscar todos os meios disponíveis para me educar, a fim de que eu pudesse me tornar um homem digno e honrado.

A meu primo Robson, por ter me ajudado muito com os livros magníficos de matemática.

AGRADECIMENTOS

É crucial primeiramente agradecer aos idealizadores do Programa de Mestrado Profissional de Educação Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), o qual, inequivocamente, pode ser interpretado como um divisor de águas no que tange ao aperfeiçoamento dos professores de Matemática no Brasil.

Torna-se fundamental reverenciar o corpo docente do polo UERJ do PROFMAT pelo empenho e grande saber com que me brindaram em aulas inesquecíveis. Um agradecimento muito especial ao professor Sérgio da disciplina Aritmética, que me propiciou aulas brilhantes e fascinantes, por meio das quais foi possível perceber que a humildade e a genialidade podem andar juntas sem qualquer problema.

Não posso esquecer dos grandes colegas que fiz ao longo do curso, os quais, independentemente de seguirem ou ficarem ao longo do percurso, mostraram muita fibra e grande caráter. Um agradecimento especial aos colegas que se tornaram grandes e admiráveis amigos: Víctor, Fabrício e Thiago Moza.

Finalmente um agradecimento de extrema gratidão à UERJ por resistir bravamente contra todas as adversidades, a fim de continuar de forma imponente a cumprir sua missão: produzir pensadores.

Ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si mediatizados pelo mundo.

Paulo Freire

RESUMO

SILVA, Gilson Lopes da. **Um olhar para as questões de geometria plana da OBMEP dos níveis 1 e 2 com o uso de materiais concretos manipuláveis:** o que fazer para levar os problemas para a realidade dos alunos da rede pública de ensino. 2022. 223 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

A OBMEP tem se caracterizado desde 2005 como o referencial de performance a ser atingido por parte de todos os alunos a partir da quinta série do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio. A grande dificuldade apresentada normalmente pelos alunos frente ao desafio contido na avaliação serviu de inspiração para a presente pesquisa. Enquanto o exame da OBMEP exige do aluno a habilidade de percepção de padrões como a simetria em detrimento de formalizações, as escolas ainda primam essencialmente pelo ensino tradicional focado unicamente nas abordagens formais dos conceitos geométricos. Esta pesquisa teve o propósito de buscar desenvolver, sob o norte da metodologia de pesquisa educacional de desenvolvimento, estratégias notadamente práticas de ensino à luz do construtivismo com materiais concretos e manipuláveis oriundos de reciclagem, a fim de perseguir uma resposta acerca da viabilidade de se trabalhar de forma lúdica os preceitos geométricos indispensáveis aos exames dos níveis 1 e 2 da OBMEP com os alunos de escolas públicas em um ambiente de intensa cooperação. A utilização de materiais didáticos consagrados no ensino de matemática como o Tangam e o tabuleiro Geoplano, construídos com materiais descartados, contribuiu para as estratégias pedagógicas aqui abordadas. A construção de experimentos da Ótica, como a projeção de objetos em anteparos, ganhou, também, grande destaque no trabalho em virtude da possibilidade de construção de atividades que podem aguçar o interesse dos alunos em relação a eventos geométricos cobrados na OBMEP. Ao final, as estratégias elaboradas permitiram vislumbrar um horizonte bastante interessante para a utilização de materiais descartáveis em sala de aula com o propósito de preparar os alunos para os exames em pauta da OBMEP.

Palavras-chave: OBMEP. Simetria. Tangram. Tabuleiro Geoplano.

ABSTRACT

SILVA, G. L**. A look at OBMEP's flat geometry issues at levels 1 and 2 with the use of concrete materials that can be manipulated**: what to do to bring the problems into the reality of public school students. 2021. 223 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

The OBMEP has been characterized since 2005 as the performance benchmark to be achieved by all students from the fifth grade of elementary school to the third year of high school. The great difficulty normally presented by students in the face of the challenge contained in the evaluation served as inspiration for the present research. While the OBMEP exam requires the student to be able to perceive patterns such as symmetry at the expense of formalizations, schools still essentially focus on traditional teaching focused solely on formal approaches to geometric concepts. This research aimed to seek to develop, under the guidance of educational development research methodology, notably practical teaching strategies in the light of constructivism with concrete and manipulable materials from recycling, in order to pursue an answer about the viability of working in a playful way the geometric precepts indispensable for OBMEP level 1 and 2 exams with students from public schools in an environment of intense cooperation. The use of didactic materials established in the teaching of mathematics such as Tangam and the Geoplano board, built with discarded materials, contributed to the pedagogical strategies discussed here. The construction of Optical experiments, such as the projection of objects on screens, also gained great prominence in the work due to the possibility of building activities that can sharpen students' interest in relation to geometric events charged at OBMEP. In the end, the strategies developed allowed us to glimpse a very interesting horizon for the use of disposable materials in the classroom with the purpose of preparing students for the exams on the OBMEP agenda.

Keywords: OBMEP. Symmetry. Tangram. Geoplane Board.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BNDES	Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social
UFRG	Universidade Federal do Rio Grande
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei De Diretrizes e Bases Da Educação
MDF	Medium Density Fiberboard
MEC	Ministério da Educação e Cultura
OBMEP	Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PUC(SP)	Pontifícia Universidade Católica em São Paulo
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBM	Sociedade Brasileira De Matemática
UEM	Universidade Estadual de Maringá/PR
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande Do Sul
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UNESCO	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
UNESP	Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É impressionante a saga por que passou o ensino de Geometria no Brasil nos últimos 60 anos. Em seu trabalho acadêmico, Pavanello (1993) apresenta um panorama interessante através do qual é possível perceber o quanto foi negligenciada pelo Estado a necessidade de implementar uma política nacional de longo prazo para o ensino de geometria, elaborada a partir de discussões técnicas e essencialmente preocupadas com a diversidade regional do país. O texto percorre uma história recheada de erros crassos e cíclicos no tocante à gestão. Soluções milagrosas são sempre tomadas à revelia da realidade acadêmica, desprezando a capacitação técnica e as condições de trabalho dos professores, com o intuito de manter preservada a estrutura do ensino superior somente para as elites da sociedade.

Segundo Pavanello (1993), A implantação da Matemática Moderna no início da década de 60 propugna um novo tratamento no tocante ao ensino de Geometria de forma pouco empírica, ou seja, calcada essencialmente na formalidade e na ênfase ao estudo das transformações, sem qualquer preparação dos docentes para tal empreitada. Resultado: pouca geometria e muita álgebra.

Pavanello (1993), também, leva o leitor a compreender que a reforma do ensino superior que transcorreu nos idos de 1969 em meio à lastimável ditadura militar e promoveu a precarização máxima no processo de formação de professores, passando ao setor privado a primazia nesta seara. O ensino secundário público se tornou essencialmente profissionalizante, com o único intuito de aliviar a tensão social no que concerne ao acesso ao ensino superior. As escolas privadas, as quais cumpriam um caráter propedêutico, preparavam a elite para o ingresso nas universidades com o ensino de geometria.

O artigo Lorenzato (1995), que promove uma investigação acerca da problemática inerente à abordagem do ensino de geometria nas salas de aula brasileiras, apresenta uma argumentação complementar ao que é exposto pelo artigo Pavanello (1993), enriquecendo, por conseguinte, a discussão em voga, a qual segue:

> A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. E como a Geometria neles aparece? Infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Assim, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras

> disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria Matemática, a Geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, tem recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula (Lorenzato, 1995, p.4).

Com base na exposição supracitada, a utilização em larga escala de livros didáticos exageradamente formais e, por conseguinte, com pouco espaço para uma construção eficaz do saber geométrico passa a ser mais um ingrediente a se considerar nesse cenário de crise no ensino de geometria para as massas no Brasil, o qual tem persistido por décadas e tendendo a permanecer por um longo tempo.

Com o fito de entender o rumo tomado pelo ensino de geometria no Brasil a partir de 2004, torna-se imperioso compreender o caminho percorrido pelo desempenho da economia brasileira a partir desse marco inicial. Com base em dados ofertados pelo BNDES (2012), foi possível identificar de forma inequívoca que o crescimento econômico médio brasileiro no período de 2004-2008 foi de 4,818%. Em decorrência da crise econômica de 2008 nos Estados Unidos, a qual se alastrou pelo mundo, a economia brasileira em 2009 teve um desempenho negativo de 0,33%. Em 2010 houve um superávit na ordem de 7,53% e, a partir desse momento, o Brasil passou a ter um desempenho econômico pífio. Em virtude da grande expectativa gerada no país com os potenciais rendimentos advindos da exploração do pré-sal, o Ministério da Educação publicou em 23/07/2010 em seu site um programa impactante de inclusão digital focado na aquisição de computadores pelas escolas públicas de todo o país como segue delineado abaixo:

> A partir da lei, estados e municípios poderão adquirir os equipamentos portáteis da empresa selecionada por edital, que será publicado pelo MEC nas próximas semanas. Para incentivar a compra, o Governo Federal oferece R$ 660 milhões, por meio do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), e uma série de incentivos fiscais. O Programa Um Computador por Aluno teve início em 2008, em fase experimental, em cinco cidades: São Paulo, Porto Alegre, Brasília, Piraí (RJ) e Palmas. (MEC, 2010, p.1)

A inclusão digital passou a ser propalada como o passaporte do país para o futuro. A consequência natural desse planejamento econômico equivocado associado a uma propaganda massiva de que bastaria a chegada em número considerável de computadores às escolas públicas que tudo estaria resolvido, levou o país a mais um tortuoso caminho a ser trilhado pelo ensino. Os professores não foram capacitados, a logística precária das escolas não foi saneada e o poder público não imaginou que a manutenção da estrutura seria algo deveras oneroso para os cofres públicos. Manter laboratórios de informática requer planejamento financeiro para a preservação dos bens e para a renovação dos equipamentos em decorrência da rápida obsolescência dos itens computacionais.

O trabalho acadêmico de Silva (2018), que pesquisou a forma pela qual estava sendo feita a incorporação da tecnologia ao ensino nas escolas públicas de Natal/RJ, apresentou conclusões críticas na política supostamente inclusiva em curso no espectro geográfico analisado. Segue abaixo um fragmento desse trabalho que corrobora a argumentação em voga:

> Na verdade, a falta de domínio técnico-pedagógico ocasiona uma resistência em realizar atividades no laboratório de informática, dificultando e reduzindo o tempo disponível dos estudantes no local. A realidade escolar pesquisada mostrou que se resumem a poucos os docentes que utilizam o local como espaço pedagógico e foi relatado que vários professores nunca frequentaram o laboratório de informática (SILVA, 2018, p.159).

Convém ressaltar que o Ministério da Educação e Cultura **(MEC)** publicou no dia 22/12/2017, com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional **(LDB, Lei nº 9394/1996**), a Base Nacional Comum Curricular, BNCC (2017), a qual dá extrema importância à incorporação de softwares pedagógicos com expertise em modelagem algébrico-gráfico ao processo de ensino-aprendizagem na educação fundamental.

O censo escolar de 2018, o qual foi produzido pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) e divulgado por Agência Brasil (2018) é bastante elucidativo. Com base nele pode-se concluir que das escolas públicas que ofertam ensino fundamental apenas 41,6% dispões de rede de esgoto, 52,3% possuem somente fossa, 65,8% são abastecidas com água proveniente da rede pública, 17,4% são abastecidas por água fornecida por cisterna, cacimba ou poço, 11,9% são abastecidas por água fornecidas diretamente por rios ou canais e 10% não possuem água, energia ou esgoto. No que tange a laboratórios de informática, somente 48,6% das escolas públicas que oferecem ensino fundamental o possuem, sendo que 65,6% possuem acesso à internet. Na verdade, o abismo social da educação brasileira está sendo aprofundado, pois as escolas privadas possuem condições plenas de incorporar os softwares de extrema qualidade como o Geogebra, por exemplo, ao processo de ensino-aprendizagem, enquanto as escolas públicas tenderão a ver o bonde da história passar mais uma vez. A esperança de que bastaria criar um laboratório de informática nas escolas públicas e que tudo o mais viria naturalmente, ignorando todas as variáveis que certamente deveriam ser sopesadas se tivessem feito um planejamento estratégico competente, como capacitação dos professores, estruturação séria das instalações escolares e produção de uma política de uniformização acerca das estratégias didáticas a serem seguidas, levou o Brasil a mais uma encruzilhada na História. E nessa encruzilhada, não se avançou na implementação efetiva da tecnologia no processo de ensino e nem foi providenciado o resgate das práticas construtivistas voltadas para o ensino de geometria consagradas ao longo dos tempos. Consequentemente, o país ficou estagnado.

Quando olhamos adiante, o cenário é mais assustador ainda, tendo em vista que após uma década economicamente perdida para todo o país com quase a totalidade de entes federativos, Estados e Municípios, se declarando em condição de insolvência no tocante à incapacidade de arcarem com os gastos públicos constitucionais em educação, saúde e segurança, o mundo presencia no momento uma pandemia que tem devastado todas as economias do planeta. Nessa linha, a reportagem veiculada na edição on-line da revista Veja pela jornalista Alessandra Kianek em 29/05/2020 apresenta mais um episódio desalentador como segue:

> A pandemia do coronavírus atingiu de forma drástica a economia brasileira, que já vinha fragilizada, após um período de recessão, sem forças para engatar um crescimento robusto, e apresentando resultados pífios nos últimos três anos. Os efeitos da crise, que paralisou as atividades econômicas causando desemprego e perda de renda da população, levarão o país a ter mais uma década perdida. (VEJA, 2020, p.1)

Após toda essa explanação trágica, o ensino de geometria nas escolas brasileiras precisa olhar para as melhores práticas educacionais do mundo e optar por soluções criativas e transformadoras, porém de baixo custo. A possibilidade de primar por uma mediação em sala de aula auxiliada por materiais pedagógigos manipuláveis, artesanalmente construídos por alunos e professores em cooperação, surge como uma ideia extremamente apropriada e em consonância com o momento atual do país.

É natural que emerja o seguinte questionamento: em que exame relevante aplicar uma possível mediação apoiada por tais ferramentas de ensino, a fim de se possa aferir na prática a eficiência dessa estratégia? Inequivocamente, uma avaliação brasileira consagrada se apresenta como o espaço ideal para essa ousada empreitada: A OBMEP. A Olimpíada Brasileira de Matemática para as Escolas Públicas **(OBMEP)**, criada em 2005, permite vislumbrar no horizonte um padrão de excelência possível a ser buscado de forma incansável no que tange à capacidade de resolver problemas de Matemática.

A necessidade imperiosa de se buscar opções pedagógicas consagradas e de baixo custo para o ensino de geometria plana, permeada pelos ensinamentos imprescindíveis propiciados pela construção do saber geométrico a partir de materiais concretos manipuláveis, com o propósito de preparar os alunos para o exame da OBMEP, é o objetivo crucial da pesquisa. A sustentabilidade ganhará importante destaque nesse trabalho, pois a construção da maioria esmagadora dos artefatos a serem utilizados como instrumentos facilitadores para o processo ensino-aprendizagem será implementada com base em materiais descartados. Nessa trilha será possível perceber que a maioria das repartições públicas brasileiras descarta diariamente materiais que poderiam contribuir bastante com o ensino público, possibilitando a criação de formas geométricas muito úteis para a construção do conhecimento geométrico como, por exemplo: Tangram, tabuleiro Geoplano e outras formas geométricas interessantes. Para se ter uma ideia da importância dos materiais concretos no processo de maturação da capacidade de abstração dos alunos, o trabalho acadêmico de Santos (2015) enfatiza o seguinte:

> O ideal é que a utilização de material concreto para o ensino da matemática ocorresse desde os primeiros contatos do aluno com a matemática. Porém, mesmo não tendo a oportunidade de ter esse contato com os materiais concretos desde a tenra infância, se acontecer em qualquer um dos níveis da educação já seria de grande a contribuição que essa vivência iria propiciar (SANTOS, 2015, p.29).

A pesquisa em curso fará uma imersão na grande vocação da geometria para tratar de problemas concretos que possam ser transportados para a realidade cotidiana dos alunos, a fim de que esse aspecto possa ser um aliado do professor no processo de ensino-aprendizagem dessa importante área do saber matemático.

Inicialmente, logo após ficar nítida a metodologia a ser utilizada no estudo em voga, serão trazidos à baila eventos históricos e da natureza que sejam capazes de evidenciar o quanto o homem e outros animais, de forma intencional no primeiro caso e por propósitos evolutivos no segundo, promoveram o desenvolvimento dessa disciplina no intuito de superar desafios impostos ao longo dos tempos. A seguir, a OBMEP, que se tornou a partir de 2005, ano de sua criação, um horizonte de performance satisfatório e passível de ser alcançado pelos alunos, ganhará protagonismo. Na sequência, um dos aspectos marcantes privilegiado pela OBMEP como a capacidade intuitiva do aluno de perceber padrões geométricos ganhará destaque. Inequivocamente, a simetria merecerá um olhar todo especial do estudo. A seguir, a imensa potencialidade pedagógica circunscrita aos materiais concretos manipuláveis ganhará importância no estudo, tendo em vista a possibilidade de transformar o ambiente escolar em um cenário marcado pelo lúdico, onde a interação entre os alunos e a exploração máxima dos sentidos possam ganhar destaque no processo ensino-aprendizagem. Por fim, o estudo dará grande protagonismo à construção e à utilização de ferramentas didáticas consagradas ao longo dos tempos para o ensino de geometria como foco na OBMEP como: Tangram, tabuleiro Geoplano e a experiência projetiva de objetos em anteparos. Ao final desse trabalho, espera-se que possa emergir uma resposta para o seguinte questionamento: seria possível a realização de um trabalho de preparação para os exames de níveis 1 e 2 da OBMEP no tocante à geometria plana com o auxílio de materiais didáticos construídos a partir da reciclagem e, se possível, com a participação efetiva dos alunos na construção dos referidos materiais, de modo que a cooperação entre os mesmos e a mediação exercida pelo professor possam ter um papel preponderante?

1 METODOLOGIA

É de se destacar que a geometria sempre teve por premissa básica a resolução de problemas concretos que afligiam os povos ao longo dos séculos como, por exemplo, construção de aquedutos, construção de pontes e estimativa para o comprimento da circunferência que circunscreve o planeta Terra. Com esse espírito, os exames anuais propiciados pela OBMEP prestigiam situações-problema pautadas pelo caráter essencialmente concreto e que façam parte da realidade dos alunos. Ganha relevo nesta avaliação um resgate de uma peculiaridade que sempre pautou os avanços na área da geometria plana ao longo dos séculos: a busca incessante por resolver os problemas concretos do cotidiano dos povos. Nessa mesma linha de pensamento, torna-se salutar aludir as palavras de Gerdes (1992) apud Baldissera (2011):

> Gerdes (1992) também argumenta que a geometria nasceu como uma ciência empírica ou experimental para só depois se tornar uma ciência matemática. Também analisa as relações entre o desenvolvimento das técnicas de confecção de objetos antigos e o despertar do conhecimento geométrico (GERDES, 1992 apud BALDISSERA, 2011, p.6).

Ao se olhar com profundidade para as questões da OBMEP, a intuição matemática dos alunos ganha muito mais destaque do que o saber formal. Ademais, cada questão de geometria plana deste exame possibilita de forma farta a criação de diversas atividades em sala de aula com base em materiais manipuláveis, a fim de se buscar de forma cooperativa e dinâmica a resolução.

Um conceito deveras fascinante e exaustivamente cobrado no exame é a simetria, tendo em vista a sua presença marcante na rotina dos alunos. Quando o aluno vislumbra sua imagem em um espelho ou direciona sua atenção para os padrões de muitas formas na natureza ou, até mesmo, no interior de uma sala de aula, não resta dúvida o poder que emerge da simetria. A BNCC (2017) preconiza que as habilidades atinentes aos alunos no que tange à aprendizagem do tema transformações geométricas, o qual está intrinsicamente ligado ao conceito de simetria, há que ser trabalhada ao longo do ensino fundamental com as formalizações inerentes. De forma acertada, a OBMEP cobra dos alunos a capacidade de intuir sobre o tema, a despeito do fato de que eles não o dominem formalmente. Segundo Chauí (2000 apud Santos, 2014), tem-se:

> A intuição é uma 'visão' direta e imediata do objeto do conhecimento, um contato direto e imediato com ele, sem necessidade de provas ou demonstrações para saber o que conhece". Nessa interpretação parece haver um apelo a imagem, que permeia a necessidade do real, do que pode ser visto, mesmo que não seja visto com os olhos, mas com a mente (CHAUÍ, 2000 apud SANTOS, 2014).

Com base na argumentação em voga, a pesquisa focará em estratégias para que conceitos de geometria plana de grande relevância para a OBMEP possam ser trabalhados com materiais pedagógicos, consagrados e de baixíssimo custo. O estudo será desenvolvido em três fases.

A primeira fase terá por norte a construção de materiais didáticos a serem utilizados no processo de ensino-aprendizagem essencialmente experimental e com a participação efetiva dos alunos. A matéria-prima para a referida construção seria obtida de produtos descartados por repartições públicas. Dessa forma, serão construídos itens como Tangram e outras figuras geométricas com base em pastas de arquivo não mais úteis para o serviço. Da mesma forma, serão utilizadas madeiras do tipo MDF, oriundas de mobílias igualmente descartadas, para a construção de tabuleiros Geoplanos. O objetivo maior será empoderar o aluno no processo de modo que ele possa construir ferramentas poderosas de ensino, além de ter a possibilidade de levar o item para sua residência, a fim de dar continuidade à aprendizagem em seu domicílio. Convém aludir ao fato de que não será possível incluir na dissertação um tutorial de construção dos materiais didáticos, pois desvirtuaria o escopo principal do trabalho, que está circunscrito ao modo de utilizar os utensílios na construção intuitiva de propriedades geométricas relevantes com foco na resolução de problemas, sendo que as ideias que permeiam a construção serão mencionadas. Ademais, consta nesta primeira fase a construção de uma base de projeção em um anteparo de figuras planas utilizando um suporte de "sefie", a lanterna de um celular e uma fita métrica para promover experimentos atinentes à ampliação e encolhimento de figuras planas.

Um aspecto conceitual norteador para a metodologia a ser conduzida pela pesquisa na realização da segunda e da terceira fases é decorrente da impactante contribuição propiciada pelo psicólogo bielo-russo Lev Vygotsky (1896-1934), no processo de gestação da denominada teoria sócio-histórica, um marco crucial para a concepção construtivista no processo de ensino-aprendizagem. Faz-se mister aludir ao fato de que os dados inaugurais ora declinados foram extraídos do artigo Ferrari (2008, p.1). Com base no trabalho acadêmico Maranhão, Rodrigues e Gonçalves (2013), surgem dois conceitos decorrentes da teoria de Vygotsky primordiais para a dissertação em curso: **zona de desenvolvimento real ou efetivo** (ZDR) e **zona de desenvolvimento potencial ou proximal** (ZDP), os quais seguem abaixo definidos:

> **A Zona de Desenvolvimento Real ou** Efetivo (ZDR) diz respeito às atividades e tarefas que a criança já consegue desempenhar com autonomia, pois possui funções e capacidades que aprendeu e domina.

> **A Zona de Desenvolvimento Potencial ou Proximal** (ZDP) diz respeito às atividades e tarefas que a criança só consegue fazer com auxílio de outro indivíduo (MARANHÃO; RODRIGUES; GONÇALVES, 2013, p. 932)

A estratégia a ser implementada pela pesquisa buscará dar importância aos conhecimentos prévios trazidos pelos alunos ao ambiente escolar com base em sua vivência, frutos da intuição, que compõem a zona de desenvolvimento real ou efetivo, e partir para uma proposta de construção de uma mediação com base em atividades essencialmente empíricas, auxiliadas por materiais concretos manipuláveis, para inaugurarem um processo de discussão concernente a conceitos geométricos cruciais para a OBMEP, com o propósito de adentrar o saber dentro da zona de desenvolvimento potencial ou proximal.

A segunda fase da pesquisa será marcada pelo desenvolvimento de atividades lúdicas, a fim de que os alunos possam discutir entre si sobre indagações pertinentes apresentadas pelo professor. O objetivo do mediador será levar os alunos a intuir, com base na manipulação de figuras planas convenientemente escolhidas, conceitos geométricos relevantes. Nessa fase, o papel do professor será primordial no sentido de apresentar questionamentos pontuais no sentido de possibilitar que o aluno possa experimentar a sensação inigualável da descoberta, consoante apregoa Vergnaud (1990 apud Baldissera, 2011) a seguir:

> [...] um dos maiores problemas na educação decorre do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos... de alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos... solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças em suas ideais. (VERGNAUD, 1990 apud BALDISSERA, 2008, p.2)

Por fim, a construção intuitiva desenvolvida será aplicada a questões de geometria plana da OBMEP com o intuito de que a eficiência da construção cognitiva estabelecida possa mostrar, de fato, o seu caráter exequível. Convém ressaltar que o relato de Goes (2017), decorrente de uma experiência deveras exitosa com a preparação de alunos de escolas públicas do município alagoano de Branquinhas nos anos de 2015 e 2016 serviu de inspiração para o trabalho em curso e acena para a possibilidade de resgate do ensino público de matemática, como segue:

> Nesses dois anos de aplicação, o estudo provocou uma verdadeira revolução da educação do município. Os alunos mudaram suas posturas a respeito do interesse pelos estudos, especialmente pelos conteúdos matemáticos, despertando a curiosidade, o instinto investigativo, a vontade de descobrir e aprender o novo. Nos professores de matemática, a mudança foi ainda mais significativa, uma vez que passaram a planejar suas aulas fazendo uso das questões da OBMEP, enriquecendo suas práticas docentes com problemas envolventes, lógicos, criativos e desafiadores, e acima de tudo, os professores passaram a acreditar mais nos seus alunos. Os resultados obtidos na OBMEP, edição 2015 e principalmente na edição 2016, mostraram que aqueles alunos, antes desacreditados, podiam, sim, chegar longe, e

> guardavam em seu interior um potencial imenso, pronto e disposto a ser explorado. (GOES, 2017, p.66).

Surge o momento em que ganha relevo a necessidade de traduzir as metodologias que permearão o estudo em voga para a linguagem pertinente à seara da Educação Matemática. Ao longo de todo o estudo, a pesquisa bibliográfica, primeira metodologia, irá fornecer informações capazes tanto de enriquecer as explicações sobre os conteúdos expostos quanto de nortear os rumos da linha investigativa implementada. Nesse sentido, o artigo de Souza, Oliveira e Alves (2021) fornece uma explicação oportuna:

> A pesquisa bibliográfica é o levantamento ou revisão de obras publicadas sobre a teoria que irá direcionar o trabalho científico o que necessita uma dedicação, estudo e análise pelo pesquisador que irá executar o trabalho científico e tem como objetivo reunir e analisar textos publicados, para apoiar o trabalho científico (SOUZA; OLIVEIRA; ALVES, 2021, p. 66).

Por outro lado, tendo em vista que a premissa básica da dissertação versa sobre o questionamento a respeito da viabilidade de o educador construir materiais didáticos com os alunos e utilizá-los de modo cooperativo e lúdico com vista a uma potencial preparação para o exame da OBMEP, a metodologia investigativa inerente à **pesquisa de desenvolvimento** passará a ganhar importância com o avançar do estudo. Dessa forma, o artigo elaborado por Barbosa e Oliveira (2015) promove uma definição bastante esclarecedora do tema a seguir:

> De maneira geral, podemos dizer que uma pesquisa de desenvolvimento refere-se àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões. Por delineamento, entendemos a elaboração do artefato em sua primeira versão; o desenvolvimento, por sua vez, refere-se ao processo contínuo de seu refinamento por meio da avaliação sistemática (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Sendo assim, a **pesquisa de desenvolvimento** preconiza o surgimento de um produto da seara educacional com aplicabilidade imediata, a fim de gerar possibilidades para o cotidiano escolar consoante o destacado abaixo:

> Como a pesquisa de desenvolvimento envolve a geração de um produto educacional, o que, no nosso caso, pode ser um material didático, um software educativo, um programa curricular, etc., ela refere-se, portanto, ao que denominamos genericamente como um tipo de pesquisa de intervenção (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527).
> .

Há que se destacar a forma intrínseca com que as duas metodologias em questão dialogarão entre si ao longo da pesquisa. Enquanto a pesquisa bibliográfica permeará todo o processo, a pesquisa de desenvolvimento terá presença bastante consistente na segunda metade da dissertação, ocasião em que os meandros do processo ensino-aprendizagem falarão mais alto. Ainda assim, a pesquisa bibliográfica persistirá dando todo o embasamento necessário para que a pesquisa de desenvolvimento possa ensejar um produto potencialmente eficaz para o contexto da sala de aula.

A seguir será apresentado um panorama histórico que evidencia o quanto a geometria se desenvolveu ao longo dos tempos, não por causa de situações hipotéticas, mas sim por problemas concretos que afligiam civilizações por todo o planeta.

2 GEOMETRIA COMO ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS

É de causar fascínio a impactante beleza e a considerável funcionalidade das engenhosas produções arquitetônicas dos povos ao longo dos séculos. Tanto em palácios suntuosos quanto em estruturas complexas imprescindíveis para a vida em sociedade como aquedutos e muralhas, por exemplo, o poder das formas geométricas salta aos olhos e traz à tona uma indagação inevitável: como conseguiram realizar um projeto de construção tão grandioso dispondo de tão poucos recursos?

Nunca se deve esquecer que a evolução do saber atinente à geometria ao longo dos tempos normalmente se fez no intuito de possibilitar suplantar as barreiras impostas tanto pela natureza quanto pela limitação de recursos disponíveis na busca por resolver problemas concretos e complexos que se impunham entre os povos e o progresso. O artigo acadêmico Vidal e Eustáquio (2014) apresenta uma reflexão bastante pertinente nesse sentido:

> As antigas civilizações perceberam que o mundo é feito de padrões e sequências, as paisagens estão em constante mudança. Com o tempo os povos começaram a fazer ligações, a contar e ordenar o espaço onde viviam e com isso começou a surgir um universo totalmente novo e desconhecido que hoje chamamos de Matemática. Isto mostra que os conhecimentos matemáticos e geométricos atuais são fruto do trabalho de diversas pessoas ao longo do tempo. E cada um desses matemáticos estavam envolvidos em diferentes contextos sociais e, motivados por assuntos de seus cotidianos produziram novos conhecimentos (VIDAL; EUSTÁQUIO, 2014, p. 4).

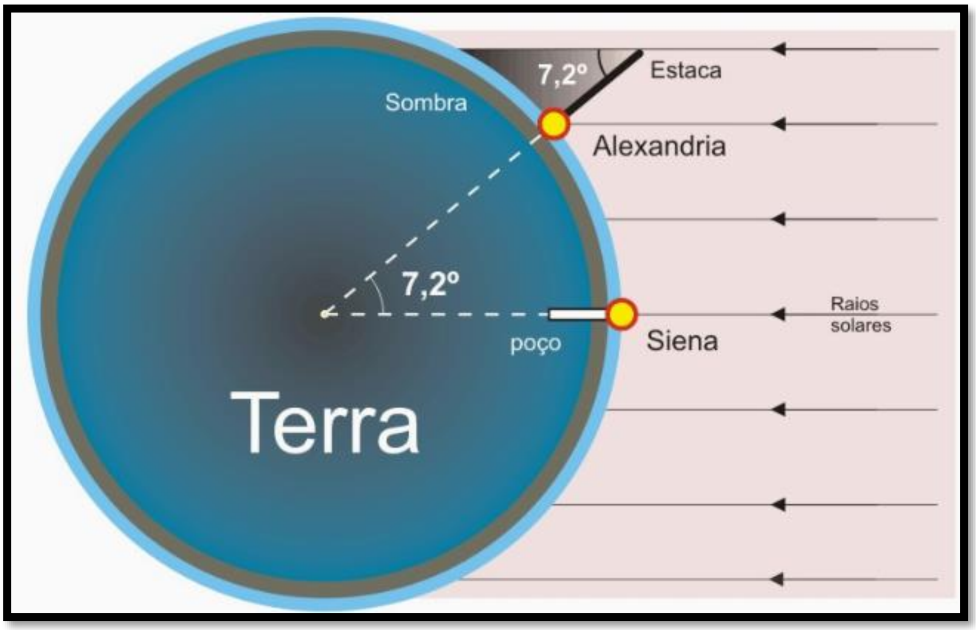
Destarte, com o propósito de lastrear de evidências fáticas os argumentos ora enfatizados sobre a marcante vocação histórica da geometria para resolver problemas desafiadores para os povos ao longo dos tempos, a seguir a pesquisa apresentará situações em que a geometria de início possibilita uma estimativa notável para a circunferência da Terra, depois terá protagonismo na expansão dos conjuntos numérico e, ao final, ensejará na natureza uma contribuição sobre a maximização de performance no acondicionamento de mel pelas abelhas com o mínimo dispêndio de cera.

2.1 A estimativa da circunferência da terra de Eratóstenes

Em seu trabalho acadêmico, Vinagre (2002), o autor percorreu todo o processo desenvolvido empiricamente há mais de dois mil anos pelo matemático grego Eratóstenes que propiciou uma estimativa surpreendente para a época no que tange à circunferência da Terra. Contando com o conhecimento acerca da esfericidade da Terra, com a informação de que uma boa estimativa para a distância entre as cidades de Alexandria e Siena (em torno de 5.000 estádios[1]) e com a preciosa notícia proveniente de transeuntes de Alexandria de que no 21º dia do mês de junho ocorreria um solstício de verão, ocasião em que na cidade de Siena os raios solares brilhariam ao meio dia no fundo de um determinado poço sem deixar sombras nas paredes, Eratóstenes partiu para uma inestimável contribuição para o mundo. Tendo em vista que em Alexandria a sombra ocorreria normalmente no mesmo horário, tratou de medir a inclinação da sombra em relação a algum objeto, a qual sinalizava para o valor de 7,2º. Aplicando os seus notáveis conhecimentos sobre operações elementares com arcos e ângulos em uma circunferência, foi capaz de perceber que a distância entre as cidades ora descritas representava uma fração de $\frac{7{,}2º}{360º}$ da circunferência total da Terra. Eratóstenes chegou à informação de que a circunferência total da Terra tinha 250.000 estádios ou 39.250 km. Através de medições muitos mais recentes, descobriu-se que o erro de Eratóstenes foi da ordem de 320 km. É importante ressaltar que tal fato ocorreu há mais de 2.000 anos. Em seu trabalho acadêmico, o autor André Luiz Mendes Vinagre discutiu os possíveis erros cometidos por Eratóstenes no processo. Por aqui, o trabalho limita-se a se deleitar com tamanha engenhosidade no tocante ao emprego de conceitos tão básicos de geometria para uma ação deveras impactante e eternizada em livros clássicos como a História da Matemática de Boyer de 1968. A geometria é uma parte da matemática muito fascinante, pois permite respostas geniais, curtas e transformadoras. A extrema curiosidade de Eratóstenes certamente era uma aflição compartilhada não só por todos os seus contemporâneos, mas também pelos seus antepassados. Ele, impelido pela coragem e pelo tom desbravador, marca dos grandes matemáticos, se arvorou a utilizar as ferramentas conceituais de que dispunha e dar um caráter eminentemente prático às mesmas. Nunca se deve perder de vista que os conhecimentos atinentes à geometria são mormente impactantes por terem alta capacidade de serem apresentados empiricamente. São interessantes, também, por permitirem ser contemplados em experiências simples e inesquecíveis. A ilustração abaixo declinada possibilita a visualização da notável contribuição de Eratóstenes para a humanidade, a qual se torna ainda mais impactante ao se considerar que o mesmo dispunha de uma simples estaca de madeira como única ferramenta utilizada.[1]

[1] "O **estádio** é uma das unidades de comprimento utilizada na Grécia antiga. Como era habitual na Antiguidade não havia uma só medida para o estádio, pois, por exemplo, o estádio que empregou Eratóstenes para medir a circunferência da Terra era aproximadamente 158 metros (estádio egípcio), enquanto, o comprimento do estádio olímpico (estádio ático) era de 192 metros" (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 164) apud (MONTEIRO, 2015)

Figura 1 – Experiência realizada por Eratóstenes em Alexandria.



Fonte: site http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/ Acesso em agosto de 2022.

2.2 A geometria contribuindo para o surgimento dos números irracionais

Ao longo da História, a geometria sempre esteve comprometida com a resolução de problemas que afligiam os povos no desempenhar de suas atividades por vezes rotineira, permitindo, por conseguinte, superar o encontro com situações insuperáveis e inquietantes. A geometria sempre foi pródiga em colocar povos diante de encruzilhadas, de modo que todo o conhecimento obtido até então mostra-se incapaz de prover respostas para os estudiosos da época. É fundamental aludir ao fato de que o surgimento dos números irracionais se deu justamente na ocasião em que a sociedade se deparou com o problema da incomensurabilidade. O livro História da Matemática, Boyer (1968), descreve uma passagem em que são apresentados dois argumentos controversos sobre a possibilidade de a geometria de fato ter aberto os horizontes para a expansão numérica vivenciada pela humanidade. A favor do $\sqrt{2}$ como o responsável por retirar os matemáticos da época de sua zona de conforto, o livro História da Matemática apresenta o seguinte argumento:

> A sugestão mais plausível é que a descoberta fosse feita por Pitágoras em algum momento antes de 410 A.C. Alguns a atribuem especificamente Hipanus de Metapontum durante a primeira parte do último quarto do quinto século a.C, enquanto que outros a colocam meio século mais tarde. As circunstâncias que rodearam a

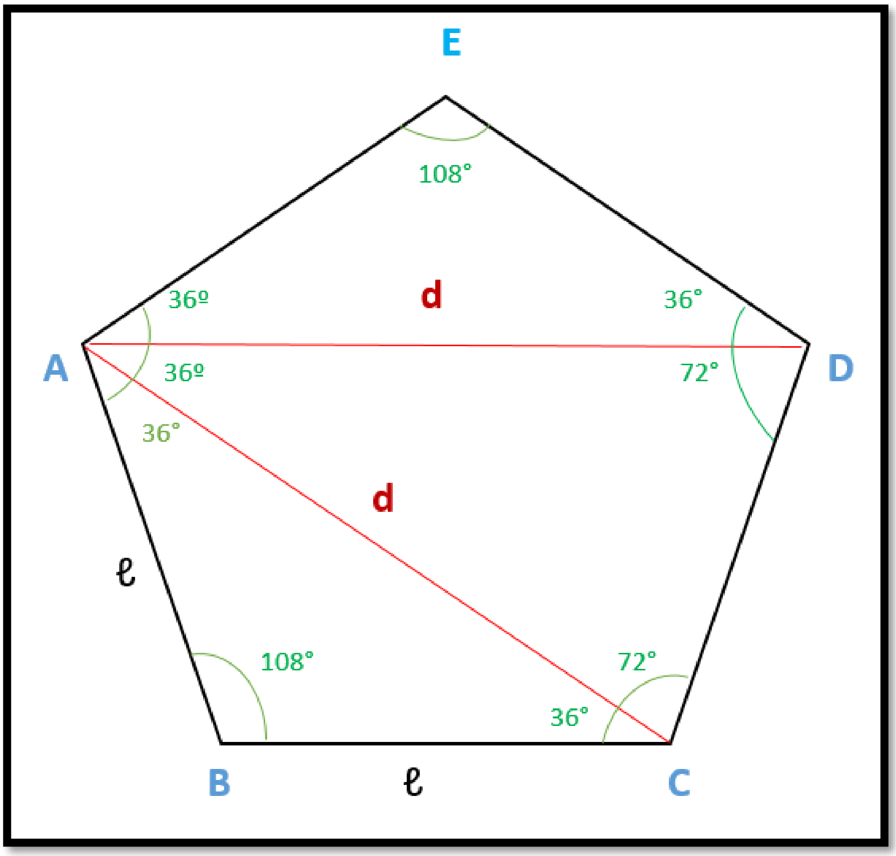
> primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época da descoberta. Comumente se supõe que a percepção veio em conexão com a aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Aristóteles se refere a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com o seu lado [...] (BOYER, 1968, pag. 53 e 54).

Por outro lado, os defensores de $\sqrt{5}$ encontram respaldo em Boyer (1968) que preconiza o seguinte:

> Mas há outros modos pelos quais a descoberta pode ter sido feita. Entre esses, a simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono (regular), elas formam um pentágono regular menor (Fig.5.6) e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional. [...] leva a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ como sendo a razão entre o lado de um pentágono regular e a diagonal. A razão entre a diagonal do cubo para uma aresta é $\sqrt{3}$ e aqui também o espectro da incomensurabilidade ergue sua feia cabeça. (BOYER, 1968, pag. 54).

Com o intuito de lastrear a citação supracitada da pertinente formalização, torna-se imprescindível em um primeiro momento apresentar na ilustração abaixo um pentágono regular para ser explorado na explicação em curso.

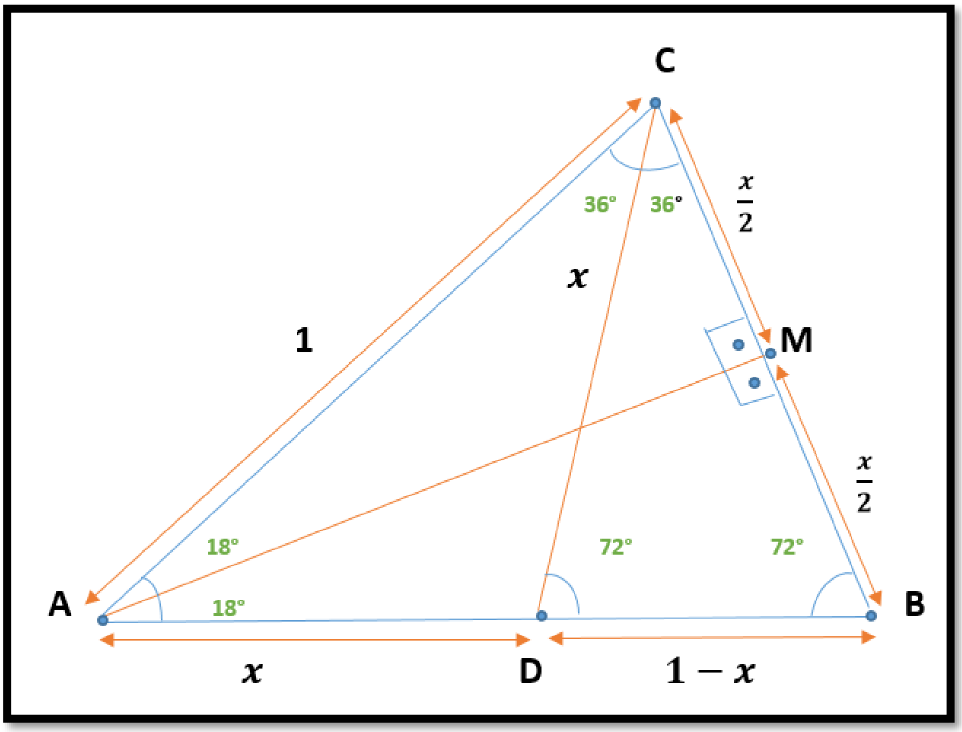
Figura 2 – Processo com diagonais em pentágono regular.



Fonte: Autor, 2022.

Faz-se mister aludir ao fato de que o ângulo interno de um pentágono regular vale 108º, fato este elementar decorrente da razão “ $\frac{180°\cdot(n-2)}{n}$ “, em que “n” diz respeito ao número de lados do polígono. Outro fato diz respeito à igualdade dos ângulos de um triângulo isósceles, os quais não possuem como vértice aquele que é resultado da interseção dos lados congruentes do triângulo. A figura apresentada abaixo é um triângulo isósceles convenientemente construído de modo que os lados congruentes sejam $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Figura 3 – Triângulo ABC com as cevianas $\overline{AM}$ e $\overline{CD}$.



Fonte: Autor, 2022.

Com base na figura acima, resta inequívoco que a ceviana $\overline{AM}$ é bissetriz em relação ao ângulo $C\hat{A}B$ e mediana e altura em relação ao lado $\overline{BC}$. Já a ceviana $\overline{CD}$ se comporta como a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$, o qual vale 72º, e define na base $\overline{AB}$ os segmentos $\overline{AD}$, que é denotado por “x”, e $\overline{BD}$, que é denotado por “1-x”, admitindo-se que o segmento $\overline{AB}$ seja igual a 1. Agora será feita a demonstração para se chegar ao valor de “x”.

Demonstração:

Os triângulos isósceles ABC e BCD são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA), tendo em vista que ambos possuem dois ângulos iguais a 72º. Ao se aplicar a decorrência da semelhança aos lados tem-se:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

Fazendo-se as devidas substituições, tem-se:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

Aplicando-se as propriedades inerentes tem-se:

$$x \cdot x = (1-x) \cdot 1$$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Ao se resolver a equação pelo método de Bháskara, tem-se:

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

Consequentemente, tem-se:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x deve ser positivo, pois é uma medida de lado, tem-se que:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Um outro irracional que causou tamanho alvoroço para os matemáticos antigos foi π (pi), pois desde os primórdios a humanidade se relaciona com a forma circular, sendo que para se atingir um entendimento pleno a respeito desse número, foi fundamental desmistificar a barreira da incomensurabilidade. Consoante ressalta Boyer (1968), no Egito, segundo os papiros de Ahmes, principal fonte de informação para a época e escrito por volta de 1650 a.C pelo mesmo, havia uma estimativa muito boa para a época segundo o fragmento abaixo:

> [...] devemos lembrar que o valor de π (pi) dado por Ahmes é $3\,\frac{1}{6}$ e não $3\,\frac{1}{7}$. Que o valor de Ahmes foi usado também por outros egípcios se verifica num rolo de papiro da décima-segunda dinastia o Papiro Kahun, (agora em Londres), em que o volume de um cilindro é calculado multiplicando a altura pela área da base, a área da base sendo determinada pela regra de Ahmes.(BOYER, 1968, p. 9-10).

No tocante à estimativa usada pelos babilônios na Mesopotâmia, a obra de Boyer (1968) traz uma resposta contundente para uma controvérsia inerente ao número π. O livro ressalta que era notório na época que os babilônios calculavam a área do círculo multiplicando-se 3 pelo quadrado do raio, dando conta de que seria uma péssima estimativa para π comparada com o que foi preconizado pelos predecessores egípcios. Somente em 1936 a justiça histórica foi feita com a descoberta de um grupo de tabletas matemáticas desenterradas na cidade de Susa, situada a uns trezentos quilômetros da cidade conhecida por Babilônia, atualmente parte do Iraque, trazendo à tona, segundo relata a obra supracitada que permeia o relato, destacando o seguinte:

> Na mesma tableta o escriba dá 0;57,36 como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito; e disso podemos concluir imediatamente que o escriba babilônio tinha tomado 3;7,30 ou 3 $\frac{1}{8}$ como aproximação para π. Isso é pelo menos tão bom quanto o valor adotado no Egito (BOYER, 1968, pag. 28).

Dando um salto na história, chegamos a contribuição inestimável dos chineses na busca de um refinamento maior ao valor de π. O livro História da Matemática nos brinda com a saga do fascínio do matemático chinês Tsu Ch'ung-chih (430-501) pela busca de um valor presumidamente exato para π. Refutando a estimativa tida como "inexata", Tsu apresentou o valor supostamente preciso de $\frac{355}{113}$, uma estimativa inigualável para a época. Sendo que esse impressionante matemático causou ainda mais surpresa ao avançar na precisão, consoante a obra propicia o registro:

> No entanto Tsu Ch`ung-chih foi ainda mais longe em seus cálculos, pois de 3,1415927 como valor "em excesso" e 3,1415926 como "em falta". Os cálculos pelos quais ele chegou a essas limitações, aparentemente ajudado por seu filho Tsu Cheng-Chih, provavelmente estavam contidos em algum de seus livros, agora perdido. De qualquer modo, seus resultados eram notáveis para a época e é justo que hoje um ponto assinalado na superfície da Lua tenha seu nome (BOYER, 1968, pag.148).

Em virtude de um comprometimento que gerações de matemáticos sempre tiveram em expandir o conhecimento edificado por gerações passadas, podemos presenciar mais um ato que notabiliza essa marca indelével da produção acadêmica Matemática. Com o avanço no conhecimento matemático em áreas como Análise Real, Cálculo e Topologia da Reta Real, foi possível desenvolver o entendimento sobre a percepção do comportamento de sequências à medida que o índice "n" tende ao infinito, viabilizando ferramentas à altura do desafio de encontrar o valor de π. Por volta de 1573, consoante atesta o livro História da Matemática, o matemático francês François Viète (1540-1603) brindou o mundo com a aproximação mais impactante para o número π até então descoberta com dez algarismos significativos. Sendo que uma façanha mais notável ainda surgiu em 1596 como a obra, descreve:

> A mais impressionante realização nessa linha foi a de Ludolph Van Ceulen (1540-1610). Primeiro ele publicou em 1.596 um valor com vinte casas, obtido a partir de um polígono com quinze lados e dobrando o número de lados trinta e sete vezes. Usando um de lados ainda maior ele conseguiu uma aproximação com trinta e cinco casas, que sua viúva fez gravar em sua pedra tumular. Esse feito de computação impressionou tanto seus sucessores que π frequentemente foi chamado a "constante

> de Ludolph". Mas tais tours de force não tem significado teórico. Uma expressão exata era muito mais desejável, e foi Viète a dar a primeira expressão numérica para π teoricamente precisa – como produto infinito que pode ser escrito como:
>
> $$\boxed{\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots}$$ (BOYER, 1968, p. 235).

Conforme a obra ora citada preconiza, a ideia de Viète apesar de não ser algo extremamente novo, ele teria sido o primeiro matemático na História a expressar analiticamente tal resultado.

É importante nunca perder de vista a luta intensa dos matemáticos de diversas épocas e lugares para se chegar a um conhecimento mais íntimo em relação a esse número que é fascinante e fundamental para a humanidade. Conhecer sua trajetória, permite contemplá-lo de forma mais significativa e, principalmente, compreender o protagonismo da Geometria no que tange á expansão dos conjuntos numéricos. Eivada de grande preocupação nesse sentido, a BNCC (2017), consoante o texto inserido em seu corpo, estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. O referido documento destaca aquilo que o currículo deve buscar desenvolver no estudante de 7º ano como: "[...] estabelecer o número π como razão entre a medida da circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica*"*.

Já para o estudante do 9º ano, a BNCC (2017) preconiza que a grade curricular promova habilidades no sentido de:

> Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como medidas das diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma medida de cada lado como unidade). (BNCC, 2017, p. 319).

Após a argumentação supracitada, o papel de protagonismo da geometria no que concerne a propiciar situações inéditas pava os povos ao longo dos tempos com o propósito de abrir espaço para a reflexão sobre a necessidade de expansão dos conjuntos numéricos foi marcante. Em virtude de ser uma área da matemática com forte apelo visual e com grande aplicabilidade no dia a dia de todos, a geometria é naturalmente vocacionada a ser uma ferramenta muito útil para que as pessoas possam tentar entender e descrever fenômenos ainda fora do domínio cognitivo. Quando se olha para as formas geométricas que se proliferaram no processo evolutivo natural de construção do planeta Terra, a impressão que se tem é que esse saber, além de ancestral, ele foi determinante para a sobrevivência humana ao longo de eras. Ao se olhar para os padrões geométricos presentes em rochas, nas asas das aves ou em movimentos ondulatórios, só para exemplificar, a ideia que emerge imediatamente é a união de duas palavras: perfeição e eficiência. A seguir, a geometria se fará presente em um evento impressionante na natureza: a produção de mel.

2.3 A solução geométrica das abelhas para as colmeias

Quando se pensa na utilização da geometria para a resolução dos problemas que afligem o homem, dificilmente as pessoas são capazes de imaginar que a utilidade dessa formidável ciência não se restringe somente às sociedades humanas. As abelhas sempre utilizaram intuitivamente os preciosos conhecimentos geométricos voltados para a maximização da capacidade de armazenamento dos alvéolos construídos de cera em relação ao mel com o menor consumo de cera e de espaço. Com base no trabalho acadêmico de Molinero, Marques e Jafelice (2007)**,** foi possível entender com clareza a razão pela qual as abelhas sempre fazem a opção de construir ao longo de sua vida os alvéolos, organizados em mosaicos, com a forma individual de um prisma de base hexagonal regular. Com base na fixação da área da base em um valor determinado, comparando triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, estes últimos são os que apresentam o menor perímetro para a área previamente estabelecida.

Analisando o artigo especializado de Vasconcelos (2002)**,** é possível identificar o quanto tal tema tem impressionado os matemáticos ao longo dos tempos como segue:

> O problema dos alvéolos das abelhas despertou a curiosidade dos sábios desde a mais remota antigüidade. O primeiro a se interessar por esse estudo parece ter sido **Pappus de Alexandria**, matemático grego (320 DC). Ele chegou a estudar alvéolos em forma de prismas de seção hexagonal, triangular e quadrada e deixou transparecer que os prismas hexagonais podiam armazenar mais mel do que os outros dois [2]. Entretanto foi Erasmus Bartholin quem primeiro observou que a hipótese de "economia" nada tinha a ver com o trabalho das abelhas que apenas procuravam executar suas células circulares com a maior área possível, mas que, devido à pressão exercida pelas companheiras de trabalho, ficavam impedidas de executar paredes que não fossem planas (VASCONCELOS, 2002, p. 1).

No mesmo artigo, o autor apresenta uma tabela bastante esclarecedora na qual consta uma coluna com polígonos regulares, incluindo-se no final o círculo, de modo que todos tenham a mesma área. A segunda coluna apresenta em valores absolutos o perímetro associado às formas geométricas associadas. Na terceira coluna consta o índice de aumento dos perímetros em relação ao perímetro do hexágono regular, o qual é utilizado como referência.

Tabela 1 – Polígonos regulares com mesma área.

Forma geométrica	Perímetro p	Variação do consumo de cera
Hexágono	6	0
Quadrado	6,447	+7,5%
Triângulo	7,347	+22,5%
Pentágono	8,603	+43,4%
Octógono	8,802	+46,7%
Círculo	11,428	+90,5%

Fonte: VASCONCELOS, 2002, p. 3

As abelhas conseguiram desenvolver uma solução bastante engenhosa por dois motivos que saltam aos olhos. Primeiramente elas conseguem, com base em um processo evolutivo, construir uma estrutura geométrica (hexágono regular) que possibilita o armazenamento do máximo de mel com o menor dispêndio de cera para a construção. Por outro lado, a forma hexagonal possibilita a melhor ocupação do espaço com o perfeito encaixe dos polígonos na criação de um verdadeiro mosaico. É a natureza resolvendo o problema de maximização de forma sábia e engenhosa.

Figura 4 – A colmeia.

Fonte: site uvo.com.br. Acesso em outubro de 2020.

A seguir, a OBMEP, que preconiza uma visão da geometria permeada por situações lúdicas e essencialmente empíricas, será apresentada.

3 A OBMEP

A partir desse intante, o trabalho não se furtará a enfrentar um tema capaz de despertar paixões e ódios em muitos setores da sociedade brasileira: A Olimpíada de Matemática das Escolas Púbicas (OBMEP). Os defensores irão bradar que a meritocracia que permeia essa avaliação, a qual preconiza a premiação dos vencedores, é primordial por coadunar com a valorização dos mais aptos reinante no mercado de trabalho. Nessa linha, o estudo Biondi, Vasconcellos, Menezes-filho, (2009) evidencia os aspectos econômicos advindos da criação da OBMEP com base nos dois fragmentos abaixo expostos:

> A partir do impacto estimado na nota de matemática dos alunos por número de participações na OBMEP e da elasticidade desempenho-renda, calculamos as variações esperadas nos salários anuais. Para uma participação (variação percentual de 0,32% na média dos tratados) esperamos aumento nos salários anuais futuros de 0,10%. Com duas participações, essa variação esperada é de 0,19% e com três de 0,30% (BIONDI, VASCONCELLOS, MENEZES-FILHO, 2009, p.14).
> A análise de retorno econômico trouxe resultados positivos, nos levando a concluir que a realização da OBMEP proporciona benefícios para a qualidade da educação pública do país, com impacto direto nas avaliações educacionais e ganhos futuros em termos de rendimento no mercado de trabalho dos participantes (BIONDI, VASCONCELLOS, MENEZES-FILHO, 2009, p.16).

Por outro lado, os que se posicionam de forma contrária a esse tipo de avaliação enfatizam o abatimento e a falta de esperança que acomete aqueles que tiveram uma performance decepcionante na prova. Dessa forma, surgiria na vida escolar destes alunos mais uma aspecto de desmotivação, o qual fica bem delineado no fragmento de um artigo acadêmico exposto:

> Desde a primeira edição da OBMEP, ocorrida em 2005, temos observado sentimentos e impressões de alunos da Educação Básica, após as provas, que nos têm deixado perplexos, pois não raro eles expressam seu terror em relação às provas da OBMEP e seu progressivo afastamento do interesse em aprender Matemática, a cada edição da olimpíada (HENRIQUES; CASTILHO; RAMOS; JUSTE; MULLER; DIAS, 2015, p. 2).

Não resta dúvida de que os dois lados estão repletos de razão, por mais paradoxal que possa parecer. Enquanto os defensores da OBMEP evidenciam um potencial aspecto contagiante que a vitória possa desempenhar, de modo que os alijados do pódio tendam a buscar a superação para atingir o tão sonhado prêmio, os detratores desse exame enfatizam o papel devastador que a derrota em larga escala possa desencadear na vida escolar de muitos alunos, levando-os a perder qualquer fagulha de motivação para seguir na busca do aprendizado de Matemática.

O que não se pode nunca negar é que, a partir de 2005, o exame da OBMEP passou a ser o nível de performance sonhado e buscado pelas escolas públicas e privadas no que tange às habilidades matemáticas a serem desenvolvidas pelos alunos. A seguir serão declinados aspectos intrínsecos relevantes desta avaliação sob a ótica das habilidades preconizadas pela Base Nacional Comum Curricular, BNCC (2017), e aspectos extrínsecos no que tange à transformação positiva vislumbrada por um número ainda pequeno de escolas públicas, mesmo assim promissor por indicar caminhos a serem trilhados, capaz de sinalizar o quão enriquecedor pode ser o fato de uma escola utilizar o desafio como uma oportunidade única para experimentar mudanças na prática diária tanto de professores quanto dos alunos na busca do aprendizado de Matemática, de modo que todos possam se comportar como uma equipe que tem um objetivo comum: escalar essa grande montanha chamada de OBMEP.

3.1 OBMEP: realidade ou utopia?

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Pública, segundo apregoa o site obmep.org.br, é um projeto nacional criado em 2005 e dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pública e Aplicada (IMPA), tendo como objetivos principais:

> -Estimular e promover o estudo de Matemática;
> -Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
> -Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
> -Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
> -Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público alvo da OBMEP, segundo preconiza o site supracitado, é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. Em 2019, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada.

Fica nítido que o projeto que ensejou a criação da OBMEP estabeleceu os pilares de sustentação da **BNCC (2017)** e possui uma conexão direta com o documento publicado pelo MEC em 1997 denominado Parâmetros Curriculares Nacionais, **PCN (1997**), o qual possui entendimento consolidado sobre o ensino de Matemática no nível fundamental com foco nas seguintes finalidades:

> -Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> -Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis. (PCN, 1997, p. 47 e 48)

Originalmente, a OBMEP era destinada à estudantes a partir do 6° ano do ensino fundamental indo até estudantes do ensino médio. A partir de 2018 foi criada a modalidade nível A, voltada para estudantes do 4º e 5ª ano do ensino fundamental. O presente estudo terá foco em buscar contribuir precipuamente com os níveis 1 e 2 da OBMEP, os quais são voltados para contemplar alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. O trabalho acadêmico em curso em um primeiro plano refletirá sobre as estratégias pedagógicas pautadas pelo lúdico e pelo baixíssimo custo de implementação que podem ser utilizadas no ensino de Geometria de modo a preparar os alunos para uma realização profícua da prova da OBMEP, resgatando ferramentas didáticas já consolidadas e exitosas para essa empreitada, a fim de fomentar o debate e a participação dos alunos da busca de construir intuitivamente alicerces conceituais de Geometria Plana. Em um segundo plano, utilizando a OBMEP como inspiração para a promoção de uma contribuição significativa na prática laborativa cotidiana do ensino de Matemática, questões de Geometria extraídas da OBMEP e dentro do espectro ora delimitado, serão utilizadas como matéria-prima, a fim de que a potencialidade e a eficácia dos métodos sejam atestadas na prática. É de suma importância que ganhe relevo o entendimento de que em nenhum momento o presente estudo terá a pretensão de promover a formalização dos conceitos a serem manipulados, pois diversas bibliografias de extrema qualidade se ocuparam com esse objetivo. O alvo crucial dessa pesquisa reside no prelúdio que antecede a formalização e que busca responder à seguinte indagação: que situação prática pode ser criada e trabalhada em sala de aula para que os alunos, após manipularem os equipamentos didáticos e interagirem com os colegas, possam ter a sua curiosidade aguçada para despertar o interesse em trabalhar na formalização do conceito?

Faz-se mister trazer ao estudo um relato extraído do portal do **MEC,** publicado em 10/07/2014, acerca das experiências relevantes de duas escolas públicas, sendo uma do Rio Grande do Sul e outra do estado de Goiás no que tange à participação dos seus alunos na edição da OBMEP de 2014. A diretora recém empossada da Escola Municipal de Ensino Fundamental Santa Cecília, localizada no município de Viamão (RS) e com mais de 50 anos de existência, de forma corajosa e determinada decidiu inscrever 274 alunos do sexto ao nono anos dos 639 matriculados. Já a diretora Mirene de Almeida Cardoso Lopes da instituição com dois anos de atividade de uma Escola Municipal localizada no município de Bom Jesus de Goiás (Goiás) decidiu inscrever 135 alunos do sexto e sétimo anos na OBMEP com o intuito de desencadear uma motivação na escola. Segundo o relato da diretora Mirene:

> Com a realização da primeira fase da olimpíada, que foi em 27 de maio, a diretora observou o despertar do interesse pela matemática e pela competição. Segundo Mirene, a melhor nota obtida pela escola foi de um estudante do sexto ano que era muito inquieto na sala de aula. Outra conquista destacada pela diretora foi a ótima aceitação dos alunos – nenhum estudante faltou à escola no dia da aplicação dos testes (BRASIL, 2014, p.1).

Às vezes pode parecer que o aparentemente simples ato de inscrever os alunos em uma competição tão desafiadora seja algo perigoso e eivado de insensibilidade por parte de diretores de escolas públicas. Quem pensa assim não é capaz de entender que o ser humano carece de desafios à primeira vista intransponíveis para que a vida passe a ter sentido. A participação em alguma edição da OBMEP possibilita que o aluno que inicia a prova não seja o mesmo que irá concluí-la. Há algo no curso dessa empreitada que gera fortes reflexões no participante. De repente, aquela rebeldia inerente à adolescência pode servir de combustível e sublimada para um propósito maior e mais grandioso. Pode ser canalizada para uma verdadeira batalha. A escola, então, será instada por pais e alunos a, enfim, cumprir esse nobre papel: preparar os soldados para a grande batalha. Nesse processo todos serão vitoriosos. O professor passará a ter um objetivo vibrante em sua carreira, apesar das grandes limitações de recursos normalmente presentes na esmagadora maioria das escolas públicas brasileiras. Os alunos poderão ocupar melhor o seu tempo e vivenciar uma experiência intelectual fascinante, a qual será irradiada para tudo que venham a desempenhar na vida. E a escola? Esta sairá muito mais fortalecida dentro da comunidade em que estiver inserida.

A **UNESCO**, braço da Organização das Nações Unidas (ONU) para a Educação, a Cultura e a Ciência, realizou no ano de 2009 em Paris uma conferência que ensejou a elaboração do documento histórico denominado**: Os desafios do ensino de Matemática na Educação Básica**. No início do documento, fica nítida a importância de se gerar uma aproximação dessa disciplina primordial para as exigências intelectuais do mundo atual e desmistifica-la a todo custo como segue:

> Da mesma forma várias incompreensões afetam a visão da atividade matemática que resulta da imagem que se tem de um matemático. Com frequência, essa atividade é ainda pensada quase exclusivamente como uma atividade solitária, separada dos problemas do mundo real e independente de meios tecnológicos. Ela também é percebida frequentemente como uma atividade puramente dedutiva, que se traduz na produção sucessiva de teoremas por meio de provas formais com um rigor perfeito. Enfim, considera-se com frequência que a matemática não é uma ciência acessível a todos e, em especial, que as meninas têm mais dificuldades para aprendê-la do que os

> meninos. Essas muitas incompreensões afetam o ensino e constituem obstáculos a uma educação matemática de qualidade para todos **(UNESCO, 2009, p. 10).**

A seguir, uma preocupação é exposta no sentido de eliminar este errôneo entendimento inerente ao suposto isolamento do conhecimento matemático:

> Uma educação matemática de qualidade deve, portanto, ser conduzida por uma visão da Matemática como uma ciência viva, em conexão com o mundo real, aberta a relações com outras disciplinas, de modo que tal abertura não se limite apenas a disciplinas científicas. Assim, em particular, deve permitir que os alunos entendam o poder da Matemática como uma ferramenta de modelagem para compreender e agir sobre o mundo. (UNESCO, 2009, pag. 11)

Diante desse imenso desafio que os tempos atuais impõem, mais adiante a OBMEP ganha destaque, pois são elencadas ações contundentes tomadas pelo MEC no sentido de fomentar e democratizar o acesso ao conhecimento matemático na esteira das exigências que a modernidade impõe, como segue:

> Uma outra iniciativa financiada por recursos públicos é o programa especial realizado em conexão com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), um instituto de pesquisa de renome internacional, e pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A OBMEP teve sua primeira edição em 2005, dirigida apenas aos alunos do 6º ao 12º ano escolar (6º ao 9º ano da educação fundamental e três anos da educação secundária/média) das escolas públicas; em 2009, mais de 19 milhões de alunos de 43.854 escolas, representando 99,03% dos municípios do país, participaram da OBMEP. O projeto consiste na aplicação de provas para descobrir estudantes especialmente dotados em Matemática, mas também no oferecimento às escolas e a seus professores de materiais didáticos inovadores (série de problemas). Por outro lado, um programa especial de estudos financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) do Ministério da Ciência e Tecnologia oferece bolsas de estudo aos 300 primeiros premiados na Olimpíada (UNESCO, 2009, p. 82).

3.2 Desempenho das escolas públicas na OBMEP em 2018

Em uma publicação do site da OBMEP no ano de 2018, Cláudio Landim, Diretor Adjunto do Instituto de Matemática Pura e Aplicada **(IMPA)** com sede no RJ e Coordenador-Geral da OBMEP, fez uma reportagem importante no que concerne a enfatizar o desempenho das escolas públicas na edição de 2018 da OBMEP. Considerando o interesse maior da presente pesquisa em voltar a sua atenção para as provas da OBMEP dos níveis 1 e 2, as quais atendem à clientela de estudantes do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, seguem então duas das tabelas apresentadas na reportagem:

Tabela 2 – Desempenho das escolas no nível 1 da OBMEP 2018.

Nível 1: 6º e 7º anos do Ensino Fundamental

Dependência	Escolas	Classificados	Média
Municipal	21.983	159.724	18,34
Estadual	15.980	139.257	22,26
Militar	133	1.696	42,46
Federal	20	221	52,53
Particular	4.660	12.965	43,53

Fonte: OBMEP, 2019, p.2

Tabela 3 – Desempenho das escolas no nível 2 da OBMEP 2018.

Nível 2: 8º e 9º anos do Ensino Fundamental

Dependência	Escolas	Classificados	Média
Municipal	21.118	131.599	13,90
Estadual	16.445	136.821	16,75
Militar	134	1.809	38,07
Federal	22	224	56,97
Particular	4.744	12.484	40,27

Fonte: OBMEP, 2019, p.2.

O resultado pautado pela média de uma quantidade significativa de alunos participantes tanto da esfera pública quanto da esfera privada de ensino atesta primeiramente o grande abismo qualitativo inerente ao ensino praticado pelas escolas públicas civis federais em relação às escolas estaduais e federais. Quando se olha, também, para o ótimo desempenho das escolas militares, uma certeza salta aos olhos: onde as políticas públicas educacionais chegam de forma eficaz e bem planejadas, e com a verba adequada para a implementação, os resultados surgem como consequência natural. É importante perceber que não basta entulhar as escolas públicas de computadores, pois sem uma política séria de capacitação permanente de professores, sem uma adequação estrutural eficiente da escola e sem um planejamento estratégico por parte dos dirigentes públicos responsáveis pela educação visando promover uma incorporação profícua dos computadores à prática docente, tudo torna-se inócuo e meramente alegórico.

