Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Luciano dos Reis Rodrigues

Trabalhando equações do primeiro grau através da resolução de problemas e sob a ótica colaborativa

Rio de Janeiro
2023

Luciano dos Reis Rodrigues

Trabalhando equações do primeiro grau através da resolução de problemas e sob a ótica colaborativa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Coorientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

R696 Rodrigues, Luciano dos Reis.
Trabalhando equações do primeiro grau através da resolução de problemas e sob a ótica colaborativa/ Luciano dos Reis Rodrigues. – 2023.
74 f. : il.

Orientador: Augusto César de Castro Barbosa.
Coorientador: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Equações - Teses. 2. Resolução de problemas (Matemática) - Teses. 3. Heurística - Teses. I. Barbosa, Augusto César de Castro. II. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Luciano dos Reis Rodrigues

Trabalhando equações do primeiro grau através da resolução de problemas e sob a ótica colaborativa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa, de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.ª Dra. Maria Darci Godinho da Silva
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2023

AGRADECIMENTOS

A meus pais José Geraldo Rodrigues e Silvane dos Reis Rodrigues por serem fontes de inspiração perene para que eu continue trilhando a nossa caminhada evolutiva.

A minha irmã Angélica dos Reis Rodrigues por continuar sendo um modelo de profissional e cidadã a ser seguido.

A minha esposa Crisvânia Maria Coelho Leite por todo amor demonstrado neste desafio e em muitos outros já compartilhados.

Aos meus orientador Augusto César de Castro Barbosa e coorientadora Cláudia Ferreira Reis Concordido pela oportunidade de trabalharmos juntos e o rigor empregado nesta empreitada.

A meu amigo Demétrius Melo de Souza pela oportunidade do convívio e por nossas trocas.

RESUMO

RODRIGUES, Luciano dos Reis. ***T****rabalhando equações do primeiro grau através da resolução de problemas e sob a ótica colaborativa.* 2022. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Neste trabalho, objetiva-se, através do desenvolvimento e apresentação de um estudo de caso, verificar a eficácia e a eficiência da adoção de práticas didáticas baseadas nas metodologias do Ensino Colaborativo (EC) e da heurística de Resolução de Problemas (RP), voltadas para o ensino da Matemática, frente às práticas didáticas do Ensino Tradicional. Para tanto, inicia-se um estudo sobre a metodologia de Ensino Colaborativo, destacando: as diferentes concepções conceituais existentes como, por exemplo, as de Bruffee (1993,1996) e Panitz (1999); a evolução dessa metodologia ao longo tempo, desde os primeiros registros no século XVIII até os dias atuais; e os aspectos práticos, a serem observados, para a implementação da metodologia em sala de aula. Em seguida, realiza-se um estudo sobre a heurísticas da Resolução de Problemas, aludindo às concepções de Polya (2006) e Onuchic (1999); e, à forma como os PCN e a BNCC destacam o potencial da Resolução de Problemas para melhorar o ensino de Matemática, no sistema educacional brasileiro. O trabalho também faz um estudo sobre equação do primeiro abordando: o contexto histórico, através de EVES (2011); o desenvolvimento da Álgebra, destacando a contribuição de François Viète; e como se dá a prática docente no ensino de equação do primeiro grau. Como metodologia, é apresentado um experimento realizado numa escola da rede pública do Município do Rio de Janeiro, Escola Municipal Professor Gilberto Bento. Duas turmas do sétimo ano foram submetidas a aulas sobre equação do primeiro grau: em uma delas, a abordagem realizada foi sob a ótica do Ensino Colaborativo e da Resolução de Problemas em grupos de consenso, enquanto a segunda foi submetida a uma abordagem baseada no Ensino Tradicional. Neste trabalho, apresentam-se os resultados qualitativos das observações realizadas nas atividades aplicadas às duas turmas e conclui-se que a implementação da metodologia Ensino Colaborativo associada à Resolução de Problema é uma alternativa capaz de promover mudanças significativas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática nas escolas, contribuindo não só para uma melhora no desenvolvimento cognitivo dos alunos, na relação deles com a Matemática e, consequentemente, no rendimento, mas também para a formação sociocultural dos estudantes submetidos a essas práticas.

Palavras-chave: Ensino colaborativo. Heurística de resolução de problemas. Equação do primeiro grau.

ABSTRACT

RODRIGUES, Luciano dos Reis. *Working first degree equations through problem solving and from a collaborative perspective.* 2022. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

This work aims, through the development and presentation of a case study, to verify the effectiveness and efficiency of the adoption of teaching practices based on the methodologies of Collaborative Teaching (CT) and the Problem Solving (PS) heuristic, focused on the teaching of mathematics, against the teaching practices of Traditional Teaching. For this purpose, a study of the methodology of Collaborative Teaching begins, highlighting: the different conceptual conceptions that exist, such as those of Bruffee (1993,1996) and Panitz (1999); the evolution of this methodology over time, from the first records in the eighteenth century to the present day; and the practical aspects, to be observed, for the implementation of the methodology in the classroom. Then, a study is conducted on the heuristics of Problem Solving, alluding to the conceptions of Polya (2006) and Onuchic (1999); and, the way the NCP (National Curriculum Parameters) and the CNCB (Common National Curricular Base) highlight the potential of Problem Solving to improve the teaching of mathematics in the brazilian educational system. The work also makes a study about equation of the first degree approaching: the historical context, through EVES (2011); the development of Algebra, highlighting the contribution of François Viète; and how the teaching practice occurs in teaching equation of the first degree. As methodology, we present an experiment conducted in a public school in the city of Rio de Janeiro, "Escola Municipal Professor Gilberto Bento". Two classes of seventh grade were submitted to classes about equation of the first degree: in one of them, the approach was based on Collaborative Teaching and Problem Solving in consensus groups, while the second one was submitted to an approach based on Traditional Teaching. In this work, we present the qualitative results of the observations made in the activities applied to the two classes and conclude that the implementation of the Collaborative Teaching methodology associated with Problem Solving is an alternative capable of promoting significant changes in the teaching-learning process of Mathematics in schools, contributing not only to an improvement in the students' cognitive development, in their relationship with Mathematics and, consequently, in their performance, but also to the socio-cultural formation of the students submitted to these practices.

Keywords: Collaborative teaching. Problem solving heuristics. First degree equation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há tempos, um dos grandes desafios da rotina de um professor de Matemática, em sala de aula, é dirimir o distanciamento existente entre a Matemática e seus alunos. Embora muitos deles, ao serem interpelados sobre a importância de se aprender Matemática para o seu desenvolvimento e o seu dia a dia, consigam dar repostas que põem a Matemática como uma área de conhecimento indispensável para eles, na prática, o lidar desses alunos com a disciplina e, consequentemente, com o professor e com os seus companheiros de turma é paradoxal. A Matemática é vista por muitos deles como uma área destinada a pessoas com um desenvolvimento intelectual avançado, os ditos gênios, e muitos se consideram estar aquém desse nível de intelectualidade. Em decorrência dessa percepção, adotam uma postura de passividade e indiferença durante as aulas que os leva ao desinteresse – em relação às aulas, aos conteúdos e à figura do professor. Tornam-se, em muitos momentos, inacessíveis ao professor, o que dificulta o estabelecimento de uma relação que possibilite criar um ambiente de troca de experiências, de construção de conhecimento e de desenvolvimento de habilidades.

Nesse contexto, buscar metodologias e práticas pedagógicas que permitam a abordagem de conteúdos matemáticos, tendo como foco o aluno e o seu contexto sociocultural, é redirecionar o processo de ensino-aprendizagem. Esse redirecionamento tem por finalidade promover sensíveis mudanças no cotidiano escolar: no que diz respeito à sala de aula, transformando-a num ambiente em que resida uma comunidade de conhecimento que permita não só a formação dos alunos em relação aos saberes matemáticos, mas também permita uma melhor lapidação desses indivíduos como membros ativos de uma comunidade; e, quanto ao aspecto sociointeracionista, trazendo os alunos para o centro do processo de ensino-aprendizagem, valorizando seus saberes socioculturais para a elaboração de um planejamento e práticas adequados à realidade dos agentes dessa comunidade.

É importantíssima a adoção de metodologias e práticas pedagógicas para fundamentar uma nova realidade que possibilite um processo de ensino-aprendizagem mais ativo, transformador e produtivo. Ao escolhê-las, é imprescindível que o professor conheça: a quem vai ensinar; qual a importância dos tipos de abordagens adotadas em função das características de sua comunidade de conhecimento; quais transformações e consequências estão sendo esperadas ao planejar as atividades para os alunos; e quais os papéis que cabem ao professor e aos alunos durante as práticas dessas atividades.

Este trabalho promove um estudo que possa apoiar o redirecionamento do processo de ensino-aprendizagem, com a estratégia do Ensino Colaborativo (EC) associada à heurística da Resolução de Problemas (RP). E, para justificar essa abordagem, foi feito um relato de experiência, tendo como tema o ensino das equações do primeiro grau para turmas de sétimo ano do Ensino Fundamental, numa escola da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SMERJ), localizada em Campo Grande, zona oeste da cidade do Rio de Janeiro.

Para solidificar o trabalho, inicia-se, então, um estudo bibliográfico sobre EC, expondo: os conceitos; os aspectos que o diferenciam e o aproximam da metodologia do Ensino Cooperativo; um estudo sobre a sua evolução ao longo do tempo (desde os primeiros registros à contemporaneidade); e os aspectos práticos da implementação da metodologia na rotina pedagógica de uma sala de aula. Em seguida, aborda-se a heurística de RP, tendo como ponto de partida um estudo sobre a definição do que é um problema e sobre as perspectivas da educação brasileira, refletidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular, frente à utilização dos problemas como ferramenta para a melhoraria do ensino da Matemática no Ensino Fundamental. Revisita-se também os estudos realizados por George Polya sobre a heurística da RP e são apresentadas outras concepções sobre o tema. Logo, em seguida, é apresentado um estudo sobre o ensino de equação do primeiro grau, destacando o contexto histórico, a evolução da Álgebra, impulsionada pelo trabalho desenvolvido por François Viète, aborda as práticas tradicionais adotadas no ensino de equação do primeiro grau e trata do redirecionamento que a BNCC e os PCN trazem sobre a associação do EC, RP e o ensino de equação do primeiro grau. Por fim, o trabalho apresenta um estudo de caso a fim de demonstrar os resultados, quantitativo e qualitativo, da adoção das práticas baseadas na metodologia do EC associada à RP numa turma de sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola Municipal do Rio de Janeiro, comparando-os com os resultados obtidos numa segunda turma submetida à pratica do Ensino Tradicional em aulas voltadas para o ensino de equação do primeiro grau.

1 ENSINO COLABORATIVO

1.1 Aprendizagem Cooperativa e Colaborativa: diferenças e semelhanças

A aprendizagem colaborativa é uma ferramenta, ou estratégia, da área de educação que visa promover a aprendizagem através do trabalho em grupo. Ou seja, busca incrementar recursos interativos entre os principais atores do processo ensino-aprendizagem – alunos e professor(es) – com a perspectiva de fornecer aos alunos uma preparação de forma mais eficiente e eficaz para os desafios a serem encontrados dentro e fora do âmbito escolar (REZENDE, 2014).

No que tange à definição de aprendizagem colaborativa, há que se ressaltar a confusão existente entre ela e a aprendizagem cooperativa. Muitas discussões são tecidas devido às relações existentes entre suas semelhanças e diferenças. Embora muitos considerem expressões sinônimas, alguns autores divergem dessa sinonímia, considerando que são distintas nas suas perspectivas teóricas e práticas. Segundo Matthews et al. (1995), as práticas têm-se desenvolvido separadamente. Para esses autores, existe um conjunto de aspectos em que essas duas aprendizagens, a colaborativa e a cooperativa, podem diferenciar-se:

> - o estilo, a função e o grau de envolvimento do professor;
> - a questão da autoridade e relações de poder entre professor e aluno;
> - até que ponto os alunos precisam ser treinados a trabalhar juntos em grupos;
> - como o conhecimento é assimilado ou construído;
> - a importância de diferentes aspectos do desenvolvimento pessoal, social e cognitivo entre os estudantes; e
> - a formação do grupo, a construção da tarefa, o grau de responsabilidade individual e/ou do grupo necessários para assegurar distribuição igualitária do trabalho e avaliação precisa. (MATTHEWS et al., 1995, p. 36, tradução nossa).

Todavia, no que se refere a semelhanças, Matthews et al. (1995, p. 37) ressaltam que:

> - aprender de um modo ativo é mais efetivo do que receber informação passivamente;
> - o professor é um facilitador, um treinador, em vez de um "sábio no palco";
> - ensinar e aprender são experiências compartilhadas entre professor e alunos;
> - encontrar o equilíbrio entre aula expositiva e atividades em grupo é uma parte importante do papel do professor;
> - participar de atividades em pequenos grupos desenvolve habilidades de pensamento elaboradas e aumenta as habilidades individuais para o uso do conhecimento;
> - aceitar a responsabilidade pelo aprendizado individual e em grupo aumenta o desenvolvimento intelectual;

- articular ideias em pequenos grupos aumenta a habilidade de o estudante refletir sobre suas próprias opiniões e processos mentais;
- desenvolver habilidades sociais e de equipe por meio da construção de consenso é uma parte fundamental de uma educação liberal;
- pertencer a uma comunidade acadêmica pequena e solidária aumenta o sucesso do estudante; e
- gostar (ou pelo menos reconhecer o valor) da diversidade é essencial para a sobrevivência de uma democracia multicultural (tradução nossa).

A fim de promover um aprofundamento conceitual, Panitz (1999) encara a aprendizagem colaborativa como algo muito maior do que simplesmente obter soluções para tarefas específicas ao trabalhar em grupo. Entende que a aprendizagem colaborativa promove uma mudança comportamental, os indivíduos que a ela se submetem têm um melhor desenvolvimento na sua capacidade de reflexão, no pensamento crítico e mais segurança nas tomadas de decisões por conta do poder das interações (social, intelectual, cultural) que ocorrem nos grupos.

> Em todas as situações onde pessoas formam grupos, a Aprendizagem Colaborativa sugere uma maneira de lidar com as pessoas que respeita e destaca as habilidades e contribuições individuais de cada membro do grupo. Existe um compartilhamento de autoridade e a aceitação de responsabilidades entre os membros do grupo, nas ações do grupo. A premissa subjacente da aprendizagem colaborativa está baseada na construção de consenso por meio da cooperação entre os membros do grupo, contrapondo-se à ideia de competição, na qual alguns indivíduos são melhores que os outros. Os praticantes da Aprendizagem Colaborativa aplicam essa filosofia na sala de aula, nas reuniões de comitê, com grupos comunitários, dentro de suas famílias e geralmente como um modo de viver e lidar com outras pessoas (PANITZ, 1999, p. 1-2).

Ao observar as palavras de Bruffee (1993, 1999 apud TORRES; ALCANTARA; ILARA, 2004), é possível perceber, em seu entendimento sobre aprendizagem colaborativa, ideias que corroboram com os aspectos conceituais preconizados por Panitz (1999), tendo como um aditivo o aspecto linguístico.

> Entende-se por aprendizagem colaborativa o processo de reaculturação que ajuda os estudantes a se tornarem membros de comunidades de conhecimento cuja propriedade comum é diferente daquelas que já pertencem. Refere-se a uma passagem para outra cultura, para outro ambiente que possua outras normas, valores diferenciados daquele que nos encontramos. O acesso a uma comunidade depende da aquisição de características especiais dos membros dessa comunidade. A mais importante delas é a fluência na linguagem que constitui a comunidade, a linguagem com a qual os membros da comunidade constroem o conhecimento que é sua propriedade comum. Assume, portanto que o conhecimento é socialmente construído e que a aprendizagem é processo sociolinguístico (BRUFFEE, 1993, 1999, apud TORRES; ALCANTARA; ILARA, 2004).

Em Nitzke, Geller e Carneiro (1999), percebem-se similaridades às abordagens de Bruffee (1993,1999 apud TORRES; ALCANTARA; ILARA, 2004) e de Panitz (1999), em que o aspecto da interação social da aprendizagem colaborativa é apresentado como elemento crucial para a aquisição de conhecimento e desenvolvimento. “A aprendizagem colaborativa integra um conjunto de práticas que visam à promoção de desenvolvimento cognitivo por meio de trocas sociais entre indivíduos com um objetivo de aprendizagem comum” (NITZKE; GELLER; CARNEIRO, 1999).

