CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ANTONINE BICALHO GARCIA

# FUNÇÕES REAIS:
# UM MERGULHO NOS PROBLEMAS DO DIA A DIA

Belo Horizonte
2022

ANTONINE BICALHO GARCIA

# FUNÇÕES REAIS:
# UM MERGULHO NOS PROBLEMAS DO DIA A DIA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora:
Jeanne Carmo Amaral

Coorientadora:
Camila Ferreira de Souza

Banca Examinadora:
Danielle Franco Nicolau
Elisa Fonseca Sena e Silva
Erica Marlucia Leite Pagani
Jane Lage Bretas

Belo Horizonte
2022

Garcia, Antonine Bicalho
G216f Funções reais: um mergulho nos problemas do dia a dia / Antonine Bicalho. – 2022.
86 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Jeanne Carmo Amaral.
Coorientadora: Camila Ferreira de Souza.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Funções (Matemática) – Estudo e ensino – Teses. 2. Funções de variáveis reais – Teses. 3. Ensino fundamental – Teses. 4. Ensino audiovisual – Teses. I. Amaral, Jeanne Carmo. II. Souza, Camila Ferreira de. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 515.8

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

ANTONINE BICALHO GARCIA

**FUNÇÕES REAIS:**
**UM MERGULHO NOS PROBLEMAS DO DIA A DIA**

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 30 de maio de 2021.

Antonine Bicalho Garcia
Autor

Jeanne Carmo Amaral
Orientadora

Camila Ferreira de Souza
Coorientadora

Belo Horizonte
2022

Àqueles que transformam a vida dos seus estudantes trazendo a fé no conhecimento e são discípulos da sabedoria, dedico essa obra. A esses mestres da educação que não medem esforços para que se haja um mundo mais justo. Esses são os verdadeiros motores da sociedade moderna.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me proporcionar esta oportunidade de crescimento pessoal e profissional. Agradeço à minha esposa, Vanilma, pelo apoio irrestrito. À minha filha, Júlia, por todo incentivo. À minha tia Glória, que, além de ser uma grande incentivadora, sempre foi uma segunda mãe. Agradeço ao meu pai pelas cervejas relaxantes antes do estudo. Agradeço aos meus irmãos, meus fiéis parceiros de todas as horas, Fred, Bruno, Leo e Rapha, e ao sexto elemento, tio Flávio. A outros dois irmãos, quase de sangue, que compartilharam dessa minha jornada, Chris e Pite.

À minha mãe, lembro que seu apoio nunca foi condicionado a nenhum sucesso. Se me ergui homem, foi por ela nunca ter soltado a minha mão, mesmo nos momentos mais difíceis.

Agradeço também aos meus amigos do CEFET, parceiros por todos esses anos. Em especial ao meu amigo sr. Bruno Freitas, que tanto me ajudou na formatação deste trabalho.

Que Deus possa abençoar a todos os que fizeram de mim o que sou e compartilham comigo desta alegria.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# RESUMO

O estudo das funções na Educação Básica representa um importante momento de evolução do pensamento matemático e do desenvolvimento da modelagem de problemas que envolvem o conteúdo de funções. Com o objetivo de amparar professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de funções, bem como de trazer aplicações práticas que solidifiquem o conhecimento e aproximem conceitos matemáticos e situações cotidianas, este trabalho contém uma apostila para estudos autônomos e videoaulas norteadoras para melhor desenvolvimento da aprendizagem. Espera-se que, com o apoio dos professores e dos livros didáticos, o aluno seja capaz de compreender fenômenos e interpretá-los. Para o desenvolvimento deste trabalho, fizemos um levantamento nas dissertações produzidas no âmbito do PROFMAT que tratam do ensino de funções e destina-se a turmas de 9º ano do Fundamental II, 1º ao 3º ano do Ensino Médio e nos apoiamos em estratégias de ensino e aprendizagem tais como a sala de aula invertida e a aprendizagem baseada em problemas (PBL). A aplicação deve ocorrer em sala de aula, no modelo presencial, para que seja possível a recuperação de conteúdos importantes no desenvolvimento do ensino de matemática, sobretudo considerando as defasagens percebidas no período pós-pandemia da COVID-19.

Palavras-chave: Funções reais. Ensino de funções. Videoaulas.

## ABSTRACT

The study of functions in Basic Education represents an important moment in the evolution of mathematical thinking and the development of modeling problems involving the content of functions. In order to support teachers and students in the teaching and learning process of the content of functions, as well as to bring practical applications that solidify knowledge and bring together mathematical concepts and everyday situations, this work contains a booklet for autonomous studies and video lessons for better guidance. learning development. It is expected that, with the support of teachers and textbooks, the student will be able to understand phenomena and model them. For the development of this work, we surveyed the dissertations produced within the scope of PROFMAT that deal with the teaching of functions and are intended for classes from 9th grade of Fundamental II, 1st to 3rd grade of High School and we rely on teaching strategies and learning such as flipped classroom and problem-based learning (PBL). The application must take place in the classroom, in the face-to-face model, so that it is possible to recover important content in the development of mathematics teaching, especially considering the gaps perceived in the post-COVID-19 pandemic period.



Keywords: Real functions. Function teaching. Video lessons.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

# LISTA DE TABELAS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O estudo de funções é um importante assunto na sala de aula de Matemática da Educação Básica. Tal importância se justifica pela variedade de problemas do dia a dia, em que as variações das grandezas envolvidas são passíveis de serem modeladas em termos de funções básicas. Portanto, o entendimento das funções estudadas na sala de aula do Ensino Médio, bem como dos comportamentos por elas descritos, é importante ferramenta para resolução de problemas.

Entretanto, apesar da importância desse conteúdo, muitos alunos terminam o Ensino Médio sem uma formação sólida nessa área. Embora assuntos relacionados ao contexto de funções estejam presentes no cotidiano de vários cidadãos, é comum que estudantes da Educação Básica tenham dificuldades em enxergar tais situações dentro da sala de aula de Matemática. Ademais, entre os professores da disciplina que atuam nesse segmento, também se registram dificuldades na contextualização desse tema, ou de parte dele, em suas aulas.

A pandemia da COVID 19 que assolou todo o planeta nos anos de 2019 e 2020, não permitiu aos alunos frequentarem as salas de aula. Nos período entre abril de 2020 e dezembro de 2021, muitos alunos sequer tiveram uma única aula presencial, muitos nem mesmo apoio online.

Além disso, devido à essa pandemia as dificuldades se mostraram ainda mais presentes. Há alunos que terminam o Ensino Médio sem aprender noções básicas de matemática.

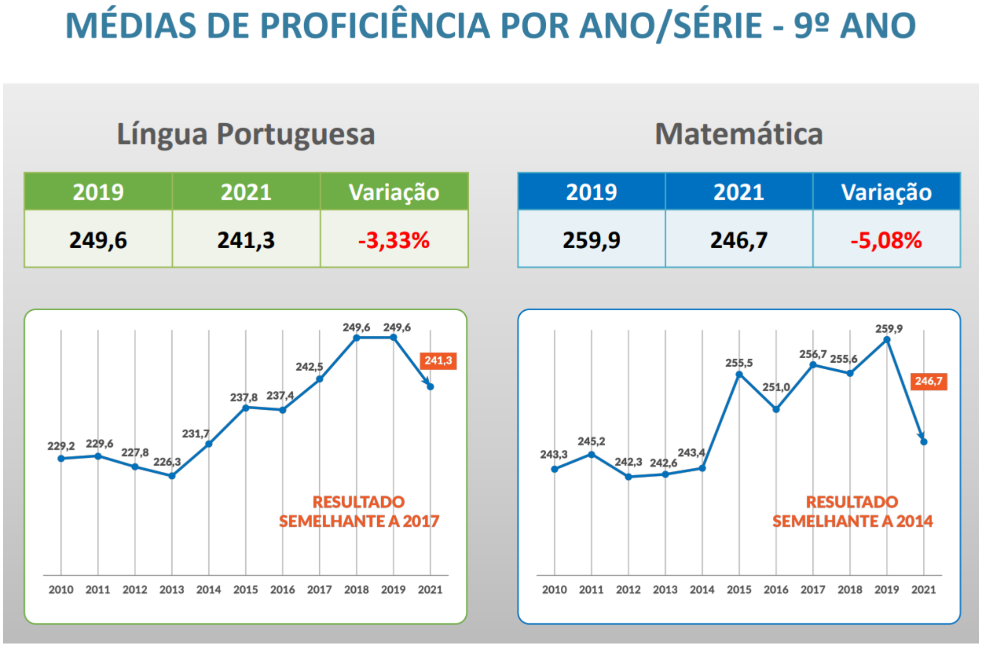
Segundo reportagem* de Isabela Palhares, datada de 07 de março de 2022, dos alunos que concluíram o Ensino Médio na rede estadual de São Paulo, 96,6% saíram das escolas sem terem aprendido a resolver sequer uma equação de 1º grau ou a interpretar dados estatísticos.

Na divulgação do resultado do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), o Secretário de Educação do estado, Rossieli Soares, apresentou os resultados de 2021, que, segundo ele, confirmam as perdas irreparáveis causadas pela pandemia e pelo fechamento das escolas. (SARESP (fde.sp.gov.br))

Ainda na apresentação dos resultados, percebe-se que as proficiências dos alunos do 9º ano e do 3º ano do Ensino Médio comprovam o que já se esperava: o nível de aprendizagem dos alunos ficou ainda mais comprometido devido à pandemia.

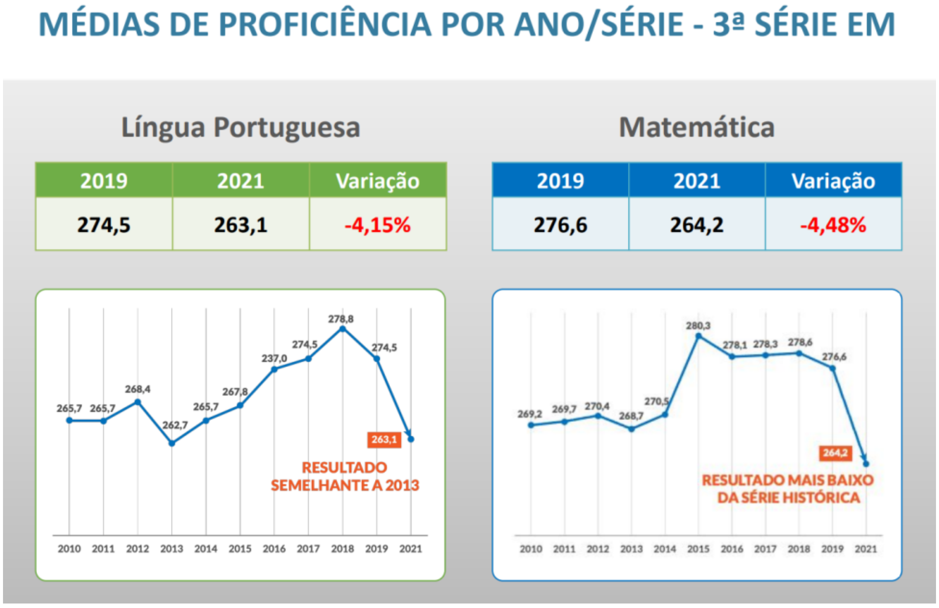
A seguir, temos três gráficos retirados da apresentação dos resultados do SARESP[1], que nos mostram as médias de proficiência dos últimos 11 anos e o impacto direto da pandemia no desenvolvimento escolar dos alunos das escolas do estado de São Paulo.

**Figura 1** – Médias de proficiência por ano/série – 9º ano




**Fonte: SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação, SARESP 2021.**

Figura 2 – Médias de proficiência por ano/série – 3ª série EM




**Fonte: SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação, SARESP 2021.**

[1] https://bit.ly/3JgmMyI

**Figura 3** – Impacto da pandemia

IMPACTO DA PANDEMIA

MATEMÁTICA

| Etapa | SARESP 2019 | Estudo Amostral 2021* | SARESP 2021 | Diferença de proficiência entre SARESP 2021 e SARESP 2019 |
|---|---|---|---|---|
| 5º Ano Ensino Fundamental | 231 | 196 | 210 | -21 |
| 9º Ano Ensino Fundamental | 260 | 248 | 247 | -13 |
| 3ª Série Ensino Médio | 277 | 255 | 264 | -13 |

** Estudo realizado pelo CAED/2021.*

**Fonte: SÃO PAULO, Secretaria de Estado da Educação, SARESP 2021.**

Diante do contexto da pandemia, o nosso trabalho surge como mais uma opção para professores e alunos na busca de um ensino de qualidade.

Uma ação sugerida com objetivo de favorecer a contextualização do ensino da Matemática é o uso da Modelagem Matemática na Educação Matemática, que traz, para dentro da sala de aula, problemas cotidianos nos quais se identificam variações de grandeza. O processo de Modelagem Matemática permite aos estudantes analisar comportamentos matemáticos por meio de tabelas e gráficos. Os padrões identificados podem ser modelados por expressões algébricas, úteis a análises e previsões para além dos valores disponibilizados. Trata-se de um processo no qual o estudante protagoniza sua própria aprendizagem, cabendo ao professor o papel de orientador/facilitador.

Nesse contexto, na esperança de favorecer o processo de ensino acerca dos conteúdos de funções e de proporcionar aos alunos melhores experiências de aprendizagem, propomos nesta pesquisa uma abordagem baseada em situações cotidianas passíveis de serem modeladas matematicamente, de fácil contextualização e entendimento para os discentes. Por se tratar de abordagens embasadas em metodologias ativas de aprendizagem, queremos que os envolvidos se apropriem, de forma eficaz, dos conceitos matemáticos inerentes à proposta deste trabalho. As **metodologias ativas** propõem novas estratégias de ensino que incentivam a aprendizagem autônoma e participativa, por meio de problemas e situações reais.

Nesse sentido, esta pesquisa tem como objetivo a criação de um material de estudo diferenciado composto por um conjunto de videoaulas e uma apostila que têm como escopo auxiliar alunos e professores no ensino-aprendizagem de funções, especialmente no contexto das defasagens escolares causadas pela pandemia da COVID-19. A intenção é de que os alunos assistam previamente aos vídeos e, em sala de aula e sob a supervisão do professor de Matemática, usem os conceitos neles apresentados para desenvolverem as atividades propostas na apostila.

Para a produção desse conjunto, apresentamos, no Capítulo 2 desta dissertação, nossas considerações sobre o ensino de funções na Educação Básica, tomando como referência as orientações da Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (BRASIL, 2018) e os resultados obtidos com o levantamento sobre as dissertações do que abordavam o ensino de funções. Acerca dessas considerações, segue, no Capítulo 3, uma abordagem matemática sobre as funções tratadas em nosso produto educacional: O Ensino de Funções – uma abordagem do cotidiano.

O processo de confecção do produto é descrito no Capítulo 2 desta dissertação. Ressaltamos que o referido material foi concebido em consonância com a Lei 13005/2014 (BRASIL, 2014), que visa, no Plano Nacional de Educação, à criação de produtos e/ou *softwares* livres que auxiliem o aprendizado na sala de aula da Educação Básica.

Uma vez que esta produção ocorreu durante o período de transição entre aulas remotas e presenciais, à época da pandemia da COVID-19, causada pelo novo coronavírus, não foi possível a aplicação do material em sala de aula nem sua consequente submissão à análise. No entanto, sugerimos, no Capítulo 5 deste documento, uma proposta de aplicação e de metodologia de análise do produto. Em sequência, o Capítulo 6 apresenta as considerações finais sobre a pesquisa, bem como as expectativas quanto aos seus potenciais desdobramentos.

Seguem, no Capítulo 3, nossas considerações sobre o ensino de funções na Educação Básica, em especial na sala de aula do Ensino Médio.

# REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES

## 2.1 A importância do ensino de funções

A cada ano, a escola deve trazer aos alunos uma evolução em seus conhecimentos prévios e desenvolver neles a capacidade de análise crítica diante de situações diversas, tais como: a compra da casa própria, a escolha do melhor investimento ou financiamento, a análise do orçamento familiar. Segundo a BNCC,

> Ao longo do Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudantes se deparam com desafios de maior complexidade, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, **retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas**, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes. (BRASIL, 2018, p.60, grifo nosso).

A fim de promover a ressignificação citada no trecho acima, o estudo de funções pode trazer ao estudante uma maior capacidade de entendimento das relações entre grandezas que são utilizadas em sua rotina. Trata-se de um dos assuntos mais importantes abordados na sala de aula de Matemática, durante a Educação Básica.

Trazer aos alunos uma maneira mais eficaz e atrativa para a aprendizagem do conteúdo de funções sempre foi algo desejado por todos aqueles que já enfrentaram uma sala de aula para o ensino da Matemática, sendo esse um rol em que eu me incluo, professor de Matemática com 25 anos de sala de aula, que convivi com essa dificuldade por muito tempo. Nesse contexto, é função da escola garantir que essa aprendizagem seja efetiva.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2006, p.121)

Conforme Lima (2013), os conceitos abstratos da Matemática se constituem como modelos propícios para situações concretas nas quais abordagens empíricas são inconclusivas. Tais modelos permitem predições e análises, das quais se podem tirar conclusões mais eficazes. Trata-se de uma abordagem embasada na organização do pensamento lógico, por meio da linguagem dos conjuntos. Os números são instrumentos para operações de contagem e medida, enquanto as funções, em suas diferentes caracterizações, são usadas para representar situações específicas.

O estudo de funções pode ser iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental, mas é do Ensino Médio que o assunto é adensado. Sendo assim, cabe aos professores que atuam nesses segmentos planejar e preparar as aulas sobre o objeto em pauta. Nos apontamentos de Lima (2013), tais ações são geralmente embasadas apenas nos livros didáticos, produzidos, em sua maioria, por outros docentes com formações e experiências similares àqueles que os utilizam. Logo, tem-se um círculo vicioso, no qual muitas lacunas acerca do ensino de funções podem se perpetuar.

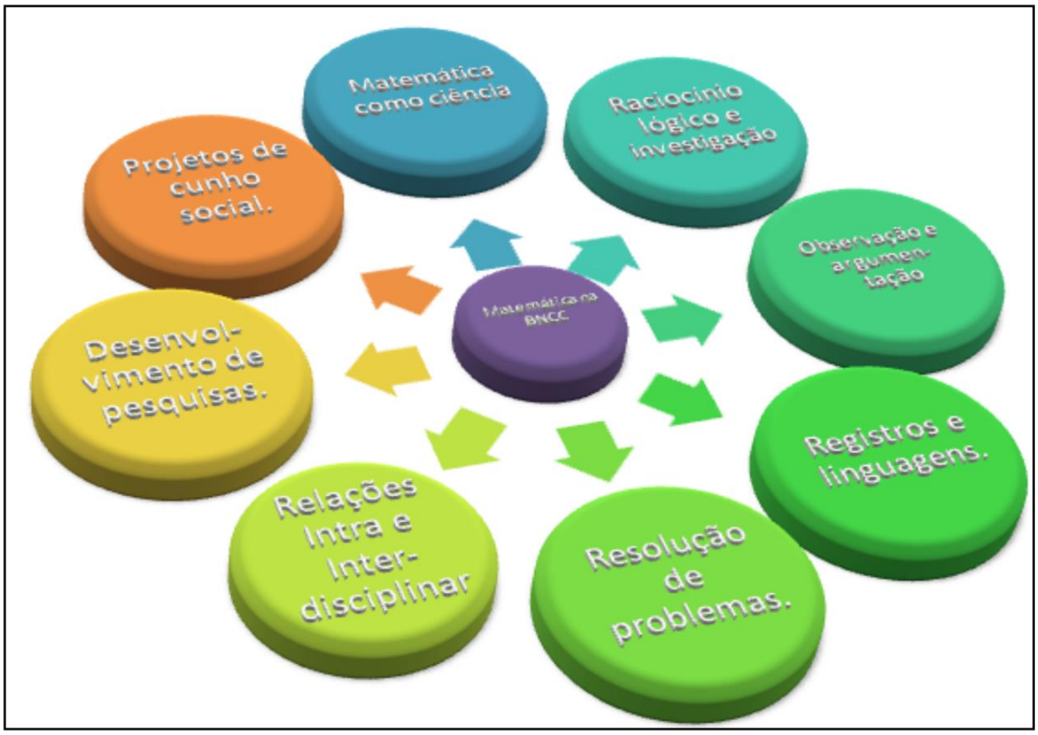
Nesse contexto, urge a necessidade da produção de novos materiais didáticos que auxiliem os docentes no ensino de funções, de forma a interromper o círculo vicioso supracitado.

## 2.2 O ensino de funções segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC (BRASIL, 2018) é o documento que normatiza os conhecimentos necessários e indispensáveis à formação de um estudante que passa pela Educação Básica, da infância à adolescência. Trata-se de uma formação baseada no desenvolvimento de competências gerais que visam à formação integral do estudante. Conforme as análises de Freitas (2021) acerca desse documento, os conhecimentos a serem tratados na sala de aula, da Educação Infantil ao Ensino Médio, são classificados em áreas do conhecimento, cujas competências específicas, desenvolvidas através de um conjunto de habilidades, endossam as competências gerais. O autor aponta que a aferição das habilidades e competências se dá por meio de exames nacionais, promovidos pelo Ministério da Educação, entre os quais se destacam as avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do Exame Nacional Para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCEJA) e do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). Quanto às avaliações internacionais, as verificações ocorrem por meio do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), promovidas pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Além desse ainda temos o Relatório Nacional da Pesquisa Internacional sobre Ensino e Aprendizagem (Talis), coordenado pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, e o Terceiro Estudo Regional Comparativo e Explicativo – TERCE, promovido pelo Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da eEucação (LLECE).

Em relação à sala de aula de Matemática, a BNCC apresenta os conteúdos da área *Matemática e suas Tecnologias* em unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas & Medidas e Probabilidade & Estatística), que devem ser articuladas às ideias fundamentais da disciplina (equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação). Tal articulação se dá por meio de estratégias e metodologias de ensino-aprendizagem tais como resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem, os quais constituem o conjunto de competências específicas dessa área, apresentadas na Figura 4.

**Figura 4 – Competências Matemáticas na BNCC**




**Fonte: Freitas (2021)**

Ao desenvolver as competências apresentadas na Figura 4, espera-se que os estudantes possam valorizar a Matemática como uma ciência que impacta o mundo do trabalho; compreender as relações interdisciplinares da disciplina a fim de promover a autoestima e a perseverança na busca de soluções; e desenvolver pesquisas ou projetos de cunho social de modo cooperativo e embasado em princípios éticos, solidários e sustentáveis. Ademais, objetiva-se também que os discentes sejam capazes de usar tecnologias e ferramentas digitais na resolução de problemas, de aguçar o raciocínio lógico por meio de ações de observação e investigação e de usar registros/linguagens diversas na apresentação de argumentos e conclusões.

Ainda segundo Freitas (2021), as páginas que a BNCC destina ao Ensino Médio estabelecem objetivos específicos para esse segmento, a saber, consolidação e aprofundamento do conhecimento; foco no mundo do trabalho e na cidadania; formação ética, desenvolvimento intelectual e pensamento crítico; e compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos. Nessa etapa, tem-se o foco na construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade e à vivência dos estudantes.

No caso da Matemática, os conhecimentos são organizados em cinco eixos temáticos: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística. Nessa dissertação, o foco incide sobre o segundo eixo, que tem por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico.

> (…) Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, **estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos**, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (…) Os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2018, p. 270-271, grifo nosso)

Quanto às relações de interdependência entre grandezas citadas acima, muitas delas podem ser classificadas como uma função que, no dicionário, é definida como uma “relação entre dois ou mais conjuntos, definida por uma regra que associa, a cada elemento de um conjunto, não mais de um elemento determinado de outro” (FERREIRA, 2006, p. 421). Ao entendermos os conjuntos citados nessa definição como as grandezas estudadas em cada relação de interdependência, abrimos possibilidades para o estudo das funções dentro da BNCC. Tais possibilidades abrangem construção/análise de tabelas e gráficos, identificação de padrões e modelagens algébricas, tal como descrito nos textos acima.

O conteúdo de Funções é pauta em um vasto conjunto de habilidades, dentro da BNCC, ora destinadas ao conceito geral de função, tratado como variação de grandezas, ora ao tratamento de funções específicas (afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas). Tais habilidades são apresentadas nos Quadros 1, 2, 3 e 4.

**Quadro 1 – Funções na BNCC**

| Habilidade | Descrição |
|---|---|
| EM13MAT101 | Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| EM13MAT203 | Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. |
| EM13MAT404 | Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |

**Fonte: (BRASIL, 2018, p.533, 534, 539)**

As habilidades apresentadas no Quadro 1 abrangem o conceito de função como relação de interdependência entre grandezas, sendo analisadas em suas diversas representações (EM13MAT101) e propriedades (EM13MAT404). Ao compreender que o valor do dinheiro varia ao longo do tempo, temos, na habilidade EM13MAT203, o estudo de funções no contexto da Matemática Financeira. Tais estudos podem ser conduzidos em moldes específicos, como funções afins e exponenciais.

Os textos da base contemplam o estudo das funções, iniciando pelos primeiros modelos: afim e quadrática. Esses são apresentados logo nos anos finais do Ensino Fundamental e aprofundados no Ensino Médio. O Quadro 2 traz as habilidades da base acerca desses tópicos, referenciados como funções de 1º e 2º graus, respectivamente.

**Quadro 2 – Funções Afim e Quadrática na BNCC**

| Habilidade | Descrição |
|---|---|
| EM13MAT301 | Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| EM13MAT302 | Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| EM13MAT401 | Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. |
| EM13MAT402 | Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. |
| EM13MAT501 | Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. |
| EM13MAT502 | Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. |
| EM13MAT503 | Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. |
| EM13MAT507 | Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. |
| EM13MAT510 | Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. |

**Fonte: (BRASIL, 2018, p.536, 539, 541)**

Em relação à função afim, a BNCC explora seu uso na resolução/elaboração de problemas (EM13MAT301 e EM13MAT302) contextualizados em situações de proporcionalidade ou com taxa de variação constante, na representação geométrica (EM13MAT401 e EM13MAT510) e na identificação de padrões (EM13MAT501 e

EM13MAT507). Já quanto às funções quadráticas, além dos itens analisados para a função afim, consideram-se também questões de valores extremos (EM13MAT503) e o estudo dessas funções por meio de *software* de geometria dinâmica (EM13MAT402).

Outro tipo de função comumente estudado na sala de aula de Matemática do Ensino Médio é a função exponencial, eficaz para descrever ou modelar situações em que o crescimento ou decrescimento relativo das grandezas envolvidas seja constante. Os textos da base trazem um conjunto de habilidades específicas para essa função, bem como para a função logarítmica, que descreve situações de comportamento inverso àquele descrito pela função exponencial. Tais habilidades constam no Quadro 3.

**Quadro 3 – Funções Exponencial e Logarítmica na BNCC**

| | |
|---|---|
| EM13MAT303 | Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. |
| EM13MAT304 | Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. |
| EM13MAT305 | Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. |
| EM13MAT403 | Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. |
| EM13MAT508 | Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. |

**Fonte: (BRASIL, 2018, p.536, 539, 541)**

De forma semelhante às habilidades listadas para as funções afim e quadrática, as habilidades listadas no Quadro 3 destacam o uso das funções exponencial e logarítmica na resolução e elaboração de problemas (EM13MAT304 e EM13MAT305). Ademais, têm-se ainda habilidades que visam relacionar a função exponencial à função afim (EM13MAT303), à função logarítmica (EM13MAT403) e à progressão geométrica (EM13MAT508), comparando propriedades importantes desses modelos.

Os textos do documento também se atentam à descrição de fenômenos periódicos, passíveis de serem modelados pelas funções trigonométricas, tópico comum em livros didáticos para o Ensino Médio e introduzidos ainda no 9º ano do Ensino Fundamental. Nesse caso, apresentamos, no Quadro 4, as habilidades focadas nas especificidades dessas funções, bem como naquelas dedicadas ao estudo das razões trigonométricas.

**Quadro 4 – Funções Trigonométricas na BNCC**

| | |
|---|---|
| EM13MAT306 | Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. |
| EM13MAT308 | Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. |

**Fonte: (BRASIL, 2018, p.536, 539, 541)**

Assim como o entendimento acerca de equações lineares e quadráticas precedem o estudo das funções afim e quadrática, o estudo das razões trigonométricas, no triângulo e no ciclo trigonométrico, são pré-requisitos necessários à compreensão das funções trigonométricas e da sua eficácia para modelar fenômenos periódicos. Nesse sentido, o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308 precede as abordagens próprias à habilidade EM13MAT306.

Com base nas habilidades apresentadas nesta seção, esta dissertação se dedica ao estudo e às abordagens para o ensino das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica na sala de aula de Matemática do Ensino Médio

Feitas nossas considerações acerca do estudo de funções na perspectiva da BNCC, apresentamos, na próxima seção, algumas possibilidades de trabalho exploradas nas dissertações do PROFMAT.

## 2.3 O ensino de funções nas dissertações do PROFMAT

Por ser esta uma pesquisa de mestrado dedicada ao estudo de problemas de funções, é necessária coleta de dados e a análise de dissertações que têm o foco no ensino de funções, de forma contextualizada e dinâmica. Nesse sentido, nos atentamos às pesquisas de mestrado cujas propostas objetivam facilitar o ensino e a aprendizagem de funções na sala de aula de Matemática.

Com esse fim, foi realizado um fichamento das dissertações produzidas pelos egressos do PROFMAT, tendo como principal filtro aquelas que ofereciam ao professor de Matemática ferramentas concretas e exemplos assertivos para o desenvolvimento do conteúdo em pauta. Sendo assim, o foco desse levantamento bibliográfico incidiu sobre aqueles trabalhos que propõem abordagens baseadas no uso de *softwares*, ou por eles auxiliadas, (Grupo 1) e naqueles que abordam o ensino de funções por meio da modelagem de problemas (Grupo 2).

A busca, feita exclusivamente no repositório do PROFMAT, em março de 2021, se iniciou com 329 dissertações, apresentadas mediante o descritor "Funções". Após um refinamento da busca, reduzimos esse número a 69 pesquisas, estas dedicadas ao "Ensino de funções", nosso segundo descritor. A leitura dos resumos desses trabalhos nos permitiu selecionar 17 títulos, listados no Quadro 5.

**Quadro 5 - Fichamento de pesquisas no PROFMAT (Grupo 1)**

| **Autor** | **Título** | **Ano** | **Instituição** |
|---|---|---|---|
| **Silva** | Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas usando a resolução de problemas mediada pelo Geogebra | 2020 | UFT |
| **Machado** | Uma proposta para o ensino de funções trigonométricas | 2020 | UFG |
| **Oliveira** | Aplicações do software Geogebra ao ensino de funções | 2018 | UFES |
| **Lopes** | Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no Ensino Médio | 2018 | UFMT |
| **Souza Jr.** | Ensino de funções trigonométricas com Applets | 2018 | UENF |
| **Samizava** | Utilização do software Geogebra no ensino de funções de primeiro e segundo graus | 2018 | UNESP |
| **Nunes** | Modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas | 2017 | UFVJM |
| **Freitas** | Ensino de funções de 1º e 2º grau: uma proposta de atividades com o uso do Geogebra | 2017 | UFERSA |
| **Silva** | O ensino de funções polinomiais do 2º grau: uma aplicação com o software Geogebra. | 2015 | UFERSA |
| **Cance** | Projeto canhão: o ensino de funções quadráticas com o auxílio do software Geogebra | 2015 | UFSCAR |
| **Waldhelm** | O uso de ferramentas tecnológicas para o ensino de funções | 2014 | UFF |
| **Silva** | O ensino de funções trigonométricas com o auxílio do Geogebra | 2013 | UNIVASF |
| **Zandonadi** | Aplicação do software Geogebra no ensino de funções exponenciais e logarítmicas | 2013 | UEL |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Lima** | A utilização do software Geogebra como ferramenta para o ensino de funções | 2013 | UFC |
| **Siqueira** | Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no ensino médio | 2013 | UFSCAR |
| **Maia** | O ensino de funções trigonométricas através do software Geogebra | 2013 | UFRN |
| **Suguimoto** | Utilização do Geogebra como auxílio no ensino de funções. | 2013 | UEM |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Quanto ao Grupo 2, sob o descritor "Modelagem", o repositório do programa disponibilizou 156 trabalhos. De forma semelhante às buscas narradas para o Grupo 1, inserimos novos descritores para reduzir a amostra. Entretanto, ao utilizar o filtro "Modelagem e o ensino de funções", o referido repositório não retornou nenhum resultado. Nessas condições, o refinamento se deu através da análise dos resumos e das leituras completas de algumas dissertações, resultando em uma seleção de 14 títulos, listados no Quadro 06, que envolviam temas mais próximos ao nosso trabalho.

**Quadro 6 - Fichamento de pesquisas no PROFMAT (Grupo 2)**

| **Autor** | **Título** | **Ano** | **Instituição** |
|---|---|---|---|
| **Silva** | Aproximação entre teoria e prática: a modelagem matemática como método facilitador para o ensino de funções exponenciais | 2019 | UFERSA |
| **Oliveira** | Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática | 2019 | UFMT |
| **Marques** | Modelagem matemática a partir do desenvolvimento de experimentos práticos para o estudo de funções | 2019 | UFFS |
| **Generoso** | Modelagem matemática e metodologia ativa: práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional | 2019 | UFMT |
| **Cervino** | Utilizando a modelagem matemática para auxiliar o ensino-aprendizagem do conteúdo de funções | 2019 | UFAM |
| **Lima** | Financiamentos imobiliários e modelagem matemática: uma proposta para o ensino-aprendizagem de sistemas de amortização | 2019 | UFERSA |
| **Cutrim** | Função quadrática na modelagem matemática no lançamento de foguete de garrafa pet com alunos do 1º ano do Ensino Médio | 2019 | UEMA |
| **Souza Jr.** | Uso do software Geogebra e modelagemmatemática no ensino de funções | 2018 | UFG |
| **Zanata** | Modelagem matemática com exponencial e logaritmo | 2018 | UFMT |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Melo** | Modelagem matemática no estudo das funções afim e quadrática | 2017 | UFAL |
| **Narcizo** | Investigando a modelagem matemática no ensino de funções afins e exponenciais | 2016 | UFG |
| **Helena** | Modelagem matemática no ensino médio: uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas. | 2016 | UNESP |
| **Silva** | O uso da modelagem matemática no ensino de funções na Educação Básica | 2014 | UNIFAP |
| **Cunha** | Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas | 2013 | UNESP |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

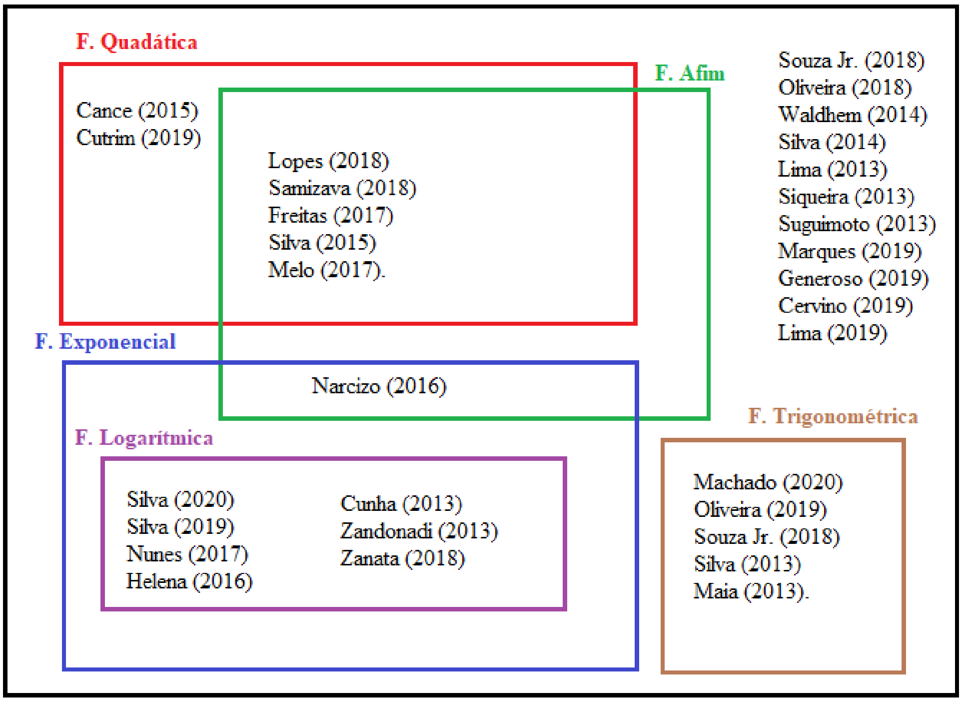
Os títulos de Nunes (2017), Narcizo (2016), Silva (2014), Cunha (2013), no Quadro 5, e Souza Jr. (2018), no Quadro 6, são elementos da interseção entre os grupos pesquisados. Trata-se de pesquisas que contemplam o ensino de funções por meio da modelagem matemática e do uso de *softwares*.

Aos professores da Educação Básica, as pesquisas listadas em ambos os grupos se constituem como fontes alternativas aos livros didáticos, úteis à preparação e ao planejamento das aulas. Trata-se de estudos matemáticos acerca das funções abordadas, sugestões de atividades ou sequências didáticas desenvolvidas a partir de estratégias de modelagem ou no uso do *software* Geogebra. Segue um agrupamento dessas dissertações conforme as funções tratadas em nossa pesquisa.

Em relação às funções afins, temos os títulos de Narcizo (2016), Lopes (2018), Samizava (2018), Freitas (2017), Silva (2015) e Melo (2017). Tais pesquisas, com exceção da primeira, também tratam do ensino de funções quadráticas, assunto a qual se dedicam também as dissertações de Cance (2015) e Cutrim (2019). Quanto às funções exponenciais, temos oito trabalhos dedicados a esse modelo: Silva (2020), Silva (2019), Nunes (2017), Helena (2016), Cunha (2013), Zandonadi (2013), Zanata (2018) e Narcizo (2016). Salvo o último autor, os demais também tratam do ensino de funções logarítmicas. Já para funções trigonométricas, listamos os estudos de Machado (2020), Oliveira (2019), Souza Jr. (2018), Silva (2013) e Maia (2013).

Aos docentes que buscam recursos para abordar o conceito de função em sala de aula, ora com o apoio de *softwares*, ora com estratégias de modelagem, as pesquisas listadas nesta seção constituem uma boa fonte de consulta e planejamento, inclusive os autores não listados no parágrafo anterior, que desenvolvem suas pesquisas de forma abrangente, não se limitando a funções específicas, conforme ilustra a Figura 5.

**Figura 5 – O ensino de funções nas dissertações do PROFMAT**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022**

Uma vez lidas as referidas dissertações, propomos aliar às estratégias de ensino e a utilização de vídeos, na intenção de facilitar o processo de aprendizagem sobre o ensino de funções. Na próxima seção, apresentamos nossas considerações acerca dessa proposta.

## 2.4 O uso de vídeos no ensino de funções

Conforme já enunciado na introdução desta dissertação, esta pesquisa de Mestrado se propõe à criação de um material de estudo diferenciado, composto por um conjunto de videoaulas e uma apostila, que auxilie alunos e professores no ensino-aprendizagem de funções, especialmente no contexto das defasagens escolares causadas pela pandemia do COVID-19.

O conteúdo abordado neste material é endossado pela BNCC, conforme já apresentado na seção 2.2 dessa dissertação. Quanto à metodologia e aos recursos utilizados nessa abordagem, recorremos à modelagem matemática e ao uso do Geogebra, tal como apresentado nas dissertações do PROFMAT, na seção anterior. Ao passo que o Geogebra é utilizado como recurso para apresentação das videoaulas, estratégias de modelagem matemática e de resolução de problemas norteiam as atividades propostas na apostila.

A produção das videoaulas, postadas na página do YouTube do autor, surge nesta pesquisa como um diferencial no ensino de funções dentro do PROFMAT, visto que tal ação não foi citada pelos autores listados em nosso levantamento bibliográfico. Enquanto a apostila contempla as primeiras noções de função, bem como os modelos específicos apresentados na BNCC (afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica), os conteúdos apresentados nos vídeos versam sobre os pré-requisitos para cada lição proposta no material e trazem também informações básicas ou complementares ao estudo de funções, utilizando o conceito de sala de aula invertida. Nessa nova metodologia ativa, os alunos têm contato inicial com o conteúdo através de vídeo aulas, pesquisas ou leituras e, em sala de aula, esse conteúdo passa a ser enriquecido pelo professor.

Com isso, esperamos que os alunos assistam previamente aos vídeos e, em sala de aula e sob a supervisão do professor de Matemática, usem os conceitos neles apresentados para desenvolverem as atividades propostas na apostila.