As ilustrações supracitadas permitem vislumbrar a tão propalada luz no fim do túnel, pois o desempenho ensejado pelas escolas civis federais voltadas para o ensino fundamental indica que a OBMEP está seguindo um rumo certo, irreversível e deveras producente. As escolas em voga, que estão levando a sério essa nova diretriz inerente ao ensino de Matemática e contando com o aporte de recursos na medida certa, passam a desempenhar um protagonismo no sentido de possibilitar inferir que é plenamente possível e viável que o Estado venha a oferecer um ensino público de extrema qualidade. Já no que diz respeito às escolas municipais e estaduais, os números são bastante deprimentes e sintomáticos. A condução do processo ensino-aprendizagem de matemática nessas instituições parece estar em desacordo com os níveis de performance exigidos pela sociedade atual, razão pela qual torna-se oportuno apresentar uma estratégia que permita em cada nível se mensurar a distância em percentual das escolas em questão em relação às escolas federais civis, as quais tem o Colégio Pedro II como sustentáculo. Sendo assim, as notas atreladas às escolas civis federais serão tomadas como referência (100%), enquanto as notas médias das demais escolas (municipal, estadual, particular e militar) serão apresentadas com base em sua distância percentual em relação ao valor de referência. No que tange ao nível 1 da edição de 2018 da OBMEP, segue o presente quadro comparativo:

Tabela 4 – Comparação das médias com base na das escolas civis federais (nível1).

Índice	Dependência	Percentual em relação ao índice 1
1	Federais	100%
2	Particular	17,13% abaixo
3	Militar	19,17% abaixo
4	Estadual	57,62% abaixo
5	Municipal	65,09% abaixo

Fonte: O Autor, 2020.

Tomando por base os dados fornecidos na tabela inerente ao desempenho das escolas com alunos participantes do exame do nível 2 da edição de 2018 da OBMEP, segue uma nova tabela que toma por base o desempenho das escolas públicas civis federais (100%) e permite visualizar a distância das médias das outras instituições em relação às mesmas como segue:

Tabela 5 – Comparação das médias com base na das escolas civis federais (nível 2).

Índice	**Dependência**	**Percentual em relação ao índice 1**
1	**Federais**	**100%**
2	**Particular**	**29,31% abaixo**
3	**Militar**	**33,18% abaixo**
4	**Estadual**	**70,60% abaixo**
5	**Municipal**	**75,60% abaixo**

Fonte: O Autor, 2020.

Os dados assinalam a importância da OBMEP no sentido de reforçar a urgência de uma mudança de paradigma para o ensino fundamental de Matemática ofertado por instituições de ensino estaduais e municipais. Se por um lado torna-se inequívoco apontar para a necessidade de aumento no tocante ao aporte de recursos nessas instituições, por outro lado ganha espaço a necessidade transformação inerente às práticas pedagógicas implementadas. Na área da geometria, a teoria de Van Hiele foi importante em apontar possibilidades para soluções lúdicas e de baixo custo para um ganho substancial de produtividade no processo de ensino-aprendizagem, desde que haja um verdadeiro processo de capacitação do professor. No tocante a essa teoria, uma sucinta descrição segue abaixo :

> A teoria de Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Dina, infelizmente, morreu logo após concluir sua tese e Pierre foi quem, mais tarde, desenvolveu e disseminou a teoria em publicações posteriores. Enquanto a tese de Pierre tentava, principalmente, explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender geometria (sob tal aspecto, ela era explicativa e descritiva), a tese de Dina versava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos. (VILLIERS, 2010)

Faz-se mister, também, ressaltar que a teoria de Van Hiele enfatizou a importância de se identificar previamente o nível cognitivo dos alunos, a fim de que a mediação a ser implementada pudesse, de fato, produzir desenvolvimento. Ademais, só seria possível se falar em progressão para um nível seguinte quando o nível anterior estivesse de fato sob domínio dos alunos. Nessa linha, o fragmento de texto a seguir traz à baila considerações pertinente:

> O modelo de Van Hiele apresenta cinco níveis hierárquicos, dessa forma o aluno somente passaria de fase se, e somente se, já atingisse o nível de raciocínio proposto na fase anterior, ou nas fases anteriores. Em vista dessa linha de aprendizagem da Geometria, pode então perceber o porquê de tantos educandos apresentarem dificuldades para aprender o conteúdo geométrico, pois o modelo de ensino que se faz presente atualmente é separado por séries, em que a idade define em que categoria cada indivíduo se encontra. Porém, muitas vezes os alunos não estão preparados para compreender o próximo nível, pois ainda não entenderam o nível anterior. (SCHLICKMANN, 2020)

A partir desses esclarecimentos, é possível se perceber que a teoria em questão dá destaque tanto aos diagnósticos preliminar e posterior de aprendizagem dos alunos em cada nível, com base em testagens não convencionais, quanto à mediação capaz de promover desenvolvimento cognitivo real no ambiente de sala de aula. Só se torna possível falar em aprendizagem se o professor tiver conhecimento das limitações cognitivas dos alunos e utilizar as estratégias didáticas corretas, a fim de torná-lo um sujeito ativo no processo de construção do conhecimento.

Quando se olha para os dados contidos no censo escolar de 2018, o qual foi publicado em 08/02/2019 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), as informações oriundas da edição de 2018 da OBMEP passam a indicar um cenário estarrecedor do ensino fundamental público no Brasil, pois em percentual o número de matrículas efetivadas em escolas públicas que oferecem ensino fundamental do 6º ao 9º ano no país e que são de alçada municipal ou estadual representa em média um valor superior a 80% do total de todas as matrículas realizadas, consoante o preconiza os fragmentos abaixo expostos:

> Nos anos iniciais do ensino fundamental, a rede municipal apresenta a maior participação, com 67,8% das matrículas, sendo seguida pelas redes privada (composta por 17,4% da rede privada não conveniada e 1,5% da conveniada) e estadual (13,4%).Nos anos finais do ensino fundamental, a rede municipal possui a maior participação, com 42,8% das matrículas, sendo seguida pelas redes estadual (41,9%) e privada (15,1%) (BRASIL, 2019, p.23).

Tendo em vista o propósito de delimitar o conteúdo atinente à geometria plana de interesse para a pesquisa em curso, o próximo capítulo se debruçará sobre as habilidades a serem desenvolvidas nos alunos do sexto ao nono ano do ensino fundamental à luz da Base Nacional Comum Curricular aprovada em 2017.

3.3 A BNCC e a delimitação da pesquisa

Torna-se também imperioso estabelecer uma delimitação no tocante às valências geométricas conceituais sobre as quais a pesquisa se debruçará. As estratégias pensadas para pautar os rumos dessa pesquisa serão conceitualmente pautadas pelo planejamento norteador emanado da BNCC (2017). Foram pinçadas por série habilidades oriundas do documento supracitado entendidas como propícias a serem trabalhadas de forma lúdica e desafiadora com materiais como o **Tangram**, tabuleiro **Geoplano**, materiais didáticos manipuláveis e artesanais e através de experiências projetivas do campo da Ótica.

Para o sexto ano do ensino fundamental o presente trabalho acadêmico buscará elementos lúdicos para auxiliar na prática de sala de aula em consonância tanto com parte do que é preconizado pela BNCC (2017) para a respectiva série, quanto com as exigências evidenciadas em provas da OBMEP do nível 1 conforme o descrito abaixo:

> -Identificar características dos triângulos e classifica-los em relação às medidas de seus lados e ângulos;
> -Identificar características de quadriláteros, classifica-los em relação a lados e ângulos e reconhecer a inclusão e a interseção de classes entre eles;
> -Construir figuras planas semelhantes em situação de ampliação e de redução, com uso de malhas quadriculadas;
> -Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área (BNCC, 2017, p. 305) .

Para o sétimo ano do ensino fundamental a pesquisa buscará trazer contribuições em relação à parte do que preconiza a BNCC (2017) no tocante ao ensino de geometria, como segue:

> -Construir triângulo, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência quanto à medida de seus lados e verificar que a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180º;
> -Calcular a medida de ângulos internos de polígonos regulares sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculada à construção de mosaicos e de ladrilhamento;
> -Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro (BNCC, 2017, p. 311).

Para o oitavo ano do ensino fundamental, o trabalho em curso focará em delimitações da BNCC (2017) no que tange à geometria consoante o descrito abaixo:

> -Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos;

> -Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos (BNCC, 2017, p. 317).

Enfim, para o nono ano do ensino fundamental, a pesquisa se balizará em itens da BNCC (2017), como segue:

> -Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes;
> -Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secante (BNCC, 2017, p. 319 e 321).

É fundamental evidenciar que o escopo desse estudo não é propor estratégias voltadas para a formalização de conceitos nem buscar trabalhar com softwares voltados para o desenvolvimento de habilidades geométricas em um espaço virtual. Por essa razão, todas as habilidades enfatizadas na BNCC (2017**)** com fulcro nessa valência ora descritas foram excluídas das pormenorizações supramencionadas.

Após todo o protagonismo dado pelo estudo à OBMEP, tanto pelo seu papel indelével como padrão de excelência a ser buscado de forma incansável por todas as escolas quanto pela fascinante atmosfera propiciada pela competição, a qual mobiliza não só a escola como, também, toda a comunidade na perspectiva de busca incansável pela superação do desafio, surge o momento de se refletir sobre uma habilidade enfatizada em cada uma das questões contidas nesta importante avaliação: a intuição. Assim sendo, o próximo capítulo trará considerações relevantes sobre esse tema.

4 A ÊNFASE DADA À INTUIÇÃO PELA OBMEP

Nesse momento, ganha relevo a necessidade de tecer considerações a respeito do caráter decisivo e transformador da intuição na aprendizagem de geometria e o papel do professor ao longo desse processo. Uma célebre argumentação extraída do trabalho acadêmico Piaget (1977) apud Castro (2016, p. 233) evidencia a importância que uma mediação pontual exercida pelo professor, focada em uma atuação efetiva dos alunos na construção do saber, pode desempenhar no processo ensino-aprendizagem, a qual segue: “Cada vez que ensinamos prematuramente a uma criança alguma coisa que poderia ter descoberto por si mesma, esta criança foi impedida de inventar e, consequentemente, de entender completamente”.

Uma outra citação extraída de Piaget (1990) apud Castro (2016) ganha importância no sentido de acenar para o dinamismo e a complexidade do processo de construção do saber de uma forma geral como segue:

> O conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito consciente de si mesmo, nem de objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que se lhe imporiam: resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre o sujeito e objeto, e que dependem portanto, dos dois ao mesmo tempo, mas em virtude de uma indiferenciação completa e não de trocas entre formas distintas (PIAGET, 1990 apud CASTRO, 2016, p. 234).

É possível inferir que a aprendizagem do aluno, para ser plenamente atingida, necessita de uma interação bastante intensa entre o mesmo e o objeto de estudo. O papel do professor ganha relevo ao propor uma constante reflexão sobre os erros inevitáveis que emergem ao longo do processo. A utilização de materiais concretos didáticos atrelados a atividades em grupo com propósitos bem planejados possibilita ao aluno oportunidades ímpares no que tange a sentir o doce sabor da descoberta. Nessa linha de entendimento, o artigo de Pais (1996) propicia uma importante análise à utilização de materiais concretos na fase lúdica de construção do saber, consoante segue abaixo declinado:

> De uma maneira geral, pode ser associado um objeto à maioria das noções geométricas com as quais o aluno tem contato já no programa da escola de primeiro grau. É esta possibilidade que leva a uma vontade por parte do professor do uso desses recursos, os quais devem ser cuidadosamente planejados e fundamentados teoricamente no sentido de que ele possa contribuir, de fato, para uma aprendizagem mais significativa para o aluno (PAIS, 1996, p. 67).

O mesmo artigo de Pais (1996) ressalta a expectativa natural de que ao manipular objetos concretos e escolhidos com base nas suas potencialidades pedagógicas, desde que trabalhados em um contexto de constante reflexão, o aluno estaria com o caminho mais pavimentado na direção de uma formalização dos conceitos geométricos atrelados. É possível ainda acrescentar que a prática docente desenvolvida de modo a fomentar a discussão dos alunos em um contexto de protagonismo por parte dos mesmos na construção das bases conceituais geométricas frente a situações-problemas essencialmente práticas tenderá a alavancar as suas potencialidades intuitivas.

Uma correlação bastante interessante que pode ser feita é entre a aprendizagem e a evolução na relação entre um casal. A formalização de um conceito poderia fazer referência à cerimônia de casamento. Não resta dúvida de que o casamento é um momento para coroar um namoro exitoso. O namoro seria um estágio em que se busca aumentar gradativamente a intimidade e a confiança. Com a aprendizagem ocorre exatamente o mesmo. A intimidade aparentemente despretensiosa do aprendiz em relação ao seu objeto de estudo é fundamental para o crescimento da confiança. É óbvio que vários erros ocorrerão no processo. Somente a superação dos mesmos com base na reflexão propiciada pelas indagações propostas pelo mediador poderá alavancar a aprendizagem. O casamento deve ocorrer como um processo natural demandado pelo atingimento do grau de intimidade necessário.

Uma falha muito comum em nossas escolas é antecipar a formalização dos conceitos, antes mesmo que os alunos tenham adquirido a intimidade necessária com o objeto em voga. A consequência natural é que o casamento tenha uma duração muito pequena. Outra falha igualmente preocupante seria passar tempo demais na fase do namoro e perder o ***timing*** para a formalização. Nesse caso, o ápice do processo não seria atingido. A consequência natural seria a geração de um importante óbice para a evolução na busca do estágio seguinte. No caso da aprendizagem de geometria, o aluno ficaria estagnado em seu estágio, pois não reuniria condições cognitivas para atingir o estágio seguinte. O artigo de Pais (1996) evidencia também uma grande preocupação com a necessidade de que o professor tenha em seu planejamento uma estratégia bem delineada para realizar a transposição do concreto para o abstrato, que seria, de acordo com a analogia ora adotada, a passagem da fase de namoro para o casamento, como segue:

> É evidente, portanto, que a materialidade deve ser suplantada no sentido de permitir a gênese do processo de abstração, caso contrário, recai-se no erro indesejável de admitir a existência de uma "geometria concreta" o que seria contraditória aos objetivos da educação matemática. Nesse ponto reside talvez o maior risco de um uso inadequado ou superficial dos materiais didáticos, quando sua manipulação se restringe puramente a seu aspecto mais imediato. O desafio didático, nesse caso, é saber como dar a continuidade didática entre o uso do material e as questões que levariam à abstração (PAIS, 1996, p. 67 e 68).

Ensinar geometria significa um processo muito mais amplo e complexo do que meramente se realizar uma transmissão de conhecimentos atinentes a formas geométricas. A busca incansável da prática docente volta-se para o desenvolvimento do alicerce imprescindível para a evolução das habilidades cognitivas dos alunos de geometria: a intuição. A intuição no contexto da geometria, por sua vez, está atrelada à capacidade do aluno de identificar padrões inerentes a formas geométricas já apreendidas em situações novas. Uma concepção bastante profícua sobre o significado desse termo primordial para a matemática emerge de Vieira, Paulo e Alevatto (2013) apud Pais (2006):

> [...] a intuição é uma forma de conhecimento espontâneo e imediato, relativo aos conhecimentos acumulados pelo sujeito portador dessa intuição. Pode ser entendida como a apreensão imediata de um objeto e está relacionada às experiências pessoais e a um esforço consciente da pessoa em conhecer o procurado. O conhecimento intuitivo é propiciado pelas experiências que o indivíduo vivencia. A forma pela qual o indivíduo experimenta o mundo que o cerca é propiciada pelos sentidos. Nessa perspectiva, a visualização se apresenta como outro aspecto relevante no estudo de geometria (VIEIRA, PAULO e ALEVATTO, 2013 apud PAIS, 2006, p. 617 e 618).

Não resta dúvida de que a evolução da capacidade intuitiva está inequivocamente atrelada à superação por parte dos alunos dos problemas vivenciados no cotidiano com a necessária reflexão sobre as estratégias implementadas na jornada. Não se desenvolve tal habilidade simplesmente copiando uma estratégia, pois é fundamental que ocorra uma compreensão plena da mesma e, posteriormente, uma aplicação efetiva da referida estratégia a uma situação-problema que se apresente. O trabalho acadêmico de Ávila (1995) apud Nunes (2016) evidencia tal argumentação, como segue:

> A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico – dedutivos - uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de matemática- é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta nesse domínio do conhecimento. A verdade é que o pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico. Em seus aspectos mais criativos, a matemática está ligada muito mais à intuição e à imaginação do que ao raciocínio lógico - dedutivo (ÁVILA, 1995 apud NUNES, 2016, p. 84).

É de suma importância ter em mente que o presente estudo em nenhum momento terá a intenção de propor possibilidades de formalização de conceitos geométricos. A intenção precípua deste projeto é propiciar situações práticas recheadas de informações geométricas para que sejam trabalhadas em um ambiente de discussão em sala de aula. O alvo é um só: buscar alavancar a capacidade intuitiva dos alunos. Nunca se pode perder de vista que as questões de geometria da OBMEP evidenciam uma grande preocupação dos examinadores com a possibilidade de o aluno poder dar vazão a sua capacidade de intuir sobre os padrões contidos nas situações apresentadas. Não há qualquer ênfase em formalizações de conceitos, pois todo o protagonismo é dado ao olhar crítico e criativo do aluno. Normalmente as dimensões das formas geométricas são apresentadas com um considerável respeito às proporções inerentes. Não há, por parte da banca, qualquer interesse em tentar induzir o aluno a erro em decorrência de um desenho intencionalmente mal elaborado. As questões são construídas de modo que a atenção do participante seja direcionada somente para a compreensão do fenômeno que se desenvolve diante dele. Há o uso bastante rico da ideia de simetria. Somente as fórmulas mais elementares são exigidas, como, por exemplo, as que dizem respeito a ângulos, perímetro e áreas de triângulos e paralelogramos.

4.1 A intuição e a construção do cálculo de áreas de retângulos e triângulos

Primeiramente é fundamental aludir ao fato de que a BCNN (2017) preconiza que ao longo do 7º ano do ensino fundamental a seguinte habilidade deve ser trabalhada: “estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros”.

Quando se fala em área de figura plana, a área do retângulo é a mais intuitiva e natural. Imagine que alguém peça para contar quantas garrafas de bebida estão presentes em um engradado retangular cheio como o descrito abaixo:

Figura 5 – Engradado de bebida.

Fonte: site istockfoto.com. Acesso em outubro de 2020.

É possível imaginar que o observador não contará garrafa por garrafa. Ele visualizará inicialmente que existem 4 garrafas em um lado vertical e 5 garrafas do lado horizontal, e depois efetuará o produto 4x5, achando como resultado 20 garrafas. Nesse momento o princípio multiplicativo assume o protagonismo no modo de pensar. O aluno estará contando o número de quadrículas ocupadas. Não há dúvida de que este princípio matemático é utilizado no cotidiano de todos desde o início da vida escolar. As incontáveis situações envolvendo contagens, tanto no contexto recreativo quanto na seara do trabalho, acabam por propiciar uma grande familiaridade com essa operação matemática. Esse domínio intuitivo do princípio multiplicativo associado a grandezas discretas em um arranjo retangular acabava por pavimentar a compreensão do aluno, mesmo que de forma intuitiva, da ideia de área de uma forma geométrica retangular. O trabalho acadêmico de Facco (2003) apresenta uma argumentação histórica que evidencia a compreensão deste tipo de área já em épocas muito distantes como segue:

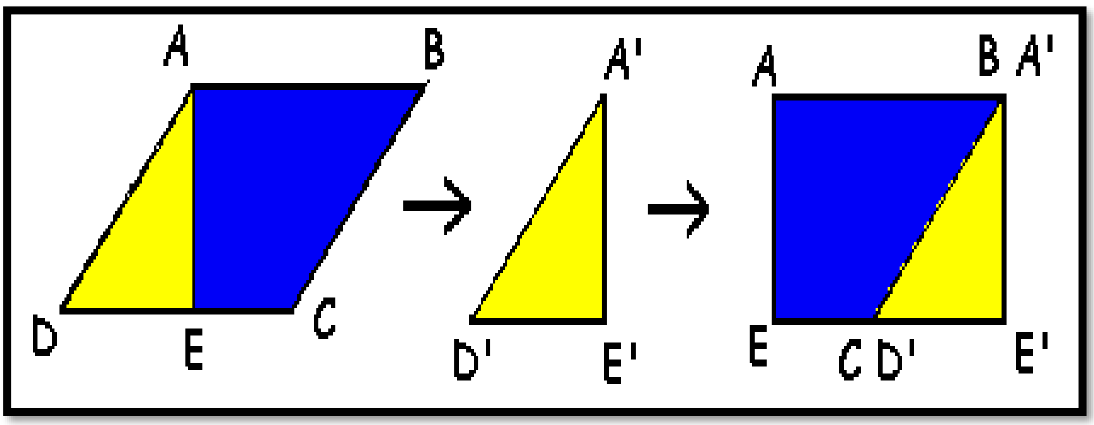
> Numerosos exemplos concretos mostram que os babilônios do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de área de retângulos, de triângulos retângulos e isósceles (e talvez de um triângulo qualquer), de trapézio retângulo e do volume do paralelepípedo retângulo (FACCO, 2003, p. 18).

Quando se observa a definição proposta pelo livro **Medida e Forma em Geometria**, o qual foi publicado em 1991 pelo matemático Elon Lages Lima, LIMA (1991), para o cálculo da área de um retângulo de dimensões inteiras m e n, a constatação em curso ganha solidez, como segue:

> Consideremos agora a área do retângulo. O retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos. Se os lados de um retângulo R têm por medida os números inteiros m e n, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em $m \cdot n$ quadrados unitários, de modo que se deve ter área de R = $m \cdot n$ (LIMA, 1991, p. 14).

Sempre que uma figura plana puder ser representada como um retângulo de área equivalente, nesse momento o cálculo de sua área passa a ser uma atividade revestida de pouca complexidade. No caso de um paralelogramo de base de dimensão **a** e altura de dimensão **b**, basta que seja feita uma intervenção bastante simples para que se obtenha um retângulo de área equivalente. Primeiro deve se fazer um corte perpendicular à base inferior e que atinja um vértice da base superior. Depois basta transportar o fragmento obtido da figura de modo que os outros dois lados paralelos e idênticos se encaixem. Essa estratégia possibilitará a construção de um retângulo de base **a** e altura **h**. A figura abaixo possibilita a visualização de tal fato.

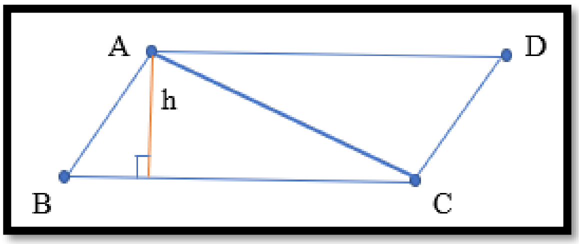
Figura 6 - Transformação de um paralelogramo em um retângulo de mesma área.



Fonte: site www2.mat.ufrgs.br em outubro de 2020

No tocante a área de um triângulo ABC de base **a** e altura **h**, basta ter em mente que ele representa a metade de um paralelogramo de base $\overline{BC} = a$ e altura **h**, o qual foi dividido com na diagonal $\overline{AC}$, como segue:

Figura 7 – Paralelogramo ABCD.

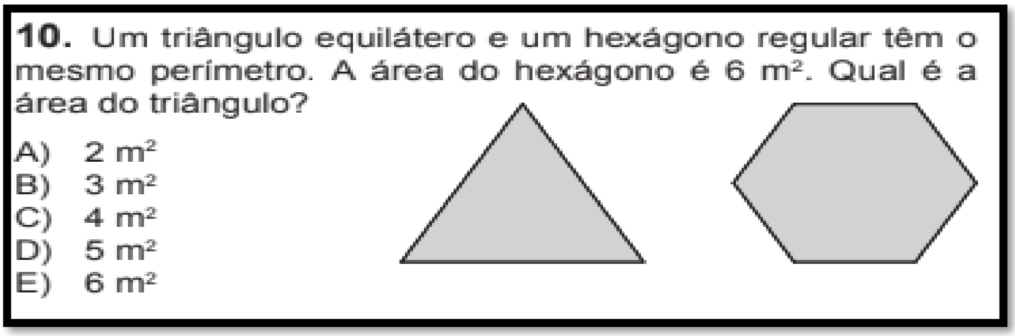


Fonte: Autor, 2020

Tendo em vista que a área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo ABCD, então o seu valor será $a \cdot h/2$. Mais à frente, será apresentada uma forma de se visualizar que os triângulos ABC e ACD são "idênticos", em uma linguagem mais coloquial, ou congruentes, em uma linguagem formal, com base no manuseio de materiais pedagógicos.

Uma questão bastante interessante e extraída do exame da OBMEP da 1ª fase do nível 2 do ano de 2011 segue abaixo:

Figura 8 - Questão 10 da 1ª fase do nível 2 da edição de 2011 da OBMEP.



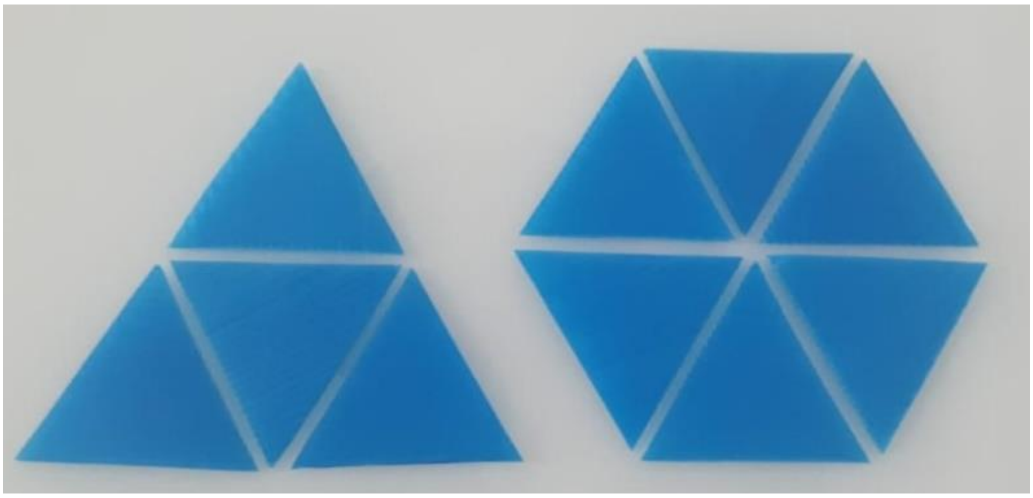
10. Um triângulo equilátero e um hexágono regular têm o mesmo perímetro. A área do hexágono é 6 m². Qual é a área do triângulo?

A) 2 m²
B) 3 m²
C) 4 m²
D) 5 m²
E) 6 m²

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em dezembro de 2020.

É fundamental se perceber que a questão trata de parte do problema enfrentado pelas abelhas ao terem ao longo dos tempos que construir uma forma geométrica para abrigar o máximo de mel possível (área) com o mínimo de material para a confecção dos favos (perímetro). Não resta dúvida de que a questão pode facilmente ser resolvida com a aplicação de fórmulas matemáticas tanto para o cálculo da área do triângulo equilátero quanto para o cálculo da área de um hexágono regular. Ao se olhar para as habilidades exigidas pela BNCC para o estudante da 7ª série do ensino fundamental, o qual participa do nível 2 da OBMEP, é bem possível que ainda não exista um domínio pleno das fórmulas em voga. Torna-se bastante interessante perceber que os elaboradores desta avaliação estavam mais interessados em identificar o potencial intuitivo dos alunos do que o domínio de fórmulas. Esta questão permite um desenvolvimento relacionado a uma decomposição de ambos polígonos regulares em pequenos triângulos equiláteros de lado equivalente ao lado do hexágono regular em voga. Ao se trabalhar em sala de aula de forma a instigar a capacidade intuitiva dos alunos, a partir de uma mediação pautada em indagações pontuais e críticas, é plenamente possível que se chegue às representações geométricas abaixo expostas:

Figura 9 – Decomposição dos polígonos regulares de interesse.



Fonte: Autor, 2020.

É notório que a forma intuitiva de se enxergar a decomposição dos polígonos em tela possibilita uma estratégia deveras elegante e pautada essencialmente em ideias geométricas. Faz-se mister ressaltar que todos os pequenos triângulos equiláteros azuis expostos na imagem foram confeccionados com o plástico de pastas de arquivo reaproveitados.

4.2 A intuição e o cálculo de perímetro e área de figuras semelhantes

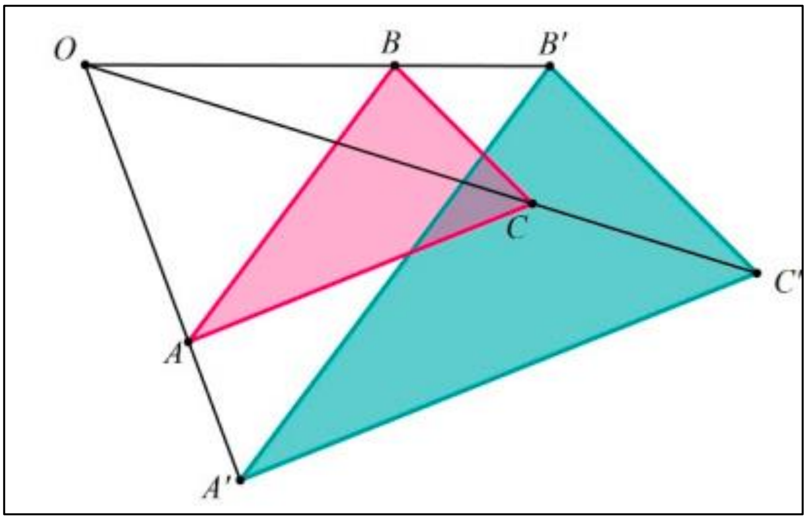
Antes de que sejam apresentadas considerações mais aprofundadas sobre o tema, é fundamental entender que a base conceitual formal do tema semelhança de polígonos possui como sustentáculo o tema semelhança de triângulos. Ao se perscrutar as habilidades a serem desenvolvidas ao longo do 9º ano do ensino fundamental com base na BNCC (2017, p. 317) percebe-se o seguinte: "Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes". O tema semelhança de polígonos pode soar estranho para um aluno, mas certamente os vocábulos ampliação e redução de figuras planas tende a soar de forma muito mais natural e agradável. Desde muito cedo as crianças se acostumam com brincadeiras relacionadas à projeção de figuras planas em paredes. Produções cinematográficas como os filmes "Querida, encolhi as crianças" de 1989 e "Querida, estiquei o bebê" de 1992, trataram da temática ampliação e redução de pessoas, aguçando bastante o interesse dos jovens pelo assunto. O interessante nesse processo é que todos os ângulos presentes na forma são preservados, de modo que não há deformidade. O que sofre alteração são as distâncias, pois todas elas sofrem influência de uma taxa de encolhimento ou ampliação. Tanto a ampliação quanto o encolhimento se enquadram no tema transformações geométricas na modalidade homotetia. O livro "Transformação Geométrica-Homotetia" de Reis e Melo (2019) propõe uma definição elucidativa para o tema:

> A Homotetia é um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantêm as características principais como a forma e os ângulos, abrangendo o paralelismo e a razão entre segmentos correspondentes, permitindo proporcionar uma noção de congruência e semelhança, sendo que a partir dela, todas as outras semelhanças podem ser construídas (REIS, MELO, 2019, p. 6).

É interessante a importância dada pela BNCC (2017) em relação às habilidades demandadas pelo tema transformações geométricas no ensino fundamental, já a partir do 5º ano. Inicialmente há a indicação para que se trabalhe no quinto o reconhecimento por parte dos alunos da consequência nos ângulos e nas distâncias em figuras que surgiram em virtude de ampliação e redução, por intermédio de malhas quadriculadas e tecnologias digitais. No sexto ano, a indicação é de que se desenvolva nos alunos a habilidade de construir figuras planas por ampliação ou redução por intermédio de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou recursos digitais. No sétimo ano, a indicação é para que se desenvolva nos alunos habilidades relativas ao reconhecimento e construção de figuras a partir de transformações geométricas com base em instrumentos de desenhos ou software de geometria dinâmica, tendo como propósito final a vinculação do processo a produções artísticas e arquitetônicas. No oitavo ano, a proposta volta-se para o trabalho com os alunos de situações envolvendo composições de transformações lineares por intermédio de instrumentos de desenho ou software de geometria dinâmica. No nono ano, com as formalizações atinentes à semelhança de triângulos, pode-se passar efetivamente de uma concepção mais intuitiva e lúdica da transformação geométrica para um cenário mais formal. É possível se visualizar inequivocamente um processo evolutivo no que tange à intimidade do aluno com o tema transformação geométrica ao longo do ensino fundamental, preconizando, por conseguinte, um desenvolvimento da capacidade de abstração geométrica do mesmo no contexto escolar. Parte-se do essencialmente concreto para que, de forma paulatina e bastante trabalhada em sala de aula, ir ampliando o poder de abstração do aluno, até se chegar ao momento em que a formalização possa se consolidar. Não resta a menor dúvida a importância que a BNCC (2017) confere e a sua grande relevância a temas fundamentais e que permeiam o cotidiano do aluno como a arte e a arquitetura, por exemplo.

O trabalho acadêmico de Gonçalves (2013) apresenta uma ilustração bastante interessante a respeito de uma homotetia (ampliação) de centro em **O** que servirá de inspiração para experimentos que serão desenvolvidos ao longo da presente pesquisa com o fito de trabalhar de forma lúdica a intuição dos alunos no tocante à percepção da preservação de ângulos e proporcionalidade dos segmentos.

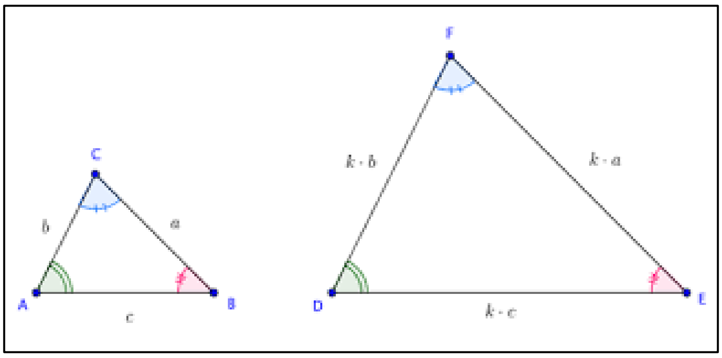
Figura 10 – Homotetia de triângulos.



Fonte: GONÇALVES, 2013, p. 46.

Nos experimentos que serão desenvolvidos a posteriori, o local onde se encontra o centro "O" da homotetia será ocupado por uma lanterna de celular. Haverá uma fita métrica para possibilitar a construção de uma razão $D/_{d}$, onde D representará a distância da lanterna até o anteparo de projeção e d representará a distância de lanterna até a figura a ser projetada. Ao final, restará o entendimento de que tal razão representará a taxa de crescimento que foi aplicada à projeção em relação à forma geométrica projetada. A figura abaixo representa dois triângulos semelhantes, de modo que o triângulo ABC representa o triângulo a ser projetado e o triângulo DEF representa a projeção. Admitindo-se que o segmento $\overline{AB} = c$ seja a base do triângulo, que h seja a altura referente à base $\overline{AB}$ e que k seja a taxa de crescimento, temos o seguinte: sendo S_1 a área do triângulo ABC, seu valor será igual a $c \cdot h/_{2}$, enquanto S_2 ,área do triângulo DEF será igual a ${(k \cdot c) \cdot (k \cdot h)}/{2} = {(c \cdot h).k^2}/{2}$. A consequência é que enquanto nos segmentos a taxa de crescimento **k** é multiplicada pelo tamanho do segmento, no tocante à área, o fato de multiplicação a ser adotado é de **k²**.

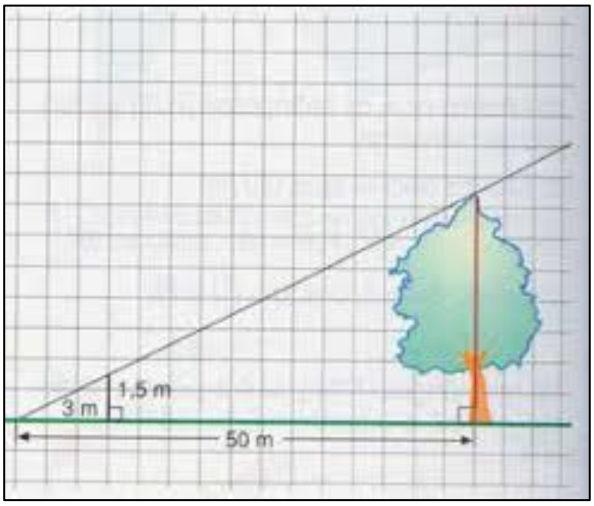
Figura 11 – Triângulos semelhantes ABC *e* DEF.



Fonte: site gestaoeducacional.com.br. Acesso em outubro de 2020.

A figura apresentada logo abaixo expõe uma situação interessante que possibilita a visualização de conceitos geométricos de forma essencialmente empírica:

Figura 12 – Caso prático de semelhança.



Fonte: site mat.uc.pt. Acesso em outubro de 2020.

A intenção primordial do processo é que o aluno ao observar uma situação como a descrita na ilustração abaixo, possa entender claramente que a altura da árvore representa uma ampliação na ordem de ${50m}/{3m} = {50}/{3}$ em relação à altura da madeira apresentada.

Para auxiliar nesse processo, atividades lúdicas de projeção de objetos em anteparos, acompanhadas de uma mediação pontual do professor com indagações que levem à reflexão, podem exercer considerável papel no sentido familiarizar os alunos com situações de ampliação e redução de formas geométricas. Ao se deparar com uma situação-problema como a descrita na ilustração anterior, a recordação atinente às experiências realizadas poderia apresentar uma nova e mais palatável interpretação para o caso, de modo que o entendimento acerca de uma potencial ampliação ganharia tons de naturalidade. Abaixo segue uma imagem que evidencia o quão é interessante são as experiências de projeção de formas em anteparos, tanto do ponto de vista da matemática quanto da arte.

Figura 13 – Projeção artística de objeto em paredes.

Fonte: site revistapegn.globo.com. Acesso em outubro de 2020.

Na esteira das considerações a respeito da importância da capacidade intuitiva para os exames da OBMEP, ganha destaque indiscutível o tema padrões de simetria, tendo em vista que tal assunto permeia as experiências vivenciadas pelos alunos desde a infância, além de conter em seu bojo um forte e fascinante apelo visual. Por essas razões, o próximo capítulo se debruçará sobre o tema simetria.

5 A RAINHA DOS PADRÕES GEOMÉTRICOS: A SIMETRIA

É indiscutível o grande fascínio que os padrões geométricos despertam nos humanos. Uma característica marcante emerge e ganha normalmente destaque quando as pessoas se deparam com disposições geométricas padronizadas: a simetria. Em uma busca investigativa no dicionário virtual denominado Michaelis On-line, o qual encontra-se no site minhaelis.uol.com.br, é possível destacar os seguintes significados para a palavra simetria que seguem abaixo:

- Conjunto de proporções harmonicamente equilibradas;
- Beleza decorrente de proporções harmoniosas;
- Correspondência em tamanho, forma ou arranjo, de partes dispostas em lados contrários de uma linha divisória, um plano, um centro ou um eixo;
- Transformação geométrica que a rigor não modifica a forma, as dimensões ou outra propriedade de uma figura.

O trabalho acadêmico de Fonseca (2013) apresenta uma concepção sucinta e coerente do que seria a simetria, a qual segue:

> Para a maioria das pessoas, o termo 'simetria' está relacionado à arte e a certas propriedades de objetos do mundo físico e é empregado, na linguagem coloquial com muitos significados, como, por exemplo: equilíbrio, harmonia, repetição, perfeição, igualdade entre partes de um objeto (FONSECA, 2013, p. 27).

A natureza é repleta de exemplos impactantes nos quais, por séculos, a beleza que exsurge das formas tem deixado sem palavras gerações após gerações. Quando se olha o sincronismo perfeito das asas de uma ave de rapina ou a inacreditável disposição das formas no couro de muitas serpentes, a humanidade fica sem saber se a vida imita a arte ou vice-versa. Com base na inspiração emanada da natureza, o homem passou a desenvolver diversos inventos que evidenciam a presença da simetria tanto na disposição das peças quanto no movimento das mesmas, a fim de atender não só a propósitos estéticos, mas também para proporcionar um perfeito equilíbrio nas forças que propiciam o movimento. As hélices dos ventiladores residenciais, bem como das turbinas eólicas geradoras de eletricidades, são exemplos marcantes de tal constatação. Nunca se deve esquecer o quanto a simetria foi determinante na execução de imponentes projetos arquitetônicos ao longo do mundo como o majestoso Taj Mahal que se encontra na Índia, que apesar de parecer um castelo, trata-se de um mausoléu. Os espelhos planos que as pessoas possuem em suas casas caracterizam um outro artefato que permite a produção de um evento fundamental para a vida humana, no qual a simetria ganha enorme protagonismo: a reflexão. As imagens apresentadas abaixo ilustram com propriedade eventos em que a simetria possibilita a união entre a beleza e a eficiência:

Figura 14 – As asas da ave de rapina ao voar.

Fonte: site hipercultura.com. Acesso em outubro/2020.

Figura 15 – Padrão das formas no couro de uma serpente.

Fonte: site scienews.com. Acesso em outubro/2020.

Figura 16 – Um gorila impressionado com sua imagem em um espelho.

Fonte: site mundo4tech.com Acesso.em outubro/2020.

Figura 17 – Geradores eólicos de energia elétrica em operação.

Fonte: site purilub.com.br . Acesso em outubro de 2020.

Figura 18 – Um belo castelo com arquitetura focada na simetria.

Fonte: site escoladeformação.sp.gov.br . Acesso em outubro de 2020.

Na busca por entender, sob a ótica da Matemática, o significado da simetria, torna-se imperioso adentrar o conceito de transformações geométricas. Na tese de mestrado de Silva (2017)**,** surge uma relevante definição para tal conceito:

> Quanto às transformações geométricas, de um modo prático, uma Transformação Geométrica é uma aplicação bijetora entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original, se forma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira (SILVA, 2017, p. 30).

Infere-se do fragmento supracitado a existência de duas formas de transformar geometricamente uma figura no plano. Uma delas, que será melhor delineada logo à frente, conservaria todas as distâncias entre pontos e ângulos, ou seja, ensejaria a construção de uma forma congruente à original, mas em outra região do plano, a qual seria nominada de isometria. Por outro lado, a outra aplicação bijetiva em pauta manteria os ângulos associados à figura original, mas alteraria proporcionalmente as distâncias entre os pontos, gerando, por conseguinte, um encolhimento ou expansão. Das isometrias, as três principais seriam: translações, reflexões e rotações. Do segundo grupo de formas, a principal seria a homotetia. Abaixo, segue um fragmento de Silva (2017) com o fito de lastrear a argumentação em tela:

> Translações, reflexões e rotações são exemplos de isometrias, isto é, são transformações que preservam as distâncias entre pontos e as amplitudes dos ângulos, convertendo as figuras originais noutras figuras geometricamente iguais. Por isso, figuras obtidas a partir de isometrias são ditas congruentes. Mas nem todas as transformações geométricas do plano preservam distâncias. Neste caso, as figuras têm a mesma forma, porém com dimensões diferentes, sendo assim, as figuras são semelhantes. Em termos matemáticos, duas figuras no plano são semelhantes quando uma é a imagem da outra por meio de uma transformação de semelhança do plano. (SILVA, 2017, p. 30)

A forma utilizada pela OBMEP para conceituar tanto a simetria quanto as transformações geométricas em pauta ganha enorme importância, pois o escopo crucial desta pesquisa é prover estratégias para a resolução de questões de geometria plana desta prova. Com base em uma pesquisa no site clubes.obmep.org.br em novembro de 2020 é possível destacar o seguinte entendimento sobre simetria:

> Novamente, sem muito rigor, dizemos que uma figura é simétrica (ou tem simetria) quando for possível encontrar uma isometria (diferente da identidade) que transforme essa figura nela própria. Nesse caso, a isometria que deixa uma figura F invariante é dita uma simetria da figura F. Assim uma figura pode **ter simetria de translação**, **simetria de reflexão, simetria de rotação** ou **simetria de reflexão deslizante** ou nenhuma simetria (RIBEIRO; CHAGAS; VIEIRA; MONTEIRO; SILVA; OLIVEIRA; WAGNER, 2018, p. 3).

É interessante perceber que o entendimento da OBMEP sobre simetria já parte diretamente para os casos principais que são as isometrias. O aspecto que destoa um pouco daquilo que foi dito antes é que surge um tipo de isometria definida como reflexão deslizante, a qual, na verdade, não passa de um caso de rotação conforme será visto mais adiante. Ademais, os aspectos essenciais que diferenciam as transformações isométricas principais das não isométricas relevantes para o estudo em curso seguem declinados de forma cirúrgica pelo site supracitado, clubes.obmep.org.br, consulta feita em dezembro de 2020, com a seguinte argumentação:

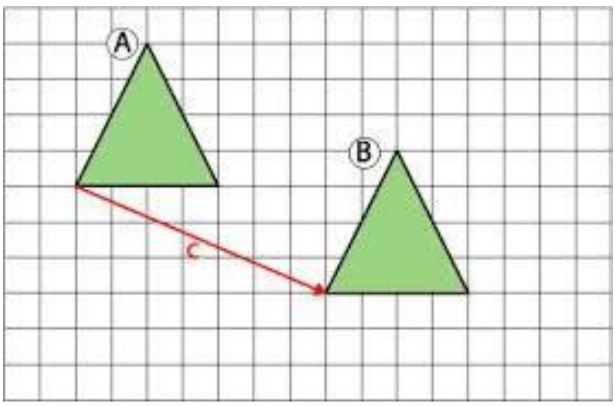
> Sem muito rigor, as isometrias são transformações geométricas que preservam as distâncias entre pontos e as amplitudes de ângulos e, assim, transformam uma figura em outra “geometricamente igual”: cada segmento da figura transformada tem o mesmo tamanho do seu correspondente na figura original, podendo variar a direção ou o sentido, e cada ângulo transformado mantém a sua amplitude inicial. Portanto, uma isometria pode mudar somente a posição da figura na qual ela foi aplicada (RIBEIRO; CHAGAS; VIEIRA; MONTEIRO; SILVA; OLIVEIRA; WAGNER, 2018, p. 1).

O grande desafio que permeia a prática docente no que tange a promover uma discussão producente com os alunos do ensino fundamental, os quais não dispõem de ferramentas conceituais poderosas e arrojadas como determinantes matriciais e vetores, é que a intuição matemática desenvolvida com base na interação dos alunos com os eventos que o cercam no cotidiano ganha todo o protagonismo. É indiscutível que todo jovem lida no seu dia a dia com deslizamentos lineares de objetos sobre superfícies planas, que por sua vez é uma característica essencial da translação. Uma derrapagem de um veículo ao ter o freio abruptamente acionado em um dia de chuva ou o deslizamento de uma patinadora em uma pista de gelo evidenciam são situações capazes de evidenciar tal fenômeno no campo da Cinemática. A importância da translação fica circunscrita ao fato de como estará posicionado o objeto ao final do deslizamento linear. O aluno pode até não saber discorrer sobre a mediatriz como lugar geométrico, aspecto cognitivo primordial para a formalização da reflexão, sendo que é capaz de encarar com naturalidade o evento ótico da reflexão diante de um espelho plano, tendo em vista o caráter fundamental de tal acontecimento em sua vida. Já a rotação é uma prática que o acompanha desde cedo, pois é difícil encontrar uma criança que nunca brincou de rodar pião, de cirandinha ou com um catavento. As isometrias surgem como uma oportunidade magnífica para que se possa trabalhar temas atinentes à Geometria com base em eventos do campo da Física.

De uma forma acessível a alunos do ensino fundamental, o trabalho acadêmico de Ripplinger (2006, p. 24) define translação, ou simetria do deslizamento, como: “Conceituam o movimento de translação como sendo: uma transformação em que a figura se desloca paralelamente a uma reta. Isto é, todos os pontos da figura são deslocados numa mesma direção (retilínea) com a mesma distância”.

Dessa forma, ganha destaque a superfície linear e o segmento de reta $\overline{AB}$, por exemplo, sobre o qual deslizaremos um objeto para que se possa ir do ponto A até o ponto B. A imagem abaixo ilustra bem tal situação com um triângulo:

Figura 19 – Translação com um triângulo.



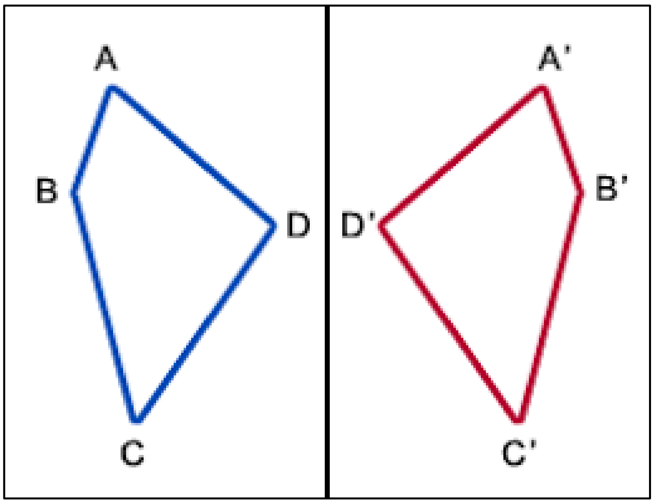
Fonte: site ogeogebra.com.br . Acesso em novembro de 2020.

Apesar de o aluno do ensino fundamental não dominar o conceito de mediatriz como lugar geométrico, o espelho plano de forma didaticamente eficiente possibilita que seja trabalhada a isometria da reflexão com base na bagagem intuitiva associada à existência de um objeto e sua imagem diante deste fascinante eixo de simetria que é o espelho plano. O trabalho acadêmico de Lopes e Nasser (1996) apud Ripplinger (2006) apresenta a seguinte definição no tocante à reflexão:

> Reflexão: Uma figura é uma reflexão de outra se: (I) a linha que une cada par de pontos correspondentes é perpendicular ao eixo de simetria. (II) dois pontos correspondentes estão à mesma distância (perpendicular) do eixo de simetria, em lados opostos (LOPES; NASSER 1996, pag. 102 apud RIPPLINGER, 2006, p. 27 e 28).

Abaixo segue uma ilustração bastante elucidativa do evento em voga:

Figura 20 – Reflexão do quadrilátero ABCD.

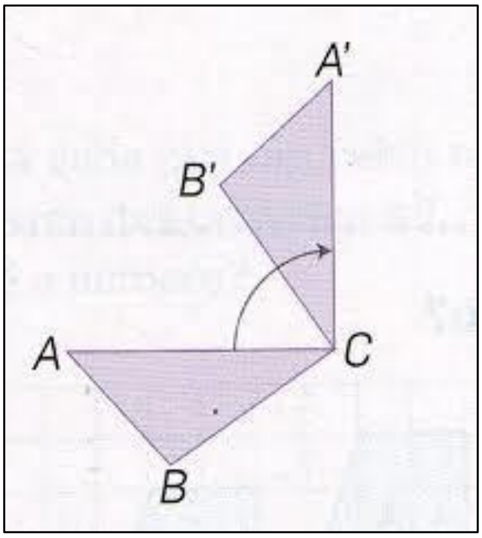


Fonte: site escolaeducação.com.br . Acesso em dezembro/2020.

A reflexão surge como uma isometria que evidencia o poder do eixo de simetria. Ao se identificar com clareza um eixo que funciona como espelho, as regiões simétricas delimitadas geram formas congruentes que podem ser identificadas como objetos e suas respectivas imagens.

No que tange a uma definição aceitável para a isometria rotação, Lopes e Nasser (1996, p. 115) apud Ripplinger (2006, p. 24) apresentam a seguinte: “Rotação: Uma rotação de centro O e um ângulo â é uma transformação em que a imagem é obtida girando-se cada ponto da figura segundo um arco de circunferência de centro O, percorrendo um ângulo â (no sentido horário ou anti-horário)”. Um bom exemplo capaz de evidenciar tal fenômeno segue abaixo ilustrado:

Figura 21 – Rotação do triângulo ABC.



Fonte: site explorarasciencias.yolasite.com.
Acesso em novembro de 2020.

Quando se olha a importância que a BNCC (2018) dá ao assunto transformações geométricas, fica evidenciada a sua imprescindível importância na evolução do aluno na aprendizagem plena da Geometria. A necessidade de desenvolver nos alunos habilidades atinentes ao reconhecimento de padrões de simetria em formas geométricas consta como uma habilidade essencial a ser trabalhada já no 4º ano do ensino fundamental pela BNCC (2017, p. 293) como segue: "Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria".

No 5º ano do ensino fundamental, a BNCC (2017) assinala a necessidade de desenvolver habilidade nos jovens por meio de malhas quadriculadas ou instrumentos pedagógicos similares como o tabuleiro geoplano, por exemplo, no que tange ao encolhimento ou expansão de formas geométricas, homotetia, conforme segue abaixo: "Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais" (BNCC, 2017, p. 297).

No 7º ano do ensino fundamental, a BNCC (2017) preconiza a necessidade de que o aluno adquira a capacidade de identificar padrões de isometria em um contexto fora da sala de aula, valendo-se do enorme potencial de ferramentas de desenho tanto virtuais, softwares, quanto não virtuais, como segue abaixo:

> Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse

> estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros (BNCC, 2017, p. 309).

Não resta dúvida de que softwares educacionais voltados para o ensino de Matemática como o Geogebra, por exemplo, podem transformar a sala de aula em um ambiente onde o aluno possa construir a partir de uma figura geométrica de sua escolha a isometria que desejar. Além disso, ele tem a oportunidade de combinar isometrias e verificar se o resultado final coaduna com a sua intuição. Dessa forma, um aluno pode partir de um desenho de sua escolha e fazer uma reflexão em torno de um eixo de simetria qualquer e, logo após, fazer uma rotação de 180º em relação a qualquer ponto escolhido. O software permite uma infinidade de possibilidades, de modo que a aprendizagem transcorra de forma divertida e agradável. Infelizmente, por razões já declinadas, a realidade das escolas públicas brasileiras não permite vislumbrar um cenário de curto prazo em que a tecnologia possa ser plenamente incorporada à prática pedagógica cotidiana no tocante ao ensino de Matemática. Por essa razão, as práticas educacionais já consagradas e de baixo custo apresentam-se como propostas altamente confiáveis.

No ensino médio, tendo em vista que já houve a possibilidade de se trabalhar matrizes e determinantes, bem como temas da alçada da Trigonometria, a preocupação da BNCC (2017) volta a exigir o desenvolvimento de habilidades atinentes ao tópico transformações geométricas no bojo do ramo da Matemática denominado Geometria Analítica, conforme segue abaixo:

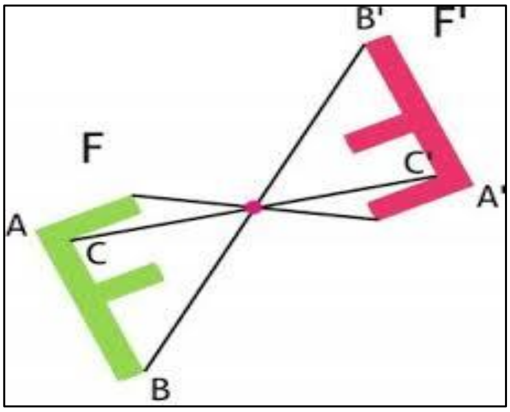
> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BNCC, 2017, p.533).

Apesar de não fazer parte do escopo dessa pesquisa, causa estranheza o fato de que o ensino de vetores, tema de grande importância no ensino de transformações geométricas, não ser abordado no nível médio. Ao se estudar a álgebra vetorial, a aprendizagem das transformações geométricas flui de forma muito mais natural. A tese acadêmica de Rigonatto (2018) apresenta uma argumentação muito pertinente nesse sentido, a qual segue apresentada abaixo:

> Durante o meu exercício como professor de Matemática no Ensino Médio sempre me questionei sobre o fato de não haver no currículo dessa etapa o estudo dos vetores. Primeiro, pelo fato de já no primeiro ano haver uma abordagem vetorial da Física. Segundo, porque do ponto de vista da Matemática os vetores permitem uma interpretação e compreensão mais clara de muitos conceitos e demonstrações que são trabalhados nos três anos do Ensino Médio, desde a Trigonometria até as geometrias plana, espacial e analítica, matrizes e determinantes (RIGONATTO, 2018, p. 13).

Durante as definições sobre os tipos principais de isometrias, não houve uma atenção especial ao caso denominado reflexão deslizante, a qual foi apresentada pelo site clubes.obmep.org.br por uma razão simples: a referida isometria é o mesmo que fazer uma rotação de 180º em relação a um determinado ponto fixo. Abaixo será apresentada uma imagem que evidencia tal situação:

Figura 22 – Reflexão deslizante.



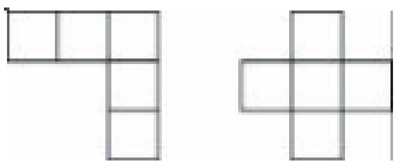
Fonte: site curso enemgratuito.com.br.Acesso em novembro de 2020.

A dita reflexão deslizante nada mais é do que uma sequência de duas ações. Em um primeiro momento, é realizada uma reflexão normal em relação a algum eixo de simetria. Depois é feita uma translação ou deslizamento da imagem na direção estabelecida por um segmento de reta qualquer. Na verdade, o que se detecta no final é a ocorrência de uma rotação de 180º em relação a um ponto determinado. Em relação a esse ponto, que na figura acima recebe a cor rosa, é que se dá toda a simetria.

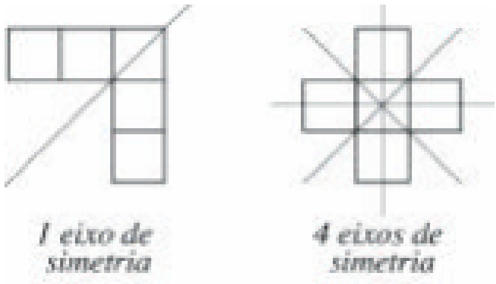
A partir desse momento, serão apresentadas 3 questões extraídas com adaptações de eventos da OBMEP, as quais demandam consequências imediatas do assunto tratado nessa seção. Tais consequências serão declinadas logo após cada questão. Na primeira questão em tela, os examinadores buscam saber se os candidatos possuem a habilidade de identificar possibilidades de simetria como segue:

Questão 1 – (OBMEP 2005 – nível 2 – 1ª fase).

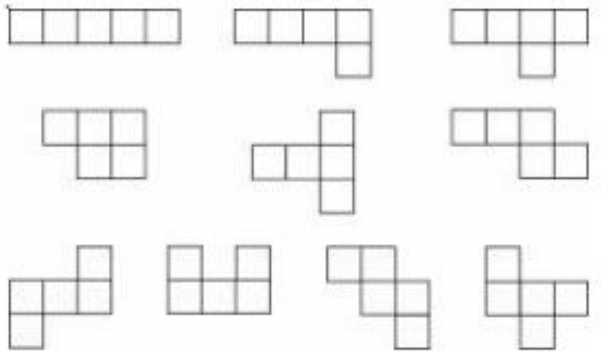
As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.



Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.



As figuras abaixo também são formadas por cinco quadrados iguais. Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?



A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7

Observação pertinente:

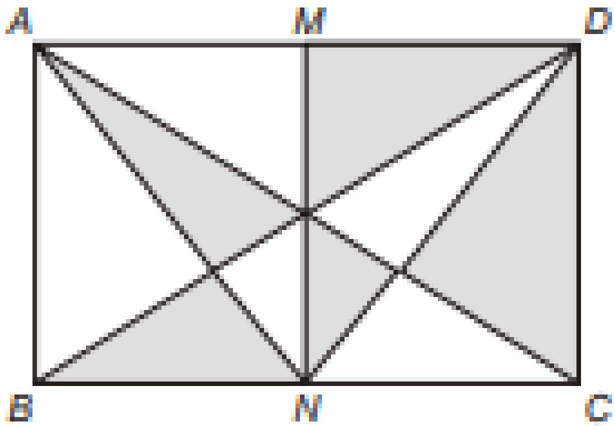
a) o fato de haver simetria não significa, necessariamente, que ela se dê em relação a um eixo como é o caso da reflexão. Caso se esteja diante de uma reflexão deslizante, a simetria se dá em relação a um determinado centro convenientemente escolhido. Neste último caso, não haverá um eixo de simetria, o qual tenha a potencialidade de funcionar como um espelho;
b) na questão em tela, há três tipos de situações: figuras desprovidas de simetria, figuras simétricas com base na reflexão (existência de eixo de simetria) e figuras simétricas com base na reflexão deslizante (existência somente de centro de simetria).
c) Ao se realizar uma numeração das figuras de forma crescente do 1 ao 10, da esquerda para a direita e de cima para baixo, é possível identificar que as figuras 1, 5, 8 e 9 possuem um tipo de simetria associada à reflexão. Por outro lado, a figura associada ao número 7, possui simetria associada à reflexão deslizante. As demais são desprovidas de simetria.

Na próxima questão, a banca examinadora busca identificar se o candidato possui a habilidade de compreender que no caso da reflexão, as áreas tanto do objeto quanto da imagem possuem o mesmo valor. Esse fato possibilita que, em alguns casos, o aluno possa compor uma forma geométrica familiar com fragmentos de áreas convenientemente escolhidos.

Questão 2 (OBMEP 2006 – nível 2 – 1ª fase)

No retângulo $ABCD$ da figura, M e N são os pontos médios dos lados AD e BC. Qual é a razão entre a área da parte sombreada e a área do retângulo ABCD?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$



Observações pertinentes:

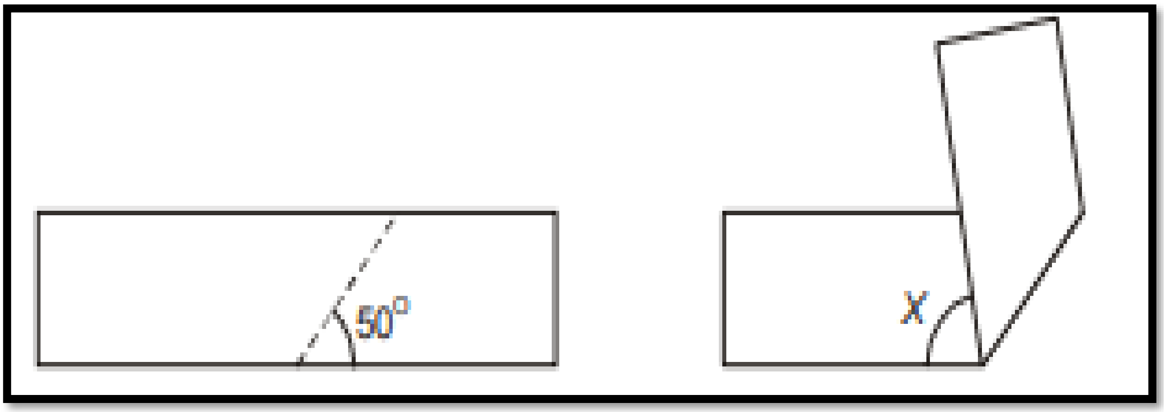
a) o segmento de reta MN atua como um perfeito espelho na região delimitada pelo retângulo ABCD;
b) com base nas propriedades da reflexão, é possível compor uma figura geométrica familiar no lado esquerdo do segmento MN (retângulo ABNM) de área equivalente à área da figura sombreada;
c) por fim, ficará evidente que a área desejada é a metade da área do retângulo ABCD, uma vez que o segmento MN é eixo de simetria do retângulo em pauta.

Na próxima questão, a banca examinadora deseja compreender se o candidato é capaz de entender o efeito da reflexão em relação aos ângulos do objeto e os seus correspondentes presentes na imagem. Ademais, a questão propõe uma situação em que o aluno necessita ter a habilidade de identificar que o segmento de reta formado por uma dobradura funciona como eixo de simetria das regiões que se sobrepõem.

Questão 3 (OBMEP 2006 - nível 2 – 1ª fase).

Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana da direita. Qual a medida do ângulo *x?*

(A) 30º (B) 50º (C) 80º (D) 100º (E) 130º

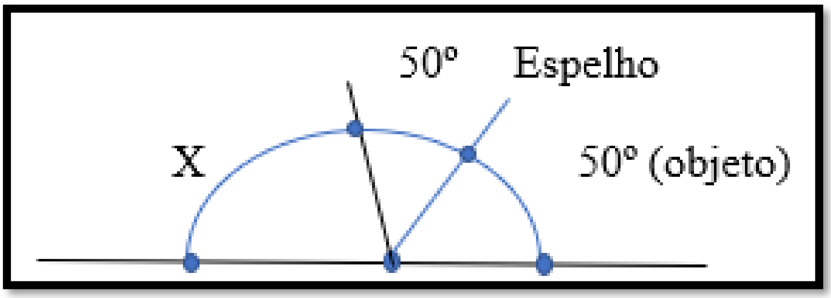


Observações pertinentes:

a) ao se desfazer a dobradura, o segmento definido se transforma em um eixo de simetria para a região do papel de camada dupla;

b) o ângulo de 50º de um lado que será considerado objeto, será transportado para o lado imagem como descreve o desenho abaixo:

Figura 23 – Reflexão de um ângulo de 50º.



Fonte: O Autor, 2020.

c) tendo em vista que o ângulo total resulta no valor de 180°, a parte restante X deve valer 80°.

O próximo capítulo apresentará considerações pertinentes a respeito de ferramentas pedagógicas cruciais para potencializar as abordagens de padrões geométricos em sala de aula à luz de uma mediação pontualmente implementada, focada na reflexão sobre os obstáculos que se impõem e na interação entre os alunos: materiais concretos manipuláveis.

6 A IMPORTÂNCIA DE MATERIAIS CONCRETOS E DE TÉCNICAS EXPERIMENTAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria é um ramo do conhecimento presente em quase todas as tarefas desenvolvidas pelo ser humano ao longo de sua vida. Durante a infância é difícil esquecer o formato do bambolê, o triângulo desenhado no chão nas brincadeiras de bola de gude, as bolas de futebol e de basquete, a forma do travessão e dos polígonos presentes no gramado de um campo de futebol, os formatos das peças de Lego, os balões que eram soltos quando era permitido nas festas juninas e as alegres horas passadas pulando amarelinha. Atualmente o jogo de videogame conhecido como **MINECRAFT** causa um fascínio em jovens com formas geométricas rústicas e com ênfase em peças cúbicas. É difícil compreender por qual motivo a Geometria, apesar de estar em quase tudo que cerca as pessoas, causa tanta rejeição quando trabalhada em sala de aula. Quando se olha para as atitudes normalmente atreladas aos jovens, fica nítida a percepção de que eles só se interessam de fato pelos assuntos caso os mesmos despertem a sua curiosidade. Não faz sentido para o aluno dizer que ele tem que aprender um conhecimento somente com base no argumento de que aquele tema cairá no vestibular. Para o jovem que tem o seu desenvolvimento atrelado à era das redes sociais e dos aplicativos de celulares, um assunto só ganha relevância se tornar a vida dele mais fácil e agradável. Utilizar metodologias quase medievais para ensinar Geometria, de modo que os axiomas, postulados e teoremas ganhem um protagonismo em todos os momentos da aula, contribui para que o aluno olhe para o quadro e interprete aquele assunto como algo totalmente desconexo com o mundo em que ele vive. Nessa linha de pensamento, Santos (2015) argumenta o seguinte:

> Cabe salientar que esses números indicam que algumas medidas precisam ser adotadas no que concerne à educação. Um exemplo é a formação dos professores de matemática que necessita de reformulações, permitindo também um novo olhar para os procedimentos metodológicos empregados no ensino de geometria, pois, muitos desses docentes, ao menos vivenciam os conteúdos que contemplam conceitos básicos da disciplina. Assim, a pesquisa em questão poderá ser um exemplo tangível de que podemos ultrapassar algumas barreiras que desafiam a elevação dos números relacionados ao ensino aprendizagem de geometria (SANTOS, 2015, p. 15).

Cabe ao professor levar o aluno a entender que saber fazer uso do conceito de perímetro é fundamental para capacitá-lo a prever o tamanho do fio necessário para realizar uma instalação elétrica de uma residência ou para separar o tamanho de barbante ou corda a fim de que possa demarcar um terreno sem ter que fazer duas viagens. É possível se inferir que saber calcular a diagonal de um retângulo teria mais relevância para o aluno se ele soubesse que essa medida em polegadas fornece uma das principais características de um televisor. A aplicação dos conceitos geométricos a problemas reais do cotidiano muda a relação do aluno com a Geometria, pois gera uma intimidade com o saber. Entender que, ao se aprender a calcular o volume de um cilindro, torna-se possível olhar para o nível de uma caixa d'água cilíndrica e saber o volume ocupado. A vocação da Geometria sempre esteve atrelada à busca de soluções para os problemas reais que afligiam os povos, como bem descreve Antar (1982) apud Santos (2015) a seguir:

> Existem indícios de que a civilização da Babilônia, desde cerca de 2000 a.C., desenvolveu um considerável conhecimento geométrico. As finalidades originais desse conhecimento eram de natureza prática, como construção de edifícios e demarcação de terras (agrimensura). A existência das grandes pirâmides perto do Nilo prova que os egípcios também conheciam a sua geometria e sabiam usá-la bem. (ANTAR, 1982 apud SANTOS, 2015, p. 18).