Voltando a expor os aspectos em que as duas correntes, colaborativa e cooperativa, distinguem-se, podem-se ressaltar as características que seguem.

a. Quanto ao processo

A aprendizagem colaborativa se mostra como um processo mais aberto por conta da interação do grupo na busca de atingir um objetivo compartilhado. Enquanto na aprendizagem cooperativa, o processo é mais centrado no professor que é responsável por orquestrá-lo de maneira direta. A aprendizagem cooperativa manifesta-se através de um conjunto de técnicas que os alunos lidam com uma maior organização dentro do grupo de estudo (o que demanda uma hierarquização de papéis dos elementos dentro do grupo) para a materialização de um objetivo final ou realização de uma atividade específica. Ou seja, o processo está sob o controle do professor que se incumbe do direcionamento (TORRES; ALCANTARA; ILARA, 2004).

b. Quanto à divisão de tarefas

Na aprendizagem colaborativa, não existe uma divisão previamente estabelecida. As tarefas são distribuídas no momento de sua execução e o caminho para executá-las é achado de maneira coletiva. Qualquer membro está habilitado a tomar iniciativa em qualquer parte da execução. Segundo Roschelle e Teasly (1995 apud DILLEMBOURG, 1996, p. 2), na colaboração, há “um engajamento mútuo dos participantes em um esforço coordenado para a resolução do problema em conjunto”. Porém, na aprendizagem cooperativa, existe uma clareza de divisão, cada componente se responsabiliza por uma parte da execução. Na cooperação, as tarefas são subdividas de forma hierarquizada e a resolução das partes por cada indivíduo, ao serem unidas, configura um produto final que é a solução do problema proposto.

Na aprendizagem colaborativa, a palavra de ordem é socialização. A partir de um processo interacionista, o conhecimento é produzido por ações e reações de muitos indivíduos. O saber é construído a partir de saberes individuais, lançados à comunidade, que são expostos a questionamentos, descréditos, equívocos, ajustes e acertos. Ou seja, o saber coletivo é um enredamento de conhecimentos individuais que são lapidados pelo grupo, através das interações. No ambiente de aprendizagem colaborativa, as personagens assumem múltiplas funções, sem prévia determinação. Os papéis dentro do ambiente são assumidos e trocados de acordo com a herança social e cultural que cada indivíduo possui e pode dispor em prol do desenvolvimento individual e do coletivo (DE CASTRO BARBOSA; CONCORDIDO, 2009).

1.2 **Evolução da Aprendizagem Colaborativa no tempo**

A aprendizagem colaborativa representa uma mudança de paradigma no que diz respeito ao papel do professor, à dinâmica das aulas e sobretudo à atuação dos alunos. Os professores, que antes representavam uma personagem detentora e transmissora de conhecimento, passam a exercer um papel mais meticuloso: como fonte de propostas intelectuais que estimulem seus alunos ao desafio; como condutores e mediadores num processo de ensino-aprendizagem mais profundo, efetivo e eficiente. E, por sua vez, no que diz respeito aos alunos, a aprendizagem colaborativa oferece um protagonismo no processo de aprendizagem, fomentando o desenvolvimento de habilidades e competências a partir de aulas menos expositivas com atividades que são pensadas e configuradas a partir de suas individualidades socioculturais (FINK; MONK, 1983 apud DE CASTRO BARBOSA; CONCORDIDO, 2009).

Os primeiros registros de que educadores, pesquisadores e teóricos desenvolveram e utilizaram práticas colaborativas, por acreditarem no seu potencial de preparação de alunos no enfrentamento da realidade profissional, e fora do âmbito escolar, datam do século XVIII. Tal fato é ratificado por intermédio do professor George Jardine da universidade de Glasgow, Escócia – Reino Unido, entre os anos de 1774 e 1826, que realizou o emprego de técnicas de textos em colaboração e o ensino de técnicas de comunicação e de trabalho em grupo. Sua pretensão era tornar seus alunos aptos para participarem da sociedade britânica (GAILLET, 1994 apud ARRELIAS; BERNARDO; OLIVEIRA, 2022).

Em meados do século XIX, o filósofo e professor norte-americano John Dewey (1859-1952), professor da Universidade de Chicago por uma década (1894-1904), concebeu os princípios balizadores de sua filosofia voltada para a educação, o pragmatismo e a pedagogia, e o perfil de escola que teria neles seus alicerces. Foi autor de várias obras voltadas para a educação, como A escola e a Sociedade (The School and Society,1899), Como pensamos (How we think, 1910), Democracia e a Educação (Democracy and education,1916) e Experiência e Educação (Experiment and education,1938), e, em 1889, assumiu a direção do Departamento de Filosofia da Universidade de Michigan. Em 1890, passou a desenvolver uma teoria de conhecimento que estudava as consequências do pragmatismo para a Pedagogia e a comprovação da validade da mesma em face à experimentação. Ou seja, propunha a elaboração de uma Pedagogia baseada em seu funcionalismo e instrumentalismo. (WESTBROOK; TEIXEIRA, 2010).

Dewey acreditava que o pensamento era um instrumento importante para a resolução de problemas e o conhecimento é fruto de um acúmulo de saberes gerados nessas resoluções. Sua teoria se opunha a duas outras dominantes no sistema educacional dos Estados Unidos da América: a tradicional, que centrava suas práticas no currículo; e a dos reformadores românticos, cujo foco era sobre o aluno. Dewey acreditava num caminho onde a democracia tinha que estar inserida na educação, cuja função primordial era a formação de um caráter nas crianças. Ele defendia que a escola deveria trabalhar no desenvolvimento de um espírito social e democrático da criança e que isso só poderia ser feito uma vez que a escola se organizasse como uma comunidade cooperativa.

Em 1894, Dewey disse:

> Cada vez mais tenho presente em minha mente a imagem de uma escola cujo centro e origem seja algum tipo de atividade verdadeiramente construtiva, em que o trabalho se desenvolva sempre em duas direções: de um lado, a dimensão social dessa atividade construtiva e, de outro, o contato com a natureza que lhe proporciona sua matéria-prima. Teoricamente posso ver como, por exemplo, o trabalho de carpintaria necessário para a construção de um projeto que será o centro de uma formação social, por uma parte, e de formação científica, por outra – todo ele acompanhado de um treinamento físico, concreto e positivo da vista e das mãos (DEWEY, 1894 apud WESTBROOK,; TEIXEIRA, 2010).

No século XX, as propostas cooperativas foram difundidas em várias escolas e instituições na Europa. Por exemplo, nas inglesas, essa difusão se deu em escolas de arte e ofício, artesanais e especializadas. Já nas italianas, esse processo se deu com a utilização dos princípios da cooperação, implementados pelo Movimento di Cooperazione Educativa (Movimento de Cooperação Educacional – MCE), nascido em 1951. O MCE faz parte da Federação Internacional dos Movimentos de Escolas Modernas (a ela estão congregadas várias associações dos diversos continentes) e é promovido por agentes escolares e culturais democráticos e por pessoas interessadas nos problemas educacionais e sociais. O MCE tem por objetivo a organização e difusão de experiências de pesquisas didáticas e de metodologias que visem a renovação e a transformação das escolas democráticas, por meio de atividades baseadas nas relações cooperativas (TORRES; ALCANTARA; ILARA, 2004).

Na Alemanha, há de se fazer referência à Arbeitschule (escola do trabalho) de George Michael Kerschensteiner (1853-1933), pedagogo, que defendia a ideia da "escola do trabalho", uma ideia edificada numa corrente teórica de educação que pregava a preparação científica com o objetivo de aperfeiçoá-la através da prática. Kerschensteiner concebia a escola como a fonte para construção de uma sociedade, defendia que a escola abandonasse, da sua prática, o ensino puramente mecanicista e metódico e optasse por um ensino cuja fonte de conhecimento fosse o mundo real e o cotidiano de seus alunos. Ou seja, acreditava que só uma escola que conseguisse relacionar ensino com a realidade social de seus alunos seria capaz de formar indivíduos com senso crítico a capacitados para serem agentes transformadores do seu meio social (BUENO; FARIAS; FERREIRA; 2012).

Logo, a escola do trabalho pode ser encarada como um princípio metodológico em que o professor é auxiliar de seus alunos, prestando-lhes orientações e estímulos nas execuções das tarefas. E, a aplicação pedagógica do ideal de Kerschensteiner tem no grupo de trabalho uma amostra do ambiente social fértil para testagem e desenvolvimento de suas ideias**,** uma vez que nele há condições dos alunos vivenciarem as normas práticas da vida em sociedade no decorrer da execução das atividades propostas.

O movimento da Escola Nova tinha como objetivo colocar o aluno e suas necessidades no foco do processo educativo. E, para alcançá-lo, utilizou-se da metodologia de trabalho em grupo como principal ferramenta norteadora das suas ideias. Através da elaboração de grupos de aprendizagem colaborativa, parte integrante do método de trabalho, visava obter a participação mais efetiva do aluno no processo ensino-aprendizagem. No Brasil, o movimento da Escola Nova foi acolhido em 1930, proposto por Anísio Teixeira, personalidade de grande relevância na história da educação no Brasil, nas décadas de 1920 e 1930, fora aluno John Dewey e inspirado por ele. Dentre seus feitos importantes, foi signatário do Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, que defendia o ensino gratuito, público, laico e obrigatório. Os ideais da Escola Nova a puseram como antagonista às ideias da pedagogia tradicional, pois passou a enfatizar o indivíduo e a valorizar atividades que pudessem estimular os desenvolvimentos intelectual, psicológico e social. A Escola Nova foi uma grande influenciadora da aprendizagem colaborativa que contou com os embasamentos teóricos de educadores como John Dewey, Maria Montessori e Jean Piaget (TORRES; ALCANTARA; ILARA, 2004).

A aprendizagem colaborativa ganha uma fundamentação teórica na abordagem construtivista, em meados do século XX. O objetivo principal dessa abordagem é promover, em ambientes de aprendizagem, experiências que aproximem os alunos da prática colaborativa existente no universo social no qual eles estão inseridos e no universo no qual podem ser inseridos (TRACHTENBERG; BARBASTEFANO; STRUCHINER, 2010).

Como teorias de base construtivista sustentadoras da aprendizagem colaborativa, destacam-se:

- a Epistemologia Genética, desenvolvida por Jean Piaget, cuja base fundamental é de cunho interacionista, o sujeito é visto como ser agente, construtor das suas relações com o meio físico e social. E, o conhecimento é construído a partir das experiências interacionista que o sujeito estabelece com seu meio;
- a teoria Sociocultural, desenvolvida por Lev Vygotsky, onde o sujeito, a partir de sua interação com o meio social e com outros indivíduos, constrói seu conhecimento de forma ativa, usando como ferramenta fundamental a linguagem;
- a Pedagogia Progressista, combinada à Pedagogia da Escola Nova, cujo expoente de mais relevância é Paulo Freire, o sujeito deixa de ser mero espectador no processo de aprendizagem e, a partir de seu engajamento em grupo de discussões, torna-se um defensor do seu posicionamento social por meio da educação. O processo de aprendizagem passa a ter um teor fortemente político; e
- a Teoria de Cognição Social Compartilhada, que enxerga o conhecimento humano como resultado das interações dos indivíduos. Nela, os indivíduos são tratados como agentes detentores de cultura particular ou grupo de ideologias compartilhadas e a teoria prioriza os processos de trocas interpessoais, levando em consideração o modo como o meio social pode ser modificado ou construído coletivamente (LEITE, 2003).

Mais recentemente, no final do século XX, desde a década de 1990, a Espanha, através do Centro Especial de Investigação em Teorias e Práticas Superadoras de Desigualdades (CREA), da Universidade de Barcelona, vem investindo no desenvolvimento e propagação das chamadas Comunidades de Aprendizagem. Esse investimento se dá através de um movimento transformador das escolas públicas, tornando-as instituições capazes de abrigarem a diversidade de agentes responsáveis pelo processo de educação do indivíduo, sejam eles profissionais da área ou não. Essa transformação vai na direção da compreensão de que, para que a escola possa oferecer às comunidades um ensino qualificado, universal e que seja capaz de combater e diminuir o fracasso escolar e a desigualdade social, se faz necessário que comunidades, escolas, professores, alunos, familiares e outros agentes estejam harmonicamente comprometidos em garantir participação nessa luta. Por isso, as Comunidades de Aprendizagem foram idealizadas sobre três correntes teóricas: teoria da Ação Comunicativa, de Jürgen Habermas, no âmbito da teoria da sociedade; teoria da Resistência, de Giroux, Apple e Flecha, no âmbito da sociologia da Educação; e a teoria Educacional, de Paulo Freire (GABASSA; MELLO; BRAGA, 2012).

As Comunidades de Aprendizagem fundamentam-se no conceito de aprendizagem dialógica como princípio teórico-metodológico que guarda em si os princípios do diálogo, da comunicação e do consenso igualitário para garantir formação educativa de qualidade, efetiva e eficiente. Estes princípios comunicam-se diretamente com os princípios da metodologia da aprendizagem colaborativa uma vez que a atividade de educar e formar o indivíduo passa a ser considerada um trabalho da coletividade. No Brasil, esse movimento de transformação teve início, dos anos 2000, pelo Núcleo de Investigação e Ação Social e Educativa (NIASE), da Universidade Federal de São Carlos, com cerca de três escolas já transformadas em Comunidades de Aprendizagem, enquanto, na Espanha, já são contabilizadas mais de cem. Em ambos países, as escolas têm produzido resultados que indicam que o trabalho desenvolvido pela coletividade tem construído uma melhora do ensino.

1.3 **Aprendizagem Colaborativa na prática**

Em seu livro, O Processo Grupal, o psiquiatra e psicanalista Enrique Pichon-Revière faz uma abordagem sobre o conceito de grupo ou ambiente de grupo. Define que a situação grupal é toda reunião de pessoas cuja conexão está condicionada a coexistirem num mesmo espaço, temporal ou local, e que estejam ocorrendo interações entre os componentes. Revela que o ambiente de grupo precisa estar baseado numa estrutura que favoreça interações decorrentes de trocas de papéis entre as pessoas: ora os componentes assumem uma posição de maior protagonismo no grupo, ora cedem às argumentações, questionamentos e reflexões dos outros. Segundo ele, é devido a esse fluxo que os integrantes do ambiente passam a se reconhecer e reconhecer o outro, através do canal do diálogo e intercâmbio constante (PICHON-REVIÈRE, 2005, p. 162-163).

Pichon-Revíère diz que os grupos invariavelmente são criados com o objetivo de resolverem dilemas que geram situações de conflitos. Esses conflitos são impulsionadores do surgimento de uma atmosfera de criação de caminhos que possam levar às resoluções desses dilemas. E, ao trilhar esses caminhos, os componentes estabelecem estratégias, táticas, técnicas e logísticas para chegar ao objetivo.

A implementação de um trabalho baseado na proposta de aprendizagem colaborativa depende muito da consciência do professor que vai atuar num ambiente de grupos, onde o trabalho é executado por todos. Primeiro, o professor precisa compreender que ele é parte do grupo, e, como tal, é fundamental para a engrenagem interacionista. Planejar, nesses ambientes, atividades capazes de oferecer aos alunos dilemas que exijam deles a construção de saberes, o desenvolvimento de habilidades em elaborar análises de informações, a capacidade e o hábito de fazer reflexões, de se posicionar, ouvir, viver situações de conflitos de ideias, o poder de negociação em busca de um consenso, capacidade de fazer leitura de si e de companheiros. É uma necessidade do professor que busque nos princípios e metodologias interacionista e colaborativa uma mudança da sua prática pedagógica (COSTA; CASTRO BARBOSA; DEL RIO, 2018).

O professor precisa ser conhecedor do perfil de seus alunos, não só sob o aspecto quantitativo ou conceitual do rendimento escolar, mas, como também, sob os aspectos sociocultural e psicológico que possam contribuir para o planejamento das atividades em aula. Logo, realizar um levantamento com informações mínimas, para traçar o perfil desses alunos que serão submetidos à prática colaborativa, é uma tarefa essencial para que o professor seja capaz de elaborar atividades que estejam em sintonia com o perfil da turma.

Quanto à divisão dos grupos, o ideal é que sejam formados grupos com o mais diversificado perfil de alunos possível, pois a heterogeneidade é um fator que garantirá o fluxo das interações e contribuirá para a criação de um ambiente de saberes e vivências socioculturais bem diversificados. E, quanto ao quantitativo, cada grupo deve ter de três a quatro alunos a depender do perfil do conhecimento do professor em relação ao perfil de sua turma.