Feitas nossas considerações acerca do estudo de funções, tanto na perspectiva da BNCC quanto nas abordagens apresentadas nas dissertações do PROFMAT, prosseguimos, no Capítulo 3, com um tratamento matemático dos principais modelos trabalhados na sala de aula do Ensino Médio.

# O PRODUTO EDUCACIONAL

## 3.1 Apresentando a pesquisa

No início de 2021, o instituto Datafolha divulgou que cerca de 4 milhões de estudantes abandonaram os estudos durante o primeiro ano da pandemia da COVID-19 (SALDAÑA, 2021). Os índices dos matriculados que evadiram a escola giram em torno de 10,8%, no Ensino Médio, e de 4,6%, no Ensino Fundamental. Trata-se de estudantes que não tiveram nem um dia sequer de aula presencial desde o início da pandemia, nem foram alcançados pelo ensino remoto, ora por não terem recursos adequados, ora por não gozarem dessa oferta em seus municípios.

Essa restrição no acesso da maioria dos discentes da Educação Básica ao ensino remoto, especialmente nas redes públicas de ensino, contribui para o aumento significativo na defasagem escolar. Dentro da sala de aula Matemática, tal defasagem é agravada pela dificuldade que os estudantes já comumente apresentavam acerca de alguns tópicos, entre os quais destacamos os conteúdos relativos às funções, objeto de estudo desta pesquisa de Mestrado. Para esse conteúdo, inserido no eixo Álgebra, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) já registrava um declínio no aprendizado ao longo dos anos que precederam à pandemia.

Nesse sentido, a fim de contribuir com a diminuição da defasagem escolar no ensino de Matemática, esta pesquisa tem como escopo a criação de um material de estudo diferenciado, composto por um conjunto de videoaulas e uma apostila que objetivam auxiliar os alunos e professores no ensino/aprendizagem de funções. Nesse material, o conteúdo é tratado a partir de um mergulho nos problemas do dia a dia, contextualizados em situações modeladas matematicamente. A intenção é de que os alunos assistam previamente aos vídeos e, em sala de aula e sob a supervisão do professor de Matemática, usem os conceitos neles apresentados para desenvolverem as atividades propostas na apostila.

## 3.2 O produto educacional

Com base em nossa experiência profissional e nos estudos sobre o ensino de funções, elaboramos um produto educacional com a finalidade de proporcionar um material de apoio pedagógico que auxilie o processo ensino-aprendizagem, mostrando a Matemática em situações cotidianas e de fácil assimilação pelos estudantes.

O conjunto produzido é uma das possibilidades para o trabalho de conclusão do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, apresentado conjuntamente a esta dissertação.

> O produto educacional é um objeto de aprendizagem (por ex. pequeno livro, manual de atividades, sequência didática, software, jogo educativo, etc.) desenvolvido com base em trabalho de pesquisa científica que visa disponibilizar contribuições para a prática profissional de professores da Educação Básica, futuros professores, professores do Ensino Superior e Formadores de professores. Geralmente, o produto apresenta uma proposta de ensino ou de formação de professores que foi desenvolvida pelo(a) mestrando(a) e seu (sua) orientador(a). (PROFCIAMB, 2018, n. p.)

Nesta dissertação, o produto citado é O Ensino de Funções – uma abordagem do cotidiano. O produto é composto por um conjunto de videoaulas e uma apostila e é organizado em sete módulos. Cada um desses módulos é apresentado como uma sequência didática, por meio da qual os alunos serão capazes de:

- utilizar estratégias de modelagem para resolução de problemas;
- representar gráfica e algebricamente diversos tipos de função;
- reconhecer propriedades gráficas e algébricas de diversos tipos de função e
- utilizar essas representações para prever resultados e fazer inferências.

Os itens acima constituem um conjunto de habilidades coerente com aquelas propostas na BNCC, listadas nos quadros 1, 2, 3 e 4, na seção 2.4 desta dissertação. Nesse contexto, as lições propostas no material se iniciam versando sobre as primeiras noções de função, ao passo que os encontros seguintes são dedicados ao tratamento das funções especificadas no referido capítulo. O Quadro 7 lista os módulos abordados em cada encontro, bem como seus respectivos objetivos.

**Quadro 7 - Módulos & Objetivos**

| Módulo | Título | Objetivo |
|---|---|---|
| 1 | Noções de função | Apresentar o conceito de funções como uma relação de dependência entre as grandezas, resgatando a construção de expressões algébricas vistas em anos anteriores do Ensino Fundamental e evoluindo às possíveis representações dessa relação |
| 2 | Função afim | Associar um polinômio de 1º grau a uma função afim, identificando suas representações gráfica e algébrica. Interpretar algebrica e graficamente os resultados de equações / sistemas lineares na resolução de problemas. |
| 3 | Função quadrática | Associar um polinômio de 2º grau a uma função quadrática, identificando suas representações gráfica e algébrica. Nessas, interpretar o resultado de equações quadráticas e determinar o valor extremo da função. |
| 4 | Função exponencial | Modelar situações-problema por meio de uma função exponencial, identificando suas representações gráfica e algébrica. Interpretar o resultado de equações exponenciais na resolução de problemas. |
| 5 | Função logarítmica | Associar a função logarítmica à função exponencial, atribuindo-lhes significado algébrico e geométrico. Compreender a função logarítmica como um modelo capaz de descrever pequenas variações de uma grandeza em detrimento de variações exponenciais da variável dependente. |
| 6 | Função trigonométrica (I) | Usar razões trigonompetricas como estratégia para calcular alturas e distâncias inacessíveis. Modelar situações problema por meio da função trigonométrica e compreender seu comportamento periódico. |
| 7 | Função trigonométrica (II) | Compreender o comportamento oscilatório das funções seno e cosseno por meio de suas representações gráfica e algébrica. Determinar a imagem e o período de uma função trigonométrica. |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022**

A proposta é de que todo o conteúdo seja ministrado em sete encontros, cada um deles com a duração de duas horas/aula, equivalentes a um período de 90 minutos. As abordagens para cada módulo compreendem a visualização prévia das videoaulas elencadas para cada lição e, em sala de aula, a execução das atividades propostas na apostila.  A apresentação do conteúdo aos alunos cabe ao professor, bem como a apresentação da apostila e do conjunto de videoaulas.

O estudo de funções necessita de conteúdos prévios trabalhados em etapas anteriores de na sala de aula de Matemática. Sendo assim, sugere-se que, caso não haja o conhecimento prévio necessário, o professor deve dedicar pelo menos mais duas aulas para revisar:

- números reais: operações e representações;
- conjuntos: diagramas em Z e intervalos reais;
- representação de pares ordenados no plano cartesiano;
- equações e sistemas do 1º e do 2º grau;
- potências e radicais: operações e propriedades e
- razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Os itens citados são comumente abordados nos anos finais do Ensino Fundamental, fato que possibilita a utilização do nosso produto educacional na sala de aula do Ensino Médio. Uma revisão desses itens é contemplada nos vídeos que precedem cada encontro, sendo esses o ponto de partida para os trabalhos. Tais procedimentos também possibilitam a utilização do material em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, desde que os alunos já tenham tido contato com os conteúdos descritos acima.

Entretanto, entendemos que fica a cargo do professor de Matemática a implementação, desenvolvimento e aplicação dos conceitos apresentados em nosso produto, bem como a realização possíveis alterações desses, de acordo o nível de maturidade matemática de cada turma.

### 3.2.1 Sobre a apostila

De acordo com o que foi apresentado no Quadro 7, a apostila é constituída por sete módulos. Na introdução de cada módulo, constam orientações ao professor sobre: os objetivos da aula, a condução do encontro, a organização dos alunos e o tempo de duração de cada atividade. Quanto ao conteúdo, cada módulo é subdividido em três seções, a saber, *É hora de explorar!*, *Problemas de pesquisa* e *Vamos praticar!*. O primeiro traz ao aluno uma situação do cotidiano que envolve o conteúdo de funções a ser estudado; o segundo traz um aprofundamento maior dos conceitos importantes acerca do estudo de funções; e o terceiro busca trazer exercícios para a consolidação da aprendizagem do estudante. Trata-se de uma estrutura semelhante às propostas de Freitas e Moreira (2021).

Uma vez que nossa proposta de ensino é direcionada prioritariamente a estudantes e professores do Ensino Médio, o ponto de partida para a criação do produto educacional se deu a partir da análise das edições de 2011 a 2021 do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, que é o principal exame para aprovação em diversas universidades e faculdades públicas e privadas, na área *Matemática e suas Tecnologias*. Em primeira verificação, identificamos questões em que se exigia do aluno a habilidade de representar gráfica e algebricamente situações de variação de grandezas, de fazer predições com base em modelos algébricos informados e de identificar informações em gráficos que expressam a variação de grandezas. Prosseguindo a uma segunda verificação, identificamos os itens que versavam sobre as funções que são objetos de estudos nesta pesquisa de Mestrado.

Da análise supracitada, foram selecionados 22 itens do ENEM para a seção *Vamos praticar!*. Em cada módulo, tal seção é composta por cinco questões objetivas, para serem feitas em sala. Trata-se de itens do ENEM e de outros vestibulares, além de alguns itens autorais. Para a resolução dessas atividades, deve-se reservar um período de 40 minutos da aula, sendo que parte desse tempo será destinado à divulgação do gabarito e a devidas correções.

O segundo passo da produção do material foi a edição dos problemas que comporiam a seção *É hora de explorar!*. Em cada módulo, a referida seção apresenta uma situação-problema, conduzida como um estudo dirigido, que será usada como detonador da aula. Os alunos, organizados em duplas ou trios, terão 20 minutos para resolvê-la. Nessa seção, cabe a utilização de calculadoras e o auxílio docente.

Foram dois os desafios à edição supracitada, a saber, (i) redigir problemas de fácil assimilação pelos estudantes e cuja contextualização fosse significativa a eles e (ii) estruturá-los de modo que a resolução fosse conduzida por meio de estratégias de possibilitem ao aluno descobrir a relação matemática envolvida entre as grandezas. Sendo assim, vencidos os desafios (i) e (ii), definimos uma situação para cada módulo.

A proposta é de que, em cada situação, os alunos registrem em tabelas os dados do problema em questão, a fim de que, por meio dessas, padrões sejam identificados e expressos algebricamente. Dessas expressões, fluem os itens voltados à verificação de valores já listados e à predição de novos números. Ainda com referência às tabelas, os alunos são convidados a construir os dados em um plano cartesiano, permitindo a compreensão visual da situação estudada e a comparação com modelos já contemplados em encontros anteriores.

Definidas as seções *É hora de explorar!* e *Vamos praticar!*, prosseguimos à seção *Problema de pesquisa*, que traz aos alunos uma pergunta/sentença chave que interliga os problemas propostos em ambas as seções. Usando como referência a situação proposta em *É hora de explorar!*, cabe ao professor formalizar o conteúdo enunciando as propriedades, fazer generalizações, apresentar novos exemplos e conduzir discussões próprias ao assunto tratado. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Para cada módulo, a construção da seção *Problema de pesquisa* perpassou o tratamento matemático apresentado no Capítulo 3 desta dissertação. Tais tratamentos são permeados por questionamentos relevantes que o professor pode lançar aos estudantes, na intenção de de responder à pergunta-chave e de apresentar conceitos e propriedades acerca do modelo estudado. As perguntas/sentenças-chaves para cada módulo seguem no Quadro 8.

**Quadro 8 – Módulos & Problemas de Pesquisa**

| **Módulo** | **É hora de explorar!** | **Problema de pesquisa** | **Vamos praticar!** |
|---|---|---|---|
| Noções de Função | Máquinas numéricas | *Variação de grandezas & função: é tudo a mesma coisa?* | Questões 1 a 5 |
| Função afim | Locação de veículos | *Como eu sei que a relação é uma função afim?* | Questões 6 a 10 |
| Função quadrática | Áreas para uma região retangular | *Função Quadrática: para além da fórmula de Bhaskara* | Questões 11 a 15 |
| Função exponencial | Juros compostos & Investimentos | *Crescimento fora do ritmo: é isso mesmo?* | Questões 16 a 20 |
| Função logarítmica | Terremotos & Escala Richter | *Crescimento lento: como descrevê-lo?* | Questões 21 a 25 |
| Função trigonométrica (I) | Distâncias inacessíveis | *Não dá pra alcançar, mas dá pra medir!* | Questões 26 a 30 |
| Função trigonométrica (II) | Esteiras & Rampas | *Como uma onda...* | Questões 30 a 35 |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Além das perguntas/sentenças-chave que compõem a seção *Problema de pesquisa*, o Quadro 8 – **Módulos & Problemas de Pesquisa**, mostra a organização de cada módulo, com as situações propostas em *É hora de explorar!* e a ordenação das questões em *Vamos praticar!*. Nesse contexto, ratificamos a presença de orientações específicas aos docentes na introdução de cada módulo, junto das quais seguem os links para os vídeos correspondentes a cada aula.

### 3.2.2 Sobre os vídeos

O uso de *softwares* se constitui como um recurso útil ao ensino de funções. Destaca-se o uso do *software* Geogebra, que, em nosso produto educacional, será utilizado como recurso para apresentação das videoaulas. O Geogebra é um software livre, de matemática dinâmica, que permite a construção de entes geométricos e a representação gráfica de expressões algébricas. Apresentados como um diferencial nesta pesquisa de Mestrado, os vídeos versam sobre os pré-requisitos para cada lição proposta no material e trazem informações complementares ao assunto em pauta.

Para cada módulo, temos um conjunto de 4 videoaulas, cada uma com 6 a 15 minutos de duração, aproximadamente. A proposta é de que os alunos assistam previamente aos vídeos e, em sala de aula e sob a supervisão do professor de Matemática, usem os conceitos neles apresentados para desenvolverem as atividades propostas na apostila. A lista dos vídeos produzidos está no quadro 4 a seguir.

A roteirização dos vídeos foi feita com base nos pré-requisitos necessários a cada módulo e na apresentação das noções básicas de cada modelo estudado. O roteiro ainda conta com exemplos listados nesta dissertação e/ou na apostila produzida. Em alguns vídeos, o Geogebra é utilizado como recurso na apresentação e/ou exploração dos modelos em pauta, com abordagens semelhantes às apresentadas nas pesquisas do PROFMAT, listadas na Seção 4.3 desta dissertação.

As gravações foram feitas utilizando-se do *software* gratuito OBS Studio. Os vídeos foram alocados no YouTube, no canal Antonine Bicalho (https://www.youtube.com/user/antoninebicalho), e são fornecidos aos alunos e professores na introdução de cada módulo.

**Quadro 9 – Módulos & Objetivos**

| **Módulo** | **Título** | **Objetivo** |
|---|---|---|
| 1 | Noções de função | Apresentar o conceito de funções como uma relação de dependência entre as grandezas, resgatando a construção de expressões algébricas vistas em anos anteriores do Ensino Fundamental e evoluindo às possíveis representações dessa relação |
| 2 | Função afim | Associar um polinômio de 1º grau a uma função afim, identificando suas representações gráfica e algébrica. Interpretar algébrica e graficamente os resultados de equações / sistemas lineares na resolução de problemas. |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | Função quadrática | Associar um polinômio de 2º grau a uma função quadrática, identificando suas representações gráfica e algébrica. Nessas, interpretar o resultado de equações quadráticas e determinar o valor extremo da função. |
| 4 | Função exponencial | Modelar situações-problema por meio de uma função exponencial, identificando suas representações gráfica e algébrica. Interpretar o resultado de equações exponenciais na resolução de problemas. |
| 5 | Função logarítmica | Associar a função logarítmica à função exponencial, atribuindo-lhes significado algébrico e geométrico. Compreender a função logarítmica como um modelo capaz de descrever pequenas variações de uma grandeza em detrimento de variações exponenciais da variável dependente. |
| 6 | Função trigonométrica (I) | Usar razões trigonométricas como estratégia para calcular alturas e distâncias inacessíveis. Modelar situações problema por meio da função trigonométrica e compreender seu comportamento periódico. |
| 7 | Função trigonométrica (II) | Compreender o comportamento oscilatório das funções seno e cosseno por meio de suas representações gráfica e algébrica. Determinar a imagem e o período de uma função trigonométrica. |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

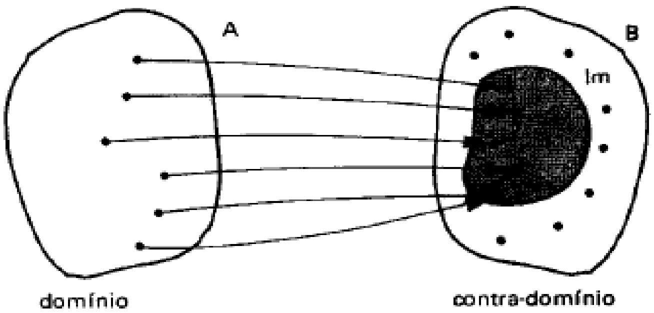
Ao narrarmos neste capítulo o processo de construção do nosso produto educacional, esperamos que esse material auxilie os professores no ensino de funções, especialmente em caráter revisional e, no tocante à defasagem decorrente do ensino remoto durante a pandemia da COVID-19, resgatador. Quanto aos estudantes, esperamos que possam usar os vídeos e a apostila como ferramentas de aprendizagem ativa e eficaz. Nesse sentido, seguem, no próximo capítulo, nossas sugestões à primeira aplicação do material produzido e possibilidades para sua análise.

# FUNÇÕES NA SALA DE AULA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

## 4.1 Conceitos iniciais de função

No dicionário, a definição de função aparece como uma "relação entre dois ou mais conjuntos, definida por uma regra que associa, a cada elemento de um conjunto, não mais de um elemento determinado de outro" (FERREIRA, 2006, p. 421). Em termos de notação, para apenas dois conjuntos, essa definição pode ser representada por $f: A \rightarrow B$, na qual a função $f$ descreve uma relação de correspondência entre os conjuntos A e B, tal que, para qualquer elemento de A, há um único correspondente em B. Tal relação é exemplificada na Figura 6.

**Figura 6 – Elementos de uma função $f: A \rightarrow B$**




**Fonte: IEZZI, MURAKAMI (1977a, p. 80-A)**

Para cada função $f: A \rightarrow B$, A e B podem ser conjuntos diversos, distintos ou não, que, por sua vez, assumem os papéis de domínio e contradomínio da função, respectivamente, conforme ilustra a Figura 6. Na mesma ilustração, destacamos um subconjunto de B formado pelos valores $y \in B$ tais que $y = f(x)$, com $x \in A$; a esse damos o nome de conjunto imagem da função, denotado por $Im(f)$. Trata-se de nomenclaturas importantes, mencionadas nos textos seguintes deste capítulo, e nos conduzem à definição formal de função:

> *$f: A \rightarrow B$ é uma função se, e somente se, para todo elemento $x$ do domínio A, exista um único elemento $y$ do contradomínio B, tal que $y = f(x)$.*

Por meio da função $f: A \rightarrow B$ tal que $y = f(x)$, podemos formar os pares ordenados $(x,y)$. Ao conjunto $G_f$, formado por todos esses pares ordenados, chamamos de gráfico da função $f$. Em Lima (2013), $G_f$ pode ser entendido como um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, eficaz à representação visual de $f$ ao evidenciar a correspondência, a transformação ou a dependência entre as grandezas representadas por A e B. Os comportamentos das grandezas representadas em $G_f$ podem ser úteis para estimar e/ou prever resultados.

Podemos ser ainda mais precisos quando *f* é expressa algebricamente, por uma fórmula do tipo $y = f(x)$, conhecida como lei da função. Neste capítulo, abordaremos alguns modelos específicos de funções $y = f(x)$, ressaltando, a partir de suas leis e de seus gráficos, algumas propriedades e aplicações.

Para uma melhor compreensão do que será apresentado neste capítulo, é necessário o entendimento de alguns conceitos cabíveis a todos os modelos, a saber, variação (i) e estudo de sinal (ii). Para isso, considere $x_1$ e $x_2$ elementos distintos quaisquer do domínio da função $f: A \to B$, sendo $A = [p, q]$ e $p < x_1 < x_2 < q$, $p, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

i. Variação
   a. *f* é crescente em A se, e só se, $f(x_1) < f(x_2)$, para quaisquer $\{x_1, x_2\} \subset A$.
   b. *f* é decrescente em A se, e só se, $f(x_1) > f(x_2)$, para quaisquer $\{x_1, x_2\} \subset A$.
   c. *f* é constante em A se, e só se, $f(x_1) = f(x_2)$, para quaisquer $\{x_1, x_2\} \subset A$.

ii. Estudo de sinal
   a. *f* é positiva em A se, e só se, $f(x_1) > 0$, para qualquer $x_1 \in A$.
   b. *f* é negativa em A se, e só se, $f(x_1) < 0$, para qualquer $x_1 \in A$.
   c. *Se* $f(x_1) = 0$, para algum $x_1 \in A$, dizemos que $x_1$ é raiz (ou zero) de *f*.

Uma vez apresentados esses conceitos, seguem, nas próximas seções, nossas considerações acerca das principais funções apresentadas na sala de aula de Matemática da Educação Básica. Trata-se de modelos mencionados no Capítulo 4 desta dissertação, sob os focos da BNCC e de algumas das dissertações do PROFMAT utilizadas como base para os nossos estudos.

## 4.2 Funções polinomiais do 1º e 2º grau

Entende-se por função polinomial a função $f: A \to B$, na qual A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ definida por

$$y = f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

com $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.

O estudo dos polinômios é pauta em etapas distintas da Educação Básica. Antes da BNCC, os materiais direcionados ao Ensino Fundamental – Anos Finais enfatizavam a resolução de equações polinomiais de grau 1, por princípios de equivalência; de grau 2, por meio da fórmula de Bhaskara; e, em alguns casos, de 3º e 4º graus, por meio de estratégias de fatoração ou do uso de variáveis auxiliares (artifícios). O Quadro 10 apresenta alguns exemplos dos modelos mencionados.

**Quadro 10 – Equações polinomiais no Ensino Fundamental**

| Grau | Equação | Estratégia de resolução |
|---|---|---|
| **1** | $2x + 1 = 0$ | Princípios de equivalência (isolar o x) |
| **2** | $x^2 + 2x + 1 = 0$ | Fórmula de Bhaskara |
| **3** | $x^3 + 2x^2 + x = 0$ | Fator comum em evidência |
| **4** | $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ | Equação biquadrada |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022**

Já no Ensino Médio, o tratamento dos polinômios evolui para a resolução de equações de graus maiores que 2, por meio de estratégias que objetivam reduzir o grau do polinômio, conhecidas algumas de suas raízes. Uma das estratégias mais utilizadas é o dispositivo prático de Briott-Ruffini (DANTE, 2014, IEZZI *et al* 2010)

Entretanto, a BNCC não faz referências ao tratamento dos polinômios tal como mencionado nos parágrafos acima. Em detrimento dessas, os textos da base enfatizam apenas o uso das equações polinomiais de graus 1 (equações lineares) e 2 na resolução de problemas e no ensino das funções polinomiais do 1º grau (afins) e do 2º grau (quadráticas). Já nas páginas dedicadas ao Ensino Médio, são apresentados novos modelos, as funções exponenciais e logarítmicas; e as funções trigonométricas.

Diante do exposto, seguem nossas considerações acerca das funções polinomiais do 1º e do 2º grau.

### 4.2.1 Função Afim

Segundo Lima (2013), uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser classificada como *função afim* quando existem constantes reais $a$ e $b$, tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in IR$. Nesse formato, para $a \neq 0, y = f(x)$ depende de um polinômio do 1º grau, visto que o maior grau da sua variável independente é igual a 1; por isso, a função afim também é conhecida como função polinomial do 1º grau. Ademais, para $a = 0, f(x) = 0x + b = b$ assume o formato de uma função constante.

Quanto à representação da função afim no plano cartesiano, temos o conjunto $G_f$ formados por pares ordenados (x, y) que descrevem uma sequência de pontos colineares. Tal colinearidade é descrita por um coeficiente de inclinação, dado por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, sempre constante.

Uma vez que y = f(x) = ax + b, calculemos esse coeficiente para elementos genéricos e distintos do domínio $x_1$ e $x_2$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

A igualdade $m = a$ confirma o caráter retilíneo do conjunto $G_f$, que, por sua vez, em um domínio real ilimitado, pode ser representado por uma única reta, de inclinação constante. Quanto maior o valor absoluto de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Uma vez que tal inclinação pode ser entendida também como uma taxa de variação da função, concluímos que f(x) = ax + b será sempre crescente (a > 0) ou sempre decrescente (a < 0).

Nesses termos, entendemos a função afim como um modelo útil à descrição de situações em que a taxa de variação é definida por uma constante. A seguir, um exemplo semelhante às propostas de Nunes (2022).

**Exemplo 1:** O salário mensal de um vendedor é composto por um valor fixo e outro variável, calculado em função do total de suas vendas ao longo do mês. A Tabela 1 apresenta o salário desse funcionário em meses anteriores.
Estime o salário desse vendedor correspondente a uma venda mensal de R$ 5000,00.

**Tabela 1 – Vendas & Salários**

| Mês | Total de Vendas | Salário |
|---|---|---|
| 1 | R$ 1.000,00 | R$ 1.000,00 |
| 2 | R$ 1.500,00 | R$ 1.025,00 |
| 3 | R$ 2.800,00 | R$ 1.090,00 |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

**Resolução:** A princípio, verificaremos a taxa de variação, calculada em função dos pares ordenados *(x, y) = (venda, salário)*. Nesse caso, para o mês *n*, assumimos os pares $(x_n, y_n)$.

- Para n = 1 e n = 2

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1025 - 1000}{1500 - 1000} = 0{,}05$$

- Para n = 1 e n = 3:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{1090 - 1000}{2800 - 1000} = 0{,}05$$

- Para n = 2 e n = 3

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{1090 - 1025}{2800 - 1500} = 0{,}05$$

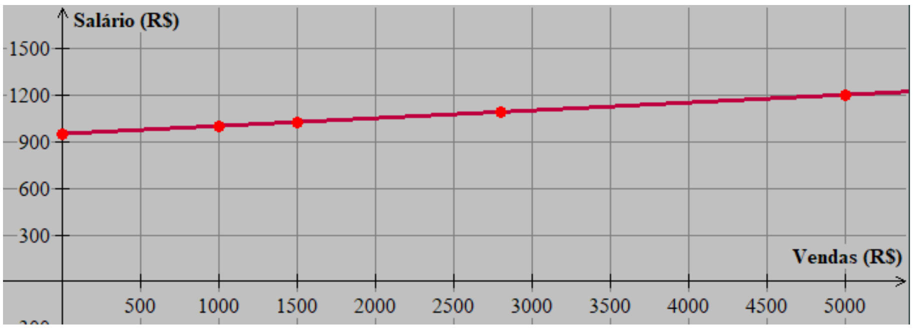
Uma vez que a taxa de variação é constante, a relação *venda & salário* pode ser descrita pela função $f(x) = a \cdot x + b$, com $a = m = 0{,}05$.

A partir de $f(1000) = 1000$, escrevemos: $1000 = f(1000) = 0{,}05 \cdot 1000 + b \Rightarrow b = 950$. Portanto, a função desejada é $f(x) = 0{,}05 \cdot x + 950$, por meio da qual calculamos o salário correspondente à venda de R$ 5000,00, a saber, $f(5000) = 0{,}05 \cdot 5000 + 950 = R\$1200{,}00$.

Semelhante à situação proposta no Exemplo 1, inúmeras outras, em que a taxa de variação seja constante, são passíveis de serem modeladas por meio de funções afins.

Quanto à constante *b*, podemos interpretá-la como o valor inicial de *f*, uma vez que $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Dessa igualdade, temos também o par ordenado $(0, b)$ que, *em* $G_f$, representa o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas. No Exemplo 1, o valor inicial $f(0) = 0{,}05 \cdot 0 + 950 = R\$\ 950{,}00$ corresponde ao salário fixo do vendedor, que, numa representação gráfica, seria o ponto de partida $(0, 950)$ de uma semirreta ascendente, no sentido positivo de *x*, visto que não seriam admitidos valores negativos para tal variável no contexto proposto. Tal representação segue na Figura 7, na qual se destacam os pontos correspondentes ao valor inicial, às informações apresentadas na Tabela 1 e à solução do problema proposto.

**Figura 7 – Salários & Vendas**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Ainda sobre a constante *b*, consideremos o caso em que $b = 0$. Graficamente, o ponto $(0, b) = (0, 0)$ indica que a reta, que passa pela origem do sistema cartesiano, corresponde à função $f(x) = a \cdot x$, chamada de *função linear*, um caso particular da função afim. Algebricamente, a função linear se destaca pela descrição de situações de proporcionalidade.

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (LIMA, 2013, p. 84)

Transcrevendo os conceitos acima, o autor define uma ***proporcionalidade*** como uma função $f: IR \to IR$ tal que $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ (proporção direta) ou $f(c \cdot x) = f(x)/c$ (proporção inversa), para quaisquer reais $c$ e $x$. Dessa definição, tem-se, para todo $x$ real:

i. Pondo $a = f(1)$, $f(x) = a \cdot x$ e;
ii. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Para caracterizar uma função afim como qualquer função real $f$ em que o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depende apenas de $h$, mas não de $x$. Nesse caso, é necessário que a função analisada seja sempre crescente (ou sempre decrescente). A prova dessa caracterização reside na proporcionalidade descrita nos itens (i) e (ii).

Demonstração:

$f(x + h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h) = \varphi(h)$

Pondo $f(1) = \varphi(1) = a$, tem-se $f(h) = \varphi(h) = a \cdot h$.

Tomando $b = f(0)$, tem-se $f(h+0) = f(h) + f(0) = a \cdot h + b$.

Portanto, $f(x) = a \cdot x + b$, para todo $x$ real.

Retomando $G_f$, as retas antes descritas pelos elementos desse conjunto podem ser restritas a semirretas, ou ainda, a segmentos de retas, mediante limitações no domínio de $f$. Para a função $f: A \to B$ tal que $f(x) = a \cdot x + b$, em que $A = [x_0, +\infty)$, ou ainda, $A = (-\infty, x_0]$, os elementos de $G_f$ descrevem semirretas com limitação no ponto $(x_0, a \cdot x_0 + b)$. Essa situação foi ilustrada no Exemplo 1, em que $A = IR_+$ implica uma imagem $Im_f = [950, +\infty)$. Já para o caso $A = [x_1, x_2]$, o gráfico de $f$ seria restrito a um segmento de reta, limitado pelos pontos $(x_1, a \cdot x_1 + b)$ e $(x_2, a \cdot x_2 + b)$, a partir dos quais escrevemos a imagem da função, a saber, $Im_f = [a \cdot x_1 + b, a \cdot x_2 + b]$.

No tocante às representações formadas por semirretas ou segmentos de reta, ressaltamos a possibilidade de esses itens aparecerem simultaneamente como representações de uma mesma função. Trata-se da representação de uma função poligonal, definida por funções afins distintas, válidas em subintervalos específicos de seu domínio. Por exemplo, o gráfico da função poligonal *f: A* $\rightarrow$ *B* tal que

$$f(x) = \begin{cases} a_1 \cdot x + b_1, se\ x_0 < x \leq x_1 \\ a_2 \cdot x + b_2, se\ x_1 < x \leq x_2 \\ \dots \\ a_n \cdot x + b_n, se\ x_{n-1} < x \leq x_n \end{cases}$$

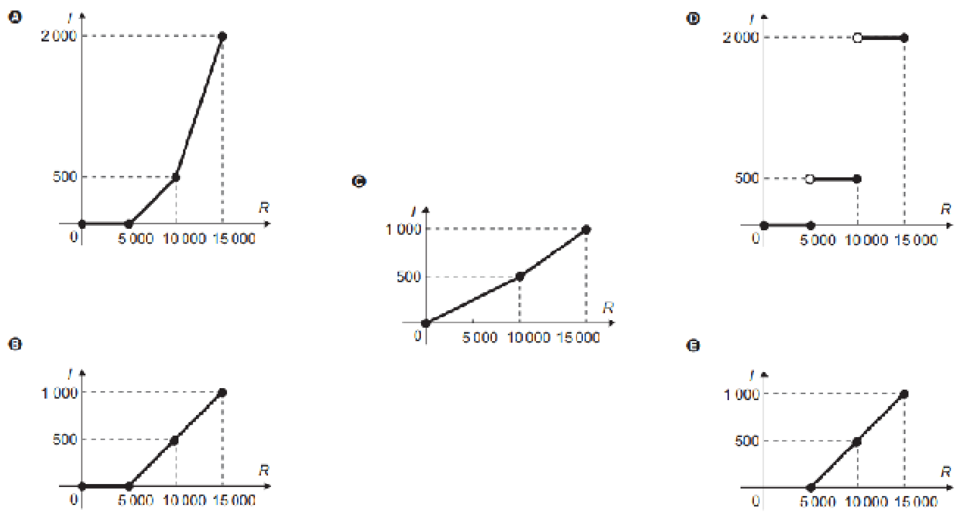
é formado por *n* segmentos de reta consecutivos, válidos em *n* subintervalos de $A = (x_0, x_n]$. Tais modelos são muito úteis na descrição de situações de consumo e tributação que, na Educação Básica, contextualizam frequentemente itens de avaliações externas. A Figura 8 apresenta um exemplo, de um item da edição 2021 do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que avalia o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404, já apresentada no Quadro 1.

**Figura 8– Funções poligonais no ENEM**

O quadro representa a relação entre o preço de um produto (*R*) e seu respectivo imposto devido (*I*).

| Preço do produto (*R*) | Imposto devido (*I*) |
|---|---|
| $R \leq 5\,000$ | isento |
| $5\,000 < R \leq 10\,000$ | 10% de ($R$ – 5 000) |
| $10\,000 < R \leq 15\,000$ | 500 + 30% de ($R$ – 10 000) |

O gráfico que melhor representa essa relação é



**Fonte: BRASIL (2021)**

Na Figura 8, a tabela presente no texto base nos remete a uma função poligonal, cuja lei é

$$f(R) = \begin{cases} 0, s\ 0 < R \leq 5000 \\ 0{,}10 \cdot R - 500, se\ 5000 < R \leq 10000 \\ 0{,}30 \cdot R - 2500, se\ 10000 < R \leq 15000 \end{cases}$$

Nesse caso, os pontos que compõem $G_f$ correspondem a três segmentos de reta: um horizontal, correspondente à função constante $f(R) = 0$; e dois ascendentes, com inclinações 0,10 e 0,30, correspondentes às funções $f(R) = 0{,}10 \cdot R - 500$ e $f(R) = 0{,}30 \cdot R - 2500$, respectivamente. Cada um desses, restrito a intervalos específicos para a variável *R*.

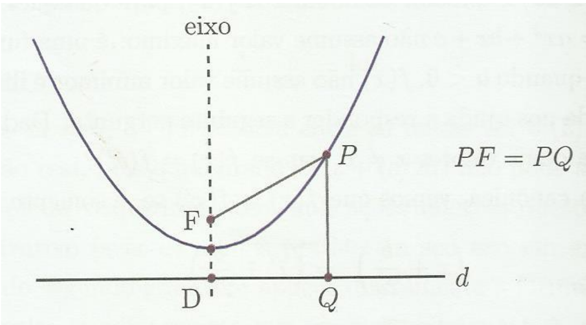
Apresentadas nossas considerações acerca das funções afins, prosseguimos à apresentação da função polinomial do 2º grau.

### 4.2.2 Função Quadrática

Toda função é dita quadrática quando o maior expoente da sua variável independente é igual a 2. De forma geral, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c $\in$ IR, e $a \neq 0$, temos uma função polinomial de 2º grau ou Função Quadrática.

O gráfico de uma função quadrática é formado pelos elementos do conjunto $G_f$, que obedecem às propriedades de uma parábola com eixo de simetria vertical, ou seja, paralelo ao eixo y, ilustrada na Figura 9. Conforme Delgado et al (2017), dados uma reta diretriz horizontal d: y = k e um ponto focal $F(x_f, y_f)$, uma parábola é a representação do conjunto $G_f = \{P(x, y) / PF = PQ$, com $Q \in d\}$.

**Figura 9 – Parábolas no plano cartesiano**




**Fonte: Lima (2013)**

Sendo a parábola o lugar geométrico dos pontos equidistantes à uma reta (diretriz) e a um ponto (foco), podemos encontrar a função que descreve tal situação.

Seja $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ a medida do comprimento do segmento AB, com extremos em $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Aplicando essa fórmula aos pontos $F(x_f, y_f)$, $P(x, y)$ e $Q(x, k)$ mostrados na Figura 9, escrevemos:

- $PF = d(P,F) = \sqrt{\left(x_f - x_P\right)^2 + \left(y_f - y_P\right)^2} = \sqrt{\left(x_f - x\right)^2 + \left(y_f - y\right)^2}$

- $PQ = d(P,Q) = \sqrt{\left(x_Q - x_P\right)^2 + \left(y_Q - y_P\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (k-y)^2} = |k-y|$

Fazendo $|\overline{PF}| = |\overline{PQ}|$, temos:

$$\sqrt{\left(x_f - x\right)^2 + \left(y_f - y\right)^2} = |k-y|$$

$$\left(x_f - x\right)^2 + \left(y_f - y\right)^2 = (k-y)^2$$

$$\left(x_f\right)^2 - 2\cdot x\cdot x_f + x^2 + \left(y_f\right)^2 - 2\cdot y\cdot y_f + y^2 = k^2 - 2\cdot k\cdot y + y^2$$

$$\left(x_f\right)^2 - 2\cdot x\cdot x_f + x^2 + \left(y_f\right)^2 - k^2 = 2\cdot y\cdot y_f - 2\cdot k\cdot y$$

$$x^2 - 2\cdot x\cdot x_f + \left(x_f\right)^2 + \left(y_f\right)^2 - k^2 = 2\cdot\left(y_f - k\right)\cdot y$$

$$y = \frac{1}{2\cdot\left(y_f - k\right)}x^2 - x\cdot\frac{x_f}{\left(y_f - k\right)} + \frac{\left(x_f\right)^2 + \left(y_f\right)^2 - k^2}{2\cdot\left(y_f - k\right)}$$

Na igualdade acima, de $|\overline{PF}| = |\overline{PQ}|$, obtemos *y* expresso em função de um polinômio de 2º grau na variável *x*. Logo, conforme tal expressão, escrevemos $y = f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, com $a = \frac{1}{2\cdot\left(y_f - k\right)}$, $b = -\frac{x_f}{\left(y_f - k\right)}$ e $c = \frac{{x_f}^2 + y_f^2 - k^2}{2\cdot\left(y_f - k\right)}$.

Ainda na Figura 9, considere como vértice da parábola o ponto da curva mais próximo da reta diretriz $d\colon y = k$, denotado como $V(x_v, y_v)$. Uma vez que $V \in G_f$, temos $FV = VD$, com $D(x_f, k) \in d$, e, consequentemente, $V(x_v, y_v)$ assume o papel de ponto médio do segmento FD. Isto é:

$$V(x_v, y_v) = V\left(\frac{x_f + x_d}{2}, \frac{y_f + y_d}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_f + x_d}{2}, \frac{y_f + y_d}{2}\right) = V\left(\frac{x_f + x_f}{2}, \frac{y_f + k}{2}\right) = V\left(x_f, \frac{y_f + k}{2}\right)$$

Em termos dos coeficientes

$$a = \frac{1}{2\cdot\left(y_f - k\right)}, b = -\frac{x_f}{\left(y_f - k\right)}, c = \frac{\left(x_f\right)^2 + \left(y_f\right)^2 - k^2}{2\cdot\left(y_f - k\right)}$$

ainda podemos escrever:

i. $b = -\frac{x_f}{\left(y_f - k\right)} \Rightarrow x_f = -b\cdot\left(y_f - k\right)$

ii. $a = \frac{1}{2\cdot\left(y_f - k\right)} \Rightarrow \left(y_f - k\right) = \frac{1}{2a}$

Substituindo (ii) em (i), temos $x_v = x_f = -\frac{b}{2a}$.

Quanto à ordenada $y_v = \frac{y_f + k}{2}$, podemos escrevê-la como $y_v = f(x_v)$, visto que V é um ponto do gráfico da função $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$. Sendo assim, temos:

$$
\begin{aligned}
y_v = f(x_v) &= a.x_v^2 + b.x_v + c = \\
&= a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \\
&= a.\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a} = \\
&= \frac{-(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}{4a}.
\end{aligned}
$$

Tomando $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4 \cdot a \cdot c$ como o discriminante, temos $\mathrm{y_v} = -\frac{\Delta}{4\mathrm{a}}$.

De posse desses resultados, definimos o vértice da parábola como $\mathrm{V}\left(-\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}, -\frac{\Delta}{4\mathrm{a}}\right)$, sobre o qual traçamos seu eixo de simetria, perpendicular à reta diretriz *d: y = k*. É importante ressaltar que, para que uma parábola represente uma Função Quadrática, o eixo de simetria deve ser vertical, paralelo ao eixo y. A partir desse eixo, podemos analisar os intervalos de crescimento e decrescimento da função, que é uma de suas principais características.