Uma outra estratégia capaz de gerar fascínio nos alunos é a elaboração de experiências da Física em sala de aula, quando não gerar riscos, ou no laboratório de ciências, quando viável. A possibilidade de utilização de fenômenos da Ótica para pautar abordagens inerentes a transformações geométricas de polígonos no plano é algo transformador para a relação ensino-aprendizagem. Um exemplo reside no prelúdio da abordagem do tema semelhança de triângulos. Tratar inicialmente desse assunto através de experiência de projeções de formas geométricas triangulares em anteparos, utilizando a lanterna de celulares como fonte luminosa e uma régua para permitir registrar e interpretar as medidas, torna a experiência muito mais interessante e significativa do que dirigir-se diretamente ao quadro negro para expressar os casos de semelhança. Sinalizando a importância de trazer para a prática do ensino de Matemática a enorme abrangência dentro dos mais diversos ramos do saber que envolve os temas, Santos (2015) assinala o seguinte: "A visão de que o ensino de matemática requer contribuição de outras áreas de conhecimento e de que o fenômeno educativo é multifacetado é, para o professor de matemática, algo recente e ainda, infelizmente, pouco difundido e aceito". A seguir, serão expostas imagens de aplicações de conhecimentos geométricos em situações do cotidiano, de modo a corroborar o quanto todos nós estamos cercados por todos os lados pela geometria. Quando se deseja comprar um televisor de 55 polegadas, torna-se muito importante entender que tal informação decorre da medida das diagonais do quadrado relacionadas à tela do aparelho. Da mesma, quando uma pessoa está diante de uma caixa d'água em sua residência e deseja inferir o volume de água em seu interior a partir do nível visualizado, a geometria faz-se inequivocamente presente. Ademais, quando um indivíduo se encontra diante de uma experiência projetiva ao assistir a um filme em um cinema ou quando o mesmo é demandado a executar um projeto de uma instalação elétrica domiciliar, a geometria desempenha um importante protagonismo em muitos momentos. Abaixo serão apresentadas imagens alusivas às situações ora mencionadas:

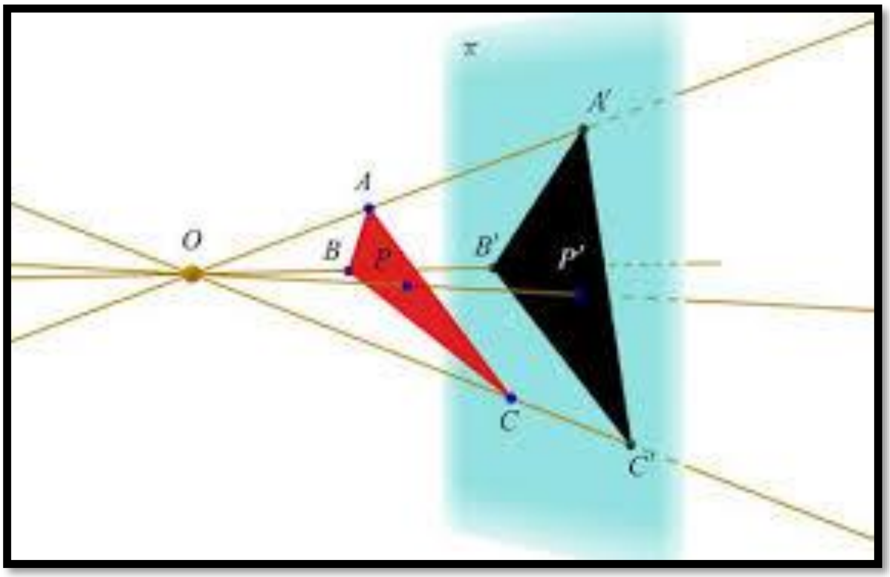
Figura 24 - Diagonal de um televisor.

Fonte: site industriahoje.com.br. Acesso em dezembro/2020

Figura 25 – Caixa d’água cilíndrica com nível.

Fonte: site artcaixa.com.br . Acesso em dezembro/2020.

Figura 26 – Projeção de um triângulo em um anteparo.



Fonte: site umlivroaberto.org. Acesso em dezembro/2020

Figura 27 – Projeto de instalação elétrica residencial.

Fonte: site dmx-automacao.com.br. Acesso em dezembro/2020

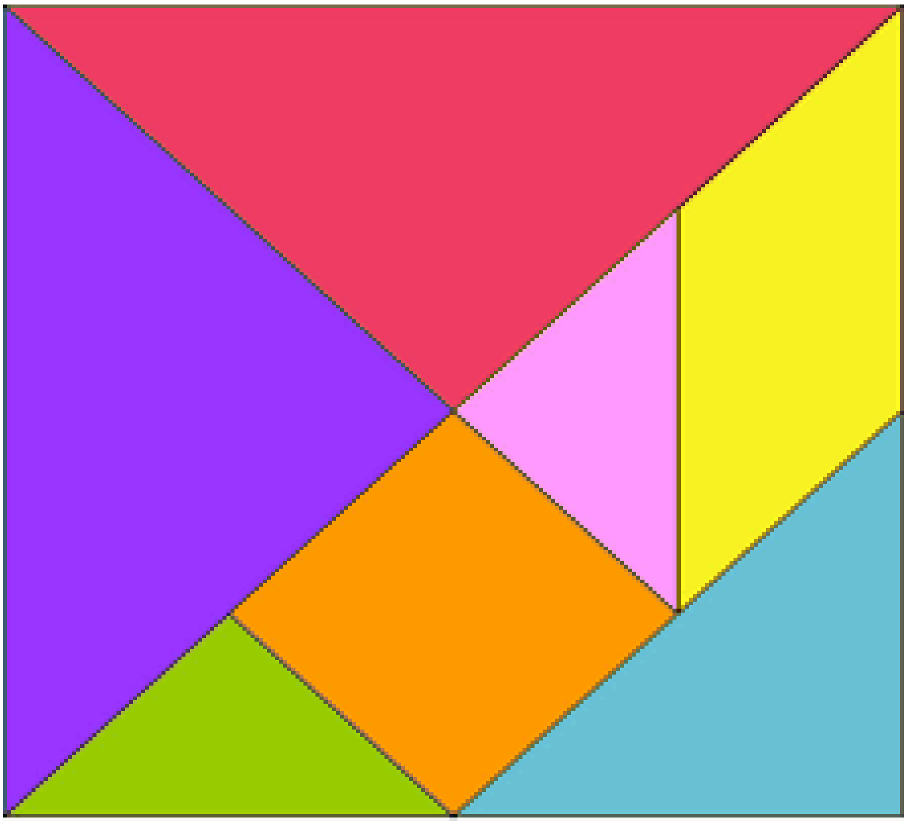
Um trabalho que propõe uma discussão profícua nesse sentido é o artigo acadêmico publicado pelo professor Gervázio (2017) da Universidade de São Paulo (USP), o qual se debruça sobre o desafio de como transformar o ensino de Matemática numa atividade prazerosa e atrelada ao cotidiano dos alunos. Nesse sentido, tal preocupação é ressaltada como segue:

> Nesse contexto, uma alternativa para que se consiga avançar na educação matemática, pode ser a mudança de seu tratamento em sala de aula, de maneira única e exclusivamente abstrata para uma abordagem mais prática, pois ao contrário do que muitos imaginam, ela é concreta e manifesta-se através da natureza, nas tecnologias, nas construções humanas, entre outras. E, quando ela é atrelada ao mundo real o aluno passa a dar mais sentido e pode aprender com mais facilidade.

> Mesmo diante desses possíveis benefícios, a matemática tem sido abordada, na maioria dos casos, como uma ciência de exclusividade teórica e abstrata, o qual denomina-se de modelo dedutivista, com poucas demonstrações concretas e problematização dos conceitos com a realidade, fatos estes que dificultam o entendimento dos discentes, e como consequência, muitos passam a não gostar da área de exatas (GERVÁVIO, 2017, p. 44 e 45).

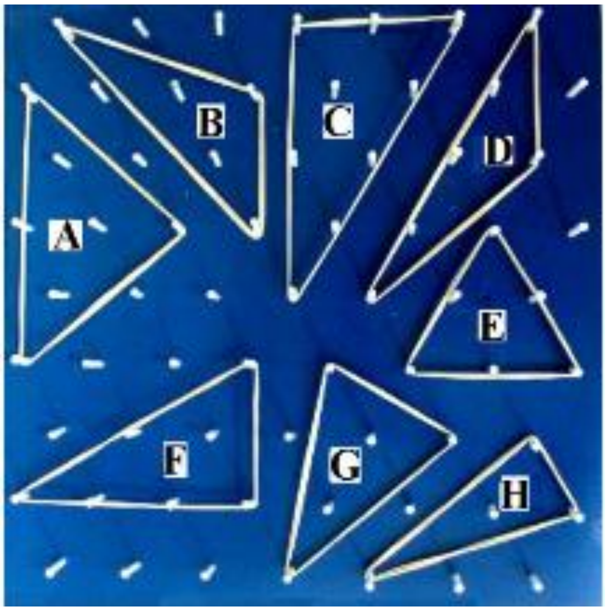
A pesquisa em curso se dedicará a mostrar as grandes potencialidades de materiais didáticos de eficácia comprovada ao longo de gerações como o tangram e o tabuleiro geoplano, os quais aparentam uma enorme simplicidade estética e uma poderosíssima aplicação pedagógica, no que tange a permitir brincar com conceitos de perímetros e áreas de polígonos. Uma segunda preocupação que permeará esta pesquisa reside no fato de que não bastaria evidenciar as grandes potencialidades dos materiais concretos se o custo não fosse extremamente baixo. Nesse intuito, os tangrans, o tabuleiro geoplano e a imensa maioria dos polígonos que serão utilizados terão como matéria prima produtos descartados. Os tangrans e os polígonos serão feitos a partir de plásticos de pastas de arquivos descartadas. O tabuleiro geoplano será construído sobre uma madeira oriunda de rejeito. As experiências, pela simplicidade atrelada e a fácil disponibilidade dos materiais na vida dos alunos, possibilitarão a execução nas residências dos alunos.

Figura 28 – Tangram.



Fonte: site paraeducar.com. Acesso em dezembro/2020.

Figura 29 – Tabuleiro Geoplano.



Fonte: site docplayer.com.br. Acesso em julho de 2022.

Uma grande preocupação que pautou todo o processo investigativo em curso foi a possibilidade de dar uma destinação louvável sob o ponto de vista do ensino de Geometria para uma quantidade expressiva de pastas de arquivos e madeiras que são descartados mensalmente pelas repartições públicas das esferas federal, estadual e municipal. Ademais, a possibilidade de produzir, junto com os alunos, materiais pedagógicos que irão auxiliar na construção do conhecimento, empodera de forma inegável o aluno no processo de aprendizagem, além de retirar o professor de uma posição de supremo transmissor do conhecimento, para transformá-lo em um parceiro próximo na busca do objetivo comum. Abaixo seguem imagens de materiais que servirão de matéria-prima para criação da maioria dos artefatos que possibilitarão o desenvolvimento da pesquisa:

Figura 30 – Pastas de arquivo morto.

Fonte: site kajet.com.br. Acesso em dezembro de 2020.

Figura 31 – MDF descartada.

Fonte: site blogtorchtools.com.br. Acesso em dezembro de 2020.

Face a importância inequívoca da utilização tanto de materiais concretos manipuláveis quanto de experimentos oriundos da Física para auxiliar no ensino de geometria de uma forma geral, consoante o preconizado acima, surge a necessidade de a pesquisa declinar, com base na metodologia de pesquisa a ser utilizada, a estratégia a ser posta em prática com a finalidade de inserir as ferramentas pedagógicas que serão apresentadas no contexto de sala de aula de modo a potencializar a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, o trabalho em curso pretende recorrer aos preceitos circunscritos à metodologia de pesquisa de desenvolvimento para nortear as propostas de utilização de materiais concretos manipuláveis e de experimentos da Física com o intuito de resolver questões de geometria plana voltadas para a preparação dos alunos para os exames dos níveis 1 e 2 da OBMEP. Uma das preocupações marcantes desta metodologia em voga é a sua pretensão em intervir de forma consistente na prática de ensino-aprendizagem no contexto da sala de aula, de modo a ensejar a elaboração de um produto de pronta utilização. Nessa linha, o artigo elaborado por Matta, Silva e Boaventura (2014) fornece uma argumentação a se considerar, a qual segue:

> Intervencionista: Utiliza-se o fundamento teórico escolhido e o diálogo com o contexto de aplicação para que a pesquisa desenvolva uma aplicação que irá intervir no campo da práxis pedagógica e pretenderá produzir: a) produtos educacionais tais como materiais didáticos de toda natureza e suporte; b) processos pedagógicos como, por exemplo, recomendações de atitude docente, novas propostas didáticas; c) programas educacionais como currículos, cursos, organização de temas e didáticas, também desenvolvimento profissional para professores; ou d) políticas educacionais como protocolos de avaliação docente ou discente, procedimentos e recomendações de investimento, aquisição, opções para relação entre a escola e a comunidade. De fato, a DBR começa com a identificação de uma situação que necessita de intervenção e de um resultado de desenvolvimento prático somente possível de obter a partir de

> uma investigação científica de natureza aplicada. (MATTA, SILVA, BOAVENTURA; 2014, p. 26)

No que concerne ao produto a ser desenvolvido, a pesquisa apresentará ferramentas pedagógicas, muitas delas já consagradas na seara do ensino de geometria, como o tangram e o tabuleiro geoplano, por exemplo, construídos com materiais oriundos da reciclagem e, se possível, com a participação dos alunos, em atividades notadamente lúdicas para uma preparação dos alunos para as já aludidas provas da OBMEP com foco em temas bastante cobrados pelos examinadores. As atividades que serão propostas primarão pela cooperação entre os alunos e por intervenções pontuais dos professores, com base em uma mediação a partir de questionamentos que levem os alunos à reflexão. Convém aludir ao fato de que o presente estudo não tem o escopo de conduzir os alunos à generalização dos conceitos geométricos trabalhados, mas sim possibilitar que os mesmos possam se deparar com a geometria em situações interessantes e interativas, de modo que os problemas sejam explorados a partir de processos intuitivos, seguindo a linha da busca por respostas para as brincadeiras desafiadoras como os jogos juvenis de uma forma geral. Dessa forma, os materiais pedagógicos desenvolvidos servirão como ferramenta para que a criatividade dos alunos possa ganhar liberdade tanto na representação concreta dos problemas trabalhados quanto na discussão em grupo a respeito das propriedades observadas no modelo matemático elaborado. Assim sendo, as informações declinadas pelo artigo elaborado por Almeida e Palharini (2012) a respeito do que seria a modelagem matemática ganham importância a seguir:

> De modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática origina-se em uma situação problemática e tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema. Neste sentido, a Modelagem Matemática diz respeito à análise de uma situação-problema, à construção de representações matemáticas, à obtenção de resultados matemáticos para a situação e à reinterpretação dos resultados em relação à situação. (ALMEIDA, PALHARINI; 2012, p. 910)

Os materiais concretos que serão utilizados a seguir terão o propósito de auxiliar na facilitação do processo de modelagem matemática das situações-problema apresentadas, a fim de que, com base nas interações estabelecidas pelos alunos com o material, com seus colegas e com o mediador, possam ser feitas as intervenções devidas nas ferramentas didáticas e se chegar a um melhor entendimento sobre a resolução das situações-problema em voga.

E por falar em materiais concretos, nada mais natural do que se falar em uma ferramenta pedagógica altamente consagrada ao longo dos tempos para o ensino de geometria: o Tangram. Por essa razão, esse será o assunto do próximo capítulo.

7 TANGRAM

A literatura disponível não consegue fornecer de forma cabal todos os aspectos históricos relevantes que cercam este formidável artefato pedagógico. Há consenso no que tange ao fato de que ele é um quebra-cabeça de origem chinesa. O trabalho acadêmico de Ferreira, Misse e Paulo (2012) faz alusão ao seguinte argumento:

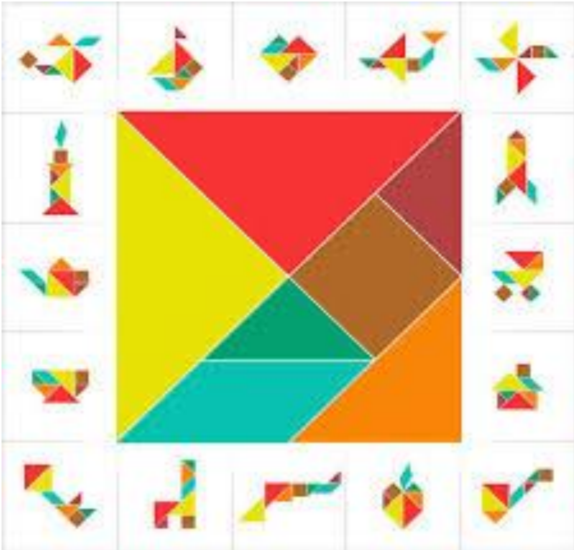
> O Tangram é um quebra cabeça chinês constituído por sete peças. São elas: dois triângulos grandes, dois triângulos médios, dois triângulos pequenos, um paralelogramo e um quadrado. Várias são as lendas sobre o surgimento do Tangram, dentre elas está a de um chinês chamado Tam que deixou uma placa quadrada de argila cair no chão e, ao cair, partiu-se em sete pedaços. Enquanto Tam tentava juntar os pedaços para formar novamente o quadrado conseguia formar várias figuras. Essas sete peças/pedaços são chamadas de Tans, cujo significado é sete tábuas da sabedoria (FERREIRA; MISSE; PAULO, 2012, p. 2).

O Tangram é composto por 7 figuras geométricas que podem compor uma quantidade enorme de formas, sendo que uma delas é um grande quadrado. É um quebra-cabeças que não se limita a contribuir somente com a matemática, pois abre espaço para as mais diversas aplicações na área da pedagogia. Considerando a preciosa contribuição contida na monografia apresentada por Santos (2012), é possível inferir o considerável potencial dessa ferramenta para o ensino com base em dois fragmentos extraídos que seguem:

> Este quebra-cabeça também chamado de jogo das sete peças ou sete peças da sabedoria é formado por peças com formas geométricas bem conhecidas e com elas é possível criar e montar aproximadamente 1.700 figuras, como por exemplo: animais, plantas, pessoas, objetos de diversos formatos, letras, figuras geométricas, números, entre outros (SANTOS, 2012, p. 16).
>
> O Tangram auxilia no desenvolvimento da criatividade; no raciocínio lógico para resolução de problemas; na formulação de hipóteses; na criação de soluções alternativas; bem como pode desencadear no aluno a concentração; a reflexão; a interpretação; a imaginação; a paciência; a criatividade; a coordenação motora e a interação entre eles, auxilia no processo de desenvolvimento da aprendizagem do aluno e da socialização que são observados em dois objetivos do ensino fundamental contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais [...] (SANTOS, 2012, p. 17).

É interessante o quanto este quebra-cabeça, que é cercado de uma grande quantidade de estórias, possibilita já desde bem cedo um processo de familiarização das crianças com a geometria. As diversas possibilidades de composição de formas com o brinquedo abrem espaço para que o professor no ambiente escolar ou os pais no domicílio possam construir brincadeiras bastante lúdicas, em que seja possível abordar de forma interessante assuntos matemáticos como frações, simetria, congruência e semelhança.

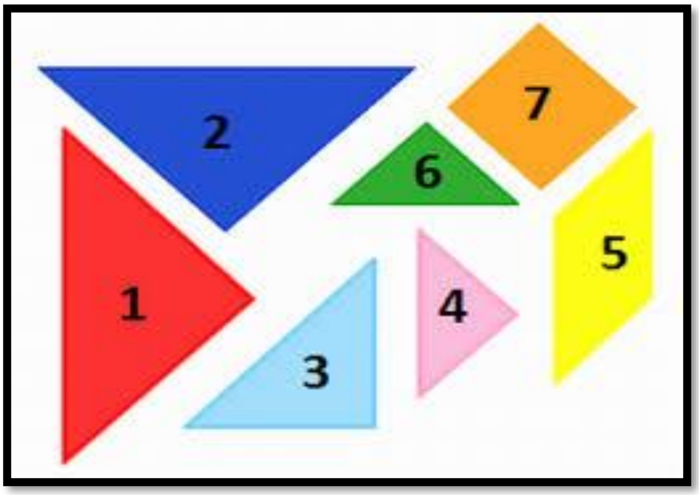
Figura 32 – Exemplos de formas criadas com o Tangram.



Fonte: site educador.brasilescola.uol.com.br. Acesso em dezembro/2020.

Não resta dúvida da incrível capacidade que o Tangram possui de transformar o ato de aprender numa agradável brincadeira. De posse das peças, podem ser criados diversos objetos, os quais são revestidos de uma gama considerável de informações matemáticas. As áreas e os perímetros associados às peças estão atrelados a um processo de criação do quebra-cabeça que é essencialmente decorrente de uma série de semelhanças de triângulos. Da decomposição do quadrado maior surgem 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio e 2 triângulos pequenos. Ademais, restam 1 quadrado e 1 paralelogramo. A possibilidade de composição de áreas permite que o aluno comece a brincar de forma lúdica com os conhecimentos inerentes a áreas de figuras planas semelhantes sem se dar conta. Conceitos que serão formalizados bem mais à frente com a exposição dos casos de semelhança de triângulos, ensejando a definição da tão importante razão de semelhança, passam a pautar as brincadeiras inerentes ao Tangram, contribuído de forma substancial para criar uma intimidade do aprendiz com o processo de construção de formas geométricas. A habilidade de compor áreas propiciada pela familiarização com esse quebra-cabeça será um diferencial à medida que a construção do conhecimento inerente à áreas de formas geométricas ganhe complexidade. Saber rearranjar as formas no intuito de tentar encontrar uma estrutura geométrica sobre a qual já haja um domínio cognitivo é primordial. Com base em uma mediação atenta e intensa do professor diante da interação do aluno com o Tangram, será inevitável que o aprendiz venha a perceber que o triângulo pequeno (fragmentos abaixo de números 4 e 6) cabe duas vezes no médio (fragmento abaixo de número 3), e o médio, por sua vez, cabe duas vezes no grande (fragmentos abaixo de números 1 e 2). Uma outra poderosa informação que ganha relevo é inerente ao fato da igualdade das áreas entre o quadrado e o paralelogramo (fragmentos abaixo de números 7 e 5 respectivamente), tendo em vista que dentro de ambos cabem dois triângulos pequenos.

Figura 33 – Peças do Tangram.



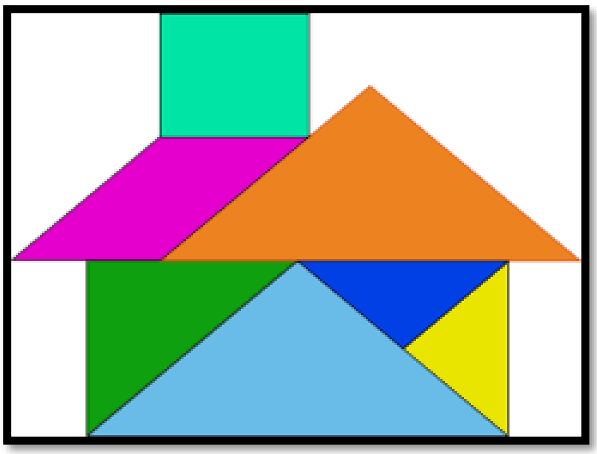
Fonte: site portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em dezembro/2020.

A titulo de exemplificar o potencial do tangram como ferramenta, serão apresentadas questões para serem trabalhadas em sala de aula com alunos que só dispõem de noções intuitivas a respeito de perímetro e área como seguem:

Questão 1

Na figura abaixo que representa uma casa, que fração da área total representa a chaminé?

Figura 34 – Casa feita com Tangram.



Fonte: site br.pinterest.com. Acesso em dezembro de 2020.

Questão 2

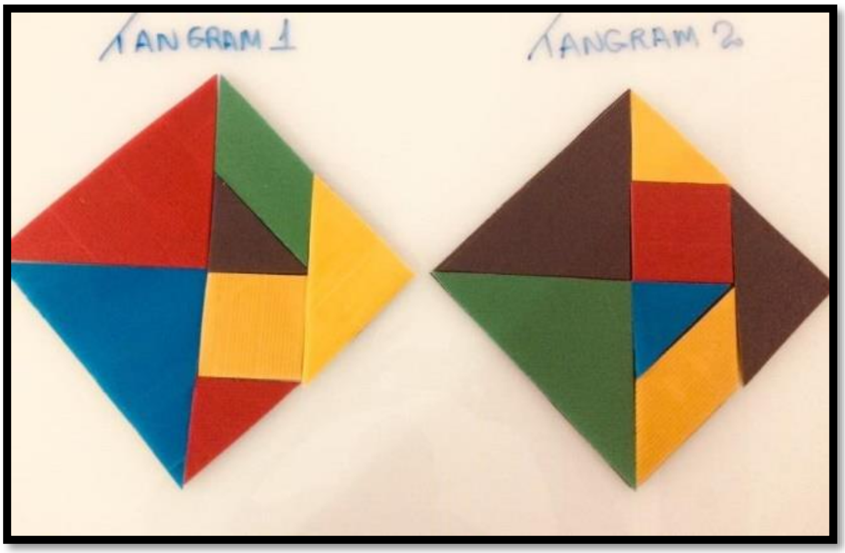
Na figura abaixo, que fração da área total representa as orelhas do gato?

Figura 35 – Coelho feito com Tangram.

Fonte: site leiturinha.com.br. Acesso em dezembro de 2020.

Dois aspectos ganham destaque na busca da pesquisa de criar materiais didáticos com base em resíduos plásticos descartáveis: a sustentabilidade e a participação efetiva dos alunos no processo. No tocante ao fato de ser criado a partir de plásticos retirados de pastas de arquivos inservíveis, fica evidenciada a destinação de um potencial poluente da natureza para um propósito transformador, que é o ensino de Geometria. Por outro lado, a participação do aluno na construção desse lendário quebra-cabeça, além de criar uma atmosfera fascinante de cooperação dentro da sala de aula, enche de entusiasmo o aluno para a futura construção de um conhecimento com base no artefato produzido, tendo em vista o seu protagonismo nessa atividade laborativa. Convém aludir ao fato de que fica plenamente viável que todos os alunos consigam ter em suas casas essa ferramenta de ensino, tendo em vista o baixíssimo custo envolvido no processo. Agora serão apresentados dois quebra cabeças do tipo Tangram que foram confeccionados artesanalmente com plásticos oriundos de pastas de arquivos descartadas. É importante mencionar que o reaproveitamento de cartolinas coloridas ou de papelão posteriormente pintado pode ensejar a criação de interessantes quebra-cabeças voltados para o enriquecimento das atividades aqui declinadas no contexto da sala de aula. Um aspecto a se ressaltar reside na importância de se criar um ambiente bastante participativo para que os alunos tenham protagonismo em todo o processo. Nunca se pode esquecer do fato de que o poder público descarta no lixo diariamente inúmeros materiais altamente recicláveis e com grande potencial de serem convertidos em materiais pedagógicos.

Figura 36 – Dois quebra-cabeças Tangram artesanalmente construídos.



Fonte: Autor, 2020.

7.1 O Tangram apresentando o número irracional $\sqrt{2}$

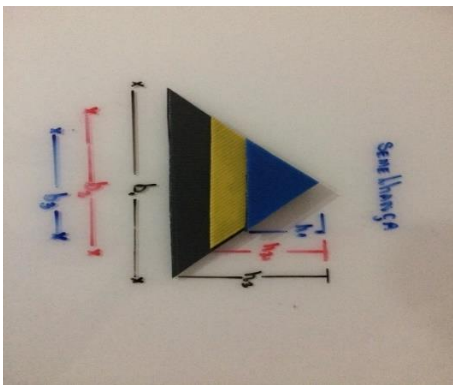
A partir de agora, serão enfatizadas, com o auxílio de imagens, algumas interessantes aplicações do Tangram para despertar a curiosidade no que tange a: semelhança de triângulos, o número irracional $\sqrt{2}$, abordagem de área de triângulos e trabalhar o tema composição de área de figuras planas.

É importante ressaltar que todas as peças triangulares desse quebra-cabeça são semelhantes. As duas fotografias expostas abaixo apresentam sobreposições de triângulos em duas situações bem peculiares e ricas que logo serão melhor analisadas.

Figura 37 – Triângulos sobrepostos A.

Fonte: Autor, 2020.

Figura 38 – Triângulos sobrepostos B.

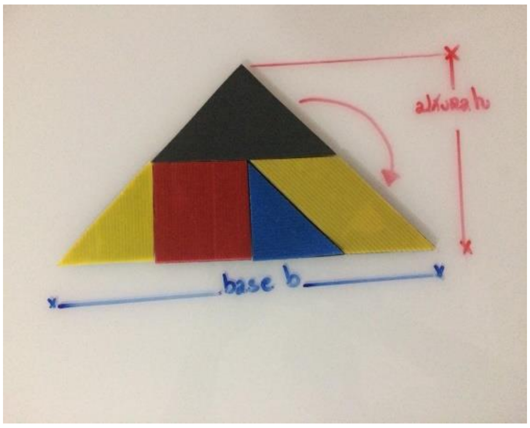


Fonte: Autor, 2020.

A primeira imagem (Figura 37) permite identificar uma interpretação de área num contexto imediato atrelado a frações. A ideia presente na reflexão sobre quantos triângulos pequenos cabem no triângulo médio e quantos triângulos médios cabem no triângulo grande abre espaço para se avançar um pouco mais na área de composição de áreas, pois o aluno simplesmente estará brincando de transportar a área de uma figura para diferentes regiões de uma figura maior. Já a segunda imagem (Figura 38) possibilita o começo intuitivo da discussão do tema semelhança de triângulos. É possível que, com a mediação adequada do professor, o aluno possa começar a imaginar que, em uma visão de cima, ele seja levado a imaginar que o menor triângulo esteja sendo projetado em dois anteparos, gerando os dois outros triângulos. Dessa forma, pensando em perspectiva, ele começaria a contemplar a essência do tema semelhança de triângulos sem a influência dos axiomas, princípios e postulados, pois o poder visual emanado da ideia de projeção de figuras planas em anteparos, que é inerente à transformação geométrica conhecida como homotetia, é crucial para o entendimento desse tema. Figuras semelhantes formam uma família em que cada membro pode ser visto como ampliação ou redução de um outro elemento não congruente a ele que tenha sido escolhido nesse conjunto.

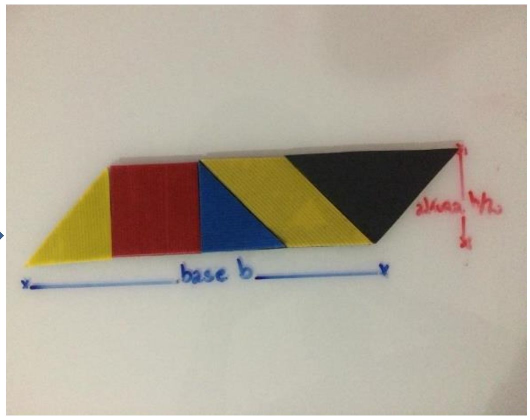
Uma outra contribuição que o Tangram pode proporcionar é no sentido de que é possível transformar um triângulo em um paralelogramo de mesma base e com a altura equivalente à metade da altura do triângulo, como atesta as figuras abaixo:

Figura 39 – Metade do quebra-cabeça.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 40 – Paralelogramo formado.



Fonte: Autor, 2020.

Faz-se mister ressaltar que qualquer paralelogramo pode ser facilmente transformado em um retângulo com mesma base e mesma altura, bastando aplicar uma estratégia bastante simples. Primeiro se constrói um segmento de reta perpendicular à base que encontre um dos vértices do outro lado paralelo. Surgirão duas formas geométricas, sendo que uma delas é um triângulo. Basta transportá-lo para o lado inverso e “conectá-lo” de modo que os outros dois lados congruentes do paralelogramo de sobreponham. Após isso, o paralelogramo possibilitará a construção de um retângulo de mesma base e altura. Mais à frente, tal construção será feita utilizando-se outros materiais pedagógicos.

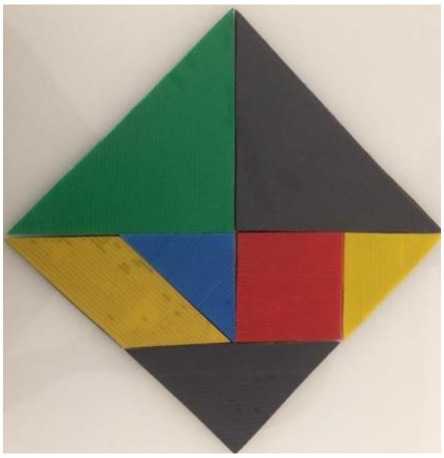
Com base em toda a explanação em pauta, é possível intuitivamente apresentar ao aluno uma discussão a respeito da aplicação da transformação geométrica de ampliação ou redução (homotetia) em um triângulo ABC que possui base de dimensão b e altura de dimensão h. Se a taxa aplicada de ampliação ou redução for de valor k, o novo triângulo gerado ao final do processo será o triângulo A\`B\`C\` com base de tamanho **k.b** e altura de tamanho **k.h**. Com base na segunda argumentação, representada pelas figuras 39 e 40, é possível entender que a área do triângulo ABC é a mesma que a de um paralelogramo de base b e altura $\frac{h}{2}$. Logo a área do triângulo ABC, a qual denotaremos de S_1, será da forma $\frac{b.h}{2}$. Já a área do triângulo A\`B\`C\` será da forma $\frac{(b.k).(k.h)}{2} = \frac{b.h.k^2}{2}$. Conclusão: $\frac{S_1}{S_2} = k^2$, ou seja, a razão das áreas retornará o quadrado da taxa utilizada no processo. Dessa forma, denotando-se as peças triangulares do Tangram de modo que o triângulo menor seja chamado de T_1, o triângulo médio seja chamado de T_2 e o maior de T_3, e as áreas respectivas associadas sejam S_1, S_2 e S_3, passamos a observar uma regularidade impressionante. As razões $\frac{S_2}{S_1}$ e $\frac{S_3}{S_2}$ resultam no mesmo valor 2. Logo teremos: $k^2 = 2$. Surge assim uma impressionante oportunidade para se falar no irracional $\sqrt{2}$, número esse que aparece de forma bastante reiterada no Tangram, tendo em vista que o quebra-cabeça permite vislumbrar sem muito esforço a detecção de dois quadrados. Destarte, a diagonal de um quadrado de lado *l* será da forma $l\sqrt{2}$.

Não resta dúvida de que o objetivo precípuo das peças do Tangram não é pavimentar o caminho da construção do conhecimento de áreas de figuras planas semelhantes para possibilitar logo a seguir a formalização do conceito. A intenção do quebra-cabeça é de forma lúdica e divertida permitir uma reflexão bastante interessante sobre o comportamento das áreas das peças em forma de triângulos retângulos isósceles à medida que ocorre a ampliação ou redução das mesmas. No decorrer da pesquisa, outras ferramentas pedagógicas serão poderosas no sentido de consolidar as ideias aqui iniciadas. O tabuleiro geoplano permitirá que a visualização da homotetia e de suas decorrências seja muito mais natural, tendo em vista que, em muitos casos, o cálculo de área envolverá somente situações de contagens.

Para dar uma demonstração da potencialidade do Tangram tanto para as fases iniciais do aprendizado de Geometria quanto para estágios mais avançados, além de gerar a possibilidade de que a evolução inerente ao poder de abstração possa ser aferida, segue uma questão com resoluções bem peculiares:

Questão: Na figura do Tangram abaixo exposto, qual a razão entre a área do menor e do maior quadrado presentes?

Figura 41 – Tangram artesanal.



Fonte: Autor, 2020.

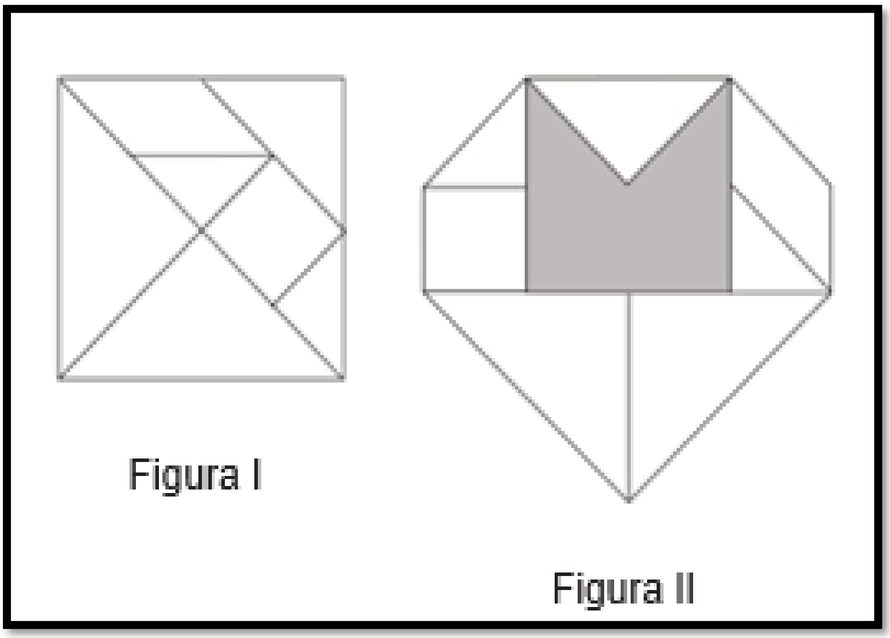
Os alunos que se deparassem com essa questão sem dispor de uma grande bagagem conceitual deveriam contar apenas com ferramentas intuitivas. A ideia de frações passaria a ter um protagonismo na resolução. Eles observariam que o quadrado menor (cor vermelha) seria composto de dois triângulos pequenos (cores azul e amarela). Com base no raciocínio já exposto, o triângulo grande (cores verde e cinza) é composto por 4 triângulos pequenos. Tendo em vista que o quadrado grande pode ser decomposto em 4 triângulos grandes, por conseguinte, ele é pode ser decomposto em 16 triângulos pequenos. A conclusão é que a área do quadrado pequeno representa $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ da área do quadrado grande. Um aluno em estágio mais avançado poderia imaginar o quadrado grande como tendo o lado *l*. O lado do quadrado menor representa $\frac{1}{4}$ da diagonal do quadrado maior, a qual vale $l.\sqrt{2}$. Logo o lado do quadrado menor vale $\frac{l \cdot \sqrt{2}}{4}$. A área do quadrado maior vale l^2 enquanto a área do quadrado menor vale: $(\frac{l.\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{l^2}{8}$. Conclusão: a área do quadrado menor representa $\frac{1}{8}$ da área do quadrado maior.

Na linha do raciocínio trabalhado no Tangram, serão apreciadas agora duas questões oriundas de edições da OBMEP, de modo que seja possível se verificar a aplicação direta dos ensinamentos ora trabalhados.

Questão 1: (OBMEP 2007 – nível 2 – 2ª fase)

A figura I mostra um quadrado de 40 cm² cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

A) 5 cm² B) 10 cm² C) 15 cm² D) 20 cm² E) 25 cm²

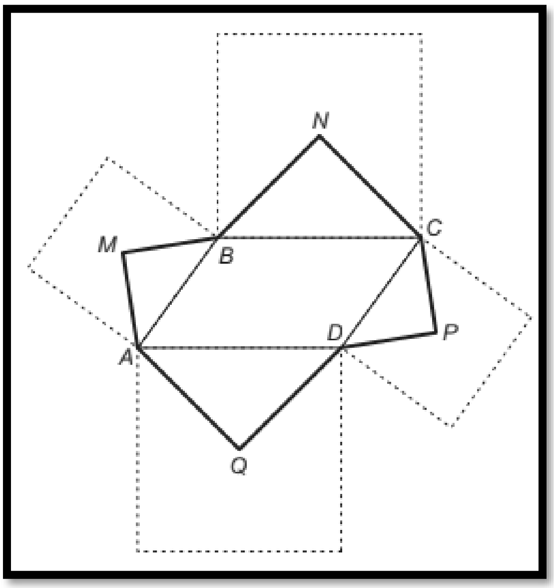


Observações pertinentes:

a) o triângulo médio do Tangram representa $\frac{1}{3}$ da área procurada;
b) o triângulo médio do Tangram, como já foi visto, representa $\frac{1}{8}$ da área do quadrado maior do quebra-cabeça, ou seja, de toda a figura 1.

Questão 2: (OBMEP 2008 – nível 2 – 2ª fase)

Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo de área 20 cm² e lados medindo 4 cm e 6 cm. Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.



(a) Calcule a área do polígono *AMBNCPDQ*.

(b) Mostre que os ângulos *MAQ* e*MBN* têm a mesma medida.

Observações pertinentes:

a) os triângulos que compõem a figura a ter sua área encontrada representam $\frac{1}{4}$ da área do quadrado onde estão inseridos. O Tangram apresentou o triângulo grande que gerava o mesmo efeito no tocante à área;
b) após isso, será possível detectar a existência de dois triângulos congruentes menores e dois triângulos congruentes maiores. Dois triângulos congruentes representam a metade da área do quadrado a que estão relacionados;
c) por fim, bastará realizar a soma de todas as áreas.

No próximo capítulo serão apresentadas considerações a respeito de outras aplicações interessantes para o plástico de descarte na criação de formas geométricas de grande valia para a construção de situações em sala de aula para apresentar algumas propriedades geométricas relevantes para o exame da OBMEP.

8 UTILIZANDO PLÁSTICO PARA ENSINAR TRIÂNGULOS

Após a pesquisa, visualizar o incrível potencial do Tangram para o desenvolvimento de atividades lúdicas voltadas para o fomento nos alunos da necessidade de aprofundar o estudo dos conceitos geométricos envolvidos, ideias novas surgiram com o fito de elaborar novas aplicações pedagógicas para o plástico de descarte à prática docente, de modo que seja possível auxiliar na construção empírica de conceitos matemáticos. Sempre que possível, serão propostas atividades para serem desenvolvidas pelos alunos em grupos, a fim de que momentos de reflexão e cooperação possam ser vivenciados na incrível jornada da aprendizagem. Um norte para o presente trabalho acadêmico encontra-se no artigo Baldissera (2008), em que é feita uma análise a respeito de Vergnaud (1990) sobre a complexidade do processo de aprendizagem de Matemática, conforme abaixo delineado:

> Vergnaud coloca que "um dos maiores problemas na educação decorre do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos... de alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos... solucionando problemas, discutindo conjeturas e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças em suas idéias" (VERGNAUD 1990 apud BALDISSERA, 2008, p. 2 e 3).

Nesta etapa do trabalho, serão apresentadas possibilidades pedagógicas de se trabalhar em sala de aula propriedades geométricas dos triângulos com base em figuras construídas com base na cooperação entre o professor e seus alunos a partir do plástico contido em pastas de arquivo reaproveitadas.

8.1 Soma dos ângulos internos de polígonos a partir dos triângulos

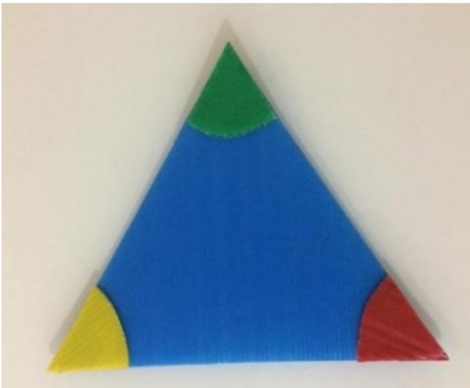
Uma utilização bastante interessante para materiais didáticos confeccionados com plásticos de descarte diz respeito ao possível auxílio no que tange ao cálculo da soma dos ângulos internos de triângulos. Um fato inevitável é que a soma dos ângulos internos de um triângulo serve de base para o referido cálculo em relação a todos os polígonos, tendo em vista que basta decompor o polígono adequadamente em triângulos para se chegar ao resultado com relativa facilidade. Ademais, ao se chegar de forma empírica ao valor em pauta, o entendimento por parte dos alunos das propriedades descritas abaixo passa a ser uma consequência natural:

a) a soma de um ângulo interno do triângulo com o seu correspondente externo totaliza 180º;
b) qualquer ângulo externo do triângulo é igual à soma dos outros dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.

É importante enfatizar que a BNCC (2017, p. 309) preconiza a necessidade de que o aluno, ao cursar o 7º ano do ensino fundamental, tenha desenvolvida a habilidade tanto de reconhecer as condições para a existência de um triângulo e quanto em relação ao fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Inicialmente, seria de grande valia construir uma atividade em sala de aula, por meio da qual fossem apresentados aos alunos três triângulos (um acutângulo, um retângulo e um obtusângulo) e fosse solicitado o valor da soma dos ângulos internos de cada um deles, como segue:

Figura 42 – Triângulo acutângulo.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 43 – Triângulo retângulo.

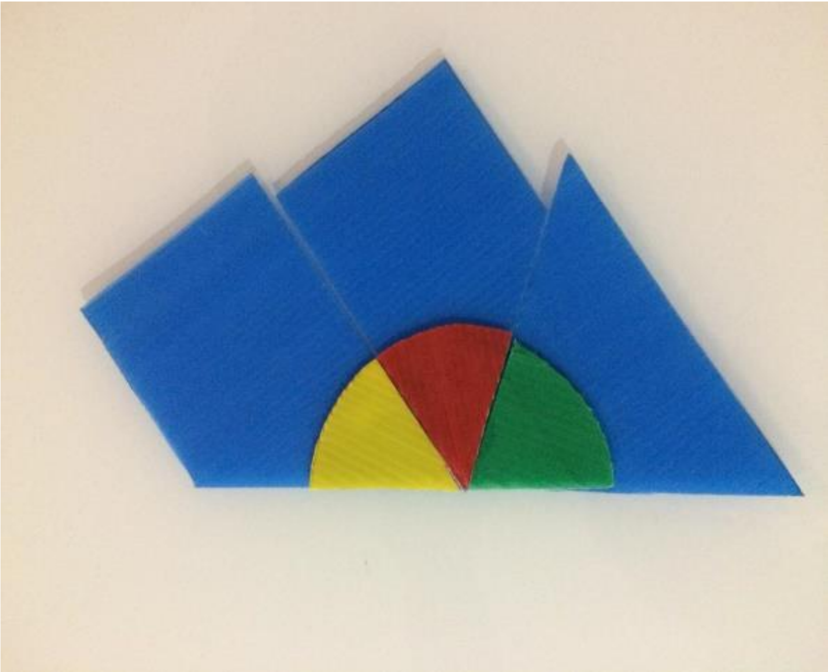
Fonte: Autor, 2020.

Figura 44 – Triângulo obtusângulo.

Fonte: Autor, 2020.

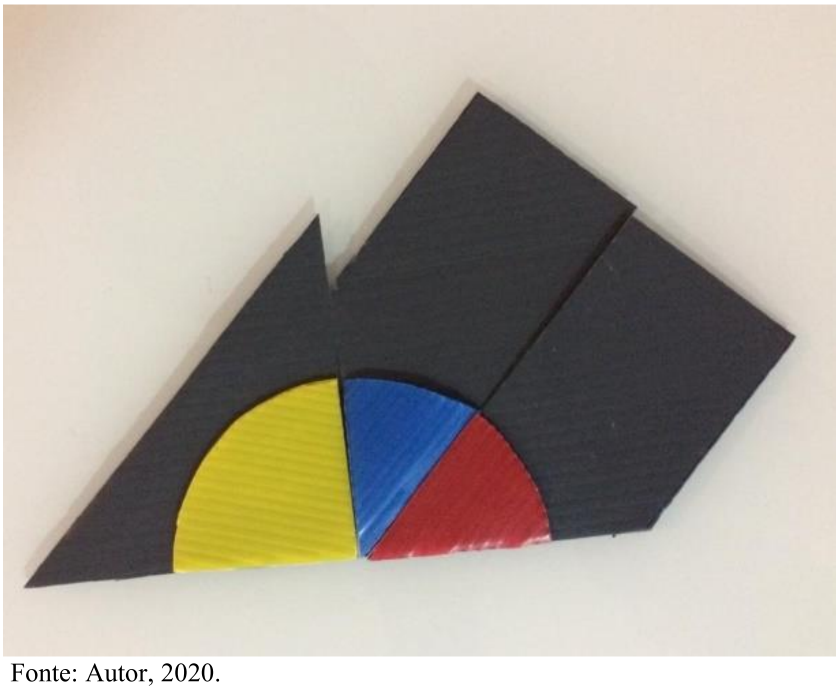
A mediação do professor deverá ganhar importância no sentido de buscar efetuar cortes convenientes nas figuras, de modo que os ângulos dos triângulos, os quais possuem cores diferentes do restante da figura, possam ter um encaixe adequado como segue adiante:

Figura 45 – Encaixe angular do triângulo acutângulo.



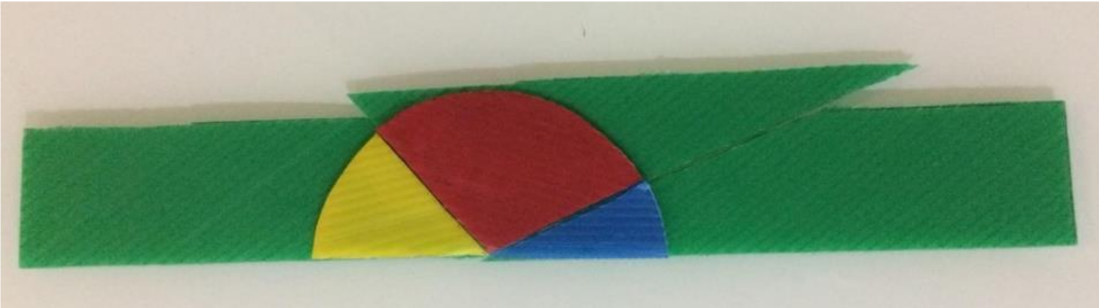
Fonte: Autor, 2020.

Figura 46 – Encaixe angular do triângulo retângulo.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 47 – Encaixe angular do triângulo obtusângulo.



Fonte: Autor, 2020.

A imagem fomentará a intuição no sentido de que a soma dos ângulos internos de um triângulo retorna um valor que pode facilmente ser associado à metade do ângulo delimitado por uma semicircunferência, logo um ângulo de 180º.

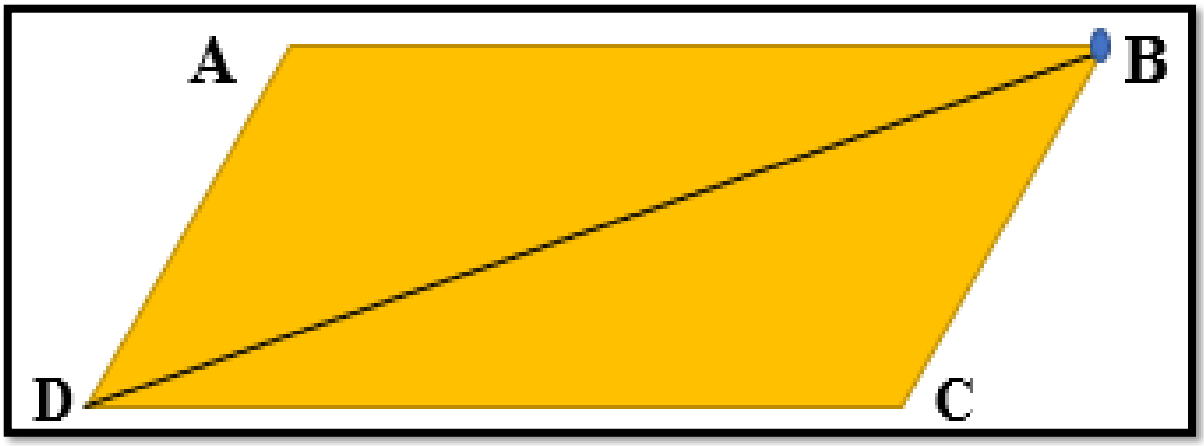
Um fato que merece especial atenção é que a (BNCC 2017, p. 319) determina que as decorrências tanto angulares quanto lineares resultantes de retas paralelas intersectadas por transversais, saber este de suma importância para a abordagem do assunto em voga, deva ser trabalhado somente no 9ª ano do ensino fundamental. Diante dessa explanação, torna-se fundamental utilizar materiais pedagógicos concretos para que a capacidade intuitiva dos alunos possa ser desenvolvida o quanto antes.

Quando se busca saber o valor do ângulo externo de um triângulo, torna-se fundamental levar o aluno a perceber que a soma do ângulo interno com o seu correspondente externo retorna o valor de 180º. Dessa forma, com base nas imagens supramencionadas, o suplemento de cada ângulo interno é a soma dos outros dois, pois é a parte que falta ao ângulo interno para chegar ao valor de 180º. Dando continuidade para saber o valor da soma de todos os ângulos internos de qualquer polígono, ao professor caberá levar os alunos à reflexão sobre qual estratégia utilizar com indagações do tipo:

a) será que existe alguma forma de dividir esse polígono para facilitar o processo?;
b) quais os segmentos vocês orientam traçar para se resolver esse problema?;
c) será que se um vértice do polígono fosse fixado e, a partir dele, fossem traçados segmentos de reta ligando-os a todos os outros vértices não adjacentes (diagonais), a busca não seria facilitada?.

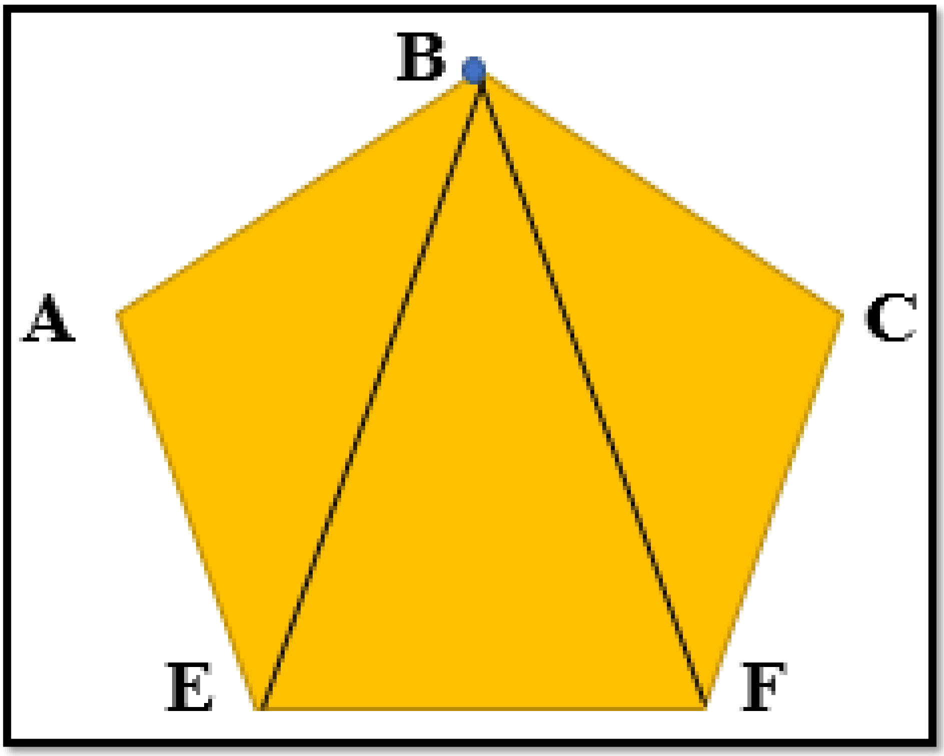
Com base nessa mediação, seria possível levar os alunos a entender que basta dividir o polígono em triângulos a partir de uma estratégia pedagógica interessante. Opta-se por um vértice do polígono a ser fixado e, a seguir, traça-se todas as diagonais possíveis. É óbvio que o termo diagonal, caso não tenha sido definido, pode ser intuitivamente utilizado no procedimento. Abaixo serão apresentados os desenhos de polígonos de 4, 5 e 6 lados, de modo que o vértice B será fixado para que, a partir dele, sejam traçadas todas as diagonais possíveis:

Figura 48 – Quadrilátero com diagonais traçadas a partir do vértice B.



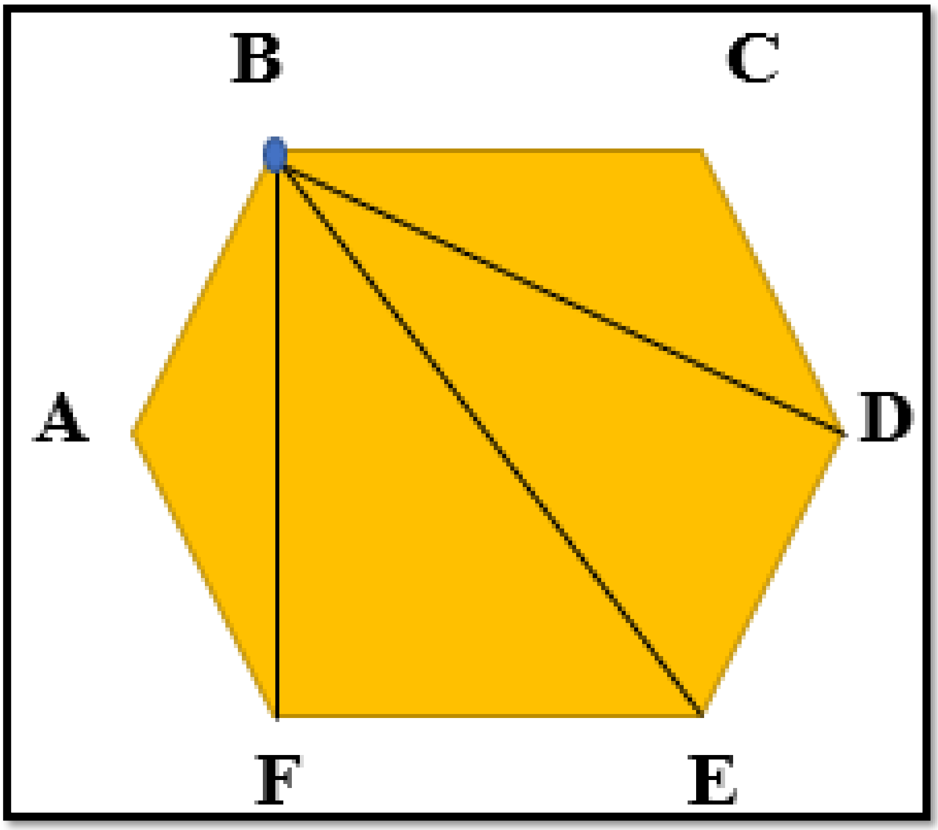
Fonte: Autor, 2020.

Figura 49 – Pentágono com diagonais traçadas a partir do vértice B.



Fonte: (Autor, 2020)

Figura 50 – Hexágono com diagonais traçadas a partir do vértice B.



Fonte: Autor, 2020.

Conclusões pertinentes a serem atingidas com base na mediação:

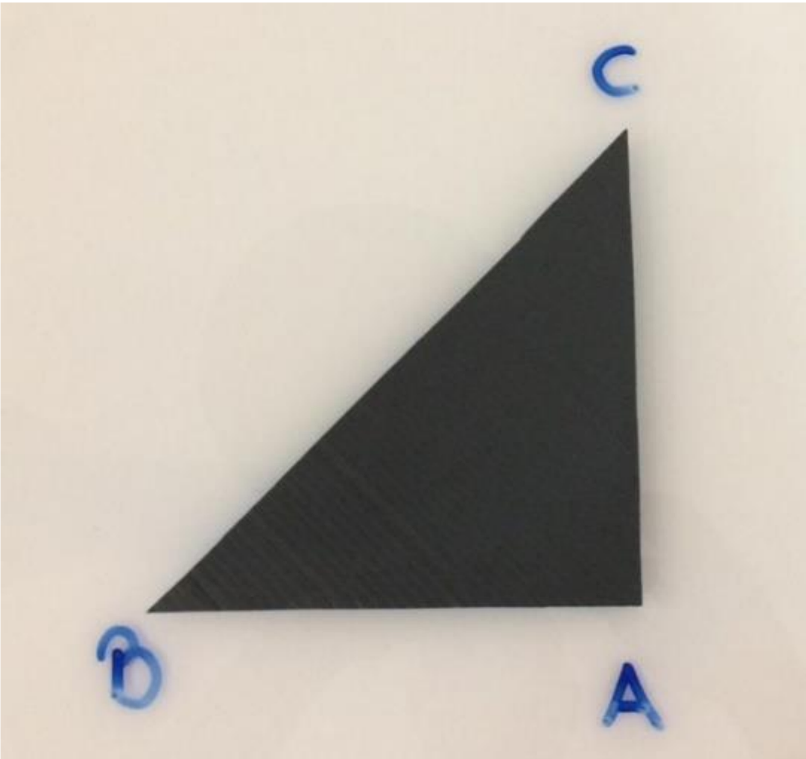
a) o número de segmentos interessantes traçados a partir de B (diagonais) é sempre três unidades a menos que o número de vértices;
b) o número de triângulos traçados é sempre 2 unidades a menos que o número de vértices;
c) a soma dos ângulos internos dos polígonos é obtida somando 180º na mesma quantidade de vezes que os triângulos aparecem, como segue:
   – No quadrilátero tem-se: 180º+180º = 360º;
   – No pentágono tem-se: 180º +180º+180º= 540º;
   – No hexágono tem-se: 180º+180º+180º+180º= 720º.

Dessa forma, é possível se perceber que as decomposições a serem convenientemente aplicadas em qualquer polígono ensejarão o surgimento de triângulos. A soma dos ângulos internos do polígono pode ser interpretada como a soma dos ângulos internos de todos os triângulos que foram gerados pela decomposição .

8.2 A simetria e os triângulos isósceles

À luz do que preconiza a BNCC (2017, p. 315), os conhecimentos inerentes à construção dos conceitos tanto de mediatriz de um segmento e quanto de bissetriz de um ângulo enquanto lugares geométricos devem ocorrer ao longo do 8º ano do ensino fundamental. Ademais, convém aludir ao fato de que a BNCC (2017, p. 315) preconiza, também, que formalização dos casos de congruência de triângulos deva ocorrer no mesmo interstício supramencionado. Por outro lado, a mesma norma estabelece que as habilidades atinentes às transformações geométricas sejam fortemente trabalhadas com foco na intuição já a partir do 5º ano do ensino fundamental. Ao se perscrutar todas as edições da OBMEP, fica evidente a preocupação dos elaboradores do exame em saber se o aluno consegue identificar padrões de simetria na forma geométrica. A ênfase é dada à capacidade de intuição dos alunos. Nesse momento, a atenção será voltada para a compreensão de casos envolvendo a simetria nos triângulos isósceles. De início, será apresentado um triângulo retângulo no vértice A, que segue abaixo:

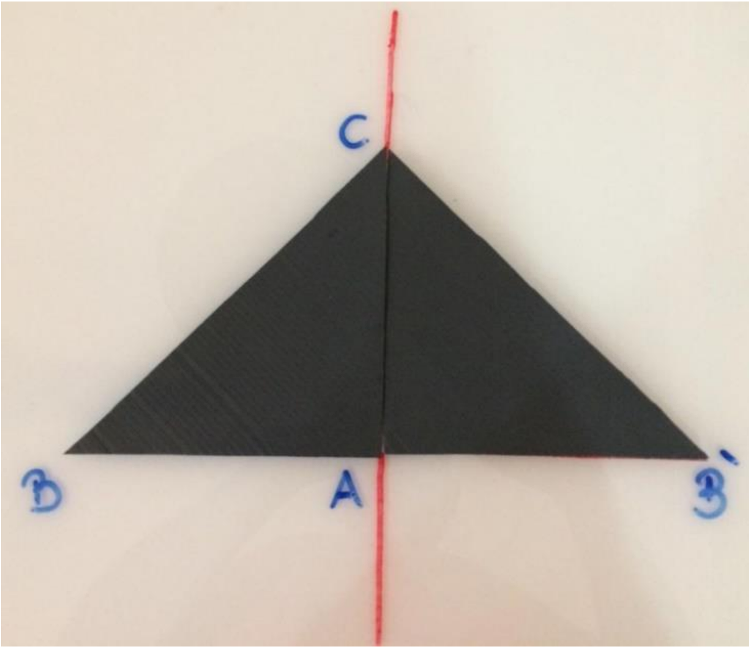
Figura 51 – Triângulo retângulo ABC.



Fonte: Autor, 2020.

Vamos inicialmente escolher um dos catetos, segmento AC, para funcionar como eixo de simetria ou "espelho". A seguir é produzida uma aplicação da transformação geométrica denominada reflexão propriamente dita do triângulo, conforme assinala a próxima ilustração:

Figura 52 – Reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo AC.



Fonte: Autor, 2020.

Uma consequência imediata é que o objeto (triângulo ABC) e a imagem (triângulo AB'C) são figuras geométricas idênticas. Em caso de dúvida, basta realizar uma rotação da imagem em modo que:

a) simetria dos segmentos: $\overline{AB}$ = $\overline{AB'}$, $\overline{BC}$ = $\overline{B'C}$;
b) simetria dos ângulos: A$\hat{B}$C = A$\widehat{B'}$C, B$\hat{C}$A = A$\hat{C}$B'.

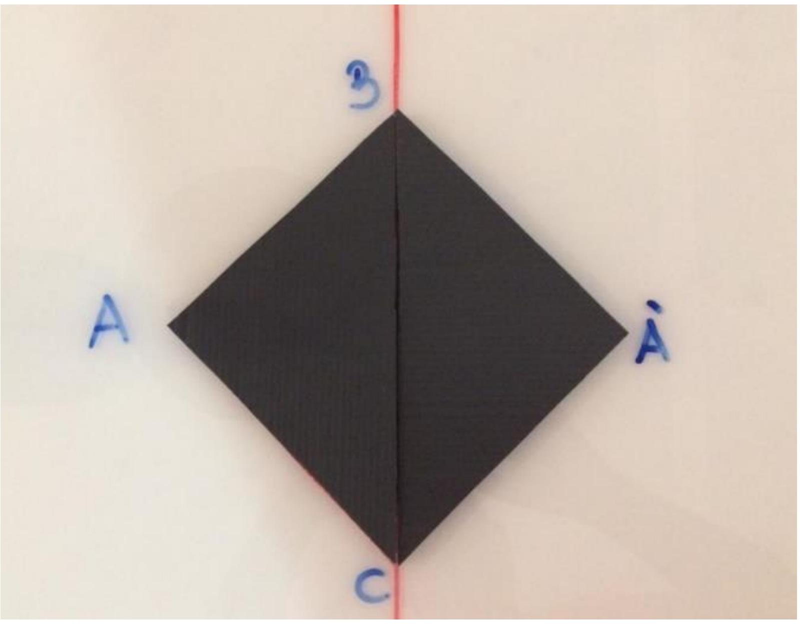
A decorrência imediata que emerge do processo em relação ao triângulo BB'C é que o segmento $\overline{AC}$:

a) divide ao meio o segmento $\overline{BB'}$ ou lado "c";
b) forma um ângulo de 90º com o segmento $\overline{BB'}$;
c) divide ao meio o ângulo B$\hat{C}$B'.

Mais à frente, na vida escolar, o aluno entenderá que o triângulo BB'C é chamado de isósceles e a altura $\overline{AC}$ funcionará como mediana da base $\overline{BB'}$, e bissetriz interna do ângulo B$\hat{C}$B' ou simplesmente $\hat{C}$. A partir desse momento, a função da mediação será iniciar um processo de discussão com a seguinte indagação: **será que a mesma consequência ocorre com a reflexão sobre qualquer um dos lados do triângulo?**

No caso do outro cateto, a resposta será sim. Tendo em vista que o processo é idêntico ao que acabou de ser feito, esse caso não merecerá por parte do estudo uma atenção maior. Quando a rotação se dá em torno do lado maior (hipotenusa), $\overline{BC},$ é que a atividade se torna ainda mais interessante. Abaixo segue a ilustração em questão:

Figura 53 – Reflexão tomando a hipotenusa como eixo de simetria.