As aulas devem ser divididas de forma a contemplar algumas fases bem definidas:

- uma fase inicial, reservada à explanação sobre o tema, os objetivos do trabalho e as diretrizes a serem seguidas;

- a fase da proposição e da execução das atividades em grupo. Importantíssima, pois é nela que os alunos desenvolverão as habilidades e competências estabelecidas no planejamento. Nessa fase, dar-se-ão as trocas de experiências e o processo de socialização entre os alunos. O professor precisa estar atento para ser o mediador e o auxiliador nos momentos que for exigido e necessário. Os alunos deverão experenciar, no ambiente de colaboração, e através das atividades, uma prática de ensino-aprendizagem que possa exigir deles uma capacidade de entender os dilemas, compartilhar seus saberes e suas dúvidas, e juntos construírem um caminho lógico e de consenso para a solução da atividade;
- uma fase em que cada grupo expõe, para os outros grupos, sua experiência em uma das atividades, abrindo assim a possibilidade de troca de conhecimento e saberes entre os grupos e a turma como um todo, permitindo discussões numa esfera mais ampla; e
- por último, a fase das avaliações em grupo e individual que permitirá aferir o quão efetiva e eficiente foi a metodologia.

O trabalho pautado nas práticas colaborativas deve ser planejado de forma a oferecer a seus participantes a possibilidade de vivenciarem novas experiências capazes de remodelar as relações dentro de sala de aula: relação disciplina-aluno; relação aluno-aluno e aluno-professor. Para os alunos, espera-se uma melhora da relação dele com a disciplina em voga (no caso desta dissertação, com a Matemática), com o seu próprio saber - extraído da suas heranças socioculturais -, com o saber de seus pares e com o seu professor uma vez que o paradigma do ensino tradicional promoveu um afastamento desses dois atores no processo de ensino-aprendizagem. Para o professor, que seja motivado a aperfeiçoar suas práticas, abrindo-se para uma realidade em que o aluno não é um mero espectador, mas sim, o agente que lhe dará um direcionamento para desenvolver práticas que possam: aproximar os conhecimentos da disciplina à realidade dos alunos; estreitar a relação de confiança e autoestima de cada aluno em relação a si e em relação à turma; promover conhecimento a partir do compartilhamento de saberes. A melhora no convívio social dentro do ambiente colaborativo, a partir das trocas em busca da solução dos dilemas, será estimulada uma vez que os alunos desenvolvam uma nova postura de convivência onde saibam se colocar de maneira clara e respeitosa e ouvir seus pares e seu professor.

2 AS HEURÍSTICAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 Definições: pensamento e problema

O pensamento é uma das principais atribuições humanas que diferencia o homem dos demais reinos (seres). Na Psicologia, mais precisamente no campo da investigação do pensamento humano, vários são os estudiosos - Vygotsky, Piaget, Freud, dentre outros - que buscam uma definição para o pensamento. Saldarriaga-Zambrano, Bravo-Cedeño e Loor-Rivadeneira descrevem que

> o pensamento resulta de uma forma peculiar de ação que capacita as pessoas dirigirem e planejarem suas atividades de acordo com determinados fins ou objetivos, estabelecendo mentalmente as consequências de diferentes linhas e modos de ação, dados por uma determinada ordem de fatos que levam a um raciocínio. (SALDARRIAGA-ZAMBRANO; BRAVO-CEDEÑO; LOOR-RIVADENEIRA, 2016, p. 58-56 apud NASCIMENTO, 2017, p. 412).

Para Mayer (1983 apud GANGOSO, 1999), o pensamento é caraterizado por ser: cognitivo e inferido da ação; um processo que implica alguma manipulação de algo, ou por ser o estabelecimento de um conjunto de operações sobre alguma coisa; dirigido; e por ter como resultado a resolução de problemas, ou que se encaminha para sua solução. Ainda, ao citar vários autores, Gangoso (1999) ressalta que os estudiosos no assunto possuem conclusões diversas no que se refere à caracterização e descrição do processo de pensamento na resolução de problemas. Há quem, como Polya (2006), pregue que a resolução de problemas está fundamentada em processos cognitivos cujo resultado é buscar uma saída para uma dificuldade, ou uma via para contornar obstáculo. Há os que defendem, como Newell e Simon (1959 apud FIRMINO; BROTTO, 2009), que a resolução se dá quando uma pessoa se depara com um problema em que deseja algo, mas não se conhece imediatamente que série de ações serão necessárias para alcançá-lo. Existem aqueles, como Novak (1977 apud PERALES PALACIOS, 1993), que veem como uma reorganização da informação armazenada na estrutura cognitiva; ou ainda, como Hayes (1981 apud MALONEY, 1994), os que consideram que a resolução se dá quando aquele, que é submetido ao problema, descobre uma combinação de regras previamente aprendidas pelas quais é possível obter a solução de uma situação nova.

Após uma breve reflexão sobre algumas definições de pensamento sob a ótica da ciência da investigação do pensamento humano, percebe-se que pensamento está intimamente ligado a uma situação-problema, ou simplesmente um problema. Nesse ponto, é interessante e importante jogar luz sobre o que há de definição da palavra problema.

Segundo Gonçalves (2006), problema pode ser definido como uma situação que demanda uma solução, e esta não é óbvia. É a situação à qual o repertório de respostas imediatamente disponível num sujeito não permite a solução do problema envolvido. Para ele, um problema deve ter as seguintes características: ser desenvolvido pelo indivíduo, que aprende algo quando o resolve; poder ser generalizado, dando margem a várias soluções; ser desconhecido, não sendo resolvido por um simples algoritmo; e deve permitir a obtenção da solução, mas propondo um desafio. Gonçalves alerta para um critério básico que aponta para a natureza psicológica dos problemas: a solução não pode aparecer imediatamente, pois o indivíduo deve ter um envolvimento pessoal para explorar o problema na tentativa de encontrar a solução.

Sáenz (2009) adiciona um aspecto importante na natureza de um problema, ele considera que um problema deve ser capaz de gerar conflito em que os conhecimentos disponíveis para se compreender uma pergunta não sejam suficientes, criando-se com isso uma zona de incerteza que obriga o indivíduo a buscar outras fontes, ou desenvolver seu raciocínio para reformular a pergunta e buscar a solução.

Quando os estudos sobre RP são voltados para o ambiente escolar, são observadas também várias definições para a palavra problema, assim como ocorre à luz da Psicologia. George Polya (1887-1985), professor de Matemática no ETH Zurique (1914-1940) e na Stanford University (1940-1953), defende em sua obra de 1944, *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*, que um indivíduo está diante de um problema quando ele se depara com uma questão que não pode responder ou resolver, usando os conhecimentos que detém. Como pesquisador sobre métodos de RP, matemáticos ou não-matemáticos, sistematizou as quatro etapas para a resolução de problemas: compreensão; elaboração de um plano de ação; execução do plano elaborado; comprovação do resultado obtido (POLYA, 2006).

Para Dante (2005), um problema é visto como toda situação que requeira a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para um aluno que tenta resolvê-lo, sendo primordial que o aluno estabeleça estratégias e elabore ideias para que o solucione. Dante ressalta que o aluno pode ter a clareza do objetivo a ser alcançado, mas o enfrentamento do problema só se dará se ainda não tiver meios para alcançar tais objetivos.

E, para John A. Van de Walle (2001 apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2012), um problema pode ser entendido como todo desafio proposto aos estudantes sem que os mesmos sejam conhecedores ou possuidores de conhecimentos prévios capazes de fazê-los obterem a solução do desafio.

2.2 **Problemas sob perspectiva da educação brasileira**

Voltando o olhar para a educação brasileira, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), e mais especificamente no que trata das orientações para o ensino da Matemática em todo território nacional, têm-se alguns princípios que são a sustentação para ter a RP como eixo organizador do processo de ensino-aprendizagem de Matemática e que são importantes para que os PCN tragam sua própria definição do que é um problema:

- a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
- um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular; e
- a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Problema, segundo os PCN, “é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la” (BRASIL, 1998, p.41). E a BNCC (BRASIL, 2018) versa sobre os processos matemáticos de resolução de problemas que são considerados como instrumentos de valorização e de priorização da atividade matemática e, por conseguinte, são considerados concomitantemente objeto e estratégia para a aprendizagem dos alunos.

Pensar define o ser humano, pensar é mergulhar em situações que demandam soluções, ou, pelo menos, a construção de um enredamento de ações que permita estabelecer um caminho coerente na busca da solução. A RP une pensamento e ações através da proposição de situações-problema com um objetivo maior de fazer com que o aluno seja colocado em movimento, em relação à sua atividade mental, de modo que seja capaz de pensar com autonomia.

2.3 **Heurística da Resolução de Problemas**

> As heurísticas foram consideradas durante muito tempo modelos cognitivos por excelência, elas constituem-se como regras baseadas na experiência e no planejamento, substituindo as anteriores baseadas na procura algorítmica que chega às soluções corretas depois de ter combinado o problema com todas as soluções possíveis (NEWEL, SHAW; SIMON, 1959 apud FIRMINO, BROTTO, 2009, p.3)

2.3.1 O que é heurística?

Segundo a Oxford Languages, maior editora mundial de dicionários, e que dá suporte ao dicionário de Língua Portuguesa do Google, heurística é “arte de inventar, de fazer descoberta; ciência que tem por objeto a descoberta dos fatos”. Segundo o dicionário Michaelis, heurística é: “a ciência ou arte que leva à invenção e descoberta de fatos”. E, traz ainda, “método de ensino que consiste em que o educando chegue à verdade pelos próprios meios”. E, a partir dessas definições, tratar-se-á sobre a Heurística da Resolução de Problemas.

Newell, Shaw e Simon (1959 apud FIRMINO, BROTTO, 2009) preceituaram que heurística

> consiste numa coletânea de conhecimentos aplicados a uma solução para problemas e dificuldades. Mais radicalmente, são estratégias constituídas como compilação de estruturas de dados, que permitam a atribuição de valores variáveis e gerem o produto do seu cálculo (p. 256-264).

2.3.2 Estudos de Polya

Os primeiros estudos significativos em RP datam de 1944 a partir dos trabalhos de George Polya. Mas, como campo de pesquisa, o marco inicial se deu em 1960, nos Estados Unidos da América. Polya, em *A Arte de Resolver Problemas*, elucida o processo de resolução de problemas e preconiza que a heurística é uma ramo do conhecimento "muitas vezes delineado, mas raramente apresentado com detalhes" (POLYA, 2006, p. 86). E, no intuito de fornecer esse detalhamento, dividiu o processo de RP em quatro fases bem distintas, que serão descritos a seguir.

A primeira fase (etapa) é a fase da compreensão do problema. É uma fase primordial, sendo necessário que sejam elaboradas perguntas para ficar claro o que está sendo solicitado no problema (quais dados, condições) e o que se deseja como objetivo. Buscar a melhor compreensão do que o problema fornece e propõe pode estimular a memória e facilitar a recordação dos pontos cruciais.

A segunda fase é caracterizada pela construção de uma estratégia de (ou para) resolução, a confecção de um plano de ação. Essa fase exige o estabelecimento de relações entre os dados fornecidos pelo problema. Demanda a verificação de existência de algum(uns) algoritmo(s), ou ainda, outras experiências de resolução já vividas que se aproximem do problema proposto.

Como terceira fase, tem-se a fase da execução das estratégias. E, para tal, faz-se necessária a verificação de cada ação e a execução das operações (geométricas e/ou algébricas) que levarão ao resultado esperado.

E, por fim, a quarta fase, a retrospectiva, processo de avaliação da validade da solução encontrada e verificação da existência de uma outra possibilidade de resolução. Ao tornar essa fase um hábito, espera-se que os conhecimentos adquiridos tornem-se bem ordenados a nível de experiências vividas e estejam no arcabouço da memória dos alunos prontos para serem resgatados ao se depararem com situações similares. De acordo com Polya (2006, p.65):

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas', tem que resolver problemas.

O descarte da tentativa e erro na RP por si só configura um erro por parte do professor. Admitir que não seja permitido ao aluno adotar esse procedimento é perder a chance do professor compreender como o aluno está lendo o problema, quais correlações está fazendo com os dados fornecidos e identificar as razões pelas quais o aluno está fazendo a escolha de uma ou outra linha operacional para resolver a situação proposta. Ou seja, tentativa e erro produzem conhecimento, suscitam o movimento mental, contribuindo para uma maior autonomia de pensamento por parte do aluno.

2.3.3 Outras concepções sobre Resolução de Problemas

A RP configura-se como uma metodologia que põe o estudante numa posição central do processo de ensino-aprendizagem, uma vez que, através dos desafios impostos pelos problemas propostos, é exigido do estudante o exercício de várias habilidades, tais como: leitura e compreensão, imaginação (um certo nível de abstração), iniciativa, criatividade, autonomia, análise de dados e resultados, verificação de suas experiências (vivências), dentre outras. Ou seja, o fazer matemático não está mais na figura do professor, mas sim com o aluno. Entende-se que a RP promove um estreitamento entre o aluno e a Matemática. Quanto ao papel do professor, a RP requer que o professor esteja atento ao escolher os problemas que serão utilizados, que eles estejam adequados aos conceitos que serão abordados e que sejam capazes de promover a discussão em grande escala destes e dos procedimentos matemáticos, de ampliar sua visão sobre a Matemática e como ela está inserida em diversas situações no mundo e desenvolver a sua autoconfiança (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Onuchic (1999) sinaliza que a metodologia de RP é uma importante ferramenta capaz de potencializar o processo de ensino-aprendizagem dos alunos, pois pode auxiliá-los no que diz respeito à compreensão de conceitos, processos e técnicas utilizados em cada unidade temática desenvolvida em sala de aula. Esta é a razão pela qual a sua adoção tornou-se objeto de interesse da prática didática.

Ainda, a autora destaca que a RP representa uma pavimentação para a construção de novos conhecimentos, como também deve ser aplicada àquilo que já foi construído anteriormente (ONUCHIC, 1999). Quando faz referência ao papel dos professores, descreve que os mesmos devem permitir, através da metodologia, que o aluno desenvolva sua própria compreensão e, a partir dela, ter como resultado o aumento na habilidade de resolver problemas, utilizando-se da Matemática como uma ferramenta. Ou seja, a metodologia da RP é conceituada como uma prática auxiliadora da aprendizagem uma vez que tende a estimular no aluno a busca por resposta para uma determinada situação.

Para o ensino através da RP, Onuchic e Allevato (2011, p. 83-84) dividem a metodologia RP em 9 fases para aplicação em sala de aula, em ordem: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária, busca do consenso; e formalização do conteúdo. Com as etapas plenária e busca de consenso, busca-se dar um direcionamento para a discussão em grupo das estratégias a serem utilizadas. O fomento da troca de ideias serve para que os estudantes debatam sobre os entendimentos e compreensões da atividade proposta, além de observarem as diferentes técnicas de abordagem e resolução. Isso propicia um esforço em conjunto na busca da solução da atividade.

O que se busca com as heurísticas de RP no ensino da Matemática é ofertar caminhos que possam fazer com que os conceitos e princípios matemáticos se tornem mais claros para o aluno e ele se sinta mais à vontade em estreitar os laços com a Matemática, uma vez que entende o quão instrumentalizado ela pode deixá-lo em várias situações-problema (sejam vividas em sala de aula, ou em seu círculo social). As heurísticas são vias que oportunizam ao estudante a possibilidade de desenvolver seu aprimoramento do raciocínio, da capacidade de expressar e de imaginar (ou abstrair). Ou seja, oportuniza a elevação da sua autoestima.

3 ESTUDO SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Neste capítulo, busca-se fazer um estudo sobre a equação do primeiro grau, destacando o estudo histórico (origem e evolução ao longo do tempo) e como o tema é abordado na prática do ensino fundamental nos dias de hoje, mais especificamente, em turmas do 7º ano.

3.1 Contexto Histórico

3.1.1 Os primeiros registros

Ao revisitar o passado em busca da origem do estudo e uso de equação do primeiro grau, não há como não fazer referência ao papiro de Rhind, documento de origem egípcia, datado de cerca 1650 a.C. Nesse documento, há a descrição detalhada de soluções de 85 problemas envolvendo aritmética, cálculos de áreas, frações, volumes, progressões, repartições proporcionais, equações lineares, trigonometria básica e geometria. Fato importante é que o papiro de Rhind é conhecido também como o papiro de Ahmes, que foi o escriba egípcio responsável por copiar um trabalho ainda mais antigo em escrita hierática[1] (EVES, 2011).

Muitos problemas encontrados no documento egípcio tratavam sobre situações práticas: balanceamento de rações para gado e aves, armazenamento de grãos, divisões de bens e manipulação de safras. E, para tanto, os egípcios desenvolveram um método de resolução desses problemas que tinham como particularidade o cálculo de valores desconhecidos. A chamada Regra da Falsa Posição (denominação criada na Europa) era uma metodologia aritmética que, de forma indireta, possibilitava que as resoluções dessas situações, que envolviam cálculos simples, recaíssem em equações lineares simples (atualmente conhecidas por equações de primeiro grau). Esse episódio é considerado como os primeiros registros de abordagem do uso de equação linear para a resolução de problemas.