Além do eixo de simetria, o vértice $V(x_v, y_v) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ também auxilia na determinação da imagem da função quadrática, visto que ele assume o papel de ponto máximo (ou mínimo) da parábola. Nesse cenário, é necessário considerar a concavidade (abertura) da curva. Retomemos então a forma algébrica $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, na qual o coeficiente $a$ determina a concavidade da parábola. Caso $a > 0$, a curva terá sua concavidade voltada para cima e, consequentemente, o vértice será seu ponto de mínimo. Do contrário ($a < 0$), a concavidade será voltada para baixo e teremos em $y_v$ o valor de máximo da função.

Acerca da imagem de uma função quadrática, observe que, para o domínio real de $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, o conjunto imagem será determinado analisando-se o vértice e a concavidade da parábola. Caso a parábola tenha concavidade voltada para baixo ($a < 0$), o conjunto imagem será dado por $Im_f = \{y \in IR \,/\, y \leq y_v\}$; do contrário ($a > 0$), teremos $Im_f = \{y \in IR \,/\, y \geq y_v\}$.

Falemos agora do discriminante $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, que, além de figurar em $\mathrm{y_v} = -\frac{\Delta}{4\mathrm{a}}$, também assume um papel importante na determinação dos zeros da função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, dada pelo conjunto solução da equação polinomial $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Acompanhe os passos seguintes.

- Com $a \neq 0$, podemos dividir toda a igualdade por $a$: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$;

- Subtraindo o termo $\frac{c}{a}$ em ambos os lados da igualdade: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$;
- Para obtermos um trinômio do quadrado perfeito, completamos o quadrado no primeiro membro da igualdade, adicionando a parcela $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados da igualdade: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$;
- Fatorando o trinômio do quadrado perfeito: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$;
- Organizando as parcelas à direita da igualdade: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a^2}$;
- Reescrevendo, em termos de Δ: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$;
- Aplicando a raiz quadrada em ambos os membros: $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Resolvendo o módulo: $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Subtraindo o termo $\frac{b}{2a}$ em ambos os lados da igualdade: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Organizando as parcelas à direita da igualdade: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Logo, sendo $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4 \cdot a \cdot c$ o discriminante da equação, obtemos, para a função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, as raízes $\mathrm{x}_1 = \frac{-\mathrm{b} - \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$ e $\mathrm{x}_2 = \frac{-\mathrm{b} + \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$. É importante ressaltar que, por se tratar de uma função real, as raízes $x_1$ e $x_2$ só são definidas caso $\Delta \geq 0$, ora distintas $(\Delta > 0)$ ora idênticas $(\Delta = 0)$.

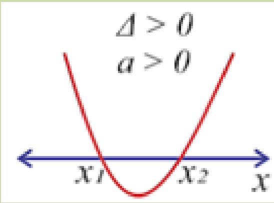
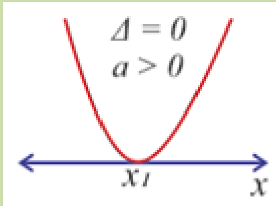
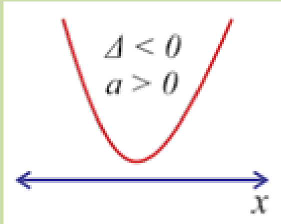
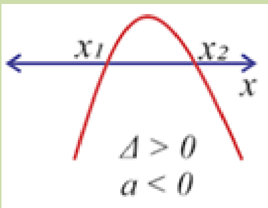
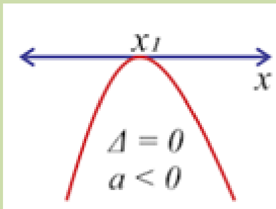
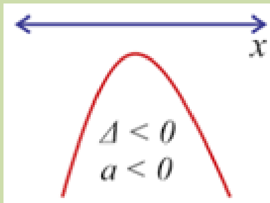
Dado o comportamento simétrico descrito da função quadrática, as raízes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ são equidistantes do vértice $V(x_v, y_v) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Sendo assim, a abscissa $x_v$ pode ser calculada a partir da média aritmética das raízes.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2b}{2a}\right) = -\frac{b}{2a}$$

Lembrando que esse cálculo é válido somente para casos em que as raízes são definidas em *IR* $(\Delta \geq 0)$.

No tocante ao estudo de sinal de uma função quadrática, condicionamos nossas conclusões à existência das raízes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, e também à concavidade da parábola, identificada a partir do sinal do coeficiente *a*. No Quadro 8, apresentamos essas conclusões resumidamente, de modo semelhante àquelas comumente apresentadas em materiais dedicados à Educação Básica, tais como em IEZZI *et al* (2010).

**Quadro 11 – Variação de sinal na Função Quadrática**

| | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| a > 0 |  |  |  |
| Zeros | $x_1 \neq x_2$ | $x_1 = x_2$ | Não há. |
| Vértice | $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ | $x_v = x_1 = x_2$ | $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ |
| Sinais | • $f(x) > 0 \Rightarrow x < x_1$ e $x > x_2$<br>• $f(x) < 0 \Rightarrow x_1 < x < x_2$ | • $f(x) > 0 \Rightarrow x \neq x_1$<br>• $f(x) < 0 \Rightarrow$ Nunca | • $f(x) > 0 \Rightarrow$ Sempre<br>• $f(x) < 0 \Rightarrow$ Nunca |
| a < 0 |  |  |  |
| Zeros | $x_1 \neq x_2$ | $x_1 = x_2$ | Não há. |
| Vértice | $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ | $x_v = x_1 = x_2$ | $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ |
| Sinais | • $f(x) > 0 \Rightarrow x_1 < x < x_2$<br>• $f(x) < 0 \Rightarrow x < x_1$ e $x > x_2$ | • $f(x) > 0 \Rightarrow$ Nunca<br>• $f(x) < 0 \Rightarrow x \neq x_1$ | • $f(x) > 0 \Rightarrow$ Nunca<br>• $f(x) < 0 \Rightarrow$ Sempre |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

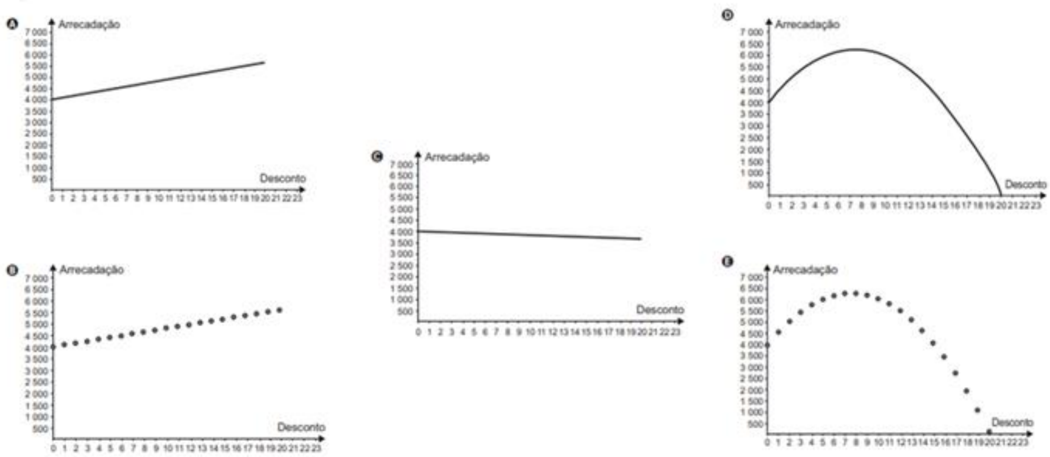
Na Educação Básica, a função quadrática é comumente apresentada como um modelo capaz de descrever a variação de grandezas cujo crescimento/decrescimento é limitado por um valor extremo. Na BNCC, reconhecer/investigar esses extremos é listado na habilidade EM13MAT503, a saber, "Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais." (BRASIL, 2018, p.543). Ademais, interpretar gráfica/algebricamente essas variações compreende as habilidades H19 e H20[2], na matriz de

[2] Habilidades presentes na matriz de referência do ENEM (BRASIL, 2009, p. 5-6).
(H19) Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
(H20) Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

referencial do ENEM (BRASIL, 2009). O problema a seguir e os gráficos das opções de resposta, representados na Figura 10, exemplificam uma dessas abordagens.

O administrador de um teatro percebeu que, com o ingresso do evento a R$20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40 reais. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingrsso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

**Figura 10 – Funções quadráticas no ENEM**




**Fonte: BRASIL (2021)**

O gráfico que se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é o item C, apresentado na Figura 10, extraído da edição 2021 do ENEM, poderia ser modelado algebricamente a partir das informações contidas no texto. Observe:

- Para os preços dos ingressos, temos a sequência $I_n = \{20, 19, 18, \ldots\}$, generalizada pela função afim $I(n) = 20 – n$, de domínio natural.
- Quanto ao público pagante, tem-se a sequência $P_n = \{200, 240, 280, \ldots\}$, generalizada pela função $P(n) = 200 + 40n$, também de domínio natural.

A arrecadação $A(n)$, em função do desconto de $n$ reais, é dada pelo produto entre o preço do ingresso $I_n$ e o público pagante $P_n$. Logo,

$$A(n) = I(n) \cdot P(n) = (20 – n) \cdot (200 + 40n) = -40n^2 + 800n + 4000.$$

Uma vez que a função *A(n)* é quadrática, seu gráfico corresponde a uma parábola, limitando nossas escolhas às alternativas (D) e (E) da questão. Uma vez que o texto menciona valores inteiros para o desconto oferecido, o gabarito desejado é a opção (E).

Apresentadas nossas considerações acerca das funções quadráticas, segue na próxima seção uma exposição da função exponencial.

## 4.3 Exponenciais e Logaritmos

Antes de discorrermos sobre funções exponenciais (e logarítmicas), segue um breve, e necessário, estudo sobre potências em *IR*.

Para expoentes naturais *m* e *n* e bases reais positivas *a* e *b*, temos definidas as potências $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ fatores}$ e $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\ fatores}$, a partir das quais definimos também a raiz enésima de um número real *b*, a saber, $a^n = b \Leftrightarrow \sqrt[n]{b} = a$.

Para essas, valem as seguintes propriedades.

i. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
ii. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
iii. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;
iv. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ e;
v. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

De (ii), definimos as potências para expoentes inteiros, a saber:

vi. Para *n* = *m*, temos $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{n-n} = a^0$ e $\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$.

Logo, $a^0 = 1$.

vii. Para *n* < *m*, existe um natural *k* tal que *m* = *n* + *k*.

Logo, $\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+k}} = \frac{a^n}{a^n \cdot a^k} = \frac{1}{a^k}$.

Por outro lado, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-k}$.

Portanto, $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

De (iii), definimos as potências para expoentes racionais, a saber, $a^r = a^{\frac{n}{m}}$:

viii. Considere as potências $(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \dots \cdot a^r}_{n\ fatores}$ e $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{n}{m}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{n}{m}}}_{n\ fatores}$.

Aplicando (iii) a $(a^r)^n = \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^n$, temos $a^{r \cdot n} = a^m$, ou ainda, $(a^r)^n = a^m$.

Pela definição de raiz enésima, escrevemos $(a^r)^n = a^m \Leftrightarrow a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Logo, $a^r = a^{n/m} = \sqrt[n]{a^m}$.

Dado que o conjunto $Q$ dos números racionais é um conjunto enumerável, o conjunto das potências $a^r = a^{n/m}$ também o é. Nesse sentido, Lima (2013) aponta que, apesar de as potências $a^r = a^{n/m}$, com $a \neq 1$, não conterem todos os reais positivos, eles estão espalhados em todo o $IR_+$. Logo, temos a função $f\colon Q \to IR_+$, definida por $f(r) = a^r$.

Mediante essa exposição, a subseção seguinte é dedicada ao estudo de *f*, expandida ao domínio dos números reais.

### 4.3.1 Função exponencial

Uma função é dita exponencial quando pode ser representada por $y = f(x) = a^x$, para todo a > 0 e a ≠ 1. Como a função exponencial é estritamente crescente se a > 1 e estritamente decrescente se 0 < a < 1, concluímos que ela é injetora. Além disso, a função exponencial é sobrejetora, ou seja, o contradomínio e o conjunto imagem são iguais. Sendo injetora e sobrejetora, temos que a função exponencial, como definida acima, é bijetora. Tais restrições relativas à base *a* são necessárias pois, do contrário, teríamos $f(x) = 1^x = 1$, para todo $x \in IR$, como uma função constante, ou, ainda, a indeterminação de $f(x) = 0^x$, para $x = 0$. Ademais, para bases negativas, teríamos a indefinição de alguns valores. Por exemplo, em $f(x) = (-4)^x$, o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-4)}$ não estaria definido em *IR*.

Com domínio real, a função exponencial admite qualquer valor para o expoente *x*. Entretanto, como a base *a* deve ser estritamente positiva e diferente de 1, o conjunto imagem será dado pelo conjunto dos números reais positivos, ou seja, $y \in IR_+$. Ademais, para essa função, são garantidas as seguintes propriedades:

i. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, com *x* e *y* reais;

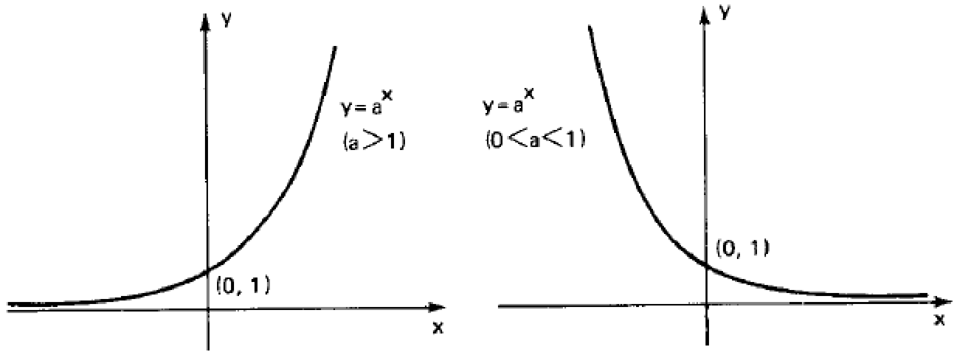
ii. $a^1 = a$ e;

iii. $a^x < a^y$, para $x < y$ e $a > 1$, e

$a^x > a^y$, para $x < y$ e $0 < a < 1$.

Quanto ao gráfico de $y = f(x) = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$, o conjunto $G_f$, composto pelos pares ordenados $(x, a^x)$, descreve, no plano cartesiano, uma representação conhecida como curva exponencial. Como ilustrado na Figura 11, tais curvas podem ser ascendentes ($a > 1$) ou descendentes ($0 < a < 1$).

**Figura 11 – Curvas Exponenciais**



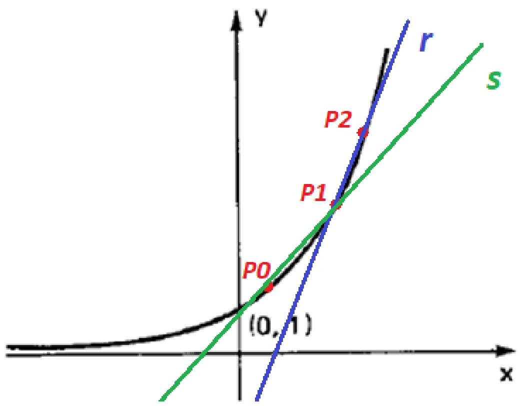

**Fonte: IEZZI *et al* (1977b, p. 29-B)**

Diferente da função afim, a taxa de variação $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para uma função exponencial não é constante. A partir dessa afirmação, consideremos as taxas $m_1$ e $m_2$, calculadas para os pontos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, com $x_0 < x_1 < x_2$ e $y = f(x) = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$.

- $m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{(a^{x_1}) - (a^{x_0})}{x_1 - x_0}$
- $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(a^{x_2}) - (a^{x_1})}{x_2 - x_1}$

Para $a > 1$, temos $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$ e, consequentemente, $m_1 < m_2$. Já para $0 < a < 1$, temos $f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$, o que nos leva à desigualdade $m_1 > m_2$. No plano cartesiano, tais desigualdades são interpretadas a partir da inclinação das retas-suportes dos segmentos $P_0P_1$ $(r)$ e $P_1P_2$ $(s)$, ilustrados na Figura 12.

**Figura 12 – Taxas de variação na Função Exponencial**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Na Figura 12, as retas-suportes dos segmentos $P_0P_1$ *(r)* e $P_1P_2$ *(s)* têm seus coeficientes de inclinação dados por $m_1$ e $m_2$, nessa ordem. Na ilustração, percebe-se que, à medida que *x* cresce, as retas-suportes tendem à verticalização, caso a função exponencial analisada seja crescente ($a > 0$); isto é, quanto maior o ritmo de crescimento da função, mais inclinada fica a reta-suporte. Do contrário ($0 < a < 1$), à medida que *x* cresce, as retas-suportes tendem ao eixo das abscissas.

Podemos ter uma segunda caracterização da função exponencial apresentada por $\mathrm{y} = \mathrm{g(x)} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a^x}$, sendo $b$ o coeficiente correspondente ao valor inicial da função, uma vez que $\mathrm{g(0)} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a^0} = \mathrm{b}$. Para $b > 0$, esse novo formato descreve comportamentos semelhantes a $\mathrm{f(x)} = \mathrm{a^x}$ em relação ao crescimento ou decrescimento. Trata-se de um modelo útil à descrição de fenômenos ou situações cujo crescimento relativo se mantém constante.

Quanto ao crescimento relativo define-se como $\varphi(h) = \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$, cujo resultado depende apenas de $h$, mas não de $x$. Nesse caso, funções sempre crescentes (ou sempre decrescentes) que satisfaçam essa condição podem ser escritas sob a forma $\mathrm{g(x)} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a^x}$.

Nos textos da BNCC, modelar situações por meio de funções do tipo $g(x) = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a^x}$ consta na habilidade EM13MAT304: “resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender/interpretar a variação das grandezas envolvidas.” (BRASIL, 2018, p. 544). A fim de exemplificar tal habilidade, segue o Exemplo 2, tal como proposto por Nunes (2022).

**Exemplo 1:** Filipe investiu R$ 10.000,00 em uma aplicação financeira de baixo risco. A partir da Tabela 2, que mostra a evolução do saldo dessa aplicação ao longo do primeiro trimestre, escreva uma função que descreva o saldo g*(x)* ao longo de *x* meses. A seguir, calcule o saldo que Filipe resgatará se aguardar 1 ano desde o início da aplicação e o tempo necessário para que o valor investido dobre.

**Tabela 2 – Saldo no primeiro trimestre**

| Tempo (meses) | Valor total da aplicação |
|---|---|
| 0 | R$ 10.000,00 |
| 1 | R$ 10.100,00 |
| 2 | R$ 10.201,00 |
| 3 | R$ 10.303,01 |

**Fonte: Nunes (2022)**

**Resolução:** A princípio, verificaremos o crescimento relativo $\varphi(h) = \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$, calculado em função do acréscimo *h = 1*, visto que, na Tabela 2, o tempo varia de mês em mês.

- Para *x = 0*: $\varphi(1) = \frac{g(0+1)-g(0)}{g(0)} = \frac{g(1)-g(0)}{g(0)} = \frac{10100{,}00-10000{,}00}{10000{,}00} = 1{,}01$
- Para *x =1*: $\varphi(1) = \frac{g(1+1)-g(1)}{g(1)} = \frac{g(2)-g(1)}{g(1)} = \frac{10201{,}00-10100{,}00}{10100{,}00} = 1{,}01$
- Para *x =2*: $\varphi(1) = \frac{g(2+1)-g(2)}{g(2)} = \frac{g(3)-g(2)}{g(2)} = \frac{10303{,}01-10201{,}00}{10201{,}00} = 1{,}01$

Uma vez que o crescimento relativo é constante, a relação *saldo & tempo* pode ser descrita pela função $g(x) = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$, com *a = 1,01*. Nesse contexto, *a = 1,01* corresponde à taxa de rendimento da aplicação, a saber, 1%.

A partir de *g(0) = 10.000*, escrevemos: $10.000 = g(0) = \mathrm{b} \cdot (1{,}01)^0 = b$.

Portanto, a função desejada é $g(x) = 10.000 \cdot (1{,}01)^{\mathrm{x}}$, por meio da qual calculamos o saldo resgatado por Felipe decorrido um ano da aplicação, a saber, $g(12) = 10.000 \cdot (1{,}01)^{12} =$ R\$11.268,25.

Para que o valor investido dobre, é necessário termos $g(x) = 20.000{,}00$. Logo, escrevemos a equação $10.000 \cdot (1{,}01)^{\mathrm{x}} = 20.000$, equivalente a $(1{,}01)^{\mathrm{x}} = 2$. Nesse caso, obtemos *x ≈ 70 meses*, visto que $(1{,}01)^{70} \approx 2{,}007$. O processo de obtenção desse valor será apresentado na subseção 3.3.2.

De forma semelhante à situação proposta no Exemplo 2, inúmeras outras, em que o (de)crescimento relativo seja constante, são passíveis de serem modeladas por meio de funções exponenciais. Entre essas, destacamos a desvalorização de veículos usados e seminovos (Matemática Financeira), decaimento radioativo (Quimíca) e proliferação de micro-organismos (Biologia).

### 4.3.2 Função Logarítmica

Retomemos a função $f(x) = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$, apresentada na subseção anterior. Nela, temos, para um domínio real, a imagem $Im_g = IR_+$; isto é; qualquer número real positivo *y* pode ser escrito sob a forma $y = a^x$. Nesse caso, podemos representar o expoente *x* a partir de uma nova notação, o logaritmo, definido como $x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$.

Para *a = 10*, a notação $x = \log_{10} y$ pode ser escrita simplesmente como $x = log\, y$. Tal notação corresponde à tecla LOG nas calculadoras, que apresentam também a tecla LN, referente ao logaritmo neperiano (ou natural), $x = \ln y = \log_e y$. Nesse logaritmo, a base $e$ é um número irracional conhecido como número de Euler, para o qual vale a aproximação *e = 2,718*.

Contudo, mesmo que as bases dos logaritmos sejam diferentes de 10 (ou *e*), ainda assim podemos usar a tecla LOG (ou LN) ao nosso favor. Para isso, faz-se necessário estabelecer algumas propriedades.

i. Logaritmo de um produto: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$.
ii. Logaritmo de um quociente: $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
iii. Logaritmo de uma potência: $\log(\mathrm{a}^{\mathrm{b}}) = \mathrm{b} \cdot \log \mathrm{a}$.
iv. $\log_a(P) = \log_a(Q) \Leftrightarrow P = Q$
v. $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$

Demonstrando (i):

De $\log_{10} a = x$ e $\log_{10} b = y$, temos $a = 10^x$ e $b = 10^y$.

Tomando agora $\log_{10}(a.b) = z$, temos $a \cdot b = 10^z$.

Assim, $10^z = 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y} \Rightarrow z = x + y$.

Isto é: $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$.

Demonstrando (ii):

De $\log_{10} a = x$ e $\log_{10} b = y$, temos $a = 10^x$ e $b = 10^y$.

Tomando agora $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = w$, temos, $\frac{a}{b} = 10^w$.

Assim, $10^w = \frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y} \Rightarrow w = x - y$.

Isto é: $\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$.

Demonstrando (iii):

De $\log_{10}(a^b) = x$ e $\log_{10} a = y$, temos $a^b = 10^x$ (*) e $a = 10^y$ (**).

Substituindo (**) em (*): $(10^y)^b = 10^x$.

Assim, $10^{y.b} = 10^x \Rightarrow b.y = x$.

Isto é: $b.\log_{10} a = \log_{10}(a^b)$.

Demonstrando (iv):

De $\log_a P = x$ e $\log_a Q = y$, temos $P = a^x$ e $Q = a^y$.

Tomando $P = Q$, temos $a^x = a^y$ e, consequentemente, x = y.

Assim, $x = y \Rightarrow \log_a(P) = \log_a(Q)$.

Demonstrando (v):

Primeiramente, consideremos a equação $a^x = y$.

Fazendo $Q = y$ e $P = a^x$, pela propriedade (iv), escrevemos $log(a^x) = logy$;

Aplicando a propriedade (iii): $x \cdot loga = logy \Rightarrow x = \frac{logy}{loga}$

Da definição de logaritmo, temos $a^x = y \Leftrightarrow x = log_a y$.

Portanto, escrevemos $log_a y = \frac{logy}{loga}$.

A propriedade (v) é útil na resolução de equações exponenciais com bases distintas. E é com base nela, e também no uso da tecla LOG da calculadora, que mostraremos por que $x = 70$ *meses* é a solução da equação apresentada no Exemplo 2, na subseção 3.2.1, a saber, $(1,01)^x = 2$.

- Usando a definição de logaritmo: $(1,01)^x = 2 \Leftrightarrow x = log_{1,01}2$.
- Aplicando (v): $x = \log_{1,01} 2 = \frac{\log 2}{\log 1,01}$
- Usando a tecla LOG: $x = \frac{\log 2}{\log 1,01} \cong \frac{0,3010}{0,0043} = 70$

Apresentadas as propriedades dos logaritmos, retomemos a sua definição: $x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$, na qual os resultados obtidos para $x = \log_a y$ são os expoentes utilizados na função exponencial $y = a^x$. Uma vez que, em $x = \log_a y$, $x$ é dado em função de $y$, escrevemos $x = f^{-1}(y) = \log y$, conhecida como <u>*Função Logarítmica*</u>. A notação $f^{-1}$ denota que essa função descreve o comportamento inverso da função exponencial.

Nesse contexto, ressaltamos que entender uma função $f^{-1}$ como inversa apenas por descrever o comportamento contrário de $f$ não é suficiente para caracterizá-la como tal. Sendo assim, carece estabelecer os seguintes critérios.

I. Para $f: A \rightarrow B$, devemos ter $f^{-1}: B \rightarrow A$;
II. $f$ deve ser injetiva, isto é, $f(x_1) \neq f(x_2)$, para quaisquer $\{x_1, x_2\} \subset A$, com $x_1 \neq x_2$;
III. $f$ deve ser uma função sobrejetiva, isto é, $y = f(x)$, para quaisquer $y \in B$ e $x \in A$, e;
IV. $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$, para qualquer $x \in A$.

Aplicando (IV) às funções $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, temos duas novas propriedades para os logaritmos. São elas:

vi. $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$

$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = a^{f^{-1}(x)} = a^{\log_a x} = x$

$\Rightarrow \mathrm{a}^{\log_a x} = \mathrm{x}$

vii. $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = \log_a[\mathrm{f(x)}] = \log_a \mathrm{a}^{\mathrm{x}} = \mathrm{x}$

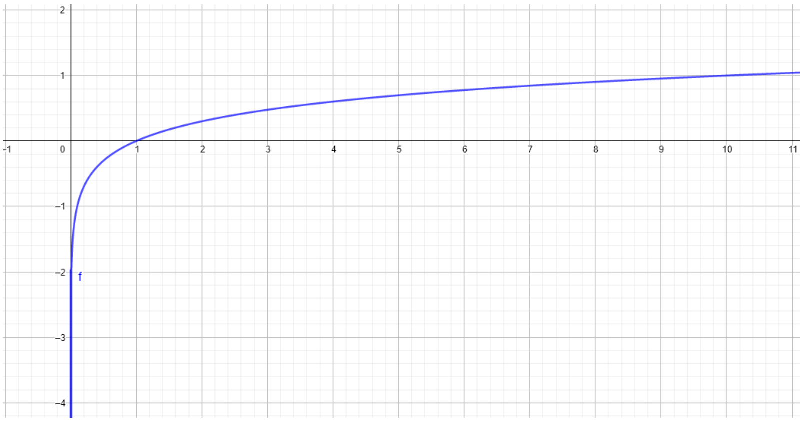
$\Rightarrow \log_a \mathrm{a}^{\mathrm{x}} = \mathrm{x}$

Definimos, então, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ como a inversa da função exponencial, para a qual $a$ é a base do logaritmo, com $a > 0$ e $a \neq 1$. De forma semelhante às condições já listadas na subseção 3.2.1, caso o valor de $a$ seja maior que 1, a função logarítmica será crescente e, do contrário $(0 < a < 1)$, decrescente. Entretanto, ao contrário da função exponencial, na função logarítmica crescente, a taxa de variação diminui à medida que o valor da variável $x$ aumenta.

A função logarítmica tem domínio real e positivo, enquanto sua imagem é real. Como função inversa da exponencial, podemos observar que o domínio da função logarítmica é igual à imagem da função exponencial e vice-versa, conforme exposto no critério (I).

Quanto ao gráfico de uma função logarítmica, conhecida como curva logarítmica, temos como exemplo, na Figura 13, a função $f(x) = \log_{10} x$, estritamente crescente em todo seu domínio.

**Figura 13 – Função logarítmica crescente**



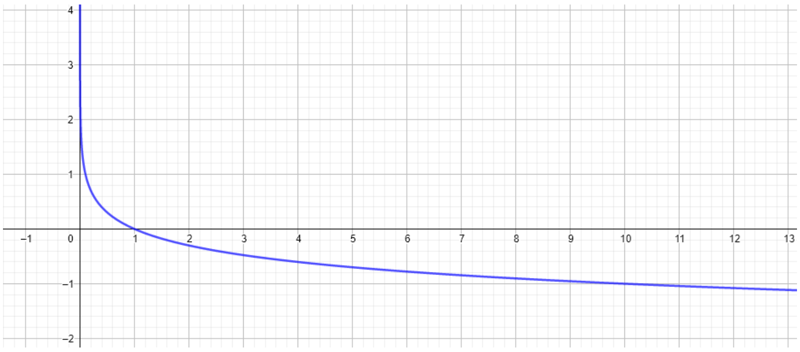

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Na Figura 13, observamos uma maior taxa de variação para abscissas próximas de 0. No entanto, à medida que essas aumentam, as taxas de variação diminuem, evidenciando um ritmo de crescimento desacelerado. Nesse modelo, para cada unidade acrescida às ordenadas, são necessários aumentos exponenciais no eixo das abscissas.

O comportamento descrito acima é a principal característica da Função Logarítmica, que é utilizada para descrever diversos fenômenos em que a variação de uma grandeza depende de uma variação exponencial de outra grandeza. Podemos citar como exemplo a acidez/alcalinidade de soluções (Química), o nível sonoro suportado pelo ouvido humano (Física) e a energia liberada nos terremotos (Geografia).

Já para funções logarítmicas decrescentes, com $0 < a < 1$, cujo gráfico é apresentado na Figura 14 , vemos um decrescimento intenso no intervalo *(0, 1)*, em detrimento de um decrescimento desacelerado para valores de *x* maiores que 1. Nesse exemplo, usamos a função $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$.

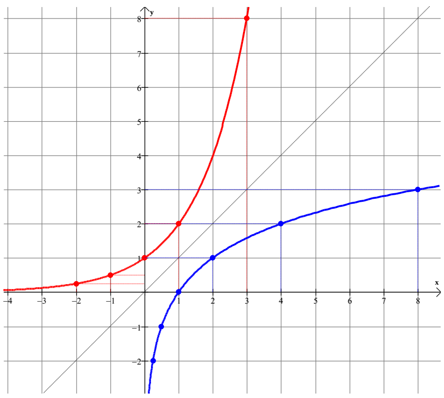
**Figura 14 - Função logarítmica decrescente**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Uma vez que a função logarítmica se correlaciona com a função exponencial, os gráficos de ambas apresentam certa simetria, conforme ilustra a Figura 15.

**Figura 15 – Função logarítmica & Função exponencial**



**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

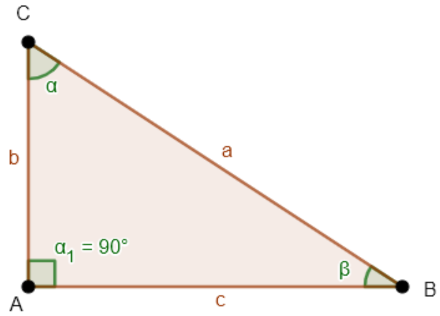
Construída a partir das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$, a Figura 15 nos mostra o gráfico de *g(x)* como um reflexo de *f(x)* em relação à reta $x = y$. Nesse contexto, as coordenadas *f(x)* e *g(x)* são invertidas, evidenciando mais uma vez o fato de *f(x)* e g(x) serem funções inversas.

Feitas então nossas explanações acerca das funções logarítmicas, avançamos ao estudo de um novo modelo, as funções trigonométricas.

### 4.4 Funções trigonométricas

Iniciemos essa seção relembrando as razões trigonométricas válidas em um triângulo retângulo. Para isso, considere $\beta = A\hat{B}C$ um dos ângulos agudos do triângulo ABC, ilustrado na Figura 16.

**Figura 16 – Triângulo retângulo**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

As relações trigonométricas para o ângulo $\beta$ são obtidas pelas razões entre medidas de dois segmentos diferentes do triângulo retângulo, ilustrado na Figura 16. Como há três medidas a considerar ($AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$), temos três numeradores possíveis e, em seguida, dois denominadores. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, consideramos 6 razões diferentes, listadas a seguir.

i. Seno: $\text{sen}\beta = \frac{b}{a}$

ii. Cosseno: $\cos\beta = \frac{c}{a}$

iii. Tangente: $\text{tg}\beta = \frac{b}{c}$

iv. Cossecante: $\text{cossec}\beta = \frac{a}{b}$

v. Secante: $\sec\beta = \frac{a}{c}$

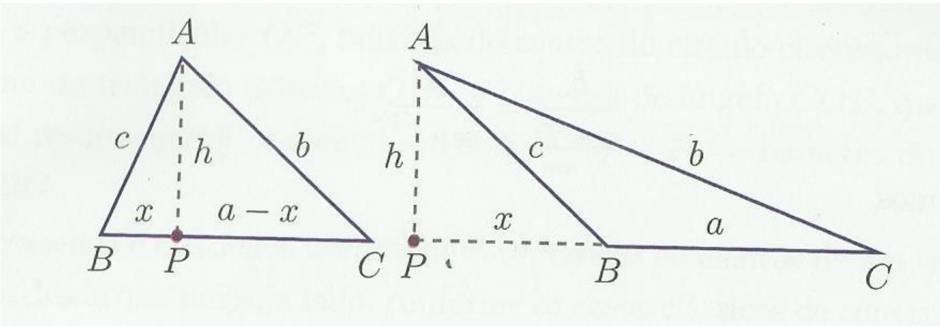
vi. Cotangente: $\text{cotg}\beta = \frac{c}{b}$

As razões apresentadas são específicas para um ângulo $\beta$. Observe que, se variarmos a medida desse ângulo, variamos também os valores de $a$, $b$ e $c$, que se relacionam entre si conforme o Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$. A partir desse, também temos válidas as igualdades $\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta = 1$ e $sec^2\beta - \text{tg}^2\,\beta = 1$.

O estudo das razões trigonométricas na sala de aula da Educação Básica é pautado nos textos da BNCC, por meio da habilidade “EM13MAT308: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.” (BRASIL, 2018, p.536). A Lei do Cosseno e a Lei do Seno podem ser utilizadas para determinar distâncias desconhecidas, em situações nas quais triângulos não retângulos são usados como modelos geométricos.

Nesse cenário, segue uma breve apresentação dessas leis, deduzidas a partir do cálculo das alturas relativas dos triângulos ilustrados na Figura 17.

**Figura 17 – Lei dos (Cos)senos**




**Fonte: Lima (2013)**

Na Figura 17, $AP = h$ é a altura relativa à base $BC = a$. Em termos das medidas apresentadas nessa figura e do ângulo $A\hat{B}C = \beta$, podemos escrever:

i. $\cos\beta = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos\beta$
ii. $c^2 = h^2 + x^2$
iii. $b^2 = h^2 + (a - x)^2 \Rightarrow b^2 = h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2$

Substituindo (i) e (ii) em (iii), obtemos a igualdade $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$, conhecida como Lei dos Cossenos, que relaciona a medida do lado oposto a um ângulo β às medidas dos lados que formam esse ângulo.

Ainda na Figura 17, podemos também relacionar a altura $AP = h$ aos ângulos $A\hat{B}C = \beta$ e $A\hat{C}B = \theta$.

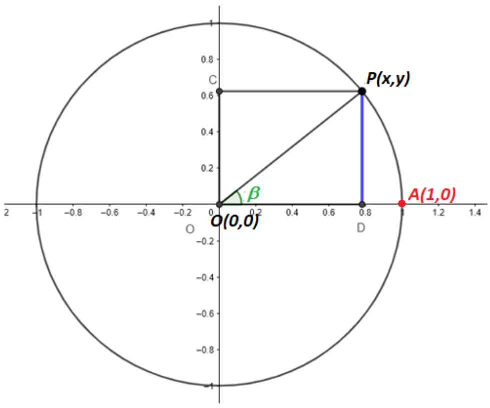
iv. $\text{sen}\beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen}\beta$
v. $\text{sen}\theta = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\theta$

Comparando (iv) e (v), obtemos a igualdade $c{\cdot}sen\beta = b{\cdot}sen\theta$, reescrita como $\frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\theta}$. Raciocínios análogos para a altura relativa ao lado AC nos permitem a expansão $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\theta}$, sendo $\alpha = B\hat{A}C$. Tal relação é conhecida como Lei dos Senos, que estabelece uma proporção direta entre as medidas dos lados do triângulo e os senos dos ângulos internos opostos a esses lados.

Em relações trigonométricas no triângulo, β pode assumir valores entre 0º e 90º (triângulos retângulos) ou ainda entre 0º e 180º (triângulos não retângulos). Entretanto, para o estudo das funções trigonométricas, é necessário analisar valores além desses. Nesse caso, recorremos ao círculo trigonométrico, no qual as medidas de $\beta$ varrem toda a reta real.

Entende-se por círculo (ou ciclo) trigonométrico a representação cartesiana do conjunto $\lambda = \{P(x, y) \in IR^2 / x^2 + y^2 = 1\}$. Conforme mostra a Figura 18, λ descreve uma circunferência unitária, centrada na origem.

**Figura 18 – Ciclo Trigonométrico**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

A cada elemento $P(x, y)$ de $\lambda$ associa-se um ângulo $\beta = A\hat{O}P$, conforme mostra a Figura 18. Nesse caso, ao ponto $A(1, 0)$ associa-se o ângulo 0º e, a partir dele, os valores positivos de $\beta$ são medidos no sentido anti-horário. Tais medidas podem ser expressas em graus e em radianos.

Entende-se por radiano a medida angular estabelecida pela razão entre o comprimento do arco $(l)$ e o raio do círculo $(r)$, tal que, para $l = r$, temos 1 radiano. No tocante à equivalência entre graus e radianos, as razões entre um ângulo $\beta$, em graus, e o comprimento de seu respectivo arco ($l$) nos permitem escrever a proporção $\frac{360^o}{2\pi r} = \frac{\beta}{l}$. Dado que para 1 rad temos $r = l$, reescrevemos:

$$\frac{360^o}{2\pi r} = \frac{\beta}{r} \Rightarrow \beta = \frac{360^o}{2\pi} \approx 57{,}3^o$$

Dessa relação, em que consideramos a aproximação $\pi \approx 3{,}14$, concluímos a equivalência entre graus e radianos, a saber, *1 rad = 57,3º*. Ademais, é comum (e conveniente) usarmos as equivalências $2\pi\, rad = 360^o$, ou ainda $\pi\, rad = 180^o$.

Nas calculadoras científicas, encontramos as teclas SEN (ou SIN), COS e TAN (ou TG), correspondentes às razões trigonométricas listadas nesta seção. Contudo, antes de lançar mão desse recurso, o usuário deve se atentar à configuração do aparelho para medidas angulares, visto que valores trigonométricos para um ângulo $\beta$, em graus, diferem quanto a um valor $\beta$, em radianos. Por exemplo, $sen(30^o) = 0{,}50 \neq -0{,}98 = sen(30\ rad)$.

### 4.4.1 Senos e Cossenos

Retomando a Figura 17, considere o triângulo retângulo POD, a partir do qual escrevemos as razões $\cos\beta = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{x}}{1} = \mathrm{x}$ e $\mathrm{sen}\beta = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{y}}{1} = \mathrm{y}$. Dessas, estabelecemos a relação $P(x, y) = P(cos\beta, sen\beta)$, que denota as coordenadas de um ponto do ciclo trigonométrico em função do seno e do cosseno do ângulo correspondente. Nesse contexto, estabelecemos duas novas funções, a saber, $f(\beta) = sen\beta$ e $g(\beta) = cos\beta$, em que $\beta$ varre todo o ciclo trigonométrico.