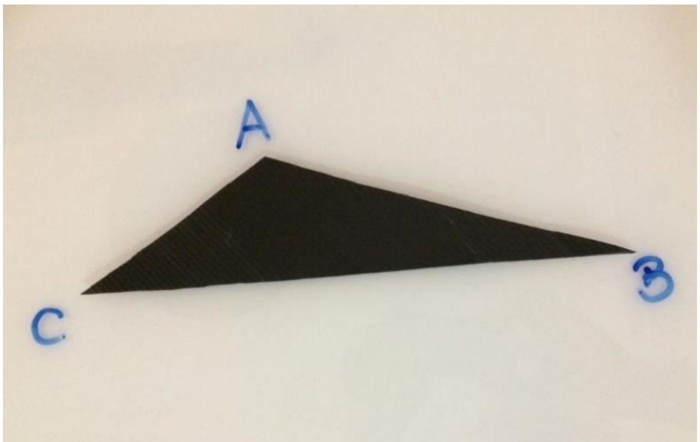


Fonte: Autor, 2020.

O aluno perceberá que não houve a produção de um triângulo isósceles como ocorreu nos exemplos anteriores.

Para a próxima atividade será apresentada, inicialmente, a ilustração do triângulo obtusângulo abaixo:

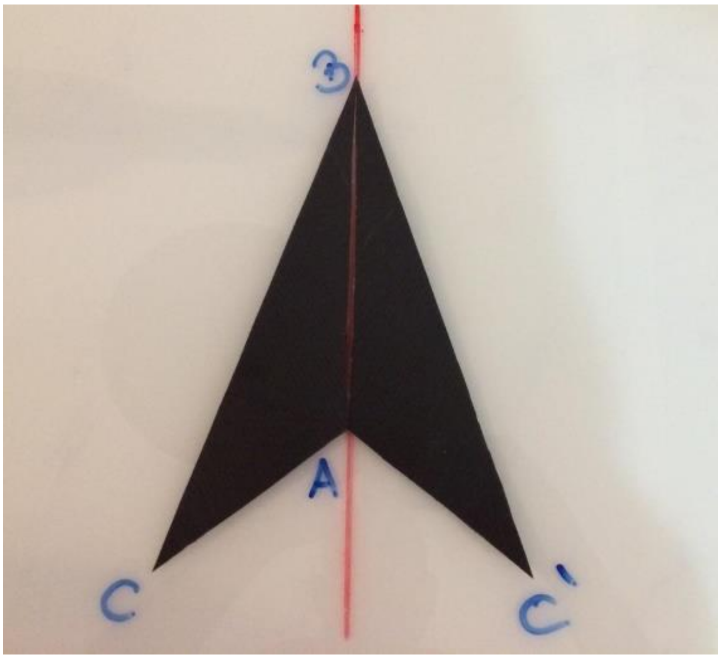
Figura 54 – Triângulo obtusângulo ABC.



Fonte: Autor, 2020.

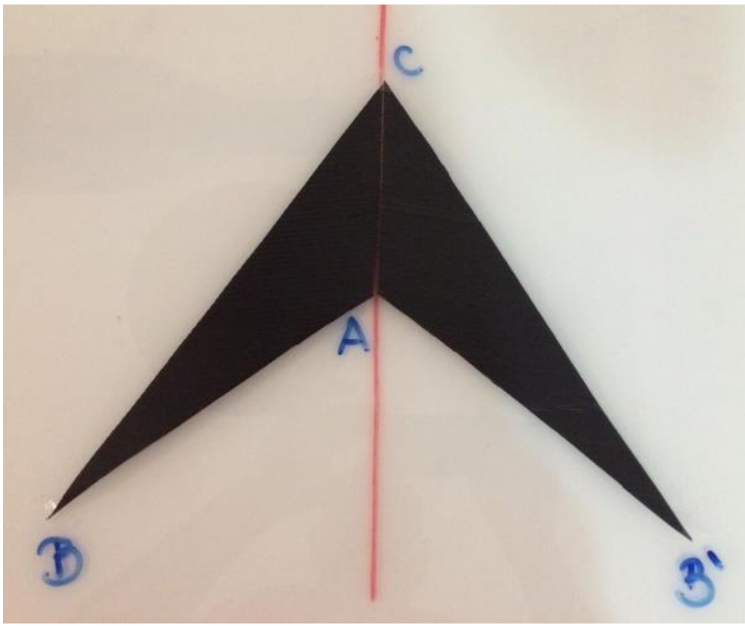
Os alunos serão demandados a realizar reflexões utilizando, em cada caso, um dos lados como eixo de simetria. Abaixo seguem imagens das possíveis reflexões:

Figura 55 – Reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo $\overline{AB}$.



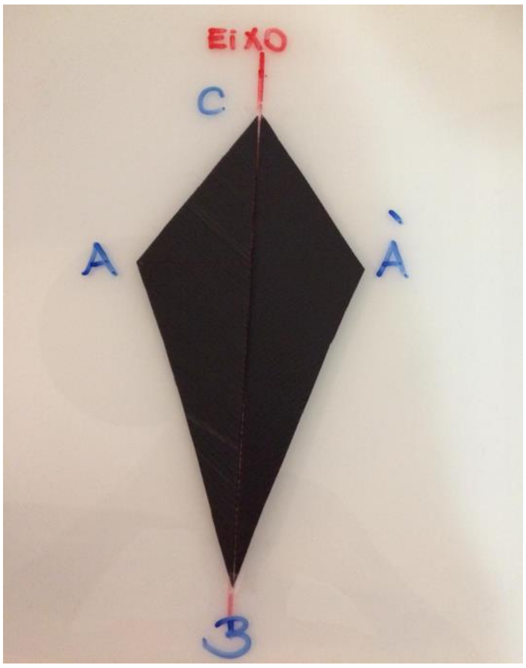
Fonte: Autor, 2020.

Figura 56 – Reflexão do triângulo ABC tendo como eixo $\overline{AC}$.



Fonte: Autor, 2020.

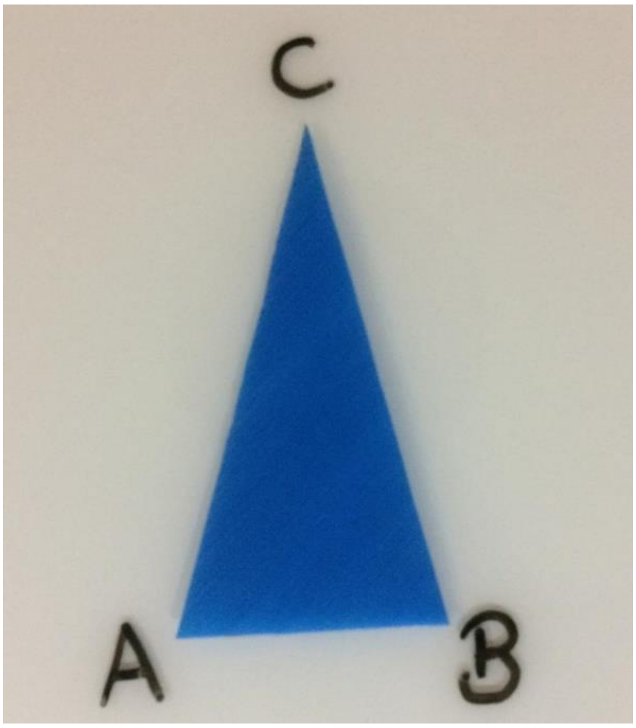
Figura 57 – Reflexão do triângulo ABC
em relação ao eixo $\overline{BC}$.



Fonte: Autor, 2020.

Finalmente, caberá realizar o mesmo processo em um triângulo acutângulo, o qual segue descrito abaixo:

Figura 58 – Triângulo acutângulo ABC.



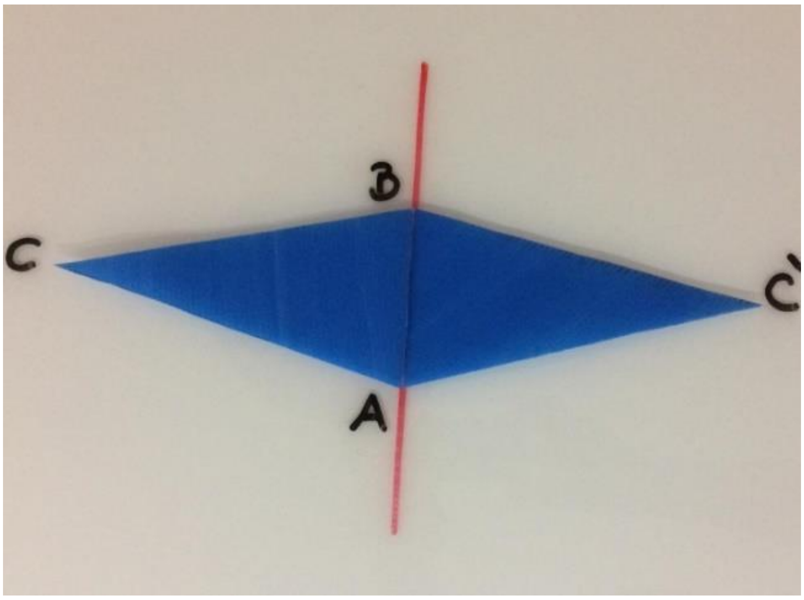
Fonte: Autor, 2020.

Aconselha-se que o mediador faça os seguintes questionamentos antes de fazer as reflexões:

a) vocês acham que após as reflexões surgirá algum triângulo isósceles com base na composição do objeto (triângulo ABC) com sua imagem?
b) caso ocorra, qual será o eixo de simetria que permitirá esse fato?

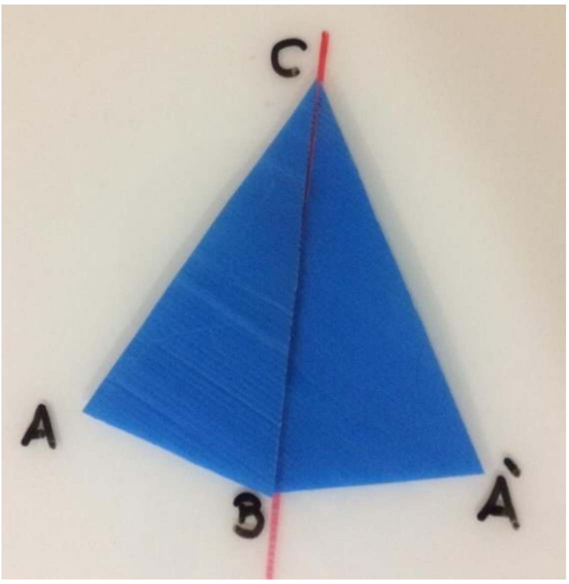
Abaixo seguem as imagens com as três reflexões do triângulo acutângulo em tela:

Figura 59 – Reflexão em relação ao eixo de simetria $\overline{AB}$.



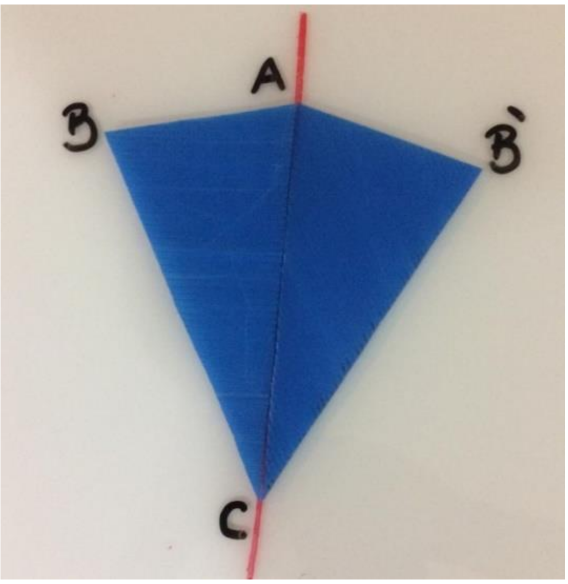
Fonte: Autor, 2020.

Figura 60 – Reflexão do triângulo ABC com eixo de simetria $\overline{BC}$.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 61 – Reflexão do triângulo ABC com
eixo de simetria $\overline{AC}$.



Fonte: Autor, 2020.

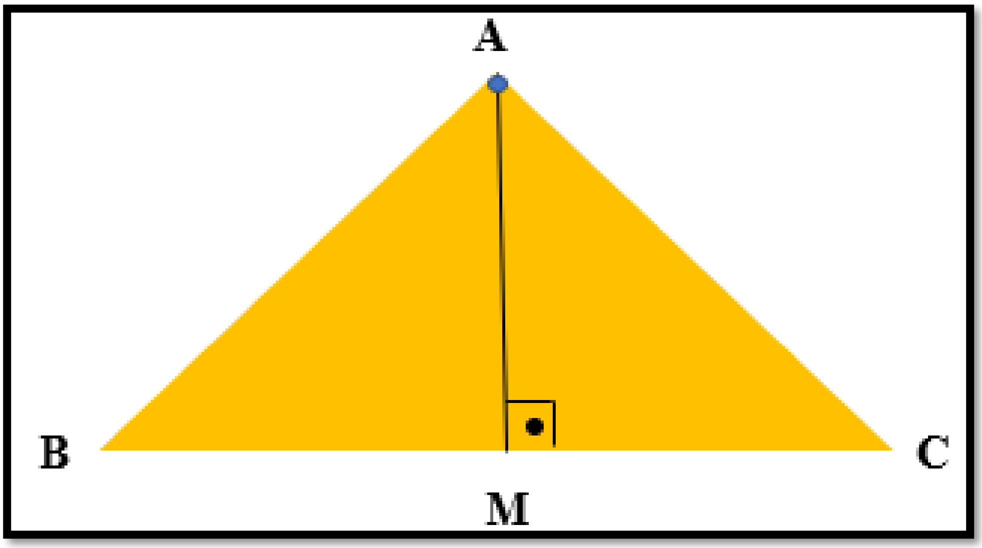
A conclusão que emergirá naturalmente é que a figura geométrica que resulta da reflexão de um triângulo ABC, tendo como eixo de simetria um dos lados, com a sua imagem só será um triângulo isósceles se os dois eventos abaixo ocorrerem:

a) o triângulo a ser refletido for retângulo;

b) o eixo de simetria for um dos catetos.

Para finalizar toda a apresentação em curso, é importante inicialmente visualizar o triângulo que segue exposto:

Figura 62 – Triângulo ABC com um segmento $\overline{AM}$ traçado.



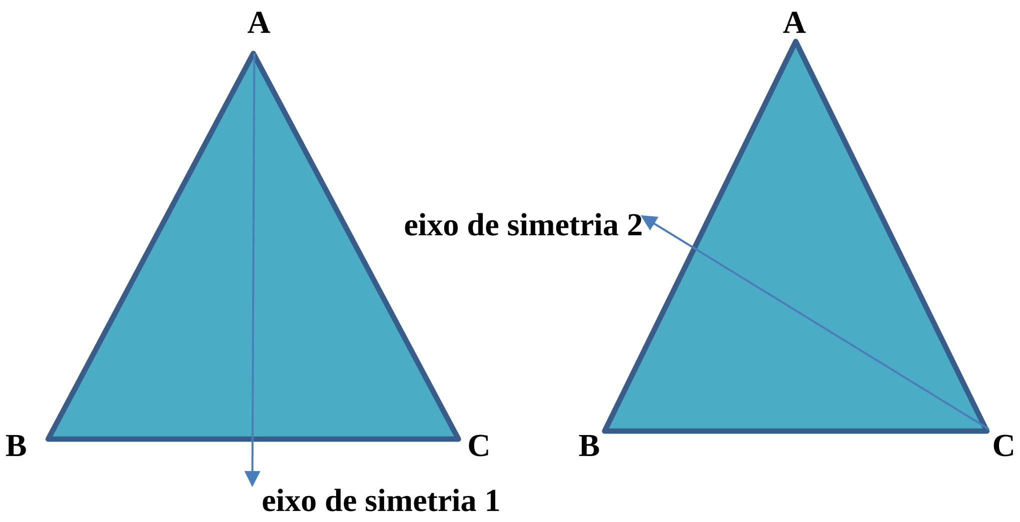
Fonte: Autor, 2020.

Caso os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sejam de mesmo comprimento e se o segmento $\overline{AM}$ formar um ângulo de 90º com o lado $\overline{BC}$, a consequência será:

a) angular: $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ e $B\hat{A}M = M\hat{A}C$;
b) segmentar: $\overline{BM} = \overline{CM}$.

Uma decorrência natural que emana dessa construção é atinente ao fato de que todo triângulo equilátero, tendo todos os lados iguais, também é equiângulo, todos os ângulos são iguais e possuem o valor de 60º. Basta inicialmente que seja criado um triângulo equilátero ABC com eixo de simetria sobre o lado $\overline{BC}$, contendo obviamente o vértice A. A consequência imediata a partir do que foi trabalhado é que: os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são "idênticos" ou congruentes. Ao se fazer a construção do eixo de simetria sobre o lado $\overline{AB}$, contendo obviamente o vértice C, tem-se, com base no lastro propiciado pelas construções em voga, que: os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ são "idênticos" ou congruentes. Consequentemente, os três ângulos internos do triângulo equilátero são "idênticos" ou congruentes. Tendo em vista que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer resulta no valor 180º, tem-se que cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero vale 60º.

Figura 63 – Triângulo ABC com dois eixos de simetria traçados.



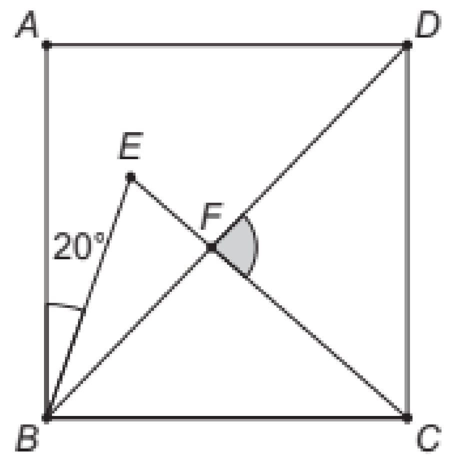
Fonte: Autor, 2021.

Abaixo segue uma questão extraída da 1ª fase nível 2 do exame da OBMEP do ano de 2019.

Figura 64 – Questão 14 da 1ª fase nível 2 da OBMEP (2019).

14. Na figura, *ABCD* é um quadrado, a medida do ângulo *ABE* é 20° e *EC* = *BC*. Qual é a medida do ângulo *DFC*?

A) 80°
B) 85°
C) 90°
D) 95°
E) 100°



Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em outubro de 2020.

Considerações pertinentes:

a) Como o segmento $\overline{BD}$ é um eixo de simetria do quadrado ABCD, então o ângulo ABD é igual ao ângulo CBD. Logo o ângulo CBD mede 45º;

b) O ângulo EBF mede $45º - 20º = 25º$;

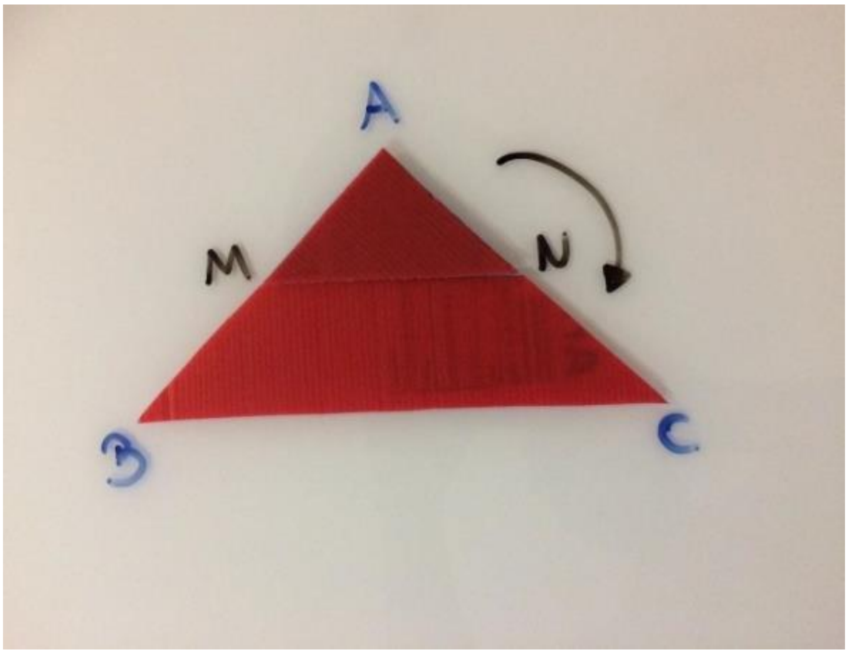
c) Como $\overline{EC} = \overline{BC}$, então, pelo que vimos nessa seção: os ângulos C$\hat{B}$E e C$\hat{E}$B são iguais. O ângulo CBE é igual a $25º + 45º = 70°.$ Como a soma dos ângulos internos é 180º, então o ângulo ECB valerá 40º;

d) O ângulo D$\hat{F}$C é o ângulo externo do ângulo B$\hat{F}$C do triângulo BCF. Logo seu valor resultará da soma dos ângulos C$\hat{B}$F e B$\hat{C}$F, que será igual a 85º.

8.3 Áreas de triângulos

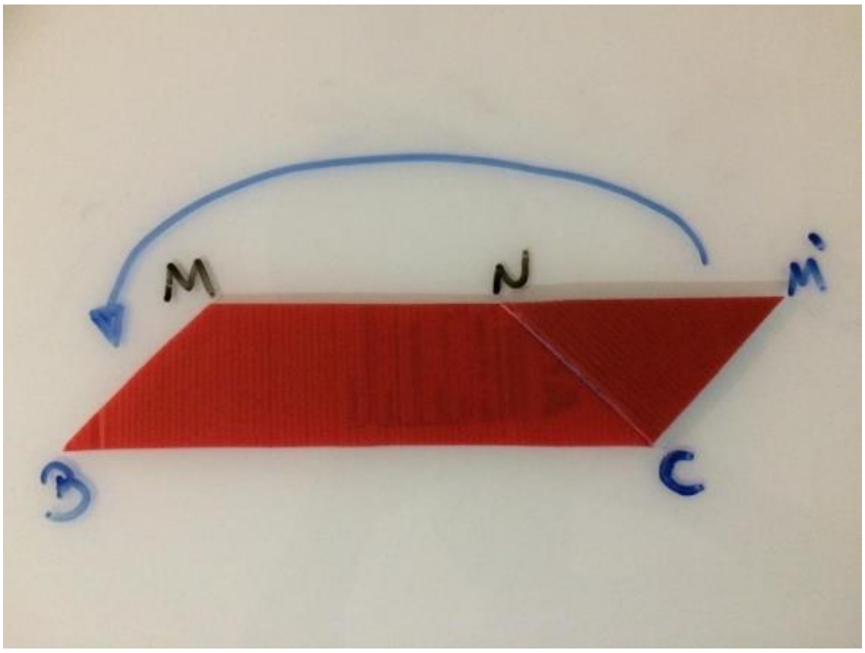
A segunda aplicação escolhida diz respeito a uma forma de se poder converter um triângulo qualquer ABC primeiramente em um paralelogramo de área equivalente. Após isso, o paralelogramo é convertido em um retângulo de área equivalente ao paralelogramo. É importante salientar que as bases dos 3 polígonos são congruentes, sendo que a altura assumida pelos 2 quadriláteros em pauta é num valor referente à metade da altura do triângulo que originou o processo. Abaixo serão apresentadas as 3 figuras que ilustram tal processo:

Figura 65 – Triângulo original ABC.



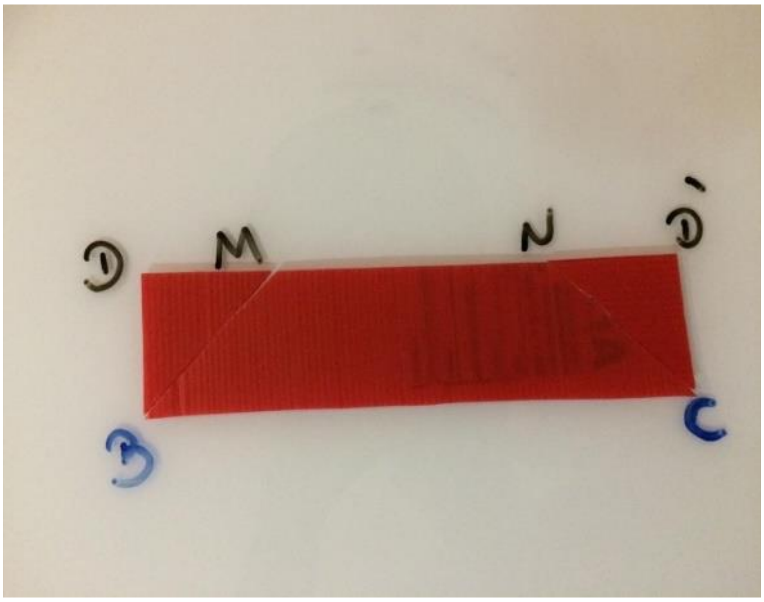
Fonte: Autor, 2020.

Figura 66 – Paralelogramo após a primeira conversão.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 67 – Retângulo resultante da segunda conversão.



Fonte: Autor, 2020.

É importante aludir ao fato de que os pontos M, N não são pontos aleatórios, mas sim os pontos médios dos lados do triângulo em que estão inseridos. Em um estágio inicial do processo de familiarização com o tema em questão, os aspectos visuais decorrentes da construção apresentam respostas contundentes e suficientes para que o aluno seja capaz de captar o entendimento sobre o processo de cálculo do valor da área de um triângulo. À medida que o processo de maturação da capacidade de abstração tenha prosseguimento, surgem condições apropriadas do ponto de vista cognitivo para que argumentos essenciais sejam discutidos com maior profundidade. De início, será possível abordar o fato de que os pontos médios dos lados possibilitam a construção de um triângulo, e que ao ser transportado de modo que as duas metades do mesmo lado se encaixem, possibilita a construção de um paralelogramo de mesma base que o triângulo original e com a metade da altura. A seguir, se realiza a construção do segmento de reta perpendicular ao segmento de reta $\overline{ND`}$, o qual contém o vértice C. Convém citar que os pontos D e D’ são coincidentes. Realiza-se o corte com tesoura sobre o referido segmento e extrai-se o triângulo CD’M’. Finalmente, transporta-se o triângulo CD’M’ para o lado esquerdo e se realiza o encaixe adequado dos lados congruente $\overline{\mathrm{CM}'}$ e $\overline{BM}$, ensejando, por conseguinte, o surgimento de um retângulo de mesma base que o triângulo original, porém com metade da altura. Em um momento posterior, com base na evolução do poder de abstração dos alunos, essa construção manual e deveras convincente para o momento em que for feita, poderá ser enriquecida com uma abordagem em que possa ser trabalhado os aspectos seguintes:

a) congruência dos triângulos AMN e CNM’;
b) consolidação do entendimento de que o quadrilátero BMM’C é um paralelogramo, considerando que BC ⫽ MM’ e BM ⫽ CM’;
c) construção da mediatriz do segmento NM’;
d) congruência dos triângulos CD’M’ e BDM;
e) consolidação de que o quadrilátero BCD’D é um retângulo.

8.4 **Área de triângulos em um contexto de comparação**

A BNCC (2017, p. 297) sinaliza de para um trabalho em sala de aula que permita levar o aluno a refletir quando, fugindo, por conseguinte, de modelos de ensino de Matemática focados somente na repetição, quando preconiza o desenvolvimento da seguinte habilidade cognitiva já no 5º ano do ensino fundamental, como segue: “Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes”.

Diante dessa perspectiva altamente construtiva e desafiadora para todos os envolvidos no processo ensino-aprendizagem, abre-se espaço para a discussão sobre as convicções dos alunos, altamente lastreadas pela intuição, sobre o entendimento de áreas não só como um mero número, mas sim como um conceito muito maior que pode ser entendido à luz de procedimentos de comparação. Quando se observa dois triângulos com perímetros distintos, a intuição por vezes parece indicar que o de maior perímetro terá a maior área. Nas atividades que serão trabalhadas adiante, a ênfase será buscar desenvolver um trabalho de área no qual a comparação é a única ferramenta, de modo a se chegar ao final com um resultado inusitado para muitos. Desse modo, a mediação cirúrgica do professor terá um aspecto crucial para o êxito das atividades.

A partir desse momento, a abordagem do presente estudo se dedicará na busca por contribuir com uma proposta de atividades bastante interessantes envolvendo materiais lúdicos e simples, mas com imenso potencial para gerar reflexões sobre o tema área de triângulo.

Atividade 1

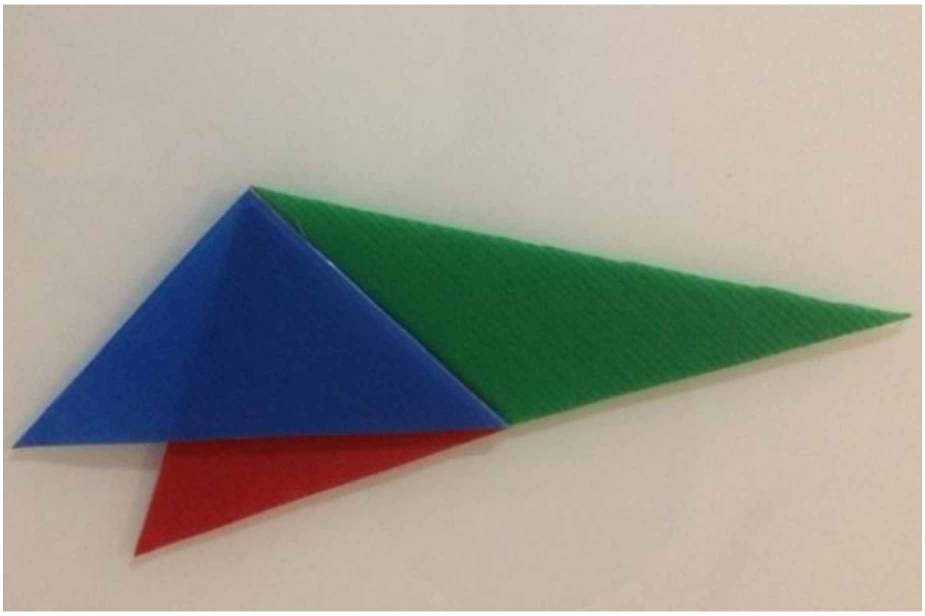
Com base na foto abaixo exposta, em que 3 triângulos são apresentados, tente explicar com argumentos qual deles possui a maior área e qual possui a menor, considerando que não é possível utilizar qualquer utensílio voltado para efetuar medida.

Figura 68 – Triângulos utilizados na 1ª atividade.

Fonte: Autor, 2020.

É importante perceber que a questão apresenta 3 tipos de triângulos, sendo um acutângulo, um retângulo e um obtusângulo. Tendo em vista que não é permitido o uso de réguas ou outro item similar, estratégias de comparação de figuras se transformam no único meio para se chegar ao objetivo. As intervenções do professor ganham substancial importância para jogar luz na direção de objetivos hierarquicamente organizados. O primeiro objetivo em pauta é fazer questionamentos no sentido de orientar os alunos a compararem os lados dos triângulos na busca de um lado comum que poderá ser usado como base. Após todos, com base na interação com os colegas e na mediação do professor, conseguirem enxergar que há um lado em comum, passa-se para o próximo estágio da atividade. A figura descrita abaixo será de grande valia na visualização desse fato, como segue:

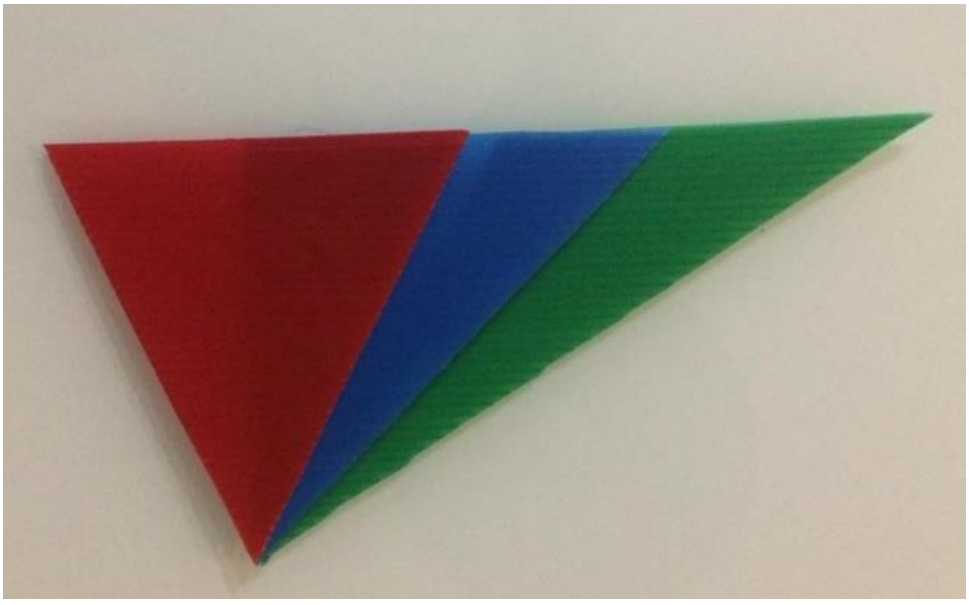
Figura 69 – Exposição da base comum.



Fonte: Autor, 2020.

O próximo passo será identificar a altura referente ao lado comum, o qual servirá de base. No momento em que descobrirem o lado comum, a perseguição pela descoberta da altura que possibilite a comparação entre as áreas tenderá a ser mais natural. A figura abaixo apresenta uma imagem capaz de elucidar esse entendimento.

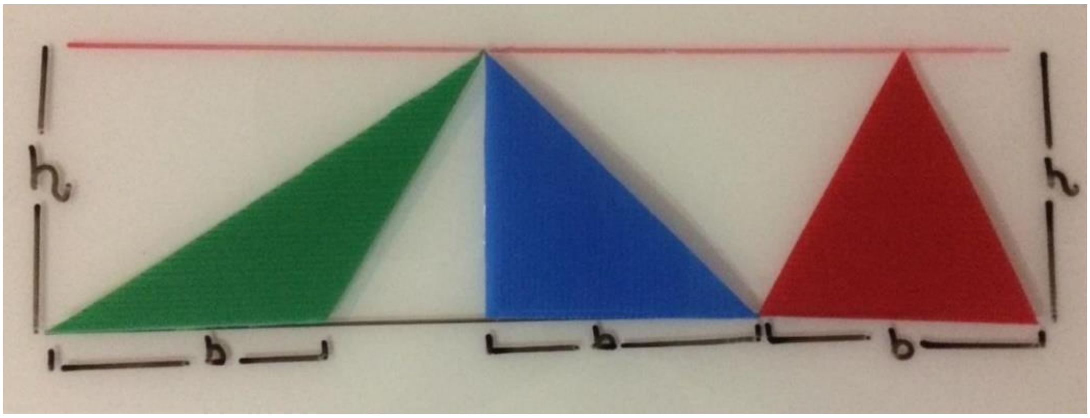
Figura 70 – Exposição da altura referente ao lado comum**.**



Fonte: Autor, 2020.

Agora segue uma imagem final mais formalizada para ilustrar todo o processo, deixando nítido o fato de que todos os triângulos apresentados possuem a mesma área.

Figura 71 – Exposição dos triângulos de forma elucidativa.



Fonte: Autor, 2020.

Perguntas pertinentes ao longo da mediação:

a) De início, com base na sua intuição, qual seria a resposta?;
b) Será que não tem algum lado em comum para utilizarmos como base?;
c) Será que existe alguma forma para fazer a sobreposição das figuras, de modo a permitir comparar as alturas referentes à base?;
d) Com base na atividade, a ordem dos perímetros das figuras foi seguida na ordenação das áreas?;
e) A título de curiosidade, a resposta o surpreendeu?

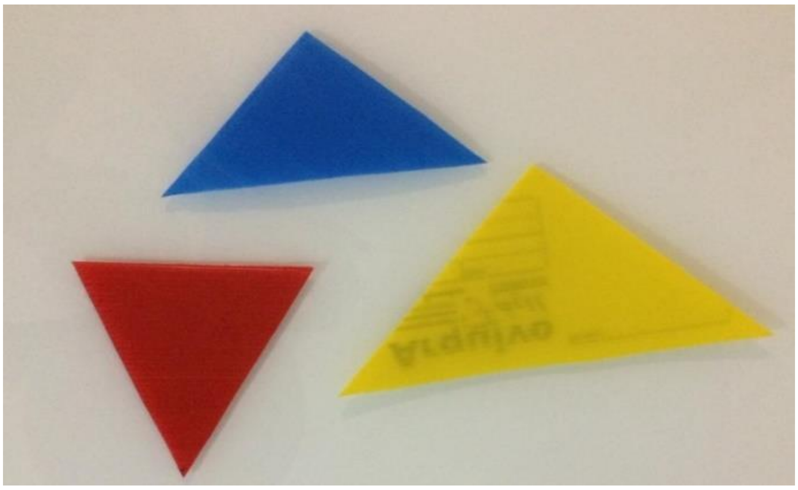
Essa é uma questão que busca gerar reflexão em sala de aula, pois a tendência é que o aluno imagine que o maior perímetro inevitavelmente leve a uma maior área. Nessa linha, a BNCC (2017, p. 297) preconiza a seguinte habilidade para o aluno do 5º ano: "Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes".

Atividade 2

Abaixo segue uma imagem em que dois triângulos de mesma área, que foram apresentados no problema anterior, são apresentados ao lado de um triângulo maior. Você saberia dizer a relação entre as áreas?

Observação: após a conclusão da primeira atividade, ficara cabalmente caracterizado o fato de que todos os triângulos apresentados possuem um lado em comum e a altura referente a esse lado de mesma dimensão. Para a segunda atividade, poderá ser escolhido qualquer par de triângulos. O mediador poderá deixar a cargo dos alunos a escolha do par de seu interesse.

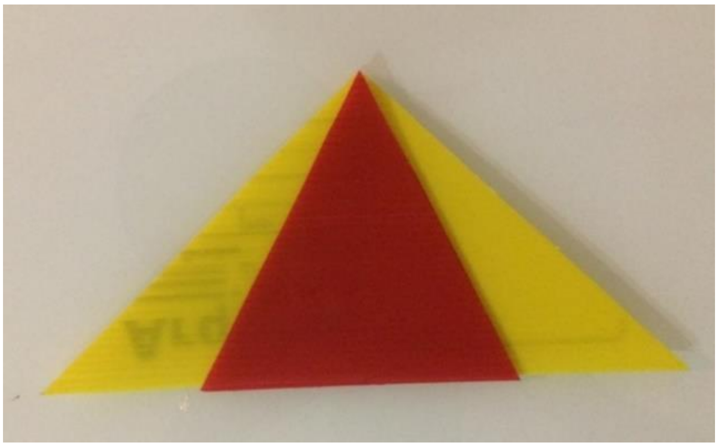
Figura 72 – Exposição dos triângulos da atividade 2.



Fonte: Autor, 2020.

Durante a realização dessa atividade, os alunos partirão para a imediata comparação com a estratégia anteriormente bem-sucedida. É óbvio que tal investida resultará em fracasso. A mediação do professor deverá ser voltada para tentar localizar alguma altura que seja congruente. A estratégia será tentar procurar uma formação em que dois vértices coincidam e os lados opostos fiquem perfeitamente sobrepostos. A orientação por parte do docente deve focar na busca de uma altura interessante para a investigação em curso. A figura abaixo apresenta uma imagem elucidativa.

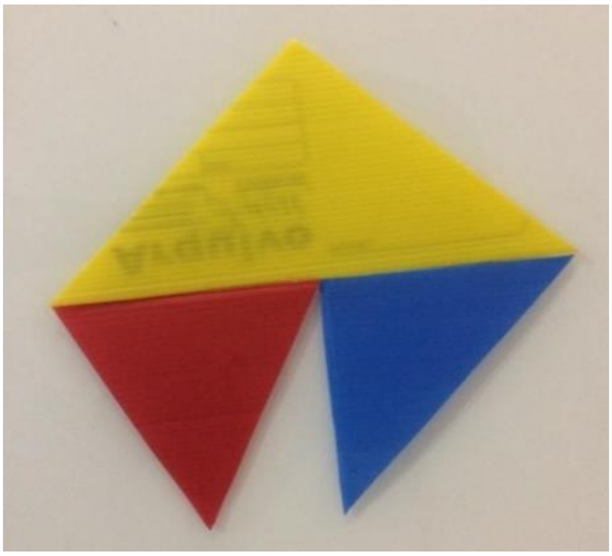
Figura 73 – Exposição da altura comum**.**



Fonte: Autor, 2020.

Agora caberá ao professor indagar se há alguma relação de multiplicidade entre as bases. Nesse momento, a utilização dos triângulos de mesma área acaba sendo primordial, pois ambos têm a mesma base. Conseguir uma forma para sobrepor as bases iguais sobre a base do triângulo maior permitirá concluir com êxito o processo em pauta. A figura abaixo apresenta uma forma interessante para visualizar esse fato.

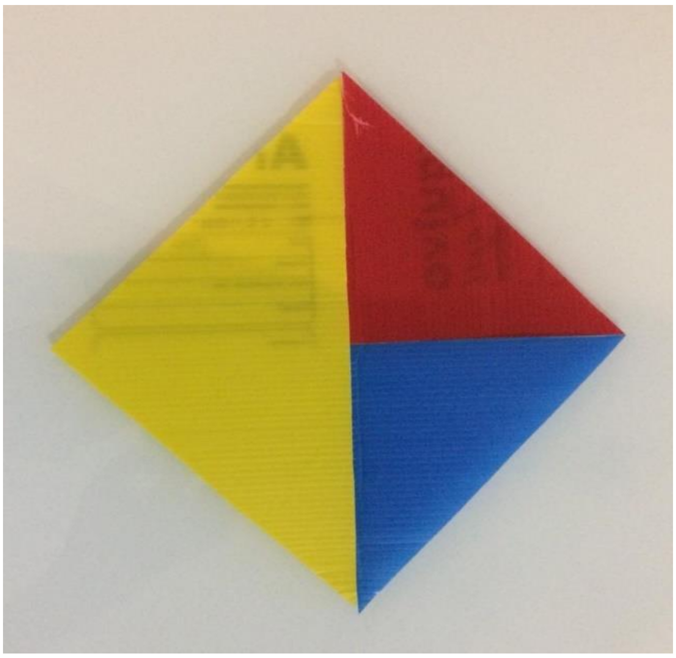
Figura 74 – Exposição da relação entre as bases.



Fonte: Autor, 2020.

A figura abaixo apresenta de forma bastante contundente que o triângulo maior possui o dobro da área do triângulo menor. A seguir, utiliza-se um triângulo congruente ao triângulo azul, que na visão de alguém menos avançado nos conceitos poderia ser concebido como "similar", com o intuito de se construir um quadrado para evidenciar que a área do triângulo amarelo representa o dobro do valor da área do triângulo azul, como segue:

Figura 75 – Construção de um quadrado conveniente.



Fonte: Autor, 2020.

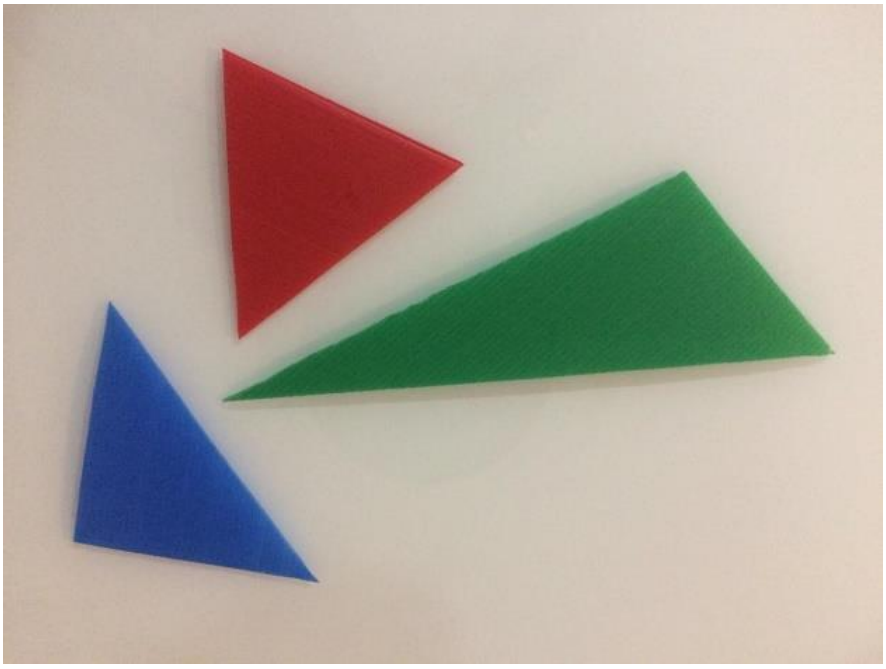
Perguntas importantes para serem apresentadas pelo professor:

a) será que existe algum lado de dimensão congruente entre todos os triângulos?;
b) será que existe alguma altura de dimensão congruente entre todos os triângulos?;
c) será que existe alguma relação de multiplicidade entre as bases dos triângulos em pauta?;
d) se a base do triângulo maior tivesse comprimento equivalente ao triplo da base do menor, mantendo-se a altura com mesmo tamanho, qual seria o efeito no valor da área?

Atividade 3

Na figura exposta abaixo, há a apresentação de dois triângulos de mesma área, os quais já foram apresentados anteriormente, e um terceiro triângulo visualmente maior. Com base em argumentos percebidos ao longo da resolução, apresente a relação existente entre as áreas dos triângulos menores e a área do triângulo maior. Observação: é aconselhável que o professor trace uma paralela à base escolhida no triângulo maior na posição referente ao ponto médio, a fim de que possa auxiliar no processo de resolução.

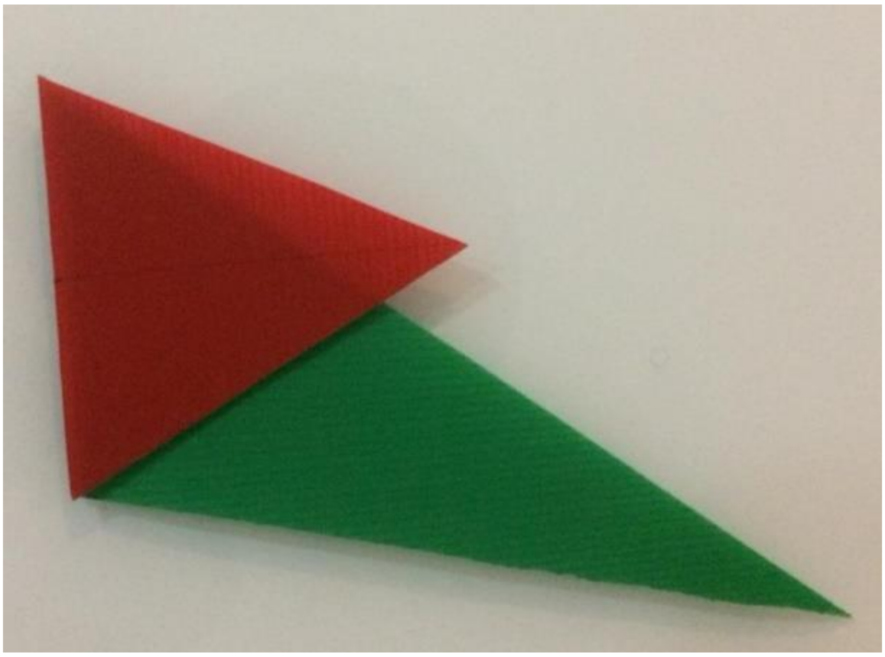
Figura 76 – Triângulos referentes à 3ª atividade.



Fonte: Autor, 2020.

Inicialmente os alunos tenderão a utilizar a estratégia que funcionou na primeira questão. É fundamental que a mediação do professor seja conduzida pontualmente, a fim de que os participantes possam debater de forma ordeira no intuito de construir um senso comum. É fundamental que nenhum aluno fique alheio ao debate que o cerca. Caso o mediador detecte tal comportamento, torna-se primordial direcionar maior atenção para esse aluno, pois pode ser que seja uma desatenção momentânea ou, o que é mais grave, a existência de algum problema cognitivo em curso que esteja impedindo o aluno de corresponder aos objetivos da atividade. Perguntas por parte do professor do tipo "será que há alguma relação de multiplicidade entre as bases?" ou "será que o tamanho da base e da altura comuns do exercício anterior podem ter alguma utilidade nesse exercício?" ou " será que há alguma altura que seja comum?" revestem-se de grande importância por propiciar momentos de reflexão no desenvolvimento da atividade. A figura abaixo apresenta uma forma de explicitar a identificação da base comum.

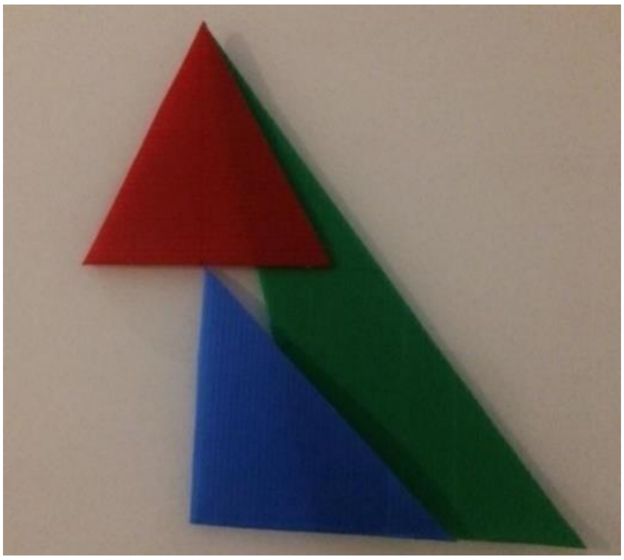
Figura 77 – Encontro da base comum.



Fonte: Autor, 2020.

Após encontrar com relativa facilidade a base, ou seja, o lado do triângulo de mesma dimensão, começará o processo de comparação das alturas referentes á base comum. Nesse momento a participação do professor será de vital importância. Caso algum aluno identifique a relação entre as alturas sem a dica já mencionada, evidenciará uma habilidade admirável que não é a regra. Na hipótese de muitos alunos ainda não terem encontrado a estratégia adequada para avançar no processo de solução, o professor poderá provocar alguma reflexão sobre o fato de existirem dois triângulos de mesma altura para auxiliar no processo. Depois, seria de grande valia que o mediador recordasse a importância do segmento de reta paralelo à base, o qual consta no triângulo maior dividindo sua altura ao meio. A figura apresentada abaixo expõe uma ótima exposição dos polígonos em tela para pautar o entendimento adequado, como segue:

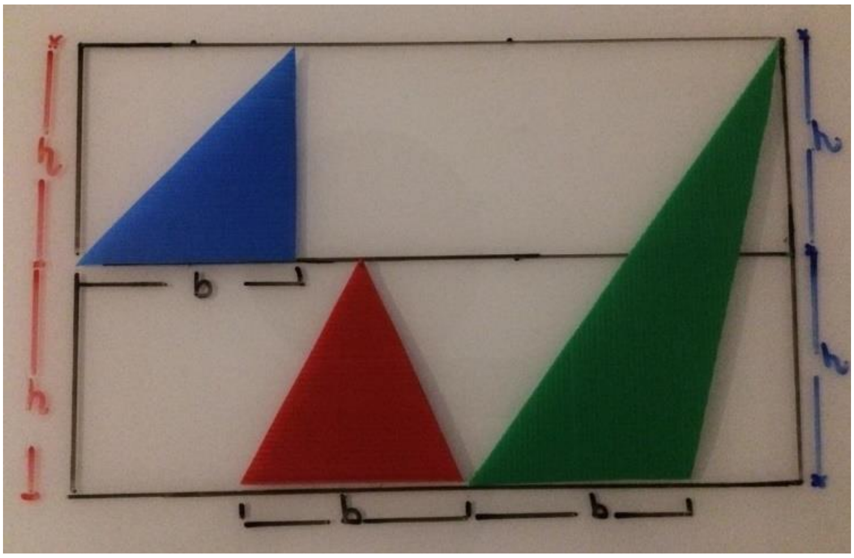
Figura 78 – Encontro da relação entre as alturas.



Fonte: Autor, 2020.

Com todas essas informações, juntamente com a mediação adequada, as bases e alturas atreladas à questão ficarão evidentes. A conclusão será que a área do triângulo maior será o dobro da área de cada um dos triângulos menores. A próxima figura evidencia uma organização mais formal para apresentar as figuras com a finalidade de consolidar o entendimento.

Figura 79 – Exposição final da atividade.



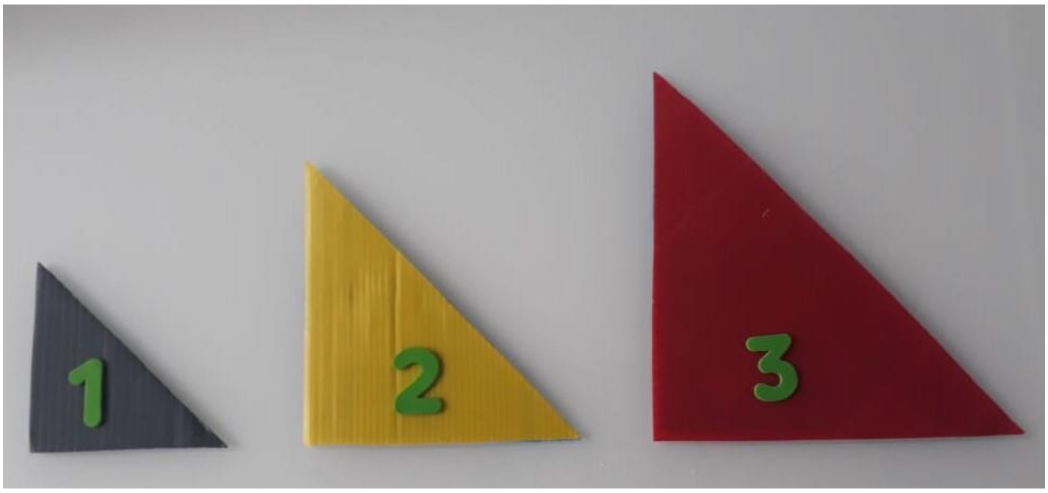
Fonte: Autor, 2020.

Perguntas cruciais a serem feitas pelo mediador ao longo do processo:

a) será que existe alguma forma de posicionar os triângulos menores com o intuito de que seja melhor interpretada a altura do maior?;
b) será que essa reta traçada, que é paralela à base, tem alguma utilidade no processo?;
c) se a altura referente à base do triângulo maior fosse o triplo da altura referente á base do menor, qual seria a repercussão no valor das áreas envolvidas?

No afã de trabalhar conjuntamente as duas situações apresentadas nas duas últimas atividades anteriores, segue uma imagem contendo três triângulos (pequeno, médio e grande) extraídos de um mesmo Tangram:

Figura 80 – Triângulos semelhantes do Tangram n° 1 da figura de nº 35.



Fonte: Autor, 2020.

A próxima atividade propiciará aplicar os ensinamentos empiricamente trabalhados até aqui no que tange ao efeito gerado na área de uma triângulo quando tanto a base quanto a altura convenientemente escolhidos são multiplicados por números, sendo que utilizamos a riqueza geométrica emanada do Tangram.

Atividade 4

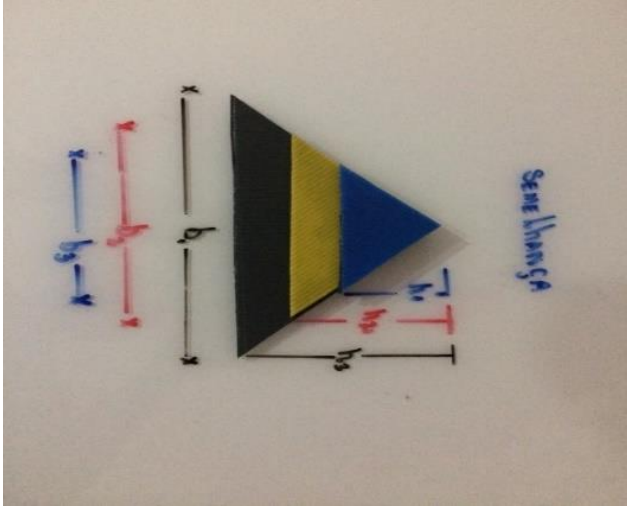
Com base nos triângulos apresentados pela figura 78, é possível detectar que são apresentados os triângulos semelhantes atrelados aos números 1, 2 e 3, extraídos do Tangram de número 1 da figura 35. Qual a relação da área do triângulo de número 1 com as áreas dos triângulos de números 2 e 3?

Torna-se interessante denotar por **b** a base do triângulo de nº 1 e por **h** a sua altura. Comparando este com o triângulo 3, é possível verificar que a base do maior será **2b** e a altura será **2h**. Por conseguinte, a sua área em relação ao menor será o quádruplo, pois: 2x2 = 4. Já na comparação entre o triângulo de número 1 com o triângulo de número 2, é possível visualizar que a base do triângulo médio vale $\mathbf{b\sqrt{2}}$ e a altura do mesmo vale $\mathbf{h\sqrt{2}}$. Logo sua área será o dobro da área. Esta argumentação justifica, a partir de uma reflexão sobre os efeitos da multiplicação de fatores tanto em relação à base quanto em relação à altura de um triângulo no que tange à área, um fato que visualmente fica evidente a partir de uma observação crítica do exposto nas figuras de números 37 e 38 do trabalho em curso, as quais seguem novamente declinadas a seguir:

Figura 81: Reedição da Figura 37.

Fonte: Autor, 2020.

Figura 82: Reedição da Figura 38.



Fonte: Autor, 2020.

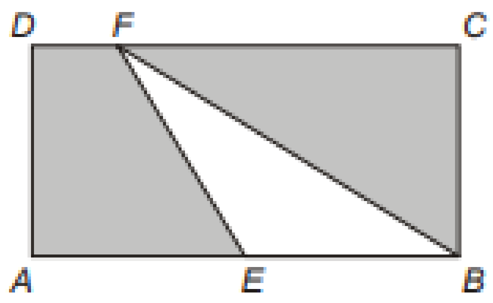
Não faz parte do escopo desse trabalho propor qualquer formalização do tema, mas sim criar reflexões interessantes com o intuito de pavimentar o caminho nesse sentido. A primeira atividade permite intuir que se dois triângulos, independentemente da forma dos mesmos ou melhor, dos seus perímetros, tiverem a mesma base e a mesma altura, consequentemente terão a mesma área. A segunda atividade propõe a discussão a respeito do que acontece se dois triângulos tiverem a mesma altura, sendo que a base de um corresponde a base do outro multiplicada por um número natural diferente de 1. É óbvio que com a expansão do conhecimento inerente aos conjuntos numéricos, esse múltiplo migrará para qualquer número real positivo. Destarte, a área acaba sendo multiplicada pelo mesmo múltiplo que ampliou ou reduziu a base. A terceira atividade propõe um pensamento análogo, sendo que a base é comum e a altura é multiplicada por um número natural diferente de 1. Torna-se possível intuir que a área fica multiplicada pelo mesmo número. Por fim, caberá uma reflexão um pouco mais complexa, sendo que concebida em um ambiente de discussão deveras rico cognitivamente: o que acontece com a área de um triângulo se a base dele é multiplicada por um natural **k** diferente de 1 e a altura é multiplicada por outro natural **w** diferente de 1. A atividade do Tangram permitirá o fomento de uma discussão no sentido de que a turma possa caminhar de forma mais natural para o entendimento de que a área, por sua vez, ficará multiplicada por **k.w**.

Com o intuito de possibilitar a aplicação dos conhecimentos que acabaram de ser trabalhados, seguem três questões extraídas de edições passadas da OBMEP com adaptações necessárias em razão da edição, como seguem:

Questão 1 (OBMEP 2006 – nível 2 – 1ª fase)

No retângulo da figura temos *AB* = 6 cm e *BC* = 4 cm. O ponto *E* é o ponto médio do lado *AB*. Qual é a área da região sombreada?

(A) 12 cm² **(B)** 15 cm² **(C)** 18 cm² **(D)** 20 cm² **(E)** 24 cm²



Observações pertinentes:

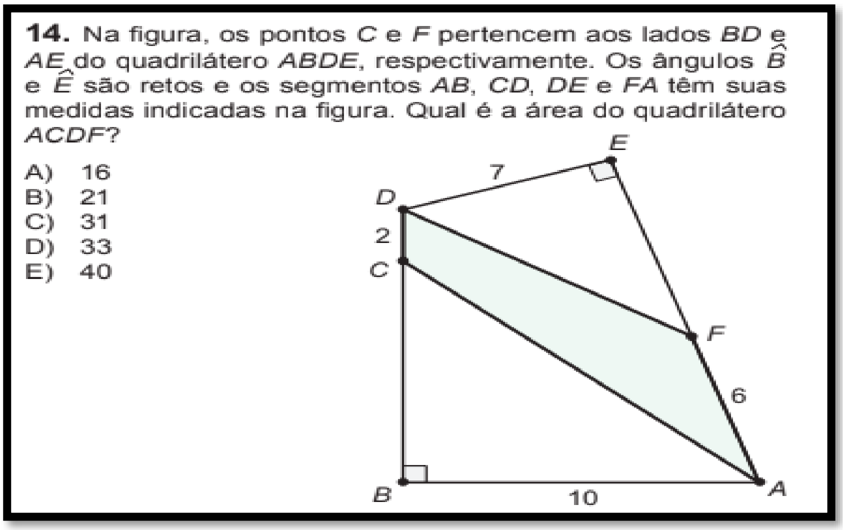
a) a base do retângulo ABCD é o dobro da base do triângulo EBF, sendo que a altura é a mesma;

b) admitindo que a base AB do retângulo seja chamada de **b** e a altura BC seja nominada de **h**, a consequência natural é que a área do retângulo seja dada por **b.h** enquanto a área do triângulo será dada por $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{b}\right) \cdot \boldsymbol{h} = \frac{1}{4} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h}$, ou seja, a área do triângulo representa $\frac{1}{4}$ da área do retângulo.

Questão 2

Esta questão segue exposta na íntegra na ilustração abaixo:

Figura 83 – Questão nº 14 da 1ª fase - nível 2- OBMEP (2016).



14. Na figura, os pontos *C* e *F* pertencem aos lados *BD* e *AE* do quadrilátero *ABDE*, respectivamente. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos e os segmentos *AB*, *CD*, *DE* e *FA* têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero *ACDF*?

A) 16
B) 21
C) 31
D) 33
E) 40

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em dezembro de 2020.

Considerações pertinentes:

a) incialmente o mediador deverá indagar os alunos se há alguma forma de dividir o paralelogramo em duas formas geométricas com área mais familiar;

b) o professor poderia levá-los à reflexão sobre a utilidade do segmento de reta $\overline{AD}$;

c) após se consolidar a importância da diagonal $\overline{AD}$, a mediação deveria se focar na escolha das bases dos triângulos ACD e ADF;

d) a intenção da mediação seria consolidar a ideia de que os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AF}$ seriam bons candidatos às bases. Agora a mediação deverá focar na escolha das alturas;

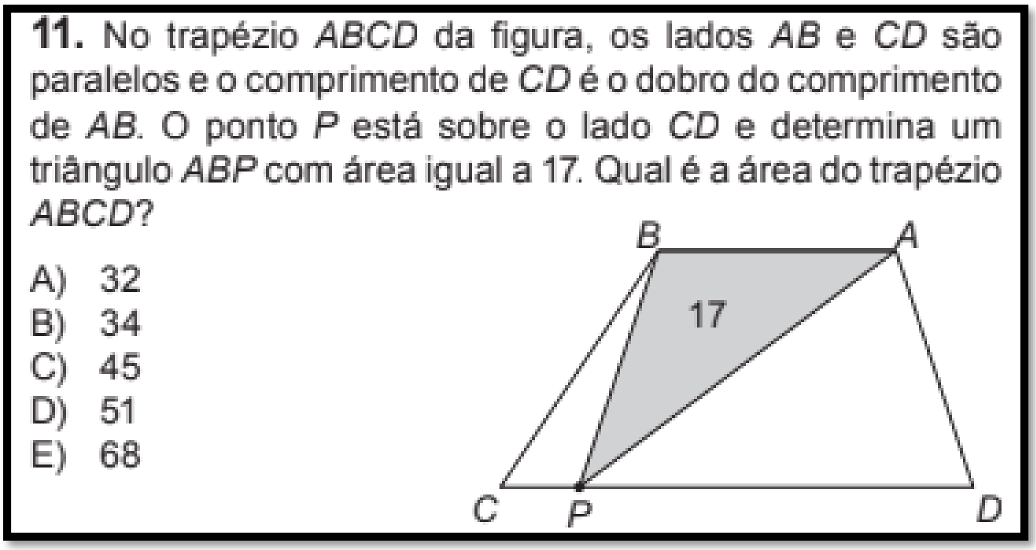
e) o desenho apresentado, propositalmente apresenta dois segmentos interessantes para a análise: $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$;

f) dessa forma as bases es as alturas dos triângulos em questão ficarão muito bem definidas. Por conseguinte, as áreas poderão ser facilmente calculadas.

Questão 3

A próxima questão segue apresentada na ilustração abaixo:

Figura 84 – Questão n° 11 da 1ª fase, nível 2, OBMEP (2018).



11. No trapézio *ABCD* da figura, os lados *AB* e *CD* são paralelos e o comprimento de *CD* é o dobro do comprimento de *AB*. O ponto *P* está sobre o lado *CD* e determina um triângulo *ABP* com área igual a 17. Qual é a área do trapézio *ABCD*?

A) 32
B) 34
C) 45
D) 51
E) 68

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em dezembro de 2020.

Considerações pertinentes:

a) o aspecto crucial para esta questão reside na reflexão que deve ser criada em sala de aula para a seguinte pergunta: independentemente do ponto que eu escolha no segmento $\overline{CD}$, o que ocorre com a sua distância à reta que contém o segmento $\overline{AB}$?;

b) os alunos deverão trabalhar em sala de aula diversas situações em sala de aula com o intuito de perceber que no caso de retas paralelas, independente do ponto escolhido em qualquer uma das retas, a distância a outra reta é constante. Os alunos poderão ser apresentados à seguinte situação:

– em um intervalo de uma rua com as calçadas perfeitamente paralelas, José está de uma calçada e João na outra, quem percorrerá o maior caminho para atravessar a rua?;

Figura 85 – Pessoas atravessando uma avenida na faixa.

Fonte: site br.freepik.com. Acesso em dezembro de 2020.

c) dessa forma, ficará consolidado o entendimento que todos os triângulos com base em $\overline{AB}$ e o terceiro vértice sobre o segmento $\overline{CD}$ possuem a mesma área. A pergunta a ser feita será: qual a melhor posição para posicionarmos o ponto P sobre o segmento $\overline{CD}$ para facilitar na resolução do problema?;
d) é interessante que a turma perceba com base na discussão em grupo e na mediação proposta que os melhores locais para posicionarmos o ponto P serão sobre os pontos C e D, pois o trapézio ficará dividido em dois triângulos da seguinte forma:

– ambos têm a mesma altura;

– um deles já possui a área conhecida;

– a base do outo triângulo é o dobro da base do primeiro. Consequentemente, a sua área também será o dobro;

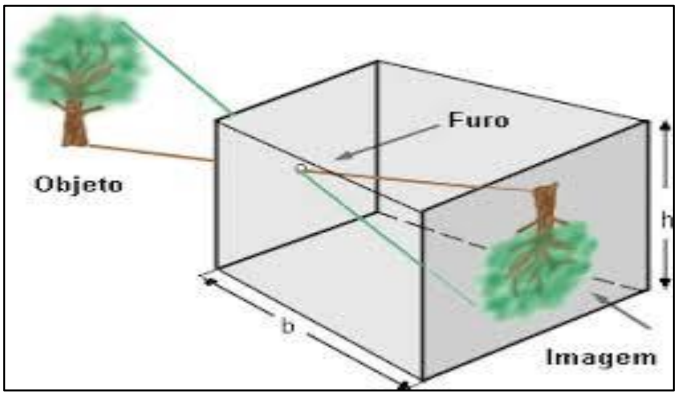
e) com base nesse processo em que a turma chegará à resposta respondendo a perguntas cruciais e pontuais em um ambiente de cooperação, imagina-se que as conclusões obtidas poderão ser apreendidas para auxiliar em futuras atividades.

9 A SIMETRIA NOS PARALELOGRAMOS

Ao se fazer uma análise mais atenta nas provas da OBMEP desde 2005, fica latente o grau de importância que os organizadores dão às propriedades decorrentes da simetria associada aos paralelogramos. É perceptível que a formalização de conceitos mais aprofundados e inerentes à caracterização de um eixo de simetria tenderá a ocorrer em um estágio mais avançado com a aplicação dos conceitos de bissetriz e mediatriz enquanto lugares geométricos a problemas no 8º ano do ensino fundamental, conforme prevê a BNCC (2018), sendo que é inegável o potencial intuitivo atrelado a esse assunto. Além disso, ela estabelece que as formalizações pertinentes às propriedades dos quadriláteros com base na congruência de triângulos se darão ao longo do 8º ano do ensino fundamental. Essas evidências deixam claro que o grande interesse da OBMEP está circunscrito essencialmente em valorizar a capacidade intuitiva dos alunos. Para a banca é muito mais importante saber identificar decorrências imediatas de simetrias do que buscar formalizações com base nos axiomas e postulados que alicerçam casos congruências e semelhanças das formas geométricas apresentadas, a fim de propiciar uma explicação definitiva para o caso.