[1]Escrita de formato cursivo e usada para fins comerciais.

Porém, os egípcios tinham uma limitação, a questão da não existência de notações algébricas, o que tornava o método de resolução de problemas bastante complexo e, muitas vezes, inviável (EVES, 2011).

O desenvolvimento significativo de metodologia, no âmbito da resolução de equações, foi de responsabilidade dos árabes que, a partir da incorporação da Matemática grega, introduziram uma expressão para representar o valor desconhecido de uma equação. O $\boldsymbol{x}$, como é conhecido hoje por muitos estudantes, em árabe, possui a pronúncia *xay,* que tem, como tradução, o vocábulo *coisa*. Um dos expoentes da matemática árabe Abu Já'far Muhammad ibn Musa Al-Khawarizmi (conhecido como Al-Khawarizmi), no século IX, considerado como um dos fundadores da Álgebra[2], apresentou em seu Livro da Restauração e do Balanceamento~~,~~ as primeiras soluções de equações lineares e quadráticas. Seus estudos revolucionaram a linguagem matemática; por exemplo, o vocábulo Álgebra é uma derivação de al-jabr, conhecida como uma das operações (al-jabr e muqabala) usadas para solucionar equações quadráticas. Além disso, no que tange à linguagem, as expressões algarismo e algoritmo têm como origem a forma latina do seu nome, Algoritmi. Al-Khawarizmi foi o primeiro a escrever sobre a Álgebra e estabeleceu seis tipos de equações algébricas com suas respectivas soluções (ROQUE; PITOMBEIRA, 2019).

3.1.2 O desenvolvimento da Álgebra

A introdução das linguagens simbólica e literal na Álgebra tornou mais simples o estudo de equações. O pioneirismo dessa introdução é creditado ao francês Viète. François Viète (1540-1603) foi um advogado que, como matemático, desenvolvia seus estudos por prazer e eram voltados para as áreas da astronomia e cosmologia. Uma de suas obras publicadas, datada de 1591, "*In Artem Analyticem Isagoge*" (Introdução à Arte Analítica), é considerada como o seu mais relevante feito na Matemática e o mais antigo trabalho sobre o desenvolvimento e o uso do simbolismo na Álgebra. As notações de Viète trouxeram à Matemática o que é considerado uma revolução: a generalidade. Generalidade essa que permitiu que os fatos fossem comprovados não apenas para casos numéricos particulares, mas sim para todos os casos possíveis (EVES, 2011)

[2]Título compartilhado com Diofanto de Alexandria (século III).

A palavra incógnita é originária do latim "*incognitu*" e é atribuída, na Matemática, a toda grandeza cujo valor numérico se deseja descobrir. Foi por obra de François Viète que se deu o desenvolvimento de um sistema de representação de grandezas (constantes, variáveis ou incógnitas), ou seja, ele deu origem à primeira forma algébrica convencionada de representação. Viète buscou estruturar uma teoria geral que lhe possibilitasse transformar e resolver qualquer tipo de equação, e expôs uma considerável parcela de suas ideias sobre ela (considerações e resultados) num tratado intitulado "*De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo" (Dois Tratados sobre a Investigação e Correção de Equações)*. Nele, Viète compila dois trabalhos: um é voltado para a estrutura das equações, e o outro tem a finalidade de discutir diversos métodos de transformação de uma equação noutras em que as resoluções fossem conhecidas.

Viète desejava romper as limitações encontradas pelos matemáticos gregos, que já eram conhecedores das duas fases de análises de um problema: a zetética, que consistia em poder traduzir em equação qualquer problema proposto; e a porística, que tratava da possibilidade da remodelação de uma equação e da reflexão sobre os procedimentos mais complexos que não possuíam como garantia um caminho de reversão demonstrável. E, para isso, propôs uma terceira fase cuja finalidade era garantir a resolução de qualquer tipo de problema: a exegética, que se traduzia na fase da resolução da equação, logo do problema. Ou seja, ele buscava fornecer, através da arte analítica, uma metodologia capaz de solucionar qualquer tipo de problema, garantindo a elegância e o rigor exigidos pela Matemática (CORRÊA, 2009).

Viète proporcionou um avanço na Álgebra, possibilitando a escrita de equações e suas propriedades, porém a Álgebra ainda se encontrava incompleta. René Descartes (1596-1650) veio complementá-la: possibilitou a síntese entre a Álgebra e a Geometria, formalizando e sistematizando; e desenvolveu um sistema de notação literal e simbólica, determinando que as incógnitas seriam representadas pelas últimas letras do alfabeto, enquanto as constantes (valores conhecidos) seriam representadas pelas primeiras letras, ideia que foi a mais difundida e adotada até os dias de hoje (GIL, 2012).

Essa evolução foi e é considerada um divisor de águas entre a Álgebra praticada nos tempos medievais e a Álgebra moderna. Por conta disso, lidar com esses entes (constantes, variáveis e incógnitas) tornou-se, há tempos, algo bem comum no fazer matemático. Deve-se o reconhecimento de toda inovação ocorrida na Matemática, com o desenvolvimento da notação algébrica, ao empenho de gerações de estudiosos, ao longo do tempo, mas, sobretudo, a Francois Viète que foi o precursor desse sistema de representação, fator de caráter fundamental e revolucionário para a Matemática (ROQUE; PITOMBEIRA, 2019).

3.2 **A prática docente no ensino de equação do primeiro grau**

3.2.1 O dilema na prática de ensino de equação do primeiro grau

Numa das aulas do Curso do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio, realizada no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), ministrada em 2003, pelo prestigiado professor Augusto César Morgado (1944-2006), ao tratar sobre o estudo das equações do primeiro grau, Morgado declarou que considerava esse o tema decisivo para separar os alunos em dois grupos: os que iriam gostar de Matemática, e os que iriam odiá-la. Segundo o professor, o seu gostar da Matemática deu-se quando ele aprendeu equações do primeiro grau e apontou dois aspectos importantes responsáveis por despertar seu interesse e vontade de aprendê-la: o entendimento e a compreensão da estrutura lógica que o tema demandava. Ou seja, sabia o que era feito e o porquê era feito; e fez a ressalva em relação à variedade de problemas e aplicações que o tema fornecia a quem estivesse disposto a aprendê-lo. Porém, o professor declarou, na mesma ocasião, sua profunda tristeza em perceber que, há tempos, nas aulas sobre o assunto, o tema era ministrado por professores do Ensino Básico de forma a reduzi-lo à apresentação de uma série de regras, cuja origem, em aula, não era explicada para os alunos e, tampouco, eram apresentadas as diversas aplicações práticas, importantes e pertinentes ao assunto (MORGADO, 2003).

3.2.2 Uma visão crítica dos recursos didáticos

A preocupação sinalizada pelo professor Augusto César Morgado faz-se justificável nos dias atuais, pois a perpetuação desse "*modus operandi*" (limitar o ensino de equação do primeiro grau à apresentação de um apanhado de regras a serem memorizadas pelos alunos e, ainda, não lhes fornecer a possibilidade de experienciar as diversas aplicabilidades dessa ferramenta no âmbito da resolução de problemas) é percebida, não só nas aulas formais, que são ministradas por professores de Matemática em escolas de ensino básico, como também, é reforçada por uma boa parcela de livros didáticos (ou apostilas) desenvolvidos pelas instituições de ensino e editoras.

Ao se debruçar sobre os PCN do Ensino Fundamental de Matemática, é possível verificar uma crítica a respeito da relação professor-aluno, que é vista como quase uma cláusula pétrea da prática docente, e que vai ao encontro da preocupação do professor Morgado. Na sua página 37, os PCN trazem:

> Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem.
> Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos (BRASIL, 1998, p.37).

Mesmo em livros didáticos e apostilas de sétimo ano do Ensino Fundamental, adotados por instituições de ensino (ressalva-se que os mesmos, para serem adotados como material didático, precisam estar de acordo a BNCC), é comum constatar uma organização de conteúdo que só reforça a crítica estabelecida no próprio documento normativo. Na prática, em geral, o professor não mais faz do que seguir a sequência estabelecida por esse material. E, quase de forma universal, os livros e as apostilas seguem similarmente a mesma ordem de apresentação de conteúdo:

- conceituação do que é equação do primeiro grau e definição de seus membros;
- apresentação de uma forma geral: $ax + b = 0$, com $a \neq 0$;
- definição de raiz ou solução de uma equação;
- apresentação dos princípios aditivo e multiplicativo como regras de resolução;
- apresentação da ideia de equilíbrio, fazendo uma analogia entre uma balança de dois pratos (os mesmos contendo massas iguais) com o sentido de igualdade entre os dois membros da equação;
- apresentação de outras formas de equações (equações fracionárias); e, por último, inserção de problemas.

Com a evolução e o fortalecimento das plataformas digitais, uma série de produtos passou a ser ofertada na internet, e isso não foi diferente com produtos ligados à área de

Educação. Hoje, é muito fácil ter acesso, a tempo e hora, a conteúdos de várias áreas de conhecimento, bastando um celular e internet com uma boa quantidade de dados. No que se refere a aulas de Matemática, só no Youtube (plataforma de compartilhamento de vídeo), se um aluno digitar o tema equação do primeiro grau, ele se deparará, numa primeira rolagem da barra, com cerca de 40 videoaulas que abordam o tema. Aqui, alguns exemplos de canais que tratam sobre o assunto e que possuem uma audiência expressiva, entre dez mil e dez milhões de visualizações:

- Professora Ângela Matemática;
- Matemática Master com professor Micamática;
- Marcos aba Matemática;
- Gis com Giz Matemática;
- Matemática no Papel;
- VandoMat;
- Ferreto Matemática;
- Matemática com Alê;
- Matemática com Amorim;
- Matemática com Rafa Jesus; etc.

O curioso é que, na grande maioria dessas videoaulas, esses profissionais ensinam e replicam técnicas, receitas para resolver casos particularizados de equações do primeiro grau. Segmentam o assunto em partes, dando a entender que existem procedimentos distintos para cada tipo de equação. Ou seja, um verdadeiro mais do mesmo: replicam o "*modus operandi*" das salas de aulas e dos materiais didáticos. Nesse caminho, não existe uma incitação à reflexão sobre as estruturas lógicas que compõem o assunto, mas sim uma incitação à automatização do conhecimento.

3.3 Um novo direcionamento para o ensino da equação do primeiro grau

Não obstante, os PCN apontam para uma direção destinada a romper com essa incitação e valorização da automatização do conhecimento. Neles está inserida uma relevante mudança de perspectiva para o ensino da Matemática - a reconfiguração da relação professor-aluno. Essa reconfiguração tem como base de sustentação uma mudança na forma com que um assunto pode ser abordado em sala de aula; a sugestão é abordar temas a partir da proposição de problemas relacionados com um determinado assunto. Segundo o próprio professor Augusto César Morgado (MORGADO, 2003), em países como Alemanha e Japão, é uma norma esse tipo de abordagem: começar um conteúdo sempre por um problema. A partir dessa nova forma de apresentação, objetiva-se dar ao aluno as rédeas do seu processo de aprendizagem, conscientizá-lo de que ele não pode ser o sujeito paciente da ação em sala de aula, mas sim o agente que é capaz de refletir, buscar em sua vivência conhecimentos capazes de lhe dar suporte frente a um desafio sugestionado. O professor, através de problemas previamente selecionados, ou elaborados, e alinhados à realidade e ao nível de maturidade do aluno, deve buscar provocá-lo e estimulá-lo a adotar uma nova postura, a de protagonista (torná-lo um sujeito do processo mais agente, e não meramente paciente) perante às aulas, ao seu saber matemático e ao seu lidar com a Matemática.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p.37-38),

> [...] o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas. Naturalmente, à medida que se redefine o papel do aluno diante do saber, é preciso redimensionar também o papel do professor que ensina Matemática no ensino fundamental. Numa perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir.

A BNCC salienta que a formação matemática para os alunos do Ensino Fundamental é importantíssima pelo seu poder formador de cidadãos conscientes de sua responsabilidade social, não desprezando, contudo, a sua grande aplicabilidade. E, para isso, aponta para a heurística das experimentações na aprendizagem da Matemática e vê, na resolução de problemas, um caminho para o aluno desenvolver sua capacidade de utilização da Matemática: aplicando seus conceitos; desenvolvendo procedimentos; avaliando resultados a fim de solucionar e interpretar essas soluções baseadas na questão contextual das situações propostas. Ela também sinaliza uma direção de prática escolar que coaduna com os princípios da aprendizagem colaborativa, uma vez que traz em suas competências específicas, de números 7 e 8, respectivamente, as seguintes diretrizes para o ensino da Matemática:

- *"Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza."; e*

- *"Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles."*

No que tange ao conteúdo para o ensino da Álgebra, a BNCC destaca a necessidade de os alunos conectarem a relação entre incógnita e equação e que as técnicas de resolução de equações estejam associadas à necessidade de representação e de resolução de determinados tipos de problemas, não sendo a equação e a incógnita objetos de estudo que se encerra em si mesmo. Ademais, especificamente, sobre o ensino da equação do primeiro grau e a resolução de problemas, a BNCC, na unidade temática referente à Álgebra, discrimina os objetos de conhecimento e as habilidades a serem trabalhadas.

Como objetos de conhecimento, destacam-se:

- Linguagem algébrica: variável e incógnita;
- Equações polinomiais do 1º grau.

E, como habilidades:

- (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita;
- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

A Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SME-RJ) contempla, em seu documento normativo, a Matriz de Referência, 2022, habilidades que têm o objetivo de serem norteadoras para avaliações bimestrais de processos cognitivos considerados essenciais para a construção do conhecimento nos específicos anos escolares e que estão de acordo com as habilidades descritas na BNCC. Para o sétimo ano, no terceiro bimestre, algumas de suas habilidades são voltadas para o ensino de equação do primeiro grau e a heurística da resolução de problemas, dois pilares de interesse dessa dissertação:

- (R6pMTal01) Calcular o valor desconhecido em uma igualdade, envolvendo adição, subtração, multiplicação ou divisão de números naturais, aplicando o conceito de operações inversas ou estratégias próprias;

- (R6pMTpr03) Resolver problemas com as informações apresentadas nas tabelas e nos gráficos de colunas, barras, linhas e setores;
- (R7pMTnu16) Reconhecer e resolver situações-problema com números inteiros, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação).

4. **METODOLOGIA**

O trabalho, baseado na metodologia e nos princípios de Esquemas Colaborativos (Ensino Colaborativo, Engajamento Interativo, Aprendizagem Colaborativa, etc.) e da heurística da RP, foi desenvolvido para ser aplicado em uma das duas turmas de sétimo ano da Escola Municipal Professor Gilberto Bento da Silva, situada em Campo Grande, bairro da Zona Oeste da cidade do Rio de Janeiro, no segundo semestre do ano de 2020.

A proposta, num primeiro momento, era submeter uma das turmas ao processo de ensino-aprendizagem tradicional, enquanto uma segunda turma era submetida ao processo de ensino-aprendizagem ancorado na heurística da RP e na ótica da aprendizagem colaborativa. E, o tema explorado nas duas turmas foi o ensino de equação do 1º grau, previsto na Matriz de Referência da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SMERJ), alicerçado pela BNCC, para o segundo semestre do referido ano. Num segundo momento, buscou-se, através de análises quantitativa e qualitativa de dados, tecer um comparativo de desempenho entre as duas turmas e verificar quais contribuições e ganhos que a metodologia da aprendizagem colaborativa e a heurística de resolução de problemas foram capazes de promover para alunos e professor envolvidos nessa experimentação.

4.1 **Contexto**

Um dado relevante para o experimento foi o fato de que alunos, professores e escola estavam inseridos no segundo ano de pandemia da COVID-19. Assim, a escola passou a funcionar numa rotina adaptada à nova realidade, caracterizada por: em 2020, cancelamento das aulas presenciais e uma tentativa precária, por parte da SMERJ, de minimizar os danos desse cancelamento, através do fornecimento de um sistema de ensino a distância que não deu suporte eficiente nem a alunos e nem a professores; em maio 2021, no final do primeiro semestre, houve retorno parcial das aulas, aulas semipresenciais (com rodízio de alunos, baixíssimas frequências e tempos de aula reduzidos) que foram nomeadas como sistema híbrido de ensino (sistema presencial e a distância); e, no segundo semestre de 2021, foi determinado o retorno às aulas presenciais sem rodízio de alunos, porém sem obrigatoriedade de presença, fator que prejudicou bastante a desenvolvimento do experimento.