Embora o ciclo compreenda ângulos de 0º a 360º, no estudo das funções trigonométricas, é possível manipularmos valores $\beta'$ além desse intervalo, e ainda assim, corresponder a um ponto $P'(x, y)$ em $\lambda$. Se aos ângulos $\beta$ e $\beta'$ associarmos os pontos $P(x, y)$ e $P'(x, y)$, respectivamente, tal que $P'(x, y) \equiv P(x, y)$, temos em $\beta'$ um arco congruente a $\beta$. Nesse caso, $\beta' \equiv \beta (mod\ 360^o) \Leftrightarrow \beta' = 360^o \cdot k + \beta$, com $k$ inteiro, ou seja, a medida de $\beta'$ corresponde ao resto da divisão entre $\beta$ e 360º.

A propriedade descrita acima nos permite estender o domínio das funções seno e cosseno a qualquer número real, isto é, dada uma medida angular $x$, expressa em radianos, temos definidas as funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$. Ademais, sabendo que, para $\beta \equiv \beta'(mod\ 360^o)$, temos $P'(x, y) \equiv P(x, y)$, as funções em pauta podem ser classificadas como <u>funções</u>

periódicas, nas quais os resultados válidos para $x \in [0, 2\pi]$ se repetem a cada volta no ciclo, isto é, $f(x) = f(x + 2\pi \cdot k)$ e $g(x) = g(x + 2\pi \cdot k)$, para qualquer $k$ inteiro. E sobre esses resultados, referenciamos as imagens dessas funções, a saber, $Im_f = Im_g = \{y \in IR \,/\, -1 \leq y \leq 1\}$. Observe que, por maior que seja a medida do ângulo, os valores das coordenadas do ponto $P(x, y)$, na Figura 17, estão limitadas ao intervalo [-1, 1].

Quanto aos gráficos das funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$, vamos esboçá-los considerando os valores de $x$ em uma volta do ciclo trigonométrico, ou seja, de 0 a $2\pi$, correspondente a um período. Esses valores seguem registrados na Tabela 3, com aproximações em centésimos.

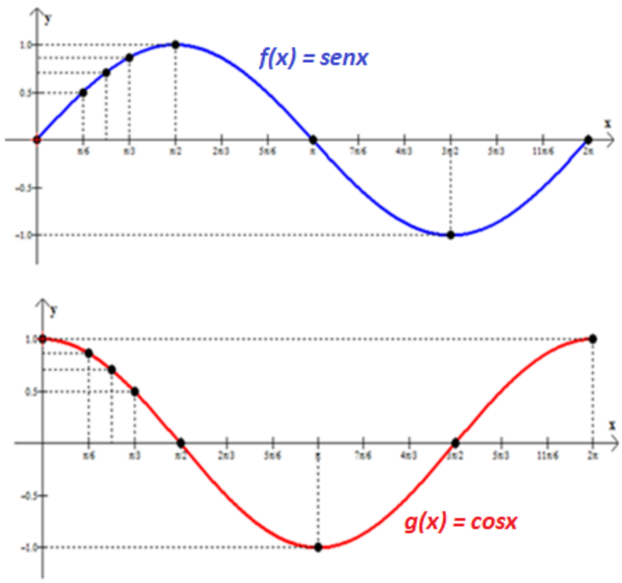
**Tabela 3 – Valores para *f(x) = senx* & *g(x) = cosx***

| x | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π | 7π/6 | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 | 11π/6 | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen(x) | 0,00 | 0,50 | 0,71 | 0,87 | 1,00 | 0,87 | 0,71 | 0,50 | 0,00 | -0,50 | -0,71 | -0,87 | -1,00 | -0,87 | -0,71 | -0,50 | 0,00 |
| cos(x) | 1,00 | 0,87 | 0,71 | 0,50 | 0,00 | -0,50 | -0,71 | -0,87 | -1,00 | -0,87 | -0,71 | -0,50 | 0,00 | 0,50 | 0,71 | 0,87 | 1,00 |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Com base na Tabela 3, construída a partir dos valores dos ângulos notáveis e suas representações nos quatro quadrantes do ciclo trigonométrico, temos os gráficos mostrados na Figura 19

**Figura 19 – Gráficos *f(x) = senx* & *g(x) = cosx*, $x \epsilon [0, 2\pi]$**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Dada a periodicidade das funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$, os gráficos esboçados na Figura 19 descrevem o comportamento oscilatório das funções trigonométricas, repetidos em períodos de $2\pi\, rad$. Uma função é dita periódica quando existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $f(k + x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A oscilação e a repetição são as principais características desses modelos, sendo úteis à descrição de diversos fenômenos periódicos, citados nos textos da BNCC sob a habilidade EM13MAT306, a saber,

> "resolver/elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria." (BRASIL, 2018, p.536).

Na Educação Básica, as modelagens das funções seno e cosseno são geralmente apresentadas sob os formatos $\mathrm{f(x)} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{x}\right)$ ou $\mathrm{g(x)} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{x}\right)$, nos quais:

- A = valor intermediário da função, equivalente à média aritmética dos valores máximo e mínimo;
- B = amplitude da função, equivalente à variação do valor intermediário aos extremos da função e;
- P = período, identificado pelo intervalo de repetição de uma onda completa, que passa obrigatoriamente pelo valor máximo e mínimo da função.

A partir desses parâmetros, podemos também escrever as imagens das funções *f(x)* e *g(x)*, a saber, $Im_f = Im_g = [A - B, A + B]$. Observe, no Exemplo 3, como esses formatos podem ser utilizados.

**Exemplo 3:** (PUC – PR Adaptada) Um terremoto de magnitude 8 graus da escala Richter atingiu, em setembro de 2009, a região de Samoa. O terremoto causou ondas de até 3 metros. A maré alta nesse local ocorreu à meia-noite. Suponha que o nível de água na maré alta era de 3 metros; mais tarde, na maré baixa, era de 3 centímetros. Supondo que a próxima maré alta seja exatamente ao meio-dia e que a altura da água é dada por uma curva seno ou cosseno, qual das alternativas abaixo corresponde à fórmula para o nível da água na região em função do tempo?

**Resolução:** Do texto base, temos:

- (Máximo, Mínimo) = (3,00 m; 0,03 m) $\Rightarrow A = \frac{3,00+0,03}{2} = 1{,}515$
- B = 1,515 – 0,03 = 3,00 – 1,515 = 1,485.
- P = 12 horas $\Rightarrow \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

De posse dessas informações, os modelos possíveis são $\mathrm{f(x)} = 1{,}515 + 1{,}485 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot \mathrm{x}\right)$ e $g(\mathrm{x}) = 1{,}515 + 1{,}485 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot \mathrm{x}\right)$, em que *f(x)* e *g(x)* representam o nível da água na hora *x*. A decisão acerca do modelo mais adequado repousa no valor inicial da função, que, segundo o texto base, foi a maré alta (*3,00 m*), registrada à meia-noite (*t = 0 h*). Logo, de *f(0) = 3*, concluímos como modelo correto a função $\mathrm{f(x)} = 1{,}515 + 1{,}485 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot \mathrm{x}\right)$.

Obs.: Essa solução é apenas uma sugestão. O raciocínio também poderia ser conduzido a partir de um esboço, no plano cartesiano, da situação descrita.

De forma semelhante à situação proposta no Exemplo 3, inúmeras outras, que descrevem comportamentos oscilatórios e periódicos, são passíveis de serem modeladas por meio de funções trigonométricas. Entre essas, citamos as situações abordadas nas últimas edições do ENEM: o movimento de uma roda-gigante, movimentos de um pistão hidráulico, sistema massa-mola, culturas sazonais, regulagem de temperaturas e pressão sanguínea.

Há modelos que, além das adaptações apresentadas às funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$, consideram somar uma constante ao ângulo $\left(\frac{2\pi}{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{x}\right)$, deslocando a onda horizontalmente. Mas não os abordaremos aqui. Sendo assim, prosseguimos ao estudo da função tangente.

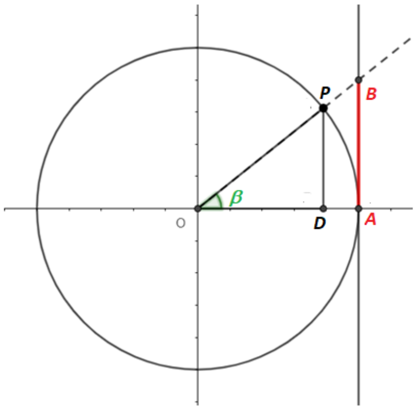
### 4.4.2 Função tangente

Retomando as razões $\mathrm{sen}\beta = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ e $\cos\beta = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$, listadas no início desta seção, escrevemos *b* = $a{\cdot}sen\beta$ (i) e *c* = $a{\cdot}cos\beta$ (ii). Substituindo (i) e (ii) em $\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$, temos $\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{a \cdot sen\beta}{b \cdot cos\beta} = \frac{sen\beta}{cos\beta}$. Logo, das funções $f(\beta) = sen\beta$ e $g(\beta) = cos\beta$, apresentadas em 3.4.1, podemos interpretar (iii) também como uma função do ângulo *β*, a saber, $h(\beta) = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = \frac{sen\beta}{cos\beta} = \mathrm{tg}\beta$.

Uma possível interpretação para essa nova função se refere à inclinação de rampas. Para isso, considere o triângulo ilustrado na Figura 16, no início desta seção, como a representação de uma rampa cujo ângulo de inclinação é *β*. Nessa representação, à medida que os valores agudos de $\beta$ aumentam, mais íngreme a rampa se torna. A fim de quantificar essa inclinação, também chamada de declividade, usamos a razão entre a altura da rampa e o deslocamento horizontal. Com isso, uma vez que tais termos correspondem às medidas dos catetos do triângulo ABC, temos $declividade = \frac{altura}{deslocamento} = \frac{b}{c} = tg\beta$. Nesse contexto, os resultados da função $h(\beta) =$ tgβ nos fornecem os índices de declividade da rampa, usados, em muitos casos, para aferir a acessibilidade em rampas de acesso e passarelas de pedestres.

Quanto à representação da tangente no ciclo trigonométrico, considere a Figura 18, na qual se destacam os triângulos retângulos semelhantes POD e BOA.

**Figura 20 – A Tangente no Ciclo Trigonométrico**



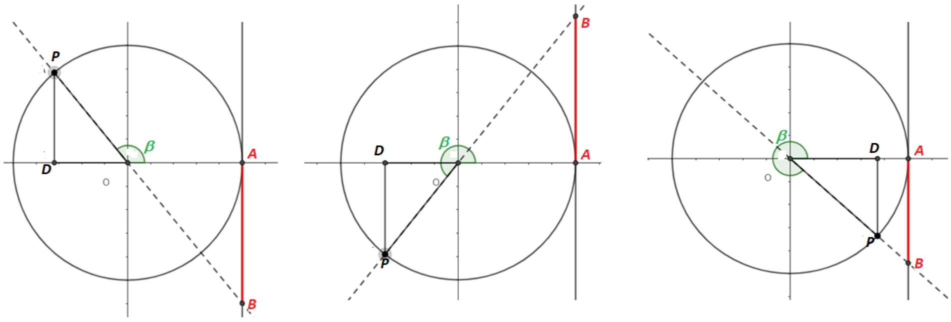

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Definimos como tangente de $\beta$ a razão entre os segmentos PD e OD, que, na Figura 19, correspondem aos catetos oposto e adjacente, respectivamente, do triângulo POD. Entretanto, pela semelhança entre os triângulos POD e BOA, a razão entre os segmentos BA e OA também determinam o valor da tangente de $\beta$. Ademais, considerando que P e A são os pontos de um círculo de raio unitário, temos $OP = OA = 1$. Portanto, de $tg\beta = \frac{PD}{OD} = \frac{BA}{OA} = \frac{BA}{1} = BA$, temos, na medida do segmento BA, o valor da tangente de $\beta$.

Sabe-se que, no triângulo retângulo, $\beta$ assume valores agudos. No entanto, a tangente não está definida para um ângulo reto, visto que, conforme a Figura 21, o segmento $BA = tg\beta$ é paralelo ao eixo das ordenadas. Nesses termos, concluímos que não é possível definir a tangente para um ângulo $\beta = 90º$ nem para $\beta = 270º$, consequentemente. O mesmo ocorre para seus respectivos ângulos congruentes ($\beta' = 90º + 180 \cdot k$, com $k$ inteiro).

Quanto aos demais valores de β, compreendidos além do 1º quadrante, as tangentes são traçadas a partir da reta-suporte do segmento OP, conforme ilustra a Figura 21.

**Figura 21 – Tangentes além do 1º quadrante**




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Na Figura 21, observamos as tangentes assumirem valores positivos quando o ponto P pertence ao 3º quadrante, tal como no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; já para os quadrantes pares, têm-se resultados negativos. Ademais, temos a tangentes anuladas para $\beta = 0º$ e $\beta = 180º$. Diante de tais possibilidades, podemos expandir o domínio de $h(\beta) = \text{tg}\beta$ para todo o ciclo trigonométrico, salvo os ângulos 90º e 270º. Nesse contexto, de modo semelhante ao que foi abordado na subseção anterior para as funções $f(\beta) = sen\beta$ e $g(\beta) = cos\beta$, podemos calcular também $h(\beta') = \text{tg}\beta'$, em que *β'* é um arco congruente a *β*.

Diante disso, expandimos o domínio da função tangente para os números reais, escrevendo agora a função $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{senx}{cosx} = \text{tgx}$, em que *x* representa um ângulo medido em radianos. No entanto, por se tratar de uma divisão em *IR*, a função $h(x) = \text{tgx}$ só é definida quando $g(x) = cosx \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, para qualquer *k* inteiro. Isso nos leva a uma restrição ao domínio da função tangente, denotado então como $D_h = \left\{x \in R / x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right\}$.

Quanto à periodicidade de $h(x) = \text{tgx}$, retomamos as ilustrações da Figura 20 e da Figura 21. A partir dessas, verificamos os valores não negativos e crescentes serem registrados no 1º quadrante, ao passo que, no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $h(x)$ assume valores negativos e crescentes, até zerar. Ainda na Figura 21, podemos observar esse mesmo comportamento se repetir em ambos os quadrantes inferiores. Sendo assim, a função tangente também é uma função periódica; porém, diferente das funções $f(x) = senx$ e $g(x) = cosx$, os resultados se repetem em intervalos de $\pi$ rad, ou seja, $h(x) = h(x + \pi \cdot k)$, para qualquer *k* inteiro.

Quanto ao gráfico da função tangente, procederemos de modo semelhante às funções seno e cosseno, esboçando-o a partir dos ângulos notáveis e suas representações nos demais quadrantes do círculo trigonométrico. Tais resultados seguem registrados na Tabela 4, com aproximações em centésimos.

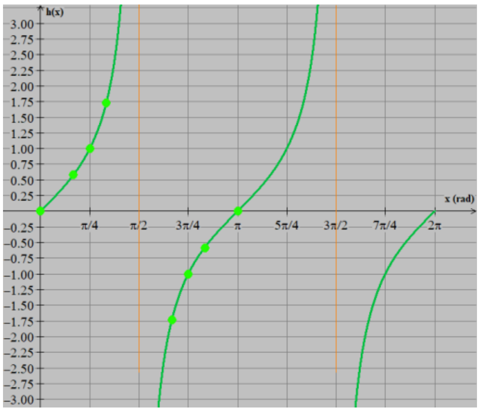
**Tabela 4 – Valores para *h(x)* = *tgx***

| x | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π | 7π/6 | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 | 11π/6 | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tg(x) | 0,00 | 0,58 | 1,00 | 1,73 | Não definida | -1,73 | -1,00 | -0,58 | 0,00 | 0,58 | 1,00 | 1,73 | Não definida | -1,73 | -1,00 | -0,58 | 0,00 |

**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

Para os valores $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, cuja função $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{senx}{cosx} =$ tgx não é definida, consideramos os limites $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{senx}{cosx}\right) = \infty$ e $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \left(\frac{senx}{cosx}\right) = -\infty$. Tais resultados nos permitem concluir que a curva correspondente ao gráfico da função *h(x)* possui assíntotas verticais, que são retas perpendiculares ao eixo *x*, interceptando-o nas abscissas em que a função não está definida, a saber, $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, com *k* inteiro. Com base nessas assíntotas e nos resultados registrados na Tabela 4, temos então o gráfico da função tangente, ilustrado na Figura 22.

**Figura 22 – Gráfico *h(x)* = *tgx***




**Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.**

O gráfico esboçado na Figura 22 descreve o comportamento repetitivo da função tangente, confirmando a periodicidade de $h(x) = tgx$. Podemos observar que os resultados obtidos para esse modelo se repetem a cada intervalo de $\pi$ *rad*, válidos também para abscissas negativas. Além disso, as assíntotas verticais $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ apontam para o crescimento ilimitado dos resultados de *h(x)*. Logo, no tocante à imagem da função tangente, escrevemos $Im_h = IR$, findando nossas explanações sobre essa função.

Apresentadas nossas considerações acerca das funções trigonométricas, encerramos este capítulo ratificando sua relevância na confecção de um produto educacional que auxilie o professor de Matemática da Educação Básica no planejamento e no ensino-aprendizagem das funções aqui apresentadas.

# POSSIBILIDADES PARA APLICAÇÃO

Ratificando o objetivo desta pesquisa de Mestrado, após criarmos um material de estudo diferenciado, composto por um conjunto de videoaulas e uma apostila que têm como escopo auxiliar alunos e professores no ensino-aprendizagem de funções, especialmente no contexto das defasagens escolares causadas pela pandemia da COVID-19, o presente capítulo versa sobre as possibilidades e expectativas para a primeira aplicação do referido produto educacional.

Embora a data de conclusão desse material coincida com a volta às aulas presenciais nas instituições de Educação Básicas de todo o Brasil, o referido produto não foi aplicado durante a produção desta dissertação. Nesse cenário, seguem, nas próximas seções, algumas sugestões de aplicação do produto educacional baseadas em metodologias ativas, a saber, a *sala de aula invertida* e a *aprendizagem baseada em problemas*.

## 5.1 Metodologia ativas

Quando referenciamos o ensino tradicional, as metodologias dedutivas norteiam o processo de ensino-aprendizagem. Nessas, o professor, então detentor-mor do saber, transmite a teoria e depois o aluno a aplica a situações mais específicas. Na sala de aula de Matemática, tais aplicações se concentram, em sua maioria, na resolução de exercícios que consistem em meras repetições do que foi exposto em sala. Na contramão dessas práticas, apresentam-se as metodologias ativas de aprendizagem, versadas nessa dissertação a partir dos estudos de Bacich e Moran (2017).

Também entendidas como metodologias indutivas, os autores supracitados caracterizam as metodologias ativas pelas inter-relações entre educação, cultura, sociedade, política e escola, desenvolvidas a partir de métodos ativos e criativos que, centrados na ação discente, propiciam a aprendizagem. Nesse contexto, é necessário que o adjetivo “ativa” esteja constantemente associado à aprendizagem reflexiva, a fim de que os processos, os conhecimentos e as competências desenvolvidos pelo estudante estejam evidentes em cada atividade.

Os autores ainda enfatizam o protagonismo do aluno e seu envolvimento em todas as etapas do processo de aprendizagem, experimentando, desenhando e criando, seja em ambientes que privilegiam a construção individual do conhecimento, seja em situações em que o saber é erigido coletivamente. Nesse contexto, o estudante se atenta a seu papel participativo e reflexivo na construção desse conhecimento, enquanto o professor exerce o papel de orientador, em cada fase do processo.

Na promoção de uma aprendizagem com significado, são apresentadas diversas metodologias ativas, a saber, sala de aula invertida; aprendizagem baseada em investigação e em problemas; aprendizagem baseada em projetos; aprendizagem por história e por jogos. Cada uma dessas tem seu grau de importância e, não assumindo condições de exclusividade, podem ser articuladas umas às outras, diversificando, assim, de forma constante e dinâmica, as possíveis combinações de aplicação e consequentes resultados. Nesse leque de possibilidades, a presente pesquisa destaca a *sala de aula invertida* e a *aprendizagem baseada em problemas*.

### 5.1.1 Sala de aula invertida

Nas apresentações de Bacich e Moran (2017), a Sala de Aula Invertida - SAI é uma metodologia ativa que consiste nas seguintes ações.

> (...) as informações básicas sobre um tema ou problema podem ser pesquisadas pelo aluno para iniciar-se no assunto, partindo dos conhecimentos prévios e ampliando-os com referências dadas pelo professor (**curadoria**) e com as que o aluno descobre nas inúmeras oportunidades informativas de que dispõe. O aluno então pode compartilhar sua compreensão desse tema com os colegas e o professor, em níveis de interação e ampliação progressivos, com participações em dinâmicas grupais, projetos, discussões e sínteses, em momentos posteriores que podem ser híbridos, presenciais e on-line, combinados. (BACICH e MORAN, 2017, p. 55, grifo nosso).

A sala de aula invertida (SAI) é uma estratégia ativa na qual o conhecimento básico fica a cargo do aluno, enquanto os estágios mais avançados têm interferência docente e também um forte componente grupal. O estudante parte de pesquisas, projetos e produções para se iniciar em um assunto e, a seguir, por meio de atividades supervisionadas pelo professor, aprofunda seu conhecimento e competências acerca do objeto de estudo em voga. Nessa modalidade, a parte do processo de aprendizagem que cabe ao discente pode acontecer tanto antes de um encontro coletivo em sala de aula quanto nesse espaço, e também em atividades posteriores.

O cenário descrito acima expõe um processo capaz de otimizar o tempo de ensino e de aprendizagem, e o professor, por sua vez, torna-se o articulador das etapas individuais e grupais. Para tal articulação, cabem ao docente, além do conhecimento do conteúdo, as ações de acompanhar, mediar, analisar os processos, resultados, lacunas e necessidades identificadas nos percursos realizados pelos alunos em cada estágio.

Outra tarefa que compete ao professor-orientador é a seleção e/ou produção dos materiais que comporão a curadoria, termo destacado na citação que inicia esta subseção. Nessa ação, é importante que o docente cuide para que tais materiais estejam ligados à vida dos alunos, respeitando suas realidades e suas motivações, e que saiba gerenciar essas atividades, envolvendo os participantes e acordando com eles as melhores formas de conduzir o projeto.

Nesta pesquisa, a curadoria supracitada é composta pelo conjunto de videoaulas apresentado no item 4.2.2 desta dissertação. Em relação à produção e utilização desse material, relevamos o pioneirismo de Bergmann e Sams (2016, *apud* BACICH, MORAM. 2017) na divulgação dessa estratégia. Em suas publicações, os autores apontam como uma vantagem da utilização de vídeos a chance de o estudante assistir a eles quando e quantas vezes julgar necessário, contando também com a colaboração dos pais ou colegas. Daí, o professor prossegue com as atividades conforme as condições específicas de cada turma/aluno.

Embora essa forma de inversão possa ser enxergada como um reducionismo da metodologia, podemos vislumbrar um maior alcance da SAI quando combinadas algumas dimensões individuais de cada estudante, entre elas a autonomia e a flexibilização. Tais combinações potencializam a metodologia em pauta, ao engajar os alunos em questionamentos e resolução de problemas. Nessas ações, o discente revê, amplia e aplica o que foi aprendido previamente, recebendo um retorno imediato sobre o quanto ele assimilou do assunto estudado.

Ainda segundo Bacich e Moran (2017), o sucesso da SAI depende da mudança cultural de professores, alunos e pais para lidar com as novidades intrínsecas à proposta; da composição de uma boa curadoria, pelo docente; e de um acompanhamento adequado do ritmo de cada indivíduo, a fim de planejar e replanejar a condução dos encontros presenciais. Ademais, a combinação de metodologias ativas é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aos pares e/ou individualmente. Nesse contexto, sugerimos a articular a SAI à *aprendizagem baseada em problemas*.

### 5.1.2 Aprendizagem baseada em problemas

Aplicada inicialmente nas escolas de medicina norte-americanas, na década de 1960, a *Aprendizagem Baseada em Problemas*, abreviada pela sigla inglesa *PBL - Problem-based Learning*, tem sido utilizada em campos diversos do conhecimento (administração, arquitetura, engenharias e computação). Nos apontamentos de Bacich e Moran (2017),

> A PBL tem como inspiração os princípios da escola ativa, do método científico, de um ensino integrado e integrador dos conteúdos, dos ciclos de estudo e das

> diferentes áreas envolvidas, em que os alunos aprendem a aprender e preparam-se para resolver problemas relativos às suas futuras profissões. A aprendizagem baseada em problemas, de forma mais ampla, propõe uma matriz não disciplinar ou transdisciplinar, organizada por temas, competências e problemas diferentes, **em níveis de complexidade crescentes, que os alunos deverão compreender e equacionar com atividades individuais e em grupo.** (BACICH e MORAN, 2017, p. 59, grifo nosso).

A PBL compreende três fases, descritas por Wetzel (1994 *apud* BACICH, MORAM. 2017). São elas:

- F1: Identificação do(s) problema(s); formulação de hipóteses; solicitação de dados adicionais; identificação de temas de aprendizagem; elaboração do cronograma de aprendizagem; estudo independente.
- F2: Retorno ao problema; crítica e aplicação das novas informações; solicitação de dados adicionais; redefinição do problema; reformulação de hipóteses; identificação de novos temas de aprendizagem; anotação das fontes.
- F3: Retorno ao processo; síntese da aprendizagem; avaliação.

Em nossa pesquisa, a PBL figura nos encontros presenciais, em parceria à Sala de Aula Invertida - SAI, descrita na subseção anterior. Nesses encontros, os alunos aplicarão os conhecimentos iniciais, previamente adquiridos na curadoria, à resolução dos problemas propostos na apostila, na seção *É hora de explorar!*. Conforme descrições feitas no item 4.2.1 dessa dissertação, tais problemas foram elaborados considerando uma contextualização significativa e de fácil assimilação para os estudantes e uma estrutura que permita a resolução via modelagem matemática.

As estratégias de modelagem matemática utilizadas no referido item compreendem ações com níveis crescentes de complexidade, a saber,

- registrar os dados do problema em questão em tabelas;
- identificar padrões nas tabelas e expressá-los algebricamente;
- utilizar expressões algébricas na verificação e predição de valores;
- construir e analisar gráficos correspondentes à variação das grandezas em pauta e
- comparar modelos gráficos e algébricos a modelos anteriores.

Uma vez que as atividades são feitas em duplas ou trios, temos, na seção *É hora de explorar!*, a construção coletiva do conhecimento, destacada na citação que introduz esta subseção. Endossadas pelos apontamentos de Bacich e Moran (2017), as situações propostas nessa etapa, uma vez bem planejadas, contribuem para mobilizar as competências desejadas, sejam intelectuais, emocionais, pessoais ou comunicacionais. Trata-se de um conjunto de ações coerentes com a primeira fase da PBL (F1).

Ainda em *É hora de explorar!*, é necessária a intervenção docente, na intenção de auxiliar os estudantes a tornar conscientes alguns processos, a estabelecer conexões não percebidas, a superar etapas mais rapidamente e a confrontar novas possibilidades. Ademais, as ações do professor como mediador/facilitador/orientador da aprendizagem são ratificadas na seção *Problema de pesquisa*, na qual lhe cabem procedimentos próprios à segunda fase da PBL (F2).

Por fim, as ações concernentes à última fase da PBL (F3) são contempladas na seção *Vamos praticar!*, na qual os saberes adquiridos pelos estudantes ao longo do processo são retomados, sintetizados e avaliados por meio de itens oriundos de exames nacionais.

Diante do exposto, temos que tempos presenciais/digitais e espaços individuais/coletivos podem ser combinados, com diferentes graus de intervenção docente, a fim de garantir o sucesso da metodologia em voga. Nesse cenário, o ensino eficaz se dá no equilíbrio entre a aprendizagem prévia e personalizada (aula invertida); a aprendizagem com diferentes grupos (aprendizagem entre pares) e a aprendizagem mediada por pessoas mais experientes (professores, orientadores, mediadores).

Destarte, com base nas metodologias apresentadas nessa seção, prosseguimos às nossas expectativas para a primeira aplicação do nosso produto educacional.

## 5.2 Expectativas para a primeira aplicação

No que tange à preparação de uma boa aula, que resulte em aprendizagem eficaz, tanto para aluno quanto para o professor, é fundamental considerar, com o mesmo grau de importância, a escolha das metodologias, dos recursos e dos materiais que serão nela utilizados. Ademais, não se pode desprezar os conhecimentos que os estudantes detêm acerca dos pré-requisitos ao assunto em questão.

Objetivando usar o produto educacional em 2022, vislumbramos duas possibilidades de aplicação, a saber, (i) um tratamento revisional dos conteúdos de funções, em turmas de terceiro ano do Ensino Médio (3º EM), e (ii) a apresentação dos conceitos inéditos de função em turmas de primeiro e segundo ano do referido segmento (1º EM e 2º EM, respectivamente), e no último ano do Ensino Fundamental (9º EF).

Quanto a (i), não é raro que, em turmas de 3º EM, as aulas de Matemática sejam dedicadas majoritariamente, ou exclusivamente, à preparação desse público para o ENEM e para outros processos seletivos de instituições de nível superior. Nesse cenário, enxergamos uma oportunidade para a primeira aplicação do produto educacional, em sua versão integral, assim que a ordenação do plano de curso vigente para essas turmas contemplarem o ensino de funções. Nessa situação, intencionamos uma aplicação ditada pelos parâmetros apresentados nesta pesquisa.

Já para a possibilidade (ii), relembramos que o conteúdo de funções pode ser diluído ao longo das séries 9º EF, 1º EM e 2º EM. Conforme os textos dos Capítulos 2 e 3 desta dissertação, as primeiras noções de função, bem como seus primeiros modelos (afim e quadrática), são usualmente apresentadas ainda no Ensino Fundamental. Tais conceitos são adensados no primeiro ano do Ensino Médio, seguidos da apresentação dos modelos exponenciais e logarítmicos. Quanto às funções trigonométricas, as abordagens podem ocorrer ainda no 1ºEM, ou no 2ºEM, conforme os planos de curso de cada instituição/rede de ensino.

Sendo assim, nosso material emerge como propulsor da aula inaugural de cada modelo, a partir das seções *É hora de explorar!*. Os conceitos intrínsecos a cada tipo de função, tratados nas seções *Problema de Pesquisa,* podem render um número de aulas além do previsto na proposta inicial do produto, visto que, na possibilidade (ii), trata-se de assuntos inéditos para os alunos. Nesse contexto, é necessário cautela na condução dos encontros e na seleção de uma curadoria adicional, cabendo ao professor adequar nossa proposta ao grau de maturidade do público que se pretende alcançar. Ademais, o docente pode optar por acrescentar novos itens às seções *Vamos praticar!*, na expectativa de avaliar a aprendizagem de conceitos específicos em cada módulo.

Nesse sentido, apresentamos nesta seção nossa proposta para o ensino de funções, tendo como referências O Ensino de Funções – uma abordagem do cotidiano, produto educacional resultante da presente pesquisa, e as metodologias ativas Sala de Aula Invertida (SAI) e Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL), apresentadas na seção anterior.

## 5.3 Metodologia de Análise

Uma vez que nosso produto educacional contempla os tipos de as funções cujo estudo é sugerido pela na BNCC, usaremos justamente os textos da base para validá-lo. Os módulos produzidos contemplam as habilidades listadas nos Quadros 6, 7, 8 e 9, na Seção 4.2 desta dissertação. A sigla C.E.Mat. refere-se à competência específica em Matemática. Em

*Matemática e suas Tecnologias*, o desenvolvimento de tais habilidades visa à aquisição de competências específicas para a área, que foram resumidas na **Figura 4**, no Capítulo 2 desta dissertação, a saber:

- C.E.Mat.1 - Raciocínio lógico e Investigação;
- C.E.Mat.2 - Observação e Argumentação;
- C.E.Mat.3 - Registros e Linguagens;
- C.E.Mat.4 - Resolução de Problemas;
- C.E.Mat.5 - Relações Intra/Interdisciplinar;
- C.E.Mat.6 - Desenvolvimento de Pesquisas;
- C.E.Mat.7 - Projetos de Cunho Social e
- C.E.Mat.8 - Matemática como Ciência.

A partir da execução das atividades propostas nas seções *É hora de explorar!*, contemplamos as competências C.E.Mat.1 - Raciocínio lógico e Investigação; C.E.Mat.3 - Registros e Linguagens e C.E.Mat.2 - Observação e Argumentação, nessa ordem. Segundo Freitas (2021),

> A partir da leitura dos enunciados propostos, os estudantes devem usar conhecimentos numéricos para completar tabelas e identificar possíveis padrões nessas. Para tanto, exige-se do participante a competência **C.E.Mat.1 - Raciocínio lógico e Investigação,** uma vez que o preenchimento da tabela segue uma ordenação lógica de operações e a identificação de padrões é baseada na análise de sequências numéricas. Daí, os padrões devem ser descritos em linguagem textual e algébrica, evocando a competência **C.E.Mat.3 - Registros e Linguagens.** (...) A linguagem algébrica usada para registrar os padrões identificados nas tabelas dá origem a funções que descrevem a dependência entre grandezas (...). Os estudantes são orientados a testar a validade dessas relações a partir dos números já registrados e aplicá-las na obtenção de novos valores, passíveis de análises e comparações. Os atos de analisar as cifras obtidas e de registrar as conclusões sobre essas ao final de cada situação consolidam a capacidade de observação e argumentação dos alunos, referenciando a competência **C.E.Mat.2 - Observação e Argumentação**. (FREITAS, 2021, p. 82-83, grifo nosso).

As ações executadas em *É hora de explorar!* são ratificadas pelo docente por meio das verificações, investigações e generalizações feitas nas seções *Problema de pesquisa*. Tais exposições, bem como as discussões levantadas nessas atividades, endossam o caráter científico da disciplina, contemplando assim a competência C.E.Mat.8 - Matemática como Ciência. Ademais, os questionamentos levantados pelos participantes em meio às referidas discussões são detonadores da competência C.E.Mat.6 - Desenvolvimento de Pesquisas, visto que nosso produto não esgota as possibilidades para o estudo/ensino de funções.

Quanto às atividades que compõem as seções *Vamos praticar!*, temos, conforme descrições no item 2.2.2 do capítulo anterior, questões objetivas, oriundas de exames nacionais, contextualizadas a situações corriqueiras cujas soluções se respaldam no conhecimento adquirido nas seções anteriores. Nesse cenário, temos o desenvolvimento da competência C.E.Mat.4 - Resolução de Problemas, também contemplada nas situações propostas em *É hora de explorar!*, via Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL, metodologia ativa já apresentada no presente capítulo.

A análise descrita nos parágrafos anteriores é apresentada resumidamente no **Quadro 12**, construído a partir das seções que compõem cada sequência didática (módulo) proposta em nosso material e das competências da BNCC que podem ser desenvolvidas nessas seções.

**Quadro 12 – Competências BNCC & Produto Educacional**

| Seção | Competência BNCC | Código |
|---|---|---|
| ***É hora de explorar!*** | *Raciocínio lógico e Investigação* | C.E.Mat.1 |
| | *Registros e Linguagens* | C.E.Mat.3 |
| | *Observação e Argumentação* | C.E.Mat.2 |
| ***Problema de pesquisa*** | *Matemática como Ciência* | C.E.Mat.8 |
| | *Desenvolvimento de Pesquisas* | C.E.Mat.6 |
| ***Vamos praticar!*** | *Resolução de Problemas* | C.E.Mat.4 |
| | *Projetos de cunho social* | C.E.Mat.7 |
| | *Relações Intra/Interdisciplinar* | C.E.Mat.5 |

**Fonte: Elaborado pelo autor.**

Diante do exposto, temos um material que contempla diretamente seis das oito competências da BNCC, específicas para a área *Matemática e suas Tecnologias*. Quanto às demais competências, a saber, C.E.Mat.7 - Projetos de Cunho Social e C.E.Mat.5 - Relações Intra/Interdisciplinar, essas são contempladas indiretamente.

Uma vez que o objetivo maior do produto educacional é auxiliar professores e estudantes no ensino-aprendizagem de funções, no contexto das defasagens escolares agravadas pela pandemia da COVID-19, enxergamos nessa meta um cunho social. Afinal, o estudo de funções pode trazer aos estudantes maior capacidade de entendimento das relações entre grandezas que são utilizadas em suas rotinas, capacitando-os a construir modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. A partir do fato de que tais ações podem auxiliar os discentes na atuação em sociedade como cidadãos críticos e autônomos, contemplamos a competência C.E.Mat.7 - Projetos de Cunho Social.

Ainda dentro das perspectivas apresentadas no parágrafo anterior, as conexões dentro e fora da própria Matemática caracterizam as relações intra e interdisciplinares, respectivamente.

Afinal, os estudos de variação de grandezas tratados no Capítulo 3 desta dissertação são aplicáveis em campos diversos do conhecimento escolar, tais como Química, Física, Biologia e Geografia. Já no que tange à própria Matemática, o referido capítulo contempla funções aplicadas a diferentes eixos da disciplina, tais como Matemática Financeira e Geometria. Nesse sentido, contemplamos a competência a C.E.Mat.5 - Relações Intra/Interdisciplinar.

Uma vez que as seções aqui desenvolvidas estruturaram igualmente os sete módulos do nosso produto educacional, conclui-se a análise sob a ótica das competências apontadas pela BNCC para a área *Matemática e suas tecnologias.* Sendo assim, encerramos este capítulo anunciando as considerações finais desta pesquisa de Mestrado.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dada a importância do conteúdo de Funções, o assunto é pauta em um vasto conjunto de habilidades dentro da BNCC, ora destinadas ao conceito geral de função, tratado como variação de grandezas, ora destinadas ao tratamento de funções específicas (afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas). Em tais habilidades, destacam-se: a utilização dos modelos estudados na resolução ou na elaboração de problemas; representações gráficas e algébricas; análise e comparação dos comportamentos descritos por cada modelo.

A relevância desse conteúdo também é evidenciada nas dissertações do PROFMAT dedicadas ao ensino de funções. As obras analisadas nesta pesquisa compõem uma lista útil à consulta e ao planejamento dos docentes que buscam recursos para abordar o conceito de função em sala de aula, seja com o apoio de softwares de geometria dinâmica (Geogebra), seja por meio de estratégias próprias à modelagem matemática.

A fim de aplicar os recursos e estratégias supracitados ao ensino das principais funções especificadas na BNCC, propusemo-nos, com base em nossa experiência profissional e nos estudos apresentados nesta dissertação, a criar um material de estudo diferenciado que auxiliasse alunos e professores no ensino-aprendizagem de funções, especialmente no contexto das defasagens escolares causadas pela pandemia da COVID-19. Ao passo que o Geogebra é utilizado como recurso para apresentação das videoaulas, estratégias de modelagem matemática e de resolução de problemas norteiam as atividades propostas na apostila.

O produto citado é O Ensino de Funções – uma abordagem do cotidiano, composto por um conjunto de 28 videoaulas e uma apostila. O referido título é organizado em sete módulos, por meio dos quais os alunos serão capazes de utilizar estratégias de modelagem para resolução de problemas; representar gráfica e algebricamente diversos tipos de função; reconhecer propriedades gráficas e algébricas dessas funções e utilizar essas representações para prever resultados e fazer inferências. Trata-se de habilidades coerentes com aquelas propostas na BNCC.

A confecção da apostila foi norteada pela *Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL)*, metodologia inspirada nos princípios da escola ativa, do método científico, de um ensino integrado e integrador dos conteúdos, dos ciclos de estudo e das diferentes áreas envolvidas. Para cada modelo tratado, as abordagens perpassam o tratamento matemático apresentado nesta dissertação e são permeadas por questionamentos relevantes que o professor pode lançar aos estudantes, na intenção de apresentar conceitos e propriedades do modelo estudado e de responder às perguntas-chave que interligam as seções *É hora de explorar!* e *Vamos praticar!*.

Em *É hora de explorar!*, encontramos problemas de fácil assimilação pelos estudantes e cuja contextualização seja a eles significativa, estruturados de modo que a resolução seja conduzida por meio da modelagem matemática. Já para *Vamos praticar!*, temos um conjunto de questões oriundas do ENEM e de outros vestibulares, além de alguns itens autorais, que visam desenvolver as habilidades estabelecidas pela BNCC no que tange ao ensino de funções.

Em relação à produção das videoaulas, tidas como o diferencial desta pesquisa de Mestrado, as edições versam sobre os pré-requisitos às lições propostas na apostila e também trazem informações complementares ao assunto de cada encontro. A roteirização considerou, além dos referidos pré-requisitos, as noções básicas de cada modelo, contando com exemplos listados nesta dissertação e/ou na apostila produzida. Em alguns vídeos, o Geogebra é utilizado como recurso na apresentação e/ou exploração dos modelos em pauta, com abordagens semelhantes às apresentadas nas pesquisas do PROFMAT.