Duas isometrias ganham destaque inegável nas questões da OBMEP: a reflexão propriamente dita e a reflexão deslizante. É notório que desde cedo os alunos se deparam diariamente com o fenômeno da reflexão ao observarem sua imagem diante de um espelho plano em suas residências. Além disso, o fenômeno decorrente de projeções de imagens invertidas com base no artefato artesanal denominado caixa escura permite visualizar casos de reflexão deslizantes de forma bem interessante. Abaixo segue uma ilustração de uma reflexão deslizante provocada com auxílio de uma caixa escura:

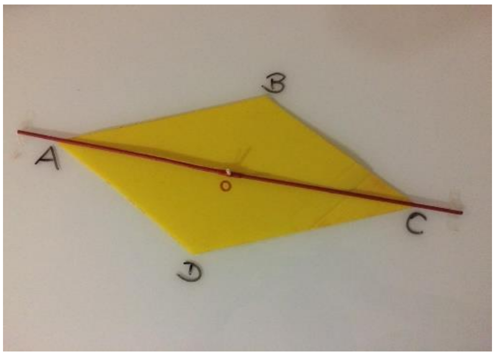
Figura 86 – Reflexão deslizante de uma árvore.



Fonte: site portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em dezembro de 2020

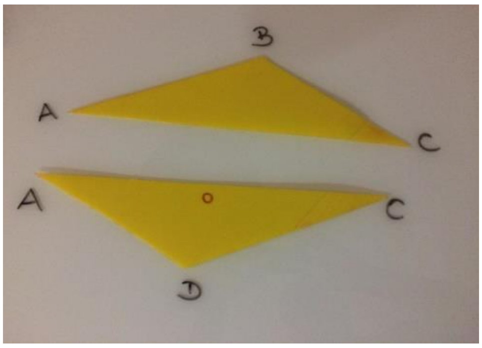
Abaixo serão apresentadas 4 situações em que paralelogramos congruentes são cortados por segmentos de reta.

Figura 87 – Primeiro paralelogramo.



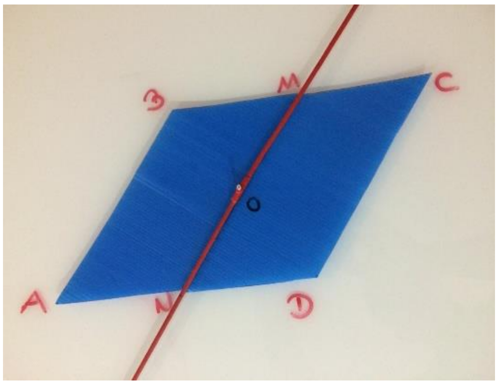
Fonte: Autor, 2020.

Figura 88 – Figuras congruentes.



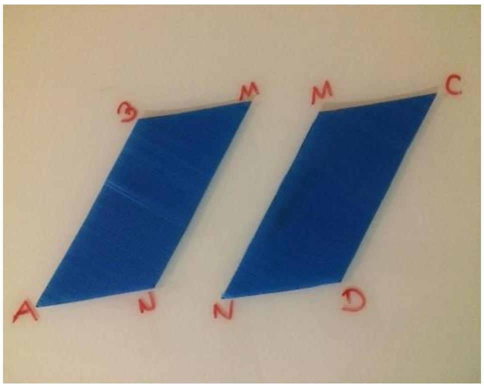
Fonte: Autor, 2020.

Figura 89 – Segundo paralelogramo.



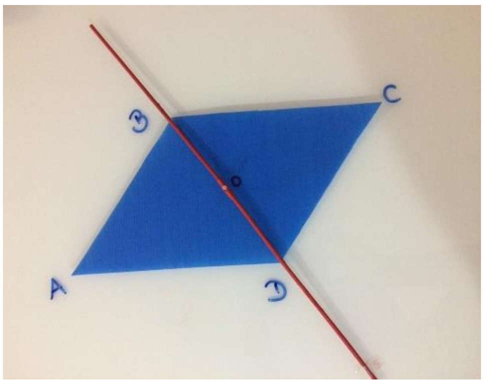
Fonte: Autor, 2020.

Figura 90 – Polígonos congruentes.



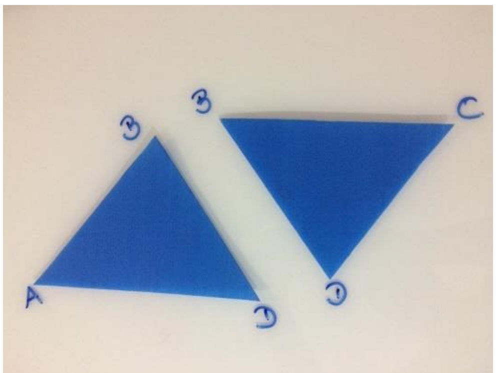
Fonte: Autor, 2020.

Figura 91 – Terceiro paralelogramo.



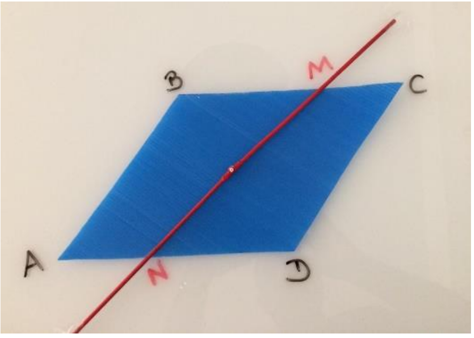
Fonte: Autor, 2020.

Figura 92 – Formas congruentes.



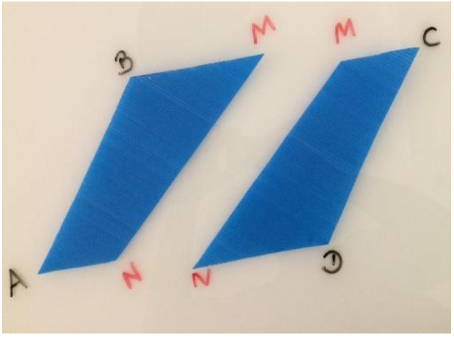
Fonte: Autor, 2020.

Figura 93 – Quarto paralelogramo.



Fonte: Autor, 2020.

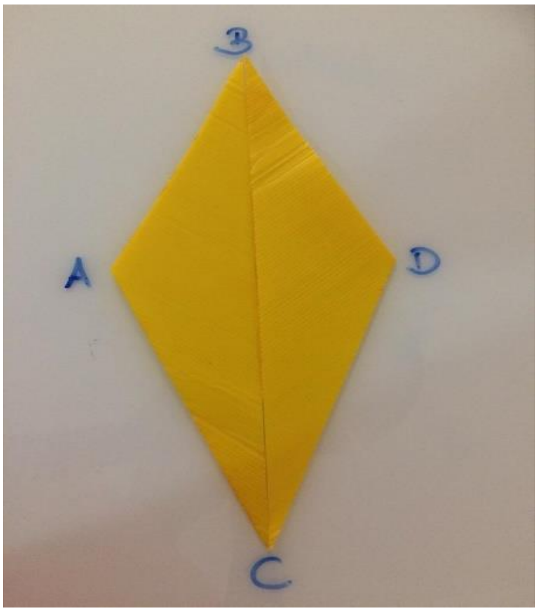
Figura 94 – Formas congruentes.



Fonte: Autor, 2020.

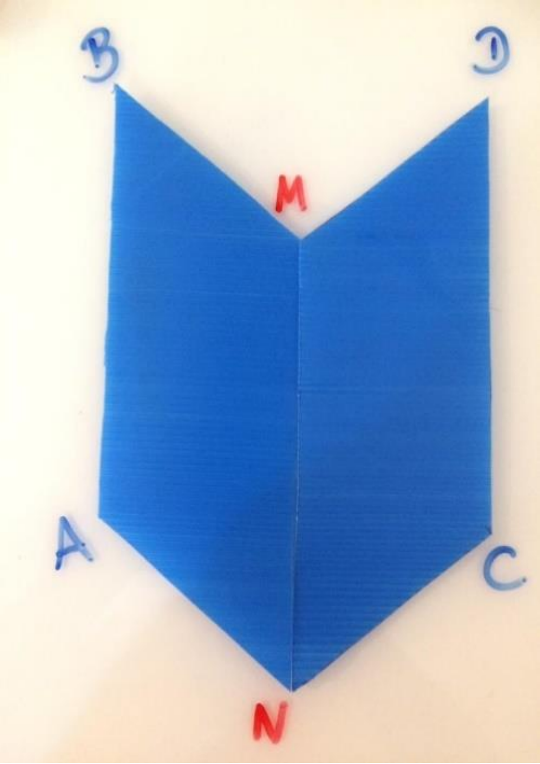
É imprescindível ter em mente que todos os casos em tela representam a simetria não com base na reflexão propriamente dita, mas sim com base na reflexão deslizante, tendo em vista que todas as formas resultantes à direita do segmento que secciona a figura original podem ser obtidas com um giro de 180º em torno do centro do paralelogramo da forma que se encontra à esquerda. As imagens às vezes podem enganar e levar à conclusão de que os segmentos que cortam a figura maior funcionariam com um espelho ou eixo de simetria. Isso não é verdade, pois a simetria, de fato, se dá em relação ao centro do paralelogramo maior. Para que não paire a menor dúvida, serão apresentadas ilustrações abaixo, fazendo alusão às figuras iniciais apresentadas acima, considerando como seria de fato de os eixos descritos acima fossem realmente eixos de simetria:

Figura 95 – Composição tendo o segmento $\overline{BC}$ como eixo de simetria.



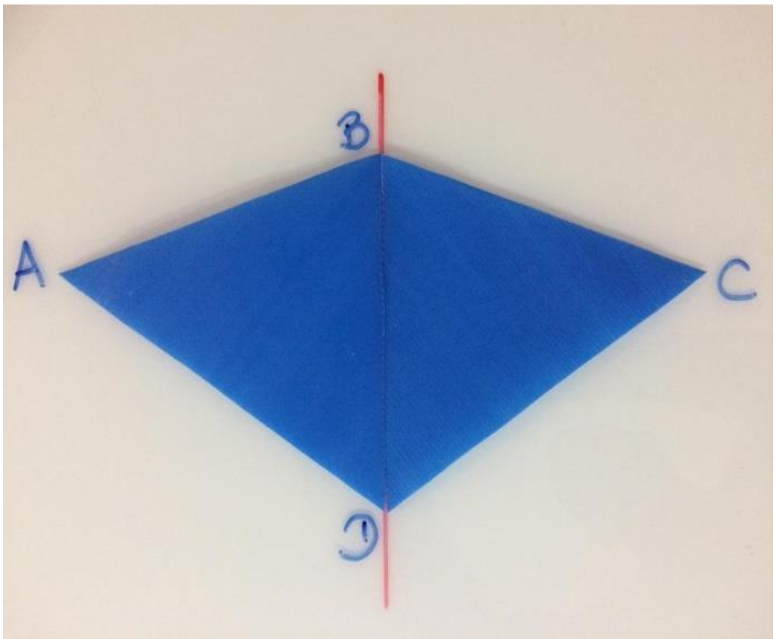
Fonte: Autor, 2020.

Figura 96 – Composição tendo $\overline{MN}$ como eixo de simetria.



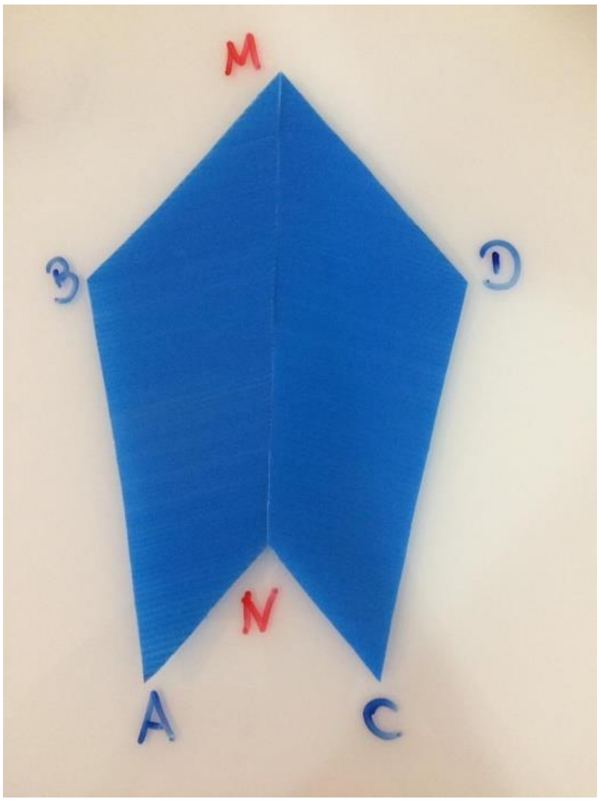
Fonte: Autor, 2020.

Figura 97 – Composição tendo o segmento $\overline{BD}$ como eixo de simetria.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 98 – Composição tendo o segmento $\overline{MN}$ como eixo de simetria.



Fonte: Autor, 2020.

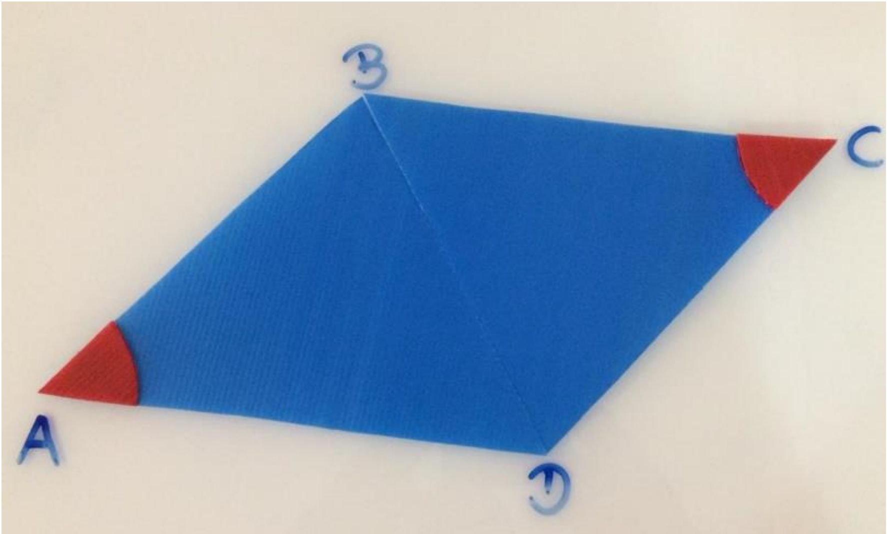
É fundamental nunca esquecer os seguintes fatos atinente à reflexão:

a) o segmento que une cada ponto do objeto a sua respectiva imagem, o faz encontrando o espelho no ponto médio deste segmento, ou seja, cada ponto e o seu respectivo simétrico são equidistantes do eixo de simetria;
b) este segmento estabelece com o eixo de simetria um ângulo de 90º.

9.1 **As relações entre lados e ângulos em um paralelogramo**

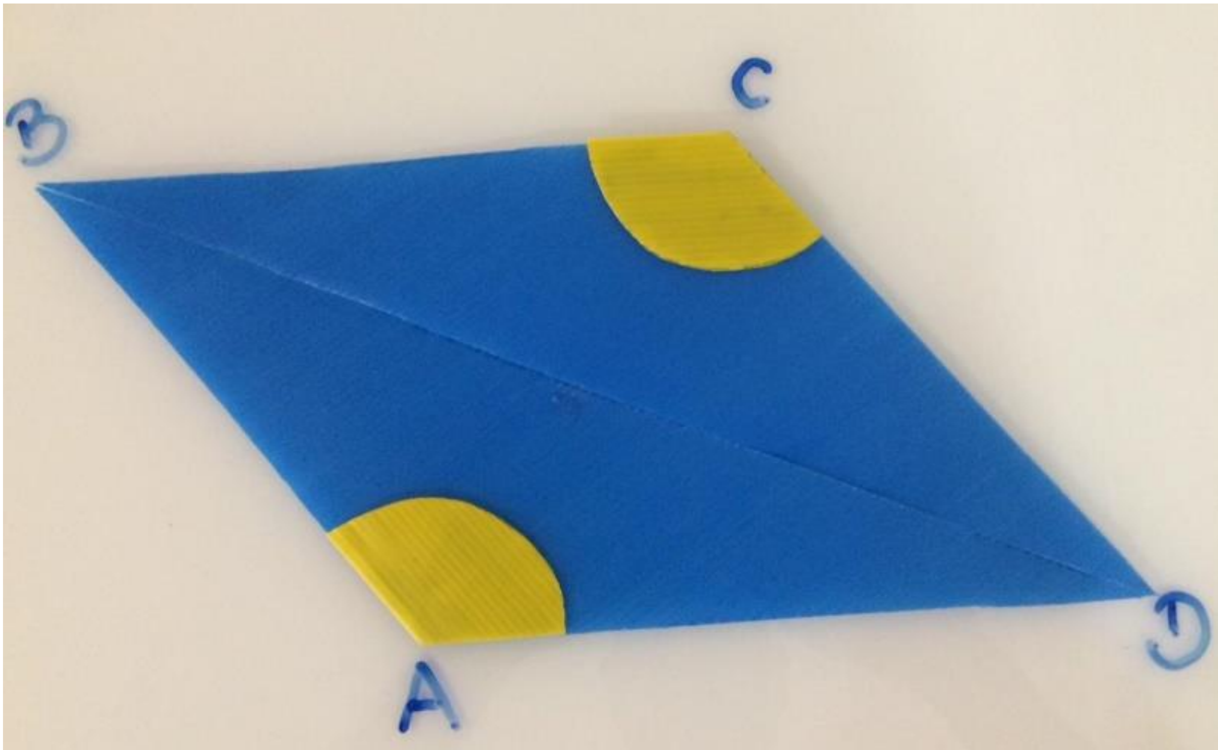
Tendo em vista o fato de a BNCC (2017, p. 317) determinar que as habilidades inerentes tanto ao Teorema de Tales quanto à congruência de triângulos sejam desenvolvidas ao longo do 8º ano do ensino fundamental, torna-se necessário mais uma vez recorrer à simetria para se chegar ao resultado esperado. Não resta dúvida a importância desses temas para a formalização dos conceitos que serão discutidos no momento. O Teorema de Tales, que estabelece a relação entre ângulos e a proporcionalidade entre segmentos quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, não poderá nos socorrer nesse momento. Nem mesmo se poderá buscar abrigo nos casos de congruência de triângulos. Abaixo seguem apresentados dois paralelogramos idênticos em duas ilustrações:

Figura 99 – 1ª ilustração do paralelogramo ABCD.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 100 – 2ª ilustração do paralelogramo ABCD.



Fonte: Autor, 2020.

Um fato conhecido é que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, que são diagonais, possibilitam identificar casos de simetria decorrentes de reflexões deslizantes. A consequência natural é que em cada caso surgem triângulos idênticos ou congruentes. Na primeira foto, após o corte pelo segmento $\overline{BD}$, fica evidenciado o surgimento dos triângulos ABD e BCD. Após a realização de uma sobreposição perfeita, é possível verificar a coincidência dos seguintes pares de vértices: (A, C), (B, D) e (D, B), de modo que a primeira informação é inerente ao triângulo situado abaixo da diagonal e a segunda é referente ao triângulo situado acima. As consequências imediatas dessa sobreposição são as seguintes:

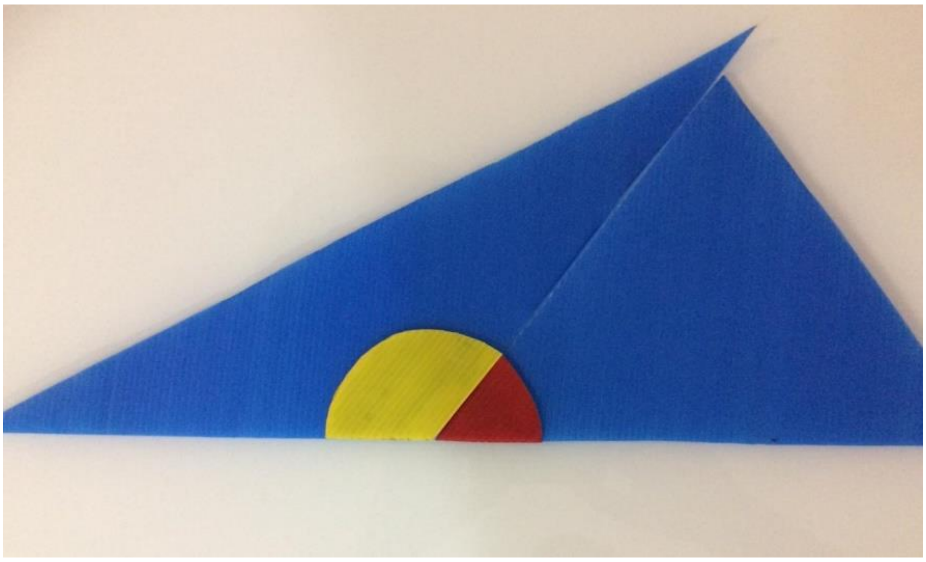
a) no tocante aos lados: $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$;
b) em relação aos ângulos: $\hat{A}$ = $\hat{C}$, A$\hat{B}$D = B$\hat{D}$C e A$\hat{D}$B = C$\hat{B}$D.

Já no segundo triângulo, após uma sobreposição perfeita, emergirá as seguintes informações:

a) no que tange aos lados: $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ = $\overline{BC}$;
b) no que concerne aos ângulos: $\hat{A}$ = $\hat{C}$, A$\hat{B}$D = C$\hat{D}$B e A$\hat{D}$B = C$\hat{B}$D.

Para se chegar a um outro resultado muito importante em relação aos ângulos, que diz respeito ao valor da soma dos ângulos internos colaterais, basta que se faça o seguinte encaixe das peças:

Figura 101 – Soma dos ângulos internos colaterais de um paralelogramo.



Fonte: Autor, 2020.

A possibilidade de trabalhar com materiais concretos permite que a turma seja dividida em grupos e o professor pergunte a respeito de cada tema por etapas. A primeira pergunta pode ser: qual a relação entre os lados de um paralelogramo. Durante a mediação, considerando que os paralelogramos idênticos são entregues divididos como base nas respectivas diagonais, caberá ao professor questionar se existe uma forma de posicionar os triângulos que ajude no processo. Aos poucos, será identificado que a sobreposição perfeita de uma figura sobre a outra desvenda a questão. Da mesma forma, pode-se fazer, logo a seguir, a seguinte pergunta: Qual é relação existente entre os opostos no paralelogramo?

9.2 Divisão da área de um paralelogramo com base na simetria

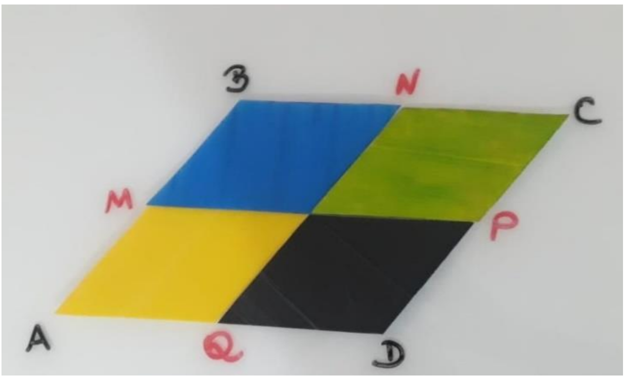
Um conhecimento bastante explorado pelas questões apresentadas pela OBMEP diz respeito à divisão da área de um paralelogramo com base na utilização de eixos atrelados à simetria, reflexão propriamente dita ou reflexão deslizante, ou com base na consequência proveniente do traçado de medianas em fragmentos triangulares do paralelogramo original. Por vezes, há a combinação tanto de eixo atrelados à simetria em paralelogramos com medianas posteriormente traçadas.

Inicialmente, será proposta a primeira atividade a ser mediada pelo professor em que os alunos serão demandados a refletirem sobre os efeitos gerados na área de um paralelogramo quando é dividido por dois eixos de mesma natureza que o partem ao meio.

Atividade 1

Abaixo segue exposta uma imagem inerente a paralelogramos ABCD, de modo que os pontos M, N, P e Q representam pontos médios dos lados onde estão inseridos. Qual seria a relação das áreas dos quatro pequenos paralelogramos gerados com o paralelogramo original?

Figura 102 – 1ª divisão da área do paralelogramo ABCD.



Fonte: Autor, 2020.

Indagação pertinente:

a) admitindo-se que o segmento $\overline{MP}$ tenha sido o primeiro a ser traçado, qual seria a relação das áreas dos dois paralelogramos gerados com o paralelogramo inicial?;
b) será que os dois paralelogramos médios possuem sobreposição perfeita?

No próximo estágio, tendo em vista que os alunos já tenham compreendido que cada paralelogramo médio representa a metade da área do maior, passa-se para a análise do efeito gerado pelo segmento $\overline{NQ}$ no processo de divisão de áreas.

Indagação pertinente:

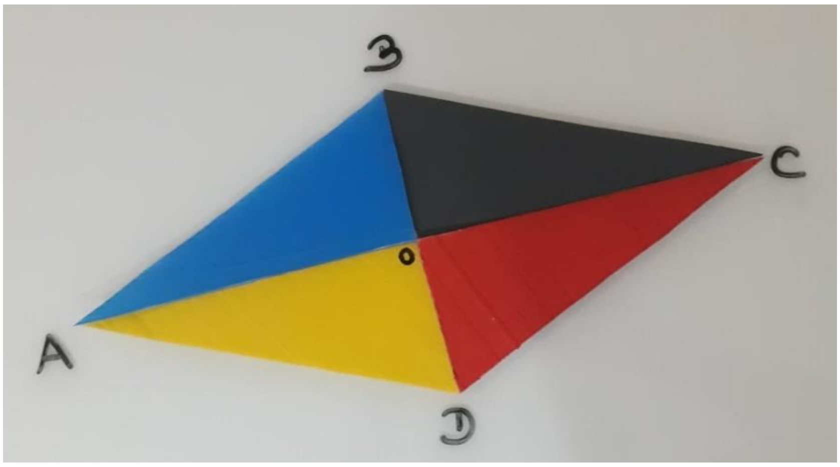
a) qual seria o efeito no paralelogramo médio do novo segmento traçado?;
b) os quatro paralelogramos traçados possuem alguma característica em comum?;
c) será que os paralelogramos possuem sobreposição justa?

Após cada passo seguido, restará nítido que os paralelogramos gerados em cada etapa são "idênticos" em uma visão menos formal ou congruentes em uma interpretação mais refinada matematicamente. Destarte, cada paralelogramo menor tem área equivalente a $1/4$ da área do paralelogramo inicial.

Atividade 2

Na imagem abaixo exposta, há o paralelogramo ABCD, o qual foi dividido em quatro triângulos por intermédio das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Qual é a relação entre as áreas dos quatro triângulos com a área do paralelogramo original?

Figura 103 – 2ª divisão da área do paralelogramo ABCD.



Fonte: Autor, 2020.

Indagações pertinentes:

a) imaginando que a diagonal $\overline{AC}$ tenha sido a primeira a ser traçada, qual seria a relação entre as áreas dos dois triângulos entre si?;
b) após uma sobreposição convenientemente escolhida de um triângulo sobre o outro, seria possível descobrir alguma relação entre os triângulos?

A conclusão que naturalmente tenderá a emergir será que os dois triângulos obtidos são "idênticos" ou congruentes. A seguir, admitindo-se que o segmento $\overline{AC}$ contenha sempre a base de qualquer triângulo que surgir, traça-se a diagonal $\overline{BD}$.

Outros questionamentos relevantes:

a) qual o efeito gerado pela nova diagonal na área de cada um dos triângulos preexistentes?;
b) admitindo-se que as alturas dos triângulos tenham sido mantidas, o que aconteceu com a base dos mesmos após a construção da nova diagonal?;
c) há casos de sobreposição perfeita entre os triângulos gerados?

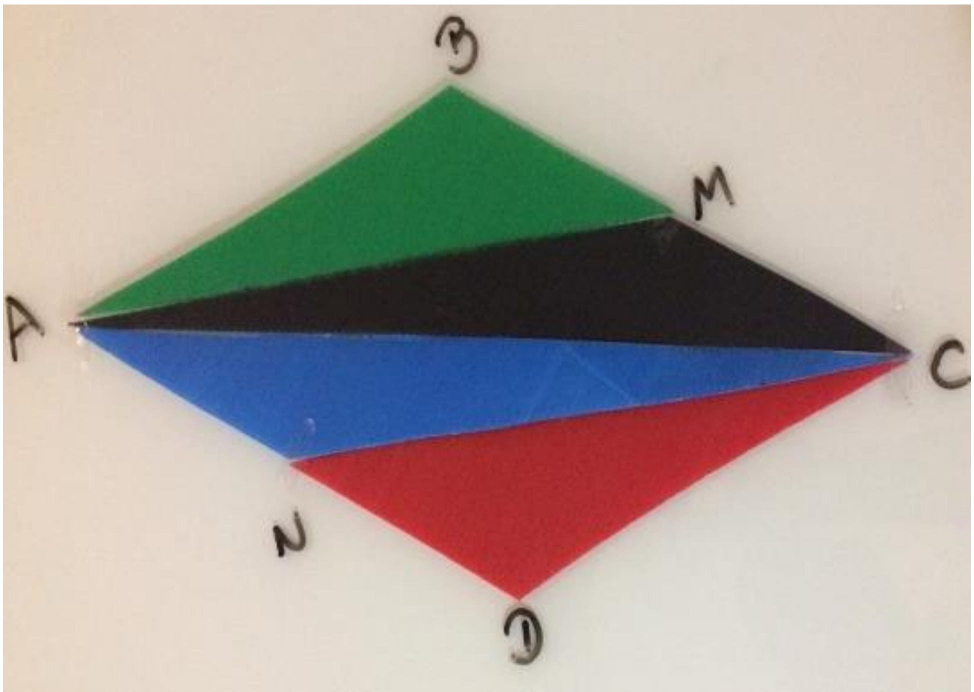
Com base na mediação pontual do professor e na reflexão decorrente das discussões entre os alunos, será possível chegar à conclusão que os quatro triângulos gerados possuem mesma base e mesma altura, logo possuem a mesma área. Consequentemente, cada triângulo menor possui área equivalente a $1/4$ da área do paralelogramo original. Ademais, cada triângulo menor gerado possui um triângulo idêntico gerado em relação ao centro "O" do paralelogramo com base em uma rotação de 180º.

Na próxima atividade, serão apresentadas três situações em que se combina um eixo associado à simetria de rotação de 180° em relação ao centro "O" com duas medianas traçadas em relação aos dois triângulos.

Atividade 3

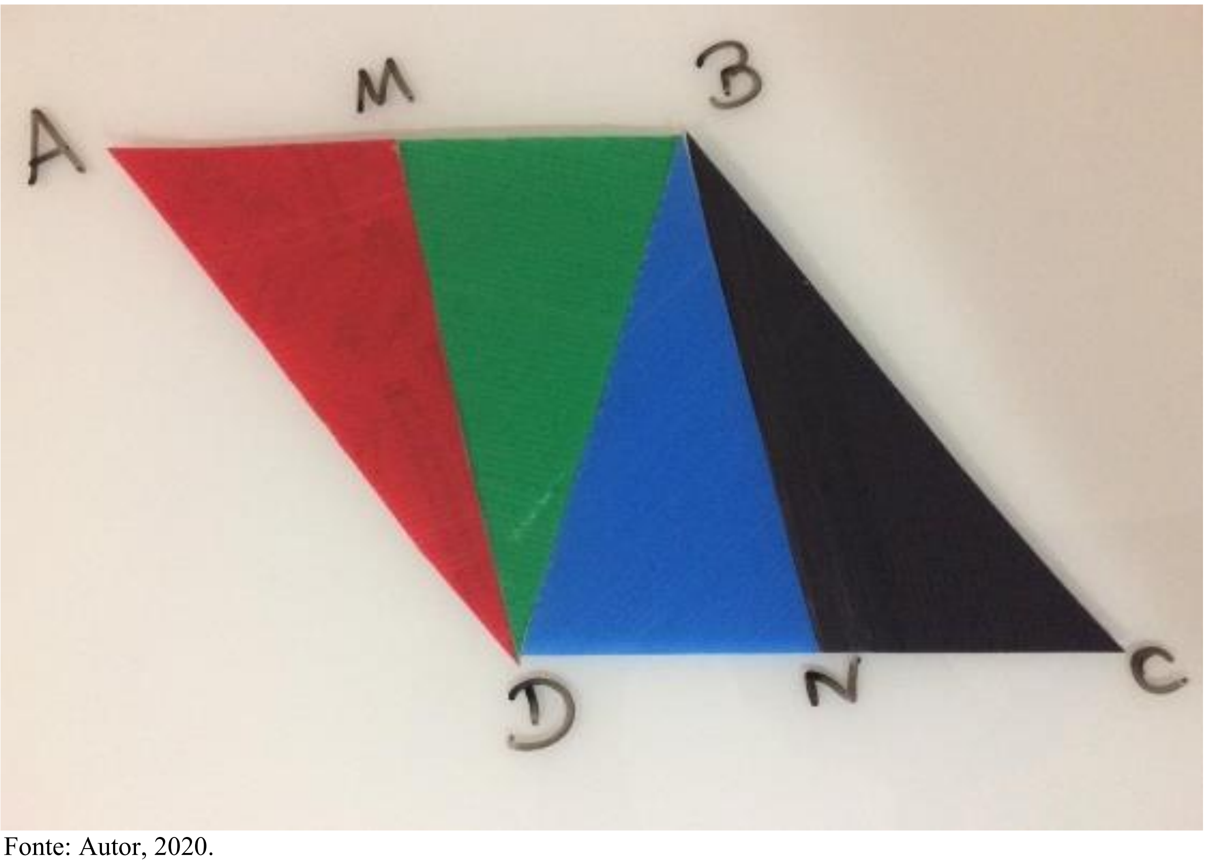
Nas três imagens abaixo, seguem situações em que um paralelogramo ABCD é apresentado de modo os pontos M e N representam pontos médios dos lados onde estão inseridos. Qual seria a relação da área de cada um dos triângulos gerados com o paralelogramo original?

Figura 104 – 1ª divisão em 4 áreas.



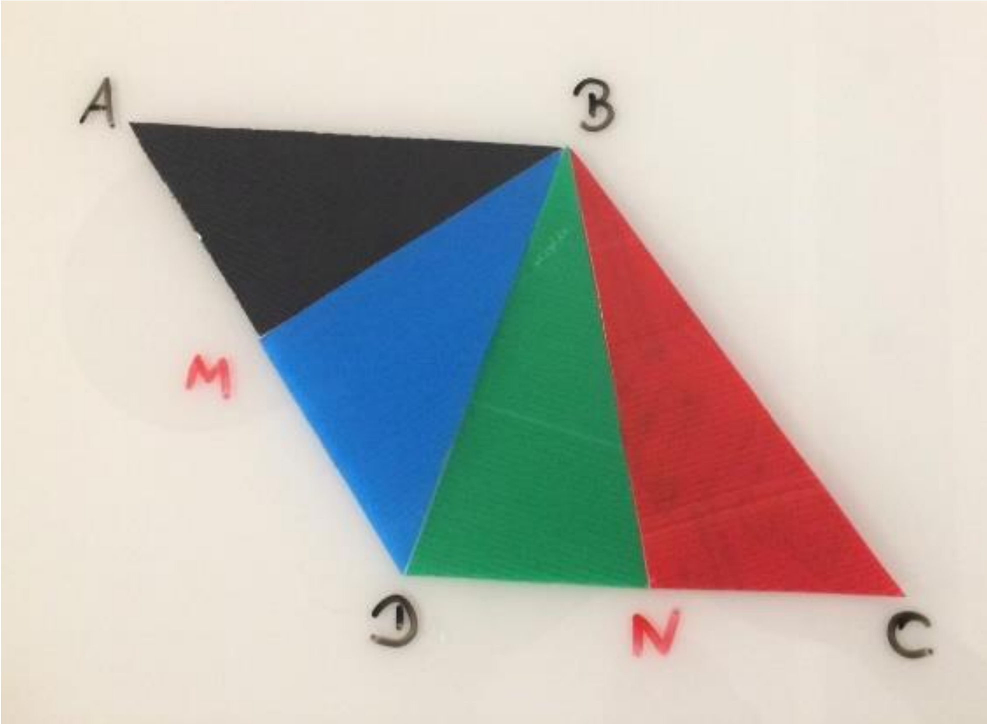
Fonte: Autor, 2020

Figura 105 – 2ª divisão em 4 áreas.



Fonte: Autor, 2020.

Figura 106 – 3ª divisão em 4 áreas.



Fonte: Autor, 2020.

Indagações pertinentes:

a) qual informação podemos obter em relação ao efeito gerado pelas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ no tocante à área do paralelogramo inicial?;
b) ao se traçar a mediana de um triângulo em relação a uma determinada base, o que acontece com essa base?;
c) se uma base é dividida ao meio, admitindo-se que a altura não foi alterada, qual é a relação entre as áreas dos dois triângulos gerados?

Ao se partir para a terceira atividade, duas ideias geométricas estarão apreendidas pelos alunos:

a) Ao se traçar uma mediana em um triângulo, esta o divide em dois triângulos de mesma área;
b) Os eixos traçados que sejam associados à simetria, reflexão propriamente dita ou rotação de 180º, dividem o paralelogramo em duas figuras idênticas, ou seja, de mesma área.

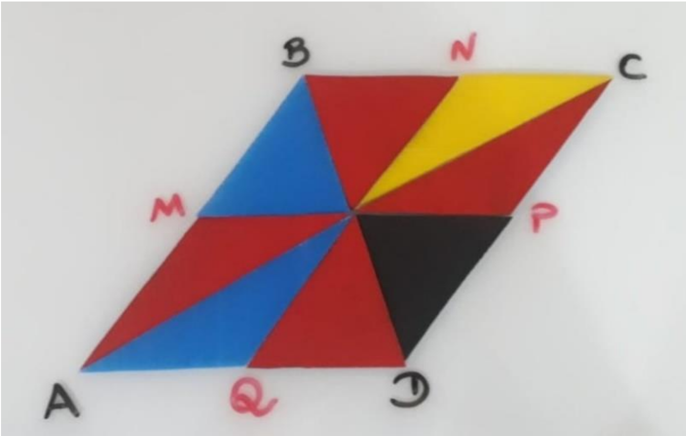
Consequentemente, ficará nítido o fato de que cada triângulo menor possui área equivalente a $1/_4$ da área do paralelogramo original.

A próxima atividade possibilitará uma situação de maior complexidade em que são traçados quatro eixos de simetria.

Atividade 4

Na figura abaixo segue apresentado o paralelogramo ABCD, de modo que os pontos M, N, P e Q representam pontos médios dos lados onde estão inseridos. Qual é a relação entre as áreas dos oito triângulos menores gerados entre si e em relação ao paralelogramo original?

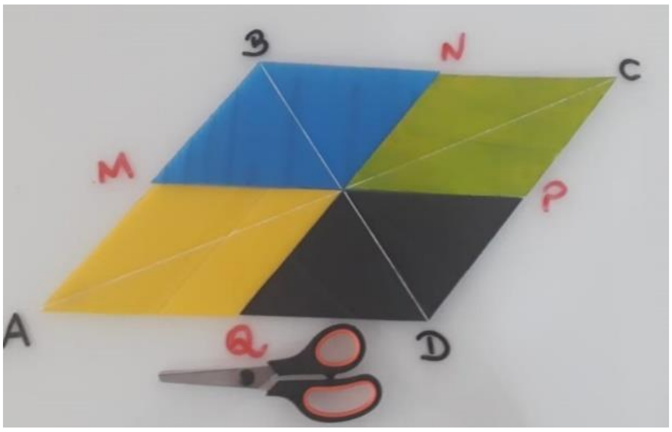
Figura 107 – Ilustração da atividade 4.



Fonte: Autor, 2020.

É óbvio que não há uma única forma para se buscar a solução, sendo que a escolha do par de eixos que possibilite inicialmente a construção de quatro paralelogramos menores e "idênticos" parece ser a mais profícua visualmente para o processo. Após isso, passa-se para a fase de construção das diagonais. A utilização de uma caneta especial branca para assinalar as diagonais e, após, de uma tesoura para o corte será bastante interessante. A figura abaixo mostrará a imagem que evidencia tal processo.

Figura 108 - Processo de divisão da área do paralelogramo.



Fonte: Autor, 2020.

É fundamental que o aluno perceba que as diagonais dividem cada um dos quatro paralelogramos menores em dois triângulos "idênticos" com base na simetria estabelecida.

Indagações pertinentes:

a) qual par de eixos você escolheria para se iniciar o processo de divisão do paralelogramo?;
b) será que a escolha de um par de eixos que possibilite a divisão do paralelogramo em quatro formas da mesma natureza que a original é mais interessante?;
c) Qual a consequência imediata propiciada pelas diagonais em relação às áreas dos pequenos paralelogramos?

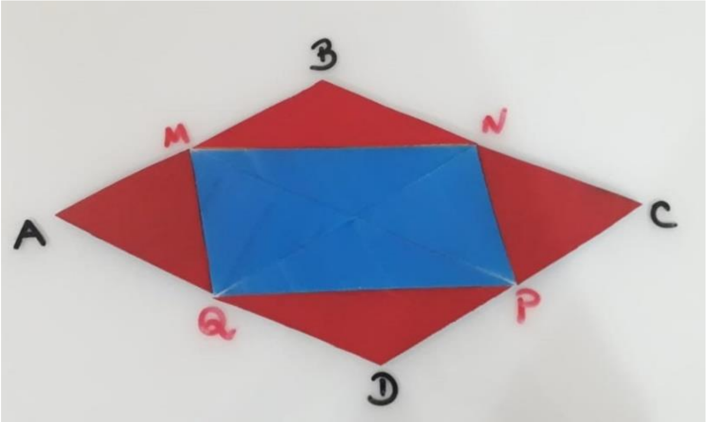
A consequência natural será o surgimento de oito triângulos menores de mesma área, de modo que cada um deles possua área equivalente a $1/8$ da área do paralelogramo original.

A próxima atividade tem por objetivo consolidar o aprendizado do tema, de modo que o aluno tenha que refletir sobre qual a estratégia mais indicada para se chegar ao resultado com base nas conclusões decorrentes da última tarefa.

Atividade 5

A imagem exposta abaixo apresenta um paralelogramo ABCD, de modo que os pontos M, N, P e Q representam pontos médios dos lados onde estão inseridos. Qual a razão entre a área do paralelogramo vermelho e o paralelogramo original?

Figura 109 – Ilustração da atividade 5.



Fonte: Autor, 2020.

Para essa atividade, não resta dúvida de que a situação ideal de partida é aquela em que são traçados dois eixos associados à rotação de 180° em relação ao centro “O” de modo que o paralelogramo inicial seja dividido em quatro pequenos paralelogramos “idênticos”. O objetivo do mediador é levar os alunos a refletir sobre o efeito decorrente das diagonais em um paralelogramo no tocante à divisão da área. É interessante perceber que independente da diagonal utilizada, o paralelogramo acaba sendo dividido em dois triângulos “idênticos”, ou seja, de mesma área.

Indagações pertinentes:

a) observando-se a atividade anterior, o que foi feito com as diagonais para se chegar na figura presente na atual atividade?;
b) em um paralelogramo, há diferença em relação ao valor da área dos triângulos gerados com a escolha da diagonal?;
c) com a intervenção que foi feita na atividade anterior, houve mudança na área dos pequenos triângulos novos gerados?

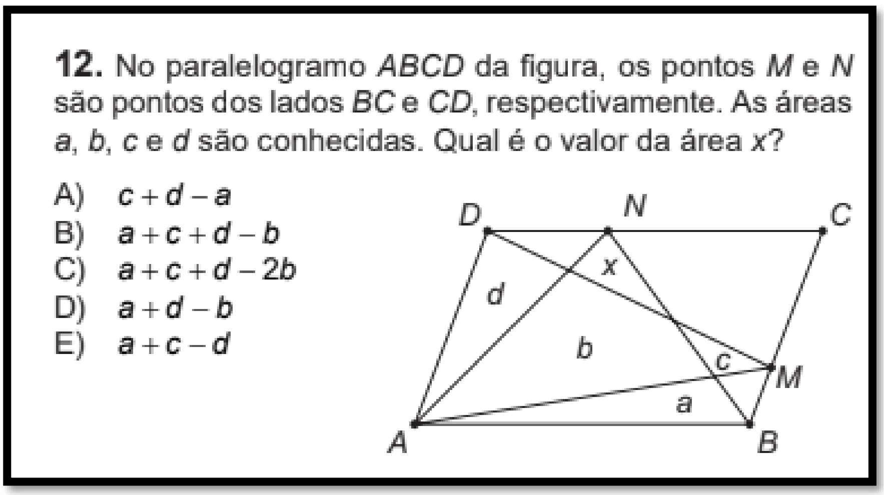
Ao final, os alunos perceberão que cada um dos pequenos triângulos gerados terá área equivalente a $1/_8$ da área do paralelogramo original. Destarte, a área do paralelogramo vermelho, o qual é composto de quatro pequenos triângulos, representa $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ da área do paralelogramo original.

Com o intuito de possibilitar a aplicação dos ensinamentos trabalhados, serão expostas, ora com adaptações na íntegra, questões extraídas de exames da OBMEP com as considerações necessárias.

Questão 1

A questão abaixo apresentada foi extraída da 1ª fase do nível 2 do exame da OBMEP de 2019.

Figura 110 - Questão nº 12 da 1ª fase nível 2 da OBMEP (2019).



12. No paralelogramo *ABCD* da figura, os pontos *M* e *N* são pontos dos lados *BC* e *CD*, respectivamente. As áreas *a*, *b*, *c* e *d* são conhecidas. Qual é o valor da área *x*?

A) $c+d-a$
B) $a+c+d-b$
C) $a+c+d-2b$
D) $a+d-b$
E) $a+c-d$

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Consideração pertinente:

a) imagine um paralelogramo com base b e altura h. Pelo que foi visto, a sua área será dada pela fórmula $b \cdot h$. Caso um triângulo tenha a mesma base b e o terceiro vértice fique situado no lado paralelo à base b a sua altura será, também, h, pois a distância entre estes dois segmentos paralelos será sempre h. Logo a área do triângulo será dada pela fórmula $\frac{b \cdot h}{2}$. Logo a área do triângulo construído nas condições acima será sempre a metade da área do paralelogramo onde ele está inserido, independentemente da base escolhida, seja ela $\overline{AB}$ ou $\overline{AD}$.

Questão 2

A questão abaixo descrita foi extraída da 2ª fase do nível 1 do exame da OBMEP de 2019.

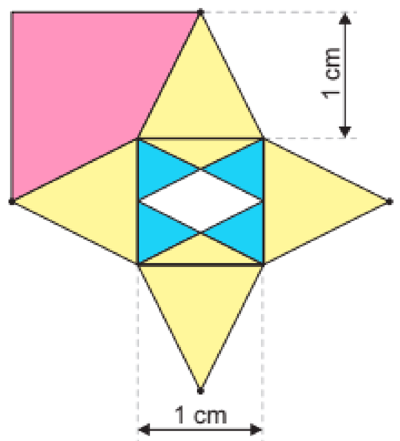
Figura 111 – Questão da 2ª fase nível 1 da OBMEP (2019) com adaptações.

4. Na figura, o quadrado tem lado 1 cm. Os quatro triângulos azuis são iguais, assim como os dois triângulos amarelos menores. Os quatro triângulos amarelos maiores têm, cada um deles, base igual ao lado do quadrado, altura com relação a essa base igual a 1 cm, e seus outros dois lados com mesma medida. Dois lados do quadrilátero rosa são paralelos aos lados do quadrado.

a) Qual é a área da região formada pelos triângulos azuis?

b) Qual é a área da região formada pelos triângulos amarelos?

c) Qual é a área do quadrilátero rosa?



Fonte: site www.obmep.org.br em janeiro/2021.

Considerações pertinentes:

a) no interior do quadrado, basta se traçar um eixo de simetria paralelo à base inferior e conclusões poderão ser tiradas:

– surgirão dois retângulos "idênticos" ou, em uma linguagem formal: congruentes;

– os segmentos de reta traçados no interior de cada retângulo são eixos que o dividem ao meio e que, conforme já foi visto, o dividem em quatro fragmentos de mesma área;

– cada triângulo pequeno representa $\frac{1}{4}$ da área do retângulo e, por conseguinte, $\frac{1}{8}$ da área do quadrado.

b) tendo em vista que a base e a altura dos retângulos "idênticos" foram fornecidas, o cálculo da área da região amarela não será revestido de complexidade;

c) o cálculo da área da região rosa demandará uma percepção bastante intuitiva. Será necessário que os alunos sejam instigados com indagações críticas a responder as seguintes perguntas:

– existe alguma forma de tornar essa região amarela, com base em recortes, numa área conhecida?;

– quais seriam os segmentos que deveriam ser traçados para que fosse possível, após as intervenções necessárias, se chegar a formas geométricas com áreas conhecidas?

d) após isso, os alunos serão levados a enxergar que se derem continuidade ao traçado de dois lados do quadrado, surgirão formas bastante interessantes: um quadrado "idêntico" ao inicial e duas metades que, ao serem adequadamente unidas, gerarão um triângulo idêntico aos triângulos amarelos maiores.

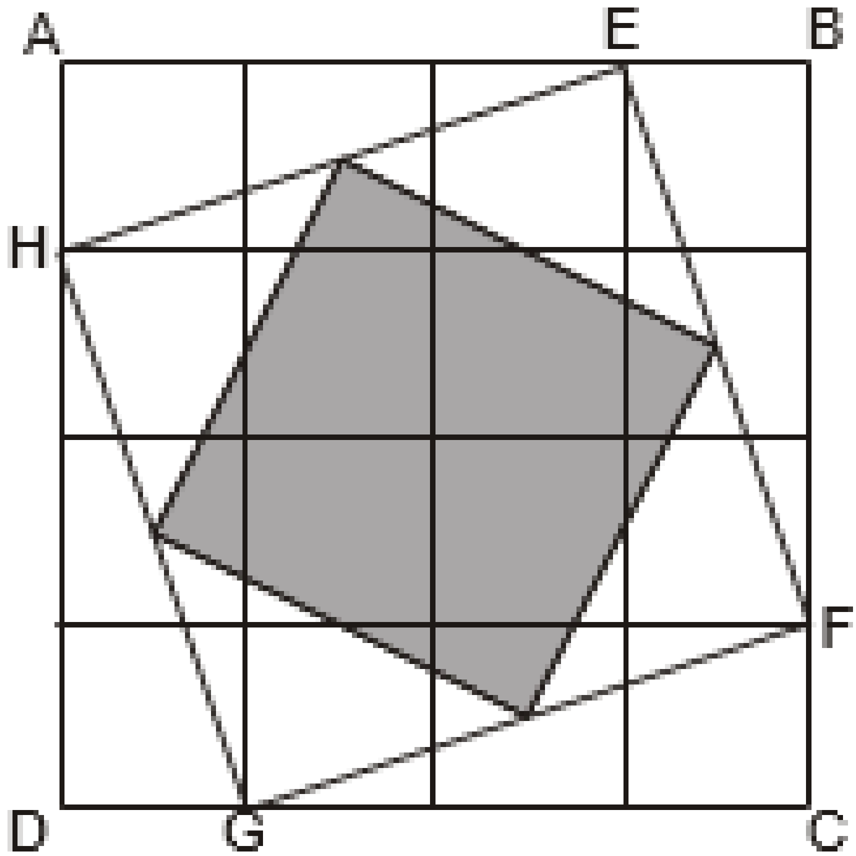
Questão 3

A seguir será apresentada uma questão extraída com adaptações da 2ª fase, nível 2, da edição de 2005 da OBMEP, a qual diz o seguinte:

O quadrado *ABCD* da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado *EFGH*.

a) A área do quadrado *EFGH* corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

b) Se o quadrado *ABCD* tem 80 cm2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?



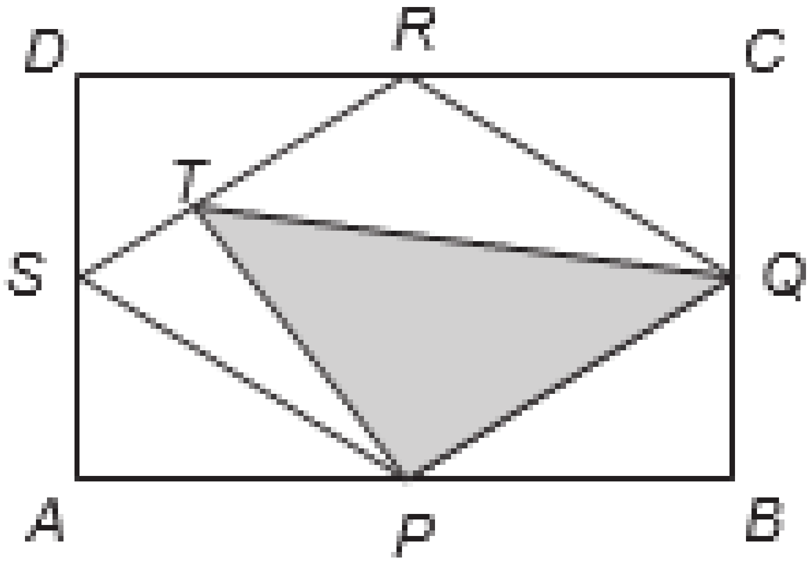
Considerações pertinentes:

a) Os triângulos AHE, BEF, CFG e DGH possuem áreas facilmente calculáveis, pois possuem base e altura evidenciados;
b) A área do quadrilátero EFGH emergirá como consequência do ato anterior;
c) A área procurada surge como aplicação da estratégia já exposta.

Questão 4

Esta 4ª questão que será trazida para enriquecer a fixação do conteúdo em pauta foi extraída com adaptações da edição de 2009 da OBMEP, nível 2, 1ª fase, a qual segue abaixo:
Na figura o retângulo *ABCD* tem área 40 cm². Os pontos *P*, *Q*, *R* e *S* são pontos médios dos lados do retângulo e *T* está no segmento *RS*. Qual é a área do triângulo *PQT*?

A) 10 cm² B) 12 cm² C) 14 cm² D) 16 cm² E) 18 cm²



Considerações pertinentes:

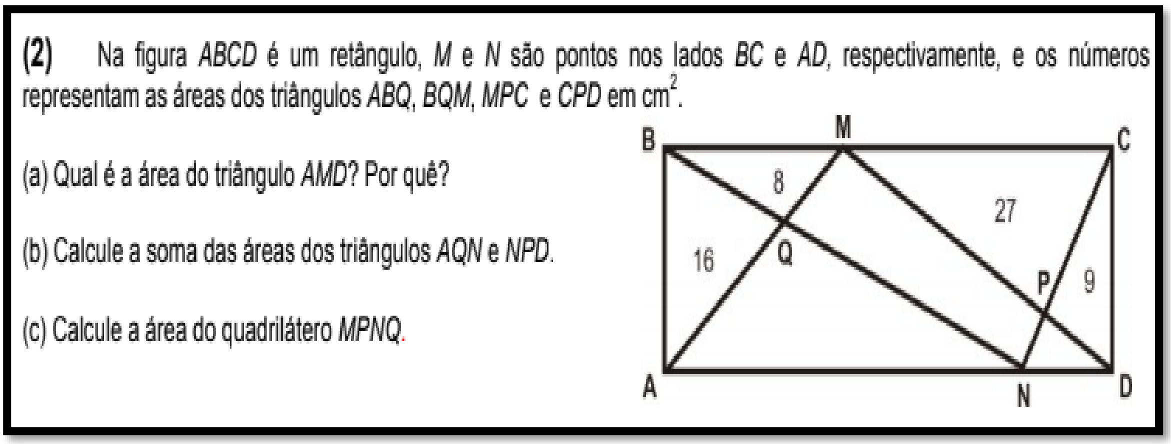
a) pelos conhecimentos obtidos na seção, fica claro que a área do paralelogramo PQRS é a metade da área do retângulo ABCD, logo vale 20cm²;

b) já a área do triângulo PQT, o qual possui a mesma base do paralelogramo, $\overline{PQ}$ e o terceiro vértice fica sobre o lado $\overline{RS}$, é a metade da área do paralelogramo PQRS. Logo o seu valor é de 10 cm².

Questão 5

A próxima questão segue exposta na ilustração abaixo:

Figura 112 – Questão nº 2 da 2ª fase, nível 2, OBMEP (2007).



(2) Na figura *ABCD* é um retângulo, *M* e *N* são pontos nos lados *BC* e *AD*, respectivamente, e os números representam as áreas dos triângulos *ABQ*, *BQM*, *MPC* e *CPD* em cm².

(a) Qual é a área do triângulo *AMD*? Por quê?

(b) Calcule a soma das áreas dos triângulos *AQN* e *NPD*.

(c) Calcule a área do quadrilátero *MPNQ*.

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Considerações pertinentes:

a) o professor deverá propor a seguinte indagação: Se dois triângulos têm a mesma base e a mesma altura, o que acontece com as suas áreas?

b) no momento em que se chegar ao entendimento de que as áreas são iguais, se chegará à informação de que as áreas dos triângulos BCN e ADM são iguais;

c) agora surgirá a informação mais importante. Os triângulos ABM e CDM possuem a mesma altura $\overline{CD}$ e, no tocante às bases, tem-se que $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{BC}$. As perguntas mágicas que o mediador deverá fazer serão as seguintes:

– qual é a relação entre a área do triângulo BCN e o retângulo ABCD?;

– qual é a relação entre a soma das áreas dos triângulos ABM e CDM com a área do triângulo BCN?

d) a primeira indagação tende a ser respondida com mais brevidade, pois, admitindo-se que ambos têm mesma base e a mesma altura, a área do triângulo será a metade da área do retângulo;

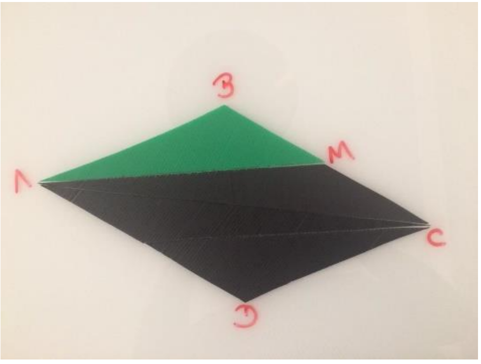
e) para a segunda, é interessante que perceber que a primeira resposta já forneceu argumentos extensivos à segunda indagação. A soma das áreas dos triângulos ABM e CDM será, também, igual a metade da área do retângulo.

9.3 **Equivalência de área crucial para o exame da OBMEP**

Ao se perscrutar as questões de Geometria Plana da OBMEP, muitas vezes é possível se deparar com situações associadas ao entendimento de equivalência de área entre um paralelogramo e um triângulo. É inegável que a formalização dos conceitos de semelhança de triângulos ao longo do 9º ano do ensino fundamental, consoante apregoa a BNCC (2018), possibilita um entendimento sólido da situação que será explícita, mas não é raro ver questões relacionadas ao tema em provas voltadas para alunos de séries anteriores. Como o objetivo da OBMEP não é aferir o domínio de formalizações de conceitos geométricos, mas sim dar ênfase ao poder da intuição do aluno, será feita a apresentação dessa propriedade com base na manipulação de figuras geométricas.

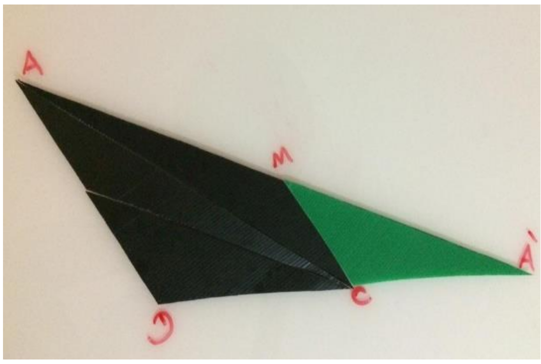
A partir desse momento serão apresentadas duas situações bastante interessantes em que dois paralelogramos serão transformados em triângulos de mesma altura e mesma área. Para tanto, será marcado um ponto M, o qual será o ponto médio do lado a que pertence. Logo após, será construído um segmento de reta que ligará os pontos A e M. Esse segmento será recortado com tesoura. O triângulo gerado será encaixado na figura maior de modo que os segmentos de reta idênticos obtidos a partir da divisão do segmento com base no ponto médio se encaixem. O novo triângulo grande gerado possui a mesma altura do paralelogramo e base equivalente ao dobro. Destarte, suas áreas terão o mesmo valor. Abaixo seguem as ilustrações para pautar tal entendimento:

Figura 113 – 1º polígono original.



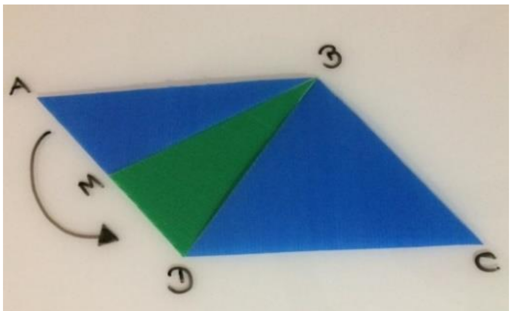
Fonte: Autor, 2021.

Figura 114 – 1º triângulo construído.



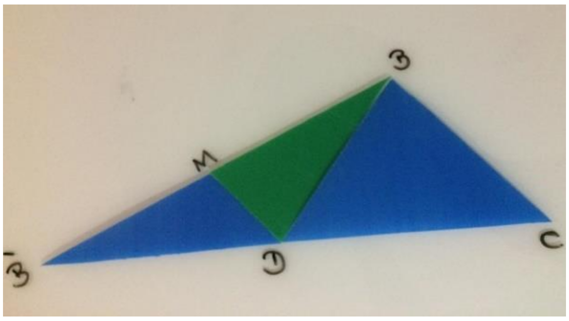
Fonte: Autor, 2021.

Figura 115 – 2º polígono original.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 116 – 2º triângulo construído.

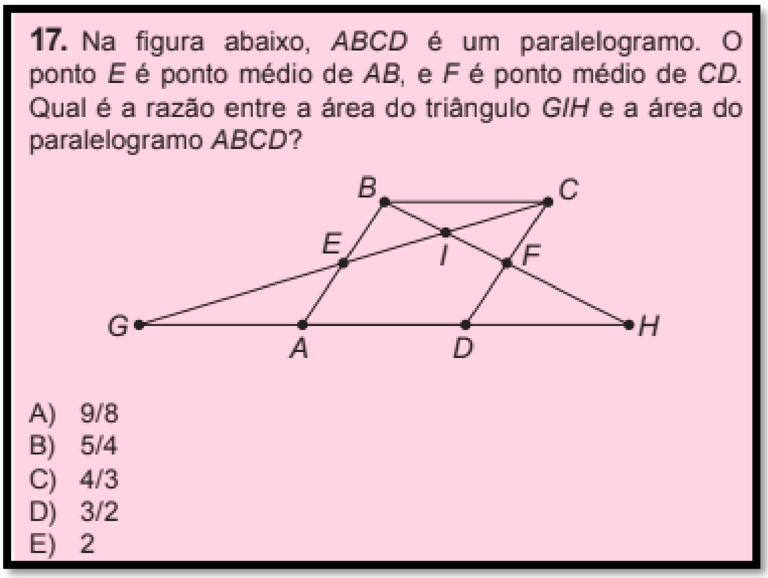


Fonte: Autor, 2021.

Um resultado que emerge naturalmente dessas ilustrações, com base nas conclusões decorrentes da atividade 3 da seção anterior, é inerente ao fato de que as áreas dos triângulos **A'CM** e **B'DM** representam $^1/_4$ da área do paraleloramo original. Por consequência, possuem $^1/_4$ da área do triângulo maior construído. É importante perceber que foi possível chegar a esse resultado fundamental sem precisar formalizar conceitos de semelhança, os quais certamente serão aprofundados em níveis posteriores do processo de ensino-aprendizagem.

Agora o objetivo será apresentar uma atividade extraída de exames da OBMEP, a qual será exposta na ilustração abaixo, a fim de que o conhecimento que acabou de ser trabalhado possa ser aplicado.

Figura 117 – Questão nº 17 da 1ª fase, nível 2, da OBMEP (2018).



17. Na figura abaixo, *ABCD* é um paralelogramo. O ponto *E* é ponto médio de *AB*, e *F* é ponto médio de *CD*. Qual é a razão entre a área do triângulo *GIH* e a área do paralelogramo *ABCD*?

A) 9/8
B) 5/4
C) 4/3
D) 3/2
E) 2

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Considerações pertinentes:

a) primeiramente, seria interessante que o mediador fomentasse o uso do conhecimento que acabou de ser trabalhado na seção. A primeira pergunta seria: qual a relação entre as áreas dos triângulos AEG e DFH com o paralelogramo ABCD?;

b) pelo que foi empiricamente trabalhado, ambos os triângulos possuem área equivalente a $1/_4$ da área do paralelogramo;

c) o próximo passo será identificar a relação entre a área do polígono AEIFD e o paralelogramo ABCD. A pergunta fundamental na ser feita seria pelo mediador seria: existe algum segmento que pode ser traçado no polígono AEIFD de modo que as duas figuras que surgirão tenham a área mais familiar?;

d) ao se olhar para tudo que foi trabalhado na área de paralelogramo no presente trabalho, o segmento de reta $\overline{EF}$ possibilita dividir o paralelogramo original, de modo que as simetrias existentes fiquem evidenciadas. Desse modo o polígono AEIFD será divido em um paralelogramo AEFD de área equivalente à metade da área do paralelogramo ABCD e em um triângulo EFI de área equivalente a $^1/_8$ da área do paralelogramo original.

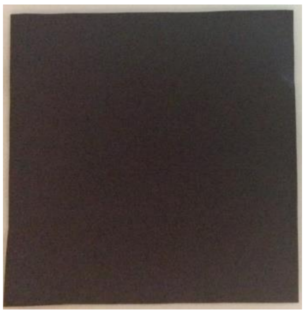
10 A SIMETRIA E OS PROBLEMAS DE DOBRADURAS

Um tipo de problema bastante interessante envolvendo a importância da construção dos eixos de simetria e as decorrências disso está presente nas atividades de dobraduras de figuras retangulares. Abaixo seguem ilustrações que descrevem o processo, por meio do qual uma figura em forma de quadrado inicial sofre uma dobradura e em seguida um perfuração na região em que há dupla camada de material como seguem:

Figura 119 – Dobradura “A”.

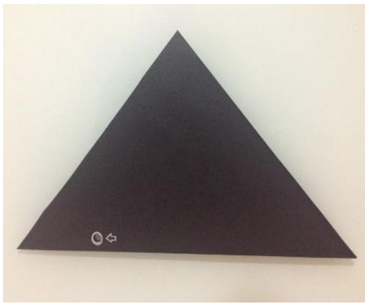
Fonte: Autor, 2021.

Figura 118 – Quadrado de partida.



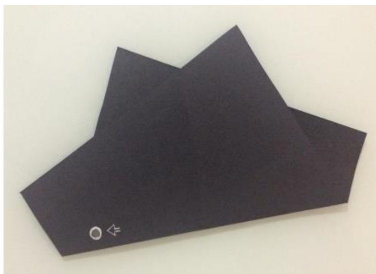
Fonte: Autor, 2021.

Figura 120 – Dobradura “B**”.**



Fonte: Autor, 2021.

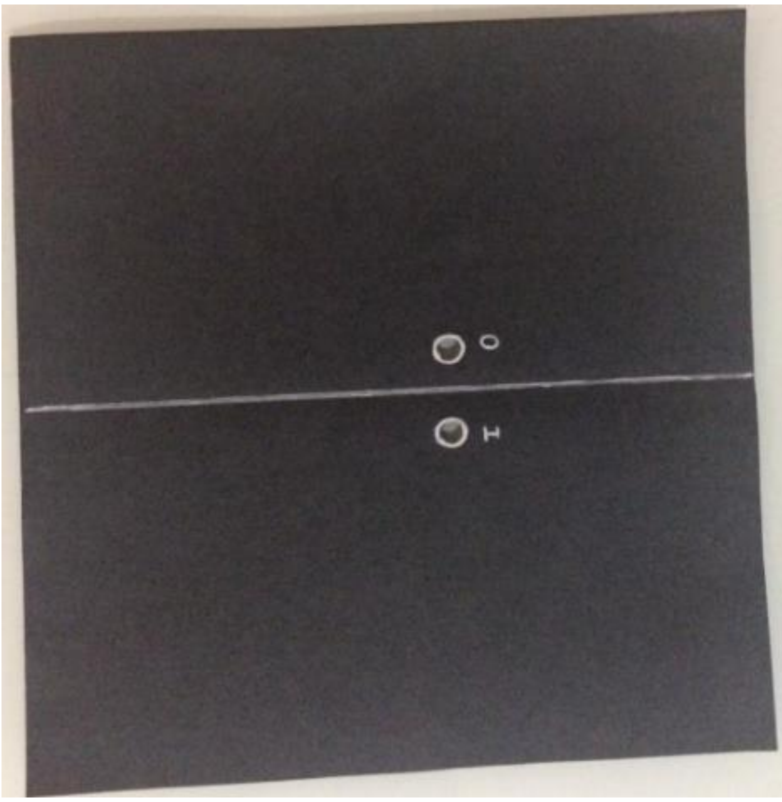
Figura 121 – Dobradura “C”.