Ao retornar para o sistema de aulas presenciais, em maio de 2021, é importante ressaltar que os alunos, que ingressaram no sétimo ano do Ensino Fundamental (anos finais), eram, na verdade, egressos do quinto ano do Ensino Fundamental (anos iniciais), pois foram submetidos, durante todo o sexto ano, ao sistema de ensino a distância que não conseguiu dar suporte a eles. Ou seja, não tiveram de maneira eficiente e efetiva acesso a um ensino de qualidade que possibilitasse um aprendizado dentro das condições adequadas. Consequentemente, os alunos apresentavam uma lacuna de quase dois anos de defasagem no processo de desenvolvimento cognitivo e social. E, foram inseridos numa escola cujo planejamento pedagógico, seguindo as determinações e orientações da SMERJ, previa o ensino de dois anos em um, da seguinte forma: no primeiro semestre, os professores teriam que trabalhar os conteúdos curriculares referentes ao quinto e sexto anos, e, no segundo semestre, trabalhariam os conteúdos curriculares referentes ao sétimo ano.

4.1.1 Perfil das turmas

A turma escolhida para ser submetida à sequência didática envolvendo a RP sob a ótica de um esquema colaborativo era composta de 30 alunos, sendo um deles diagnosticado com autismo leve. Enquanto a outra turma que seria mantida em uma abordagem tradicional possuía 40 alunos. As faixas etárias das duas turmas eram similares, de 12 a 13 anos, e boa parte dos alunos era egressa de escolas da rede pública, com uma minoria, porém significativa, da rede particular. Seus responsáveis, em geral, possuíam formação de Ensino Médio, muitos deles eram trabalhadores autônomos, moradores de sub-bairros próximos à escola e não beneficiários de programas sociais governamentais. Todos tinham acesso à internet através de dispositivos móveis.

Um outro fato relevante é que as turmas eram compostas por alunos com um nível de dispersão elevado em aula. Uma parcela significativa dos alunos tinha o costume de dormir durante as aulas, outros interagiam pouco com o professor e, entre eles, era frequente a distração por conta do uso de celular com fim recreativo no transcorrer das aulas. Os alunos demonstravam ter baixa autoestima em relação à Matemática, justificada através de muitos relatos de insucessos nas relações deles com os professores, do não entendimento de conteúdos e dos baixos rendimentos em provas. E, isso gerava neles um alto grau de desinteresse para com o professor e a disciplina.

4.1.2 Divisão da turma e planejamento

Como não havia nenhuma avaliação anterior (quantitativa ou qualitativa) que pudesse fornecer dados de desempenho dos alunos, o professor optou por permitir que os alunos realizassem a organização dos grupos, impondo algumas condições: que cada grupo não tivesse mais de três alunos oriundos da mesma instituição de Ensino Fundamental (anos iniciais) e que respeitassem o limite máximo de 6 alunos por grupo. Na fase de organização dos grupos, foi percebida muita resistência por parte dos alunos, pois muitos queriam trabalhar com parceiros oriundos da mesma escola.

Quanto às atividades, após a organização dos grupos, o professor planejou, para fase a de execução, seis aulas: uma por semana, com duração de uma hora e quarenta minutos cada. Nas três primeiras, os alunos teriam que se debruçar, em grupo, sobre três problemas propostos cujo objetivo era desenvolver o tema bimestral, equação do 1º grau. Cada problema era dividido em subitens a fim de explorar conceitos matemáticos em situações que visavam aproximar a realidade dos alunos ao universo da Matemática.

A quarta aula foi reservada para apresentações, em grupo, das soluções encontradas e promover discussões e reflexões acerca dos resultados obtidos durante o desenvolvimento dos problemas, dos diferentes caminhos traçados a fim de obtê-los, dos conceitos inseridos e dos efeitos cognitivos e interpessoais da aprendizagem colaborativa no processo de ensino-aprendizagem da turma.

Para a quinta e a sexta aulas, foram reservadas duas avaliações - uma em grupo, e outra individual - para efeito de levantamento do aproveitamento dos alunos sob aspecto quantitativo.

Todos os problemas propostos para a turma foram retirados do material pedagógico intitulado “Material Teórico – Módulo de EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU” – cuja autoria é do professor Francisco Bruno Holanda e tem como revisor o professor Antônio Caminha Muniz Neto, de 10 de dezembro de 2018, do Portal da Matemática – OBMEP[3]. As atividades foram adaptadas para atender os objetivos do experimento (promover discussões, reflexões e socialização em decorrência das interações entre os alunos e o professor) e a Matriz de Referência da Coordenadoria de Avalição da

[3] https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=44

SMERJ; e as habilidades previstas na BNCC para serem trabalhadas com estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental (anos finais).

A Matriz de Referência da Coordenação de Avalição da SMERJ traz, em sua página 31, para avaliação das turmas de sétimo ano da rede, as seguintes habilidades a serem desenvolvidas ao longo do período, relacionadas ao tema de equação do primeiro grau e resolução de problemas:

- sexta habilidade – código R6pMTpr03: Resolver problemas com as informações apresentadas nas tabelas e nos gráficos de colunas, barras, linhas e setores;
- décima primeira habilidade – código R6pMTal01: Calcular o valor desconhecido em uma igualdade, envolvendo adição, subtração, multiplicação ou divisão de números naturais, aplicando o conceito de operações inversas ou estratégias próprias.

E, sustentando a Matriz de Referência da SMERJ, a BNCC elenca, na página 308, para o estudo da Álgebra, em turmas de sétimo ano, como objeto de conhecimento a ser trabalhado: a “Linguagem Algébrica: variável e incógnita”. E, na sua página 309, as habilidades relacionadas:

- (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos;
- (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita;
- (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
- (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; e
- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

4.2 **Descrição das atividades**

4.2.1 Atividade 1 – Aula 1

Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1.000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados e concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastaria um selo de R$ 0,65, enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que fossem comprados selos de modo a possibilitar a postagem de exatamente 500 folhetos do segundo tipo, assim como uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do maior número possível de folhetos do primeiro tipo.

a) Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

b) Escrever a sentença matemática que representa a situação-problema apresentada.

c) Ao escrever a sentença matemática, houve a utilização de incógnita ou variável?

d) Utilizando a sentença matemática do item (b), verifique se a solução do problema, obtida no item (a), pertence realmente ao conjunto solução.

4.2.1.1 Relatório do desenvolvimento da atividade

Grupo1 – Considerações Gerais:

I. os alunos apresentaram dificuldade em leitura, o que comprometeu a compreensão do problema e seus itens, obrigando o professor a prestar auxílio;

II. houve dificuldade em operar números decimais;

III. dificuldade em compreender como trabalhar em grupo de forma colaborativa, mediante a isso o professor fez uma explanação, para todos da turma, sobre o que se esperava de um trabalho colaborativo;

IV. o grupo tendia à hierarquização de funções e à segmentação das tarefas;

V. houve uma interação efetiva entre os membros do grupo, porém muito provocada pelo professor.

a) Observações referentes à execução do item (a):

I. os alunos perceberam que precisariam calcular o valor gasto, em selos, para envio dos 500 folhetos do segundo tipo;

II. realizaram o cálculo do valor restante para o envio dos folhetos do tipo um.

III. atentaram para o fato da divisão não ser exata, logo não poderiam considerar a parte decimal para efeito de resposta;

IV. Não perceberam que deveriam adicionar ao dado obtido no item (III) os 500 selos de R$0,65 enviados nos folhetos de segundo tipo.

b) Observações referentes à execução do item (b):

I. apresentaram dificuldade inicial para identificar o que seria o valor desconhecido e o que usar para representá-lo;

II. foi necessária bastante interferência por parte do professor para que o grupo observasse e avaliasse cada passo dado no item (a) e ordená-los de forma a obter sentença matemática.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Os entendimentos dos conceitos de variável e incógnita, e, consequentemente, suas diferenças, foram extraídos após muito debate com pouca interferência do professor.

d) Observações referentes à execução do item (d)

O grupo teve dificuldade em compreender que a incógnita utilizada, para escrever a equação pedida no item (b), só representava a quantidade de selos utilizada no envio dos folhetos de primeiro tipo. Enquanto a reposta obtida em (a) representava a quantidade total de selos de R$ 0,65, utilizados nos dois tipos de envelopes. A partir dessa dificuldade, foi possível promover um debate sobre o quanto se fazia importante definir bem o termo utilizado como incógnita e estar atento aos detalhes de um problema.

Grupo 2 – Considerações Gerais:

I. os alunos apresentaram muita dificuldade em leitura, comprometendo bastante a compreensão do problema e seus itens. O professor precisou prestar auxílio com a leitura;

II. dificuldade em operar com números decimais;

III. o grupo tendia à hierarquização das funções e à segmentação das tarefas;

IV. houve uma interação efetiva entre os membros do grupo, porém muito provocada pelo professor.

a) Observações referentes à execução do item (a):

I. os alunos perceberam que precisavam calcular o valor gasto, em selos, para envio dos 500 folhetos do segundo tipo;

II. calcularam do valor restante para o envio dos folhetos do tipo um;

III. atentaram para o fato de que a divisão não era exata, logo não poderiam considerar a parte decimal para efeito de resposta;

IV. perceberam que deveriam adicionar ao dado obtido no item (III) os 500 selos de R$ 0,65 utilizados nos folhetos de segundo tipo.

b) Observações referente à execução do item (b):

I. os alunos apresentaram dificuldade inicial para identificar o que seria o valor desconhecido e o que usar para representá-lo;

II. foi necessária bastante interferência por parte do professor para que o grupo observasse cada passo dado no item (a) e os sequenciasse a fim de obter a expressão algébrica.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Os entendimentos dos conceitos de variável e incógnita, e, consequentemente, suas diferenças, foram extraídos após muito debate com pouca interferência do professor.

d) Observações referente à execução do item (d)

O grupo apresentou as mesmas dificuldades sinalizadas pelo grupo 1, e o professor procedeu de maneira análoga.

Grupo 3 – Considerações Gerais:

I. os alunos apresentaram dificuldade em leitura, comprometendo a compreensão do problema e seus itens, obrigando o professor a prestar auxílio;

II. dificuldade em operar com números decimais;

III. os alunos pouco agiam para cumprir os itens, as tarefas eram deixadas a cargo de dois alunos que tomavam as iniciativas;

IV. houve pouca interação entre os alunos, o professor fez muitas intervenções a fim de provocá-los a debater, a refletir sobre possíveis ações que poderiam executar para resolver os itens.

a) Observações referente à execução do item (a)

Cumpriu parcialmente o que foi pedido:

I. os alunos não perceberam que, inicialmente, precisariam calcular o valor gasto, em selos, para envio dos 500 folhetos do segundo tipo, essa noção só obtiveram após o momento que o professor exibiu exemplos de situações similares;

II. houve o cálculo do valor restante para o envio dos folhetos do tipo um;

III. os alunos não atentaram para o fato da divisão não ser exata, logo não poderiam considerar a parte decimal para efeito de resposta;

IV. os alunos não perceberam que deveriam adicionar ao dado obtido no item (III) os 500 selos de R$0,65, utilizados nos folhetos de segundo tipo.

b) Observações referentes à execução do item (b):

I. os alunos encontraram dificuldade para identificar o que seria o valor desconhecido e o que usar para representá-lo;

II. foi necessária bastante interferência por parte do professor para que o grupo observasse cada passo dado no item (a), mas os alunos não conseguiram escrever a expressão algébrica.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Os entendimentos dos conceitos de variável e incógnita, e, consequentemente, suas diferenças, foram extraídos após muito debate e muitas intervenções realizadas pelo professor. Através da apresentação de alguns exemplos, envolvendo o uso de variáveis e incógnitas, os alunos foram levados a construir os conceitos e a apontar a diferença entre variável e incógnita.

d) Observações referentes à execução do item (d)

Os alunos não fizeram esse item, pois o item (b) ficara incompleto.

Grupo 4 – Considerações Gerais:

I. os alunos apresentaram dificuldade em leitura, fato que comprometeu a compreensão do problema e seus itens, obrigando o professor a prestar auxílio;

II. os alunos apresentaram dificuldade em operar com números decimais;

III. pouca interação entre os elementos do grupo. Muitas vezes, se o professor não provocasse, apenas alguns alunos se incumbiam de realizar as tarefas;

IV. o grupo tendia a hierarquização de funções e uma segmentação das tarefas;

V. houve pouca interação entre os alunos, o professor precisou acompanhar bem mais de perto o andamento das tarefas. O professor sempre interferia na tentativa dos alunos segmentarem a execução dos itens. Para isso, solicitava que um mesmo item fosse analisado e executado por todos simultaneamente.

a) Observações referentes à execução do item (a):

I. a dificuldade em leitura e compreensão textual comprometeu a análise dos dados fornecidos, o objetivo do item e a identificação de caminhos lógicos existentes para executar a tarefa;

II. para identificar os passos a serem dados, houve muita interferência (provocação) do professor. Após isso, o grupo compreendeu quais eram os dados fornecidos, a necessidade de calcular o que já fora gasto com o envio dos 500 folhetos do segundo tipo. Entendeu que ocorreria uma sobra de dinheiro, e que tal sobra seria o resultado da subtração da verba total destinada à escola e o valor gasto no envio dos 500 folhetos. E, que, com essa sobra, todo o valor seria usado par enviar folhetos do primeiro tipo;

III. na execução dos cálculos, o grupo apresentou muita insegurança com as operações matemáticas, principalmente, porque envolviam números decimais. Os cálculos foram executados após vários exemplos de operações com números decimais serem realizados pelo professor;

IV. o grupo não percebeu que, para responder o item (a), não bastava calcular quantos selos de R$0,65 seriam necessários para o envio dos folhetos de primeiro tipo. Ou seja, não observou que esse dado era parte integrante da resposta e que, para responder completamente o item, deviria adicionar esse dado aos 500 selos utilizados no envio dos folhetos de segundo tipo.

b) Observações referentes à execução do item (b):

I. os alunos apresentaram dificuldade inicial para identificar o que seria o valor desconhecido e o que usar para representá-lo;

II. foi necessária bastante interferência por parte do professor para que o grupo observasse cada passo dado no item (a) e, em seguida, sequenciá-los a fim de obter a expressão algébrica.

c) Observações referentes à execução do item (c)

O conceito de variável e o de incógnita foram obtidos a partir de muitas exemplificações sugeridas pelo professor. Os alunos conseguiram defini-las e apontar as diferenças. E, ainda, conseguiram apontar diferentes situações em que era possível utilizá-las.

d) Observações referentes à execução do item (d)

O grupo teve dificuldade em compreender que a incógnita utilizada, para escrever a equação pedida no item (b), só representava a quantidade de selos utilizada no envio dos folhetos de primeiro tipo. Enquanto que a reposta obtida em (a) representava a quantidade total de selos obtidos de R$0,65 nos dois tipos de envelopes. A partir dessa dificuldade, foi possível promover um debate sobre o quanto se fazia importante definir bem o termo utilizado como incógnita e estar atento aos detalhes de um problema.

Grupo 5 – Considerações Gerais:

I. a dificuldade em leitura, apresentada pelos alunos, comprometeu a compreensão do problema e seus itens, obrigando o professor a prestar auxílio;

II. dificuldade em operar com números decimais;

III. o grupo formado por alunos bem engajados com a proposta de trabalho, porém tendiam à segmentação das tarefas entre os entes do grupo;

IV. houve uma interação efetiva entre os membros do grupo.

a) Observações referentes à execução do item (a):

I. os alunos perceberam que seria necessário calcular o valor gasto, em selos, para envio dos 500 folhetos do segundo tipo;

II. calcularam do valor restante para o envio dos folhetos do tipo um;

III. não atentaram ao fato da divisão não ser exata, logo não poderiam considerar a parte decimal para efeito de resposta;

IV. perceberam que deveriam adicionar ao dado obtido no item (III) os 500 selos de R$ 0,65, utilizados nos folhetos de segundo tipo.

b) Observações referentes à execução do item (b):

I. dificuldade inicial para identificar o que seria o valor desconhecido e o que usar para representá-lo;

II. foi necessária bastante interferência por parte do professor para que o grupo observasse cada passo dado no item (a) e, em seguida, sequenciá-los a fim de obter a expressão algébrica.

c) Observações referente à execução do item (c)

Os entendimentos dos conceitos de variável e incógnita, e, consequentemente, suas diferenças foram concebidos pelos alunos após muito debate e exemplificações.

d) Observações referentes à execução do item (d)

Os alunos apresentaram dificuldade em compreender que a incógnita utilizada, para escrever a equação pedida no item (b), só representava a quantidade de selos utilizada no envio dos folhetos de primeiro tipo. Enquanto que a reposta obtida no item (a) representava a quantidade total de selos obtidos de R$ 0,65 nos dois tipos de envelopes. A partir dessa dificuldade, foi possível promover um debate sobre o quanto se fazia importante definir bem o termo utilizado como incógnita e estar atento aos detalhes de um problema.

