CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

EDEMILSON LEMOS PALMEIRA JÚNIOR

ESTUDO DE PROBABILIDADE POR MEIO DA ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM TBL (APRENDIZAGEM EM EQUIPE)

Belo Horizonte
2022

EDEMILSON LEMOS PALMEIRA JÚNIOR

ESTUDO DE PROBABILIDADE POR MEIO DA ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM TBL (APRENDIZAGEM EM EQUIPE)

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora: Érica Marlúcia Leite Pagani

Banca Examinadora: Rônei Sandro Vieira
Gilmer Jacinto Peres

Belo Horizonte
2022

Palmeira Júnior, Edemilson Lemos
P172e Estudo de probabilidade por meio da estratégia de aprendizagem TBL (Aprendizagem em equipe) / Edemilson Lemos Palmeira Júnior. – 2022.
115 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Érica Marlúcia Leite Pagani.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Aprendizagem – Teses. 2. Ensino médio – Metodologia – Teses. 3. Probabilidades – Teses. 4. Aprendizagem em equipe na educação – Teses. I. Pagani, Érica Marlúcia Leite. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 510

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

EDEMILSON LEMOS PALMEIRA JÚNIOR

ESTUDO DE PROBABILIDADE POR MEIO DA ESTRATÉGIA DE APRENDIZAGEM TBL (APRENDIZAGEM EM EQUIPE)

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 26 de maio de 2022.

Edemilson Lemos Palmeira Júnior
(Autor)

Érica Marlúcia Leite Pagani
(Orientadora)

Belo Horizonte
2022

Dedico este trabalho a todos os professores e professoras que, de alguma maneira, têm buscado formas diferentes de compartilhar seus conhecimentos para fazer a diferença na vida de seus alunos. Sim, é possível! Sonhar, persistir e vencer.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por me dar a oportunidade de realizar meus sonhos e, consequentemente, poder contribuir com a realização de vários sonhos, por meio da educação.

Á minha esposa, Luciana Andrade e minha filha, Bianca Andrade Palmeira, pela paciência e cumplicidade, pois abriram mão de vários momentos de suas vidas para estarem ao meu lado. Deixo aqui registrado um dos momentos marcantes, em que elas tiveram de ir para praia sozinhas, enquanto eu estudava aritmética no quarto, pois, na semana seguinte teria prova.

Ao Amigo, Filósofo e Professor de Matemática, Átila Anderson Dias Azevedo, que me indicou/sugeriu fazer o processo seletivo do mestrado como oportunidade de crescimento pessoal e profissional.

Às alunas Clara Lage e Raíssa Gino, que ajudaram no desenvolvimento do programa do problema dos aniversários, que se encontra no capítulo de Probabilidade.

A todo corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, vinculado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG, que não mediram esforços, para proporcionarem a nós, alunos, uma educação de altíssima qualidade. Mesmo em momentos de pandemia, propuseram-se a fazer diferente e fizeram a diferença em nossas vidas.

Ao Colégio Santa Marcelina de Belo Horizonte, às Irmãs Marcelinas, seus profissionais e alunos, que contribuíram e contribuem sempre para nosso crescimento humano e profissional.

Agradeço a minha Professora-Doutora e Orientadora Érica Marlúcia Leite Pagani, por suas aulas e ensinamentos e por ter conduzido de maneira tranquila todo o processo de construção desta dissertação, tornando o caminho mais suave.

Ao Professor Christiano Otávio de Rezende Sena, que se dispôs a ler o capítulo de Probabilidade e sugeriu alterações significativas que contribuíram com a qualidade da escrita do capítulo.

Aos Professores Doutores Gilmer Jacinto Peres, Rônei Sandro Vieira e Valéria Guimarães Moreira, componentes da banca examinadora e que fizeram pontuações, críticas e sugestões que contribuíram imensamente para qualificar ainda mais nosso trabalho.

À Professora Doutora Alessandra Carvalho Teixeira, que não pôde participar da banca examinadora, mas que também contribuiu de forma significativa para melhorar nosso trabalho.