Fonte: Autor, 2021.

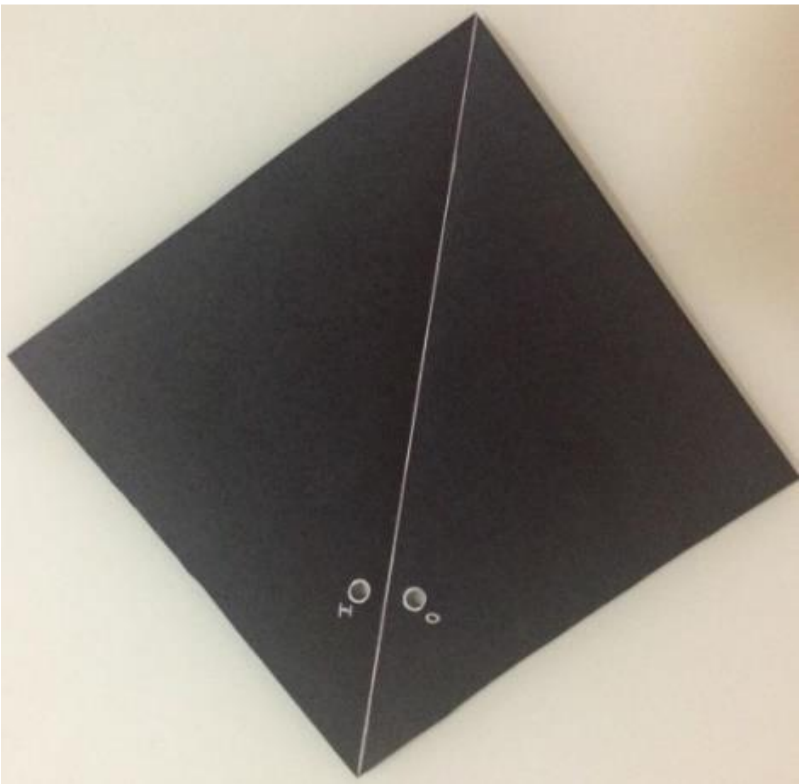
As próximas imagens expõem os efeitos decorrentes da perfuração nas duas camadas de material que sofreram a intervenção como seguem em cada uma das ações:

Figura 122 – Disposição dos furos em “A”.



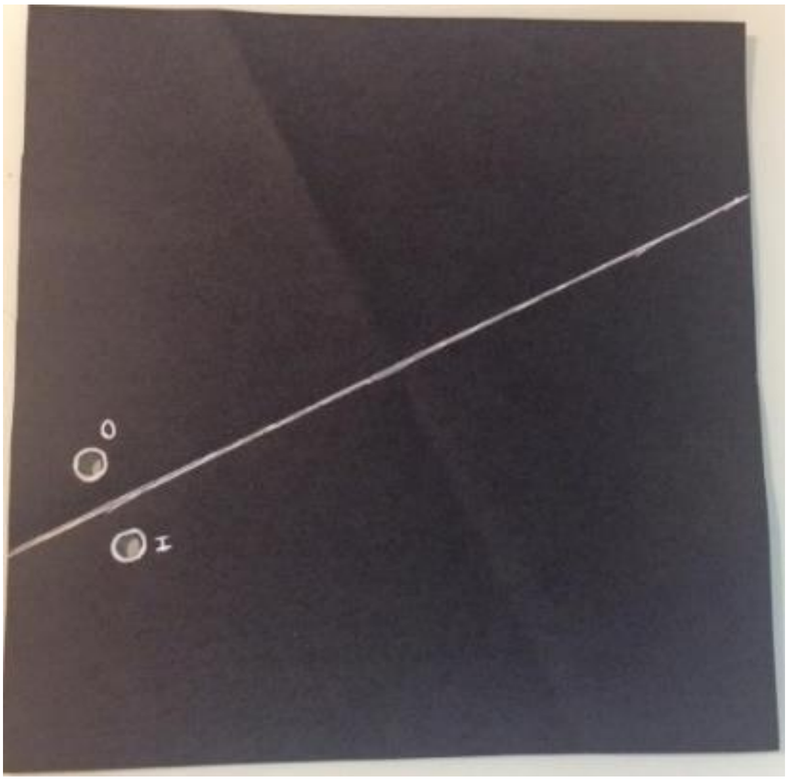
Fonte: Autor, 2021.

Figura 123 – Disposição dos furos em “B”.



Fonte: Autor, 2021.

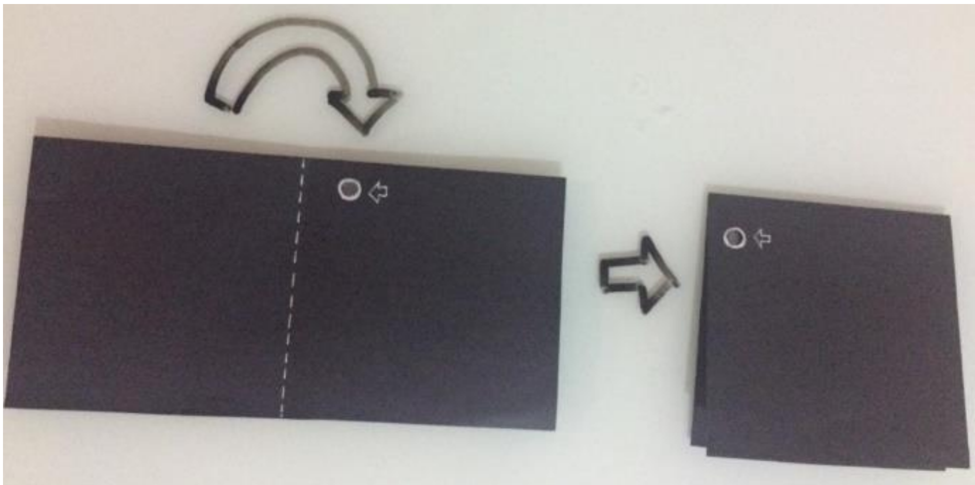
Figura 124 – Disposição dos furos em “C”.



Fonte: Autor, 2021.

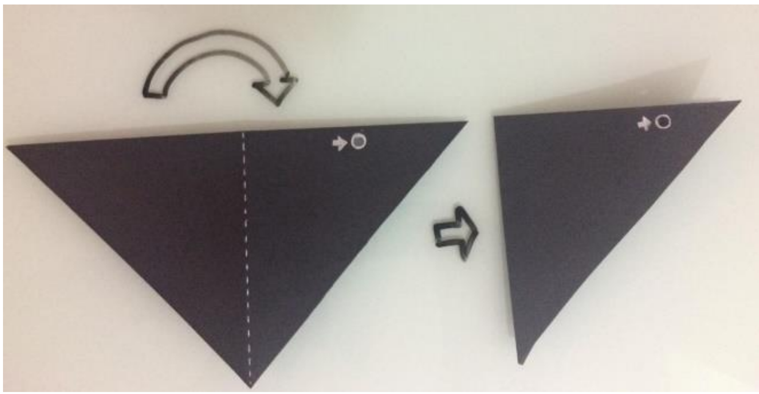
Torna-se fundamental a percepção de que o eixo de simetria definido pela dobradura acaba por definir uma região de simetria, na qual ele funciona como um espelho. Nas imagens, um dos furos é associado à letra “O”, como referência ao termo objeto, e o outro furo é associado à letra “I”, como referência ao termo imagem. Dando continuidade ao processo, cada forma receberá uma segunda dobradura, de modo que a perfuração ganha prosseguimento, como seguem assinaladas nas imagens a seguir:

Figura 125 – Sequência da dobradura “A”.



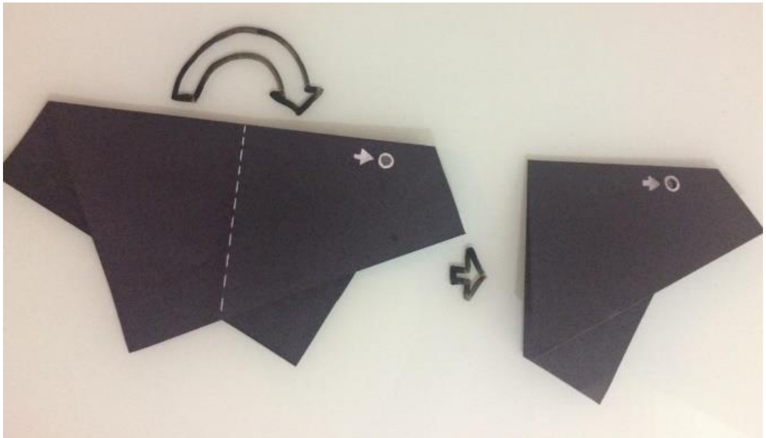
Fonte: (Autor, 2021)

Figura 126 – Sequência da dobradura “B”.



Fonte: Autor, 2021.

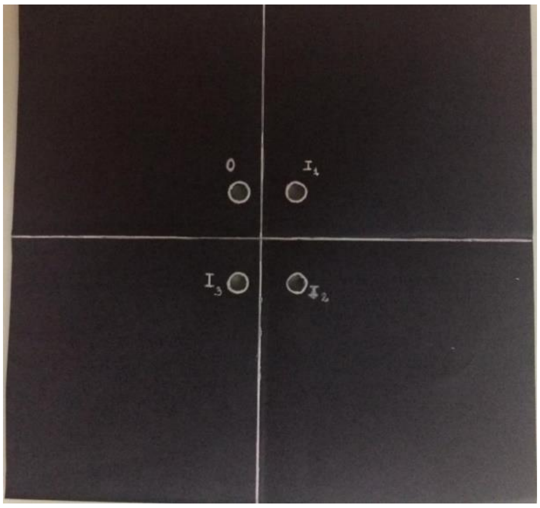
Figura 127 – Sequência da dobradura “C”.



Fonte: Autor, 2021.

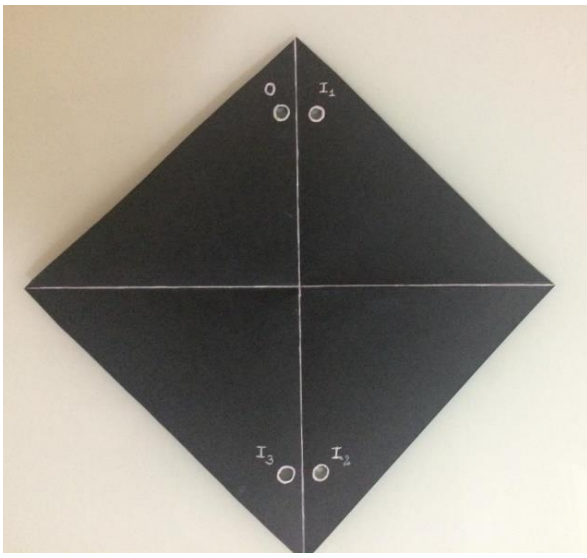
As próximas imagens indicam a disposição final dos orifícios nas quatro camadas formadas:

Figura 128 – Disposição dos orifícios “A”.



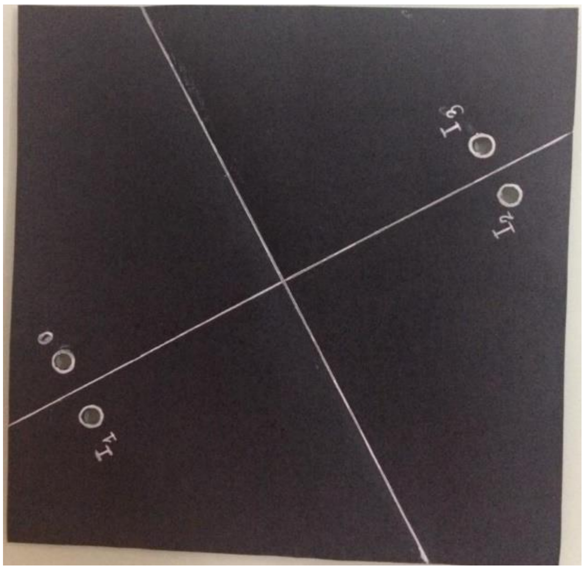
Fonte: Autor, 2021.

Figura 129 – Disposição dos orifícios “B”.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 130 – Disposição dos orifícios em “C”.



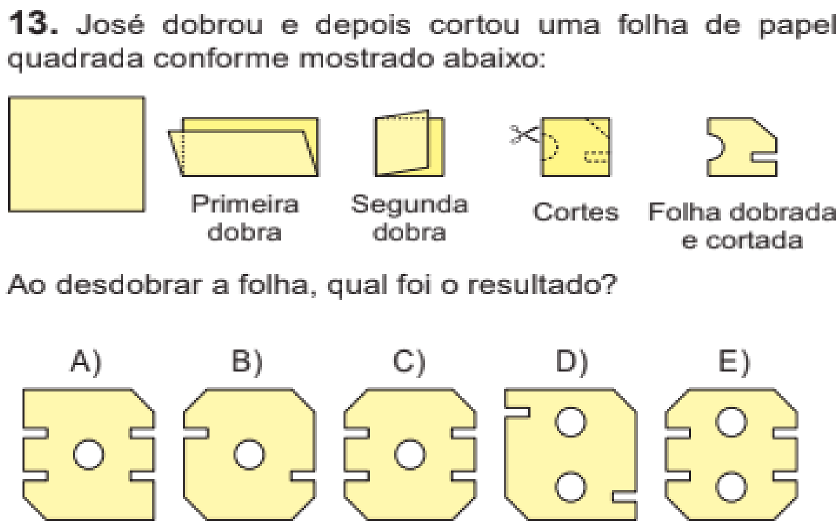
Fonte: Autor, 2021.

Uma conclusão interessante é que cada dobradura define de forma inequívoca um eixo de simetria. Por sua vez, cada eixo de simetria define regiões de simetria. Quando uma perfuração é feita, a consequência natural é que surja uma outra perfuração simetricamente posicionada em relação ao eixo de simetria, o qual funciona como um espelho. Caso a perfuração atinja um número par de camadas, que é a marca dos exemplos ora trabalhados, cada perfuração analisada será acompanhada de sua “imagem” ou orifício simétrico em relação aos eixos de simetria ou “espelhos” observados. Para se saber a disposição final nos exemplos em pauta, bastaria inicialmente que se traçassem os eixos de simetria. Depois, o aluno deveria simplesmente assinalar a posição de uma única perfuração. Os demais orifícios surgiriam naturalmente como decorrência da localização dos simétricos em relação aos eixos. É um exemplo fascinante de como a reflexão de objetos em relação à espelhos planos, experimento marcante da Ótica, pode enriquecer a percepção dos alunos em relação a muitos problemas da geometria plana.

Abaixo será apresentada uma questão extraída da 1ª fase do nível 1 do exame da OBMEP de 2019 para possibilitar a utilização dos conhecimentos ora trabalhados.

Questão 1

Figura 131 – Questão nº 13 da 1ª fase, nível, OBMEP (2019).



Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Considerações pertinentes:

a) é fundamental que o professor recorde com a turma que cada dobradura ensejará o surgimento de um eixo de simetria;
b) ao final da última dobradura, surgirão dois eixos de simetria;
c) o aluno deverá ter em mente que ao final, cada ação executada no último quadrado terá efeito em todos os outros quadrados definidos, de modo que cada figura feita com o corte gerará mais três imagens em relação aos eixos de simetria que funcionarão como espelhos;

Consequentemente:

a) todas os vértices do quadrado maior serão cortados;
b) serão gerados quatro semicírculos simétricos em relação aos eixos de simétricos em relação aos eixos de simetria;

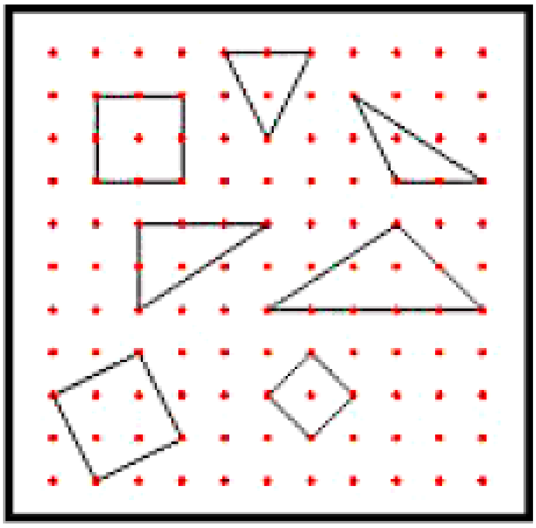
Sintetizando todo o processo de reflexão envolvido, tem-se o seguinte:

a) é preciso se traçar os eixos de simetria estabelecidos no local das dobraduras;
b) após isso, quatro regiões quadradas foram criadas. Basta escolher uma das regiões e aplicar adequadamente na mesma todas as intervenções que foram feitas;
c) a seguir, basta fazer as reflexões das formas criadas no pequeno quadrado, utilizando-se os eixos de simetria como espelhos.

11 TABULEIRO GEOPLANO

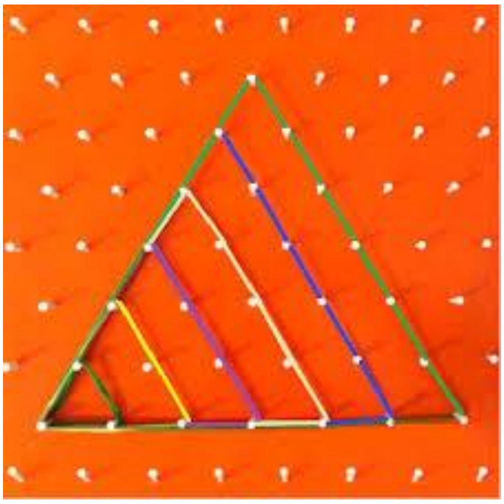
O tabuleiro geoplano é um brinquedo pedagógico, segundo ressalta (SILVA, 2018), que foi criado pelo matemático inglês Caleb Gattegno em 1961, originalmente construído com pregos cravados à meia altura em uma madeira de 20cm de largura por 20cm de comprimento, formado um quadriculado. A referida dissertação lembra que atualmente o mundo da Matemática contempla outras formas de apresentação do geoplano no tocante à malha como a forma circular e a triangular (isométrico), consoante atestam as figuras abaixo:

Figura 132 – Geoplano quadriculado.



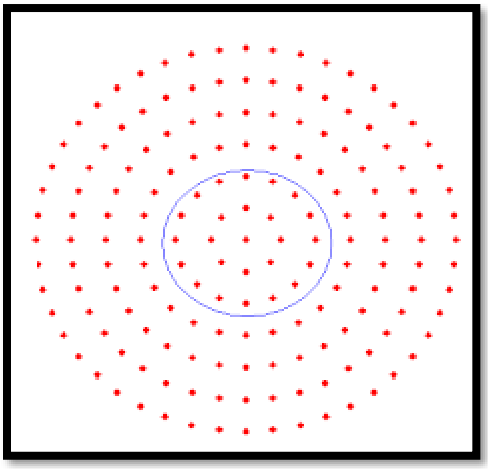
Fonte: site mdmat.ufgrs.br. Acesso em janeiro de 2021.

Figura 133 – Geoplano isométrico.



Fonte: site mat.unb.br. Acesso em janeiro de 2021.

Figura 134 – Geoplano circular.



Fonte: site w3.ufsm.br. Acesso em janeiro de 2021.

É impressionante como um artefato bastante rústico e acessível possa ser tão fascinante e revestido de um gigantesco potencial didático no que tange a auxiliar no processo ensino-aprendizagem de Matemática. À primeira vista, a simplicidade estética do tabuleiro geoplano pode esconder a imensa possibilidade de aplicação do mesmo na construção cotidiana do conhecimento matemático em sala de aula. Pode-se verificar a riqueza pedagógica dessa ferramenta na construção de gráficos de funções, no desenvolvimento de situações oriundas da Análise Combinatória, na visualização de preceitos da Geometria Analítica e, de forma bastante prolífica, na Geometria Plana. Torna-se possível construir polígonos de forma divertida, assim como as possibilidades para que se possa trabalhar os conceitos de perímetros e áreas de figuras planas ganham ares de brincadeira. A BNCC (2017) permite vislumbrar uma grande gama de situações em que a utilização do tabuleiro geoplano possa desempenhar um papel de extrema relevância. Além dos conceitos já relatados, este artefato, desde que tenha sua utilização bem planejada e uma mediação bastante diligente e crítica por parte do professor, gera facilidades para que temas como semelhança de polígonos possam ser discutidos de forma participativa e enriquecedora. Em um dado momento, quando trata das habilidades que devem ser desenvolvidas no sexto ano do ensino fundamental, a BNCC (2017, p. 303) deixa evidente a importância desse item didático quando menciona:

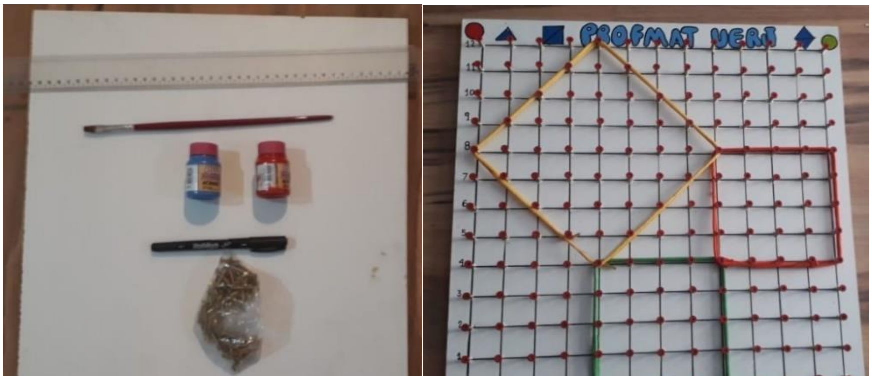
> *- Identificar características dos triângulos e classifica-los em relação às medidas de seus lados e ângulos;*
> *- Identificar características de quadriláteros, classifica-los em relação a lados e ângulos e reconhecer a inclusão e a interseção de classes entre eles;*
> *- Construir figuras planas semelhantes em situação de ampliação e de redução, com uso de malhas quadriculadas;*
> *- Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área;*

-Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro (BNCC, 2017, p. 303).

É nítido que o espectro de potenciais situações em que o geoplano pode ser eficientemente explorado no ensino de Matemática no ambiente escolar não se esgota com as possibilidades supramencionadas. O estudo de frações ganha um forte aliado com a presença desse instrumento. É possível que sejam construídas situações interessantes a partir do geoplano com o fito de tornar o tema atinente ao cálculo de ângulos internos e externos de polígonos regulares bem mais agradável e interessante.

Outro aspecto a se destacar reside na possibilidade de o aluno poder participar da construção do seu tabuleiro, a fim de que possa dar continuidade aos estudos em suas residências, usufruindo, assim, dessa importante ferramenta. A pesquisa em curso optou por utilizar um tabuleiro geoplano tradicional, malha quadriculada, confeccionado a partir de madeira MDF, com 40,5cm por 40cm, obtida a partir de descarte. Foram utilizados 169 parafusos do tipo phillips de cabeça achatada, com 25cm de comprimento e diâmetro da cabeça de 7cm, os quais poderiam ser substituídos por pregos, possibilitando a construção de 144 pequenos quadrados com 3cm de comprimento por 3cm de largura. Foram utilizados cadarços coloridos e elásticos para a construção das formas geométricas necessárias ao desenvolvimento das atividades. No lugar dos cadarços coloridos poderiam ter sido utilizados barbantes tingidos nas cores escolhidas. Não resta dúvida de que a participação intensa do aluno na produção de seu artefato pedagógico cria uma condição prévia deveras favorável para possibilitar a aprendizagem, pois tende a elevar a sua autoestima após o êxito dessa atividade laborativa que, por si só, já é marcante e intensa. Abaixo segue uma ilustração com o antes e o depois do processo de construção do tabuleiro geoplano:

Figura 135 – O antes e o depois da construção do tabuleiro Geoplano.



Fonte: Autor, 2021.

Com o intuito de auxiliar na aquisição de alguns itens para a confecção do material didático em voga, seguem cotações pertinentes nas tabelas abaixo declinadas:

Tabela 6 – Cotação de pote de tinta PVA.

Item	Loja	Preço
01	MALULI ARMARINHOS	R$ 2,75
02	PAPELARIA ART NOVA	R$ 3,00
03	LOJA CASA DA ARTE	R$ 2,97

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 7 – Parafusos do tipo Phillips de cabeça chata e comprimento de 25cmm.

Item	Loja	Quantidade	Preço
01	LOJA PIRES MARTINS	200	R$ 9,76
02	LOJA CCP PARAFUSOS E FERRAMENTAS	200	R$ 15,94
03	LOJA PARAFUSO FÁCIL	200	R$ 16,74

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 8 – Caneta preta especial do tipo marcador permanente de ponta fina dupla (unidade).

Item	Loja	Preço
01	CASA DA ARTE	R$ 3,15
02	LOJA KALUNGA	R$ 4,85
03	LOJA GIMBA	R$ 2,90

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 9 – Régua plástica de 50cm (unidade).

Item	Loja	Preço
01	AMERICANAS.COM	R$ 3,58
02	AMERICANAS.COM	R$ 3,11
03	AMERICANAS.COM	R$ 2,35

Fonte: Autor, 2021.

Faz-se mister ressaltar que todos os preços acima referendados foram obtidos através de busca na internet por intermédio do site GOOGLE no dia 26/12/2020. Ademais, convém aludir ao fato de que os cadarços coloridos foram adquiridos através de vendedores ambulantes na região central do Rio de Janeiro no mês de outubro de 2020 ao custo de R$ 2,00 o par.

11.1 **O tabuleiro Geoplano em ação: uma forma divertida para se lidar com situações-problema**

O tabuleiro geoplano é um instrumento pedagógico incrível que apresenta a possibilidade de criar um ambiente bastante convidativo tanto para que propriedades matemáticas sejam trabalhadas em uma proposta bem mais participativa e lúdica quanto para representar problemas geométricos de uma forma que seja muito mais fácil entender seus pormenores na busca da solução. Nesse sentido, o artigo acadêmico Librelato (2013) apresenta argumentos bastante pertinentes que coadunam com as argumentações em voga. No tocante à possibilidade de auxiliar o professor no desenvolvimento e familiarização com propriedades geométricas, o artigo traz a seguinte informação:

> É um recurso didático no auxílio ao ensino da geometria plana elementar, entre outros conteúdos, como ângulos, simetria, ampliação e redução de figuras, além, do entendimento básico da diferenciação das unidades de medidas de área e perímetro. É um instrumento que ajuda despertar e estimular a curiosidade das crianças a aprender e criar suas fórmulas matemáticas, chegando a diversas conclusões (LIBRELATO, 2013, p. 3)

Já no que concerne ao potencial dessa ferramenta em apoiar de forma contundente a prática docente na implementação de uma mediação que auxilie os alunos de modo eficiente na busca por resolver problemas desafiadores de geometria, o artigo anterior declina a seguinte argumentação:

> O geoplano é um recurso que auxilia o educador no desenvolvimento de problemas que desafiem, motivem e aumentem a curiosidade dos alunos em querer pensar neles e em procurar solucioná-los. Mostra novos caminhos e procedimentos ao educador, podendo assim contribuir para um melhor desenvolvimento do pensamento geométrico, não esquecendo que o educador é que conduz esta aprendizagem, questionando, complementando e assegurando o processo da descoberta (LIBRELATO, 2013, p. 3).

Nesse capítulo, serão apresentadas situações-problema deveras interessantes em que a utilização do tabuleiro geoplano surge como uma possibilidade divertida para trazer à baila uma reflexão a respeito de propriedades geométricas cruciais tanto sob o ponto de vista da OBMEP quanto sob o ponto de vista de uma imensa gama de eventos presentes no cotidiano dos alunos. É interessante se ressaltar que essa ferramenta pedagógica possibilita de forma lúdica a realização de intervenções nos polígonos representados como a sua decomposição, por exemplo. Por vezes será necessária a utilização de escalas no processo. A partir de agora, a utilização do geoplano estará atrelada ao tema principal que servirá de norte no processo.

11.1.1 Simetria

O artigo de Barros e Rocha (2004), apresentado no VIII Encontro Nacional de Educação Matemática em Recife no ano de 2004, serviu de inspiração para a implementação das situações-problema que serão trabalhadas nesta seção. Neste momento, o enfoque será dado tanto à reflexão propriamente dita, ou axial, quanto à reflexão deslizante, isometrias muito demandadas pela OBMEP. No primeiro caso, ganhará protagonismo a figura do eixo de simetria. No segundo caso, tal protagonismo se dará ao centro de simetria, razão pela qual a referida reflexão pode ser vista como reflexão central ou rotação de 180º ao redor do centro. Nos dois casos, a importância da mediação será propor nas turmas uma reflexão sobre o argumento crucial que circunscreve estas duas isometrias: a equidistância dos pontos do objeto e imagem ao eixo de simetria (reflexão axial) e ao centro de reflexão (na reflexão deslizante ou central). A prática a ser desenvolvida no tabuleiro geoplano, a qual preconizará indagações pontuais e reflexivas, deverá auxiliar no desenvolvimento nos alunos da capacidade intuitiva direcionada para os seguintes objetivos:

a) que tanto a forma original (objeto) quanto a forma refletida (imagem) são “idênticas” em uma linguagem mais informal ou congruentes em uma linguagem dentro do rigor matemático;
b) que a reflexão, independentemente do caso, preserva ângulos e lados;
c) que ambas as reflexões transformam vértices do objeto em vértices da imagem. Essa constatação será primordial, pois, no momento em que os alunos se familiarizarem com isso, perceberão que na grande maioria dos casos basta refletir os vértices e depois uni-los na imagem.

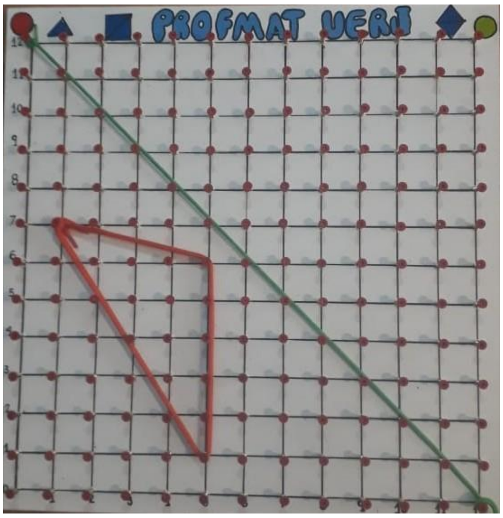
É importante que os alunos disponham de esquadro ou régua para auxiliá-los nas atividades a seguir, tendo em vista que os mesmos estarão sempre diante de situações envolvendo distância de ponto ao ente de simetria (eixo ou ponto) e posterior prolongamento da distância até encontrar a imagem, a qual estará disposta de forma equidistante em relação ao mesmo ente de simetria. Caso os alunos não disponham desses materiais, a utilização correta de um barbante ou material similar pode ser muito útil na realização das atividades. Convém aludir ao fato de que o tabuleiro geoplano se apresenta como um forte aliado tanto para se trabalhar a simetria da reflexão a partir 4° ano do ensino fundamental, competência de sigla

EF04MA19, quanto para se desenvolver habilidades inerentes à representação de formas geométricas, competência de sigla EF05MA17, segundo a BNCC (2017) como será visto aqui.

Atividade 1

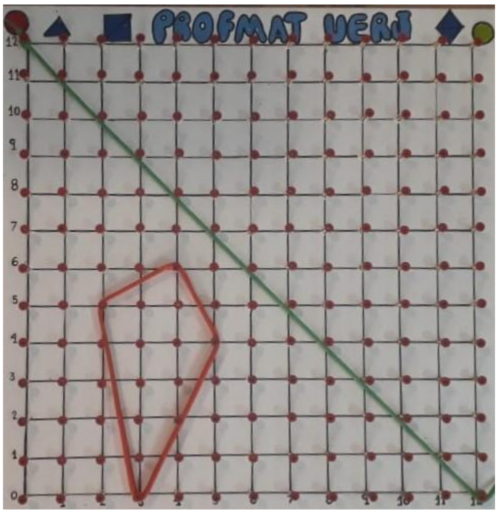
Abaixo seguem duas ilustrações, de modo que em cada fotografia consta uma figura geométrica e um segmento, o qual deve ser interpretado como eixo de simetria. Para cada situação, construa a forma simétrica da forma original em relação ao eixo declinado.

Figura 136 – 1ª figura a ser refletida.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 137 – 2ª figura a ser refletida.



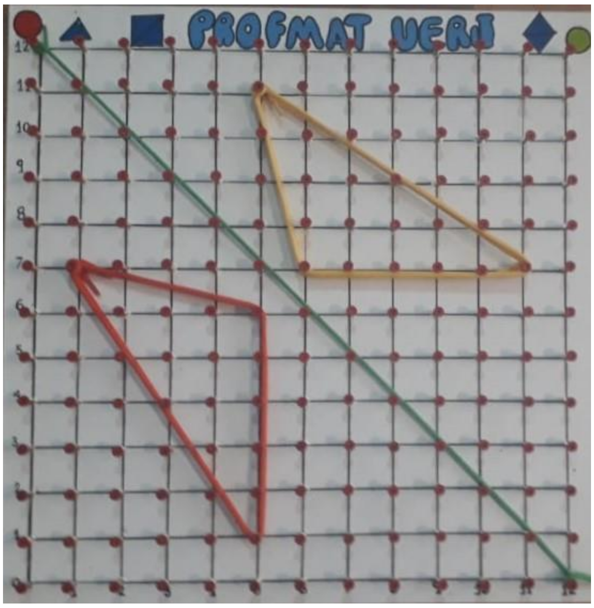
Fonte: Autor, 2021.

Perguntas importantes para a mediação:

a) dispondo de um esquadro, uma régua ou um barbante, qual seria a sua estratégia para encontrar a imagem da reflexão de um ponto qualquer em relação ao eixo de simetria (espelho) na atividade em voga?;
b) como você calcularia a distância de um ponto qualquer ao eixo de simetria?
c) Saber a distância do ponto a ser refletido ao eixo de simetria ajuda na resolução?;
d) prolongar o segmento utilizado para calcular a distância de um ponto qualquer em relação ao eixo de simetria auxiliaria na localização da imagem deste ponto?;
e) quais pontos das figuras originais escolheria para refletir?
f) a forma geométrica originada a partir da reflexão preserva lados e ângulos?

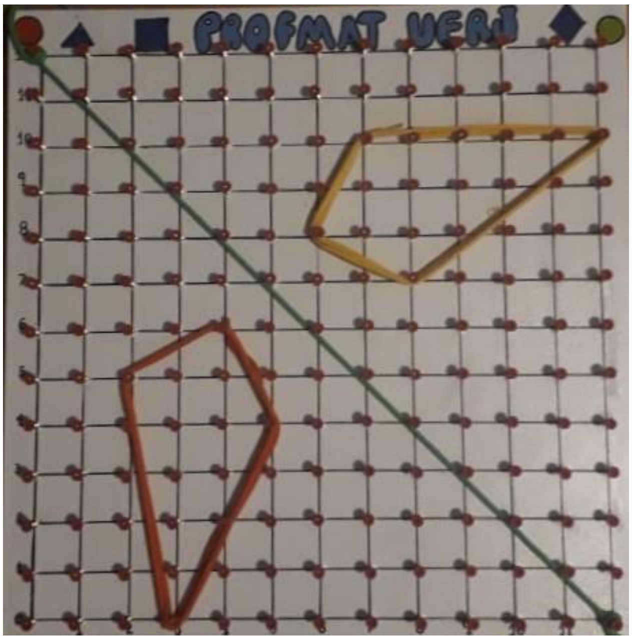
A importância crucial do mediador será utilizar a memória intuitiva do aluno para interpretar as suas experiências ao se posicionar diante de um espelho plano. A grande riqueza de conceitos geométricos que decorre da experiência refletiva diante de um espelho plano possibilita ao mediador de forma natural trabalhar com os alunos no início a distância de um ponto a uma reta e a perpendicularidade entre segmentos, e, no final, as consequências dessa isometria: preservação da medida dos segmentos e ângulos na imagem. Espera-se que os alunos possam construir de forma interativa e reflexiva as imagens presentes nas ilustrações abaixo:

Figura 138 – Imagem da 1ª figura refletida.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 139 – Imagem da 2ª figura refletida.

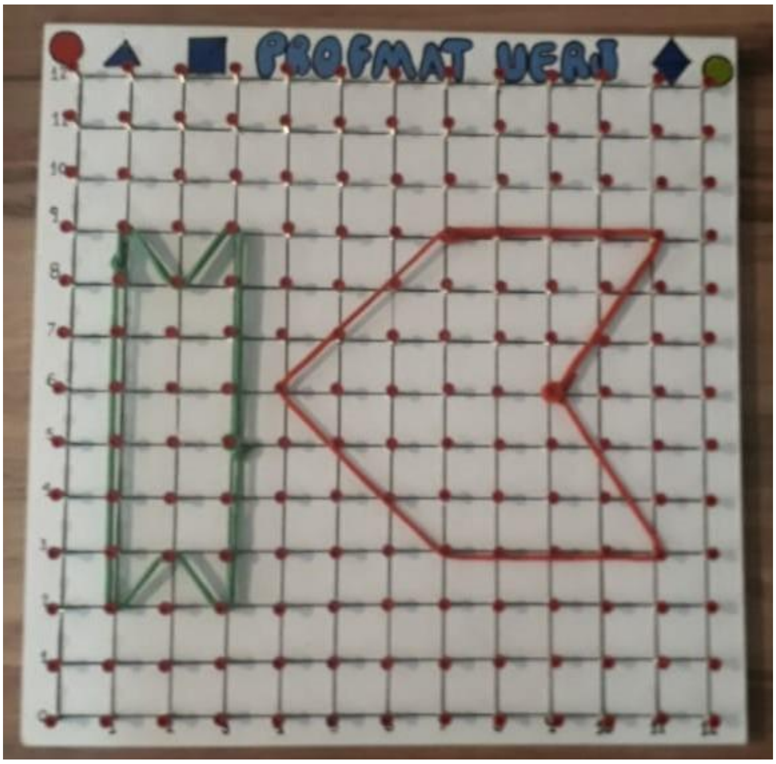


Fonte: Autor, 2021.

Atividade 2

Na imagem apresentada abaixo há duas formas geométricas. Construa em cada uma delas os eixos de simetria pertinentes.

Figura 140 – Formas geométricas da atividade 2.



Fonte: Autor, 2021.

Perguntas importantes para a mediação:

a) é possível utilizar um segmento de reta de modo que ele possa funcionar como um espelho no interior das formas geométricas?;
b) será que as duas formas possuem a mesma quantidade de eixos de simetria?;
c) será que é possível dividir alguma das formas geométricas apresentadas de modo que surjam duas formas "idênticas", sendo que eixo utilizado não possa ser interpretado como espelho?

É interessante percebe que a presente atividade foca na identificação de eixos de simetria, enquanto a primeira dava importância à utilização dos mesmos. A presente atividade tem a pretensão de levar os alunos a refletir sobre os padrões de simetria que se apresentam diante deles ao longo do dia como, por exemplo: a disposição das asas de uma ave, a reflexão diante um espelho plano, uma bola de futebol e uma antena parabólica. À medida que as interações forem se tornando cada vez mais profícuas, espera-se que as seguintes imagens possam ganhar destaque:

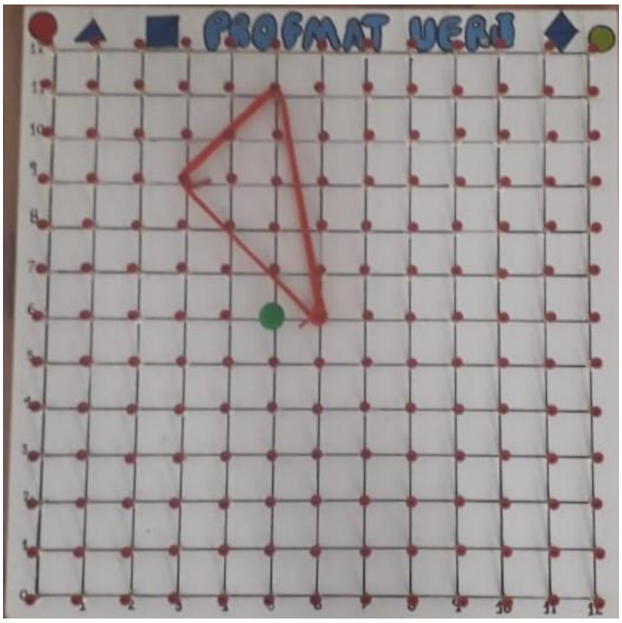
Figura 141 – Construção dos eixos de simetrias adequados.

Fonte: Autor, 2021.

Atividade 3

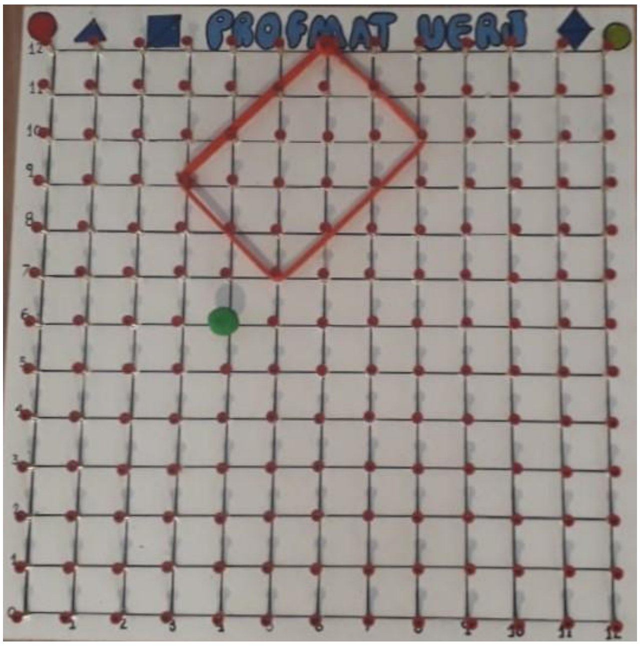
Nas imagens descritas abaixo existem uma forma geométrica e um ponto verde que deverá ser interpretado como centro de simetria. Com base nos padrões geométricos atrelados à rotação de 180º em relação ao ponto verde, construa as imagens atreladas às formas originais.

Figura 142 – Triângulo e o Centro de Simetria (ponto verde).



Fonte: Autor, 2021.

Figura 143 – Retângulo e Centro de Simetria (ponto verde).



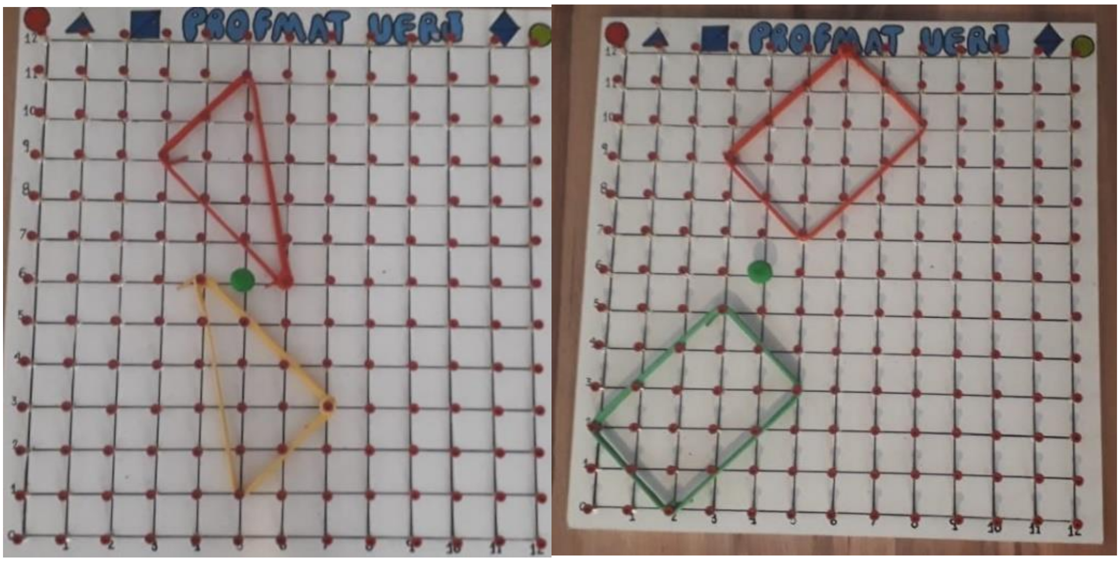
Fonte: Autor, 2021.

Perguntas importantes:

a) como encontrar o simétrico de um ponto qualquer em relação a um **centro de simetria**?;
b) utilizando uma régua ou barbante como você faria para encontrar o simétrico de um ponto qualquer em relação ao ponto verde do tabuleiro geoplano?;
c) dispondo de um segmento que une o ponto a ser refletido ao **centro de simetria**, o que fazer para encontrar o ponto simétrico?
d) ao se prolongar tal segmento, o que fazer para encontrar o outro ponto equidistante ao ponto verde e que pertença ao segmento prolongado?
e) quais seriam os pontos cruciais na opinião de vocês, a fim de se poder realizar a rotação de 180° em relação ao ponto verde?

Essa atividade inaugura a utilização do tabuleiro geoplano para a realização da rotação de 180° de uma figura. É fundamental que a mediação possibilite que os alunos percebam que o objeto e sua imagem refletida são equidistante em relação à referência tomada, a qual seria um ponto no caso em pauta. Ademais, o segmento que une os três pontos, considerando que o ponto escolhido é distinto do Centro de Simetria, é um segmento de reta. Após uma interação bastante intensa entre os alunos, espera-se as respectivas imagens simétricas geradas em relação ao ponto verde sejam:

Figura 144 – Resultado da simetria dos polígonos em relação ao ponto verde.



Fonte: Autor, 2021.

11.1.2 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos temas mais fascinantes da Geometria. Apesar de ser atribuída a formalização do teorema ao matemático grego Pitágoras que teria nascido na ilha de Samos no ano de 569 a.C. (antes de Cristo) e falecido no ano de 480 a.C., consoante o preconizado na obra de Wagner (2005), um aspecto bastante esclarecedor e que a obra Wagner (2005) muito bem esclarece diz respeito ao fato de que tal teorema já seria de conhecimento dos babilônios em um passado bastante remoto, como segue abaixo declinado:

> Temos provas concretas que os babilônios antigos conheciam o teorema de Pitágoras. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Universidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo (WAGNER, 2005, p. 2 e 3).

Após estas breves considerações históricas, serão apresentadas propostas de atividades relacionadas ao tema Teorema de Pitágoras tendo como ferramenta pedagógica principal o tabuleiro geoplano. Faz-se mister ressaltar que materiais didáticos alternativos e de grande relevância pedagógica serão utilizados para enriquecer e potencializar a utilização do geoplano.

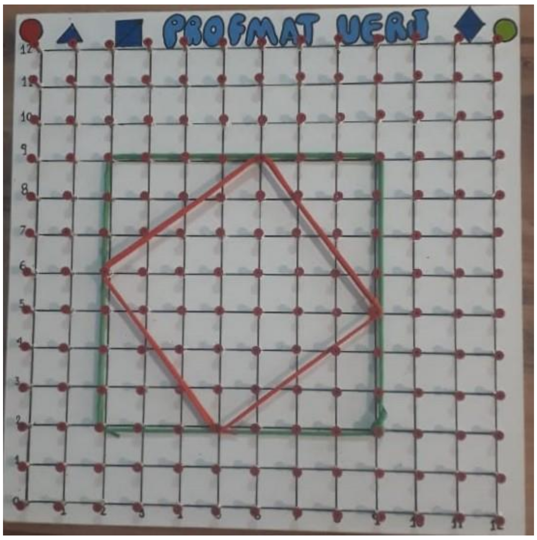
Atividade 1

Abaixo seguem duas imagens construídas no tabuleiro geoplano em que constam um quadrado, quatro triângulos e um outro quadrilátero. Explique;

a) Qual é a relação existente entre os quatro triângulos?
b) O quadrilátero menor é um quadrado? Por quê?
c) Qual é a relação entre os lados dos triângulos?

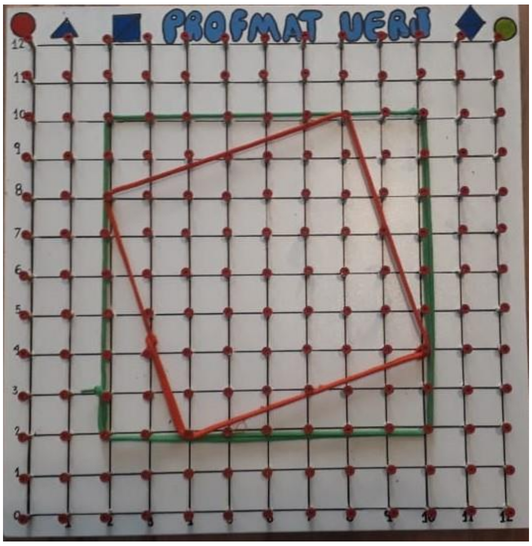
Observação: Para cada caso serão fornecidos os quatro triângulos retângulos de plástico nas mesmas dimensões dos triângulos presentes em cada exposição.

Figura 145 – 1ª imagem da atividade 1.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 146 – 2ª imagem da atividade 1.



Fonte: Autor, 2021.

Perguntas importantes para a mediação:

a) De que modo seria possível comparar os triângulos entregues?;
b) Haveria alguma posição conveniente para uma sobreposição perfeita?;
c) No tocante aos lados do quadrilátero construído com cadarço laranja nas figuras, o que se pode dizer?;
d) Qual seria a estratégia para se chegar aos ângulos do quadrilátero de perímetro laranja?;
e) Será que saber que a soma dos dois ângulos não retos de cada triângulo resulta no valor 90º pode auxiliar no cálculo de alguma forma?

A construção das duas imagens que seguem declinadas abaixo possibilitará ao mediador criar situações que auxiliem de forma bastante contundente na construção das ideias posteriormente aludidas:

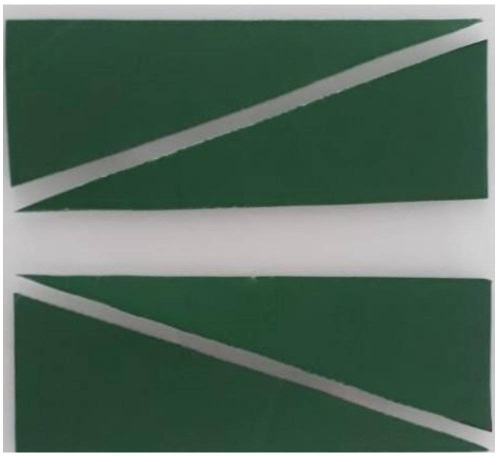
Figura 147 – Triângulos congruentes vermelhos.

Fonte: Autor, 2021.

Figura 148 – 1ª composição.

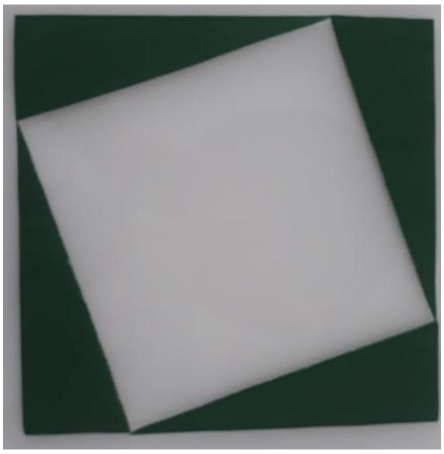
Fonte: Autor, 2021.

Figura 149 – Triângulos congruentes verdes.



Fonte: Autor, 2021

Figura 150 – 2ª composição.



Fonte: Autor, 2021.

Convém se destacar que as formas geométricas vermelhas dizem respeito ao apresentado na figura 145, enquanto as figuras verdes se prestam a auxiliar na atividade pertinente à figura 143. O manuseio das formas triangulares por parte dos alunos permite uma experiência explorativa mais rica, a qual é capaz de possibilitar decompor a forma inicial e explorar de forma mais intensa as propriedades geométricas atinentes às partes, a fim de capacitá-los posteriormente a olhar para o todo de um jeito mais crítico.

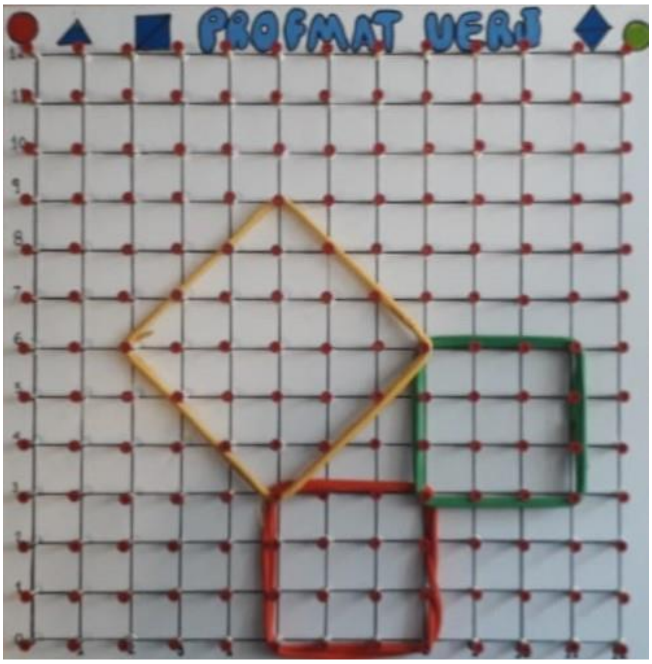
Segundo o preconizado na BNCC (2017, p. 315), o desenvolvimento das habilidades atinentes à formalização dos casos de congruência de triângulos deve se dar ao longo do 8º ano do ensino fundamental. Por essa razão, são fornecidos os triângulos retângulos supracitados, a fim de que a mediação possa levá-los a desenvolver estratégias empíricas para descobrir que os quatro triângulos de mesma cor fornecidos são “idênticos” ou congruentes. A sobreposição perfeita das figuras de mesma cor pode ser uma medida bastante esclarecedora. A percepção de que em cada vértice do quadrilátero laranja o ângulo interno do mesmo é suplementado pelos dois ângulos não retos do triângulo retângulo de plástico fornecido será fundamental. A combinação dessas duas informações possibilitará caracterizar o quadrilátero laranja como um quadrado de lado denotado a. Considerando que o lado de cada quadrícula é a unidade, ficará fácil por meio de decomposição da área do quadrado maior em quatro triângulos retângulos congruentes e em um quadrado menor. No que tange à figura 142, se chegará à conclusão de que “$a^2 = 3^2 + 4^2$”, já no caso da figura 143, o resultado que emergirá será: “$a^2 = 6^2 + 2^2$ “. Logo, no primeiro caso o resultado será “a = 5”, enquanto no segundo caso o valor será: “ $a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ “.

Atividade 2

Nas duas figuras apresentadas abaixo, seguem três quadrados convenientemente expostos. Responda aos itens que seguem:

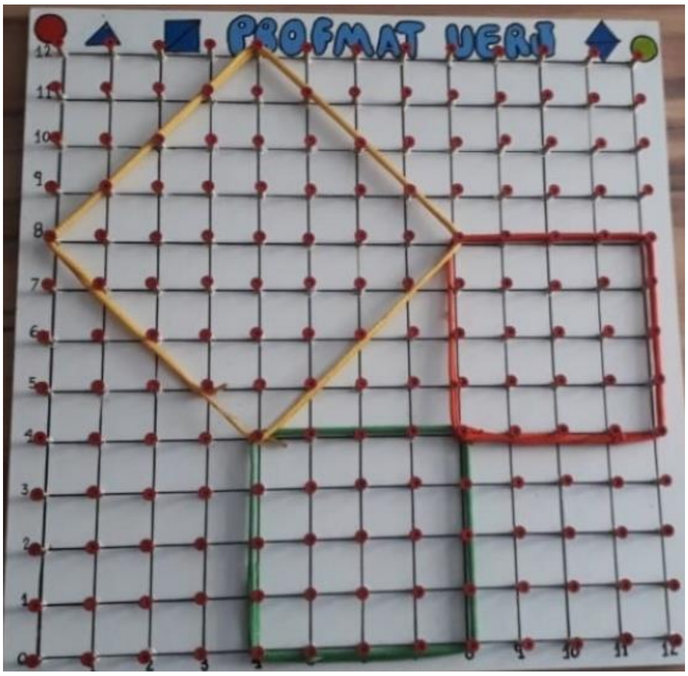
a) Qual é a relação entre a área do quadrado maior com os quadrados menores?;
b) Qual é a relação entre os lados dos quadrados envolvidos?

Figura 151 – 1º agrupamento de quadrados.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 152 – 2º agrupamento de quadrados.



Fonte: Autor, 2021.

Esse é um tipo de atividade onde a ferramenta pedagógica geoplano mostra-se autossuficiente no processo de construção do entendimento. O ponto crucial da resolução reside na contagem de quadrados de lado unitário que compõem os quadrados coloridos em cada representação. Denotar-se-á "a" para o lado do quadrado de amarela, "b" para o lado do quadrado verde e "c" para o lado do quadrado laranja. Na primeira figura, é possível perceber que o quadrado amarelo é composto por 12 quadrados unitários, lado equivalente à unidade, e 12 metades dos quadrados unitários, logo possui o equivalente a 18 quadrados unitários. O quadrado verde é composto por 9 quadrados unitários. O quadrado laranja também é composto por 9 quadrados unitários. A primeira conclusão é que a área do quadrado amarelo é equivalente á soma das áreas dos quadrados verde e laranja. No tocante aos lados, tem-se que: "$a^2 = b^2 + c^2$". Na segunda ilustração o procedimento é análogo. É crucial que a mediação direcione a atenção dos alunos para o triângulo retângulo de lados de cor amarela (hipotenusa), verde (cateto) e laranja (cateto), que nesse caso será também isósceles.

Para que se possa partir para a próxima atividade é importante aludir ao fato de que em algumas ocasiões o geoplano apresenta algumas limitações no que tange a possibilitar a representação dos quadrados com o fito de tornar o cálculo da área de todos uma mera situação de contagem como na atividade anterior. É inegável que o triângulo retângulo de lados de medidas 3, 4 e 5 é uma forma geométrica de destaque no estudo da Geometria. Para poder realizar um trabalho profícuo de exploração desse triângulo, será utilizada uma ferramenta pedagógica bastante rica em auxílio à construção cognitiva em curso com o geoplano: os cubinhos de materiais dourados. Para tanto, foi feita a aquisição no mercado de uma pequena caixa de um tipo desse produto e depois realizadas intervenções no tocante ao corte e à pintura das peças para se chegar ao resultado desejado. A inspiração para essa construção pedagógica em curso foi proveniente dos artigos acadêmicos Strottmann, Schuck, Schein (2013) e Souza, Kichow (2012), os quais preconizavam a utilização de ferramentas pedagógicas consagradas como o geoplano e os materiais dourados para o ensino do Teorema de Pitágoras para alunos com deficiência visual. A imagem abaixo apresenta as matérias-primas utilizadas nessa empreitada:

Figura 153 – Insumos para a confecção do material pedagógico.

Fonte: Autor, 2021.

Atividade 3

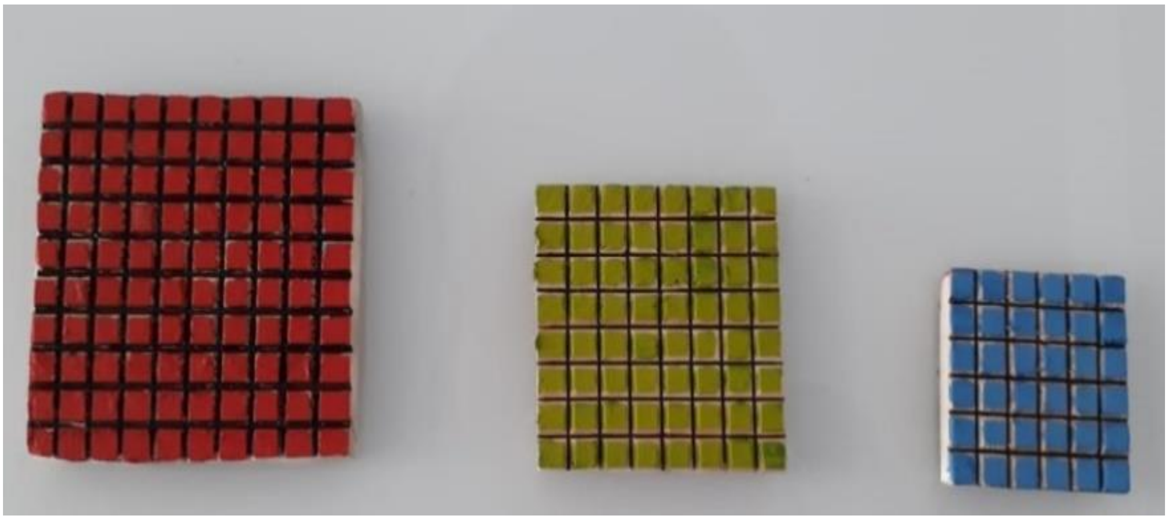
Consoante as figuras abaixo atestam, seguem dois trios de quadrados coloridos. Em cada trio, responda ao que se pede:

a) Qual é a relação entre as áreas do quadrado maior e os quadrados menores?
b) Encontre uma disposição conveniente para os quadrados, a fim de que se possa visualizar em uma única figura geométrica a relação algébrica decorrente do item anterior.

Figura 154 – Trio de peças quadrangulares de lados 5, 4 e 3 respectivamente.

Fonte: Autor, 2021.

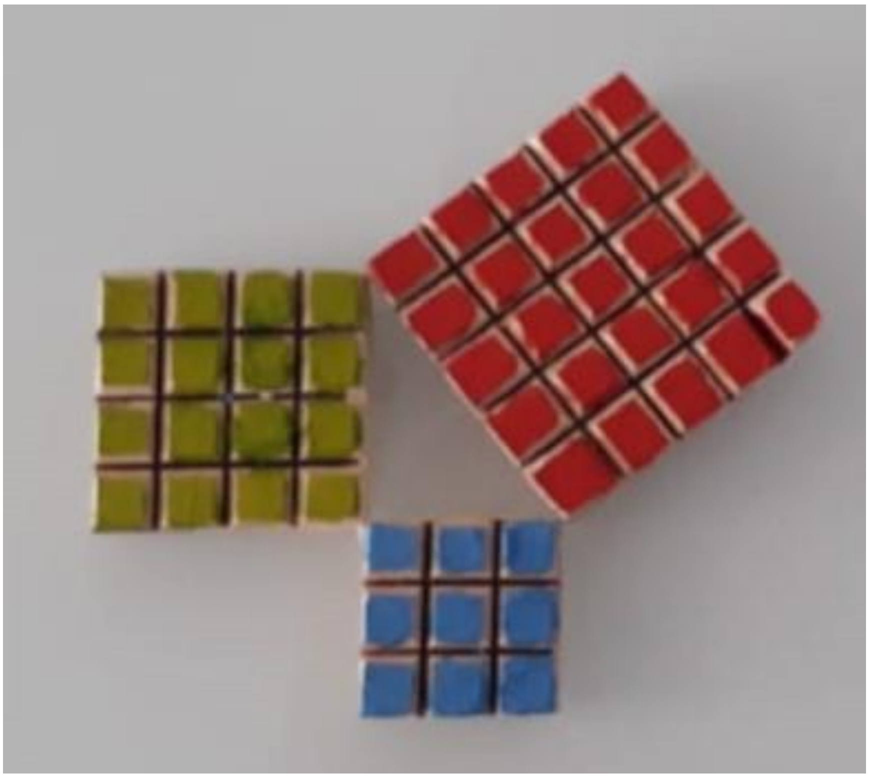
Figura 155 – Trio de peças quadrangulares de lados 10, 8 e 6 respectivamente.



Fonte: Autor, 2021.

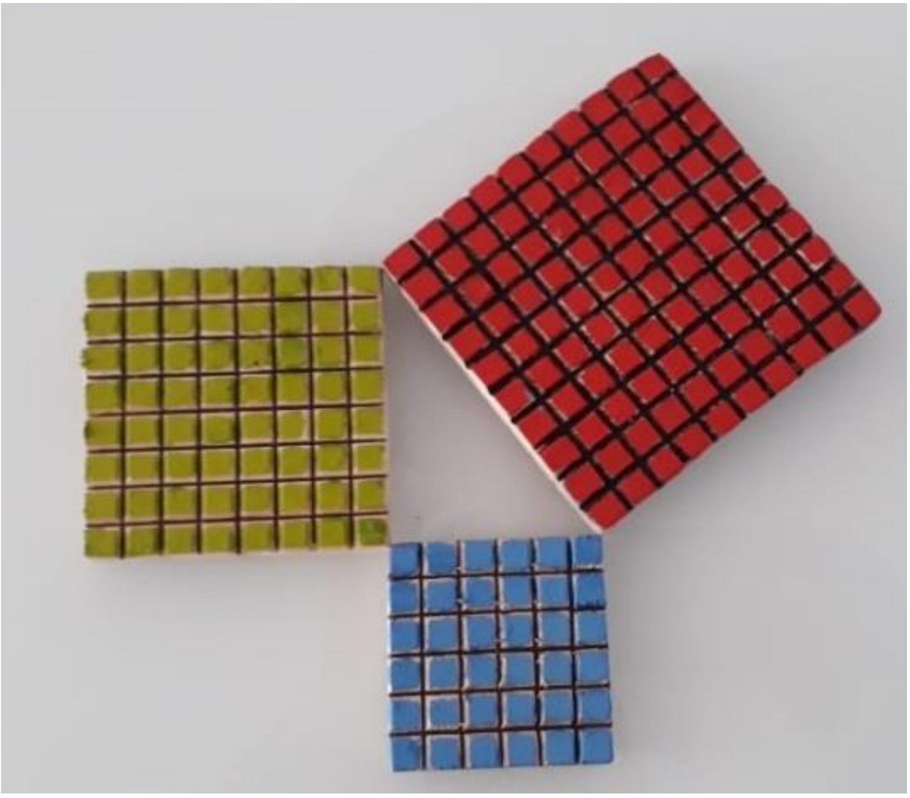
Essa questão possibilita a utilização de contagem de áreas de quadrados unitários, além de permitir com relativa facilidade o entendimento a respeito de que a área do quadrado vermelho corresponde à soma das áreas dos outros dois quadrados. Convencionando-se que "a" é o lado do quadrado vermelho, que "b" é o lado do quadrado amarelo e que "c" é o lado do quadrado azul, é natural que se chegue ao seguinte fato: "$a^2 = b^2 + c^2$ ". A construção da formação capaz de apresentar um triângulo portador de lados equivalentes aos lados dos quadrados será muito beneficiada pelas atividades anteriores. O papel da mediação será fazer os alunos refletir sobre a necessidade de que os vértices do triângulo desejado sejam escolhidos dentre os vértices de cada quadrado. Destarte, espera-se que ao fim surjam formas que correspondam às seguintes:

Figura 156 – Construção do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 157 – Construção do triângulo retângulo de lados 6, 8 e 10.



Fonte: Autor, 2021.

É de extrema relevância citar que o objetivo da pesquisa não é apresentar a demonstração do Teorema de Pitágoras, fato este fartamente abordado nas bibliografias que abordam o tema, mas sim apresentar situações essencialmente empíricas para despertar o interesse do aluno no que concerne a esse fantástico assunto.