4.2.2 Atividade 2 – Aula 2

Uma fábrica de camisas usa a seguinte expressão matemática para obter os custos de produção mensal em função da quantidade de camisas produzidas: $C(x) = 5000 + 15 \cdot x$, onde

x representa a quantidade de camisas, $C(x)$ é o custo obtido, em reais, na produção dessas x camisas. E, essa mesma fábrica possui um preço de venda unitário de camisa igual a R$ 25,00

a) Complete a tabela 1 a partir dos dados fornecidos:

Tabela 1 - Demonstração Financeira da Produção

Mês de Produção	Quantidade unidades de camisas produzidas (x)	Custo de produção ($C(x)$)	Receita obtida nas vendas das camisas	Lucro obtido com as vendas das camisas produzidas
Janeiro	1000			
Fevereiro	2000			
Março	1500			
Abril	2500			
Maio	3000			

Fonte: O autor, 2022

b) Com base no que foi feito para completar a tabela acima, na sentença $C(x) = 5000 + 15 \cdot x$, C e x são usadas como variáveis ou incógnitas?

c) Defina Receita de Vendas e obtenha uma sentença matemática que, sabendo a produção x de camisas, seja possível calcular a receita de vendas.

d) Defina Lucro e obtenha uma sentença matemática que, sabendo a produção x de camisas, seja possível calcular o lucro das vendas.

e) Se o lucro do mês de junho ficou em R$ 2.000,00, qual foi a quantidade x de camisas produzidas? Determine uma sentença matemática que retrate essa situação. E, utilizando a sentença obtida, verifique se a solução encontrada é realmente solução da sentença obtida.

4.2.2.1 Relatório de desenvolvimento da atividade

Grupo 1 - Considerações Gerais:

I. o professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado, propor vários exemplos para que os alunos compreendessem o conceito de custo nas relações comerciais;

II. o grupo teve muita dificuldade para compreender a equação que relacionava o custo de produção das camisas à quantidade de camisas produzidas. O professor precisou interferir, utilizando exemplos que se aproximavam da realidade do alunos como: o custo da conta de energia elétrica e da de água em função do consumo mensal da família.

a) Observações referentes à execução do item (a)

O grupo não teve dificuldade em compreender as informações fornecidas pelos títulos das três primeiras colunas da tabela. Porém, as colunas que pediam para calcular receita e lucro demandaram mais tempo para terem seus conceitos compreendidos: para o grupo, lucro era todo o dinheiro que se arrecadava na venda de um produto. Ou seja, os alunos não consideravam o custo de produção como parcela integrante do valor obtido na venda. Nesse momento, o professor interferiu, pedindo aos alunos que refletissem se o custo estava ou não inserido no valor arrecadado na venda. E, a partir dessa provocação, perceberam que o conceito de lucro, apresentado inicialmente, estava equivocado. Alguns exemplos por parte de alguns alunos foram formulados a fim de que o grupo fechasse um consenso em relação aos conceitos de lucro e valor de venda.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos não tiveram dificuldade para percebe que os termos algébricos, envolvidos na equação, tratavam-se de variáveis. Consequência direta das ações executadas no item (a), no qual, para cada valor da quantidade de camisa fornecido, os alunos calcularam seus respectivos custos.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Definir receita de vendas não foi um problema para o grupo, pois foi tema de debate na execução do item (a). Porém escrever uma generalização matemática para o cálculo da receita em função da produção de camisas, ainda, demandou um tempo maior de discussão. Uma dúvida foi se precisariam de uma outra letra (variável) para representar a receita. Devido à prática obtida, ao completarem a tabela do item (a), os componentes perceberam a existência de um padrão para se calcular a receita: sempre multiplicar o preço de venda unitário pela quantidade de camisas. Por uma questão de associação, batizaram a receita com a variável de R, uma vez que perceberam que o custo foi batizado de C pelo próprio enunciado.

d) Observações referentes à execução do item (d)

Embora tenha havido debate no item(a) sobre a relação entre preço de custo, receita e lucro, o grupo não conseguiu realizar o que o item pedia. Quando era dado qualquer valor numérico para quantidade de camisas produzidas, o grupo conseguia obter os valores do custo, da receita e de lucro (fazendo a diferença entre os valores arrecadados na venda e gasto na produção). Porém, mesmo com as expressões matemáticas do custo, fornecida pelo enunciado, e da receita, obtida no item (c), o grupo deixou o item incompleto. Então, o professor sugeriu que o grupo abordasse esse item na fase de exposição dos grupos para ampliar a discussão.

Observações referentes à execução do item (e)

Como não chegou a uma expressão matemática que fornecesse o lucro em função da quantidade de camisas produzidas, mesmo com provocações realizadas pelo professor, o grupo optou por deixar o item em branco.

Grupo 2 – Considerações Gerais:

I. o professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado, propor vários exemplos para os alunos compreenderem o conceito de custo nas relações comerciais;

II. a compreensão da equação dada com duas variáveis, assim como no primeiro grupo, foi uma outra dificuldade apresentada pelos alunos. O professor agiu de forma análoga à adotada no grupo 1.

Observações referentes à execução do item (a)

Para completar a tabela, o grupo não teve dificuldade para entender as informações fornecidas e calcular o custo em função das quantidades de camisas produzidas. As dificuldades apresentadas foram em relação aos conceitos de receita e lucro. O grupo também apresentou, como conceito de lucro, o dinheiro obtido na venda de algum produto. Mais uma vez o professor interveio com algumas situações de compra e venda para que os alunos percebessem as diferenças e a relação entre valor de custo, valor de venda (receita) e lucro.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos observaram que os termos algébricos, envolvidos na equação custo em função da produção, correspondiam a variáveis, e não a incógnitas. Pois, ao analisarem como foi feito o preenchimento do tabela do item (a) e da coluna custo, perceberam que os valores do custo mudavam em função da mudança da quantidade de camisas fornecida.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Definir receita de vendas não foi um problema para o grupo, pois o tema foi debatido no item (a). O grupo conseguiu escrever a expressão matemática para o cálculo da receita a partir da multiplicação do valor unitário de venda da camisa pela variável que definia a quantidade de camisas produzidas. Porém, os alunos não escreveram uma equação de duas variáveis, só expressaram a receita com a expressão algébrica (“fórmula”, segundos alunos) $25 \cdot x$.

d) Observações referentes à execução do item (d)

Após o debate, por conta da execução do item(a), sobre a relação entre preço de custo, receita e lucro, o grupo conseguiu escrever uma expressão para calcular o lucro, não definindo para tanto uma variável para representá-lo. Conseguiram obter a expressão, de forma correta: subtraindo da expressão receita (obtida no item (c)) a expressão custo (fornecida pelo problema).

Ao juntar as duas expressões, através da subtração, foi discutida a importância de se usar parênteses na expressão custo. O professor propôs que os alunos fizessem a utilização das expressões $25x - (5000 - 15x)$ e $25x - 5000 + 15x$ com os valores de x fornecidos na tabela e comparassem com os resultados obtidos no item (a). Assim, os alunos conseguiram perceber a importância do uso dos parênteses e definir qual das expressões deveriam usar para definir como lucro.

e) Observações referentes à execução do item (e)

O grupo compreendeu que a primeira ação, a ser executada, era igualar o lucro fornecido pelo enunciado à expressão obtida no item (d). Ficou claro para todos os componentes (fato percebido a partir de algumas estratégias adotadas pelo professor: indagações a cada elemento do grupo, solicitação de explicações sobre os passos que estavam sendo dados pelo grupo) que haveria uma quantidade específica de camisas produzidas que daria o lucro especificado pelo enunciado. Por isso, o x , usado na expressão, não era mais considerado como variável, mas sim uma incógnita. Porém, não finalizaram a tarefa solicitada por não compreenderem os passos futuros a serem dados para chegarem à quantidade de camisas.

O professor deixou o tema em aberto para ser discutido na fase de apresentação.

Grupo 3 – Considerações Gerais:

I. o professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado e propor vários exemplos para os alunos compreenderem o conceito de custo nas relações comerciais;

II. a compreensão da equação dada com duas variáveis, assim como ocorreu com o primeiro grupo, foi uma outra dificuldade apresentada pelos alunos. O professor agiu de forma análoga à adotada no grupo 1.

a) Observações referentes à execução do item (a)

Os alunos não tiveram dificuldade para completar a coluna referente ao cálculo dos custos. Compreenderam a relação entre o fornecimento da quantidade de camisas produzidas e o seu custo. Porém, nenhum dos membros trazia conhecimentos prévios de lucro e receita.

O professor teve que articular várias situações práticas e próximas à realidade dos alunos para que eles entendessem a ideia de receita e a ideia de lucro para auxiliá-los na compreensão dessas grandezas.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos identificaram que os termos algébricos, relacionados na equação custo em função da produção de camisas, tratavam-se de duas variáveis. E, essa identificação foi possível por conta do trabalho de preenchimento da tabela, e especificamente da coluna custo, requerido no item (a): a cada valor de produção de camisas, era calculado, através da equação, o seu custo de produção. Ou seja, à medida que a quantidade de camisas variava, o custo de produção também variava.

c) Observações referentes à execução do item (c)

O grupo definiu receita, porém sentiu muita dificuldade em relacionar o preço unitário de venda de cada camisa à quantidade de camisas. Embora tenham calculado a receita para cada quantidade de camisas fornecida na tabela, não conseguiram generalizar. Quando o professor solicitou que o grupo explicasse qual foi o procedimento que utilizou para calcular a receita de cada produção dada na tabela, o grupo soube explicar com exatidão, porém, mesmo assim, não conseguiu representar através de uma expressão algébrica ou equação.

d) Observações referentes à execução do item (d)

Não tiveram dificuldade de definir lucro, porém não concluíram o item por conta das barreiras encontradas no item (c).

e) Observações referentes à execução do item (e)

Os alunos não fizeram a questão no período previsto para execução das tarefas e o professor deixou para voltar ao tema na fase da apresentação dos trabalhos.

Grupo 4 – Considerações Gerais:

I. O professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado, propor vários exemplos para os alunos compreenderem o conceito de custo nas relações comerciais;

II. a compreensão da equação dada com duas variáveis, assim como no primeiro grupo, foi uma outra dificuldade apresentada pelos alunos. O professor agiu de forma análoga à adotada no grupo 1;

III. grupo composto por alunos muito dispersos que demandou do professor um acompanhamento mais estreito a fim de que as tarefas fossem executadas.

a) Observações referentes à execução do item (a)

O grupo demonstrou ter muitas dificuldades no preenchimento da tabela: dificuldade em compreender que precisaria usar os dados da segunda coluna para efetuar as operações matemáticas demandadas na terceira coluna; dificuldade em executar as operações de multiplicação e adição envolvendo números com 4 algarismos; dificuldade em seguir a ordem de prioridade das operações; e dificuldade em associar o termo algébrico x à cada quantidade de camisas produzidas em cada mês. O professor precisou fazer muitas intervenções para que os alunos conseguissem executar os comandos de cada coluna.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Mesmo que o tema tenha sido debatido no problema 1, pelo nível de dispersão do grupo, o professor precisou reconstruir todo uma linha de pensamento para que os alunos recuperassem o entendimento de incógnita e variável estabelecido no problema anterior. A partir disso, o professor pediu para que os alunos lessem o item (b) com atenção e debatessem, entre eles, a classificação dos termos usados na equação custo em função da produção das camisas.

c) Observações referentes à execução do item (c)

O grupo manifestou desconhecer o conceito de receita. Para auxiliar na construção do conceito, o professor apresentou vários exemplos a fim de que os alunos deduzissem o conceito de receita a partir da observação dessas situações propostas. E, ainda solicitou que os mesmos tentassem buscar nas suas vivências outras situações semelhantes aos exemplos dados. Um dos alunos quis saber se serviria como exemplo de receita o dinheiro que a mãe recebia com a venda de máscaras por conta da COVID-19. O professor assentiu positivamente e pediu para que os outros alunos dessem pelo menos um exemplo que envolvesse o conceito de receita. Surgiram mais alguns exemplos positivos, o que possibilitou aos alunos entrar num consenso sobre o conceito de receita.

Pelo item (a), entenderam que precisavam multiplicar a quantidade de camisas pelo valor de vendas. Mas, não conseguiram generalizar.

d) Observações referentes à execução do item (d)

Alguns alunos já tinham ouvido falar em lucro, mas, ao explicarem, todas as explicações não levavam em consideração o custo, ou seja, o professor teve que interferir, propondo situações para que eles percebessem que o lucro estava relacionado com o valor de custo e o preço de venda de um produto. Foi solicitado a eles que dessem exemplos do cotidiano deles onde houvesse um custo e um preço de venda e que eles extraíssem o lucro e comparassem com a receita. E, após isso, perceberam que lucro e receita não poderiam ser iguais, e, mais do que isso, entenderam que a receita é composta pelo lucro e o custo, porém o grupo não conseguiu uma generalização para o lucro.

e) Observações referentes à execução do item (e)

O item foi deixado em branco embora o grupo tivesse chegado à relação entre o lucro, preço de venda e preço de custo no item anterior. Mas, por não ter generalizado os itens (c) e (d), não conseguiu montar a equação e fazer os outros comandos propostos.

Grupo 5 – Considerações Gerais:

I. o professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado, propor vários exemplos para os alunos compreenderem o conceito de custo nas relações comerciais;

II. a compreensão da equação dada com duas variáveis, assim como no primeiro grupo, foi uma outra dificuldade apresentada pelo pelos alunos. O professor agiu de forma análoga à adotada no grupo 1.

a) Observações referentes à execução do item (a)

O grupo não encontrou dificuldades para completar a coluna do custo, porém nenhum dos alunos demonstrou conhecimento nos conceitos de receita e lucro. O professor agiu de forma análoga à condução realizada nos demais grupos que apresentaram essa mesma característica.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos não demonstraram dificuldade para perceber que os termos algébricos, envolvidos na equação, tratavam-se de variáveis. Consequência direta das ações executadas no item (a), no qual, para cada valor da quantidade de camisas fornecido, experienciaram as mudanças dos valores do custo de produção.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Após provocação realizada pelo professor no item (a), o grupo conseguiu definir receita de forma satisfatória e após análise do caminho operacional realizado no item em (a) conseguiram uma expressão para generalizar a grandeza receita.

d) Observações referentes à execução do item (d)

O grupo conseguiu generalizar a expressão lucro a partir da definição cunhada no debate promovido no item (a). Houve uma divergência na escrita da sentença. Alguns alunos encontraram a expressão $\mathrm{L}(x) = 25x - (5000 + 15x)$, enquanto outros defendiam que fosse $\mathrm{L}(x) = 25x - 5000 + 15x$. Para chegarem ao consenso, o professor propôs que fizessem as substituições da variável x pelas respectivas quantidades de camisas mensais dadas na tabela e, a partir dessa testagem, decidissem qual seria a equação correta.

e) Observações referentes à execução do item (e)

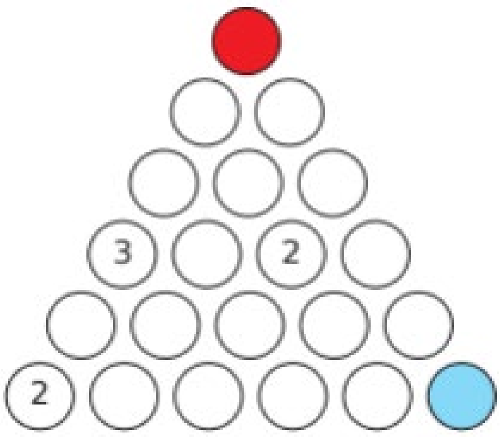
O grupo compreendeu que a sentença obtida no item (d) deveria ser usada para responder o item (e). Igualaram a sentença $25x - (5000 + 15x) = 2000$.

A primeira dúvida que pairou na execução foi a questão do sinal negativo antes dos parênteses. O professor revisitou com os alunos a propriedade distributiva da multiplicação e a do elemento neutro. O segundo desafio foi elaborar o caminho a ser seguido para se chegar ao valor da incógnita. Após algumas propostas de equações fornecidas pelo professor e sugestões pedidas para chegar-se ao termo x em um dos membros da equação, os alunos se sentiram encorajados a resolver o item por eles mesmos.

4.2.3 Atividade 3 – Aula 3

Números naturais devem ser escritos dentro de cada círculo vazio da figura 1, dentro de 3 possibilidades possíveis, de modo que a soma dos números escritos em três círculos alinhados e consecutivos seja sempre a mesma.

Figura 1 – Triângulo Numérico



Fonte: Portal OBMEP, 2018

(a) Qual número deverá ser escrito no círculo preto?

(b) Mostre que a soma de todos os números escritos é um múltiplo de 7.