Por fim, a todos os colegas de classe que concluíram o curso ou não, pela construção de todo o conhecimento adquirido e pela partilha das experiências vivenciadas ao longo desses três anos. Que Deus abençoe cada um de vocês, com muita saúde e grandes oportunidades de trabalho, pois, com certeza, vocês farão a diferença na vida de muitas pessoas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Muitas são as dificuldades relatadas por professores e alunos durante o processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática, particularmente do conteúdo de Probabilidade. Esta dissertação tem como objetivo analisar como uma sequência didática, desenvolvida por meio da Estratégia de Ensino-Aprendizagem TBL (Aprendizagem em Equipes) pode contribuir para melhorar o Ensino e consequentemente a Aprendizagem dos alunos. Inicialmente, a sequência foi planejada para ser desenvolvida de forma remota (on-line), devido à pandemia imposta pelo Coronavírus. Entretanto, em agosto de 2021, os alunos retornaram parcialmente para a escola, em grupos menores. Cada grupo de alunos ia à escola semana sim, semana não, e o retorno quase total dos alunos, aconteceu em setembro de 2021. Dessa forma, mudamos todo nosso planejamento e aplicamos os questionários e a sequência didática na forma presencial. Para o desenvolvimento do trabalho e da sequência didática, aplicamos um questionário de sondagem inicial, construímos e desenvolvemos dois percursos metodológicos e aplicamos um questionário final. O percurso metodológico 1, envolvia os conceitos de Espaço Amostral, Evento e Experimento Aleatório, a definição clássica de Probabilidade e a Probabilidade da união de dois ou mais eventos. O percurso metodológico 2, era referente a Probabilidade de Eventos Independentes e Probabilidade Condicional. Esses percursos metodológicos foram desenvolvidos pautados na Estratégia de Ensino-Aprendizagem TBL, em uma turma de 43 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede particular de Belo Horizonte. Os dados coletados durante as aplicações foram registrados e analisados por meio de uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, sendo analisadas as respostas discursivas dos alunos, de forma que essas pudessem nos trazer informações importantes acerca dos seus aprendizados em relação ao conteúdo de Probabilidade. Essas respostas mostraram, por exemplo, que eles compreenderam a definição clássica de Probabilidade, mas também evidenciaram que apresentam lacunas relacionadas a conteúdos do ensino fundamental e da 1ª série do ensino médio. Cabe aqui ressaltar que estávamos voltando de um período de pandemia, o que pode ter agravado essa percepção de possíveis lacunas e nos conhecimentos relacionados a conteúdos de anos anteriores. Com o desenvolvimento da sequência, participação e respostas dos alunos, percebemos que o professor, como mediador/tutor, tem um papel importante na construção do conhecimento matemático do aluno, e deve sempre acompanhar o sinal dos tempos, propondo estratégias de ensino-aprendizagem de forma a promover a construção do conhecimento matemático dos alunos, colocando-os como protagonistas desse processo, tornando a Matemática interessante e significativa para eles.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem. Ensino Médio. Metodologia Ativa. Probabilidade. TBL.

ABSTRACT

Several are the difficulties reported by teachers and students throughout the teaching-and-learning process in mathematics, particularly in what regards the content of Probability. The present dissertation has as its objective to analyze how a didactic sequence, developed through the use of Team-based learning (TBL) strategy may contribute to enhance not only teaching, but also student learning outcomes. The sequence in question, had initially been planned to be developed in remote (online) environment due to the COVID-19 pandemic. Nevertheless, in August 2021, students were allowed to partially return to school in smaller groups. Each of these groups would attend school, in person, every two weeks. After that, the nearly total return of students finally took place in September 2021. Hence, it was decided to adapt and change our initial planning and apply both the questionnaires and the didactic sequence in presential manner. In order to develop the project and the didactic sequence, an initial diagnostic questionnaire was applied, two different methodological paths were built and developed and students were subjected to a final questionnaire. The methodological path 1, involved the concepts of Sample Space, Event and Randomized Experimentation, the classic definition of Probability and the Probability of the union of two or more events. The methodological path 2, referred to the Probability of Independent Events and Conditional Probability. Both methodological paths were developed, based on TBL Teaching-and-Learning Strategy, in a class of 43 students of the 11th grade of high school, from a private school in Belo Horizonte. The data collected along the applications was registered and analyzed through a qualitative approach of interpretative base, being open-ended answers of students analyzed in a way that these would reveal relevant information regarding the students' learning in what regards the content of Probability. These answers showed, for instance, that students apprehended the classic definition of Probability, but they also highlighted that the same students presented gaps related to contents from junior high school and from the 10th grade. It is important to emphasize that we were returning from an extended period of pandemic, what might have worsened this perception of possible learning gaps and in knowledge regarding the content of previous years. With the development of the didactic sequence, the participation and the answers from students, it was possible to notice that the teacher, as a mediator/tutor, has an important role in the construction of the students' mathematical knowledge and that the teacher should always follow the signs of time, proposing different teaching-learning strategies in order foster the construction of learners' mathematical knowledge, placing them as protagonists in the process, making mathematics interesting and meaningful for them.

Keywords: Learning and teaching. High School. Active-learning methodologies. Probability. TBL.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CEFET-MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

GRI – Gabarito de Retroalimentação Imediata

GRIr – Gabarito de Retroalimentação Imediata raspado

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

LGN – Lei dos Grandes Números

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PFC – Princípio Fundamental de Contagem

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAI – Sala de Aula Invertida

SENAC – Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial

SENAI – Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial

STEAM – Science, Technology, Engineering, Arts and Design and Mathematics

TBL – Aprendizagem em Equipes

TGPe – Teste de Garantia de Preparo em equipes

TGPi – Teste de Garantia de Preparo individual

UNIBH – Centro Universitário de Belo Horizonte

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Comecei minha carreira profissional como professor, em abril de 1999, em uma escola estadual no município de Contagem, região metropolitana de Belo Horizonte. Nessa época, trabalhava em uma indústria como técnico em eletrotécnica durante o dia e lecionava matemática à noite para alunos do Ensino Médio.