11.1.3 Perímetros e Áreas

A partir desse instante, serão declinadas propostas de aplicações da ferramenta pedagógica denominada tabuleiro geoplano em situações que potencializam em muito o seu poder facilitador no processo ensino-aprendizagem de geometria plana: perímetros e áreas de figuras planas. Convém ressaltar que o tabuleiro geoplano possibilita em uma gama considerável de situações a representação de formas planas de modo que as medidas dos lados e alturas, a identificação de ângulos relevantes e o cálculo da área delimitada possam ser realizados de forma bastante simples e lúdica. Destarte, a essência da estratégia de resolver os problemas com base nessa ferramenta evidencia o protagonismo de construções empíricas capazes de possibilitar a melhor decomposição da forma geométrica original com o fito de, ao final, ensejar o surgimento de formas geométricas de domínio dos alunos com dados que "saltem aos olhos" ao longo da mediação. Faz-se mister aludir ao fato de que o artigo Santos, Gois, Costa e Gonçalves (2020), apresentado na revista Prática Docente, forneceu não só inspiração, mas também orientação didática para a construção das formas a serem trabalhadas nas atividades abaixo delineadas. Uma exposição bastante rica e extraída do artigo Mendes (2009) apud Santos, Gois, Costa e Gonçalves (2020, p. 583), sinaliza com maestria o poder facilitador da ferramenta de aprendizagem em voga, desde que inserido em um processo de ensino coerentemente planejado pelo mediador:

> As atividades práticas podem ser uma excelente alternativa para diminuir esse impasse e proporcionar uma aula que possa ser interessante, atrativa e que possibilite ao aluno a construção do conhecimento matemático. Assim, as atividades práticas de Matemática devem proporcionar um pensamento ativo que instigue a construção do conhecimento através de processos lógico-interrogativos (MENDES, 2009 apud SANTOS; GOIS; COSTA; GONÇALVES, 2020, p. 583).

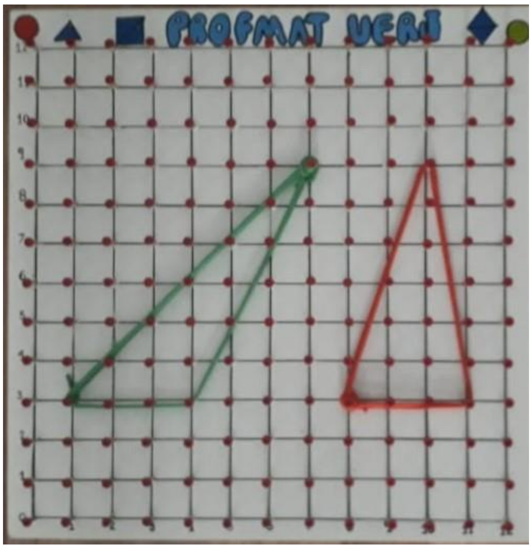
É interessante se perceber que o tabuleiro geoplano, por meio de suas quadrículas, facilita bastante tanto a decomposição dos polígonos quanto o cálculo das dimensões essenciais para se chegar ao perímetro e à área dos mesmos, como será visto a seguir.

Atividade 1

Abaixo seguem duas construções utilizando o instrumento pedagógico conhecido como geoplano, de modo que em cada imagem seguem evidenciadas duas formas planas. Para fotografia, responda aos itens que seguem abaixo:

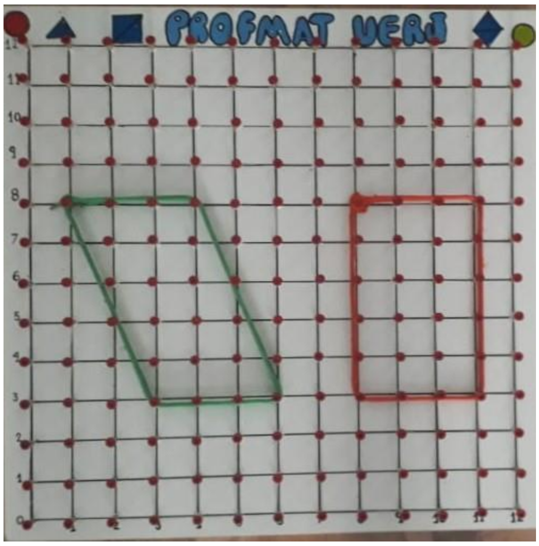
a) qual o perímetro das duas figuras presentes?;
b) qual é o valor das áreas?;
c) seria possível entender a relação entre as áreas sem a necessidade de calcular os valores das mesmas?

Figura 158 – Atividade com triângulos.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 159 – Atividade com quadriláteros.



Fonte: Autor, 2021.

A atividade em voga evidencia em primeiro plano um direcionamento do objetivo para a identificação para o cálculo de lados, base e altura dos polígonos envolvidos. Em segundo plano, a atividade tem por escopo propor uma discussão a respeito da seguinte indagação: há alguma relação entre área e perímetro?

Perguntas pertinentes:

a) qual seria a estratégia para se calcular todos os lados dos triângulos, tanto contando os lados da quadrícula (unidade), quanto através do Teorema de Pitágoras?;
b) qual seria a estratégia para se calcular todos os lados dos quadriláteros, tanto contando os lados da quadrícula (unidade), quanto através do Teorema de Pitágoras?;
c) qual é a relação entre as áreas dos triângulos e dos quadrados?;
d) é possível descobrir o que se pede somente olhando para as figuras?

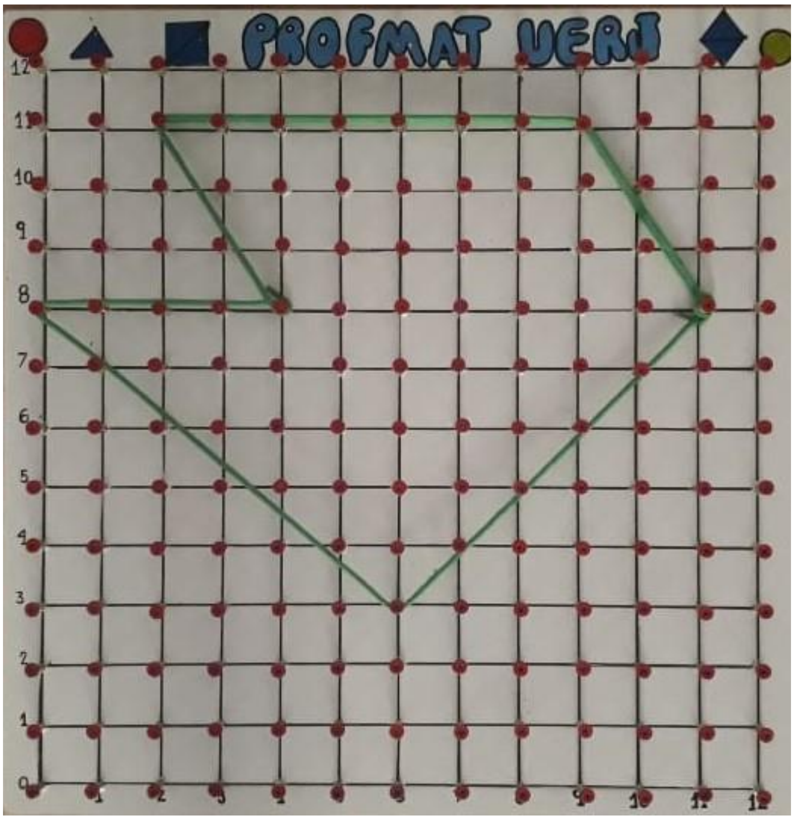
O objetivo precípuo da mediação será construir com base no debate as seguintes ideias:

a) as áreas em pauta guardam pertinência somente com a base e a altura das formas geométricas utilizadas, e não com os respectivos perímetros;
b) caso triângulos e paralelogramos possuam a bases e alturas de mesmo valor, a área dos paralelogramos será de valor equivalente ao dobro do valor da área dos triângulos.

Atividade 2

Abaixo segue uma ilustração com uma forma geométrica representada no tabuleiro geoplano. Qual o valor inerente tanto ao perímetro quanto em relação à área total representada.

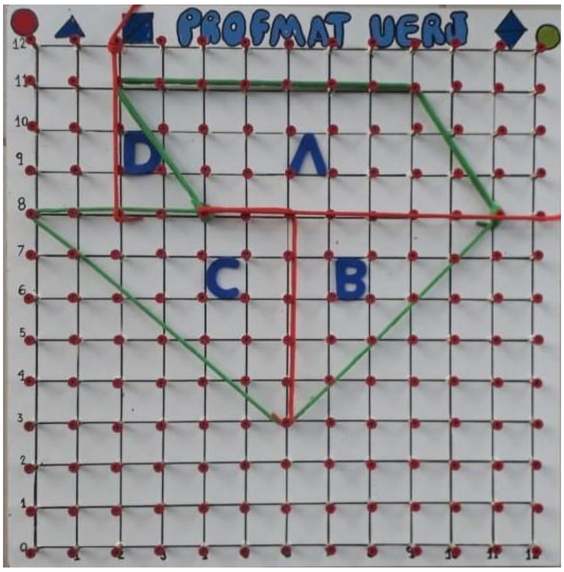
Figura 160 – Forma geométrica representada no Geoplano.



Fonte: Autor, 2021.

É de se esperar que a primeira medida a ser tomada no processo de construção da resolução desta atividade reside na necessidade imperiosa de desmembrar a forma geométrica original em polígonos familiares, cujo cálculo de suas dimensões se limite ou a uma mera contagem dos lados da quadrícula ou a uma elementar aplicação do teorema de Pitágoras. Uma das divisões interessante para a referida forma geométrica é a seguinte:

Figura 161 – Divisão da forma geométrica nos polígonos A, B e C.



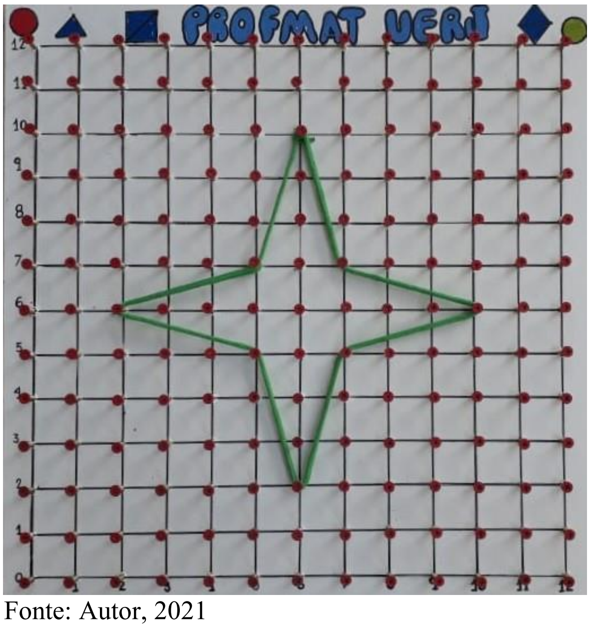
Fonte: Autor, 2021.

A consequência que emerge dessa divisão é o surgimento de dois triângulos retângulos e um paralelogramo com dimensões facilmente passíveis de serem descobertas. O triângulo retângulo assinalado com a letra “D” será útil para que seja encontrado o menor lado do paralelogramo.

Atividade 3

Abaixo segue uma figura que apresenta uma forma geométrica construída por intermédio de um tabuleiro geoplano. Qual o valor do perímetro e da área total da referida forma geométrica?

Figura: 162 – Estrela de 4 pontas no Geoplano.



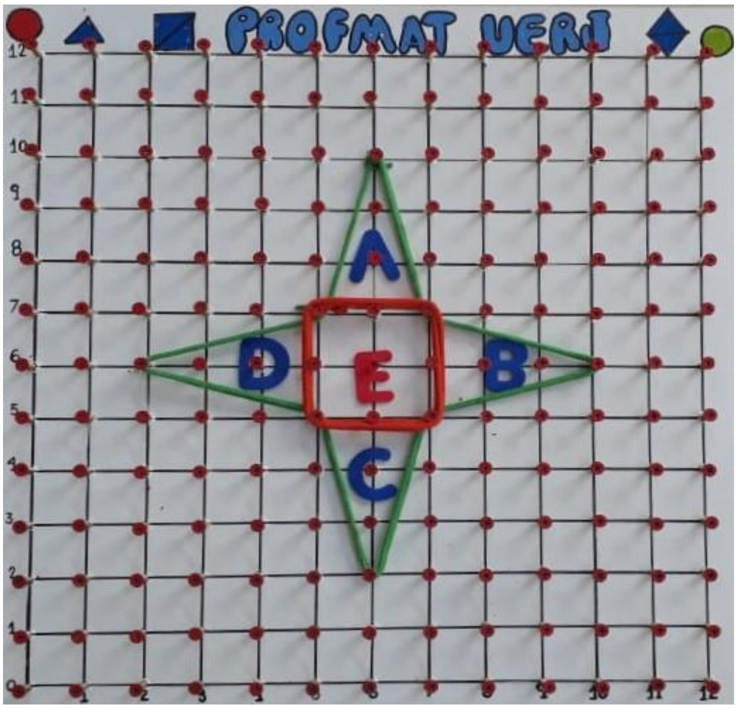
Fonte: Autor, 2021

Perguntas pertinentes:

a) qual seria uma divisão adequada para a figura original?;
b) após tal escolha, será preciso calcular todas as dimensões e áreas ou buscar verificar se existem formas "idênticas" ou congruentes?;
c) há necessidade de se calcular a área e o perímetro de todas as formas oriundas da decomposição da figura original?

Uma possível forma de dividir a figura original é a seguinte:

Figura 163 – Desmembramento da estrela de 4 pontas.



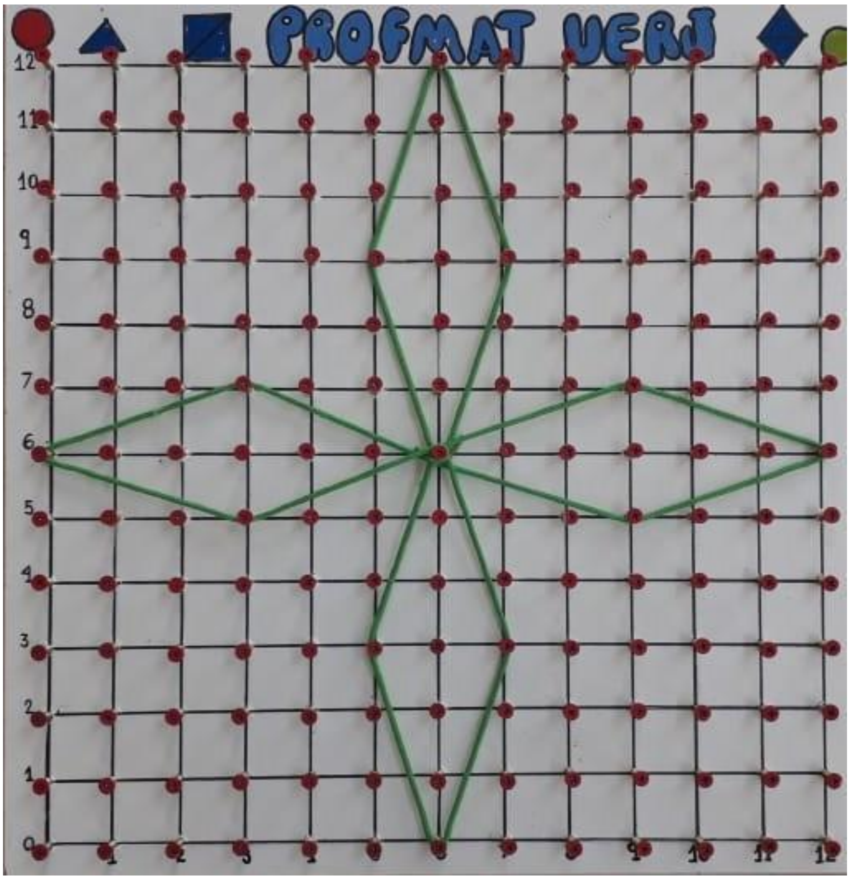
Fonte: Autor, 2021.

A partir dessa divisão, a qual deve ser discutida ao longo da mediação, surgirão quatro triângulos isósceles "idênticos" ou congruentes (A, B, C e D) e um quadrado (E). Para o perímetro total, torna-se necessário encontrar o valor de somente um dos lados iguais de um triângulo isósceles, o qual pode ser calculado por intermédio do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos valendo 1 e 3, ou seja, na metade simétrica de qualquer um dos triângulos. No tocante à área total, seu valor será constituído pelas áreas dos quatro triângulos isósceles congruentes adicionadas à área do quadrado, construído pelo cadarço de cor laranja, o qual possui lado de valor equivalente a 2 unidades. Cada triângulo isósceles pode ser melhor interpretado como tendo base de valor 2 unidades e altura de 3 unidades. Convém ressaltar que a construção geométrica trazida à baila pela atividade proposta foi inspirada em uma questão de geometria contida no vestibular de 2008 da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Atividade 4 (desafio)

Na imagem abaixo exposta há uma forma geométrica construída no tabuleiro geoplano. Encontre o valor do perímetro e da área total da figura em questão

Figura 164 – Forma geométrica de 4 pontas do desafio.



Fonte: Autor, 2021.

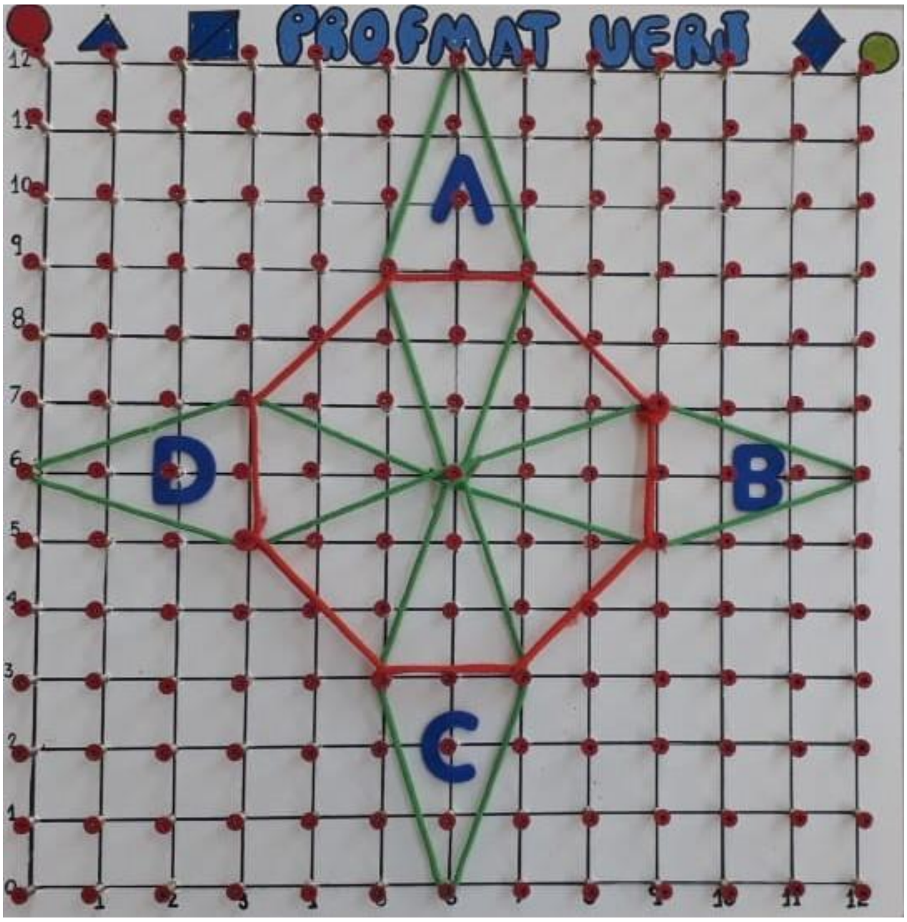
Perguntas pertinentes:

a) qual seria a estratégia interessante para decompor essa forma original em polígonos familiares?;
b) é possível construir uma estratégia de decomposição de modo a fazer surgir somente polígonos “idênticos” ou congruentes?;
c) caso tenha descoberto tal estratégia, será necessário calcular todos os lados para se chegar ao perímetro da forma original?;

d) no que concerne ao cálculo da área total, qual seria a utilidade em saber que todos os fragmentos oriundos da decomposição são congruentes?

Uma estratégia bastante interessante de decomposição da forma original segue abaixo declinada:

Figura 165 – Decomposição em 8 triângulos isósceles congruentes.



Fonte: Autor, 2021.

Na decomposição supramencionada da forma original, é possível perceber que surgiram 8 triângulos isósceles "idênticos" ou congruentes. A figura destaca 4 dos 8 triângulos congruentes com as letras "A", "B", "C" e "D". A base e a altura de todos os triângulos ficam bem evidenciadas, tornando o cálculo da área uma tarefa extremamente simples, uma vez que somente é preciso calcular a área de um único triângulo e depois multiplicar o valor por 8. Já no que concerne ao perímetro, basta se achar a medida de um único lado de um triângulo, identificado pelo cadarço de cor verde e, ao final, multiplicar por 16. Convém aludir que a imagem abaixo declinada foi inspirada em um fragmento de uma forma geométrica presente no vestibular de 1996 da Universidade Estadual Paulista (UNESP).

11.1.4 Semelhança

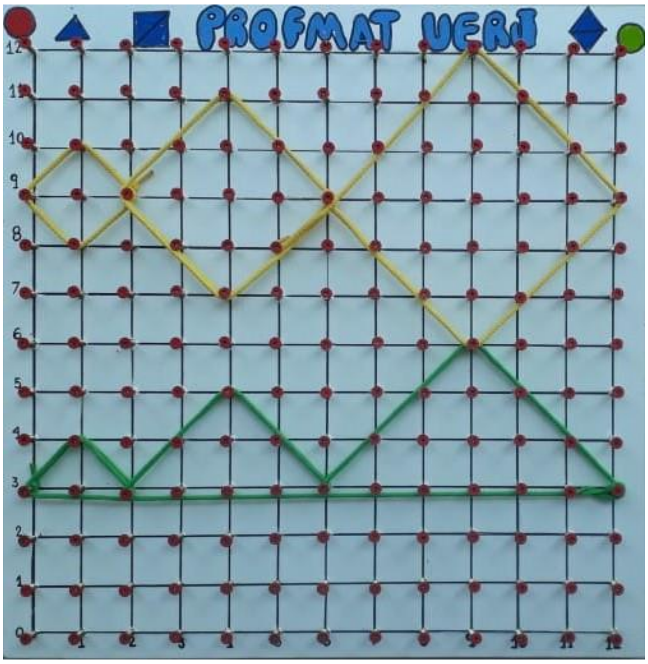
Sem sombra de dúvida, uma das mais profícuas utilizações do tabuleiro geoplano no ensino de no ensino de geometria reside no desenvolvimento dos preceitos basilares conceituais atinentes ao tema semelhança, o qual pode ser caracterizado de forma mais formal como uma isometria denominada homotetia. Com base em uma mediação cuidadosamente planejada, é possível criar situações-problema que privilegiem aspectos visuais e cruciais que evidenciem a ocorrência inequívoca desta transformação geométrica: a preservação de ângulos e a proporcionalidade dos lados. Faz-se mister ressaltar que as duas condições supramencionadas devem estar presentes, a fim de que seja possível asseverar de forma irrefutável a presença da homotetia. A ocorrência inerente à preservação somente de ângulos não garante a semelhança, pois é possível apresentar como contraexemplo a possibilidade de se construir um quadrado e um retângulo, sendo o retângulo com lados diferentes, por exemplo. Nesse caso, resta indiscutível que não se pode interpretar qualquer uma das formas como ampliação ou redução da outra. Por outro lado, caso se tenha somente a proporcionalidade de lados, não se pode garantir a ocorrência da homotetia pelo fato de ser possível apresentar um quadrado e um losango, o qual possui as diagonais perpendiculares, com todos os lados envolvidos de mesmo valor mas não com ângulos retos. Neste caso, resta indiscutível a não ocorrência da semelhança.

A escolha cuidadosamente planejada tanto das construções a serem implementadas com base no geoplano acompanhada de questionamentos pontuais e críticos pode fazer a diferença na utilização desta ferramenta. É interessante que as questões tirem o protagonismo dos cálculos e enfatizem nos aspectos cruciais que saltem aos olhos. Destarte, no que tange aos segmentos, sugere-se que estes apresentem-se como múltiplos dos lados da quadrícula elementar ou de sua diagonal, enquanto no que tange às áreas, sugere-se que as mesmas possam ser encontradas como múltiplos da área da quadrícula elementar, que possui área equivalente à unidade, ou da metade da mesma. A partir desse momento serão apresentadas atividades capazes de sinalizar na prática as considerações em voga, as quais restarão acompanhadas de questionamentos e considerações relevantes.

Atividade 1

A imagem abaixo exposta descreve na parte inferior do tabuleiro geoplano uma sequência de três triângulos e na parte superior uma outra sequência composta por três quadrados.

Figura 166 – Sequência de quadrados e triângulos.



Fonte: Autor, 2021.

Responda aos questionamentos abaixo:

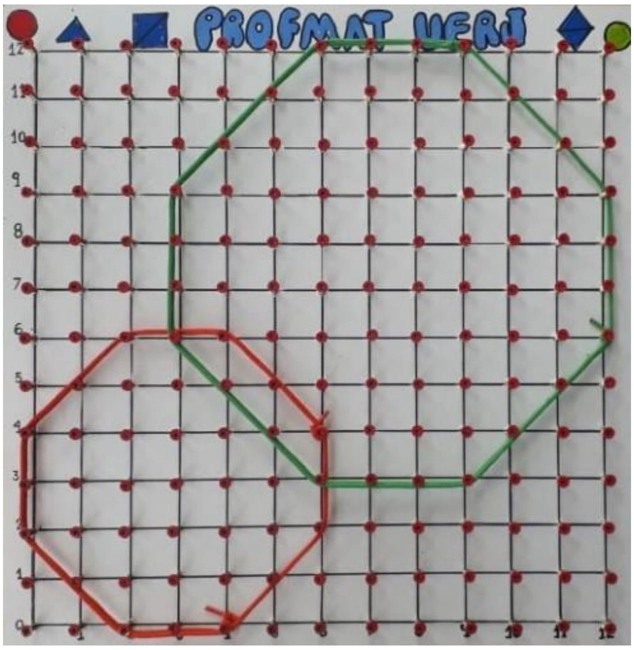
a) explique por que razão os triângulos são semelhantes;
b) qual é a razão de semelhança entre eles, tomado o primeiro como referência?;
c) qual é a razão de semelhança entre as áreas, tomando o primeiro como referência?;
d) faça o mesmo em relação aos quadrados.

É fundamental que a mediação permita que os alunos sejam capazes de coletar as informações olhando diretamente para o tabuleiro geoplano. No caso dos triângulos, os ângulos da base, considerando-a como o segmento horizontal, medem 45º. Esse fato decorre facilmente da divisão das quadrículas inferiores em partes simétricas por intermédio de suas diagonais. No tocante aos segmentos, é possível perceber que na segunda figura todos eles correspondem ao dobro dos seus correspondentes na primeira figura, enquanto na terceira figura tal correspondência se dá pelo triplo. Dessa forma, pode-se perceber que há preservação de ângulos e proporcionalidade dos lados, caracterizando-se, por conseguinte, a homotetia. Quando se olha para as áreas em questão, um aspecto crucial ganha destaque. A área do primeiro triângulo corresponde a soma de duas metades de uma quadrícula, gerando como valor uma unidade de área. O segundo triângulo é composto por 2 quadrículas e 4 metades de uma quadrícula, ensejando o valor de 4 unidades de área. No caso do terceiro triângulo, o mesmo é composto por 6 quadrículas e 6 metades de uma quadrícula, ensejando o valor 9 unidades de área. O aspecto interessante que emerge dessa situação empírica é que a relação entre as áreas corresponde ao quadrado da razão de semelhança detectada. No caso dos quadrados, a análise é análoga.

Atividade 2

Na imagem abaixo declinada, seguem dois polígonos de oito lados (octógono) apresentados por intermédio do tabuleiro geoplano. Responda aos questionamentos logo abaixo:

Figura 167 – Octógonos no tabuleiro geoplano.



Fonte: Autor, 2021.

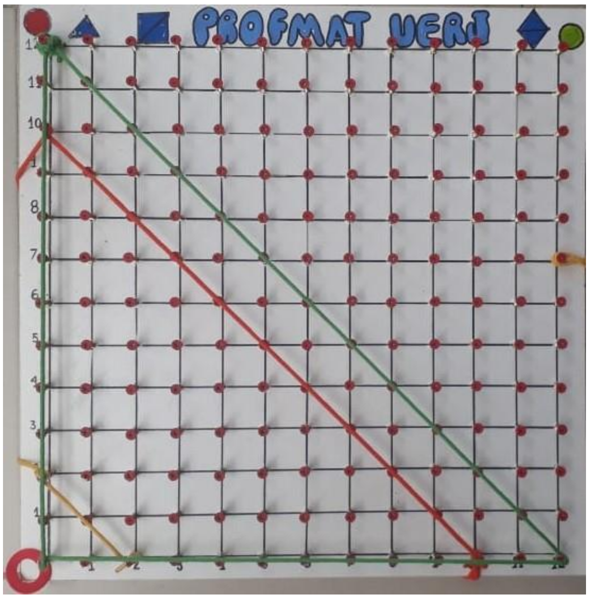
a) explique as razões pelas quais as figuras de lados de cores laranja e verde são semelhantes;
b) qual é a razão entre os lados?;
c) qual é a razão entre as áreas?

É interessante se perceber que os dois polígonos possuem todos os seus ângulos internos iguais a 135º. É natural se perceber que cada ângulo interno é composto por um ângulo reto (90º) adicionado da metade de um ângulo reto (45º). Com base um uma correspondência adequada entre os lados é possível se perceber que cada lado do polígono verde possui valor equivalente a $3/2$ do valor do lado com o qual se corresponde no primeiro polígono. Nesse caso fica evidenciado um caso de semelhança. No que tange às áreas, primeiramente deve-se perceber que o polígono verde é composto de 24 quadrículas e 8 metades de uma quadrícula, totalizando 28 quadrículas, enquanto o polígono verde é composto por 57 quadrículas e 12 metades de uma quadrícula, totalizando o valor de 63 quadrículas. Ao se fazer a razão entre as áreas, é possível identificar o seguinte: $63/28 = 9/4 = 3^2/2^2 = (3/2)^2$. Logo, é possível se visualizar na prática que a razão entre as áreas das duas figuras semelhantes utilizadas na atividade corresponde ao quadrado da razão entre os lados que se correspondem.

Atividade 3

Na ilustração abaixo exposta foi inicialmente confeccionado um triângulo retângulo isósceles verde com cadarço verde e vértice de referência "O" na cor vermelha e base coincidindo com a diagonal do quadrado maior. A seguir foram confeccionadas duas outras bases, sendo uma na cor amarela e outra na cor laranja. Responda ao que se pede logo abaixo:

Figura 168 – Triângulos retângulos de bases verde, laranja e amarelo.



Fonte: Autor, 2021.

a) os triângulos de base verde, laranja e amarela são semelhantes? Por quê?;
b) qual o valor das alturas que partem do vértice "O" em direção às bases?;
c) qual seria a razão de semelhança entre os triângulos, tomando-se por referência o triângulo de base amarela?;

d) qual seria a razão entre as áreas dos triângulos, tomando-se por referência o triângulo de base amarela?

Perguntas pertinentes:

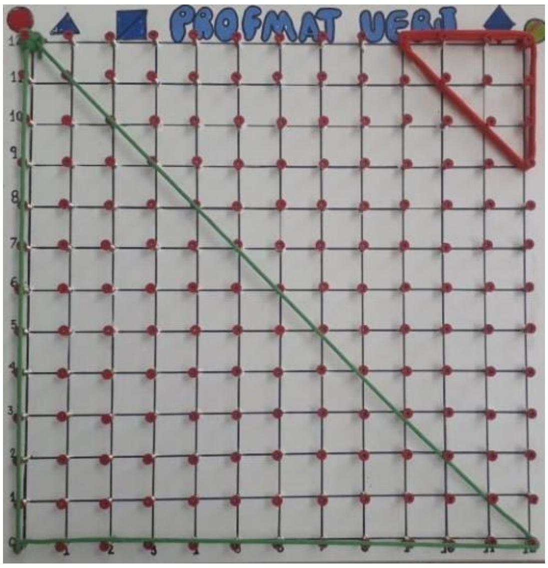
a) seria interessante imaginar que no lugar do vértice O exista uma fonte de luz, de modo que o segmento amarelo seja ampliado com base em projeções em anteparos, tendo como projeções as bases laranja e verde?;
b) é possível conceber os triângulos expostos em um processo de ampliação?;
c) é possível descobrir as áreas dos triângulos somente realização composição de quadrículas?;
d) qual é a relação entre a razão de semelhança e o resultado da divisão entre a áreas?

Da mesma forma que muitas questões de álgebra podem ser resolvidas de forma muito mais fácil à luz de um argumento combinatório, uma gama considerável de problemas de homotetia podem ser convertidos em situações empíricas extremamente familiares, desde que concebidas sob o lastro de um argumento atrelado a projeções, ou simplesmente argumento Ótico. O diferencial do tabuleiro geoplano nesta representação geométrica é tornar simples os cálculos inerentes a ângulos, lados, alturas e áreas. A ênfase da questão é direcionada totalmente na busca pela familiarização das ideias que permeiam o tema semelhança.

Atividade 4

Na ilustração abaixo são apresentados um triângulo maior confeccionado com cadarço verde e um triângulo menor, o qual foi construído por intermédio de um cadarço laranja.

Figura 169 – Triângulos retângulos verde e laranja.



Fonte: Autor, 2021.

Responda aos itens abaixo:

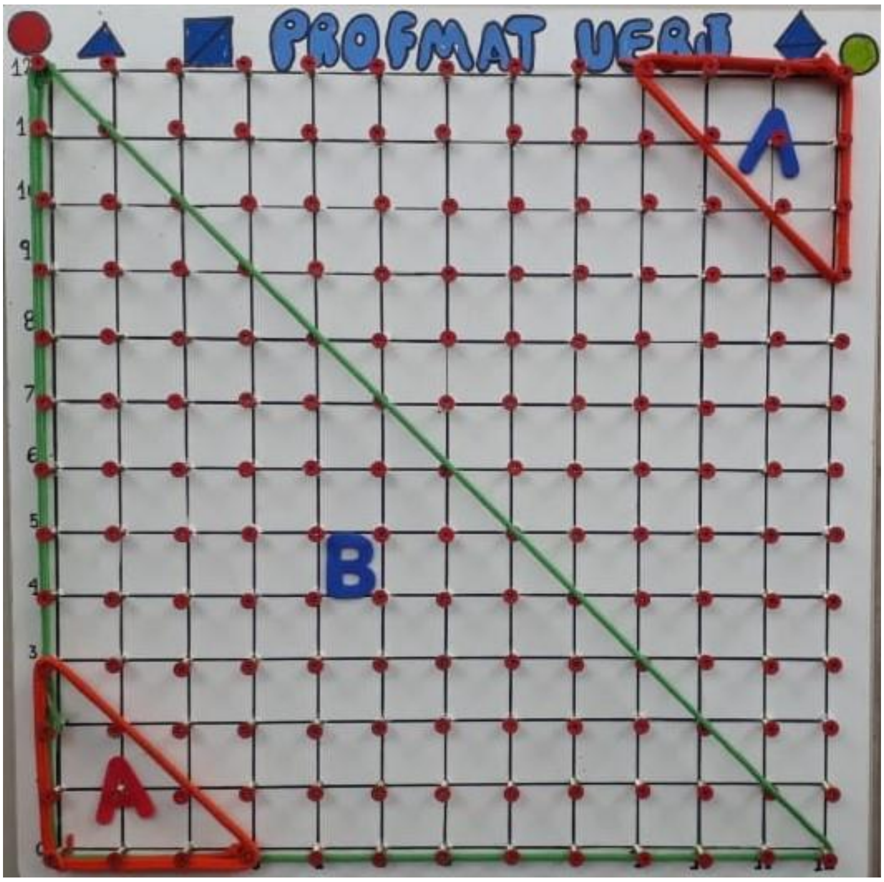
a) os triângulos abaixo são semelhantes?;
b) qual é a razão entre os segmentos que se correspondem? E entre as áreas?

Perguntas pertinentes:

a) como seria possível transportar o triângulo para o outro lado?;
b) a diagonal do quadrado poderia ser utilizada como um espelho?

Essa questão traz um ingrediente a mais para o desenvolvimento da estratégia a ser tomada. Para se chegar a uma configuração próxima da atividade anterior, torna-se fundamental utilizar o conhecimento intuitivo de simetria para se encontrar a imagem refletida do triângulo laranja, identificado com a letra "A" na cor azul, em relação à diagonal do quadrado maior, a qual funcionará como espelho. A consequência será o surgimento do outro triângulo laranja identificado com a letra "A" na cor vermelha, consoante o descrito abaixo:

Figura 170 – Reflexão do triângulo em relação à diagonal do quadrado.



Fonte: Autor, 2021.

Os demais passos não serão aqui delineados tendo em vista que guardam total pertinência com a estratégia utilizada na atividade anterior. Convém trazer à baila o fato de que as atividades 3 e 4 foram criadas com base na inspiração propiciada pela questão de n° 20 da 1ª fase, nível 1, da edição da OBMEP de 2019. Faz-se mister aludir ao fato de que esta questão será contemplada no capítulo seguinte do presente trabalho.

11.2 **O Geoplano e as questões da OBMEP: a ferramenta em ação**

Até aqui, essa importante ferramenta foi utilizada no processo de criação de situações-problema e no processo de desenvolvimento de estratégias de resolução de questões cuidadosamente elaboradas pelo autor na intenção de preparar os alunos para a fase seguinte, a qual preconiza duas habilidades a serem trabalhadas:

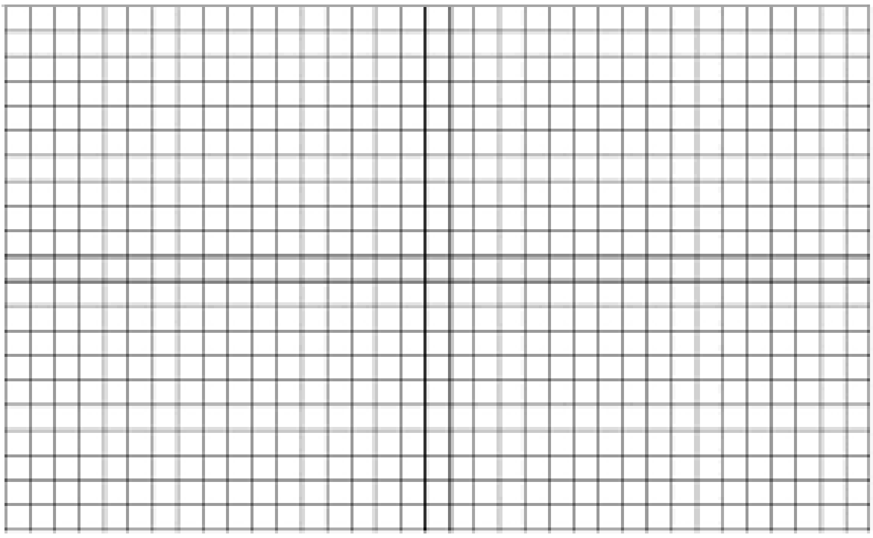
a) desenvolvimento de questões da OBMEP cuja origem é o tabuleiro Geoplano ou malhas quadriculadas;
b) desenvolvimento de questões da OBMEP sem origem em tabuleiro Geoplano ou malhas quadriculadas.

Com base no primeiro item, a pesquisa terá por objetivo escolher questões da OBMEP para resolução, as quais contemplem em sua criação a representação de figuras planas em ferramentas pedagógicas como o tabuleiro geoplano, quadriculado ou isométrico, e a malha quadriculada. Já no segundo item, questões de geometria plana que não façam qualquer alusão aos instrumentos didáticos em voga serão representadas por meio do tabuleiro geoplano e resolvidas com base no poder facilitador dessa ferramenta. Destarte, a partir desse momento a pesquisa em curso se debruçará sobre estratégias de resolução de questões extraídas da OBMEP, de modo que a representação das formas geométricas em malhas quadriculadas ou em tabuleiros geoplanos passe a desempenhar um papel crucial no processo.

11.2.1 Desenvolvimento de questões da OBMEP cuja origem é o tabuleiro Geoplano ou malhas quadriculadas

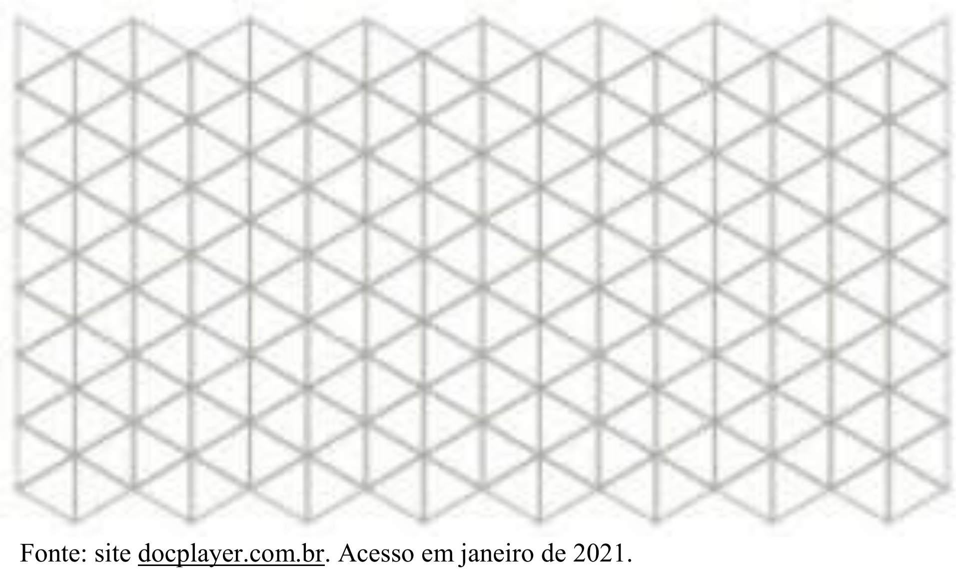
A partir desse instante, serão apresentadas cinco atividades extraídas de edições da OBMEP e que preconizam a importância de um trabalho em sala de aula com base na exploração de situações-problema concebidas com base no protagonismo tanto do tabuleiro geoplano quanto da folha de malha, sejam eles quadrangulares (quadriculadas) ou isométricas. Convém aludir, com base no preconizado no trabalho acadêmico de Ozieranski (2012), ao fato de que quando se faz alusão ao termo quadrangular, malha quadriculada, os pregos ou pontos mantém a mesma distância nas linhas e nas colunas, enquanto ao se aludir ao termo isométrico, malha isométrica, os pregos ou pontos são colocados na interseção das linhas, de modo que estejam alinhados obliquamente. Abaixo as imagens evidenciam tal argumentação:

Figura 171 – Malha quadriculada.



Fonte: site odin.mat.ufgrs.br. Acesso em janeiro de 2021.

Figura 172 – Malha isométrica triangular.

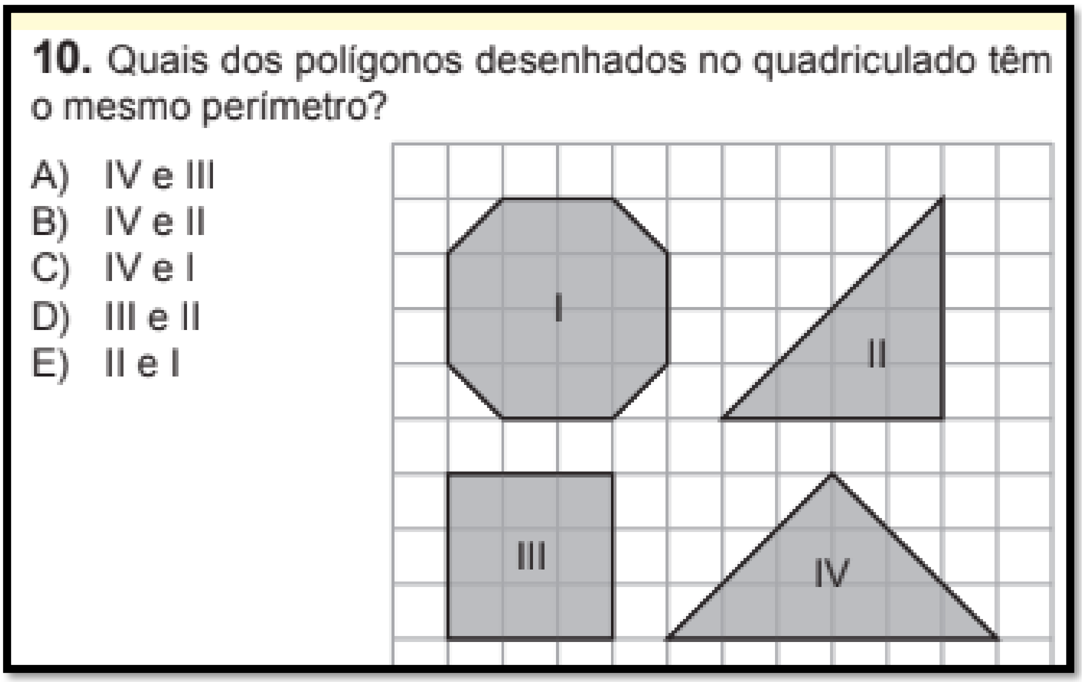


Fonte: site docplayer.com.br. Acesso em janeiro de 2021.

O objetivo crucial desse fragmento do estudo não é apresentar uma solução para cada atividade, tendo em vista que todas as soluções seguem delineadas no site inerente à OBMEP, mas sim pontuar aspectos de extrema relevância a serem discutidos e estimulados ao longo da mediação. Abaixo segue a primeira atividade proposta, a qual ilustra representações de quatro polígonos diferentes em uma malha quadriculada. Um aspecto a se destacar é o benefício propiciado pelas quadrículas, as quais funcionam como facilitadores no cálculo dos lados das figuras geométricas.

Atividade 1

Figura 173 – Questão do nível 1, 1ª fase, da edição OBMEP (2015).



10. Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

A) IV e III
B) IV e II
C) IV e I
D) III e II
E) II e I

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

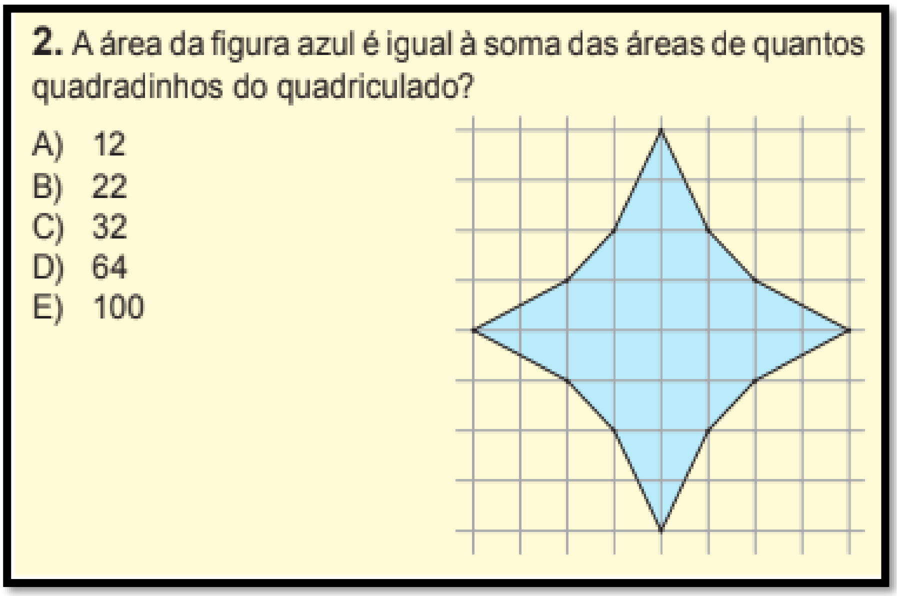
Considerações pertinentes:

a) o cálculo dos perímetros dos quatro polígonos será um procedimento simples de contagem tendo como parcelas ora o lado da quadrícula, que tem valor 1 (unidade), ora a diagonal da quadrícula, a qual tem valor $\sqrt{2}$;
b) tendo $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$ e $2p_4$ como os perímetros dos polígonos de números I, II, III e IV, respectivamente, ter-se-á os seguintes valores: $2p_1 = 8 + 4\sqrt{2}$ $2p_2 = 8 + 4\sqrt{2}$, $2p_3 = 12$ e $2p_4 = 6 + 6\sqrt{2}$.

A próxima atividade evidencia a facilidade propiciada pelas quadrículas no que diz respeito tanto à decomposição da forma geométrica representada quanto no que concerne à identificação das dimensões essenciais para o cálculo das áreas das figuras decompostas.

Atividade 2

Figura 174 – Questão da 1ª fase, nível 1, da edição da OBMEP (2017).



Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Perguntas importantes:

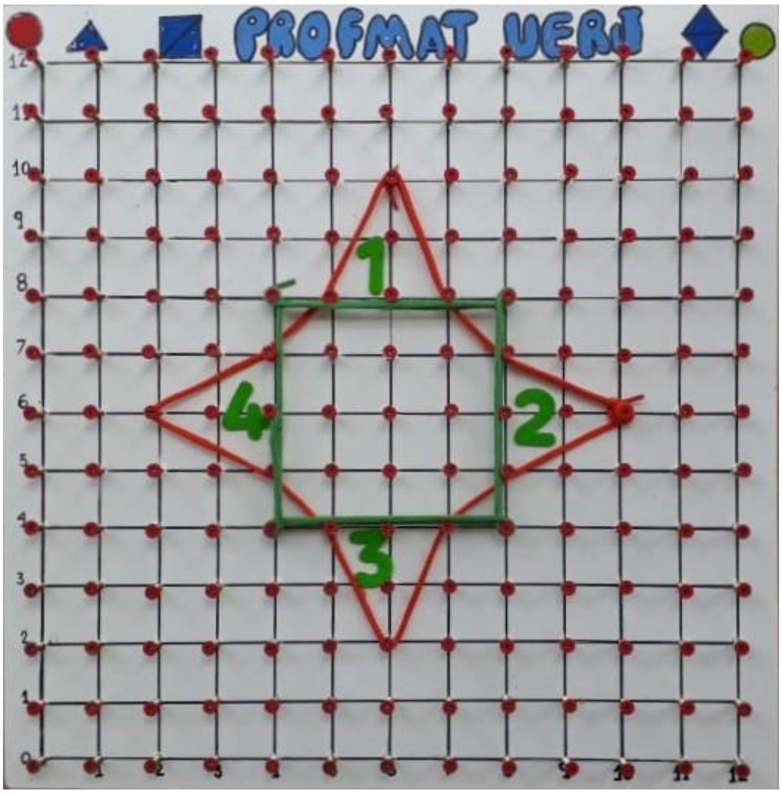
a) qual é a forma mais adequada de decompor a forma original, a fim de que restem somente poucas áreas a serem colocadas?;

b) o fragmento triangular situado nas postas da forma original, o qual pode ser interpretado como de base 2 e altura 2, poderá ser útil na decomposição?;

c) sabendo o valor da área do referido fragmento triangular, há necessidade de calcular a área dos demais fragmentos "idênticos"?

É importante perceber que as demais áreas, excetuando-se as áreas dos fragmentos triangulares supracitados, são de fácil cálculo por envolverem ou uma quadrícula, quadrado de área unitária, ou a metade dela. Um outro aspecto a se destacar na referida atividade é o seu grande potencial no que tange a permitir a representação da forma geométrica em voga e a possibilidade de explorá-la a partir de seu desmembramento com o propósito de realizar o cálculo tanto da área quanto do perímetro total. Abaixo segue uma representação do que foi exposto:

Figura 175 – Decomposição da área desejada com geoplano.

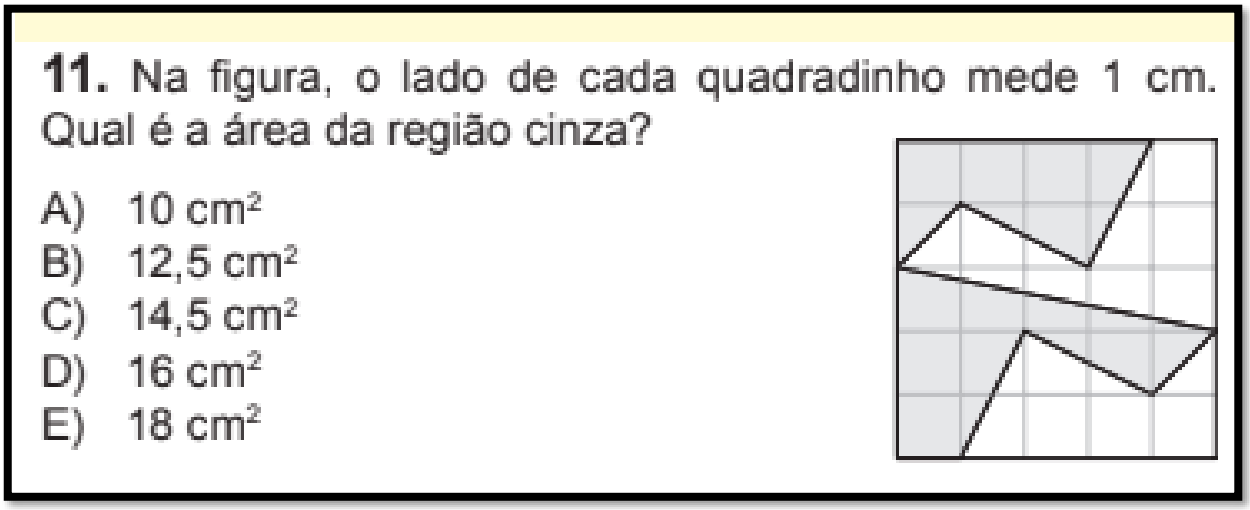


Fonte: Autor, 2021.

É interessante se destacar que com base na decomposição supracitada, os quatro triângulos congruentes e denotados pelos números 1, 2, 3 e 4 são as únicas formas que carecem de terem suas áreas calculadas, sendo que o processo é deveras simples e basta ser realizado em somente um deles.

Atividade 3

Figura 176 – Questão da 1ª fase, nível 1, da OBMEP (2011).



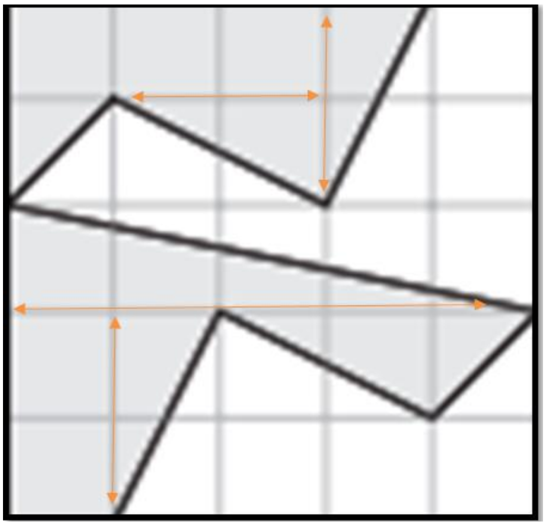
11. Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

A) 10 cm^2
B) 12,5 cm^2
C) 14,5 cm^2
D) 16 cm^2
E) 18 cm^2

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Primeiramente é importante ressaltar que a questão em voga assinala duas grandes potencialidades tanto do tabuleiro geoplano quanto da malha quadriculada: decomposição da área desejada de forma divertida e cálculo de perímetro e áreas através de uma mera contagem. Na questão que se apresenta, optou-se pela utilização da malha quadriculada para realizar a decomposição, de modo que foram traçados segmentos de coloração laranja nos fragmentos, a fim de que sejam interpretados como segmentos detentores da base dos fragmentos triangulares. Não resta dúvida de que os demais fragmentos da área desejada que não estão sendo destacados são quadrículas ou metade das mesmas. Abaixo segue a referida decomposição, a qual foi obtida a partir da figura 173, sendo que contou com pequenas intervenções do autor:

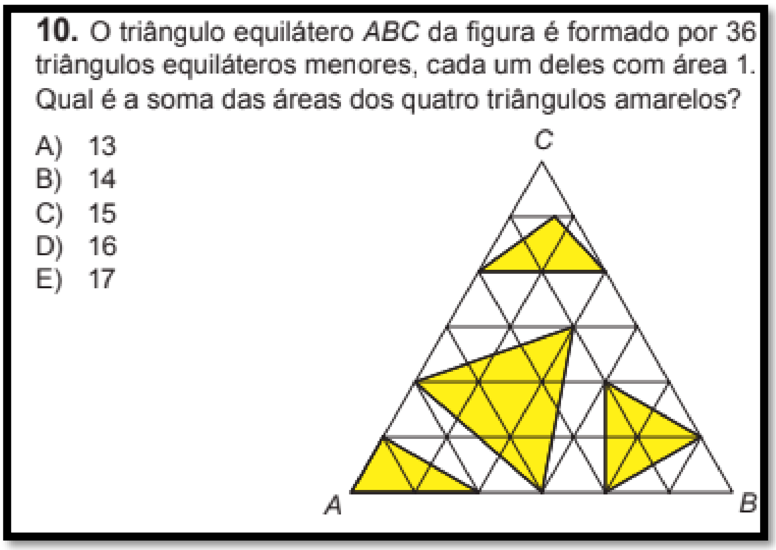
Figura 177 – Área desejada decomposta.



Fonte: Autor, 2021.

Atividade 4

Figura 178 – Questão da 1ª fase, nível 2, da OBMEP (2016).



10. O triângulo equilátero *ABC* da figura é formado por 36 triângulos equiláteros menores, cada um deles com área 1. Qual é a soma das áreas dos quatro triângulos amarelos?

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Perguntas pertinentes:

a) existiria alguma forma de calcular as áreas dos triângulos amarelos com base na área do triângulo equilátero de área 1?;
b) possibilidade de se criar paralelogramos com encaixe adequado de 2 ou 4 pequenos triângulos equiláteros pode ser útil?;
c) saber que a diagonal de um paralelogramo o divide em duas figuras congruentes é uma informação que pode ser útil?;
d) qual é a relação entre as áreas de um paralelogramo e um triângulo de mesma base e altura?

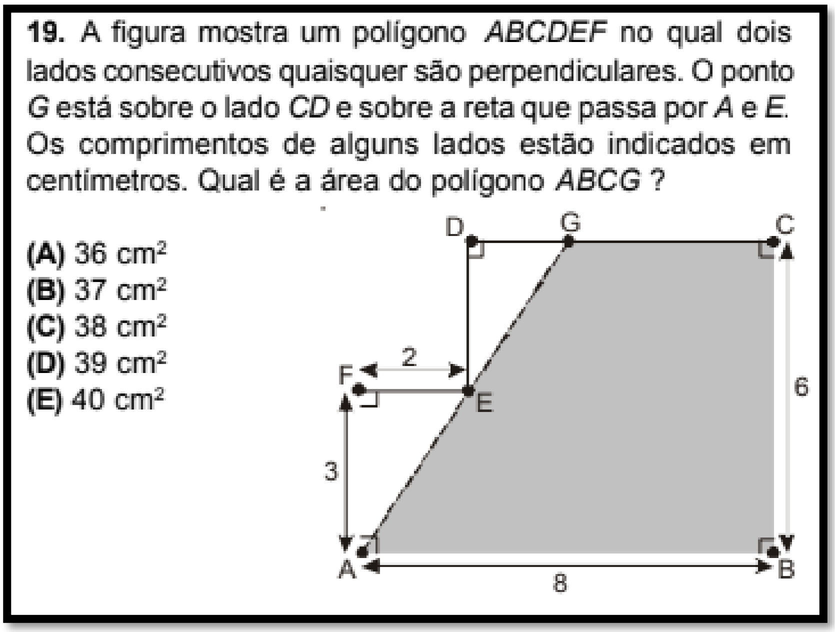
Essa questão assinala o quanto o processo de observação de padrões de simetria em paralelogramos e de equivalência entre áreas de triângulos pode ser mais importante que qualquer busca por fórmulas. No que tange à simetria gerada pela diagonal em um paralelogramo, entender que os triângulos gerados possuem a mesma área é crucial. No que concerne à segunda observação, cada um desses triângulos gerados possui a mesma área que qualquer triângulo gerado que tenha a mesma base e o terceiro vértice pertencente ao lado do paralelogramo paralelo à base do triângulo. A mediação do professor deve promover um processo de reflexão com base na interação entre os alunos, de modo que essas propriedades ganhem total protagonismo. Além disso, é fundamental enfatizar que é bastante indicada a utilização de uma malha isométrica triangular e lápis de cor em sala de aula, a fim de que a execução da atividade seja bastante lúdica e interessante.

11.2.2 Desenvolvimento de questões da OBMEP sem origem em tabuleiro Geoplano ou malhas quadriculadas

Nesse estágio da pesquisa, o tabuleiro geoplano será utilizado como instrumento facilitador tanto em um primeiro estágio no tocante à representação de uma situação-problema não expressa originalmente sob o ponto de vista de geoplanos ou malhas, e em um segundo estágio com na construção de estratégias para resolução com a busca da decomposição adequada para o êxito da empreitada. Dessa forma, serão apresentadas logo abaixo quatro questões extraídas de exames da OBMEP que possibilitarão aferir a considerável potencialidade do tabuleiro geoplano no que tange à resolução de problemas de geometria de forma lúdica.

Atividade 1

Figura 179 – Questão da 1ª fase, nível 2, da OBMEP (2005).



19. A figura mostra um polígono *ABCDEF* no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto *G* está sobre o lado *CD* e sobre a reta que passa por *A* e *E*. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é a área do polígono *ABCG* ?

(A) 36 cm²
(B) 37 cm²
(C) 38 cm²
(D) 39 cm²
(E) 40 cm²

Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

1 ª Fase: Representação.

Com base em uma mediação tendo o tabuleiro geoplano como ferramenta pedagógica, buscar-se-á uma representação da forma geométrica de interesse de modo a facilitar a estratégia de resolução como segue:

Figura 180 – Representação da atividade 1 no Geoplano.

Fonte: Autor, 2021.

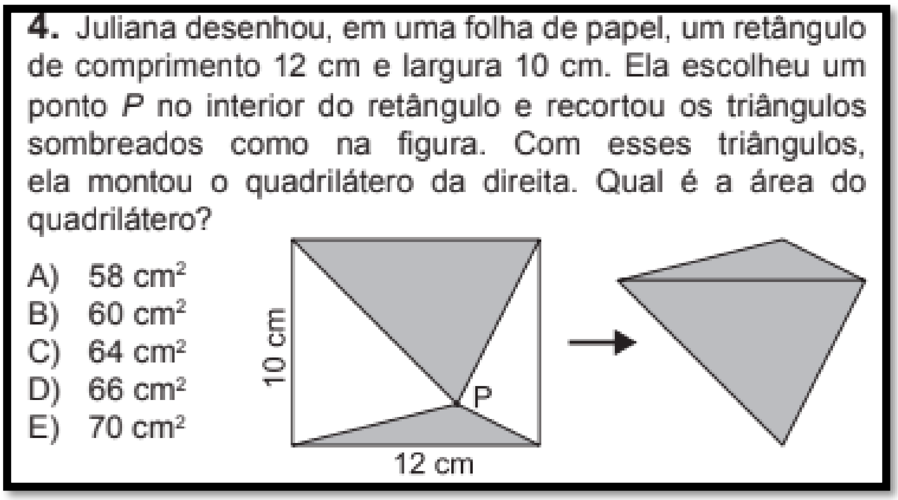
É importante perceber que a representação adequada do problema possibilitou a decomposição da região total em quatro áreas assinaladas como 1, 2,3 e 4.

2ª fase: **Construção da estratégia de resolução**

No caso da atividade em curso, a representação foi tão eficaz que gerou extrema facilidade para os próximos passos na busca da solução, tendo em vista que a própria elaboração do modelo em questão faz com que o comprimento do lado procurado surja naturalmente. Sendo assim, o valor da representação inerente ao segmento $\overline{CG}$ no geoplano resulte em 4 cm. Por conseguinte, a área do trapézio retângulo ABCG, que é resultado da composição dos polígonos relacionados aos dígitos 3 e 4, possui o valor de $36\ cm^2$**.** A decomposição realizada transformou a forma geométrica original em três triângulos retângulos e um retângulo muito familiares e com potenciais bases e alturas facilmente determináveis. Convém se ressaltar que os triângulos atrelados aos números 1 e 2 são congruentes entre si e que o triângulo associado ao número 3 é uma ampliação de ambos com uma razão de semelhança na ordem de 2, ou seja, as dimensões dos triângulos retângulos menores foram duplicadas para que surgisse o triângulo maior. Ademais, é importante fazer alusão ao fato de que os ângulos que se correspondem no processo de ampliação são de valores iguais.

Atividade 2

Figura 181 – Questão da 1ª fase, nível 2, da OBMEP (2013).


4. Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto *P* no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?

A) 58 cm²
B) 60 cm²
C) 64 cm²
D) 66 cm²
E) 70 cm²

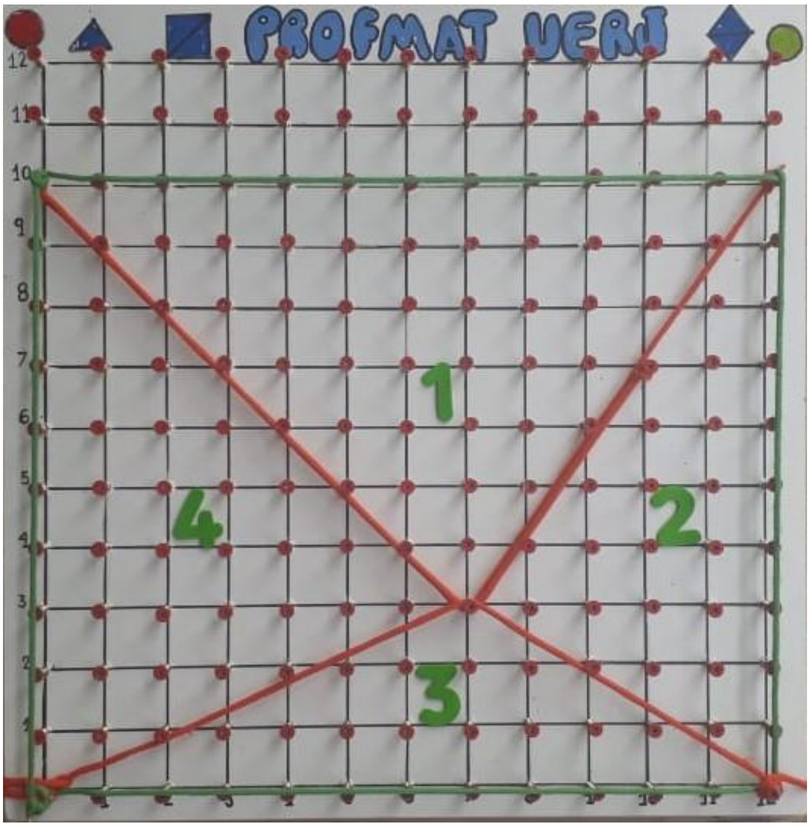
Fonte: site www.obmep.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

A seguir, surge a possibilidade de o mediador em sala de aula fazer com que os seus alunos se deparem com uma questão que não tenha uma única estratégia de representação como será possível perceber .

1ª fase: Representação.

Felizmente, essa é uma questão capaz de possibilitar uma riqueza considerável na quantidade de representações, uma vez que a arbítrio propiciado pelo problema para a escolha do ponto "P" no interior do retângulo dará aos alunos uma liberdade crucial na construção de uma estratégia autoral de resolução. Por essa razão, cada grupo de alunos da turma poderá fazer a sua escolha à vontade no interior do retângulo delimitado dentro do geoplano. O papel do mediador seria indagar a turma se as diferentes escolhas para a representação do ponto "P" afetariam o resultado. Após alguns debates os alunos perceberiam que independentemente da escolha do ponto "P", o valor inerente à área resultante da composição de dois triângulos não seria afetada. Imagina-se que chegariam a essa conclusão com base no cálculo da área. Nesse momento o professor poderia indagar a turma sobre o motivo de o valor da área não ser afetado. A turma seria estimulada a escolher como base dos dois triângulos o segmento de valor 12 cm, tendo em vista que é esse segmento para o encaixe no processo de composição. Logo a seguir, o debate teria como foco a análise da altura. Nesse momento, os alunos seriam levados a refletir que a mesma se mantém com o valor fixo de 10 cm em qualquer representação. Abaixo segue uma possível representação para o enunciado no tabuleiro geoplano:

Figura 182 – Representação da atividade 2 no geoplano.



Fonte: Autor, 2021.

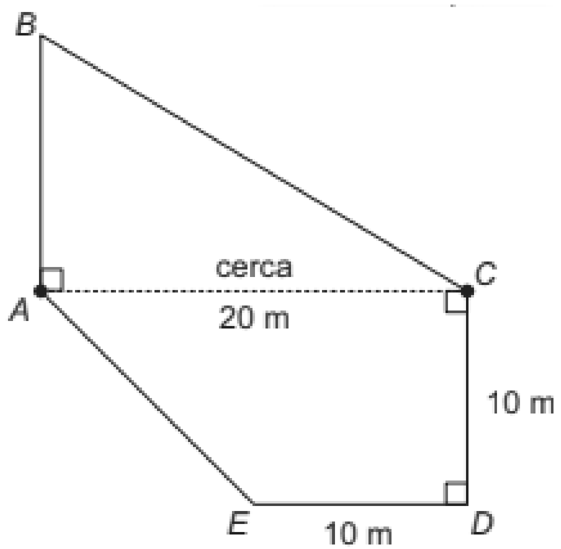
2ª fase: Construção da estratégia de resolução.