Reiteramos que a intenção é de que os alunos assistam previamente aos vídeos e, em sala de aula e sob a supervisão do professor de Matemática, usem os conceitos neles apresentados para desenvolverem as atividades propostas na apostila. Trata-se de uma proposta alinhada à metodologia *Sala de Aula Invertida (SAI)*, na qual o estudante parte de pesquisas, projetos e produções para se iniciar em um assunto e, a seguir, por meio de atividades supervisionadas pelo professor, aprofunda seu conhecimento e suas competências acerca do objeto de estudo em voga.

As metodologias ativas que norteiam a produção do nosso conjunto, *Sala de Aula Invertida (SAI)* e *Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL)*, complementam-se na intenção de promover um ensino eficaz, baseado no equilíbrio entre a aprendizagem prévia e personalizada, a aprendizagem com diferentes grupos e a aprendizagem mediada pelos professores/orientadores. Trata-se de ações que enfatizam o protagonismo do aluno e seu envolvimento em todas as etapas do processo de aprendizagem, experimentando, desenhando e criando, seja em ambientes que privilegiam a construção individual do conhecimento, seja em situações em que o saber é erigido coletivamente.

Para preparar uma aula que conduza a um processo de aprendizagem eficaz, mister considerar, com o mesmo grau de importância, a escolha das metodologias, dos recursos e dos materiais que serão utilizados. Não se podem desprezar, ainda, os conhecimentos que os estudantes detêm acerca dos pré-requisitos ao assunto em questão. Com base nisso, lançamos nossa proposta para o ensino de funções, tendo como referências O Ensino de Funções – uma abordagem do cotidiano, produto educacional resultante da presente pesquisa, e as metodologias ativas supracitadas, em associação às considerações de Bachic e Moram (2017).

> Entendemos que, embora não haja consenso em relação a esse objeto de estudo, historicamente avançamos em direção à superação de visões reducionistas que apresentam as metodologias ativas como um conjunto de estratégias que os professores utilizam em algumas de suas sequências didáticas, como uma “receita de bolo”, e que apenas enriquecem as formas de condução das aulas. A reflexão pede uma mudança de postura, em que gradativamente o educador se posicione como um mediador, um parceiro na construção de conhecimentos que não está no centro do processo. Quem está no centro, nessa concepção, são o aluno e as relações que ele estabelece com o educador, com os pares e, principalmente, com o objeto do conhecimento. (BACICH e MORAN, 2017, p. 23-24).

Uma vez analisado sob a luz das competências específicas que a BNCC estabelece para a área *Matemática e suas Tecnologias,* esperamos que o produto educacional apresentado, bem como a dissertação da qual ele resulta, auxilie os professores que estejam dispostos a mudar sua postura e a atuar como mediadores/parceiros na construção dos conhecimentos de seus estudantes. Nesse cenário, enfatizamos a importância da figura docente na execução das propostas apresentadas acerca do ensino de funções, seja em caráter revisional, seja em caráter resgatador, dada a defasagem decorrente do ensino remoto durante a pandemia da COVID-19.

Quanto aos estudantes, desejamos que possam usar os vídeos e a apostila como ferramentas de aprendizagem ativa e eficaz em sua formação, ressignificando os ensinamentos tidos no Ensino Fundamental, aprofundando seus repertórios e ampliando sua capacidade de entendimento das relações entre as grandezas que são utilizadas em sua rotina.

## REFERÊNCIAS


BACICH, Lilian e MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** Porto Alegre: Penso, 2018.

BOYER, Carl B. *História da matemática* / Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. – São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino Médio– orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002. 141p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei n. 13.005, de 25 de Junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Brasília: MEC, 2014.

BRASIL. **Matriz de referência ENEM.** Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. 2009. Disponível em https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em 23 de julho de 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018, 595p. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 6 de julho de 2021.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira | Inep:** Provas e Gabaritos. Brasília. 2021. Disponível em https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em 5 de janeiro de 2022.

CANCE, César A. **Projeto Canhão:** o ensino de funções quadráticas com o auxílio do software Geogebra. 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2015.

CERVINO, Fábio R. C. **Utilizando a modelagem matemática para auxiliar o ensino-aprendizagem do conteúdo de funções**. 2019. 31 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Amazonas. Manaus. 2019.

CUNHA. Karin A. P. **Modelagem matemática:** uma alternativa para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista. Franca. 2013.

CUTRIM, Giuliano E. B. **Função quadrática na modelagem matemática no lançamento de foguete de garrafa pet com alunos do 1º ano do Ensino Médio.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual do Maranhão. São Luís. 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Múltiplo: Matemática – Ensino Médio.** São Paulo, Ática, 2014.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CROSSAF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2017.

FERREIRA, Aurélio B. H. **Miniaurélio**: o dicionário da língua portuguesa. Curitiba, Positivo, 2006.

FREITAS, Bruno G. **Empréstimos & financiamentos:** uma abordagem sobre o ensino de sistemas de amortização à luz da Educação Financeira. 2021. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2021.

FREITAS, Bruno G; MOREIRA, Valéria G. **A Matemática dos Empréstimos & Financiamentos no Ensino Médio.** Rio de Janeiro, SBM, 2021. Disponível em https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/11/A_Matematica_dos_Emprestimos_e_Financiamentos.pdf. Acesso em 17 de novembro de 2021.

FREITAS, Joelmir E. **Ensino de funções de 1º e 2º grau:** uma proposta de atividades com o uso do Geogebra. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró. 2019.

GENEROSO, Luis Henrique C. **Modelagem matemática e metodologia ativa:** práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá. 2019.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Conjuntos e Funções. São Paulo, Atual, 1977a.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Logaritmos. São Paulo, Atual, 1977b.

IEZZI, Gelson; [*et al*]. **Matemática:** Ciências e aplicações, 1. São Paulo, Atual, 2010.

HELENA, Aline F. F. **Modelagem matemática no Ensino Médio:** uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2016.

LIMA, CICERO E. O. **A utilização do software Geogebra como ferramenta para o ensino de funções.** 2013. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. 2013.

LIMA, Elon L. **Números e funções reais.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

LIMA, Ravenia A. S. V. **Financiamentos imobiliários e modelagem matemática**: uma proposta para o ensino-aprendizagem de sistemas de amortização. 2019. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Semi Árido. Mossoró. 2019.

LOPES, Bruna F. S. **Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no Ensino Médio.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso. Cuiabá. 2018.

MAIA, Joaildo. **O ensino de funções trigonométricas através do software Geobebra.** 2013. 48 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal. 2013.

MACHADO, Maxiel M. **Uma proposta para o ensino de funções trigonométricas.** 2020. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Goiás. Catalão. 2020.

MARQUES, Patrícia P. R. **Modelagem matemática a partir do desenvolvimento de experimentos práticos para o estudo de funções.** 2019. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal da Fronteira Sul. Chapecó, 2019.

MELO, Alex G. **Modelagem matemática no estudo das funções afim e quadrática.** 2017. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Alagoas. 2017.

MORGADO, A. C; WAGNER, E.; ZANI, S. **Progressões e Matemática Financeira**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, 1993.

NARCIZO, Ricardo N. V. **Investigando a modelagem matemática no ensino de funções afins e exponenciais.** 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Goiás. Catalão. 2016.

NUNES, Lincoln F. **Modelos de crescimento e decaimento aplicados ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas.** 2017. 145 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Teófilo Otoni. 2017.

NUNES, Laís M. A. **Discutindo conceitos de Educação Financeira e investimentos financeiros**: uma sequência didática para a Educação Básica. 2022. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Centro Federal de Educação tecnológica de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2022.

OLIVEIRA, Marcelo P. **Aplicações do software Geogebra ao ensino de funções de funções trigonométricas.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo. 2018.

OLIVEIRA, Adriana T.E. **Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso. . 2019.

PALHARES, Isabela – 96% dos alunos da rede estadual de SP concluíram Ensino Médio sem saber resolver equações de 1º grau. Folhapress, 2022. Disponível em https://br.noticias.yahoo.com/96-dos-alunos-da-rede-112200599.html?guccounter=1&guce_referrer=aHR0cHM6Ly93d3cuZ29vZ2xlLmNvbS8&guce_referrer_sig=AQAAAMrD2AuEjcxy_9D1qeP1ZmcTn_Fsgz2v3PpkCCD1qwdF96rvv41rJuzk2Zds23JzQt_ktoP-CH18oDrQW2r_1A_FWhW7iJLhAtSL8aXl-Kin2GGxOyJRBJ-Fddt9fJTnztVy6K5-uR1B_6YxvEaowivToN5kzOZeMCSDrykWQraL, acesso em 10/03/2022.

PROFCIAMB – Programa de Pós-Graduação em rede nacional para Ensino de Ciências Ambientais. **Produto educacional.** UEM. 2018. Disponível em http://sites.uem.br/profciamb/orientacoes-e-procedimentos/produto-educacional/at_download/file. Acesso em 20 de julho de 2021.

RODRIGUES, Márcio U. **Educação financeira na perspectiva da BNCC para o Ensino Médio.** UNEMAT. 2019. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=cehr1mA9Qpk#action=share. Acesso em 12 de julho de 2021.

SALDANÃ, Paulo. Cerca de 4 milhões abandonaram estudos na pandemia, diz Datafolha. **Jornal Valor Econômico.** Brasília. 2021. Disponível em https://valor.globo.com/brasil/noticia/2021/01/23/cerca-de-4-milhes-abandonaram-estudos-na-pandemia-diz-datafolha./ Acesso em 10 de dezembro de 2021.

SAMIZAVA, Cíntia H. **Utilização do software Geogebra no ensino de funções de primeiro e segundo graus.** 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto. 2018.

SÃO PAULO – Secretaria de Estado da Educação, Saresp 2021: Em matemática, estudantes do Ensino Médio têm o pior desempenho registrado em 11 anos. Disponível em https://www.educacao.sp.gov.br/saresp-2021-em-matematica-estudantes-ensino-medio-tem-o-pior-desempenho-registrado-em-11-anos/#:~:text=Em%20Matem%C3%A1tica%2C%20o%20recuo%20ficou,na%20menor%20etapa%20de%20profici%C3%AAncia. Acesso em 10 de março de 2022.

SILVA, Evandro A. **O ensino de funções trigonométricas com o auxílio do Geogebra.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Vale do São Francisco. 2013.

SILVA, Vilmar C. **Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas usando a resolução de problemas mediada pelo Geogebra** 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Tocantins. Palmas. 2020.

SILVA, Francisco M. S. **Aproximação entre a teoria e a prática**: a modelagem matemática como facilitador para o ensino de funções exponenciais. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró. 2019.

SILVA, Sebastião R. **O uso da modelagem matemática no ensino de funções na Educação Básica.** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Amapá. . 2014.

SILVA, Tiago L. **O ensino de funções polinomiais do 2º grau:** uma aplicação com o software Geogebra. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró. 2015.

SIQUEIRA, Daniela m. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2013.

SOUZA JR, Airton. W. **Uso do software Geogebra e modelagem matemática no ensino de funções.** 2018. 147 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Goiás. Jataí. 2018.

SOUZA JR, Flávio R. **Ensino de funções trigonométricas com Applets.** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense. 2018.

SUGUIMOTO, Alexandre S. **Utilização do Geogebra como auxílio no ensino de funções.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Maringá. Maringá. 2013.

WALDHEM, Kurt C. **O uso de ferramentas tecnológicas para o ensino de funções.** 2014. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Fluminense. Rio de Janeiro. 2014.

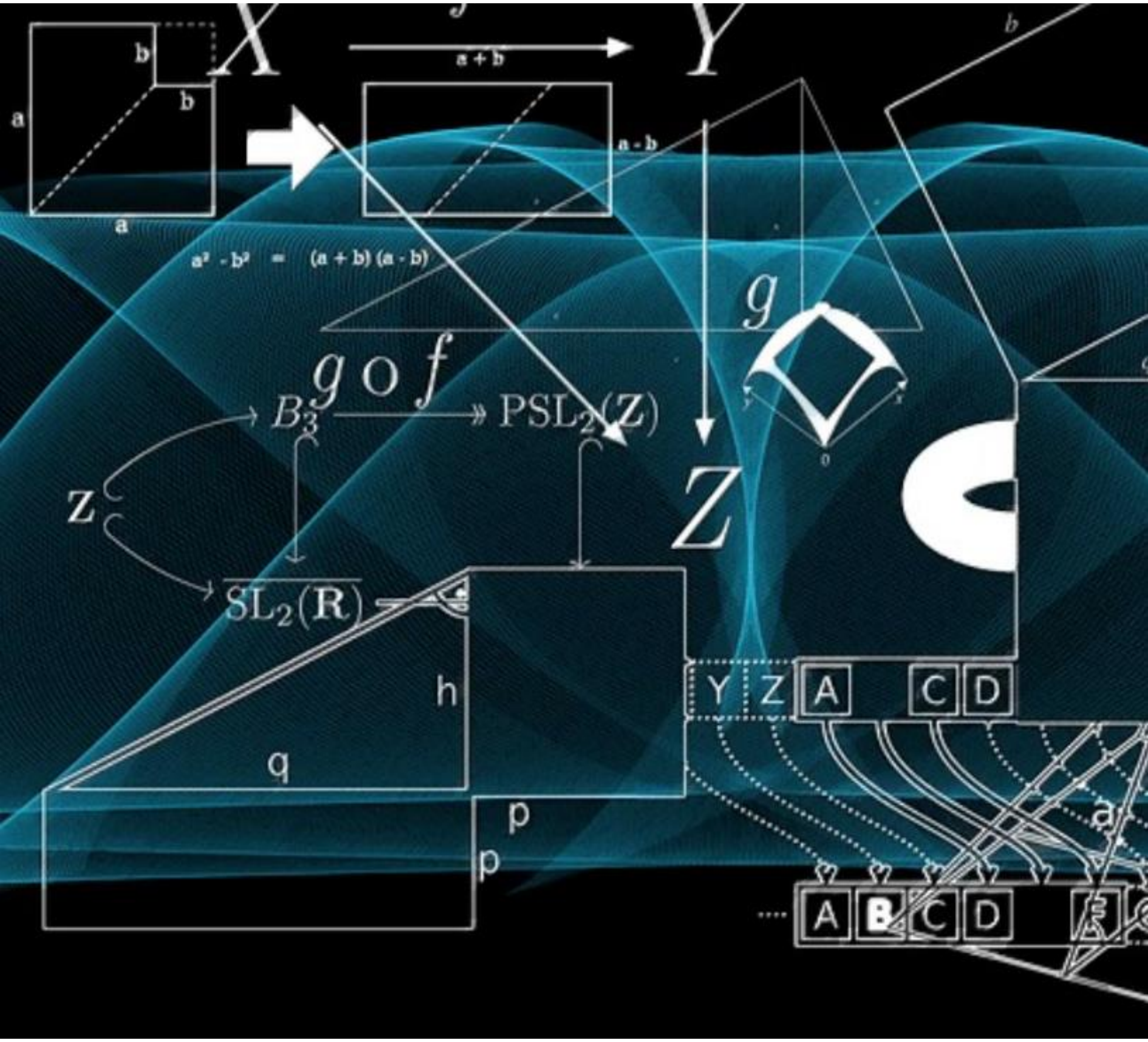
ZANATA, Adauto. **Modelagem matemática com exponencial e logaritmo.** 2018. f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso. Cuiabá, 2018.

ZANDONADI, Ednilson C. **Aplicação do software Geogebra no ensino de funções exponenciais e logarítmicas.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina. 2013.

# BIBLIOGRAFIA

PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT.** Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em 13 de março de 2021.

**ANEXO 1 – A APOSTILA**




# Funções Reais
# Um mergulho nos problemas do dia a dia

Antonine Bicalho Garcia
Bruno Freitas

# Sumário

# 1- APRESENTAÇÃO

Este material destina-se aos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental 2 e do 1º ano do Ensino Médio. Ele foi construído com o intuito de auxiliar na introdução do conteúdo de funções para a educação básica.

Devido à pandemia, muitos alunos ficaram afastados das escolas e não conseguiram assimilar todo o conteúdo necessário para o seu progresso escolar. Com a matéria de funções, não foi diferente. Assim, espera-se que este material seja um ponto de partida para que o professor da educação básica possa, neste retorno ao ensino presencial, revisar com seus alunos os principais assuntos relacionados ao estudo de funções reais. Este material não tem a intenção de substituir o livro didático.

As videoaulas e a apostila são complementares. É importante que o aluno assista às videoaulas antes de cada conteúdo a ser estudado. Assim, o estudante será capaz de entender e relacionar as funções com fatos do seu cotidiano.

Os capítulos a seguir apresentam algumas seções importantes para auxiliar o professor na distribuição do conteúdo e de sua carga horária. Antes de cada um deles será apresentada uma breve estrutura da aula.

## 2- NOÇÕES SOBRE FUNÇÕES

Segundo a proposta de ensino mencionada na introdução deste material, espera-se que os alunos já tenham adquirido conhecimentos sobre linguagem dos conjuntos e sobre conjuntos numéricos. O objetivo desta aula é usar esses conceitos para apresentar as primeiras noções sobre funções e suas principais representações.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- Vídeo 1.1 – O que é função? (https://youtu.be/kMjiESUT15s)
- Vídeo 1.2 – Conjuntos – Como representar? (https://youtu.be/mzCr8KQaO_o)
- Vídeo 1.3 – Entendendo os gráficos. (https://youtu.be/WH0DGmasA-s)
- Vídeo 1.4 – Praticando. (https://youtu.be/yclXDaxh0JU)

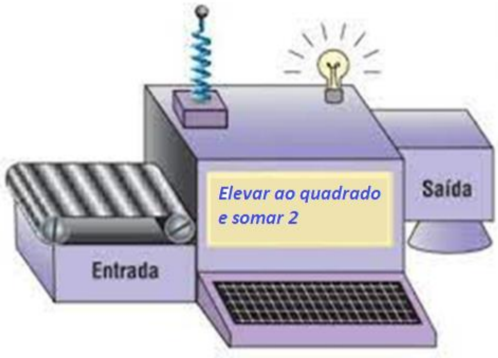
A seção *É hora de explorar!* intenciona apresentar o conceito de função como uma relação de dependência entre grandezas, resgatando a construção de expressões algébricas vistas em anos anteriores do Ensino Fundamental e evoluindo às possíveis representações dessa relação. Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolverem a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso de calculadora e a intervenção do professor.

Na seção *Variação de grandezas & função: é tudo a mesma coisa?,* é hora de formalizar os conceitos trabalhados na situação anterior. Cabe aos alunos adaptar as situações trabalhadas em um domínio inteiro para o domínio real e, ao professor, formalizar o conceito de função, nomeando seus elementos e expondo possíveis restrições. Além disso, é importante explorar as representações de uma função no plano cartesiano, enfatizando intervalos de crescimento e decrescimento e, ainda, relacionando com intervalos em que a função assume resultados positivos, nulos e negativos, bem como seus respectivos significados dentro de cada contexto. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar!*, destinada à aplicação dessas associações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 30 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito, e faz-se a revisão das dúvidas apresentadas pelos alunos. Vale, então, acrescentar 25 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**É HORA DE EXPLORAR**

Na máquina numérica representada na figura a seguir, cada valor de entrada *x* é transformado em um valor de saída *y*. Tal transformação se dá por meio do comando "*elevar ao quadrado e somar 2*".



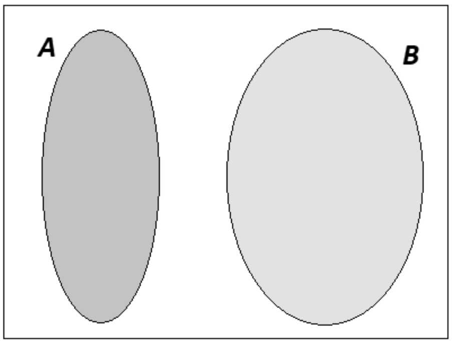

A partir dessas informações, faça o que se pede.

a) Para testar essa máquina, usaremos como valores de entrada os elementos do conjunto
$A = \{x \in Z \ / \ |x| < 4\}$. Sabendo dis|so, complete a tabela a seguir.

| Valores de Entrada (x) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de Saída (y) | | | | | | | |

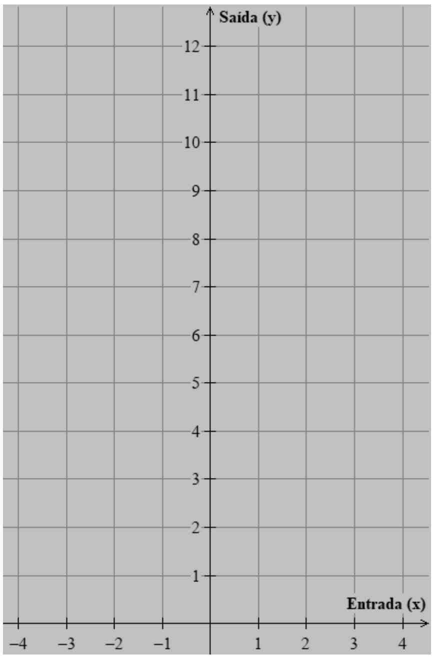
b) Os valores de saída registrados no item (a) podem ser generalizados por meio de uma fórmula, em que y é dado em função de x. Considerando o comando da máquina, escreva essa fórmula.

c) A fórmula obtida em (b) descreve a lei de uma função *f*, sendo o valor de y obtido em função de x. Uma função f pode ser estudada por meio da análise dos valores encontrados, tal como indicado na máquina, por fórmulas, como em (b), ou, ainda, por tabelas, tal como em (a). Contudo, além dessas representações, neste exercício trabalharemos a linguagem dos conjuntos, representados através de diagramas. Para isso, na figura a seguir, represente os conjuntos $A = \{x \in Z \ / \ |x| < 4\}$ e $B = \{y \in Z \ / \ 0 < x \leq 11\}$.




A seguir, identifique os elementos de B que foram citados como valores de saída no item (a) e faça uma correspondência ligando cada elemento do conjunto A ao seu respectivo valor de saída em B.

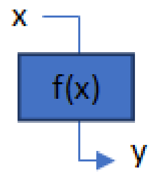
d) Esse mesmo diagrama pode ser representado também no plano cartesiano, a partir dos pares ordenados (x, y). Sabendo disso, use as respostas do item (a) para representar o gráfico de f(x) no plano cartesiano a seguir.




e) Essa máquina também funciona se usarmos como valores de entrada números não inteiros. Sabendo disso, determine os valores de saída para dois valores de entrada não inteiros, à sua escolha, sendo um positivo e outro negativo. A seguir, represente-os no gráfico do item (d).

f) Explique por que a máquina estudada nesta atividade nunca entregará valores de saída negativos.

**VARIAÇÃO DE GRANDEZAS E FUNÇÃO: É TUDO A MESMA COISA?**




Ao estabelecermos uma relação matemática entre duas grandezas, pode ser que tenhamos a representação de uma função. Podemos considerar *grandeza* tudo aquilo que pode ser quantificado. A relação entre grandezas pode, então, determinar uma função.

Na seção *É hora de explorar!,* as grandezas consideradas são os valores de entrada e de saída. Nela, exemplificamos função como uma máquina, em que, de um lado, colocamos o valor de entrada *x*, chamado de variável independente, e, do outro lado, recebemos o resultado calculado, o valor de saída *y* (variável dependente). Nesse caso, podemos escrever $y = f(x)$.

**Representação algébrica**

Os comandos dessa máquina podem ser os mais diversos possíveis. Além da relação apresentada na seção anterior, cuja variável y é dada em função de uma expressão quadrática ($y = x^2 + 2$), temos inúmeras possibilidades de relacionarmos duas grandezas. Algumas dessas possibilidades serão analisadas neste material.

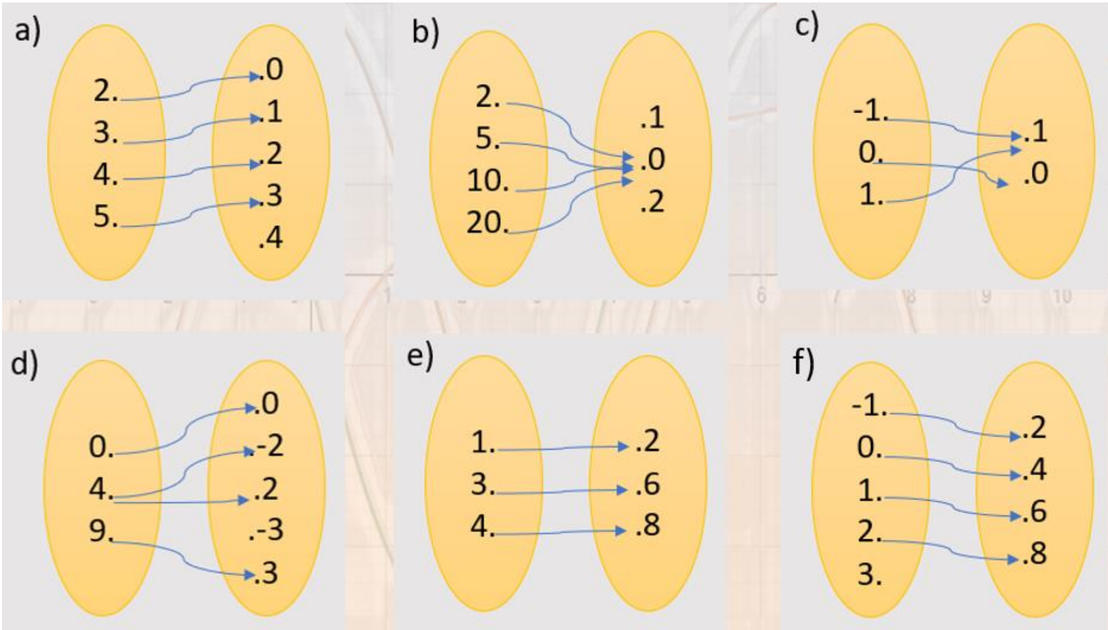
No dicionário, a definição de função aparece como uma “relação entre dois conjuntos que abrange todos os elementos do primeiro e associa a cada elemento deste primeiro conjunto somente um elemento do segundo.” Sendo assim, cabem aqui algumas perguntas:

a) Na seção *É hora de explorar!* podemos observar a definição que aparece no dicionário?
b) Que interpretação podemos dar à notação $f: A \to B$?
c) Qualquer relação entre conjuntos A e B pode ser interpretada como função?

Para cada função $f: A \to B$, A e B podem ser conjuntos diversos, distintos ou não. Nesse sentido, é importante que os alunos os identifiquem como *domínio* e *contradomínio* da função, respectivamente. Além disso, o subconjunto formado pelos valores de saída se constitui como o conjunto *imagem* da função. Trata-se de nomenclaturas importantes – mencionadas nos módulos seguintes –, que nos conduzem à definição formal de função:

- Definimos $f: A \to B$ como uma função se, para todo elemento *x* do domínio, exista um único elemento *y* do contradomínio, tal que $y = f(x)$.

Dada essa definição, qual dos seguintes diagramas **NÃO** pode representar uma função do tipo $f: A \to B$?

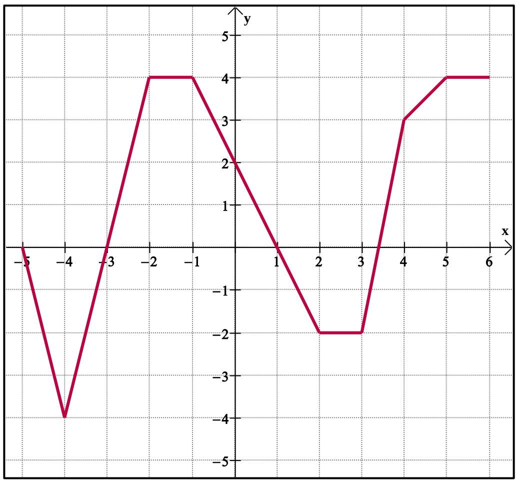

a)
2.
3.
4.
5.
.0
.1
.2
.3
.4
b)
2.
5.
10.
20.
.1
.0
.2
c)
-1.
0.
1.
.1
.0
d)
0.
4.
9.
.0
.-2
.2
.-3
.3
e)
1.
3.
4.
.2
.6
.8
f)
-1.
0.
1.
2.
3.
.2
.4
.6
.8

**O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO**

Em *É hora de explorar!* abordamos também a representação gráfica de y = f(x). O gráfico de uma função, formado pela representação dos pares ordenados (x, y), nos permite visualizar elementos importantes, tais como domínio e imagem, e também analisar a variação das grandezas em questão, destacando itens como crescimento (ou decrescimento) e positividade (ou negatividade).

Caro(a) Professor(a), retomando o item (d) da seção *É hora de explorar!*, peça aos alunos que identifiquem os intervalos de domínio e imagem, caso tenhamos A = ]-4, 4[, ou, ainda, A = IR. Peça-lhes também que analisem o (de)crescimento e a variação de sinal para cada uma dessas condições.

Além da plotagem proposta na seção anterior, convém analisar situações de gráficos diversos, destacando itens importantes dentro do conceito de função e também contextualizando comportamentos por ele descritos. Para isso, sugerimos a função y = f(x), representada a seguir.




Inúmeras informações podem ser obtidas dessa imagem:

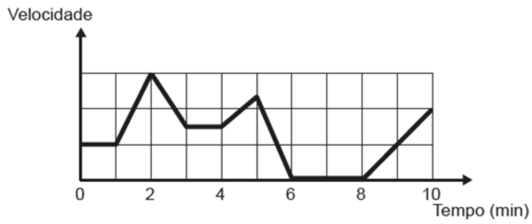
i. Domínio e imagem;
ii. Expressões numéricas, tais como f(-2) + f(2) – 4f(0);
iii. Representação por tabelas e/ou diagramas;
iv. Intervalos de constância e (de)crescimento e
v. Intervalos em que a função atinge valores positivos ou negativos.

Além das sugestões acima, os alunos podem criar contextos passíveis de serem descritos por essa função, como, por exemplo, variação de velocidade (ou temperatura) em função do tempo. Tais abordagens são comuns em avaliações externas, como no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Segue um exemplo:

Outro tipo de cobrança frequente nessas avaliações são a representação gráfica e/ou

(ENEM 2017) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.

Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?



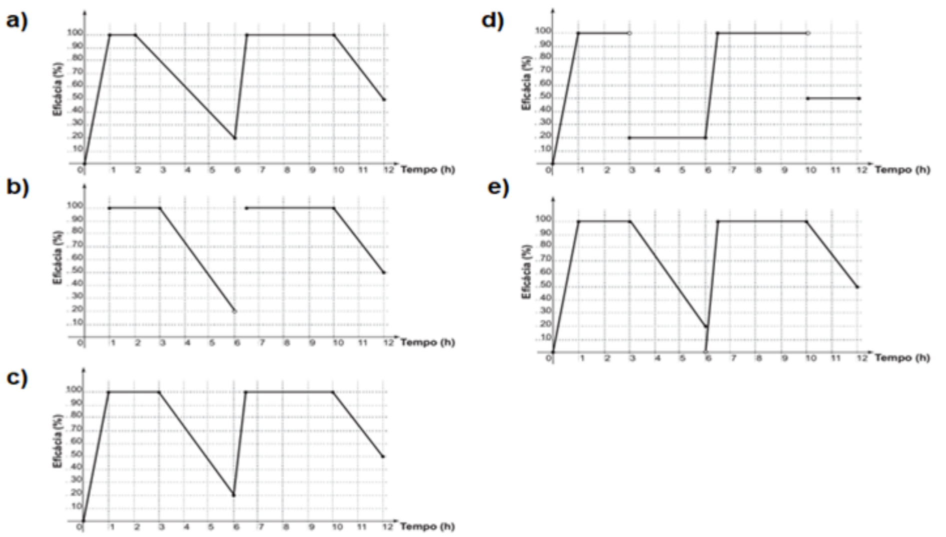

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

algébrica de uma situação descrita em um texto verbal. A seguir, um exemplo retirado da edição de 2016 do ENEM:

(ENEM 2016) Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6h entre elas.

Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2h. Após essas 2h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?



Observe que há, nos gráficos, intervalos em que as funções apresentam linhas ascendentes, linhas descendentes ou linhas paralelas ao eixo x. Para isso, devemos entender o que é uma função constante, uma função crescente e uma função decrescente.

**DEFINIÇÃO**

**Uma função é dita crescente se, ao tomarmos valores crescentes de x e substituirmos na função, obtemos valores de y cada vez maiores.**

**Caso a função seja constante, para todo valor de x, o valor de y permanece o mesmo.**

**Sendo uma função decrescente, à medida que substituímos valores crescentes de x, os valores de y obtidos são cada vez menores.**

**Podemos ter funções que apresentem intervalos crescentes e decrescentes no seu domínio. Um bom exemplo é a função quadrática, que estudaremos mais adiante.**

**VAMOS PRATICAR**

1) (ENEM 2021) Aplicativos que gerenciam serviços de hospedagem têm ganhado espaço no Brasil e no mundo por oferecer opções diferenciadas em termos de localizações e valores de hospedagem. Em um desses aplicativos, o preço *P* a ser pago pela hospedagem é calculado considerando um preço por diária *d*, acrescido de uma taxa fixa de limpeza *L* e de uma taxa de serviço. Essa taxa de serviço é um valor percentual *s* calculado sobre o valor pago pelo total das diárias.

   Nessa situação, o preço a ser pago ao aplicativo para uma hospedagem de n diárias pode ser obtido pela expressão

   a) P = d.n + L + d.n.s.
   b) P = d.n + L + d.s.
   c) P = d + L + s.
   d) P = d.n.s + L.
   e) P = d.n + L + s.

2) (ENEM 2015) A expressão “Fórmula de Young” é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

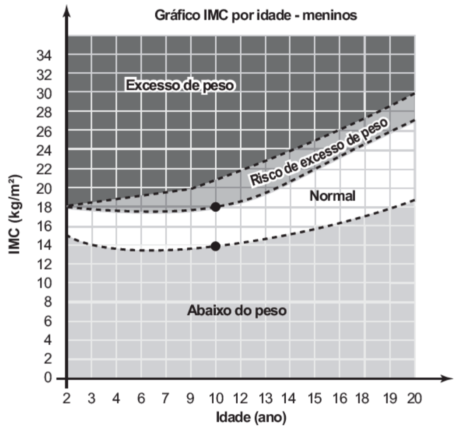
$$\textit{dose de criança} = \left(\frac{\textit{idade da criança (em anos)}}{\textit{idade da criança (em anos)} + 12}\right) \cdot \textit{dose do adulto}$$

   Uma enfermeira deve administrar a uma criança inconsciente um medicamento X, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

   Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a

   a) 15.
   b) 20.
   c) 30.
   d) 36.
   e) 40.

3) (ENEM 2016) O Índice de Massa Corporal (IMC) pode ser considerado uma alternativa prática, fácil e barata para a medição direta de gordura corporal. Seu valor pode ser obtido pela fórmula $IMC = \frac{Massa}{(altura)^2}$, na qual a massa é dada em quilograma e a altura, em metro. As crianças, naturalmente, começam a vida com um alto índice de gordura corpórea, mas vão ficando mais magras conforme envelhecem, por isso os cientistas criaram um IMC especialmente para as crianças e jovens adultos, dos 2 aos 20 anos de idade, chamado de IMC por idade.




O gráfico mostra o IMC por idade para meninos.

Uma mãe resolveu calcular o IMC de seu filho, um menino de 10 anos de idade, com 1,20 m de altura e 30,92 kg.

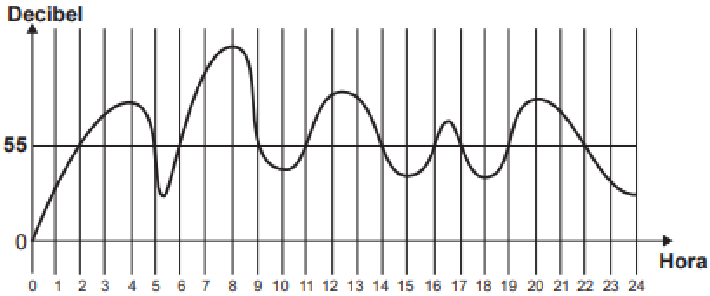
Disponível em: http://saude.hsw.uol.com. Acesso em: 31 jul. 2012

Para estar na faixa considerada normal de IMC, os valores mínimo e máximo que esse menino precisa emagrecer, em quilograma, devem ser, respectivamente,

a) 1,12 e 5,12.
b) 2,68 e 12,28.
c) 3,47 e 7,47.
d) 5,00 e 10,76.
e) 7,77 e 11,77.

4) (ENEM 2020) A exposição a barulhos excessivos, como os que percebemos em geral em trânsitos intensos, casas noturnas e espetáculos musicais, podem provocar insônia, estresse, infarto, perda de audição, entre outras enfermidades. De acordo com a Organização Mundial da Saúde, todo e qualquer som que ultrapasse os 55 decibéis (unidade de intensidade do som) já pode ser considerado nocivo para a saúde. O gráfico foi elaborado a partir da medição do ruído produzido, durante um dia, em um canteiro de obras.

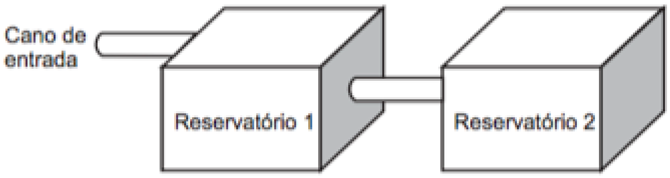
Nesse dia, durante quantas horas o ruído esteve acima de 55 decibéis?




a) 5
b) 8
c) 10
d) 11
e) 13

5) (ENEM 2017) A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

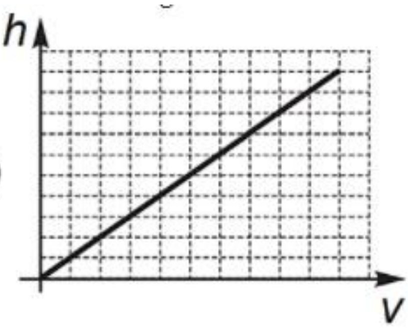
A água entre no sistema pelo cano de entrada do Reservatório 1 a uma vazão

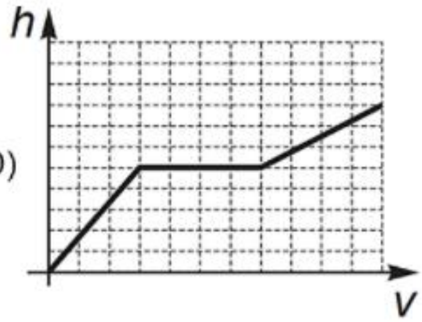


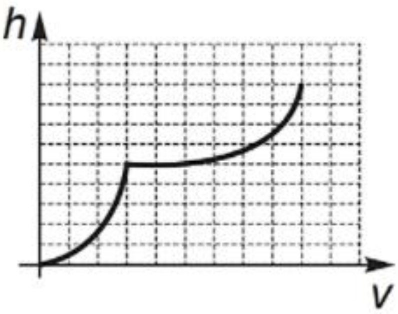

constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

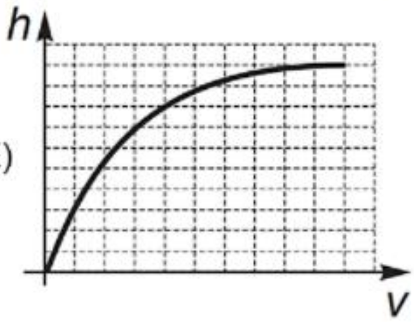
Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V de água no sistema?

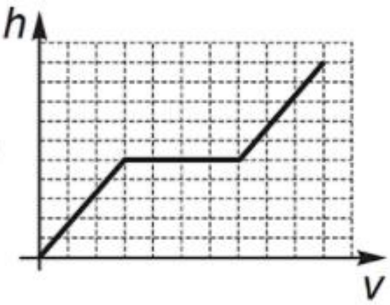
D

A)



D)



B)



E)



C)


## 3- FUNÇÃO AFIM

Agora é hora de usar os conceitos trabalhados no módulo anterior para mostrar aos alunos as propriedades das funções polinomiais. Neste módulo, iniciaremos com a Função Afim.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- Vídeo 2.1 – Alugando um carro (https://youtu.be/pqOAFVO5p00)
- Vídeo 2.2 – Reconhecendo uma função afim (https://youtu.be/B2UyBuyWIsk)
- Vídeo 2.3 – Gráficos e estudo de sinal da função afim (https://youtu.be/KbWxJsZ0J6k)
- Vídeo 2.4 – Praticando (https://youtu.be/19yweTvFJj8)

Os objetivos deste módulo já aparecem na seção *É hora de explorar!*, a saber:

- Identificar a representação algébrica de uma função afim;
- Modelar situações-problema por meio de uma função afim;
- Identificar retas no plano cartesiano como representações de funções afins e;
- Interpretar algébrica e graficamente o resultado de equações/sistemas lineares na resolução de problemas.

Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolverem a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso de calculadora e a intervenção do professor.

*Como eu identifico uma função afim?***,** é hora de formalizar as apresentações da função do tipo afim. Nessa formalização, cabe aos alunos identificar os coeficientes que compõem uma função afim e, ao professor, atribuir significado a esses coeficientes. É importante ressaltar as proporcionalidades descritas pela função linear e o formato de uma função constante. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar!*, destinada à aplicação dessas formalizações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 25 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito, e faz-se a revisão das dúvidas apresentadas pelos alunos. Vale, então, acrescentar 15 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**É HORA DE EXPLORAR!**

Pedro e Amanda estão de viagem marcada para conhecer o litoral da Paraíba. Eles vão de avião de Belo Horizonte para João Pessoa e, do aeroporto, seguem em um carro alugado, por sete dias, percorrendo todas as praias do litoral. Para fazer o passeio, eles encontraram duas ofertas de locadoras de carros, em João Pessoa.

- Locadora 1: Alugue seu carro por R$65,00 a diária mais R$0,45 por quilômetro rodado.
- Locadora 2: Pague R$100,00 pela locação diária do seu automóvel e viaje livremente, sem se preocupar com as distâncias percorridas.

A partir dessas informações, faça o que se pede.

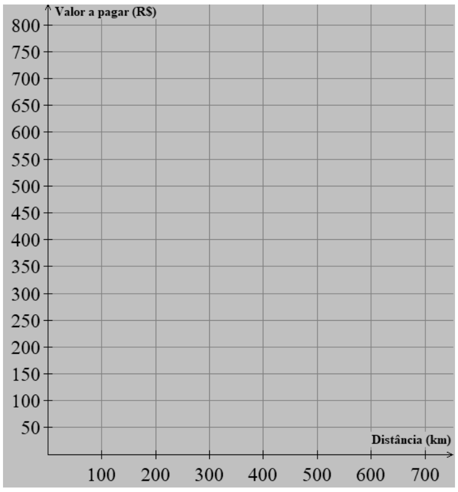
a) Na intenção de decidir pela oferta mais vantajosa, Pedro e Amanda compararam os valores em ambas as locadoras, pré-estabelecendo algumas distâncias. Essas comparações foram organizadas em uma tabela como a seguir. Complete-a.

| Distância percorrida (km) | Valor a pagar – Locadora 1 (R$) | Valor a pagar – Locadora 2 (R$) |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 100 | | |
| 200 | | |
| 300 | | |
| 400 | | |
| 500 | | |
| 600 | | |
| 700 | | |

b) Suponha que $V_1$ e $V_2$ representem os valores a pagar nas locadoras 1 e 2, respectivamente. Dada uma distância genérica *d*, escreva uma fórmula que permita calcular $V_1$ em função dessa distância. Repita o procedimento para $V_2$.

c) Usando as fórmulas obtidas em (b), determine qual oferta é mais vantajosa para uma distância de 580 km.

d) Com auxílio da tabela preenchida em (a), represente a função $V_1$ no plano cartesiano a seguir. No mesmo plano, represente também a função $V_2$. Dica: A fim




de facilitar as comparações, use cores distintas para $V_1$ e $V_2$.

e) A partir dos gráficos construídos em (d), é possível perceber uma distância específica para a qual ambas as locadoras cobram o mesmo valor. Use as fórmulas obtidas em (b) para calcular essa distância.

f) A partir dos itens (d) e (e), determine em que condições a Locadora 1 é mais vantajosa.

## COMO IDENTIFICO UMA FUNÇÃO AFIM?

Comecemos analisando as funções construídas no item (b) da seção *É hora de explorar!*, a saber, $V_1(d) = 455 + 0,45.d$ e $V_2(d) = 700$. Enquanto $V_1(d)$ descreve um valor a pagar crescente em função da distância percorrida, temos em $V_2(d)$ uma função cujos resultados são fixos, independentemente da distância percorrida.

Ainda sobre $V_2(d)$, temos sua representação gráfica por meio de uma linha horizontal contínua, sem intervalos de crescimento ou decrescimento da função. Devido a isso, atribuímos a essa função a classificação de *Função Constante*, em que a variação da grandeza independente não altera o resultado da grandeza dependente.

**DEFINIÇÃO**

**Definimos *f: A→ B* como uma *função afim* a função da forma f(x) = a.x + b, em que a e b ∈ ℝ. Se a = 0, então f(x) = b e, nesse caso, a função f(x) é dita constante. No caso de a ≠ 0, a função afim é uma função polinomial de 1º grau.**

Analisando $V_1(d) = 455 + 0,45.d$, sua representação gráfica, dada por pontos alinhados, formam uma semirreta com inclinação constante. Essa constância também pode ser observada algebricamente, uma vez que cada quilômetro percorrido acarreta uma variação de R$ 0,45 ao valor a pagar no aluguel do carro. Esse comportamento caracteriza $V_1(d)$ como uma **Função Afim**.

Ao mesmo tempo que $V_1$ é classificada como uma **Função Afim**, ela também configura uma função polinomial de 1º grau. Para o caso de uma função polinomial do 1º grau, a variável independente tem expoente igual 1. Lembrem-se de que o grau da função polinomial é dado pelo grau do polinômio que a configura. Quanto a $V_2$, já enunciada como função constante, os valores de x (ou d) não provocam mudanças nos valores de y (ou $V_2$). Nesse caso, o grau do polinômio é nulo, visto que, com $a = 0$, temos apenas $f(x) = b = b.x^0$.

### Uma função com variação constante

A *Função Afim* é definida como toda função real escrita sob a forma $f(x) = a.x + b$, com $a, b \in$ IR. Dependendo do domínio em questão, a representação gráfica dessa função se dá por pontos colineares que formam retas, semirretas ou segmentos de reta, com uma inclinação constante, principal característica desse modelo. Para quaisquer *a* e *b*, a inclinação supracitada é dada por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

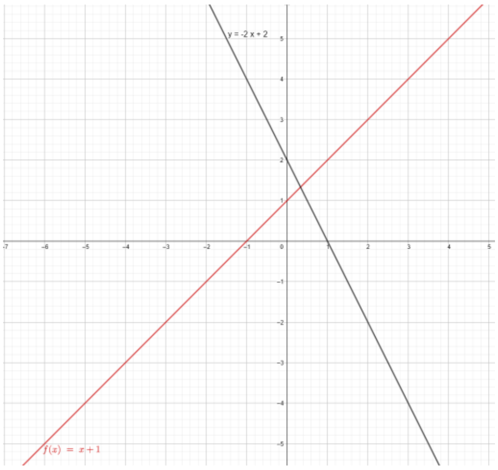
Calculando *m* em função de elementos genéricos e distintos do domínio $x_1$ e $x_2$, *temos:*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(a\cdot x_2+b)-(a\cdot x_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{a\cdot(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a.$$

Com isso, o valor do coeficiente *a* pode ser entendido como a taxa de variação de uma *Função Afim*. Sobre essa taxa, seguem algumas questões a serem discutidas com os alunos:

a) Que comportamento a função afim apresenta se sua taxa de variação for positiva?
b) E se for negativa?
c) E se for nula?

Ainda sobre as representações de uma função afim por meio de retas inclinadas, observe os exemplos das funções *f(x) = x + 1* e *y = - 2x + 2*, ilustradas a seguir.




Nas funções representadas acima, temos y = -2x + 2 decrescente, pois, à medida que aumentamos os valores de *x*, *y* fica cada vez menor. Observe também que o coeficiente da variável *x* é igual a -2, ou seja, é menor que zero. Já na função *f(x) = x + 1*, com coeficiente de *x* igual a 1 (positivo), se aumentarmos o valor de *x*, o valor de *y* também aumenta, caracterizando f(x) como uma função crescente.

Ainda na figura anterior, vemos as duas retas se interceptando em um ponto cujas coordenadas são desconhecidas. Sobre esse fato, questionamos:

a) O que significa esse ponto de cruzamento?
b) Como determinar suas coordenadas?
c) Em que situações essas retas nãos se cruzariam?

Outro valor a ser analisado é o coeficiente *b*, compreendido como valor inicial da função afim, uma vez que *f(0) = a.0 + b = b*. Isso ocorre em $V_1(d) = 455 + 0{,}45.d$, visto que *b = R$ 455,00* se refere ao valor pago pelo aluguel do carro para uma distância percorrida igual *d = 0 km*. A esse respeito, segue a pergunta:

a) Como o valor desse coeficiente é representado no gráfico da função?

Caso o coeficiente *b* seja nulo, a *Função Afim* passa a ser chamada de *Função Linear.* Nesse caso, *f(x)* = *a.x* passa a descrever uma situação de proporcionalidade, em que os valores de *f(x)* são sempre proporcionais a *x*, com a constante de proporção (já mencionada no vídeo 2.2) igual ao coeficiente *a*.

**DEFINIÇÃO**

**Os zeros (ou raízes) de uma função $f(x)$ são os valores $x_0$ que a anulam, ou seja, $f(x_0) = 0$. Graficamente, a raiz $x_0$ sempre será encontrada sobre o eixo das abscissas, já que a igualdade $f(x_0) = 0$ equivale ao par ordenado $(x_0, 0)$.**

**DOMÍNIO E IMAGEM**

Pensando um pouco mais no problema apresentado na seção *É hora de explorar!*, observamos que ambas as funções, $V_1(d) = 455 + 0{,}45 \cdot d$ e $V_2(d) = 700$, não permitem valores de *d* negativos, visto que a variável *d* representa a distância percorrida pelo automóvel locado. Dizemos, nesse caso, que o domínio dessas funções são todos os valores de *d* maiores ou iguais a zero, ou seja, $D = \{d \in \mathbb{R}/d \geq 0\}$

Ademais, observamos que os resultados dessas funções nunca são negativos. Na função $V_1$, logo de início, já temos um valor a pagar, o que faz com a imagem seja formada por valores maiores ou iguais a R$ 455,00. Quanto a $V_2$, o conjunto imagem se restringe ao valor de R$ 700,00, que é o único valor a ser pago pelos sete dias de aluguel, independentemente da distância percorrida. Em funções constantes, o conjunto imagem é formado por um único elemento.

Generalizando, para funções afins em que não há restrições de domínio, o gráfico é representado por uma reta. Nesse caso, domínio e imagem são considerados reais, isto é, $f: IR \to IR$ tal que $f(x) = a \cdot x + b$, com $a$, $b \in$ IR.

**Gráficos poligonais**

Além dos gráficos já abordados até aqui, cabem nesta seção observações acerca das funções cujos gráficos são formados por segmentos de reta, muito utilizados na representação de funções afins que descrevem comportamentos diferentes em intervalos distintos de seu domínio. A seguir, um exemplo cobrado na última edição do ENEM.

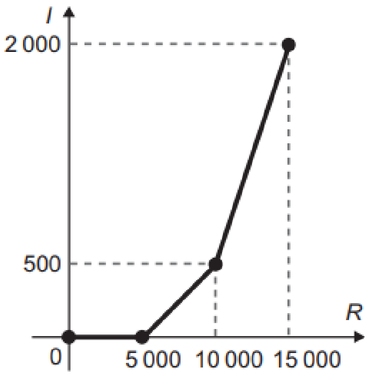
**Questão 154** enem2021

O quadro representa a relação entre o preço de um produto (*R*) e seu respectivo imposto devido (*I*).

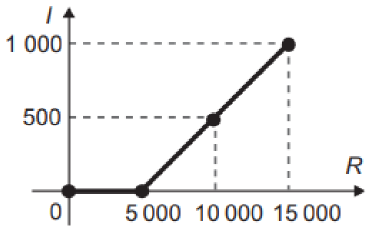
| Preço do produto (*R*) | Imposto devido (*I*) |
|---|---|
| $R \leq 5\,000$ | isento |
| $5\,000 < R \leq 10\,000$ | 10% de $(R - 5\,000)$ |
| $10\,000 < R \leq 15\,000$ | $500 + 30\%$ de $(R - 10\,000)$ |

O gráfico que melhor representa essa relação é

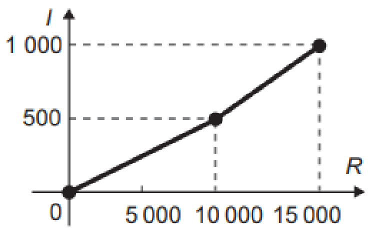
**A**



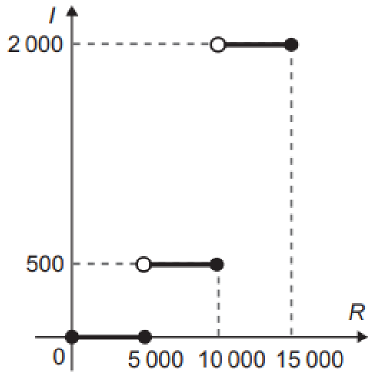

**B**



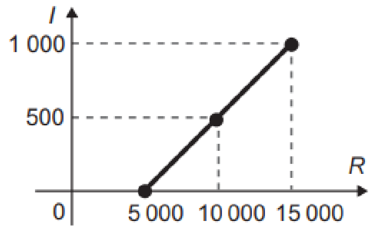

**C**




**D**




**E**




No item acima, observe que os gráficos listados nas opções são formados por segmentos de reta específicos a cada intervalo do domínio. Cabe ao candidato definir qual segmento é adequado a cada condição descrita na tabela dada. Itens semelhantes a esse, incluindo em linguagem textual, são comuns em diversos contextos. Na seção seguinte, propomos alguns desses itens, entre outras aplicações apresentadas neste texto.

**VAMOS PRATICAR**

6) (UFPB) Um navio petroleiro sofreu uma avaria no casco e estava derramando óleo, que se acumulava no oceano de modo a formar uma mancha circular. Exatamente às 8h do dia em que ocorreu a avaria, verificou-se que o raio da mancha media 20 metros e que, a partir daquele instante, a medida do raio r, em metros, variava conforme a função $r(t) = 20 + 0{,}2t$, em que t é o tempo decorrido, medido em horas, a partir das 8h desse dia.

Nesse contexto, é correto afirmar que, exatamente às 18h do mesmo dia, a mancha estava ocupando uma área de

a) $384\pi$ cm$^2$.

b) $474\pi$ cm$^2$.

c) $484\pi$ cm$^2$.

d) $574\pi$ cm$^2$.

e) $584\pi$ cm$^2$.

7) (ENEM 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações: $Q_O = -20 + 4P$ e $Q_D = 46 - 2P$, em que $Q_O$ é quantidade de oferta, $Q_D$ é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando $Q_O$ e $Q_D$ se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5.

b) 11.

c) 13.

d) 23.

e) 33.

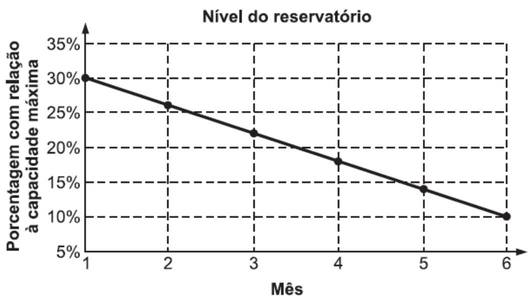
8) (ENEM 2021) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou

esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor, associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Qual é a expressão que determinou o lucro L, em função de x, obtido por esse produtor nesse ano?

a) $L(x) = 50x – 1200$
b) $L(x) = 50x – 12000$
c) $L(x) = 50x + 12000$
d) $L(x) = 500x – 1200$
e) $L(x) = 1200x – 500$

9) (ENEM 2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.




Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

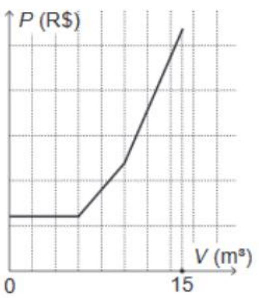
a) 2 meses e meio.
b) 3 meses e meio.
c) 1 mês e meio.
d) 4 meses.
e) 1 mês.

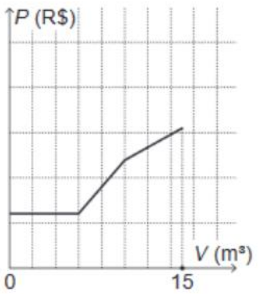
10)(ENEM 2019) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

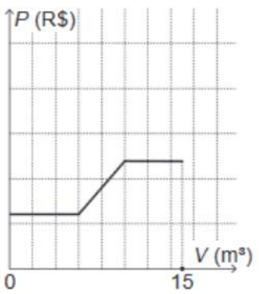
- Faixa 1: para consumo de até 6 $m^3$, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 $m^3$ e até 10 $m^3$, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder 6 $m^3$;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 $m^3$, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder 10 $m^3$.

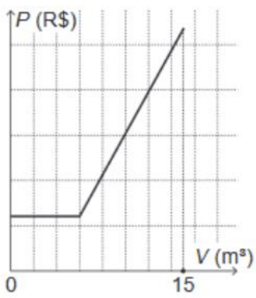
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 $m^3$ por mês.

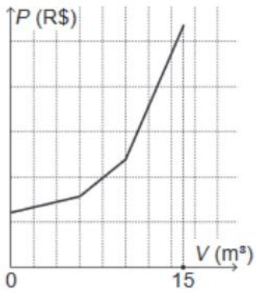
O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é (A)

A



B



C



D



E


# 4- FUNÇÃO QUADRÁTICA

Continuando o trabalho com funções polinomiais, o presente módulo apresenta os primeiros conceitos da Função Quadrática. Para isso, é necessário que, além dos conceitos trabalhados nos módulos anteriores, os alunos tenham conhecimento acerca de áreas de regiões retangulares e do uso da fórmula de Bhaskara na resolução de equações quadráticas.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- Vídeo 3.1 – A fórmula de Bhaskara (https://youtu.be/bKhYqjxvzOk)
- Vídeo 3.2 – O gráfico da parábola (https://youtu.be/7PMqJdWzILo)
- Vídeo 3.3 – O problema do galinheiro (https://youtu.be/-kLC2egD5DM)
- Vídeo 3.4 – Praticando (https://youtu.be/t1P38AQdkvI)

Para a seção *É hora de explorar!*, têm-se os seguintes objetivos:

- Modelar situações-problema por meio de uma função quadrática;
- Identificar o formato de uma função quadrática;
- Identificar parábolas no plano cartesiano como representações de funções quadráticas;
- Interpretar algébrica e graficamente o resultado de equações quadráticas na resolução de problemas e
- Determinar algébrica e graficamente o valor máximo (ou mínimo) de uma função quadrática.

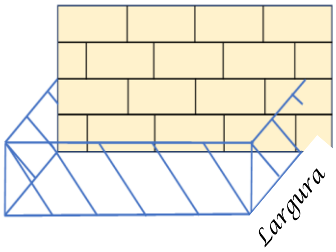
Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolver a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso de calculadora e a intervenção do professor.

Na seção *Função Quadrática: para além da fórmula de Bhaskara*, é hora de formalizar os conceitos de uma função quadrática. Nessa formalização, cabe aos alunos identificar as semelhanças entre uma equação e uma função quadrática e, ao professor, estabelecer as diferenças entre essas, além de ressaltar o papel dos valores obtidos pela fórmula de Bhaskara na determinação do valor máximo (ou mínimo) da função e na resolução de inequações. É importante identificar os coeficientes que compõem uma função quadrática e atribuir significado a esses coeficientes. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar!*, destinada à aplicação dessas formalizações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 25 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito e faz-se a revisão das atividades com os alunos. Vale, então, acrescentar 15 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**É HORA DE EXPLORAR**

Para construir um galinheiro, Raphael conta com uma tela de 2 m de altura, com comprimento total igual a 40 m. Como o terreno é todo cercado por um muro, ele usará a tela para três lados desse galinheiro, o quarto lado será formado pelo muro, conforme mostra a ilustração.




Sabendo que Raphael quer usar toda a tela, na intenção de obter a maior área possível para o galinheiro, faça o que se pede.

a) Uma vez que o galinheiro tem um formato retangular, Raphael registrou algumas possíveis dimensões para ele, calculando também a área da região desejada. Alguns desses registros seguem na tabela abaixo. Complete-a.

| Largura (m) | Comprimento (m) | Área ($m^2$) |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 5 | | |
| 8 | | |
| 10 | | |
| 12 | | |
| 15 | | |
| 19 | | |
| 20 | | |

b) Sendo *x* e *y* medidas genéricas de, respectivamente, largura e comprimento do galinheiro, represente o comprimento *y* em função da largura *x*.

c) A partir do item (b), escreva uma fórmula que nos permita calcular a área *A* do galinheiro apenas em função da largura *x*.

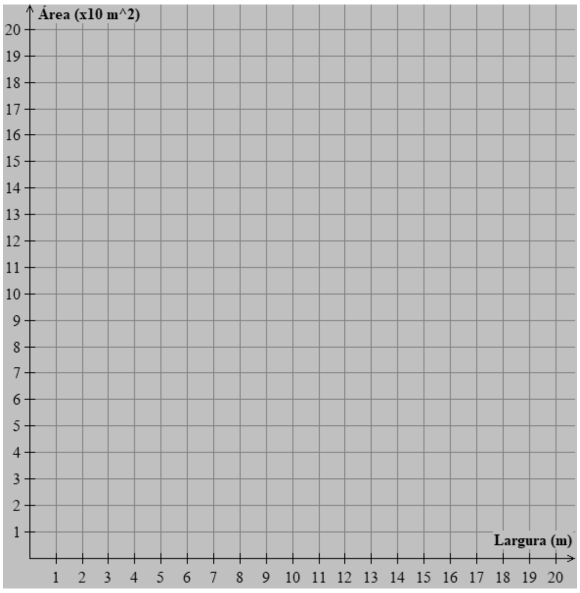
d) A partir do item (c), calcule a área do galinheiro quando a largura for de 3 metros.

e) A partir do item (c), determine quais as dimensões do galinheiro cuja área mede 128 $m^2$.

f) Com auxílio da tabela preenchida em (a) e dos valores obtidos em (c) e (d), represente a função *A* no plano cartesiano a seguir.

g) Identifique, no gráfico obtido em (f), as dimensões do galinheiro cuja área é a maior possível.

h) Escreva suas percepções acerca das áreas representadas no gráfico.


Área (x10 m^2)
Largura (m)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

**FUNÇÃO QUADRÁTICA: PARA ALÉM DA FÓRMULA DE BHASKARA**

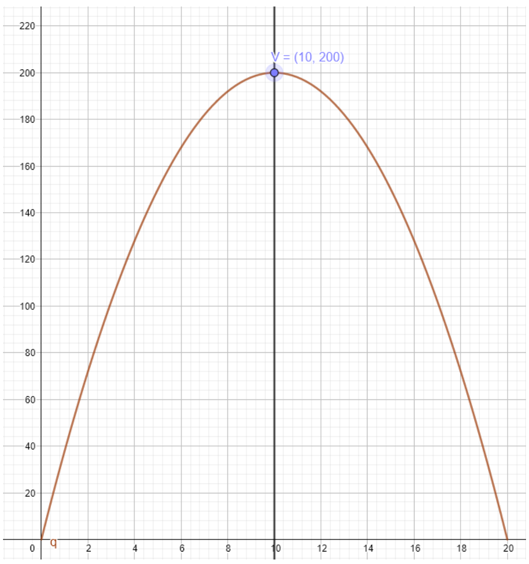
Comecemos analisando a função construída no item (c) da seção *É hora de explorar!*, que descreve a área de uma região retangular em função da medida $x$ de sua largura, a saber, $A(x) = 40x - 2x^2$. O fato de a área $A$ ser calculada a partir de um polinômio de grau 2 nos permite classificar $A(x)$ como uma função polinomial do 2º grau, também conhecida como *Função Quadrática*.

**DEFINIÇÃO**

**Toda função é dita quadrática quando o maior expoente da sua variável independente é igual a dois. De forma geral, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c $\in$ IR, e $a \neq 0$, temos uma função polinomial de 2º grau ou Função Quadrática.**

**O gráfico**

Além da representação algébrica, um dos diferenciais mais importantes da *Função Quadrática* reside no formato do seu gráfico, a saber, curvas parabólicas, ou, simplesmente, <u>parábolas</u>. Ao analisá-las, percebe-se o caráter simétrico dessa representação. Por exemplo, na figura a seguir, temos o gráfico da função $A(x) = 40x - 2x^2$, no qual se nota um crescimento das áreas quando a largura varia de 0 a 10 metros. No entanto, quando essas medidas variam entre 10 e 20 metros, os valores registrados para $A(x)$ diminuem em um ritmo simétrico àquele registrado no intervalo anterior. Essa simetria é uma importante característica desse modelo.




O ponto $V(10, 200)$ destacado no ápice da parábola é chamado de <u>vértice</u> ou ponto máximo. Nesse texto, tomamos esse ponto como o mais importante da função, pois sobre ele traçamos o eixo de simetria da parábola, que, por que sua vez, possibilita a análise dos seus intervalos de crescimento e decrescimento. É importante ressaltar que, para que uma parábola represente uma *Função Quadrática*, o eixo de simetria deve ser paralelo ao eixo y.

**Os zeros e a fórmula de Bhaskara**

Além dessas informações, talvez você, aluno, esteja se perguntando onde a fórmula Bhaskara aparece nesse contexto. Pois bem! Pensando nisso, vamos aos seguintes questionamentos:

a) Quais são os resultados encontrados ao aplicarmos a fórmula de Bhaskara ao terno (a, b, c) = (-2, 40, 0)?
b) Os valores encontrados representam quais resultados no gráfico de $A(x) = 40x - 2x^2$?

As respostas a essas perguntas nos levam a um novo conceito: os <u>zeros</u> (ou <u>raízes</u>) da função. A aplicação da fórmula de Bhaskara ao terno (a, b, c) = (-2, 40, 0) só tem sentido quando a intenção dessa é resolver a equação $0 = 40x - 2x^2$. Nessas circunstâncias, estamos em busca dos valores de $x$ que satisfazem a igualdade $A(x) = 0$, ou seja, larguras para as quais a área é nula.

No caso da função $A(x) = 40x - 2x^2$, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 20$, obtidas igualando-se f(x) a zero. Tomando $40x - 2x^2 = 0$, temos $x.(40 - 2x) = 0$. Como o produto é igual a zero, um de seus fatores deve ser zero. Assim, ou $x = 0$, ou $40 - 2x = 0$.

Para uma função de 2º grau completa, com a, b, c $\neq$ 0, podemos usar o completamento de quadrados ou a fórmula de Bhaskara. Como exemplo, podemos determinar as raízes da função $f(x) = x^2 - 3x + 10$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 10$$

$$Para\ cálculo\ das\ raízes, igualamos\ f(x) a\ zero$$

$$Portanto, x^2 - 3x - 10 = 0.$$

$$Utilizando\ a\ fórmula\ de\ Bhaskara,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, e\ \Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$Então, \Delta = (-3)^2 - 4.1.(-10) = 9 + 40 = 49$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2.1} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$Temos\ então\ duas\ raízes\ reais,$$
$$x_1 = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2\ e\ x_2 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Generalizando, as raízes de *f(x) = a·x² + b·x + c* podem ser determinadas por meio da fórmula de Bhaskara, deduzida a seguir.

- Como a ≠ 0, podemos dividir toda a igualdade por a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$;
- Subtraindo o termo $\frac{c}{a}$ em ambos os lados da igualdade, temos: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$;
- Para obtermos um trinômio do quadrado perfeito, completamos o quadrado no primeiro membro da igualdade e adicionamos o mesmo valor ao segundo membro para mantermos o equilíbrio da equação: $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$;
- Fatorando o trinômio do quadrado perfeito: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$;
- Organizando as parcelas à direita da igualdade: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$;
- O número que elevado ao quadrado representa o resultado dessa expressão pode ser positivo ou negativo, então: $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;
- Resolvendo o módulo: $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;
- Subtraindo o termo $\frac{b}{2a}$ em ambos os lados da igualdade: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;
- Organizando as parcelas à direita da igualdade: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ .

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante da equação, obtemos as raízes:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

**O vértice**

Retomando o gráfico da função *A(x) = 40x – 2x²,* denotemos as coordenadas do vértice *V(10, 200)* por $x_v = 10$ e $y_v = 200$. Sobre esses valores, têm-se as seguintes perguntas:

1. Que relação podemos estabelecer entre $x_v = 10$ e as raízes $x_1 = 0$ e $x_2 = 20$ encontradas para a função *A(x)*?
2. Como o resultado $x_v = 10$ nos permite encontrar o maior valor para a área, a saber, $y_v = 200$?
3. O que fazer se a função tiver nenhuma ou apenas uma raiz?
4. 

Observe que, para duas raízes distintas, o valor $x_V$ é igual à média aritmética das raízes da função quadrática e, para esse valor, temos o valor máximo para a função *A(x)*, ou seja, $y_V = A(x_V)$.

Generalizando essas relações para as raízes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, escrevemos:

$$x_V = \frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Já para o $y_V$, temos $y_V = f(x_V)$, ou seja:

$$\begin{aligned} y_V &= f(x_V) = a.x_V^2 + b.x_V + c = \\ &= a.\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \\ &= a.\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \end{aligned}$$

Tomando novamente $\Delta = b^2 - 4ac$, temos $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

De posse desses resultados, definimos o vértice da parábola como $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

**TOME NOTA**
**Na hora de construir o gráfico de uma função quadrática, convém usar o vértice como ponto de partida, para um melhor esboço da parábola. Após determinar as coordenadas $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, atribuem-se novas abscissas, simetricamente vizinhas a $x_V$. A seguir, calculam-se as ordenadas correspondentes e, em seguida, plotam-se os pontos obtidos. Essa estratégia, que nos permite um melhor esboço do gráfico, é especialmente conveniente em casos cujas raízes sejam idênticas (raiz única) ou inexistentes em IR.**

Uma alternativa ao procedimento anterior é começar determinando as raízes, $x_1$ e $x_2$. A média aritmética delas nos fornece $x_V$, com o qual podemos obter $y_V = f(x_V)$, tal como sugerido nos itens (c), (d) e (e) desta seção. Lembrem-se de que essa estratégia só é válida para $x_1 \neq x_2$; do contrário, retomemos o procedimento descrito no parágrafo anterior.

**A imagem**

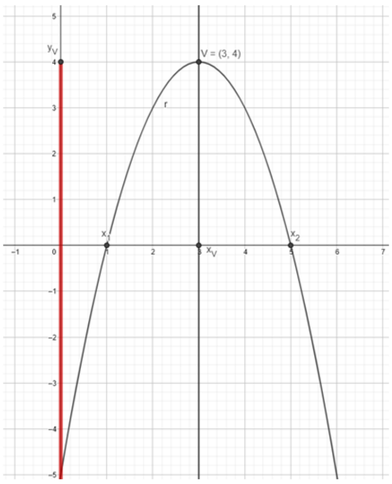
Além do eixo de simetria, o vértice também auxilia na determinação da imagem da função, visto que ele pode ser interpretado como ponto máximo (ou mínimo) da parábola. Por exemplo, o gráfico da função $A(x) = 40x - 2x^2$ evidencia uma área máxima de 200 $m^2$. Logo, a imagem da função $A(x)$ é definida como o conjunto dos valores não negativos menores ou iguais a 200.

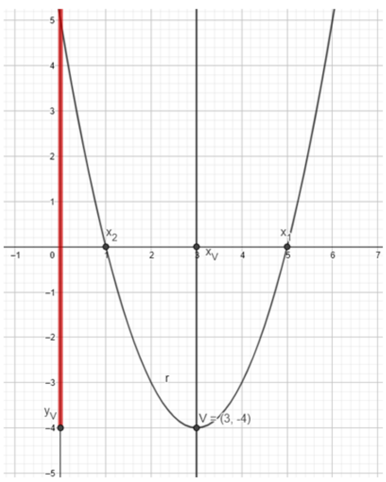
Quando nos referenciamos ao vértice como ponto máximo (ou mínimo) da parábola, precisamos falar da concavidade (abertura) dessa. Para isso, precisamos retomar a forma algébrica de uma função quadrática, $f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$, na qual o coeficiente $a$ determina essa concavidade. Na função $A(x) = 40x - 2x^2$, temos uma concavidade voltada para baixo devido ao coeficiente $a = -2 < 0$. Tal direção é a mesma para qualquer função quadrática com $a < 0$. Sabendo disso, seguem as perguntas:

a) A concavidade estaria também voltada para baixo se $a > 0$?
b) Sendo a = 0, a função ainda seria de segundo grau?

Caso a parábola tenha o valor de $a > 0$, sua concavidade será voltada para cima e o $y_V$ do vértice determinará o valor mínimo para a função. Caso contrário ($a < 0$), a concavidade será voltada para baixo e teremos o valor de máximo para a função.

Na figura a seguir, temos exemplos das funções $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ e $g(x) = x^2 - 6x + 5$, cujas parábolas têm concavidade para baixo *(f)* e para cima *(g)*, respectivamente. Nessa ordem, os vértices $V_f(3, 4)$ e $V_g(3, -4)$ representam o ponto de máximo e o ponto de mínimo em cada uma das respectivas funções. Em ambos os casos, as parábolas admitem raízes reais. No entanto, é importante ressaltar que, mesmo que não haja raiz



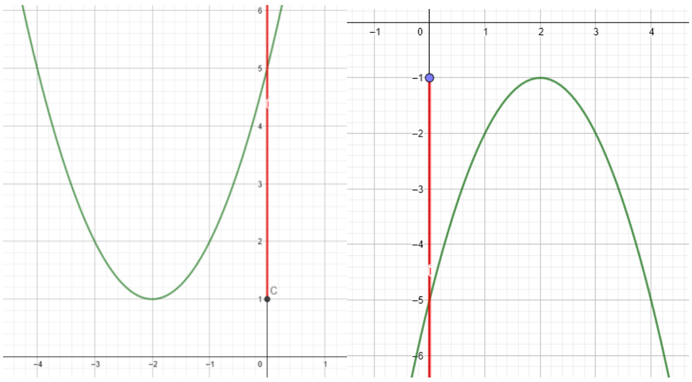
real, caso que trataremos a seguir e é caracterizado por $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a parábola sempre admite ponto mínimo (ou máximo), uma vez que os valores $x_v$ e $y_v$ dependem apenas dos coeficientes *a*, *b* e *c*.

Retomando as discussões acerca da imagem de uma função quadrática, observe que apesar de termos um domínio real para $f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$, o conjunto imagem será determinado analisando-se o vértice e a concavidade da parábola. Caso a parábola tenha concavidade voltada para baixo ($a < 0$), o conjunto imagem será dado por $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq y_V\}$; do contrário ($a > 0$), teremos $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq y_V\}$.

Observando a maior área possível para o exemplo da seção *É hora de explorar!*, podemos dizer que, para todo valor de x, y assume valores menores ou iguais a 200, ou seja, seu conjunto imagem pode ser dado por $Im = \{A \in IR_+ / A \leq 200\}$, devido ao fato de concavidade voltada para baixo e de o vértice ser o ponto máximo da parábola.

Já nos gráficos apresentados na última figura, os intervalos em destaque nos eixos das ordenadas representam o conjunto imagem das funções *f(x)* e *g(x)*, denotados por $Im(f) = \{y \in IR / y \leq 4\}$ e $Im(g) = \{y \in IR / y \geq -4\}$.

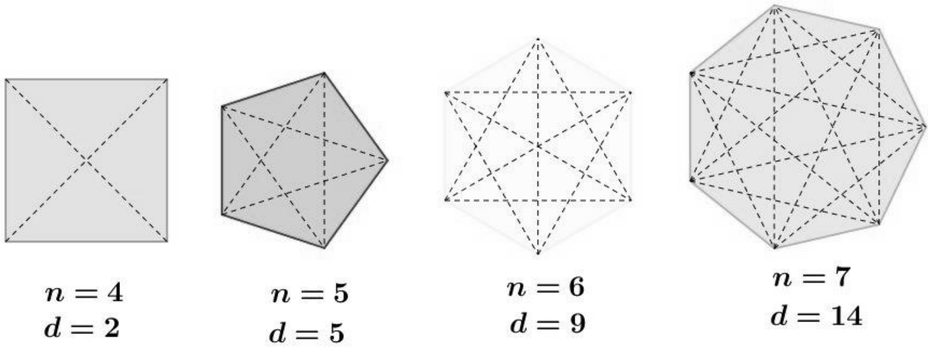
Observando os gráficos a seguir, não encontramos interseções entre a parábola e o eixo. Isso ocorre sempre que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Para casos como esses, o vértice pode ser dado por $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.



A fim de explorar os conceitos apresentados neste módulo e outras possibilidades dentro do contexto de uma função quadrática, a seção seguinte traz alguns exercícios para serem discutidos em sala com os alunos.

**VAMOS PRATICAR**

11) (Acervo do autor) A figura a seguir apresenta alguns polígonos e suas respectivas diagonais. Sabe-se que o número de diagonais (d) que um polígono possui varia de acordo com o número de lados (n) desse polígono. Ao analisar a sequência mostrada na figura, um aluno conclui que o número de diagonais e o número de lados de um polígono se relacionam através da função $d(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.




A partir dessas informações, é possível afirmar que, num polígono com 10 lados, o número de diagonais é

a) 6.
b) 22.
c) 35.
d) 44.
e) 70.

12) (ENEM 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no

a) 19° dia.
b) 20° dia.
c) 29° dia.

d) 30° dia.
e) 60° dia.

13) (ENEM 2016) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola: $y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como essa é igual a 2/3 da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18
b) 20
c) 36
d) 45
e) 54

14) (ENEM 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial *f*, de grau menor que 3, para alterar as notas *x* da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

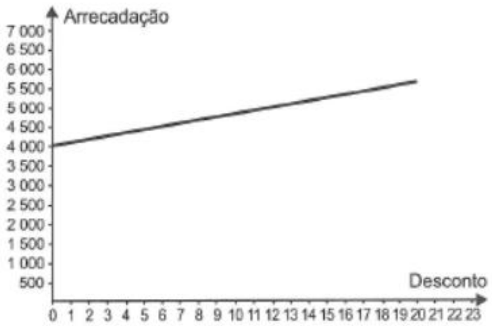
A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$
b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$
c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$
d) $y = \frac{4}{5}x^2 + 2x$
e) $y = x$

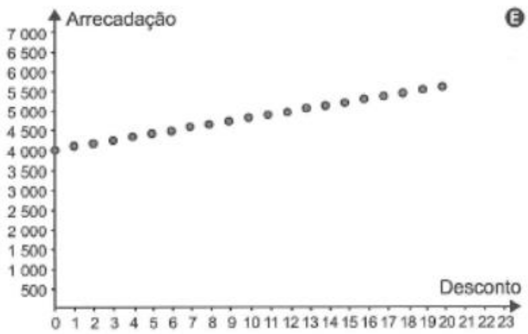
15)(ENEM 2021) O administrador de um teatro percebeu que, com o ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso.

O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é (E)

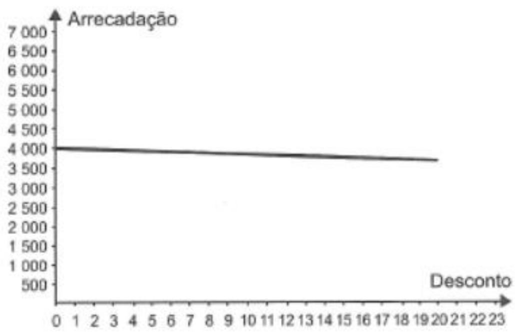
A



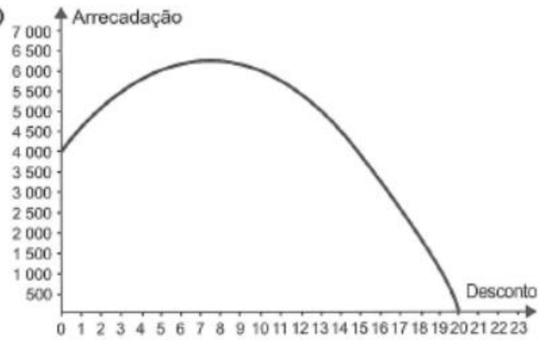

B



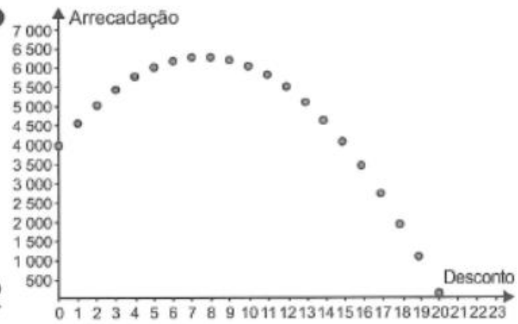

C




D




E



# 5- FUNÇÃO EXPONENCIAL

Novos modelos de funções serão apresentados a partir deste módulo. Nesse caso, iniciamos pela Função Exponencial. Para isso, é necessário que, além de conceitos trabalhados em módulos anteriores, os alunos tenham conhecimento acerca de potências e radicais, bem como de suas propriedades e transições. Cálculos com porcentagens sucessivas também serão revisitados neste módulo.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- Vídeo 4.1 – Potências e desigualdades (https://youtu.be/bmHuZ8Y6R8w)
- Vídeo 4.2 – A transmissão da COVID e a função exponencial (https://youtu.be/Q0vH0wrQlaU)
- Vídeo 4.3 – O gráfico da função exponencial (https://youtu.be/WKN1ozsfyuY)
- Vídeo 4.4 – Praticando 4 (https://youtu.be/E9MiR_tM6I0)

Através da situação-problema proposta na seção *É hora de explorar!* e também das atividades de fixação, na seção *Vamos praticar!*, os alunos poderão:

- Modelar situações-problema por meio de uma função exponencial;
- Identificar o formato de uma função exponencial;
- Identificar curvas exponenciais no plano cartesiano e
- Interpretar algébrica e graficamente o resultado de equações exponenciais na resolução de problemas.

Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolver a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso de calculadora e a intervenção do professor, que deve cuidar para que os alunos usem corretamente a ideia de porcentagens sucessivas.

Já na seção *Crescimento fora do ritmo: é isso mesmo?*, é hora de formalizar os conceitos de uma função exponencial. Nessa formalização, cabe aos alunos identificar os termos que compõem uma função exponencial e, ao professor, atribuir significado a esses termos. É importante estabelecer as condições para a existência de uma função exponencial e também diferenciá-la de uma função afim, no tocante à taxa de variação. Pequenos *spoilers* sobre logaritmos são bem-vindos neste módulo. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar*!, destinada à aplicação dessas formalizações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 25 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito e faz-se a revisão das atividades com os alunos. Vale, então, acrescentar 15 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**É HORA DE EXPLORAR**

No sorteio de uma “ação entre amigos”, Júlia foi contemplada com um PIX de R$ 20000,00. A princípio, seus planos para esse prêmio eram voltados para obter a licença para dirigir e comprar uma moto. No entanto, por ainda ter apenas 17 anos, ela optou por guardar o dinheiro durante um ano. Daí, já com 18 anos, ela poderá usar o montante acumulado para cumprir essas metas. A conselho de seu pai, Júlia aplicou todo o prêmio em um fundo de investimento cujos rendimentos mensais ocorriam sob uma taxa constante de 1%. Sabendo que, nesse fundo de investimento, os rendimentos são calculados sob um regime de juros compostos e que não houve saques ou novos depósitos durante o período mencionado, faça o que se pede.

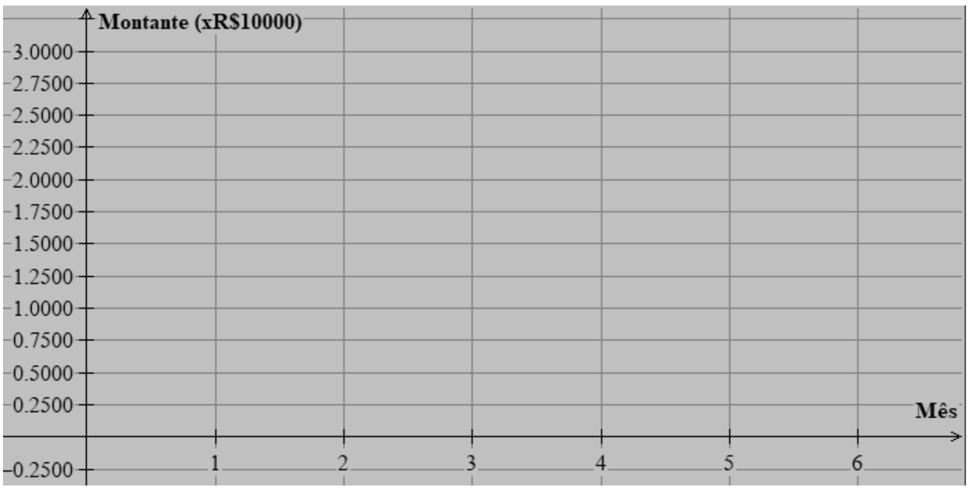
a) A fim de controlar o saldo ao longo dos meses, Júlia montou uma planilha na qual eram registrados os rendimentos e o montante acumulado a cada mês. A tabela a seguir esboça os primeiros lançamentos nessa planilha. Complete-a.

b) Uma vez que o regime adotado nesse fundo de investimentos é de juros

| Mês | Saldo anterior (R$) | Juros (R$) | Saldo Final (R$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 20000,00 | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |

compostos, o saldo final de cada mês pode ser escrito como um montante *M.* Escreva uma fórmula que descreva o montante M ao final do mês *t*.

c) A fórmula obtida em (b) é classificada como uma função exponencial, cujo gráfico tem características distintas das funções afim e quadrática, já estudadas em módulos anteriores.



d) Para ilustrar essas diferenças, represente essa função no plano cartesiano a seguir, usando como referências os valores preenchidos em (a).
e) Use a fórmula obtida em (b) para determinar qual valor Júlia terá à disposição para cumprir suas metas ao final do período de um ano.
f) A partir do item (d), determine a percentagem que o rendimento anual representa em relação ao capital investido.
g) Explique por que, em um regime de juro compostos, um capital com rendimentos mensais de 1% não gera um rendimento anual de 12%.

**CRESCIMENTO FORA DO RITMO: É ISSO MESMO?**

Comecemos analisando a função construída na seção *É hora de explorar!*, que descreve o saldo final (ou montante) de uma aplicação financeira ao longo dos meses, a saber, $M(t) = 20000 \cdot (1{,}01)^t$. O fato de esse montante ser calculado a partir de uma potência com expoente variável nos permite classificar *M(t)* como uma *Função Exponencial*.

Uma função é dita exponencial quando pode ser representada por $y = a^x$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$. Sobre as restrições, cabem alguns questionamentos:

a) Que tipo de função teríamos para $a = 1$?
b) E se $a < 0$?
c) Qual é o papel do R$ 20000,00 na função $M(t) = 20000 \cdot (1{,}01)^t$?

Obedecendo às restrições acima, a função exponencial também pode ser apresentada na forma $y = b \cdot a^x$, na qual o coeficiente *b* representa o valor inicial da função. O modelo $M(t) = 20000 \cdot (1{,}01)^t$ é uma adequação a esse formato, com $b = 20000$ e $a = 1{,}01$.

**O gráfico**

Ainda sobre a função $M(t) = 20000 \cdot (1{,}01)^t$, temos, no gráfico construído para essa na seção anterior, uma curva visualmente próxima de uma semirreta. Entretanto, *M(t)* foi identificada como uma função exponencial, não uma função afim. Nesse cenário, é importante retomar as definições mencionadas no *Módulo 2 – Função Afim.*

*A representação gráfica de uma função afim se dá por pontos colineares que formam retas, semirretas ou segmentos de reta, com uma inclinação constante cujo valor é dado por* $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Se aplicarmos essa observação às coordenadas consecutivas registradas no item (a) da seção *É hora de explorar!*, veremos que a inclinação não é constante. Na verdade,

**TOME NOTA**

**Conceitualmente, a função exponencial apresenta um gráfico estritamente crescente, caso $a > 1$, ou estritamente decrescente, para $0 < a < 1$. Um fato importante sobre a função exponencial crescente é que sua taxa de variação *(m)* entre dois intervalos consecutivos é cada vez maior, tal como exemplificado na situação-problema proposta na seção anterior.**

os resultados obtidos para $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ equivalem aos rendimentos registrados na coluna "Juros (R$)", que crescem exponencialmente, tal como o montante *M(t)*.

Embora *M(t) = 20000·(1,01)*$^t$ seja uma função exponencial crescente, usaremos, para uma melhor visualização desse crescimento, a função $\mathrm{y} = 2^{\mathrm{x}}$, apresentada no vídeo 4.2, com referências à ideia inicial da pandemia do coronavírus.

Em $\mathrm{y} = 2^{\mathrm{x}}$, sendo *x* intervalos de tempo de tamanhos iguais, poderíamos dizer que, caso o número de pessoas infectadas seja igual ao dobro do período anterior, poderíamos construir a relação matemática seguinte:

$$\mathrm{t} = 0 \rightarrow 2^0 = 1$$

$$\mathrm{t} = 1 \rightarrow 2^1 = 2$$

$$\mathrm{t} = 2 \rightarrow 2^2 = 2 \cdot 2$$

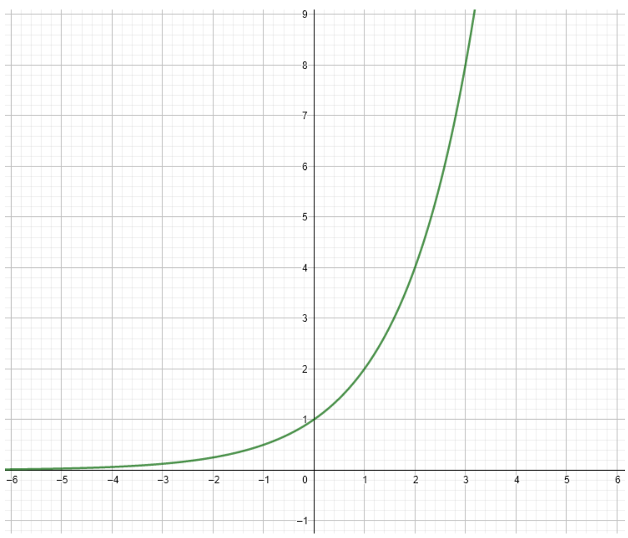
$$\mathrm{t} = 3 \rightarrow 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

...

$$\mathrm{t} = \mathrm{x} \rightarrow 2^{\mathrm{x}} = 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$$

Para o primeiro caso, com $t = 0$, temos o crescimento exponencial sempre partindo de um infectado inicial. Nesse caso, com *a > 1*, quando aumentamos o valor de *x*, *y* também aumenta, caracterizando o crescimento de $\mathrm{y} = 2^{\mathrm{x}}$.

A função exponencial $\mathrm{y} = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ tem domínio real, isto é, podemos admitir qualquer valor de $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ para o expoente. Entretanto, como a base *a* deve ser estritamente positiva e diferente de 1, o conjunto imagem será dado pelo conjunto dos números reais positivos, ou seja, $\mathrm{y} \in \mathbb{R}_+^*$. Tal generalização é exemplificada na figura a seguir, com o gráfico da função $\mathrm{y} = 2^{\mathrm{x}}$.



No contexto do vídeo 4.2, o domínio da função $y = 2^x$ é restrito a valores não negativos de *x*, visto que esses se referem a intervalos de tempo positivos. Nesse caso, no gráfico acima, a porção à esquerda do eixo y seria desprezada. Fato semelhante ocorre na função $M(t) = 20000 \cdot (1{,}01)^t$, em que os valores de *t* se referem à duração do investimento, contada em meses.

**O domínio**

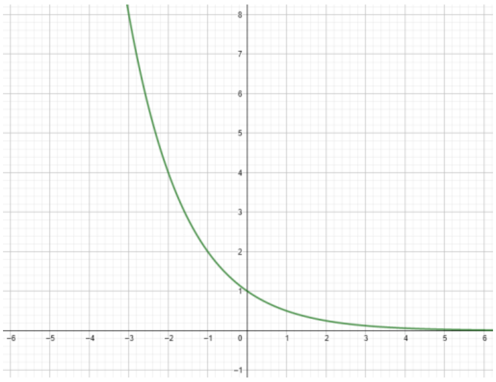
Ainda sobre o domínio das funções exponenciais, cabe ressaltar a possibilidade de trabalharmos com expoentes irracionais, tais como o valor *x* que satisfaz a igualdade $10 = 2^x$, na função $y = 2^x$, ou, ainda, o tempo necessário para duplicar o valor investido por Júlia, na situação-problema da seção *É hora de explorar!*.

d) O que fazer nessas circunstâncias?

e) Existem teclas em sua calculadora úteis a isso?

Nas condições citadas, os expoentes podem ser escritos com o auxílio dos logaritmos, a saber, $x = \log_2 10$ e $t = \log_{1{,}01} 2$, notações que serão explanadas no próximo módulo.

Quanto à função exponencial decrescente, a base *a* precisa estar entre 0 e 1, já que, para valores nesse intervalo, quanto maior for seu expoente, menor será o resultado da potência. O gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, na figura a seguir, exemplifica isso.



Analisando a definição da função exponencial e observando os gráficos apresentados, sempre que tivermos $x = 0$, teremos $y = 1$. Caso haja uma constante multiplicando a potência, como no caso $y = b \cdot a^x$, o valor inicial será dado por essa constante. Um exemplo dessa adaptação é a função $M(t) = 20000 \cdot (1{,}01)^t$, na qual $b = M(0) =$ *R\$ 20000,00*.

**VAMOS PRATICAR**

16) (ENEM 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população: $p(t) = 40.2^{3t}$, em que t é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.
b) reduzida à metade.
c) reduzida a dois terços.
d) duplicada.
e) triplicada.

17) (PUC – MG Adaptada) De acordo com os dados de uma pesquisa, a população de certa região de Minas Gerais vem decrescendo em função do tempo, contado em anos, segundo a equação $P(t) = 8000 \cdot 2^{-0,25t}$, em que P é a população no ano t e 8000 é o número atual de habitantes nessa região.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o tempo necessário para que a população dessa cidade fique reduzida a 2000 habitantes é igual a

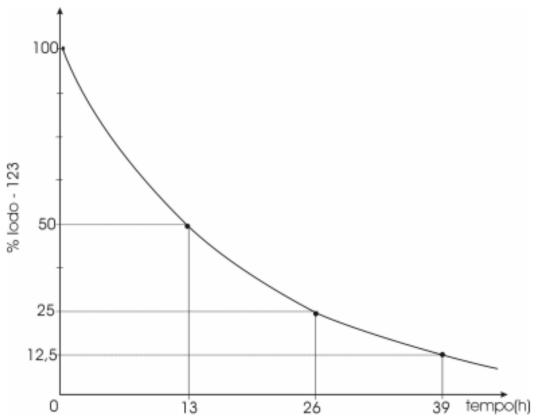
a) 8 anos.
b) 10 anos.
c) 12 anos.
d) 14 anos.
e) 16 anos.

18) (ENEM 2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia, adquirindo novas máquinas, e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

a) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8000$
b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$
c) $P(t) = 4000 \cdot t^{-1} + 8000$
d) $P(t) = 8000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
e) $P(t) = 8000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

19) (UFRN Adaptada) A cintilografia, técnica utilizada para o diagnóstico de doenças, consiste em se introduzir uma substância radioativa no organismo, para se obter a imagem de determinado órgão. A duração do efeito no organismo está relacionada com a meia-vida dessa substância, tempo necessário para que sua quantidade original se reduza à metade. Essa redução ocorre exponencialmente.

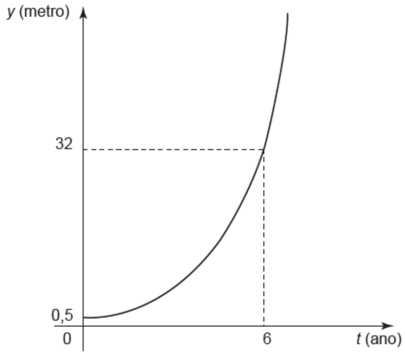



O Iodo-123, utilizado no diagnóstico de problemas da tireoide, tem meia-vida de 13 horas. Isso significa que, a cada intervalo de 13 horas, a quantidade de Iodo-123 no organismo equivale a 50% da quantidade existente no início desse intervalo, conforme o gráfico a seguir.

Assim, se uma dose de Iodo-123 for ministrada a um paciente às 8h de determinado dia, o percentual da quantidade original que ainda permanecerá em seu organismo, às 16h30min do dia seguinte, será

a) menor que 12,5%.
b) maior que 12,5% e menor que 25%.
c) maior que 25% e menor que 37,5%.
d) maior que 37,5% e menor que 50%.
e) maior que 50%.

20) (ENEM 2016) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.




Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3.
b) 4.
c) 6.
d) $\log_2 7$.
e) $\log_2 15$.

# 6- FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma vez trabalhadas as ideias acerca da função exponencial, agora é hora de abordar sua recíproca: a Função Logarítmica. Para isso, é necessário que o aluno entenda o logaritmo como uma representação alternativa de uma potência com expoente (ir)racional. O uso da tecla LOG, na calculadora, será importante neste módulo. Introduziremos a ideia de função inversa para que o aluno possa entender a função logarítmica como inversa da exponencial.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- A função inversa (https://youtu.be/y5YO1bS44gE)
- Propriedades do logaritmo (https://youtu.be/np5l7L9xlwU)
- Função logarítmica (https://youtu.be/F3KmuAhm_ks)
- Praticando (https://youtu.be/h1p4A5PI1OY)

A situação-problema proposta na seção *A função inversa* tem como objetivo apresentar o conceito de função inversa através de um exemplo. Espera-se que os alunos sejam capazes de entender de que se trata a função inversa e como ela pode ser calculada.

A situação-problema proposta na seção *É hora de explorar!* já apresenta uma função uma função logarítmica, aplicada ao contexto dos terremotos. Ao lidar com esse contexto, os alunos serão capazes de:

- Resolver equações logarítmicas e calcular logaritmos, com ou sem auxílio de calculadoras;
- Identificar curvas logarítmicas no plano cartesiano;
- Compreender a função logarítmica como um modelo capaz de descrever pequenas variações de uma grandeza em detrimento de variações exponenciais da variável dependente e
- Entender a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolver a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso de calculadora e a intervenção do professor, que deve cuidar para que os alunos usem as notações científicas corretamente.

Na seção *Crescimento lento: como descrevê-lo?***,** é hora de formalizar os conceitos de uma função logarítmica. Nessa formalização, cabe aos alunos identificar as variações das grandezas (in)dependentes e, ao professor, caracterizar a função logarítmica com base nessas variações. É importante considerar as restrições típicas desse modelo e apresentar outras aplicações em áreas diversas. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar!*, destinada à aplicação dessas formalizações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 25 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito e faz-se a revisão das atividades com os alunos. Vale, então, acrescentar 15 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**A FUNÇÃO INVERSA**

No capítulo anterior resolvemos o problema da Júlia. Ela precisava saber qual seria o montante obtido em uma aplicação financeira, a juros de 1%, durante 12 meses. Imagine uma outra possível situação. Júlia recebe os R$2000,00 e quer aplicar o dinheiro, a uma taxa de 1% ao mês, até que ela alcance pelo menos R$3000,00.

A tabela a seguir pode nos ajudar a entender o objetivo de Júlia. Nela, em cada mês, foi calculado o valor do montante ao final de cada mês, até o 18º mês.

| Tempo da aplicação | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor obtido | R$ 2.276,19 | R$ 2.298,95 | R$ 2.321,94 | R$ 2.345,16 | R$ 2.368,61 | R$ 2.392,29 |

| Tempo da aplicação | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor obtido | R$ 2.144,27 | R$ 2.165,71 | R$ 2.187,37 | R$ 2.209,24 | R$ 2.231,34 | R$ 2.253,65 |

| Tempo da aplicação | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor obtido | R$ 2.144,27 | R$ 2.165,71 | R$ 2.187,37 | R$ 2.209,24 | R$ 2.231,34 | R$ 2.253,65 |

Observe que ainda não foi atingido o objetivo.

Para resolvermos esse problema podemos pensar na função exponencial obtida no capítulo anterior, em que o montante variava de acordo com o tempo.

$$M(t) = 2000.(1{,}01)^t$$

Nesse caso, a variável independente era o tempo e o montante era nossa variável dependente. Determinamos o valor de $t$ e encontramos o valor de $M(t)$.

Agora, precisamos inverter essa situação. Já determinamos o montante a ser obtido e agora calcularemos o tempo necessário para que Júlia obtenha esse valor.

Para isso precisamos entender o que é uma função inversa.

**DEFINIÇÃO**

A função inversa, definida por $f^{-1}(x)$, como o próprio nome sugere, faz o inverso do que a função $f(x)$ determina. Ou seja, sendo $f: A \to B$ a função inversa de $f$ será $f^{-1}: B \to A$

Assim, se trocarmos os valores de y e x entre si e reescrevermos em função de y, obteremos a função inversa. Se y = 3x, trocando x e y, temos x=3y, reescrevendo em função de y, temos y = x/3.

A função só admite inversa se ela for bijetora, ou seja, para cada elemento do domínio existe um único elemento no contradomínio e, além disso, o contradomínio é o conjunto imagem.

No problema anterior, M(t) = y e t = x, assim,

$$y = 2000.(1{,}01)^x$$

Invertendo-se os valores de x e y, temos,

$$x = 2000.(1{,}01)^y$$

Para reescrevermos em função de y, precisaremos da função logarítmica.

$$\log x = \log\,[2000.\,(1{,}01)^{y}]$$

$$\log[2000.\,(1{,}01)^{y}] = \log x$$

$$\log 2000 + \log(1{,}01)^{y} = \log x$$

$$\log 2000 + y.\log(1{,}01) = \log x$$

$$y.\log(1{,}01) = \log x - \log 2000$$

$$y. = \frac{\log x - \log 2000}{\log\,(1{,}01)}$$

No exercício, precisávamos determinar o tempo para que o valor fosse pelo menos R$3000,00, então, x = 3000. Assim, temos,

$$y = \frac{\log 3000 - \log 2000}{\log(1{,}01)}$$

$$y = \frac{\log\left(\frac{3000}{2000}\right)}{\log(1{,}01)}$$

$$y = \frac{\log(1{,}5)}{\log(1{,}01)}$$

Usando uma calculadora, obtemos $\log(1{,}5) \approx 0{,}1761$ e $\log(1{,}01) \approx 0{,}0043$. Portanto, $y = \frac{0{,}1761}{0{,}0043} \approx 40{,}95\, meses$.

Então, o período mínimo da aplicação de Júlia será de 41 meses para que seu dinheiro atinja o valor de R$3000,00, pelo menos.

**PROPRIEDADES LOGARÍTMICAS**

Uma vez que a função logarítmica se correlaciona com a função exponencial, as propriedades da função exponencial podem ser adaptadas ao contexto das funções logarítmicas. Sendo assim, nesta subseção, apresentamos as três principais propriedades dos logaritmos.

- Propriedade (I) - Logaritmo de um produto: $\log a \cdot b = \log a + \log b$.

<u>Demonstração</u>

De $\log_{10} a = x$ e $\log_{10} b = y$, temos $a = 10^x$ e $b = 10^y$.

Tomando agora $\log_{10} \mathrm{a.b} = \mathrm{z}$, temos, $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = 10^{\mathrm{z}}$.

Assim, $10^{\mathrm{x}} \cdot 10^{\mathrm{y}} = 10^{\mathrm{x+y}} = 10^{\mathrm{z}}$, então, $\mathrm{x + y = z}$.

Isto é: $\log \mathrm{a} + \log \mathrm{b} = \log \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$.

- Propriedade (II) - Logaritmo de um quociente: $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

<u>Demonstração</u>

De $\log_{10} a = x$ e $\log_{10} b = y$, temos $a = 10^x$ e $b = 10^y$.

Tomando agora $\log_{10} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \mathrm{w}$, temos, $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = 10^{\mathrm{w}}$.

Assim, $\frac{10^{\mathrm{x}}}{10^{\mathrm{y}}} = 10^{\mathrm{x-y}} = 10^{\mathrm{z}}$, então, $\mathrm{x - y = z}$.

Isto é: $\log \mathrm{a} - \log \mathrm{b} = \log \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$.

- Propriedade (III) - Logaritmo de uma potência: $\log \mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \mathrm{b} \cdot \log \mathrm{a}$.

<u>Demonstração</u>

De $\log \mathrm{a}^{\mathrm{b}} = \mathrm{x}$ e $\log \mathrm{a} = \mathrm{y}$, temos $\mathrm{a}^{\mathrm{b}} = 10^{\mathrm{x}}$ (i) e $\mathrm{a} = 10^{\mathrm{y}}$ (ii).

Substituindo (ii) em (i): $(10^{\mathrm{y}})^{\mathrm{b}} = 10^{\mathrm{x}}$.

Assim, $10^{\mathrm{y.b}} = 10^{\mathrm{x}}$, então, $\mathrm{b.y = x}$.

Isto é: $\mathrm{b}.\log \mathrm{a} = \log \mathrm{a}^{\mathrm{b}}$.

Essas três propriedades são muito utilizadas em itens de avaliações externas, nas quais o uso da calculadora não é permitido. Veja um exemplo na imagem a seguir.

(UFPR) Sabendo que log2 = 0,301 e log7 = 0,845, qual será o valor de log28?

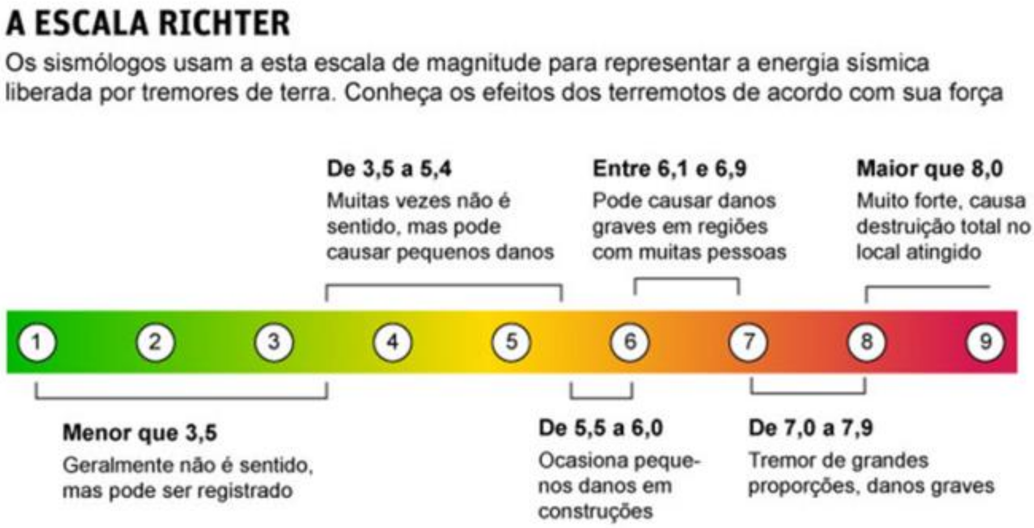
a) 1,107.
b) 1,146.
c) 1,447.
d) 1,690.
e) 2,107.

Embora não seja se trate de um problema contextualizado, o item apresentado exige do candidato domínio pleno das propriedades aqui mencionadas. Segue uma sugestão de resolução, que pode ser explorada com os alunos a fim de conduzi-los à alternativa correta, a saber, alternativa C.

- $\text{Log}(28) = \log(2^2 \cdot 7) = \log(2^2) + \log(7) = 2 \cdot \log(2) + \log(7) = 2 \cdot 0{,}301 + 0{,}845 = 1{,}447$

**É HORA DE EXPLORAR**

Criada há cerca de 80 anos pelos norte-americanos Charles Richter e Bueno Gutemberg, a escala Richter classifica a magnitude dos terremotos em função da quantidade de energia liberada. A escala vai de 1 a 9. Segundo o próprio Richter, 9 é a maior magnitude possível, não por uma limitação da escala, mas, sim, por uma limitação do próprio planeta. No quadro a seguir são descritas as características dos terremotos de acordo com o grau de intensidade e destruição.




Fonte: https://meioambiente.culturamix.com/natureza/o-que-e-escala-richter. Acesso em 28/12/2021.

O cálculo da magnitude M de um terremoto é feito por meio da fórmula $M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, em que E representa a energia liberada pelo terremoto, em kWh, e $E_0$ é uma constante no valor $7{,}00 \cdot 10^3$ kWh, referente à energia mínima liberada na movimentação natural das placas tectônicas.

Nessas condições, faça o que se pede.

a) Com auxílio da tecla LOG de sua calculadora, preencha a tabela a seguir.

| Energia Liberada - E | $E/E_0$ | $Log(E/E_0)$ | Magnitude - M |
|---|---|---|---|
| 0,221 kWh | | | |
| 7 kWh | | | |
| 221 kWh | | | |
| 7000 kWh | | | |
| 221000 kWh | | | |
| 7000000 kWh | | | |

*b)* Com base nos registros em (a), complete a lacuna da sentença seguinte. *Na escala Richter, um terremoto é cerca de ___ vezes mais potente que o terremoto de grau anterior.*

c) Estime os possíveis danos causados por um terremoto que liberou uma energia de 100 kWh.

d) O estado no Havaí, nos Estados Unidos, é uma região cujos terremotos são bem frequentes.

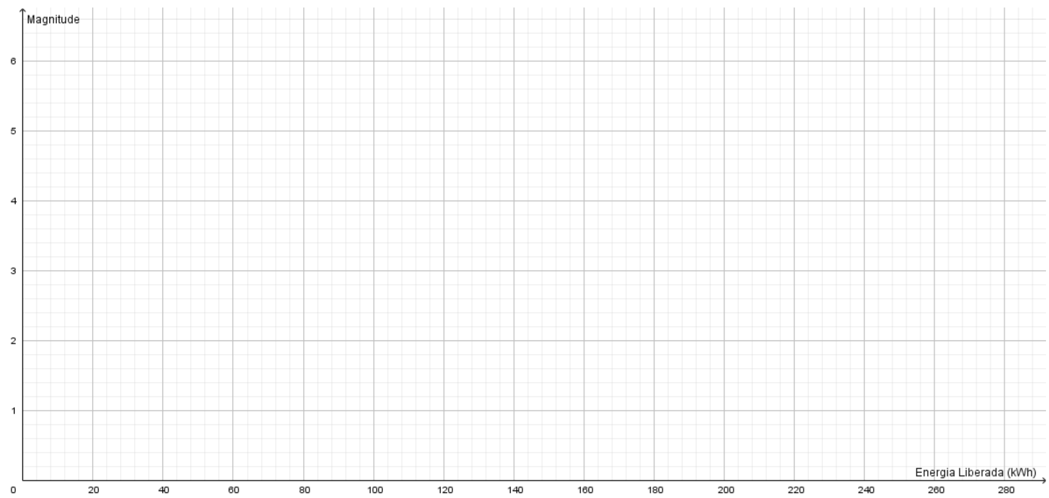
O último tremor, registrado em novembro de 2021, tinha uma magnitude de 2,5 graus.

Determine a energia liberada nesse terremoto.

e) A expressão $M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$ é classificada como uma função logarítmica, cujo gráfico tem propriedades distintas das funções exponenciais, estudadas no módulo anterior.

Para ilustrar essas propriedades, represente essa função no plano cartesiano a seguir, usando como referências os valores obtidos em (a), (c) e (d).

f) Escreva possíveis relações entre a curva obtida no item (e) e as curvas exponenciais estudadas no módulo anterior.



## CRESCIMENTO LENTO: COMO DESCREVÊ-LO?

**DEFINIÇÃO**
**A função logarítmica é a função real definida por $f(x) = \log_a x$, em que a constante $a$, sempre positiva e maior que 1, é a base do logaritmo. Conforme mencionado no vídeo 5.1, os logaritmos, em base *a*, podem ser entendidos como expoentes de uma potência, também de base *a*. Sendo assim, os resultados obtidos para a função $f(x) = \log_a x$ são os expoentes utilizados na função exponencial $y = a^x$, o que caracteriza a função logarítmica como a inversa da função exponencial.**

Quanto ao crescimento da função logarítmica, temos condições semelhantes às da função exponencial: caso o valor de $a$ seja maior que 1, a função será crescente; do contrário ($0 < a < 1$), a função será decrescente. Sabendo disso, responda:

a) Por que a base *a* deve ser diferente de 1?
b) Por que a base *a* não pode ser negativa?

Quanto às funções logarítmicas, na função crescente, ao contrário do que ocorre na função exponencial, a taxa de variação diminui à medida que o valor da variável *x* aumenta. Tal fato é exemplificado nos valores registrados no item (a), na seção *É hora de explorar!*.

### Domínio e imagem

A função logarítmica tem domínio real e positivo, enquanto sua imagem é real. Como função inversa da exponencial, observamos que o domínio da função logarítmica é igual à imagem da função exponencial e vice-versa. Pensando nisso, responda.

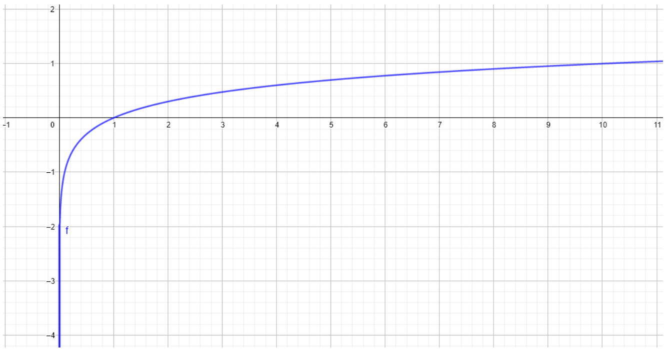
a) Qual é o domínio da função $M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, apresentada na seção anterior?
b) E a imagem?
c) Qual seria a função exponencial correspondente à função $M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$?
d) Qual seria o domínio dessa função exponencial?
e) E a imagem?

### O gráfico

Quanto ao gráfico de uma função logarítmica crescente, temos como exemplo a construção feita no item (e) da seção anterior. Nele, observamos uma maior taxa de variação para energias próximas de 0. No entanto, à medida que as energias liberadas pelo terremoto aumentam, as taxas de variação diminuem, evidenciando um ritmo de crescimento desacelerado. Nesse modelo, a cada grau acrescido na Escala Richter, são necessários aumentos exponenciais na quantidade de energia liberada pelo terremoto.

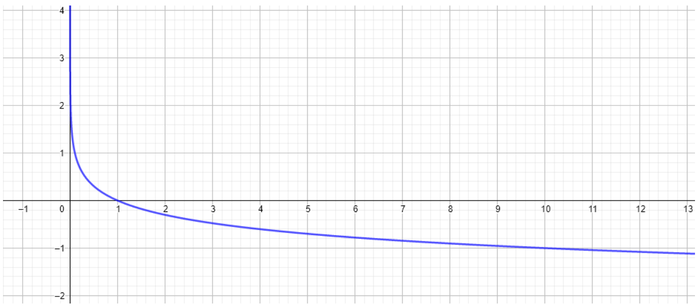
O comportamento descrito acima é a principal característica da *Função Logarítmica*, que é utilizada para descrever diversos fenômenos em que a variação de uma grandeza depende de uma variação exponencial de outra grandeza. Podemos citar como exemplos a acidez/alcalinidade de soluções (Química) e o nível sonoro suportado pelo ouvido humano (Física). Alguns desses fenômenos serão abordados na seção *Vamos praticar!*.

Os fenômenos supracitados são descritos por funções logarítmicas crescentes cujos gráficos se assemelham ao registrado a seguir.



A figura acima apresenta o gráfico da função $\mathrm{f(x)} = \log_{10} \mathrm{x}$, estritamente crescente em todo o seu domínio. Observe como seu formato se assemelha àquele construído na seção anterior.

Já para funções logarítmicas decrescentes, com *0 < a < 1*, cujo gráfico é apresentado a seguir, vemos um decrescimento intenso no intervalo [0, 1], em detrimento de um



decrescimento desacelerado para valores de *x* maiores que 1. Nesse exemplo, usamos a função $\mathrm{f(x)} = \log_{\frac{1}{10}} \mathrm{x}$.

**A TECLA LOG**

Para a função apresentada na seção *É hora de explorar!*, $\mathrm{M} = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E_0}}\right)$, temos a base fixada em *a = 10*, o que nos permite usar livremente a tecla LOG, na calculadora. Essa tela equivale exatamente à função e $\mathrm{f(x)} = \log_{10}\mathrm{x}$, também mencionada nesse modulo. No entanto, ao definirmos a função logarítmica $\mathrm{f(x)} = \log_{\mathrm{a}}\mathrm{x}$, temos a possibilidade de trabalhar com uma base $a \neq 10$. Sendo assim, queremos apresentar neste texto referências para esse trabalho.

Retomemos, então, os textos do Módulo 4 – Função Exponencial.

*Ainda sobre o domínio das funções exponenciais, cabe ressaltar a possibilidade de trabalharmos com expoentes irracionais, tais como o valor x que satisfaz a igualdade* $2^x = 10$*, na função* $y = 2^x$*, ou, ainda, o tempo necessário para duplicar o valor investido por Júlia, na situação-problema da seção É hora de explorar!, dado pela solução da equação* $2 = (1{,}01)^t$*. Nas condições citadas, os expoentes podem ser escritos como logaritmos:* $x = \log_2 10$ *e* $t = \log_{1,01} 2$*.*

Mesmo que as bases dos logaritmos $x = \log_2 10$ e $t = \log_{1,01} 2$ sejam diferentes de 10, ainda assim podemos usar a tecla LOG ao nosso favor. Para isso, evocamos a propriedade (IV): $\log_a(P) = \log_a(Q) \Leftrightarrow P = Q$.

Primeiramente, consideremos a equação $2^x = 10$

- Fazendo Q = *10* e P = $2^x$, pela propriedade (IV), escrevemos $log2^x = log10$;
- Aplicando a propriedade (III): $x \cdot log2 = log10$
- Isolando a variável: $x = \frac{log10}{log2}$
- Usando a tecla LOG: $x = \frac{log10}{log2} \cong \frac{1}{0{,}301} = 3{,}323$

Na manipulação acima, temos $x = \frac{log10}{log2}$. Contudo, da definição de logaritmo, sabemos que $2^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_2 10$. Portanto, escrevemos $log_2 10 = \frac{log10}{log2}$.

A igualdade $log_2 10 = \frac{log10}{log2}$ equivale à propriedade (V), conhecida como <u>mudança de base</u> para logaritmos, a saber, $\log_\mathrm{a}\mathrm{b} = \frac{\log \mathrm{b}}{\log \mathrm{a}}$. Essa propriedade é muito útil na resolução de equações exponenciais com bases distintas, como foi o exemplo apresentado.

Para finalizar esta subseção, retornemos ao logaritmo $t = \log_{1,01} 2$, citado no Módulo 4, em cuja resolução usaremos a propriedade (V) e a tecla LOG:

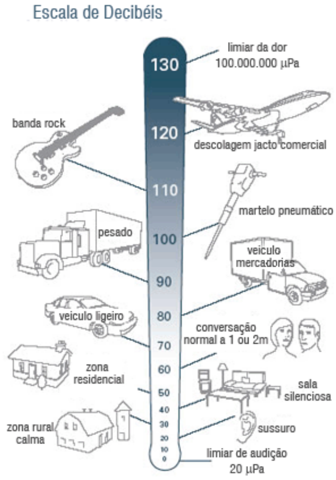
$$t = \log_{1,01} 2 = \frac{\log 2}{\log 1{,}01} \cong \frac{0{,}3010}{0{,}0043} = 70$$

No contexto proposto, Júlia terá que deixar seus R$ 20000,00 aplicados durante 5 anos e 10 meses (70 meses), aproximadamente, para ter esse valor duplicado.

Exemplos semelhantes a esses são abordados na seção *Vamos praticar!*, bem como itens vinculados aos conceitos apresentados neste texto.

**VAMOS PRATICAR**

21) (Acervo do autor) A figura a seguir representa a escala de níveis sonoros de sons que fazem parte do nosso cotidiano.




Suponha que o nível sonoro N e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $N = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$, em que $N$ é medido em decibéis e $I$, em watts por metro quadrado.

Com base nessas informações, a qual objeto podemos associar um som de intensidade 0,001 W/m$^2$?

a) Banda de rock.
b) Caminhão pesado.
c) Martelo pneumático.
d) Veículo ligeiro.
e) Zona residencial.

22) (ENEM 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por $M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e $E_0$, uma constante real positiva.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Considere que $E_1$ e $E_2$ representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente. Qual a relação entre $E_1$ e $E_2$?

a) $E_1 = E_2 + 2$.
b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$.
c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$.
d) $E_1 = 10^{9/7} \cdot E_2$.
e) $E_1 = 9/7 \cdot E_2$.

23)(FATEC – BH Adaptada) A concentração de gases de efeito estufa na atmosfera não afeta apenas a temperatura do planeta, mas está transformando os oceanos drasticamente. Os gases do efeito estufa são parcialmente absorvidos pela água marinha, e, por causa de um processo químico, os íons de hidrogênio acabam deixando o oceano mais ácido. Essa acidez é medida pelo pH, calculado pela expressão $pH = -log\ [H^+]$, na qual $[H^+]$ representa a concentração de íons de hidrogênio. Sabe-se que quanto menor o pH, mais ácido é o líquido e que uma variação de 1,0 no pH pode deixar as águas oceânicas 10 vezes mais ácidas, prejudicando o equilíbrio da vida marinha. Dados coletados desde a era pré-industrial indicam que o pH médio dos oceanos baixou de 8,2 para 8,1, justamente quando a concentração de gases do efeito estufa aumentou na atmosfera.