(c) Para que a soma de todos os números escritos seja 63, qual número deverá ser escrito no círculo cinza?

4.2.3.1 Relatório de desenvolvimento da atividade

Grupo 1 – Considerações Gerais:

O professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado. Os alunos demonstraram não saber o significado da seguinte expressão do enunciado: “três círculos alinhados e consecutivos”. O professor propôs que os alunos pesquisassem, no dicionário, o que significava alinhamento. E, após, pediu para explicarem se havia relação entre as palavras alinhados e alinhamento. Para recuperar o conceito de consecutivo, o professor recapitulou o estudo dos números naturais e como ele foi criado através dos axiomas de Peano, vistos em aulas anteriores.

a) Observações referentes à execução do item (a)

O grupo achou que o valor que deveria ser colocado no círculo preto era o 3. E, para chegar a essa conclusão, simplesmente, os alunos escolheram o número 1 (colocando-o entre o 2 e 3, indicados na figura) e foram preenchendo os demais círculos de modo a obedecer ao comando da questão que dizia que a soma dos três números de três círculos alinhados e consecutivos deveria ser a mesma.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos limitaram-se a somar todos os valores da figura do item anterior e perceberam que soma deu 42. Todos concordaram que o valor achado era múltiplo de 7, justificando que, quando construíam a tabuada de multiplicação do 7, o 42 era um dos números que constavam na mesma. Porém, o professor os provocou a trocar o número 1 por outros números naturais. Assim foi feito e verificaram que as somas achadas eram múltiplos de 7.

O professor perguntou se haveria uma forma de estabelecer uma expressão algébrica simples para representar um número natural que eles pudessem colocar entre os números 3 e 2 da figura. Os alunos propuseram x, pois já estavam habituados a esse termo para designar algo genérico, baseado nos problemas anteriores. Fizeram as alterações necessárias e obtiveram a seguinte expressão para soma: $7x + 35$.

Em seguida, o professor pediu para eles atribuírem a x os valores numéricos testados anteriores e o grupo percebeu que a expressão assumia os mesmos valores das somas anteriores, concluindo que a expressão sempre tinha como resultado múltiplo de 7.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Os alunos fizeram mais algumas tentativas de substituições numéricas a fim descobrir qual o número natural específico que se encaixaria na figura para que a soma de todos os termos desse 63 uma vez que nas tentativas anteriores nenhuma das somas dera 63. Como todas as tentativas feitas foram frustradas, o professor provocou-os a pensar na expressão algébrica que os mesmos determinaram no item anterior e no que ela fornecia. Após algum tempo, um dos membros tomou a iniciativa de igualar a expressão ao número 63 e perceberam que geraram uma equação. O professor indagou quais os passos que eles deveriam dar para acharem o valor de x. Por fim, conseguiram achar o resultado esperado.

Grupo 2 – Considerações Gerais:

O grupo apresentou dificuldade análoga à do grupo 1, fazendo com que o professor agisse da mesma maneira a adotada no referido grupo.

a) Observações referentes à execução do item (a)

Os alunos afirmaram que o valor que deveria ser colocado no círculo preto era o 3. E, para chegar a essa conclusão, simplesmente, os alunos escolheram o número zero (colocando-o entre o 2 e 3, indicados na figura) e preencheram os demais círculos de modo a obedecer ao comando da questão que dizia que a soma dos três números de três círculos alinhados e consecutivos deveria ser a mesma.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos limitaram-se a somar todos os valores da figura do item anterior e perceberam que soma deu 35. Nem todos os alunos do grupo sabiam o conceito de múltiplo, ou a condição para que um número natural fosse múltiplo de outro natural. Os alunos que afirmaram saber, justificaram para os demais, através da divisão, que 35 era múltiplo de 7, pois o resto da divisão de 35 por 7 era zero. O professor os provocou a darem outros exemplos de números que seriam múltiplos de 7 e usarem a divisão para atestar o resto zero.

Foi pedido também aos alunos que fizessem alguns testes, trocando o zero por outros naturais. E, que verificassem se as somas obtidas dariam um múltiplo de 7, algo que foi feito e verificado.

Após isso, o professor fez uma pergunta análoga à feita para o grupo 1 a fim de estabelecer uma expressão algébrica para soma de todos os números naturais da figura. Os alunos também propuseram x, e pela mesma razão (de terem observado no problema anterior). Fizeram as alterações necessárias e chegaram à expressão para a soma: $7x + 35$. Em seguida, os alunos também substituíram o x por outros valores para atestar o funcionamento da expressão.

c) Observações referentes à execução do item (c)

O grupo agiu de forma análoga ao grupo 1: os alunos fizeram tentativas de substituições numéricas a fim descobrir qual o número natural específico que se encaixaria na figura para que a soma de todos os termos desse 63. Como todas as tentativas foram frustradas, o professor provocou-os a pensar na expressão algébrica que os mesmos determinaram no item anterior e no que ela fornecia. Porém, de início, os alunos não tiverem a iniciativa de igualar a sentença que obtiveram no item anterior ao número 63. Foram retomadas as discussões sobre o tipo de números naturais que a expressão gerava e o de quais números o 63 era múltiplo. Após muitas provocações, realizadas pelo professor, os alunos compreenderam que era preciso igualar a expressão ao número fornecido, 63.

Para achar a solução da equação, o professor auxiliou os alunos de forma análoga à utilizada com o grupo 1.

Grupo 3 – Considerações Gerais:

O professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado. Os alunos demonstraram não saber o significado da expressão "três círculos alinhados e consecutivos", presente no enunciado. O professor propôs que os alunos pesquisassem, no dicionário, o que significava alinhamento. E, após, explicarem se havia relação entre as palavras alinhados e alinhamento. Para recuperar o conceito de consecutivo, o professor recapitulou o estudo dos números naturais e como ele foi criado através dos axiomas de Peano, vistos em aulas anteriores.

a) Observações referentes à execução do item (a)

Os alunos consideraram que o valor que deveria ser colocado no círculo preto era o 3. E, para chegar a essa conclusão, simplesmente, os alunos escolheram o número 1 (colocando-o entre o 2 e 3, indicados na figura) e preencheram os demais círculos de modo a obedecer ao comando da questão que dizia que a soma dos três números de três círculos alinhados e consecutivos deveria ser a mesma.

b) Observações referentes à execução do item (b)

Os alunos limitaram-se a somar todos os valores da figura do item anterior e perceberam que a soma deu 42. Os alunos não sabiam o conceito de múltiplo, o professor propôs que os alunos fizessem a divisão da soma por 7 e observasse o resto da divisão. Como todos acharam zero, o professor observou que aquela era a condição para um número ser múltiplo de 7. O professor provoco-os a testar mais dois outros números naturais como exemplos de número a ser colocado no círculo. Os alunos usaram 11 e 8 acharam como soma 112 e 91, fizeram a divisão por 7 e obtiveram resto zero. Então, concluíram que existe uma regularidade para a soma dos números colocados nos círculos.

O professor fez uma pergunta análoga à feita para o grupo 1 a fim de estabelecer uma expressão algébrica para a soma de todos os números naturais da figura. Os alunos também propuseram x, e pela mesma razão (de terem observado no problema anterior). Fizeram as alterações necessárias e chegaram à expressão para soma: $7x + 35$.

c) Observações referentes à execução do item (c)

O grupo recorreu a tentativas numéricas de maneira tal que a soma de todos os números desse 63. E, um dos números testado foi o 4, a resposta correta. Mas, a fim de direcionar a resolução do item para o estudo de equação do primeiro grau, o professor indagou aos alunos se haveria uma outra maneira de achar o mesmo resultado, porém usando a expressão algébrica obtida no item anterior. O grupo, de maneira consensual, afirmou que a expressão deveria ser igualada ao número fornecido. Um dos alunos havia pesquisado em videoaula sobre o assunto e afirmou que para resolver era somente fazer as operações inversas com o número 63, ou seja, subtrair 35 do mesmo e, depois, dividir por quatro.

Em seguida, o professor indagou o porquê de fazer as operações inversas e de ser naquela ordem de inversão informada. O aluno não souber responder. A questão ficou em aberto para uma discussão com a classe toda no momento das apresentações.

Grupo 4 – Considerações Gerais:

O professor teve que auxiliar o grupo na leitura do enunciado. Os alunos demonstraram não saber o significado da expressão “três círculos alinhados e consecutivos”, no enunciado. O professor propôs que os alunos pesquisassem, no dicionário, o que significava alinhamento. E, após, explicarem se havia relação entre as palavras alinhados e alinhamento. Para recuperar o conceito de consecutivo, o professor recapitulou o estudo dos números naturais e como ele foi criado através dos axiomas de Peano, vistos em aulas anteriores.

a) Observações referentes à execução do item (a)

Os alunos verificaram que o valor que deveria ser colocado no círculo preto era o 3. E, para chegar a essa conclusão, os alunos escolheram o número 4 (colocando-o entre o 2 e 3, indicados na figura) e preencheram os demais círculos de modo a obedecer ao comando da questão que dizia que a soma dos três números de três círculos alinhados e consecutivos deveria ser a mesma.

b) Observações referentes à execução do item (b)

O grupo adicionou todos os valores da figura do item anterior e obteve soma 63. O professor perguntou se o resultado obtido era múltiplo 3. Mais da metade dos alunos afirmou que sim, justificando que 63 estava na tabuada de multiplicação por 7.

O professor pediu aos alunos que fizessem alguns testes, trocando o 4 por outros naturais. E, que verificassem se as somas obtidas dariam números múltiplos de 7. Todos perceberam, a partir dos resultados obtidos, a existência do padrão, somas sempre múltiplas de 7.

Após isso, o professor fez uma pergunta análoga à feita para o grupo 1 a fim de estabelecer uma expressão algébrica para a soma de todos os números naturais da figura. Os alunos propuseram a e encontraram para a expressão da soma: $7a + 35$. E, para verificar se a expressão funcionaria, o professor também pediu que os alunos adotassem alguns valores para a e calculassem o valor da expressão.

c) Observações referentes à execução do item (c)

Como o grupo obtivera soma 63 ao realizar o item (a), o professor perguntou se haveria uma outra forma de chegar ao 4, relacionando a expressão algébrica $7a + 35$ e o valor de soma 63. Os alunos não tiveram a iniciativa de igualar ambos, pois o fato dos mesmos já terem obtido o resultado no processo de tentativa, eles acreditavam que o pedido do professor era inadequado. Então, questão ficou em aberto para a fase das apresentações dos grupos.

Grupo 5 – Considerações Gerais:

Os alunos do grupo 5 não compareceram à terceira aula.

4.2.4 AULA 4 – Apresentação em grupo

A quarta aula foi reservada para a exposição das resoluções, desenvolvidas pelos grupos, a fim de que houvesse um compartilhamento de conhecimentos e experiências, adquiridas na fase anterior. O índice de faltosos nessa fase foi significativo, os grupos ficaram com uma quantidade reduzida de alunos, fato que comprometeu o andamento do roteiro de aulas. Os alunos presentes manifestaram insegurança e resistência em participar da aula expositiva. Muitos alegaram que o trabalho escrito havia ficado com os componentes faltosos e que eles não se sentiam à vontade em falar em público e que não eram obrigados a se exporem para a turma.

Diante do quadro de resistência, o professor explicou que compreendia os argumentos apresentados embora nenhum dos alunos presentes desconhecesse que a aula de exposição fazia parte de uma etapa do trabalho, pois todas as etapas foram anunciadas no início do trabalho para toda a turma. E, que a proposta das apresentações não tinha como objetivo expor nenhum dos alunos, mas sim, era importante para que os grupos interagissem entre si, expondo as estratégias adotadas nas realizações dos problemas, trocando experiências e aprendizados adquiridos por cada aluno dentro dos seus respectivos grupos. Ou seja, a aula expositiva se caracterizava por uma etapa de compartilhamento de ideias, observação das similaridades e diferenças de pensamentos que pessoas distintas poderiam ter acerca de um mesmo desafio.

Alguns poucos grupos se encorajaram e tentaram fazer uma apresentação, mas limitaram-se a escrever no quadro as resoluções que realizaram da resolução dos problemas. Em seguida, o professor corrigiu todos os problemas, dando ênfase aos itens que os grupos não conseguiram concluir ou fazer, e deu por encerrada essa fase. Por conta desse posicionamento dos alunos em relação à aula expositiva, foi possível deduzir que os alunos ainda não estavam preparados para assumir o protagonismo que a metodologia da aprendizagem colaborativa prevê, mas que sim, é possível que os alunos atinjam esse nível de protagonismo no processo de ensino-aprendizagem uma vez que, na sua rotina de aulas, estejam planejadas atividades que encorajem e possibilitem os alunos a desenvolverem capacidade de exposição de pensamentos, argumentos, deduções e contestações.

4.2.5 AULA 5 – Avaliação em grupo

A quinta aula foi reservada para a avaliação em grupo, os problemas foram adaptados da mesma fonte dos problemas utilizados nas três primeiras aulas, porém eram problemas com um grau de dificuldade bem menor que os das três primeiras aulas, pois os três teriam que ser executados num único período de tempo, diferentemente do que ocorrera com os problemas propostos nas aulas de 1 a 3. O tempo previsto para avalição era de uma hora e quarenta minutos e todos os problemas estavam em consonância com a Matriz de Referência da SMERJ e com a BNCC.

Porém, essa fase não foi concluída com êxito, pois os alunos, em sua grande maioria, faltaram a avaliação. E, os que compareceram se mostraram descompromissados e desmotivados em terem que realizar a prova. Muitos grupos estavam incompletos, o que levou à necessidade de reconfigurar os grupos com os presentes. Dos cinco grupos com seis alunos que foram formados incialmente, nessa fase de avaliação, só foi possível formar quatro grupos com três alunos. Em boa parte dos grupos, apenas um ou dois alunos tinha a iniciativa de tentar resolver os problemas. Ao analisar as avaliações, em todas, nenhuma retornou com cálculos ou anotações pertinente ao que tratava e inquiria os problemas.

4.2.5.1 Modelo da avaliação

1ª Questão

Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para adultos o equivalente ao dobro do valor cobrado para crianças. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125, 00. Com base nessas informações, responda:

a) As expressões matemáticas que podem representar os valores pagos por cada adulto e cada criança dessa família.

b) A equação que corresponde, matematicamente, ao problema proposto, achando o conjunto solução.

c) A quantia paga por cada adulto.

d) Observados os itens (a) e (b), o que se pode afirmar sobre a diferença de variável e incógnita?

2ª Questão

João e Marcelo passaram alguns meses guardando dinheiro para comprar uma bicicleta de R$ 380,00. Ao final de 6 meses, os dois irmãos haviam juntado o mesmo valor, mas ainda faltavam R$ 20,00 para pagar a bicicleta. Determine equação matemática que representa a situação apresentada e resolva a equação apresentando sua solução, ou seja, quanto dinheiro cada um conseguiu poupar.

3ª Questão

Em um torneio de tênis, são distribuídos prêmios em dinheiro para os três primeiros colocados, de modo que o prêmio do segundo colocado é a metade do prêmio do primeiro, e o terceiro colocado ganha a metade do que recebe o segundo. Se são distribuídos R$350.000,00, determine:

a) As expressões matemáticas correspondentes aos prêmios do primeiro, segundo e terceiro colocados, respectivamente.

b) A equação matemática que representa a situação proposta pelo problema e sua solução.

c) Quanto coube de premiação para cada um dos três primeiros colocados.

4.2.6 AULA 6 – Avaliação individual

Por conta do contexto de COVID-19, como já foi mencionado, a presença dos alunos nas aulas não era obrigatória. Isso gerou, durante todo o desenrolar do experimento, uma inconsistência nos grupos durante as aulas, ou seja, os grupos quase nunca estavam completos.

4.2.6.1 As avaliações individuais comparativas

A SMERJ, através da sua Coordenadoria de Avaliação, realiza no final de cada bimestre uma avaliação da rede de ensino denominada Atividades Diagnósticas em Rede (ADR). As ADR são definidas no documento intitulado Calendário Pedagógico, como: "avaliações formativas e processuais, que fornecem elementos para a formulação e o monitoramento de políticas públicas, bem como o redirecionamento de práticas pedagógicas" (RIO DE JANEIRO, 2022, p. 20). Ou seja, na prática, a cada final de bimestre, os alunos são submetidos a uma avaliação com questões objetivas que verifica o desenvolvimento dos alunos no que tange ao domínio das habilidades previstas na Matriz de Referência.