Essa é uma outra atividade que mostra de forma inequívoca que uma representação cuidadosamente realizada facilita de forma considerável os próximos passos na busca da resolução. A representação do geoplano do evento narrado no enunciado, possibilitou a delimitação de quatro áreas definidas como 1, 2, 3 e 4, sendo que somente interessa para a resolução as regiões 1 e 3. Faz-se mister aludir ao fato que tais regiões são triângulos que possuem potenciais bases e alturas de fáceis de encontrar em decorrência da ferramenta pedagógica utilizada. Ao final da mediação descrita na 1ª fase, é natural que os alunos cheguem ao valor de 60 cm^2.

Atividade 3

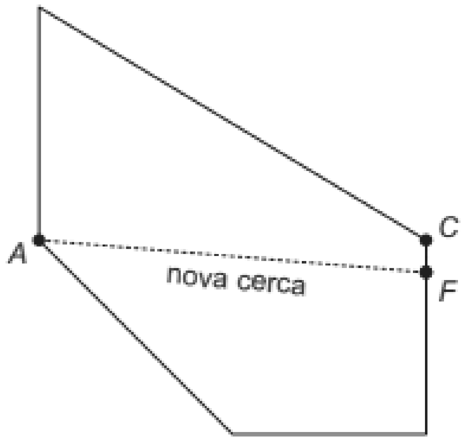
A próxima atividade foi extraída com pequenas adaptações da 2ª fase do nível 2 da edição da OBMEP de 2008.

(1) A figura ao lado representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento *AC*. A parte triangular *ABC* tem área igual a 120 m^2.



a) Qual é a área total do terreno?

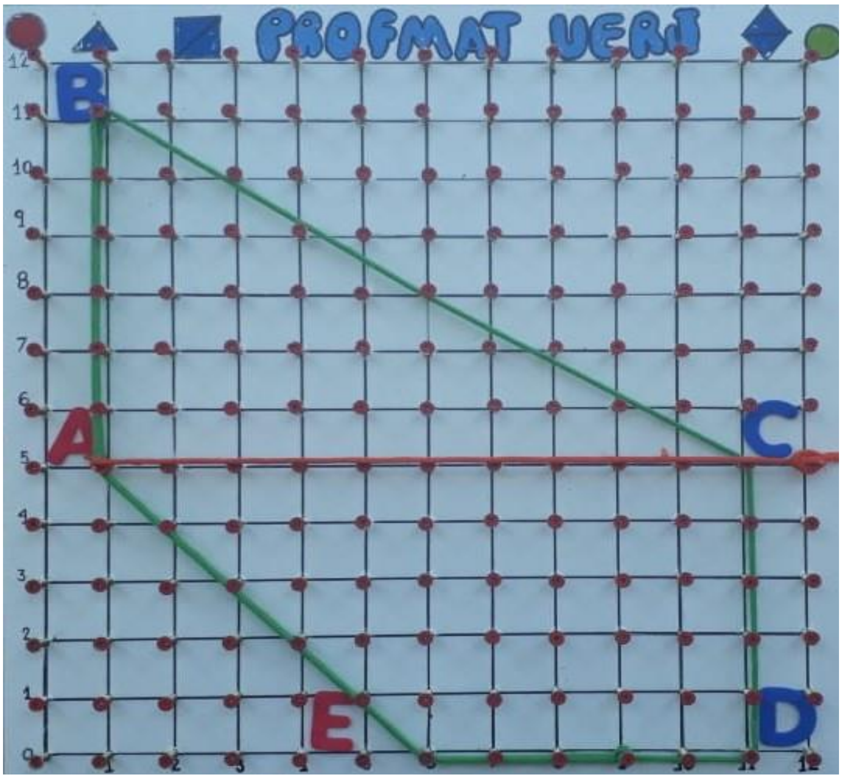
(b) Sinhá Vitória quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento *AF* na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância *CF*?



1ª Fase: Representação.

Esta atividade demandará uma abordagem um pouco diferente no que tange à forma de representar as formas geométricas no tabuleiro geoplano, uma vez que por se tratar de uma questão discursiva da OBMEP, composta por mais de um item, exigindo uma nova representação ao longo da estratégia de solução. Ademais, convém ressaltar que na representação a ser implementada nesta atividade, cada quadrícula deve ser interpretada como detentora de lados equivalentes à medida de duas unidades. Destarte, nessa fase será feita a representação introdutória inerente ao primeiro item da questão.

Figura 183 – Representação inicial no Geoplano da atividade 3.

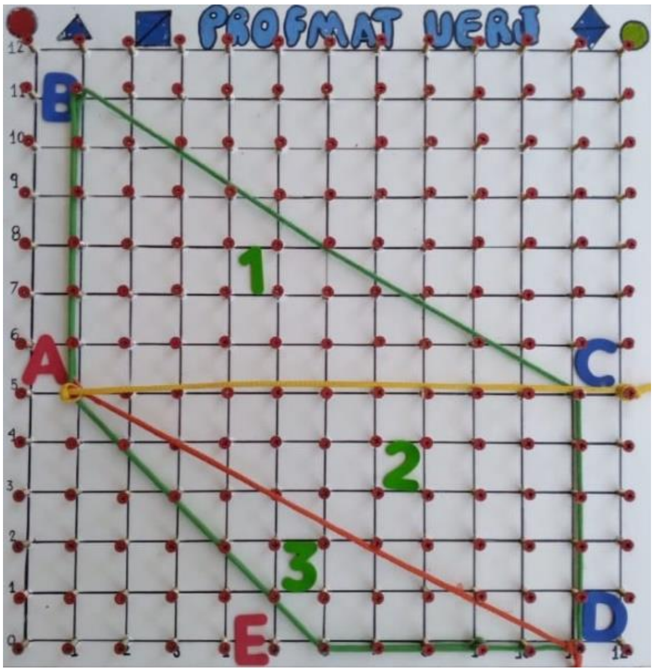


Fonte: Autor, 2021.

2ª Fase : Estratégia de resolução:

A seguir será apresentada uma segunda imagem de extrema relevância na construção da reposta e que, logo adiante, merecerá considerações pertinentes.

Figura 184 – 1ª Divisão da forma geométrica.

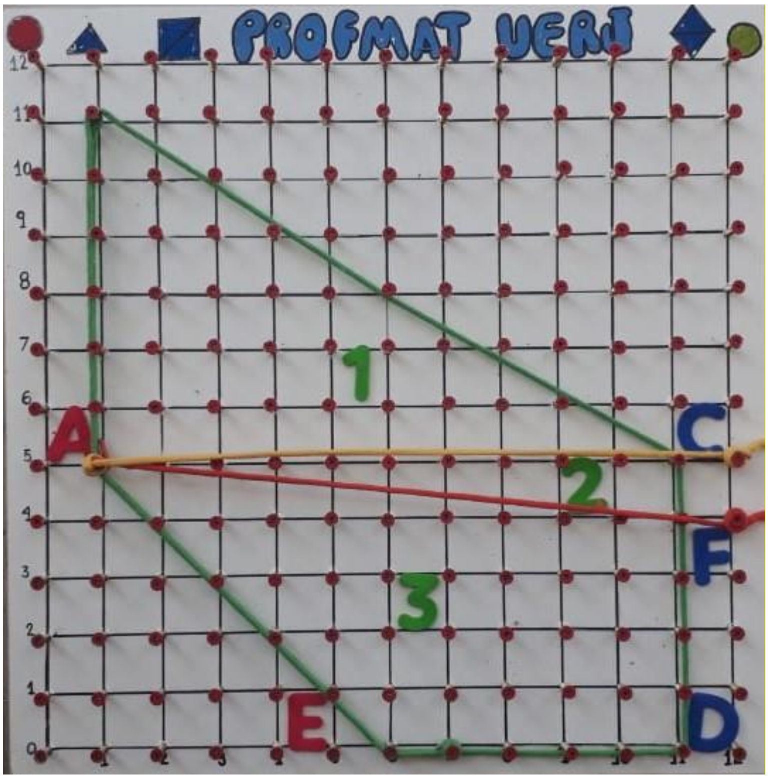


Fonte: Autor, 2021.

O próximo passo a ser seguido após a abordagem introdutória é buscar uma primeira decomposição da forma original com o fito de transformar todos os cálculos de áreas em atividade extremamente elementares. É óbvio que a mediação deve, com base em indagações pontuais, levar os alunos a construírem uma divisão da forma original com base em um processo de reflexão. A figura 184 evidencia uma forma de dividir a forma original em triângulos que cujo cálculo das áreas é muito beneficiado pela ferramenta pedagógica utilizada. Considerando que o segmento expresso pela cor amarela significa a linha divisora da área, deve-se considerar que a área 1 representa uma área, enquanto que as regiões 2 e 3, consideradas conjuntamente, representam a outra área. Na representação lastreada pela figura 184, a área referente à região 1 apresenta um valor inferior ao valor da área definida pelas áreas 2 e 3 consideradas conjuntamente. Com base nessa exposição, fica evidente que a área inerente à região assinalada pelo número 1 é no valor de 120m², considerando-se a mesma um triângulo cuja base amarela possui medida de 20m e altura verde medindo 12m, enquanto a região restante possui área conjunta no valor de 150m², podendo ser interpretada como um trapézio retângulo de vértices ACDE com base maior de medida 20m, base menor de medida 10m e altura valendo 10m. Convém se reiterar que cada quadrícula deverá ser interpretada como detentora de lados medindo 2 metros.

Observe a figura expressa abaixo:

Figura 185 – 2ª divisão da área inerente à atividade 3.



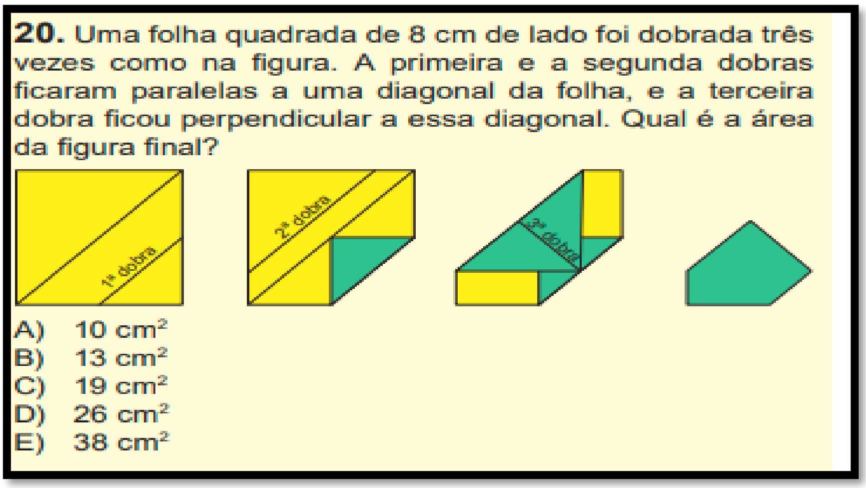
Fonte: Autor, 2021.

Com base na exposição presente na figura 185, a área da região identificada pelos números “1” e “2” em composição será de 140m², enquanto a área restante conjuntamente aponta para o valor 130 m². É fundamental considerar que a linha em tom laranja serve de fronteira entre os dois terrenos. O fato que emerge dessas exposições é que $1 < \overline{CF} < 2$. Consequentemente um valor interessante para o segmento $\overline{CF}$ seria no valor inerente ao ponto da quadrícula inerente a 1,5 cm. Esse seria o local certo para se alocar o ponto F, sendo que, por limitações de escala no tabuleiro geoplano, não será possível apresentar tal construção. Sendo que não resta dúvida a considerável potencialidade dessa ferramenta na construção da solução.

A próxima atividade mostrará que a janela de oportunidades para que uma questão de geometria plana proposta em qualquer exame da OBMEP seja trabalhada no ambiente de sala de aula com base no uso do tabuleiro geoplano não tem limite. É possível se perceber que algumas questões são mais fáceis de serem representadas nessa ferramenta, enquanto outras demandarão um planejamento mais complexo. Em algumas questões serão necessários ajustes no tocante à escala a ser utilizada. Na questão que segue apresentada logo abaixo, surge a necessidade de se converter um problema de dobraduras para o contexto das quadrículas.

Atividade 4

Figura 186 – Questão da 1ª Fase, Nível 1, da OBMEP (2019).



20. Uma folha quadrada de 8 cm de lado foi dobrada três vezes como na figura. A primeira e a segunda dobras ficaram paralelas a uma diagonal da folha, e a terceira dobra ficou perpendicular a essa diagonal. Qual é a área da figura final?

A) 10 cm^2
B) 13 cm^2
C) 19 cm^2
D) 26 cm^2
E) 38 cm^2

Fonte: Autor, 2021.

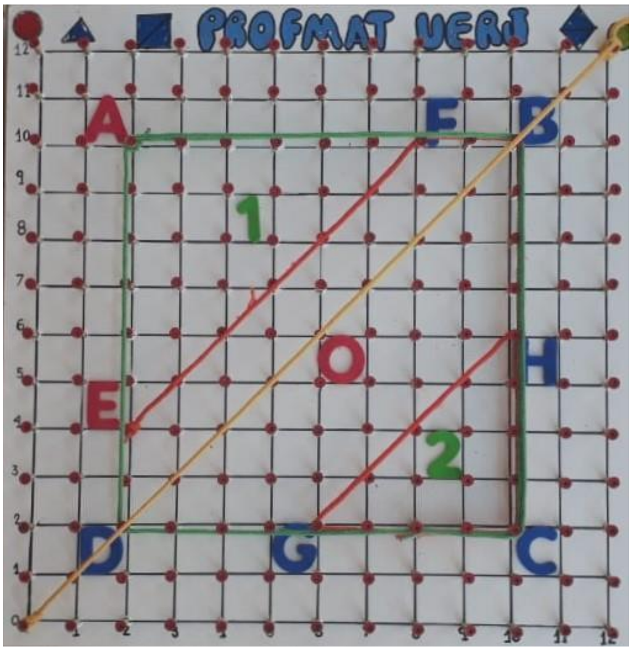
Nessa próxima questão, para que seja possível realizar uma representação adequada do problema por meio do geoplano, torna-se fundamental se refletir sobre a simetria presente nas dobraduras, assunto este cuidadosamente trabalhado na unidade 12 do presente trabalho. É primordial considerar que ao se fazer dobraduras, o segmento gerado por esse evento funciona como um eixo de simetria, e as duas regiões simétricas geradas se sobrepõem perfeitamente. Ademais, faz-se mister aludir ao fato de as duas dobraduras iniciais ocorreram ao longo de uma das diagonais do quadrado original. Tendo em vista que a diagonal em voga se encontra dividida em oito partes iguais, torna-se mais fácil a empreitada de localizar o parafuso contido na mesma que está contido no eixo de simetria definido pela dobradura. Um outro fato de extrema relevância é que as duas dobraduras iniciais definem eixos de simetria paralelos a uma diagonal do quadrado inicial. Considerando a riqueza de detalhes imprescindíveis para a representação no geoplano do quadrado original após a intervenção dos segmentos alusivos às dobraduras, sugere-se que as perguntas abaixo sejam propiciadas pela mediação:

Perguntas pertinentes:

a) qual é a distância do ponto “C” ao ponto “O”?;
b) em que ponto do segmento $\overline{CO}$ será feita a dobradura $\overline{GH}$ (primeira dobradura)?;
c) qual é a distância do ponto “A” à primeira dobradura?;
d) em que ponto deste segmento será feita a segunda dobradura ($\overline{EF}$)?

Após as respostas às perguntas em voga, temos a ocasião em que a mediação pode conduzir os alunos ao entendimento de que a dobradura ocorre no ponto médio do segmento envolvido na dobradura. Primeiramente, em virtude de uma simples contagem considerando a diagonal da quadrícula como dotada do valor $\sqrt{2}$, tem-se que $\overline{AO} = 4\sqrt{2}$. Consequentemente a primeira dobradura ocorrerá a uma equidistância de $2\sqrt{2}$ dos pontos "C" e "O". Consequentemente a distância do ponto "A" à primeira dobradura será de $4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Por consequência, a segunda dobradura ocorrerá a uma distância de $3\sqrt{2}$ do ponto "A". É fundamental pontuar que o valor $\sqrt{2}$ poderia ser substituído por alguma variável sem qualquer perda. Ademais, convém aludir ao fato de que ao final dessa primeira construção surgirão duas regiões bastante importantes, as quais recebem as designações com base nos números "1" e "2". Abaixo segue a representação no geoplano considerando as respostas dadas aos questionamentos supracitados:

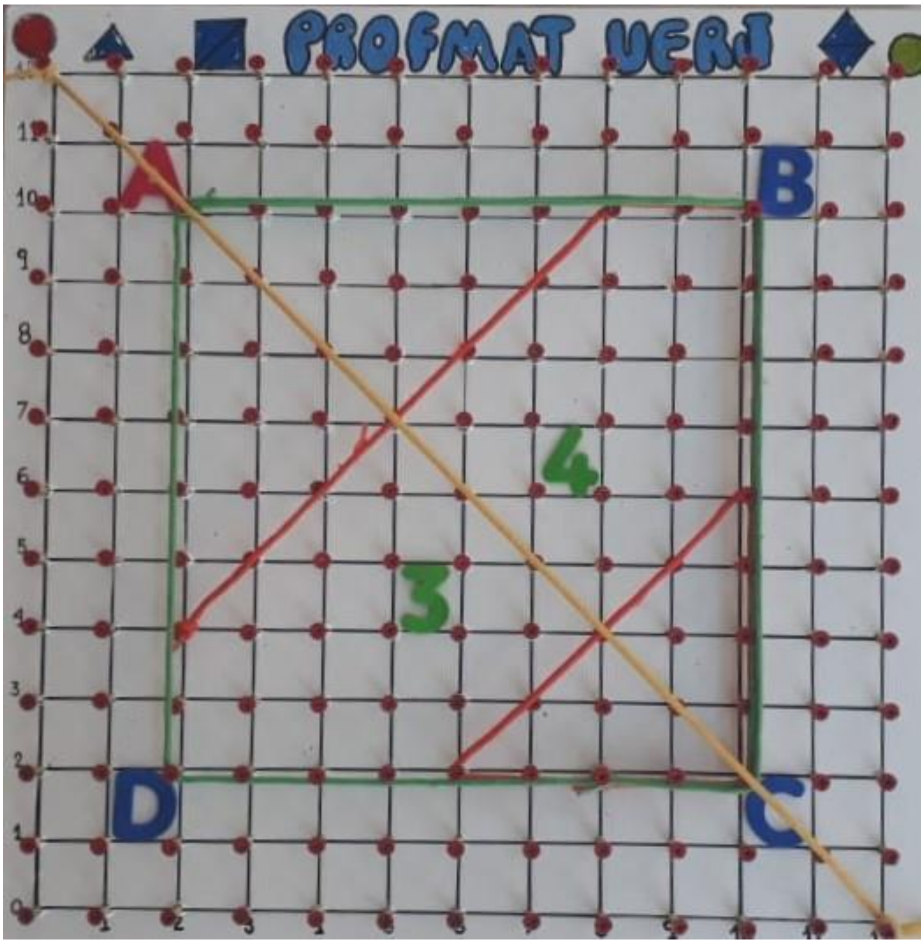
Figura 187 – 1ª representação da atividade 4.



Fonte: Autor, 2021.

A próxima fase dará ênfase ao cálculo da área dos triângulos retângulos "1" e "2". É primordial o fato de que o tabuleiro geoplano torna tal ação algo extremamente simples, pois resultará é uma situação elementar de contagem de quadrículas completas ou metades delas. Consequentemente, a área da figura "1" será de 15 quadrículas mais 6 metades de quadrícula, logo 18 quadrículas, enquanto a área da figura "2" será de 6 quadrículas mais 4 metades de quadrícula, logo 8 quadrículas. As regiões "1" e "2", conjuntamente definem uma área de 26 quadrículas. A consequência natural é que a região definida pelos vértices "D", "E", "F", "B", "H" e "G" será de 64 quadrículas – 26 quadrículas = 38 quadrículas. Após isso, será construída a diagonal $\overline{AC}$ que funcionará como eixo de simetria ou espelho da região em voga, definindo as regiões simétricas “3” e “4” abaixo. A área de região de interesse para a questão, região ‘4”, será de 19 quadrículas ou 19 cm², conforme o descrito abaixo:

Figura 188 – 2ª representação da atividade 4.



Fonte: Autor, 2021.

12 O PODER FACILITADOR DA EXPERIÊNCIA PROJETIVA

As experiências de projeções de objetos em anteparos caracterizam, desde as fases iniciais do desenvolvimento humano, ora brincadeiras bastante divertidas ora produções artísticas fascinantes. Não há como fugir desse tipo de evento. Quando se é criança, uma brincadeira fascinante é projetar em uma parede, utilizando uma lanterna qualquer como fonte de luz, formas feitas com as mãos, por exemplo. Quando se comparece a um cinema para assistir a um filme muito esperado, as projeções estão lá para gerar encanto. Sem esquecer que o próprio processo de formação das imagens no globo ocular humano é uma experiência projetiva primordial para uma vida plena. Abaixo seguem imagens que lastreiam tais informações:

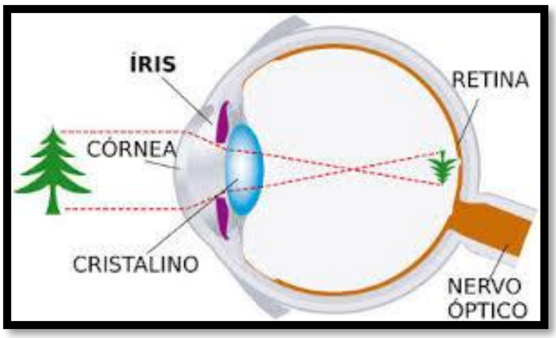
Figura 189 – Brincadeira de projeções.

Fonte: site novaescola.org.br. Acesso em janeiro de 2021.

Figura 190 – Projeções nos cinemas.

Fonte: site paranashop.com.br. Acesso em janeiro de 2021.

Figura 191 – Formação da imagem no globo ocular humano.



Fonte: site mundoeducacao.uol.com.br. Acesso em janeiro de 2021.

É indiscutível que as experiências projetivas podem ser aliados de peso no processo de ensino-aprendizagem das transformações geométricas. Falar em homotetia ou semelhança e de reflexão deslizante de forma essencialmente teórica pode não ser tão palatável e agradável para o aluno comparado com a possibilidade de se trabalhar projeções de formas geométricas em anteparos ou por intermédio da utilização de câmaras escuras artesanais, até mesmo no ambiente fora da sala de aula. Defendendo uma utilização das projeções, muitas vezes em locais abertos e alheios às quatro paredes das salas de aula, o trabalho acadêmico Gonçalves (2013) apresenta uma proposta inovadora na abordagem da geometria:

> Desta forma, encontrar possibilidades para, através de nossa prática docente, subverter a hegemonia da Geometria Euclidiana – sem, contudo, negar sua importância e validade dentro de um campo de aplicações – tem sido um de nossos maiores desafios enquanto educadores matemáticos. Portanto, utilizar o espaço aberto por este trabalho para tratar de uma geometria não-euclidiana é, além de pertinente pelas razões já mencionadas, oportuno e conveniente ao propósito ideológico que defendemos (GONÇALVES, 2013, p. 23)

Faz-se mister ressaltar que o objetivo primordial dessa fase da pesquisa envolverá duas palavras: simplicidade e funcionalidade. No tocante à simplicidade, o projeto em voga preconizará a utilização de itens presentes no cotidiano das pessoas de uma forma geral, independentemente de residirem em área urbana ou rural, a fim de que a experiência seja plenamente exequível. No que concerne à funcionalidade, serão apresentadas possibilidades de atividades interessantes não só visualmente, mas também passíveis de gerar uma reflexão sobre o que se esperar das imagens projetadas, a partir de uma mediação pontual e desafiadora, além de um interação bastante intensa e cooperativa entre os alunos.

12.1 **Estrutura de projeção**

Em todos os instantes desta pesquisa, ganhou relevo a necessidade imperiosa de conjugar no mesmo processo de construção do saber geométrico estratégias motivadoras e ricas conceitualmente com um baixíssimo custo para implementação. No que concerne à estratégia a ser implementada para possibilitar uma discussão bastante interessante em sala de aula, ou até mesmo fora dela, a realização de experimentos oriundos da Ótica, como a projeção de objetos em anteparos, parece ser uma opção bastante instigante. Tal experiência possibilita tanto a construção de um ambiente de aprendizagem mais interativo e prazeroso, quanto a condução do aluno a situações práticas e familiares, que à primeira vista podem parecer desprovidas de uma grande riqueza conceitual por fazerem parte da vida dos mesmos frequentemente, mas que na verdade são envoltas por muitos conceitos geométricos de grande relevância. Abaixo segue uma ilustração que apresenta uma brincadeira infantil fantástica inerente à projeção de formas construídas com as mãos em paredes, a quais consegue de forma lúdica fazer referência a um animal.

Figura 192 – Projeção em anteparos com forma de animal.

Fonte: site educação.saobernardo.sp.gov.br. Acesso em março de 2021.

Até mesmo a preparação de todo o aparato necessário para realizar as projeções pode ser uma possibilidade ímpar para que se promova um processo colaborativo capaz de dar uma quebra no modelo tradicional rígido para o ensino de geometria nas escolas, além de ensejar um potencial empoderamento do aluno no processo de ensino-aprendizagem. Para tal empreitada, a sugestão é que se tenha os itens abaixo mencionados:

a) um aparelho celular;
b) um suporte de celular utilizado mormente para a realização das “selfies”;
c) formas geométricas de plástico, construídas com itens descartados, para serem projetadas em anteparos;
d) uma vareta plástica utilizada para fixação de bolas plásticas de aniversários;
e) uma base para servir de suporte para as varetas plásticas;
f) um quadro branco para receber as projeções;
g) pincéis coloridos para quadro branco;
h) uma fita métrica;

i) Um fita adesiva conhecida como "durex" ou qualquer outro artefato similar para a fixação da fita métrica à superfície basal.

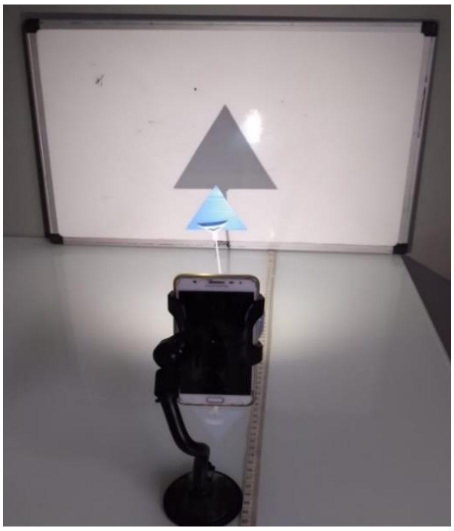
Estes itens supramencionados seguem expostos nas ilustrações abaixo:

Figura 193 – Materiais a serem utilizados nas projeções.

Fonte: Autor, 2021.

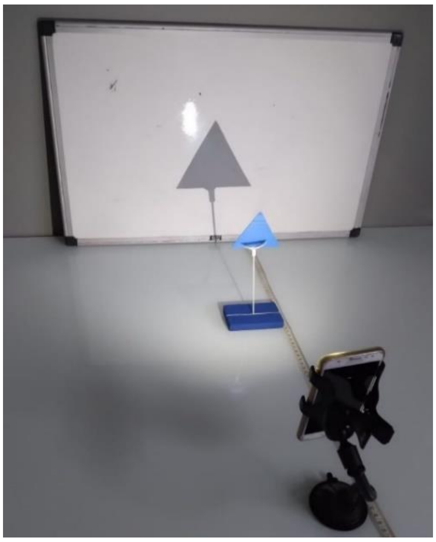
O propósito inicial dessa fase da pesquisa é criar um cenário bastante interessante para o desenvolvimento das atividades posteriores no tocante ao estudo do que acontece com as projeções de uma forma geométrica em um anteparo à medida que a referida forma se aproxima ou se distancia de uma fonte de luz fixa. Abaixo seguem declinadas duas imagens que ilustram através de tomadas distintas e de forma inequívoca a estratégia experimental que será trabalhada:

Figura 194 – 1ª tomada da projeção.



Fonte: Autor, 2021.

Figura 195 – 2ª tomada da projeção.



Fonte: Autor, 2021.

12.2 **Atividades projetivas**

A partir desse instante, serão apresentadas atividades com base de projeção de figuras em um quadro branco utilizando como fonte luminosa a lanterna de um celular preso a uma base fixa. Inicialmente será declinada a distância imutável do celular ao anteparo, que será denotada por “D”, sendo que a distância da figura ao quadro, a qual será denotada por “d”, irá sendo alterada para subsidiar a realização dos questionamentos trazidos à baila pelas atividades. Em todas as atividades a distância “D” será de 65 cm e as distâncias d_1, d_2 e d_3, que fazem alusão às posições ocupadas pelas figuras na 1ª, 2ª e 3ª situações serão, respectivamente, 20 cm, 30 cm e 45 cm.

Atividade 1

Preliminarmente convém aludir que a figura a ser projetada é um triângulo equilátero de cor azul e lados medindo 8 cm. Responda aos itens a seguir:

a) quais os valores dos lados das projeções l_1, l_2 e l_3, em decorrência das posições d_1, d_2 e d_3 ?;

b) quais os valores das razões $q_1 = \frac{D}{D-d_1}$, $q_2 = \frac{D}{D-d_2}$ e $q_3 = \frac{D}{D-d_3}$ e suas relações respectivamente com as razões: $\frac{l_1}{8\text{cm}}, \frac{l_2}{8cm}$ e $\frac{l_3}{8cm}$?;

c) quais os valores das áreas das projeções com base no triângulo projetado?.

Resolução:

É interessante que os alunos, ao final de cada projeção, marquem no quadro branco os três vértices de cada projeção, sendo uma cor para cada sombra, e depois completem toda a forma geométrica com o uso de uma régua e de um pincel especial. A seguir realize as medições pertinentes. Faz-se mister aludir ao fato de que durante a apresentação das resoluções das questões a seguir, a opção será declinar os valores obtidos nas projeções referentes às posições d_1 e d_2 do objeto projetado, sendo que em relação à posição d_3, a resolução seguirá lastreada pela ilustração produzida.

No tocante ao item “a” da 1ª questão os resultados obtidos foram: $l_{1\approx}11{,}7\ cm$, $l_2 \approx 15\ cm$ e $l_{3\approx}26\ cm$. É crucial ressaltar que em decorrência das limitações que pautam o experimento há sempre erros naturais inerentes, razão pela qual se optou pelo símbolo de aproximação, "≈", no lugar do símbolo de igualdade, "=". No tocante ao item "b" da questão, tem-se os seguintes valores para as razões:

a) $q_1 = \frac{65cm}{65cm-20cm} = \frac{65cm}{45cm}$, logo $q_1 \approx 1,44$;

b) $q_2 = \frac{65cm}{65cm-30cm} = \frac{65cm}{35cm}$, logo $q_2 \approx 1,86$;

c) $q_3 = \frac{65cm}{65cm-45cm} = \frac{65cm}{20cm}$, logo $q_3 = 3,25$.

Já no que concerne a razão entre os lados, tem-se o seguinte:

a) $\frac{11,7cm}{8\ cm} \approx 1,44$;

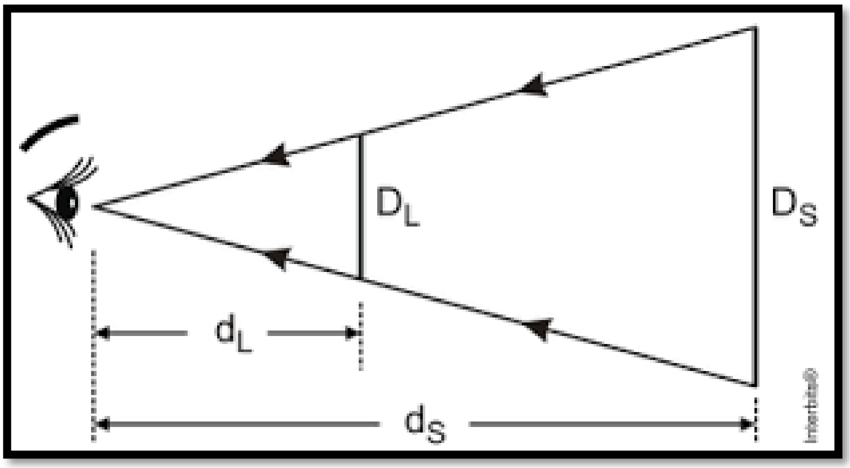
b) $\frac{15cm}{8\ cm} \approx 1,87$;

c) $\frac{26cm}{8cm} \approx 3,25$.

Considerando que não há uma retratação perfeita do fenômeno Ótico em voga, as pequenas inperfeições nos números são naturais. A inferência imediata que pode ser feita é que as razões respectivamente comparadas são "iguais", podendo ser interpretadas como o grau de ampliação da figura plana no anteparo.

A figura abaixo ilustra com clareza o que acontece com cada um dos lados do polígono projetado:

Figura 196 – Projeção de um segmento em um anteparo.

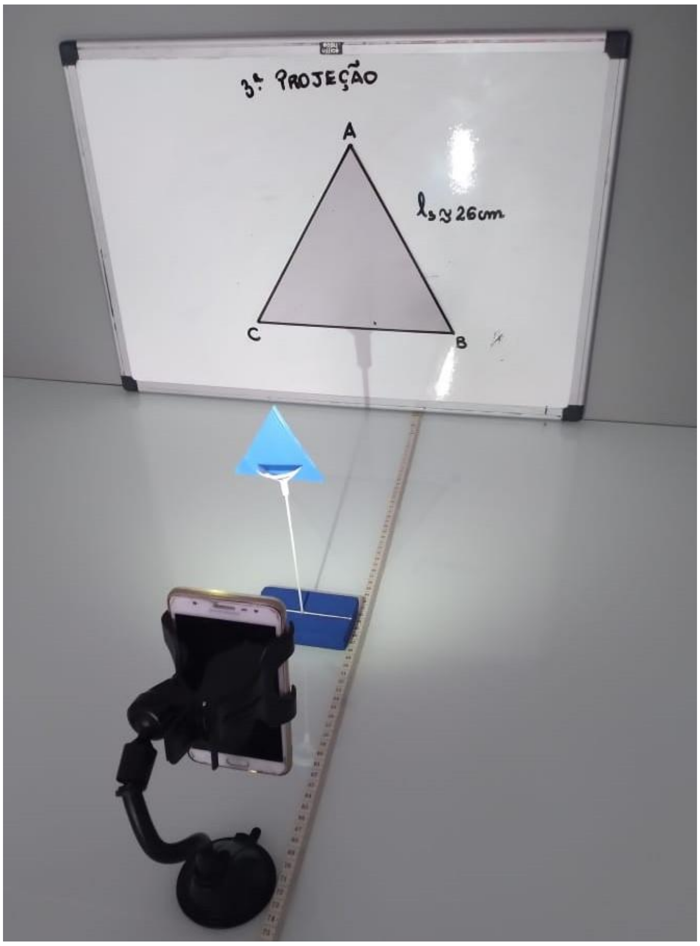


Fonte: site educação.globo.com. Acesso em março de 2021.

Caberá à mediação levar o aluno a refletir sobre o fato de que não só a projeção no anteparo é uma ampliação do segmento original supracitado, mas também que o triângulo maior exposto é uma ampliação do triângulo menor, de modo que os lados da projeção sofrem a multiplicação por uma mesma constante em relação à figura-base, proporcionalidade, e os ângulos da figura projetada seguem preservados na projeção. Destarte, por conseguinte: $\frac{D_S}{D_L} = \frac{d_S}{d_L}$;

Abaixo será apresentada a última projeção da atividade em curso com as intervenções pedagógicas pertinentes na lousa.

Figura 197 – 3ª projeção do triângulo-base equilátero.



Fonte: Autor, 2021.

Apesar de as questões apresentarem indagações interessantes para pautar a reflexão, é primordial que ao longo da mediação os seguintes questionamentos sejam liberados para enriquecer as buscas por descobertas em voga nas turmas, os quais seguem delineados abaixo:

a) o que acontece com a projeção no quadro à medida que a figura a ser projetada se aproxima ou se afasta da fonte de luz ?;

b) há uma proporcionalidade existente entre os lados da figura a ser projetada com os lados correspondentes das imagens projetadas?;

c) caso haja alguma proporcionalidade, qual a sua relação com a razão estabelecida entre a distância da fonte de luz ao anteparo e a distância da mesma fonte à figura a ser projetada?

d) os ângulos definidos na figura base projetada são preservados na projeção?

Atividade 2

Seja um triângulo retângulo isósceles de cor cinza de modo que os seus catetos valham 8,5 cm e a sua hipotenusa valha $8{,}5\sqrt{2}cm$, que na construção artesanal foi gerada com valor aproximado de 12,2 cm, considerando a pequena imperfeição da figura confeccionada. Denotando por " b" os catetos e por "h" a hipotenusa, responda aos itens que seguem:

a) quais os valores de b_1, b_2 e b_3, que aludem aos valores dos catetos nas projeções quando a figura a ser projetada ocupa respectivamente as posições d_1, d_2 e d_3? E quais os valores de h_1, h_2 e h_3 ?;

b) quais os valores das razões $\frac{b_1}{8{,}5cm}$, $\frac{b_2}{8{,}5cm}$ e $\frac{b_3}{8{,}5cm}$?;

c) qual a relação entre as razões supracitadas e os valores q_1 , q_2 e q_3, tomados do item "b" da atividade 1?;

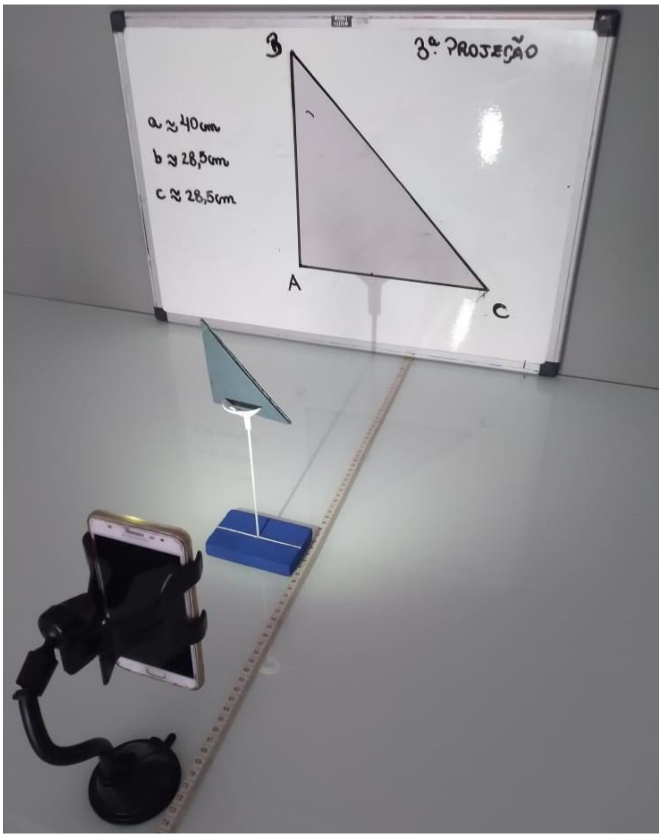
d) qual a relação entre as razões $\frac{h_1}{12{,}2cm}$, $\frac{h_2}{12{,}2cm}$ e $\frac{h_3}{12{,}2cm}$ e , respectivamente, q_1 , q_2 e q_3?

Resolução:

A projeção realizada permitiu encontrar os seguintes pares ordenados denotados por $(b_i;\ h_i)$, em que i pertence ao conjunto {1, 2, 3}, de modo que a primeira coordenada faz alusão aos catetos de interesse e a segunda faz referência à hipotenusa associada nos instantes em que a figura a ser projetada ocupa respectivamente as posições d_1, d_2 e d_3, quais sejam: $(12{,}5cm; 18cm)$, $(16cm; 23{,}3cm)$ e $(28{,}5cm; 40{,}5cm)$. Faz-se mister ressaltar que as medidas contemplam as aproximações tomadas. No que tange às razões a serem tomadas em relação ao cateto básico projetado, tem-se o seguinte seguindo de forma crescente d_1, d_2 e d_3 : $\frac{12{,}5cm}{8{,}5cm} \approx 1{,}47$, $\frac{16cm}{8{,}5cm} \approx 1{,}88$ e $\frac{28{,}5cm}{8{,}5cm} \approx 3{,}35$. No que concerne ao mesmo entendimento para as hipotenusas projetadas, tem-se o seguinte: $\frac{18cm}{12{,}2cm} \approx 1{,}47$, $\frac{23{,}3cm}{12{,}2cm} \approx 1{,}90$ e $\frac{40{,}5cm}{12{,}2cm} \approx 3{,}32$.

Um aspecto importante a se considerar é que em função do caráter bastante rústico dos artefatos utilizados, a precisão não será algo fácil de se atingir. Pequenas inclinações do celular, da figura a ser projetada e do anteparo podem interferir bastante no resultado. Ademais, o fato de a fita métrica não estar perfeitamente esticada e posicionada pode gerar um erro considerável, principalmente quando o tamanho da sombra for relativamente grande. Esta situação propicia um momento ímpar para de discutir em aula sobre quais medidas a tomar para se melhorar a qualidade dos dados obtidos. Caso isso seja feito, tenderá a haver razões cada vez mais próximas de q_1, q_2 e q_3. Com base no que se observa acima, o valor 3,35, obtido para a razão atinente ao cateto na posição d_3, é um erro que destoa. Convém ressaltar que o erro na projeção da hipotenusa foi aproximadamente na ordem de 0,7cm para mais. Caso se optasse por de pronto arredondar tanto 3,25 quanto 3,35, teríamos o valor 3, sendo que se perderia a oportunidade para o debate sobre as potenciais fragilidades do experimento. Todas as outras divisões apresentam dados bastante interessantes e satisfatórios para a reflexão. A conclusão que pode ser discutida em sala de aula é que as projeções podem ser interpretadas como ampliações na proporcionalidade eivada das razões obtidas para cada posição. Abaixo segue uma imagem que faz alusão á última projeção feita:

Figura 198 – 3ª projeção da atividade 2.



Fonte: Autor, 2021.

Atividade 3

Seja um quadrado de cor amarela e de lado 9 cm que será projetado em um anteparo de cor branca por intermédio de uma estrutura de projeção, de modo que a fonte de luz estará situada a uma distância fixa do anteparo de 65cm. São definidas posições d_1, d_2 e d_3, situadas respectivamente a uma distância de 20cm, 30cm e 45cm do quadro branco, para posicionar verticalmente em relação ao solo o quadrado a ser projetado. Responda aos questionamentos abaixo declinados, considerando como l_1, l_2 e l_3, os lados das projeções quadradas :

a) quais os valores dos lados das projeções l_1, l_2 e l_3, em decorrência das posições d_1, d_2 e d_3 ?;

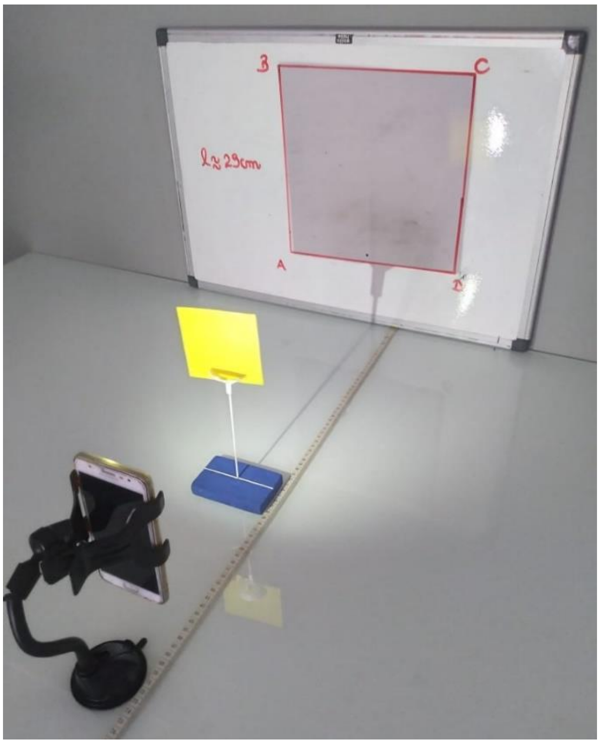
b) quais as razões $\frac{l_1}{9\text{cm}}$, $\frac{l_2}{9cm}$ e $\frac{l_3}{9cm}$? e qual a respectiva relação das mesmas com os valores q_1 , q_2 e q_3?

c) qual é a possível interpretação do evento geométrico em curso na questão?

Resolução:

Neste último caso, optou-se por ilustrar o procedimento realizado na atividade em curso com a imagem da 3ª projeção realizada, após uma intervenção pedagógica julgada pertinente no quadro branco:

Figura 199 – 3ª projeção da atividade 3.



Fonte: Autor, 2021.

Ao se realizar as projeções pertinentes com a estrutura de projeção disponível, foi possível encontrar pra l_1, l_2 e l_3 os respectivos valores: 13cm, 16cm e 29 cm. Para o cálculo das razões inerentes ao item “b”, foram encontrados os respectivos valores: $\frac{13cm}{9cm} \approx$ 1,44, $\frac{16cm}{9cm}$ ≈1,78 e $\frac{29cm}{9cm}$ ≈ 3,22. Não resta dúvida que são valores bastante próximos dos valores de q_1 , q_2 e q_3, o que assinala a realização de uma experiência projetiva satisfatória. É possível se vislumbrar que à medida que o triângulo base se aproxima da fonte de luz, a imagem projetada se amplia de forma proporcional e preservando os ângulos, definido formas geométricas semelhantes, com a razão de semelhança na ordem "q_i", de modo que “i” pertença ao conjunto {1, 2, 3}.

Atividade 4

Considerando o triângulo-base declinado na atividade 1, calcule o perímetro e a área das projeções, considerando as razões: $q_1 = 1{,}44$, q_2 = 1,87 e $q_3 = 3{,}25$.

Resolução:

Tendo em vista que o lado do triângulo-base equilátero mede 8cm, o seu perímetro “2p” será 24cm. Os perímetros das projeções seguem fácil de encontrar, pois todos os lados da projeção sofrem efeito multiplicativo decorrente da proporcionalidade, conforme a razão "$q_{i,}$" em que “i” pertence ao conjunto {1, 2, 3}, dependo da distância e que o triângulo-base é posicionado em relação ao anteparo. Abaixo seguem os perímetros:

a) projeção decorrente da posição d_1: $2p_1 = (2p) \cdot q_1 = (24cm) \cdot (1{,}44) = 34{,}56cm$;
b) projeção decorrente da posição d_2: $2p_2 = (2p) \cdot q_2 = (24cm) \cdot (1{,}87) = 44{,}88cm$;
c) projeção decorrente da posição d_3: $2p_3 = (2p) \cdot q_3 = (24cm) \cdot (3{,}25) = 78cm$.

Já no que concerne à área, é preciso perceber que a mesma envolve duas dimensões em sua composição. Denotando-se por “b” a base do triângulo, por “h” sua altura e por "q_i" o fator de proporcionalidade atrelado à sua projeção, tem-se que a área do triângulo-base mede "$\frac{b \cdot h}{2}$", enquanto a sua projeção terá área valendo: $\frac{(q_i \cdot b)\cdot(q_i . h)}{2} = \frac{(q_i)^2 \cdot (b \cdot h)}{2}$. Admitindo que a área do triângulo equilátero de lado “l” pode ser calculada por “$\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$”, consequentemente a área do triângulo base será no valor de : $\frac{(8)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} cm^2 = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} cm^2 = 16 \cdot \sqrt{3} cm^2$. Desta forma, as áreas das projeções serão:

a) projeção decorrente da posição d_1: $(16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (q_1)^2 = (16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (1{,}44)^2 = (16 \cdot \sqrt{3} cm^2).(2{,}07) = 33{,}12 \cdot \sqrt{3} cm^2$;
b) projeção decorrente da posição d_2: $(16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (q_2)^2 = (16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (1{,}87)^2 = (16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (3{,}5) = 56 \cdot \sqrt{3} cm^2$;
c) projeção decorrente da posição d_3: $(16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (q_3)^2 = (16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (3{,}25)^2 = (16 \cdot \sqrt{3}\, cm^2) \cdot (10{,}56) = 168{,}96 \cdot \sqrt{3} cm^2$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Enfim, foi possível se chegar ao final dessa jornada podendo discorrer sobre o poder do lúdico no ensino da geometria. Primeiramente torna-se crucial enfatizar a grande importância da OBMEP para o desenvolvimento deste trabalho. Se por um lado a OBMEP serviu de fonte de inspiração para o estudo por representar de forma lúdica a essência do saber matemático a ser atingido, ela também se apresentou com um desafio a ser enfrentado tanto pelos alunos quanto pelos professores para se atingir o objetivo comum: uma forma agradável e interativa de se aprender geometria. Os ensinamentos propiciados pelo construtivismo ao longo dos tempos com pensadores do quilate de Lev Vygotsky, por exemplo, evidenciaram o poder decorrente da incorporação ao ambiente de sala de aula de uma mediação instigante auxiliada por ferramentas pedagógicas eficientes e consagradas, a fim de que possa surgir um terreno fértil para dar chance ao aluno de sentir o transformador sabor da descoberta, a partir de um ambiente de intensa cooperação e reflexão.

As palavras sustentabilidade e empoderamento foram encaradas como elementos norteadores da pesquisa. A possibilidade de utilizar materiais de descarte que se avolumam nos depósitos de uma infinidade de repartições públicas por todo o Brasil para construir materiais didáticos dotados de grande riqueza conceitual geométrica evidencia o quanto é possível ser ecologicamente viável, ao mesmo tempo em que se permite uma participação ativa e decisiva dos alunos na produção das ferramentas que os auxiliarão na busca pelo saber.

Deve-se trazer à baila novamente o fato de que em nenhum momento a pesquisa teve a pretensão de se aventurar na seara da formalização de qualquer conceito que permeia a geometria. O objetivo primário do presente trabalho é resgatar o poder que circunscreve a geometria no que tange a permitir a elaboração empírica de situações instigantes para se deflagrar um processo de intimidade entre o estudante e o seu objeto de estudo. A pesquisa abriu espaço para que se pudesse perceber o quanto materiais rústicos e altamente disponíveis, aparentemente inócuos sob o ponto de vista de uma visão tradicionalmente conservadora do ensino, podem exercer um papel transformador em um processo de mediação bastante planejado e sem pressa no ensino-aprendizagem.

Finalmente é primordial declinar a grande importância de sempre se resgatar a incrível vocação histórica da geometria para auxiliar na resolução de problemas concretos que afligem pessoas no cotidiano. É inegável o importante papel desempenhado pela formalização do conhecimento matemático, desde que ele venha no momento certo, e não de forma precoce e sem lastro na curiosidade que deve fazer moradia no ambiente de sala de aula. Primeiro o aluno deve brincar com as propriedades matemáticas de forma mais lúdica possível com um único objetivo: tentar de forma descontraída encontrar padrões nos eventos apresentados. Quando ele passa a entender os padrões geométricos inerentes, mas lhe falta habilidade para dar consistência àquele saber e expandi-lo para casos mais genéricos, surge aí o momento perfeito para que a formalização do saber possa, de forma natural, abrir as portas do mundo fantástico da abstração do conhecimento geométrico.

Ademais, eis que surge o momento de a pesquisa em curso apresentar uma resposta para a indagação presente no parágrafo final da parte introdutória do presente trabalho investigativo, a qual versava sobre a viabilidade de se fazer em sala de aula um trabalho preparatório com os alunos com foco em geometria plana e voltado para os exames de níveis 1 e 2 da OBMEP a partir da utilização de materiais concretos manipuláveis oriundos de reciclagem, e a resposta é positiva. Ao longo desse trabalho ganhou relevo a percepção de que no momento em que o professor desenvolve um planejamento de aula alicerçado por uma pesquisa bibliográfica academicamente relevante combinada com uma criatividade pulsante e com uma perseverança fortemente resiliente, a utilização de materiais concretos em um ambiente de forte cooperação entre os alunos pode ser uma grande aliada no que concerne a criar experiências lúdicas capazes de tornar os conhecimentos geométricos mais acessíveis e interessantes para os alunos. Sendo assim, o temor que muitos alunos possuem pela geometria pode até ser substituído por curiosidade.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA BRASIL. Notícia intitulada **"Censo aponta que escolas públicas têm deficiências de infraestrutura"** e publicada em 31/01/2018 de autoria da repórter Helena Martins. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2018-01/censo-aponta-que-escolas-publicas-ainda-tem-deficiencias-de-infraestrutura. Acesso em 22/09/2020.

ANTAR Neto, Aref. **Noções de Matemática** V. 5. Ed Moderna, São Paulo, 1982.

ÁVILA, G. **Objetivos do Ensino da Matemática**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 27, p.1-10, 1995.

BALDISSERA, A. **A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos**. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_altair_baldissera.pdf. Acessado em 03 de setembro de 2019. Acesso em novembro de 2020.

BALIEIRO, I. F.; SOARES, M. R. **Uma abordagem da análise matemática para alguns problemas derivados das concepções filosóficas de Zenon, Antifon e Brison**. Revista Brasileira de História da Matemática, Ilha Solteira, v. 8, p. 155-172, mar. 2009.

BARBOSA. J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. **Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática?** Publicado na Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), volume 8, em 2015. Disponível em: 1462-Texto do artigo-4161-2-10-20151218.pdf.

BARROS, A.L.S.; ROCHA, C.A**. O USO DO GEOPLANO COMO MATERIAL DIDÁTICO NAS AULAS DE GEOMETRIA.** Artigo publicado no VIII Encontro Nacional de Educação Matemática ocorrido de 15 a 18/07/2004 em Recife/PE.

BIONDI, R. L. ; VASCONCELLOS, L. M. ; MENEZES-FILHO, N. **Avaliando o Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas no desempenho de matemática nas avaliações educacionais**. In: 31º Encontro da Sociedade Brasileira de Econometria, 2009, Foz do Iguaçu. Anais... Encontro Brasileiro de Econometria - SBE, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Editora Edgard Blucher LTDA. Livro produzido em produzido originalmente em 1968 e com segunda reimpressão em 1974. Traduzido por Elza F. Gomide.

BRASIL. Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES)/Ministério da Economia. **Relatório Anual do BNDES, 2012**. Disponível em: https://web.bndes.gov.br/bib/jspui/handle/1408/931. Acesso em 20/09/2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira-INEP. **Resumo Técnico – Censo da Educação Básica 2018**. Publicado em 08/02/2019. Disponível em:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/resumos_tecnicos/resumo_tecnico_censo_educacao_basica_2018.pdf. Acesso em: 01/11/2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC). Artigo intitulado "**Olimpíada de Matemática leva motivação a educadores e alunos**" publicado em 10/07/2014. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/20576-olimpiada-de-matematica-leva-motivacao-a-educadores-e-alunos. Acesso em: 26/20/2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC). Documento intitulado Base Nacional Comum Curricular (BNCC) publicada em 22/12/2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 20/09/2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC). Matéria intitulada "**Programa que leva computadores às escolas terá R$ 660 milhões**". http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/222-537011943/15703-programa-que-leva-computadores-as-escolas-tera-r-660-milhoes. Acesso em 20/09/2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Parâmetro Curricular Nacional (PCN) publicado em 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 26/10/2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CASTRO, M. G. B. **O processo ensino-aprendizagem na visão da perspectiva piagetiana.** Revista **Mnemosine** Vol.12, nº2, p. 233-240 (2016) – Artigos. Disponível em: file:///C:/Users/gilson.gls/Downloads/41662-140351-1-PB%20(1).pdf. Acesso em: dezembro de 2020.

CHAUI, Marilena. **Convite à Filosofia**. Ed. Ática, São Paulo, 2000.

FACCO, S. R. Conceito de Área: **Uma Proposta de Ensino-Aprendizagem**. Dissertação de mestrado defendida junto à Pontifícia Universidade Católica do Estado de São Paulo (PUC/SP) em 2003. Disponível em: https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf. Acesso em: dezembro de 2020.

FERRARI, M. **Lev Vygotsky, o teórico do ensino como processo social.** Artigo publicado do site Nova Escola em outubro de 2008. Disponível em https://novaescola.org.br/conteudo/382/lev-vygotsky-o-teorico-do-ensino-como-processo-social. Acesso em março de 2021.

FERREIRA, M. J. A.; MISSE, B. H. L. e PAULO, R. M. **O uso do Tangram e a leitura e escrita nas aulas de Matemática**. Anais do XI Encontro Paulista de Educação Matemática: XI EPEM. São José do Rio Preto/SP: SBEM/SBEM-SP, 2012, pp. 1-12.

FONSECA, C. R. C**. O conceito de simetria em livros didáticos de matemática para o ensino fundamenta**l. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pernambuco, Ceará, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. – Recife, 2013.

GERDES, P. **Sobre o despertar do pensamento geométrico**, Universidade Federal de Paraná, Curitiba, 1992.

GERVÁZIO, S. N. **Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa.** Publicado na Revista Eletrônica Paulista de Matemática em 09/07/2017. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v09a04-materiais-concretos-e-manipulativos.pdf. Acesso em: novembro de 2020.

GOES, C. R. **Desenvolvendo e aplicando a Matemática: um projeto voltado para produzir vencedores na OBMEP e elevar os indicadores sociais do município de Branquinha-AL.** Dissertação de mestrado do programa PROFMAT defendida junto à Universidade Federal do Alagoas. 2017.

GONÇALVES, T, S. **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental.** Dissertação de mestrado defendida junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) junto à Universidade Federal do Rio Grande em 2013.

GONÇALVES, T. S. **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental.** Tese de mestrado do PROFMAT defendida em agosto de 2013 na Universidade Federal do Rio Grande – FURG.

HENRIQUES, M. D.; CASTILHO C. R.; RAMOS; M. V. M. C., JUSTE, P. F.; MULLER, T. L.; DIAS, T. M. **Um estudo crítico sobre os propósitos da OBMEP**. Artigo acadêmico publicado em 2015 junto à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

LIBRELATO, K.C.P. **A arte do Geoplano: facilitando a aprendizagem**. Publicado no livro Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE em 2013 pelo Governo Estadual do Paraná. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_pdp_kelly_cristiane_polli_librelato.pdf.

LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática em 1991.

LOPES, M. L. L; NASSER, L. **Geometria: na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** Publicado em A Educação Matemática em Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), n° 4, no primeiro semestre de 1995. Disponível em: 1-LORENZATO, S. Por que nao ensinar Geometria Educacao.pdf.

MARANHÃO, A. L. N.; RODRIGUES, G. R.; GONÇALVES, S. S. **Piaget e Vygotsky na Formação de Conceitos: Perspectivas para Prática**. Artigo publicado no XII Encontro Cearense de História da Educação (ECHE) e no II Encontro Nacional do Núcleo de História e Memória da Educação (Enhime) no período de 26 a 28 de setembro de 2013. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/39183/1/2013_eve_sesgon%C3%A7alves.pdf. Acesso em março de 2021.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC). **Programa que leva computadores às escolas terá R$ 660 milhões.** Reportagem da Assessoria de Comunicação Social do MEC de 23/07/2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/busca-geral/222-noticias/537011943/15703-programa-queleva-computadores-as-escolas-tera-r-660-milhoes. Acesso em outubro de 2020.

MOLINERO, E.H.S.; MARQUES, L. C.; JAFELICE, R. S. M. **O Estudo Matemático do Comportamento das Abelhas.** FAMAT em Revista, nº 9, publicada em outubro de 2007. Disponível em: http://inst-mat.utalca.cl/~cdelpino/modelos/2010/articulos-para-tareas/abejas/EnsinoEduardoRosana.pdf. Acesso em 21/10/2020.

MONTEIRO, G. L. **Considerações históricas sobre o infinito e alguns de seus paradoxos.** Trabalho apresentado para a obtenção do diploma de graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Paulista (UNESP) NO CAMPUS Guaratinguetá/SP em 2015.

NUNES, K. R. A. **Estela e o projeto fazendo arte com a Matemática**. Boletim GEPEM (eISSN: 2176-2988), nº 68 – jan. / jun. 2016, p. 81-91. Disponível em: file:///C:/Users/gilson.gls/Desktop/DISSERTAÇÕES%20IMPORTANTES/texto%20tcc%20profmat.pdf. Acesso em dezembro de 2020.

OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP. **O desempenho das escolas na OBMEP 2018**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/destaques.DO?id=639. Acesso em: 29/11/2020.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP. Apresentação 2020. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 25/10/2020.

OLIVEIRA, A. C. B.; SANTOS, C. A. B.; FLORÊNCIO, R. R. **Métodos e Técnicas de Pesquisas em Educação.** Publicado na Revista Científica da FASETE – Faculdade Sete de Setembro de Paulo Afonso/BA – em 2019. Disponível em: metodos_ e_tecnicas_de_pesquisa_em_educacao.pdf.

OZIERANSKI, M. **Áreas e Perímetros: Uma Abordagem Significativa.** Artigo publicado no Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) pela Universidade Estadual de Maringá/PR em 2012. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_uem_mat_pdp_marise_ozieranski.pdf.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIS, L. C. **Intuição, Experiência e Teoria Geométrica.** Revista **Zetetiké**, Campinas-SP, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul/dez, 1996. Disponível em: file:///C:/Users/gilson.gls/Downloads/8646739-Texto%20do%20artigo-20832-1-10-20160923%20(1).pdf. Acesso em dezembro de 2020.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké, Campinas, Ano 1, n. 1, p. 7-17, março. 1993.

PIAGET, J. **A teoria de Jean Piaget**. In: CARMICHAEL, Leonard. Manual de psicologia da criança. São Paulo: EPU/USP, 1977, v. 4, p. 71-116.

REIS, S. J. C.; MELO, G. F. A**. Transformação Geométrica – Homotetia**. Publicação integrante da dissertação de mestrado denominada **"Tarefas Investigativas na Aprendizagem da Homotetia utilizando os Materiais de Desenhos Geométricos e o Software Geogebra, por alunos do 9º ano"** defendida na Universidade Federal do Acre (UFA) em 2019.

RIBEIRO, B. S.; CHAGAS E. A. C.; VIEIRA, F. B., MONTEIRO; N. Z., SILVA, R. B.; OLIVEIRA, W. D.; WAGNER, A. **Sala Para Leitura: Isometrias**. Publicado na página da internet denominada Clube de Matemática da OBMEP: Disseminando o estudo de Matemática com última atualização em 18/04/2018. Disponível em http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura_031-isometrias/. Acesso em janeiro/2021.

RIGONATTO, M. **Introdução ao Estudo dos Vetores e Aplicações no Ensino Médio**. Dissertação de mestrado do programa PROFMAT defendida junto à Universidade Federal de Goiás em 2018. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/8249/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Marcelo%20Rigonatto%20-%202018.pdf. Acesso em dezembro de 2020.

RIPPLINGER, H. M. G. **A simetria nas práticas escolares.** Dissertação de mestrado em Educação Matemática defendida junto à Universidade Federal do Paraná. 2006. Disponível em: http://www.ppge.ufpr.br/teses/M06_ripplinger.pdf. Acesso em dezembro de 2020.

SANTOS, A. H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática defendida junto à Universidade Federal do Paraná. 2014. Disponível em: http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/045_AlessandraHendidosSantos.pdf . Acesso em novembro de 2020.

SANTOS, A. M. A. **A Utilização de Materiais Concretos para o ensino de Geometria Plana e Espacial: um estudo de caso**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco. Bahia. 2015. Disponível em: http://www.univasf.edu.br/~tcc/000006/00000661.pdf. Acesso em novembro de 2020.

SANTOS, L. C.; GOIS, A. S.; COSTA, D. E.; GONÇALVES, T. O. **Desenvolvimento de Sequência Didática com a Utilização do Geoplano no Ensino de Figuras Planas na 1ª Série do Ensino Médio.** Publicado na Revista Prática Docente (RPD) do Instituto Federal de Mato Grosso, Campus Confresa, no v. 5, n. 2, p. 582-607, no período de maio a agosto de 2020.

SANTOS, M. S. S. **o uso do material manipulativo Tangram e de jogos como estratégias de motivação para a aprendizagem de frações**. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista (UNESP). 2012.

SANTOS, M. S.; SANT'ANNA, N. F. P. **O Ensino de Geometria e a Teoria de Van Hiele: uma abordagem através do laboratório de ensino de matemática no 8º ano da educação básica.** P.1-10, 2015. Disponível em: https://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd2_marcele_santos.pdf. Acesso em: 10/10/2020.

SCHLICKMANN, A. C. **Produto Educacional: Atividades com sólidos geométricos para o ensino de geometria plana no ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado Profissional referente ao Programa de Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC apresentada em 10/12/2020. Disponível em: file:///C:/Users/Vaio/Downloads/Produto%20Educacional%20PPGECMT_Andressa%20Caneppele%20Schlickmann%20(2).pdf. Acesso em agosto de 2022.

SILVA, Maria A. R. Trabalho acadêmico intitulado **"Inclusão Digital nas Escolas Pública: O Uso Pedagógico dos Computadores e o PROINFO Natal/RN",** publicado em 2018 pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

SILVA, P. H. **Transformações geométricas no contexto escolar: uma experiência de aprendizagem no 8º ano do ensino fundamental**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática defendida junto à Universidade Federal de Ouro Preto/MG. 2017. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/8757/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_Transforma%C3%A7%C3%B5esGeom%C3%A9tricasContexto.pdf. Acesso em: novembro de 2020.

SOUZA, A. S.; OLIVEIRA, G. S.; ALVES, L. H. **A Pesquisa Bibliográfica: Princípios e Fundamentos**. Revista **Cadernos da FUCAMP**, da universidade UNIFUCAMP, v. 20, nº 43, p. 64-83 de 2021. Disponível em: 2336-Texto do Artigo-8432-1-10-20210308 (1).pdf .

SOUZA, A. S.; OLIVEIRA, G. S.; ALVES, L. H. **A Pesquisa Bibliográfica: Princípios e Fundamentos**. Publicado na Revista Cadernos da FUCAMP, v. 20, n° 43, p. 64-83, em 2021. Disponível em: 2336-Texto do Artigo-8432-1-10-20210308 (3).pdf.

SOUZA, N. T.; KICHOW, I. V. **O ensino do Teorema de Pitágoras para uma aluna com problemas visuais utilizando o geoplano e o material dourado.** Artigo acadêmico publicado no VI Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, VI SESEMAT, ocorrido em Campo-Grande/MS no período de 08 a 09 março de 2012. Disponível em https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3766. Acesso em dezembro de 2020.

STROTTMANN, C. I.; SCHUCK, F.; SCHEIN, Z. P. **Material concreto para o desenvolvimento do conceito do teorema de Pitágoras para portadores de deficiência visual**. Artigo publicado no XI Encontro Nacional de Educação Matemática na cidade de Curitiba/PR, XI ENEM, no período de 18 a 21 de julho de 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/172_833_ID.pdf. Acesso em janeiro de 2021.

UNESCO. Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. Publicado em 2016. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246861/PDF/246861por.pdf.multi. Acesso em: 27/10/2020.

VASCONCELOS, A.P. **A Matemática dos Alvéolos**. Publicado pela Associação Paulista de Apicultores Criadores de Abelhas Melíficas Europeias (APACAME) em 2002. Disponível em: https://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm. Acesso em: 23/10/2020.

VEJA. Matéria intitulada "**Economia brasileira caminha para sua pior década perdida**" de autoria da jornalista Alessandra Kianek e publicada em 29/05/2020. Disponível em: https://veja.abril.com.br/economia/economia-brasileira-caminha-para-sua-pior-decada-perdida/. Acesso em 21/09/2020.

VERGNAUD. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170.

VIDAL, M. C. P.; EUSTÁQUIO, R. G**. Fatos históricos que valorizam o ensino da geometria**. Artigo publicado no projeto Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor (PDE) em 2014. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_utfpr_mat_artigo_marcia_cristina_pereira_vidal.pdf. Acesso em fevereiro de 2021.

VIEIRA, G.; PAULO, R. M.; ALLEVATO, N. S. G. **Simetria no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula.** Revista **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 613-630, ago. 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46/v27n46a18.pdf. Acesso em: dezembro de 2020.

VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010. Disponível no site: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5167/3696. Acesso em agosto de 2022.

VINAGRE, A.L.M. **Eratóstenes e a medida do diâmetro da terra**. Disponível em: https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf. Acesso em 19/10/2020.

WAGNER, E. Teorema de Pitágoras e Áreas. Livro publicado pelo IMPA/OBMEP em 2005 e que se encontra na 11ª impressão, com a versão de 2015.Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf. Acesso em janeiro de 2021.