(”Oceano em perigo”. Estado de Minas. 09/02/2010.)

Com base nessas informações, é correto afirmar que a concentração de íons de hidrogênio, [H+], nas águas marinhas durante esse período aumentou

a) $10^{0,10}$ vezes.
b) $10^{0,99}$ vezes.
c) $10^{1,01}$ vezes.
d) $10^{1,39}$ vezes.
e) $10^{1,63}$ vezes.

24)(ENEM 2018) Um contrato de empréstimo prevê que, quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula $V = P.(1 + i)^n$.

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para ln(4/3) e 0,0131 como aproximação para ln(1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

a) 56ª

b) 55ª
c) 52ª
d) 51ª
e) 45ª

25) (ENEM 2020) A Lei de Zipf, batizada como o nome do linguista americano, é uma lei empírica que relaciona a frequência (*f*) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (*r*). Ela é dada por $f = \frac{A}{r^B}$.

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, *r* = 1 para a palavra mais frequente, *r* = 2 para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Disponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Com base nos valores de *X* = log(*r*) e *Y* = log(*f*), é possível estimar valores para A e B.

No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

a) $Y = log(A) - B \cdot X.$
b) $Y = \frac{log(A)}{X + log(B)}.$
c) $Y = \frac{log(A)}{B} - X.$
d) $Y = \frac{log(A)}{B \cdot X}.$
e) $Y = \frac{log(A)}{X^B}.$

# 7- FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA I

Os dois últimos módulos se dedicam à apresentação de novos modelos de funções, cujas especificidades as diferem bastante das funções estudadas até aqui. Trata-se das Funções Trigonométricas. Para abordá-las, é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de estarem familiarizados com os procedimentos de construção e modelagem utilizados em módulos anteriores.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- Vídeo 6.1 – Razões trigonométricas (https://youtu.be/bnEbUsTAoTM)
- Vídeo 6.2 – Distâncias inacessíveis (https://youtu.be/pR_1O4hluNQ)
- Vídeo 6.3 – Graus e radianos (https://youtu.be/pgKRvGiJpJ4)
- Vídeo 6.4 – Praticando (https://youtu.be/962dm4unKLs)

Através da situação-problema proposta na seção *É hora de explorar!* e também das atividades de fixação, na seção *Vamos praticar!*, os alunos serão capazes de:

- Configurar as calculadoras para trabalhos com unidades angulares distintas;
- Usar razões trigonométricas como estratégias para calcular distâncias inacessíveis;
- Modelar situações-problema por meio de uma função trigonométrica e
- Compreender o comportamento periódico da função tangente.

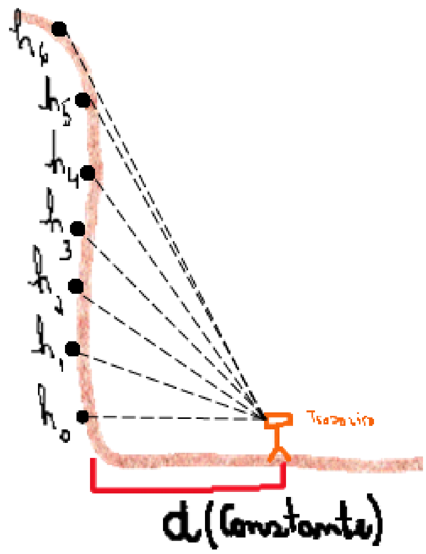
Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolver a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso da calculadora. É importante que, nessa utilização, o professor esteja atento às aproximações e às unidades angulares adotadas pelos alunos.

Na seção *Não dá pra alcançar, mas dá pra medir!*, é hora de formalizar os conceitos de uma função trigonométrica. Nessa formalização, cabe aos alunos identificar as variações irregulares das grandezas envolvidas, se comparadas às funções estudadas anteriormente, e, ao professor, expandir o domínio dessas funções para todo o ciclo trigonométrico. Em vista ao gráfico construído na situação introdutória, é importante diferenciar a função tangente da função exponencial, no tocante ao formato da curva obtida. Essa formalização pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar!*, destinada à aplicação dessas formalizações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 25 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito e faz-se a correção das atividades com os alunos. Vale, então, acrescentar 15 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**É HORA DE EXPLORAR**

Ana é alpinista. Antes de escalar um paredão vertical, verifica as alturas em que precisa fixar os pontos de apoio para facilitar a escalada. Com ajuda de um teodolito, ela marca o primeiro ponto a uma altura igual à altura do teodolito; em seguida, ao variar o ângulo do aparelho, ela determina os demais pontos em que serão fixados os apoios, conforme mostra a figura ao lado.




Suponha que a distância entre o teodolito e a base do paredão seja de 12 metros, que a altura do teodolito seja igual a 1,5 m e que as demais marcas foram feitas de 10 em 10 graus, chegando à altura máxima quando o ângulo foi igual a 60 graus.

Com base nessas informações, faça o que se pede.

a) A partir das razões trigonométricas conhecidas para o ângulo de 60º, determine a altura máxima em que Ana fixará o ponto de apoio. Use uma calculadora para aproximar as raízes não exatas.

b) Repetindo o procedimento do item (a), complete a tabela a seguir. Ao usar a tecla TAN de sua calculadora, considere três casas decimais.

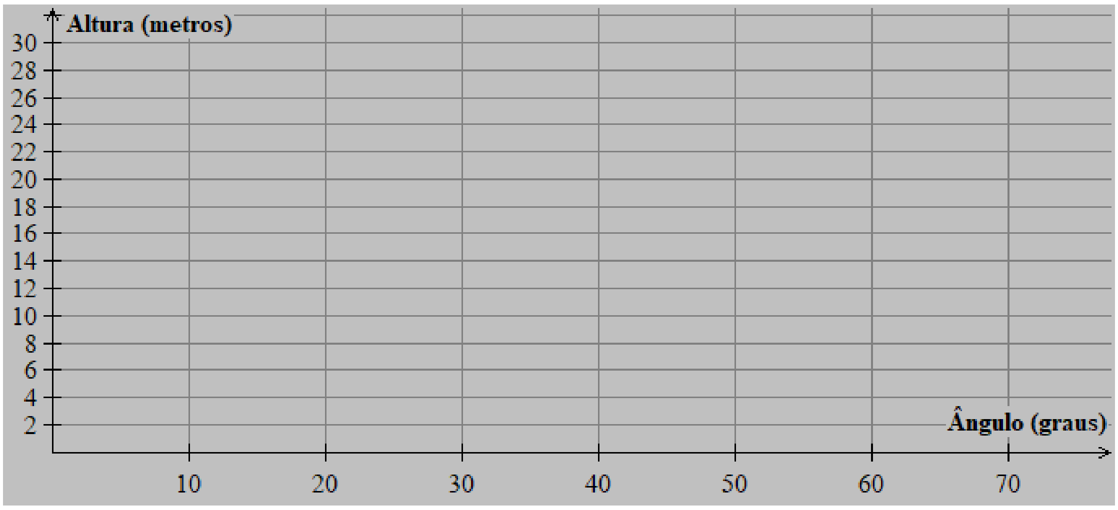
| Ângulo - $\alpha$ (º) | Tangente de $\alpha$ | Altura de fixação (m) |
|---|---|---|
| 0º | | |
| 10º | | |
| 20º | | |
| 30º | | |
| 40º | | |
| 50º | | |
| 60º | | |

c) Se generalizarmos a altura de fixação *h*, é possível calculá-la em função de um ângulo genérico $\alpha$. Escreva uma fórmula que descreva esse cálculo.

d) Com a fórmula obtida em (c), determine a altura do paredão quando o ângulo marcado for de 45º.

e) A fórmula obtida em (c) é classificada como uma função trigonométrica. Represente essa função no plano cartesiano a seguir, a partir dos valores preenchidos em (a).

f) Explique por que não é possível determinarmos a altura de um ponto de fixação quando o teodolito marca um ângulo de 90º.

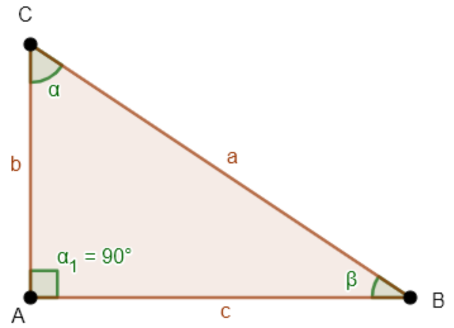


## NÃO DÁ PRA ALCANÇAR, MAS DÁ PRA MEDIR.

O problema anterior nos apresenta um novo modelo de função, baseado em relações trigonométricas, a saber, $h(\alpha) = 12. tg\alpha + 1{,}5$. Neste módulo, das seis relações trigonométricas listadas no vídeo 6.1, nos atentaremos à função tangente.

**A inclinação de uma rampa**

No referido vídeo, a tangente é definida pela razão entre os catetos oposto e adjacente, nessa ordem. Sendo assim, no triângulo ∆ABC exibido na figura, teríamos $tg\beta = \frac{b}{c}$.

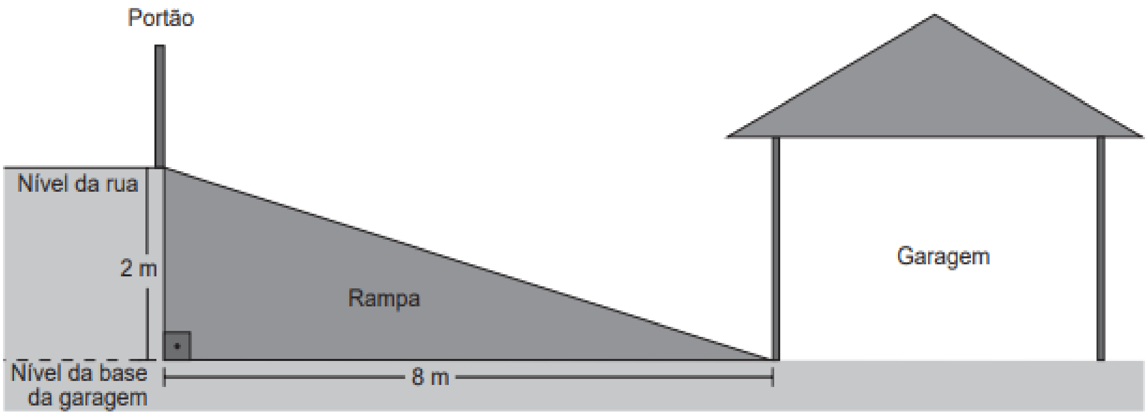



No entanto, ao enxergamos o referido triângulo como uma rampa, a tangente equivaleria à sua inclinação, calculada pela razão entre a altura e o deslocamento horizontal, ou seja, $tg\beta = \frac{b}{c} = \frac{altura}{deslocamento} = inclinação$.

Nesse contexto, a fim de estabelecer padrões de acessibilidade a pessoas com dificuldades de locomoção, algumas instituições normatizam um limite para a inclinação de rampas de acesso e passarelas de pedestres. Tais limitações já foram abordadas em questões de avaliações externas, tais como o item exibido na figura a seguir, extraída do ENEM (edição de 2018).

A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medido na horizontal, mede-se *x* centímetros na vertical. Diz-se, nesse caso, que a rampa tem inclinação de *x*%, como no exemplo da figura:


A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada 2 metros abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.




Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas do município onde ela está localizada exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%.

Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa.

Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser

Ⓐ elevado em 40 cm.
Ⓑ elevado em 50 cm.
Ⓒ mantido no mesmo nível.
Ⓓ rebaixado em 40 cm.
Ⓔ rebaixado em 50 cm.

**Um gráfico diferente**

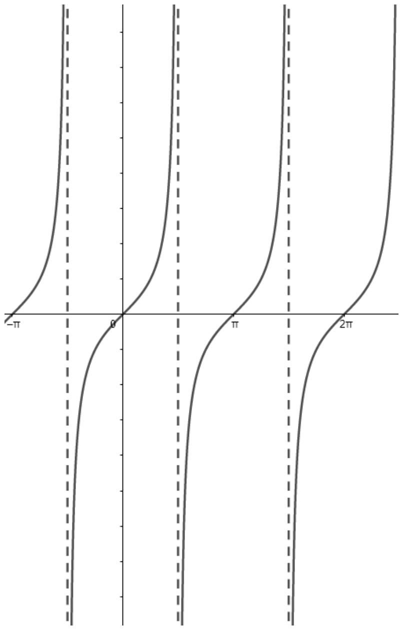
Retomando a função $h(\alpha) = 12.tg\alpha + 1{,}5$, construída na seção *É hora de explorar!*, temos um domínio restrito aos ângulos 0º a 60º, levando a imagens que variam de 1,5 a 22,26 metros. No entanto, sob a possibilidade de expandirmos esse domínio, cabem alguns questionamentos.

a) Quais seriam as alturas determinadas pelos ângulos 70º, 80º e 90º?
b) Seria viável utilizarmos ângulos obtusos no domínio?
c) Quais seriam os resultados obtidos em h($\alpha$) para 100º, 110º e 120º?
d) Que interpretação podemos dar a esses resultados?

As respostas a essas perguntas nos remetem à análise do gráfico construído para $h(\alpha) = 12.tg\alpha + 1{,}5$. A princípio, a partir dos dados da tabela do item (a), em *É hora* *de explorar!*, podemos verificar que a taxa de variação $\left(m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ não é constante, o que nos impede classificar *h(*$\alpha$*)* como uma função afim. No entanto, o comportamento dessa função também não se adéqua às propriedades de uma função exponencial, estudadas no Módulo 4.

Embora o gráfico construído em *É hora de explorar!* se aproxime visualmente de uma curva exponencial, a indeterminação de resultados para o ângulo reto e as imagens negativas obtidas para ângulos obtusos descaracterizam um possível comportamento exponencial de h($\alpha$).

Na verdade, se expandíssemos o domínio de h($\alpha$) para o conjunto dos números reais, teríamos um gráfico semelhante ao apresentado na figura a seguir. Nele, temos a função $f(x) = tgx$, com domínio real e expresso em radianos. Lembre-se de que, conforme apresentado no vídeo 6.3, $\pi$ *rad = 180º*. Ademais, a imagem de *f(x)* varre toda reta real.




O gráfico construído em *É hora de explorar!* é semelhante à porção do gráfico de $f(x) = tgx$, limitado ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ademais, os valores negativos de *h(*$\alpha$*)* registrados para os ângulos 100º, 110º, 120º, bem como para outros ângulos inferiores a 180º, equivalem à porção do gráfico de *f(x)* compreendida no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

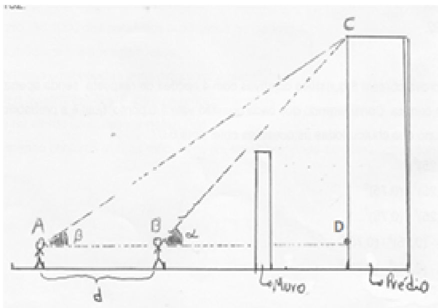
Conforme apresentado na figura, o gráfico da função $f(x) = tgx$ possui assíntotas verticais que são retas perpendiculares ao eixo *x* que o interceptam nos pontos em que a função não está definida: $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Para valores próximos desses, a função tende ao infinito. Observe que, em $h(\alpha) = 12. tg\alpha + 1{,}5$, essa indeterminação ocorreu quando $\alpha$ = 90º = $\frac{\pi}{2}$ rad.

**DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS**

A função $h(\alpha) = 12.tg\alpha + 1{,}5$ é um modelo clássico usado para medir alturas a partir de uma distância horizontal conhecida, medida a partir do item cuja altura se quer conhecer. No entanto, valores referentes à tangente de um ângulo também são úteis quando não temos acesso à base do objeto de altura desconhecida. A imagem seguinte traz uma situação que exemplifica tal utilização.

No projeto *Práticas de Trigonometria,* os alunos deveriam medir a altura *H* de um prédio que estava do outro lado da rua, além dos muros da escola.
Para tanto, os alunos deviam seguir as seguintes instruções.

- Localizados em um ponto qualquer do pátio, deviam medir o ângulo de elevação ($\beta$) entre o observador, de altura (h), e o topo do prédio;
- A seguir, deviam se afastar uma distância (d) considerável para obter um novo ângulo de elevação ($\alpha$).




Feitas as medições, os alunos obtiveram os valores (d, $\alpha$, $\beta$) = (20 m, 17º, 22º). De posse desses valores, os alunos fizeram o esboço mostrado na figura e, a partir dele e de seus conhecimentos sobre trigonometria, calcularam a altura do prédio.

Uma sugestão de resolução do item proposto acima é usar as tangentes dos ângulos 17º e 22º para nortear os cálculos.

Denotando as medidas CD e BD por x e y, escrevemos:

- Em ΔBCD: $tg(22^o) = \frac{x}{y}$ ⇒ x = y·tg(22º) ⇒ x = 0,404y (i)
- Em ΔACD: $tg(17^o) = \frac{x}{y+20}$ ⇒ x = (y + 20)·tg(17º) ⇒ x = 0,306y + 6,12 (ii)

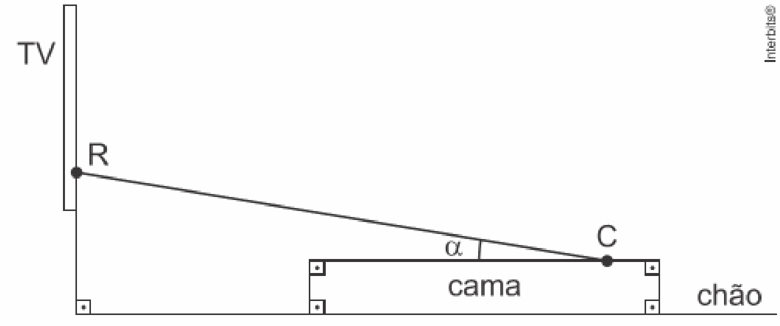
Os valores usados para as tangentes tg(22º) = 0,404 e tg(17º) = 0,306 foram obtidos com a tecla TAN. Conforme instruções do vídeo 6.3, é necessário que, ao usar essa tecla, a calculadora esteja configurada para medidas em “graus” (ou “degree”).

Fazendo *(i) = (ii)*, obtemos *y = 62,44 m* e, consequentemente, *x = 25,22 m*. Logo, para definir a altura do prédio, basta acrescentar à medida x = 25,22 m a altura do observador, indicada no texto por *h*. Portanto, cabe aqui como resolução a função *H(h) = 25,22 + h*, sendo *H* a altura do prédio em função da altura *h* do observador, ambas medidas em metros.

Exemplos semelhantes a esses são abordados na seção *Vamos praticar!*, bem como itens vinculados aos conceitos apresentados neste texto.

**VAMOS PRATICAR**

26)(PUC – Campinas) Paulo está deitado na cama e assistindo à TV. Na figura, C representa um ponto sobre a cama a partir do qual o controle remoto da TV foi acionado na direção do receptor de sinal indicado por R. A medida do ângulo entre a linha que representa o sinal transmitido e a cama é igual a α.




Dados:

| α | 11,3° | 11,5° | 12,1° | 12,4° | 78,5° |
|---|---|---|---|---|---|
| sen α | 0,196 | 0,199 | 0,210 | 0,215 | 0,980 |
| cos α | 0,981 | 0,980 | 0,978 | 0,977 | 0,199 |
| tg α | 0,200 | 0,203 | 0,214 | 0,220 | 4,915 |

Sabe-se, ainda, que:

- R está a 1,2 m do chão;
- a altura da cama em relação ao chão é de 40 cm;
- C está a 4 metros de distância da parede em que a TV está fixada;
- a espessura da TV é desprezível.

Nas condições descritas e consultando a tabela, α é igual a

a) 78,5 º.
b) 11,5 º.
c) 12,1 º.
d) 12,4 º.
e) 11,3º.

27) (Acervo do autor) No projeto *Práticas de Trigonometria,* desenvolvido pelo professor Sérgio, os alunos deveriam medir a altura H do prédio onde ocorriam as aulas do Ensino Médio. Para tanto, um aluno de altura h, na função de observador, deveria se posicionar a uma distância *d* da base desse prédio e medir, com o auxílio de um transferidor apontado para o topo da edificação, um ângulo $\alpha$.

De posse das medidas *d* e *h*, dadas em metros, e de $\alpha$, dado em graus, qual das expressões a seguir corresponde à altura H desse prédio?

a) $H = d \cdot sen(\alpha)$.

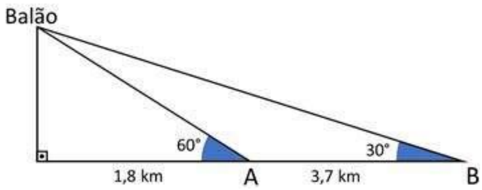
b) $H = d \cdot sen(\alpha) + h$.

c) $H = d \cdot cos(\alpha)$.

d) $H = d \cdot tg(\alpha)$

e) $H = d \cdot tg(\alpha) + h$.

28) (ENEM 2010) Um balão atmosférico lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.




Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60º; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30º.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km

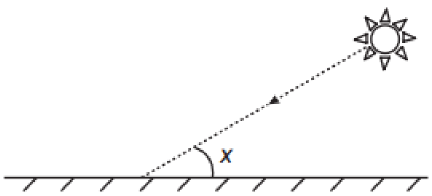
b) 1,9 km

c) 3,1 km

d) 3,7 km

e) 5,5 km

29) (ENEM 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo X com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na



superfície do lago, seja dada aproximadamente por *I(x)* = *k·sen(x)*, sendo k uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90º.

Quando x = 30º, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33%

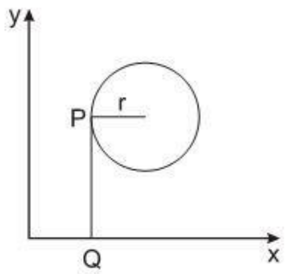
b) 50%

c) 57%

d) 70%

e) 86%

30)(ENEM 2009) Considere um ponto P de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância d ≤ r sobre a circunferência.




Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por

a) $\mathrm{r} \cdot \left(1 - \mathrm{sen}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{r}}\right)$.

b) $\mathrm{r} \cdot \left(1 - \cos\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{r}}\right)$.

c) $r \cdot \left(1 - tg\,\frac{d}{r}\right)$.

d) $r \cdot sen\left(\frac{r}{d}\right)$.

e) $r \cdot cos\left(\frac{r}{d}\right)$.

# 8- FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA II

Após estudar a Função Tangente, agora é hora de nos atentarmos às funções Seno e Cosseno, especialmente no que tange ao comportamento oscilatório que elas descrevem. Para abordá-las, é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre o ciclo trigonométrico, a saber, eixos e quadrantes, arcos congruentes e simetrias.

Para a execução deste módulo, você precisará de um encontro de 90 minutos. Contudo, antes de iniciá-lo, é necessário que os alunos tenham assistido aos vídeos listados a seguir.

- Vídeo 7.1 – O problema da esteira e as funções trigonométricas (https://youtu.be/LCbfaQSLDG4)
- Vídeo 7.2 – O ciclo trigonométrico (https://youtu.be/xn2Ft9bVD6k)
- Vídeo 7.3 – Gráficos das funções trigonométricas (https://youtu.be/VPH1mj4s8YQ)
- Vídeo 7.4 – Praticando (https://youtu.be/SkyEot_iYVc)

Através da situação-problema proposta na seção *É hora de explorar!* e também das atividades de fixação, na seção *Vamos praticar!*, os alunos serão capazes de:

- Modelar situações-problema por meio de uma função trigonométrica;
- Compreender o comportamento oscilatório e periódico das funções seno e cosseno;
- Associar uma onda representada no plano cartesiano a uma função trigonométrica e
- Determinar algébrica e graficamente a imagem e o período de uma função trigonométrica.

Para isso, os alunos, organizados em duplas e/ou trios, terão 20 minutos para resolver a situação proposta. Devido à natureza das operações, é aconselhável o uso da calculadora. É importante que, nessa utilização, o professor esteja atento às aproximações e às unidades angulares adotadas pelos alunos.

Na seção *Como uma onda...*, é hora de tratar os conceitos atrelados às funções Seno e Cosseno. Nesse tratamento, cabe aos alunos identificar as variações irregulares das grandezas envolvidas, e, ao professor, expandir o domínio dessas funções para todo o ciclo trigonométrico. Tal expansão tem o objetivo de mostrar o comportamento ondulatório e periódico dessas funções. Elementos importantes, como imagem e período, devem ser evidenciados. Essa explanação pode ser feita num período de 30 minutos.

Na seção *Vamos praticar!*, destinada à aplicação dessas formalizações, são propostas algumas atividades que podem ser feitas em sala. Para tanto, os alunos dispõem de 25 minutos. Ao fim desse período, disponibiliza-se o gabarito e faz-se a correção das atividades com os alunos. Vale, então, acrescentar 15 minutos para sanar possíveis dúvidas.

**É HORA DE EXPLORAR**

Leonardo comprou uma moderna esteira ergométrica para se exercitar sem sair de casa. O aparelho possui um dispositivo que permite inclinar a sua base de forma a simular a subida de uma rampa, bastando determinar no visor do equipamento o ângulo desejado. Quanto maior o ângulo, maior a inclinação da rampa e, consequentemente, mais esforço será exigido do usuário.

Independente do ângulo formado pela esteira com o chão, Leonardo tem como meta caminhar diariamente uma distância de 1000 m. Contudo, por curiosidade, ele quis calcular qual seria a altura alcançada e a distância horizontal correspondente, dependendo da inclinação escolhida.

Nessas condições, faça o que se pede.

a) Determine a distância horizontal e a altura alcançada quando o ângulo escolhido for 30º.
Considere as razões trigonométricas conhecidas para o ângulo citado e use uma calculadora para aproximar as raízes não exatas.

b) Repetindo o procedimento do item (a), complete a tabela a seguir.
Ao usar as teclas SEN e COS de sua calculadora, considere três casas decimais.

c) Se generalizarmos a altura alcançada, chamando-a de *h*, é possível calculá-la em função de um ângulo genérico $\alpha$. Escreva uma fórmula que descreva esse cálculo.

| Ângulo - $\alpha$ | sen($\alpha$) | Altura (m) | cos($\alpha$) | Distância (m) |
|---|---|---|---|---|
| 0º | | | | |
| 5º | | | | |
| 10º | | | | |
| 15º | | | | |
| 20º | | | | |
| 25º | | | | |
| 30º | | | | |

d) Se generalizarmos a distância horizontal percorrida, chamando-a de *d*, é possível calculá-la em função de um ângulo genérico $\alpha$. Escreva uma fórmula que descreva esse cálculo.

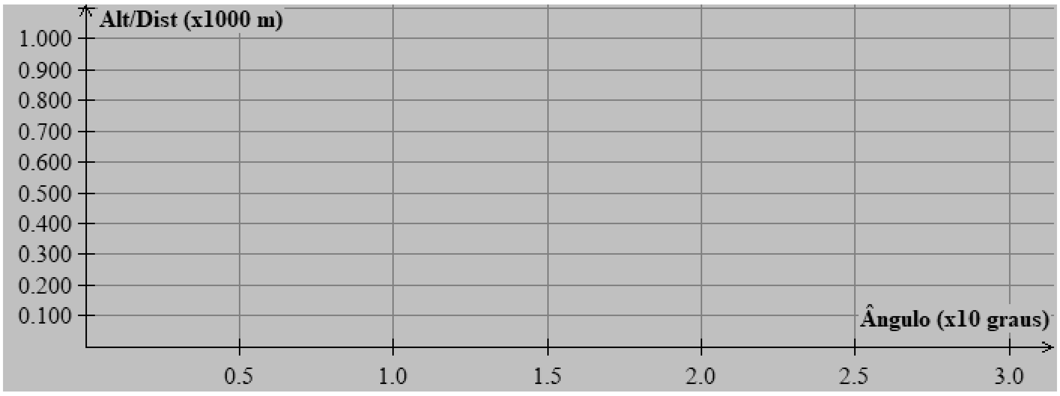
e) Use as fórmulas obtidas em (c) e (d) para determinar a altura alcançada e a distância horizontal percorrida quando a inclinação da rampa é 45º.

f) As fórmulas obtidas em (c) e (d) são novos exemplos de funções trigonométricas. Represente essas funções no plano cartesiano a seguir, a partir dos valores preenchidos em (a).

g) A fim de facilitar as comparações, use cores distintas para Alt: *h*($\alpha$) e Dist: *d*($\alpha$).

h) Segundo empresas especializadas em acessibilidade, a inclinação máxima de uma rampa deve ser de 20%. Essa porcentagem se refere à razão entre a altura alcançada e a distância horizontal.

i) Nessas condições, determine quais ângulos apresentados em (a) se adéquam a essa recomendação.




j) Escreva possíveis justificativas para a limitação descrita no item (g).

## COMO UMA ONDA

Tomemos como ponto de partida as funções construídas na seção anterior, a saber, $h(\alpha) = 1000 \cdot sen\alpha$ e $d(\alpha) = 1000 \cdot cos\alpha$. Modeladas a partir das relações trigonométricas apresentadas nos vídeos do último módulo, tais funções descrevem, respectivamente, a altura alcançada e a distância horizontal em um trajeto retilíneo de 1000 metros, sob a inclinação de um ângulo $\alpha$.

### Expandindo o domínio

No contexto da seção *É hora de explorar!*, as funções supracitadas foram modeladas sob o domínio 0º a 30º. No entanto, fora desse contexto, podemos expandir o domínio de $h(\alpha)$ e $d(\alpha)$ para $D_h = D_d = IR$. Sendo assim, os valores de $\alpha$ podem ser compreendidos em todo o ciclo trigonométrico, apresentado no vídeo 7.3.

A fim de explorar como as funções $h(\alpha)$ e $d(\alpha)$ se comportam no intervalo [0, 2π], complete a tabela abaixo. Os valores podem ser registrados com o auxílio do ciclo trigonométrico, ou, ainda, com o uso das teclas COS e SEN de sua calculadora. Nesse

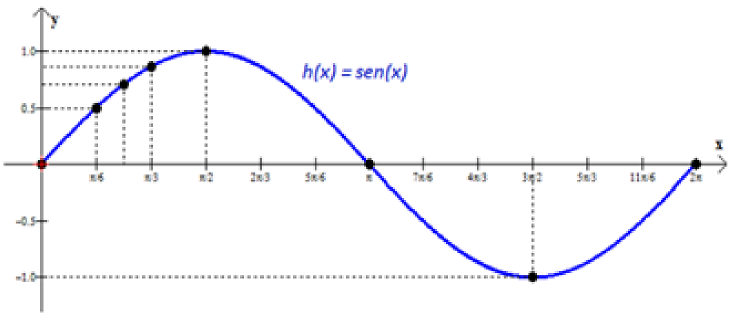
| α | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π | 7π/6 | 5π/4 | 4π/3 | 3π/2 | 5π/3 | 7π/4 | 11π/6 | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen(α) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| cos(α) | | | | | | | | | | | | | | | | | |

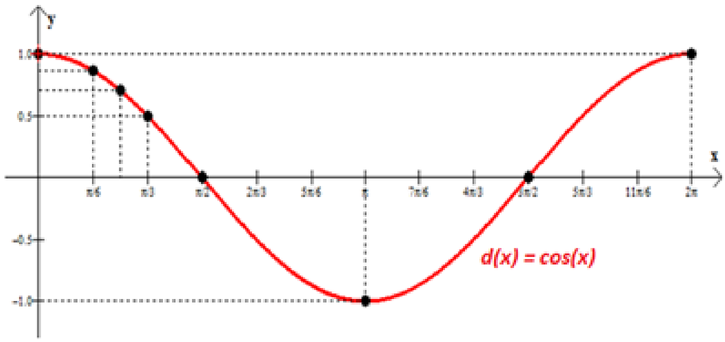
caso, lembre-se de configurá-la para “rad”.

Com os valores preenchidos anteriormente, podemos construir dois gráficos, um para descrever o comportamento de $h(\alpha) = 1000 \cdot sen\alpha$ e outro para $d(\alpha) = 1000 \cdot cos\alpha$. A fim de facilitar nossas notações, consideraremos os resultados dessas funções em quilômetros, o que nos permite escrevê-las apenas como $h(\alpha) = sen\alpha$ e $d(\alpha) = cos\alpha$. Com isso, os valores da tabela podem ser plotados diretamente no plano cartesiano.

Os gráficos a seguir mostram o comportamento ondulatório das funções $h(\alpha) = sen\alpha$ e $d(\alpha) = cos\alpha$, compreendidos no intervalo [0, 2π] e com imagens limitadas a [-1, 1].

Neles, as porções limitadas ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ correspondem aos gráficos construídos no item (f) da seção *É hora de explorar!*.




**Dá pra repetir?**

Na possibilidade de expandirmos ainda mais o domínio dessas funções, responda:

a) Qual seriam as imagens de *h*($\alpha$) e *d*($\alpha$) para os ângulos $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{3}$?

b) Que relações podem ser estabelecidas entre os resultados anteriores e os valores registrados na tabela para os ângulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$?

c) Como poderemos descrever os formatos desses gráficos para o intervalo [2$\pi$, 4$\pi$]? E para o intervalo [-2$\pi$, 0]?

As respostas dos itens acima nos levam a deduzir o caráter repetitivo dos resultados de $h(\alpha) = sen\alpha$ e $d(\alpha) = cos\alpha$. Tal repetição é a principal característica das funções trigonométricas, que agora passam a ser classificadas também como <u>funções periódicas</u>. Na situação analisada, o comportamento ondulatório se repete a cada período de <u>*2$\pi$ rad*</u>, equivalente a uma volta no ciclo trigonométrico. Chamamos de <u>período</u> de uma função trigonométrica o intervalo de repetição de uma onda completa, que passa obrigatoriamente pelos valores máximo e mínimo da função.

Agora, falemos das limitações das imagens de $h(\alpha) = sen\alpha$ e $d(\alpha) = cos\alpha$. Nos gráficos apresentados neste texto, vemos que ambas as funções são limitadas pelos valores máximo e mínimo da função, a saber, 1 e -1, respectivamente. Sobre esses valores, seguem alguns questionamentos.

d) Quais seriam os valores máximo e mínimo de h(α), se ela fosse escrita como $h(\alpha) = B \cdot sen\alpha$, sendo B uma constante real?

e) Quais seriam os valores máximo e mínimo de h(α), se ela fosse escrita como $h(\alpha) = A + sen\alpha$, sendo A uma constante real?

f) Como representar a imagem de h(α) na adaptação $h(\alpha) = A + B \cdot sen\alpha$?

g) As respostas anteriores também valem para d(α)?

**Modelando fenômenos oscilatórios e periódicos**

As respostas dos itens acima caracterizam as funções trigonométricas como modelos úteis à descrição de diversos fenômenos oscilatórios. Alguns desses são citados no vídeo 7.1, tais como o movimento de roda-gigante, sistema massa-mola, doenças sazonais, ciclo menstrual, ciclo respiratório e pressão sanguínea. Na seção *Vamos praticar!*, teremos a oportunidade de trabalhar tais modelagens.

Geralmente as modelagens supracitadas ocorrem sob os formatos $f(x) = A + B \cdot sen\left(\frac{2\pi}{P} \cdot x\right)$ ou $f(x) = A + B \cdot cos\left(\frac{2\pi}{P} \cdot x\right)$. Em ambos, temos:

- A = valor intermediário da função, equivalente à média aritmética dos valores máximo e mínimo.
- B = variação do valor intermediário aos extremos da função.
- P = período de uma onda completa.

Observe, no exemplo a seguir, como esses formatos podem ser utilizados.

(PUC – PR) Um terremoto de magnitude 8 graus da escala Richter atingiu, em setembro de 2009, a região de Samoa. O terremoto causou ondas de até 3 metros. A maré alta neste local ocorreu à meia-noite. Suponha que o nível de água na maré alta era de 3 metros; mais tarde, na maré baixa, era de 3 cm. Supondo que a próxima maré alta seja exatamente ao meio-dia e que a altura da água é dada por uma curva seno ou cosseno, qual das alternativas a seguir corresponde à fórmula para o nível da água na região em função do tempo?

a) $1{,}515 + 1{,}485. \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

b) $1{,}515 + 1{,}485. \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

c) $1{,}485. \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

d) $1{,}485.\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
e) $1{,}485 + 1{,}515.\,\cos(\pi t)$

No texto exibido, temos:

- (Máximo, Mínimo) = (3,00 m; 0,03 m) $\Rightarrow A = \frac{3{,}00+0{,}03}{2} = 1{,}515$
- B = 1,515 – 0,03 = 3,00 – 1,515 = 1,485.
- P = 12 horas $\Rightarrow \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

De posse dessas informações, os modelos $f(x) = A + B \cdot sen\left(\frac{2\pi}{P} \cdot x\right)$ e $f(x) = A + B \cdot cos\left(\frac{2\pi}{P} \cdot x\right)$ se adéquam às alternativas (a) e (b), respectivamente. A decisão final repousa no valor inicial da função, que, segundo o texto da questão, foi a maré alta (3,00 m), registrada à meia-noite (t = 0h). Logo, de f(0) = 3, concluímos como correta a opção (b). Essa solução é apenas uma sugestão, que também poderia ser conduzida a partir de um esboço da situação descrita, no plano cartesiano.
Há modelos que, além das adaptações apresentadas às funções $h(\alpha) = sen\alpha$ e $d(\alpha) = cos\alpha$, consideram somar uma constante ao ângulo $\left(\frac{2\pi}{P} \cdot x\right)$, deslocando a onda horizontalmente. Mas não trataremos deles aqui.
A seção seguinte traz algumas situações passíveis de serem modeladas de forma semelhante, além de outras abordagens citadas neste texto.

**VAMOS PRATICAR**

31) (Unesp Adaptada) Do solo, você observa um amigo numa roda gigante. A altura h em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10 \cdot sen\left[\frac{(t-26)\cdot\pi}{12}\right]$, na qual o tempo t é dado em segundos e a medida angular, em radianos.

Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar (t = 0).

a) 1,5 m.
b) 6,5 m.
c) 11,5 m.
d) 16,5 m.
e) 22,5 m.

32) (UFSM – RS) Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função $C(t) = 3 + 2 \cdot sen\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, em que t é a quantidade de horas para fazer essa medição.

O tempo mínimo necessário para fazer essa medição, que registrou 4,0 gramas de fósforo, é de

a) ½ hora.
b) 1 hora.
c) 2 horas.
d) 3 horas.
e) 4 horas.

33) (ENEM 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de

janeiro, x = 2, ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12, associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro.
b) abril.
c) junho.
d) julho.
e) outubro.

34) (ENEM 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo *P(t) = A + B□cos(kt)*, em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve

| | |
|---|---|
| Pressão mínima | 78 |
| Pressão máxima | 120 |
| Número de batimentos cardíacos por minuto | 90 |

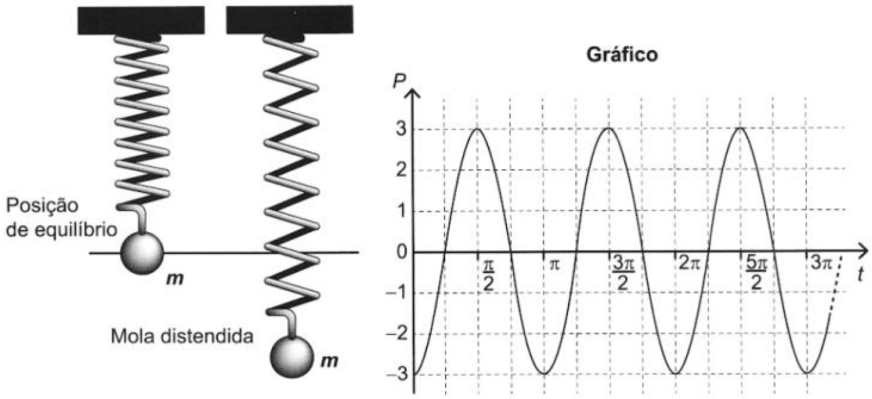
os dados:

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$.
b) $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(3\pi t)$.
c) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(2\pi t)$.
d) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(t)$.
e) $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(t)$.

35)(ENEM 2021) Uma *mola* é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição *P* (em cm) da massa *m* em função do tempo *t* (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cdot \cos(\omega T)$ ou $P(t) = \pm A \cdot sen(\omega T)$, em que A > 0 é a amplitude de deslocamento máximo e $\omega$ é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.




A expressão algébrica que representa as posições P(t) da massa *m*, ao longo do tempo, no gráfico, é

a) -3·cos(2t).

b) -3·sen(2t).

c) 3·cos(2t).

d) -6·cos(2t).

e) 6·sen(2t).