Por esse fato, foi adotada, para avalição das turmas de sétimo ano, a Avaliação Diagnóstico do quarto bimestre para realizar o comparativo de rendimento entre a turma que passou pela experiência de ensino-aprendizagem sob a ótica colaborativa e da resolução de problemas e a turma em que as aulas, sobre o ensino de equação do primeiro grau, foram baseadas no ensino tradicional. A turma que teve as aulas baseadas na metodologia tradicional (ensino centrado no professor cujo papel principal é ser um transmissor de conhecimento, alunos numa posição de passividade, excesso de aulas expositivas, entre outras) seguiu a programação de conteúdo e atividades de exercícios contidas na apostila pedagógica desenvolvida pela própria SMERJ.

As duas turmas fizeram as avaliações no mesmo dia, horário e período de prova. Como acontecera nas atividades da aula de apresentação em grupo e da aula de avaliação individual, o índice de faltosos foi acima de 80%. Esse fato foi creditado pela equipe pedagógica do colégio à falta de obrigatoriedade de presença em razão do período de pandemia e ao próprio desinteresse dos alunos em participar de avaliações por estarem, há mais de um ano, fora do ambiente e rotina escolar. Os poucos alunos que fizeram entregaram as provas praticamente em branco, pois fizeram a prova num tempo inferior ao mínimo esperado. Logo, a título de comparação de rendimento quantitativo, não foi possível chegar a uma conclusão sobre os efeitos da metodologia baseada na aprendizagem colaborativa e na heurística de resolução de problemas em relação à tradicional.

Mas, quanto a uma análise qualitativa da metodologia, é possível destacar aspectos positivos sobre o ensino pautado na resolução de problemas sob a ótica da aprendizagem colaborativa:

- embora, inicialmente, os alunos tenham sentido um certo desconforto com a nova disposição da sala, com a nova postura do professor, com a necessidade de terem que interagir entre eles sobre assuntos propostos em aula, com o passar tempo, mostraram-se mais à vontade e encorajados a participar das decisões e ações dentro do grupo. A questão da verbalização das suspeitas e opiniões passou a ser mais frequente uma vez que estavam interagindo entre iguais: aluno-aluno;
- a forma como os alunos passaram a se comportar com a Matemática e na aula de Matemática, mesmo que inconscientemente, saltou aos olhos. Alunos que, anteriormente, só dormiam em aula, passaram a ficar mais concentrados no processo de busca de uma solução para um problema proposto. Muitos perceberam que suas

colocações, mesmo estando erradas, não eram refutadas de imediato pelo professor, mas sim, os alunos eram levados a refazer o caminho de pensamento lógico para verificar, passo a passo, o fundamento de suas colocações. Esse procedimento fez com que muitos alunos se encorajassem a serem mais proativos em seus grupos;

- o ambiente de aprendizagem colaborativa foi importante na questão do acolhimento do aluno que fora diagnosticado com espectro autismo. De acordo com o depoimento da responsável do aluno ao professor, o aluno passou a manifestar o desejo de ir ao colégio por conta das aulas de Matemática, pois ele dizia que tinha um grupo de amigos que precisava dele para fazer o trabalho. Ainda segundo ela, aquele desejo dele era algo surpreendente, pois, em muitas vezes, por conta das características dele, os professores o deixavam de lado, mexendo no celular. Por sua vez, foi bom para o restante do grupo, porque tiveram que aprender a lidar com um aluno que tinha características e necessidades muito diferentes das deles. Ou seja, tiveram que ampliar as suas visões sobre um outro ser humano.
- através do experimento, foi possível atestar que a maneira como os alunos lidam com a Matemática e fazem Matemática num ambiente colaborativo foi muito mais tenso, porém propício, intenso, efetivo e eficiente quando comparado à maneira com que os alunos, submetidos ao ambiente de ensino tradicional, lidam e fazem Matemática. Na turma onde seguiu-se o modelo tradicional, os alunos ficavam preocupados em copiar os conteúdos do quadro, em saber se o assunto era difícil ou fácil, se cairia na prova ou não. A qualquer questionamento do professor sobre o assunto, os alunos paralisavam. Sem pensar no que foi perguntado, já diziam não saber, que Matemática era difícil, que não eram bons e, por fim, que não tiveram aquele conteúdo nos anos anteriores.
- as aulas, em ambientes de aprendizagem colaborativa, demandam do professor: habilidade de gestão de grupos, capacidade de planejar atividades que sejam realizáveis pelos alunos e que possam criar pontes entre Matemática e aspectos do contexto social; uma postura do saber ouvir, provocar e intervir; e de observar seus alunos a fim de fazer a leitura correta de suas atitudes e visões.

CONCLUSÃO

Este trabalho alicerçou-se em três pilares: o estudo sobre as metodologias baseadas em Esquemas Colaborativos (Ensino Colaborativo, Ensino Cooperativo, Engajamento Colaborativo, etc.); a heurística de RP ; e o estudo voltado ao ensino de equação do primeiro grau para alunos do Ensino Fundamental.

Do que coube às metodologias de Esquemas Colaborativos, expôs-se as similaridades e diferenças existentes entre o EC e o Ensino Cooperativo, desde dos aspectos conceituais a suas implementações (distinguindo-as quanto ao processo e à divisão de tarefas). Traçou-se uma linha temporal, do século XVIII aos dias atuais, descrevendo a evolução dos estudos desenvolvimento por estudiosos e teóricos que utilizaram as práticas de Esquemas Colaborativos por acreditarem na sua potencialidade de promover uma melhora no processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

Realizou-se um estudo sobre a heurística de RP, inicialmente, jogando luz às definições de pensamento, problemas e heurística. Em seguida, abordou-se a perspectiva do sistema educacional brasileiro em relação ao uso de metodologia de RP como ferramenta imprescindível para o fomento e melhoria do ensino da Matemática nas escolas de educação básica. E, por fim, destacaram-se os primeiros estudos desenvolvidos sobre o tema a partir do trabalho de George Polya, em 1944, o que elevou a RP à categoria de campo de pesquisa a partir de 1960. Foram destacadas, também, as diferentes concepções existentes sobre RP: a heurística de Polya e as quatro fases de resolução; e, a heurística de Onuchic e Allevato, que dividem o processo em 9 fases.

O desenvolvimento das práticas didáticas no ensino de equação do primeiro grau para alunos do Ensino Fundamental foi foco de estudo deste trabalho. Foram expostos, através desse tema, a origem do estudo e do uso de equação do primeiro grau e a importância do desenvolvimento da Álgebra para a Matemática, destacando o trabalho de François Viète e as consequências dos seus feitos. Apresentou-se um olhar crítico sobre as metodologias e práticas didáticas já consolidadas no ensino de equação do primeiro grau. E, Para contrapô-las, foram revisitados os textos dos PCN e a da BNCC a fim de ressaltar o novo direcionamento que esses documentos delineiam para o ensino desse tema no Ensino Fundamental.

Lecionar sob a ótica do Ensino Colaborativo não é uma tarefa fácil para professores, pois sair da zona de conforto do ensino tradicional demanda muito mais que simplesmente a vontade de mudar. A implementação de atividades baseadas nessa proposta exige do professor conhecimento dos princípios e características relevantes da metodologia a fim de adquirir a expertise de administrar grupos (estimular e mediar conflitos), realizar planejamentos de ações que estejam focadas nos alunos, e não exclusivamente centradas no professor e no conteúdo, desenvolver capacidade de escuta, dando o protagonismo das ações aos alunos. E, além disso, saber que a metodologia, que está baseada no aspecto interacionista, depende muito das experiências socioculturais de cada aluno cuja importância é determinante para o melhor desenvolvimento individual e coletivo. As situações de conflito são encaradas como fontes para suscitar argumentações e contra-argumentações a fim de chagar ao consenso, fruto da soma das interações.

Associar o Ensino Colaborativo à heurística da Resolução de Problemas, no ensino da Matemática, para o Ensino Fundamental, é uma combinação que encontra respaldo na própria BNCC uma vez que a mesma traz de forma clara, em seu texto referente às competências específicas, várias especificidades que direcionam e apontam para o incremento do EC e da RP no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. A BNCC, em suas especificidades, propõe que se olhe para a Matemática e a reconheça como um ramo científico cuja a origem advém da relações humanas e de humanos pertencentes a diferentes berços culturais. E, ramo esse que ela traz, como contribuição para o desenvolvimento humano, avanços tecnológicos e científicos capazes de impactar as relações sociais e trabalhistas. A partir do enfretamento de situações-problema, reais ou imaginários, é que a Matemática demonstra todo o seu potencial de estimular as interações interpessoais, de desenvolver formas de linguagens e registros que contribuam para trabalhos coletivos que se propõem a responder os questionamentos humanos ao longo do tempo e da sua estrada evolutiva. (BNCC, BRASIL, 2018)

A mudança na prática didática, com a adoção das metodologias do EC e da RP, é um despertar para uma nova perspectiva na dinâmica de sala de aula, nas relações interpessoais e na relação entre os alunos e a Matemática. Porém, está longe de ser o único caminho didático para solução de alguns dos problemas enfrentados na educação brasileira, sobretudo no ensino da Matemática: baixos rendimentos escolares; conflitos nas relações interpessoais (professor-aluno, aluno-aluno); alto índice de desinteresse do aluno em relação aos conteúdos matemáticos; e falta de estímulo por parte do professor na execução das suas tarefas didáticas cotidianas.

O experimento, realizado com os alunos do sétimo ano da Escola Municipal Professor Gilberto Bento da Silva, demonstrou que as metodologias do EC e da RP foram capazes de promover mudanças significativas, mais especificamente no que trata do cotidiano de sala de aula: melhora das relações interpessoais (professor-aluno, aluno-aluno), melhora da relação aluno e conteúdo abordado (os alunos demonstraram uma melhor disposição para as discussões sobre a Matemática e suas aplicações). Denunciou também que o tempo é um fator importante para a implementação e consolidação de práticas baseadas no EC e na RP. Um único bimestre é muito pouco para que alunos e professores consigam desenvolver todas as potencialidades que o EC e a RP possuem e, com isso, obter resultados mais expressivos tanto do ponto de vista qualitativo quanto do quantitativo. Inserir essas metodologias no planejamento anual é uma sugestão para que gradativamente professores e alunos possam fazer delas ferramentas para melhorar relações, desempenho, logo melhorar processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Este trabalho acredita que a combinação dessas duas metodologias, aliada à força do tempo, é capaz de promover mudanças significativas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e na formação sociocultural dos discentes submetidos a essas práticas. E, tem muito a contribuir para a melhora da qualidade das aulas, do convívio dos alunos entre si e da relação deles com a Matemática. E, o professor, que anseia por mudanças, tem, nessas duas metodologias, a possibilidade de ressignificar suas relações com a sua prática, com seus alunos e também com a Matemática.

REFERÊNCIAS

ARRELIAS, J. S; BERNARDO, A. M. G; OLIVEIRA, C. M. de. Reflexões sobre aprendizagem colaborativa e uso de TIC na educação profissional e tecnológica. *Research, Society and Development*, v. 11, n. 10, e26111032327, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular* - Educação Infantil e Ensino Fundamental. MEC. Brasília, DF, 2018.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática - 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC / SEF,1997.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática - 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC / SEF,1998.

BUENO, G. M. G. B.; FARIAS, S. A.; FERREIRA, L. H. Concepções de Ensino de Ciências no Início do Século XX: O Olhar do Educador Alemão Georg Kerschensteiner. *Ciência & Educação*, v. 18, n. 2, p. 435-450, 2012.

CORRÊA, B. M. *A Introdução à Arte Analítica de François Viète*: comentários e tradução. 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, UFRJ, 2009.

COSTA, M.V. T.; CASTRO BARBOSA, A. C. C.; DEL RIO, V. L. Uma Experiência com um Esquema Colaborativo no Ensino de Funções no PEJA. *e-Mosaicos,* v. 7, n. 16, dez. 2018.

DANTE, R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2005.

DE CASTRO BARBOSA, A. C.; CONCORDIDO, C. F. R. Ensino Colaborativo em Ciências Exatas. *Ensino, Saúde e Ambiente*, v.2, n.3, p 60-86, 2009.

DILLEMBOURG, P. What do you mean by collabor~~r~~ative learning? In: DILLEMBOURG, P. (Ed.). Collaborative-learning: cognitive and computational approaches, Oxford: Else~~i~~vier, 1999, p1-19.

EVES, H. W. *Introdução à História da Matemática*. 5ª ed. São Paulo: UNICAMP, 2011.

FIRMINO, J. E. C.; BROTTO, T. C. A. Raciocínio, Heurísticas e resolução de problemas: um diálogo teórico-conceitua. *Mosaico: estudos em psicologia*. Belo Horizonte, v. III, n. 1, p. 1-12, 2009.

GABASSA, V.; MELLO, R. R.; BRAGA, F. M. Comunidades de aprendizagem: uma possibilidade para a escola contemporânea. In: Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, 16., 2012, Campinas, *Anais*...Campinas: Junqueira & Marin Editores, 2012, p. 12.

GAILLET, L. L. Uma perspectiva histórica sobre a aprendizagem colaborativa. *Journal of Advanced Composition* , 93-110. http://www.tc.umn.edu/~arend011/SIresearchreview01.pdf

GANGOSO, Z. Investigaciones en resolución de problemas en ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências,* UFRGS, v. 4, n. 1, p. 7-50, 1999.

GIL, P. D. B. *A história da matemática no fomento de uma cultura de argumentação em sala de aula*. 736f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2012.

GONÇALVES, J. L. O. Raciocínio heurístico e a resolução de problemas. *Reuni* –Revista Unijales, São Paulo, n. 1, ano1, p. 1-13, 2006.

LEITE, J. E. R. A natureza social da cognição: questões sobre a construção do conhecimento.*VEREDAS - Rev. Est. Ling.*, Juiz de Fora, v.7, n.1 e n.2, p.217-232, jan./dez. 2003.

MALONEY, D. Research on Problem Solving: Physics. In: GABEL, D. L. (Ed.). *Handbook of Research on Science Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishers Company, 1994.

MATTHEWS, R. S et al. Building bridges between coperative and collaborative learning. *Change*, v.27, n.4, p.34-40, jul-ago., 1995.

MORGADO, A. C. Equações do Primeiro Grau. Curso do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio - 2003. Youtube, Julho 2011. Disponível em: < http://www.impa.br | http://impa.br/videos > Acesso em: dez 2022.

NASCIMENTO, R. O. Um estudo sobre o pensamento na resolução de problemas segundo contribuições de Sergei L. Rubinstein: aportes psicológicos para a educação do pensamento. *Obutchénie*: R. de Didat. e Psic. Pedag., Uberlândia, v. 1, n. 2, p.411-431, 2017.

NITZKE, J.; GELLER, M.; CARNEIRO, M. Aprendizagem cooperativa/ colaborativa. Disponível em: <http://www.nie.ufrgs.br/~alunosspg99/mara//>. Acesso em 19 dez. 2000.

ONUCHIC, L. de L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre ensino-aprendizagem através da Resolução e Problemas. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. C. (Orgs.). *Educação matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2012.

______. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez 2011.

PERALES PALACIOS, F. J. La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 11, n. 2, p. 170-178, 1993.

PANITZ, T. A definition of collaborative vs cooperative learning: A Comparison of the Two Concepts Which Will Help Us Understand the Underlying Nature of Interactive Learning. 1999. Disponível em:<http://www.lgu.ac.uk/deliberations/collab.learning/panitz2.html> Acesso em:14 dez

PICHON-REVIÈRE, E. *O Processo Grupal*. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

POLYA, G. *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

REZENDE, M. V. de. Aprendizagem Colaborativa e Mediação Pedagógica em Curso de Extensão Universitário. *Revista Texto Livre*: Linguagem e Tecnologia, UFMG, v.7, n.1, p. 68-83. 2014.

RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. *Calendário Escolar Pedagógico*. SMERJ. Rio de Janeiro, RJ, 2022.

RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. *Matriz de Referência.* SMERJ. Rio de Janeiro, RJ, 2022.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

SÁENZ, J. L. Enseñar para comprender la Biología: las situaciones problema como tópicos generativos. *II Jornada de Ensenãnza y Investigación Educativa en el Campo de Ciencias Exactas y Naturales*. Universidad Nacional de la Plata, Argentina, 2009. Disponível em: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/16528>.

TORRES, P. L.; ALCANTARA, P. R.; ILARA, E. A. F. Grupos de Consenso: Uma Proposta de Aprendizagem Colaborativa para o Processo de Ensino-Aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 4, n.13, p.129-145, set./dez. 2004.

TRACHTENBERG, L.; BARBASTEFANO, R.; STRUCHINER, M. Ensino Colaborativo Online (ECO): uma experiência aplicada ao ensino da Matemática. *Bolema*, Rio Claro, v. 23, nº 37, p. 1037 a 1061, dez. 2010.

WESTBROOK, R. B.; TEIXEIRA, A. John Dewey. *Coleção Educadores*, MEC, p.17-24, out. 2010.