Em setembro de 2002, após minha aprovação em um concurso público para professor, em escolas estaduais de Minas Gerais, decidi desligar-me completamente da indústria e passei a dedicar-me exclusivamente à Educação. Em fevereiro de 2003, fui contratado por uma escola particular em Belo Horizonte para o turno vespertino e assumi meu cargo no estado como professor efetivo para lecionar no turno matutino. Também em 2003, iniciei e conclui um Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, no Centro Universitário de Belo Horizonte – UNIBH, com o intuito de me atualizar e contribuir para uma melhor formação dos alunos.

Trabalhei até o ano de 2007 como professor na rede estadual de educação. Nesses oito anos como professor, conversando com professores da área de Matemática, tanto nas escolas em que trabalhei, quanto em outras escolas estaduais, pude perceber que o conteúdo de Probabilidade, desenvolvido na 2ª série do Ensino Médio, geralmente é trabalhado na última etapa do ano letivo e normalmente é a última matéria a ser ensinada no ano letivo considerado. Atualmente, percebo uma mudança de paradigma nesse sentido, ou seja, os professores têm dado uma importância maior à Probabilidade.

Em fevereiro de 2011, fui admitido em uma outra escola particular de Belo Horizonte, a qual também deixava a Probabilidade para a última etapa do ano letivo. Após 06 (seis) anos nessa escola, sugeri, em 2016, uma mudança no planejamento da 2ª série do Ensino Médio, série na qual trabalhava. Dessa forma, em 2017, o conteúdo de Probabilidade foi desenvolvido na primeira etapa do ano letivo. Com essa proposta, foi possível trabalhar e explorar muito mais sobre Probabilidade, discutir situações-problemas interessantes, bem como discutir sobre a aplicação da Probabilidade em diversos tipos de jogos. Foi uma experiência muito rica e tem sido até hoje.

Percebendo as grandes transformações que a educação vem passando nos últimos anos, e sempre incomodado com as dificuldades dos professores durante o processo de ensino e dos alunos durante o decorrer do processo de aprendizagem, em 2019 iniciei o curso de Pós-

Graduação no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na instituição associada Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), em busca de um aprimoramento pessoal, mas também com intuito de favorecer o processo de ensino-aprendizagem e minimizar tais dificuldades.

O curso de mestrado iniciou com uma turma de 20 alunos e após o 1º ano de curso, ao iniciar mais duas disciplinas, em fevereiro de 2020, fomos surpreendidos por um vírus, vindo da China, e que afetou todo o Mundo, vírus esse, denominado SARS-CoV-2, causador da doença Covid-19 ou Coronavírus. Essa grave doença, que se transformou em uma pandemia, se espalhou rapidamente pelo Brasil causando, em março de 2020, o fechamento de vários seguimentos, como: comércio, indústrias, escolas, shows, teatros, igrejas, entre outros..

Assim, as aulas do mestrado e as das demais instituições, em todos os níveis de ensino, foram suspensas em meados de março de 2020 e tivemos que ficar aguardando decisões políticas sanitárias regionais e nacionais para o retorno.

Em agosto de 2020, retomamos nosso curso de mestrado com apenas uma disciplina, ofertada no formato remoto (on-line), a qual finalizamos em dezembro desse mesmo ano. Em 2021, seguimos no formato remoto e fizemos mais 04 (quatro) disciplinas. Foi uma mudança muito significativa tanto para nós discentes, quanto para o corpo docente do CEFET-MG. Momentos de muitas mudanças, aprendizados e crescimento tanto profissional quanto pessoal.

Como mencionado, todas as escolas fecharam suas portas em março de 2020, por tempo indeterminado, e professores de diversos segmentos de ensino (desde o ensino infantil até o ensino superior) tiveram que se adaptar a uma forma diferente de ensinar, aprender e avaliar. Por meio de plataformas virtuais, lecionaram, tiraram dúvidas dos alunos, postaram tarefas e desenvolveram diversas outras atividades, se reinventando a cada dia, “trocando o pneu do carro andando”.

A educação mundial e, consequentemente, a brasileira, vem passando por grandes transformações nesses 10 anos mais recentes, em relação à presença e implementação de novas tecnologias nas escolas, assim como novas metodologias e estratégias de ensino. Percebemos, então, que essa pandemia apenas acelerou um processo que já vinha sendo construído pelas diversas instituições educacionais (educação infantil, fundamental, médio, técnico e superior). Dessa forma, percebe-se que as tecnologias são, e continuarão sendo, ferramentas de suma importância para a educação e para o mundo do trabalho. Com isso, como professores, precisamos estar preparados, bem como precisamos preparar nosso aluno para o atual cenário, uma vez que a tecnologia veio para ficar.

Juntamente com as novas tecnologias, diversas metodologias e estratégias de ensino-aprendizagem vêm ganhando mais envolvimento por parte de educadores, de forma a possibilitar uma aprendizagem com mais significado para os educandos, sendo algumas delas denominadas Metodologias Ativas.

Trabalhar com Metodologias Ativas requer uma formação contínua por parte dos profissionais da educação, e é possível notar um crescente envolvimento desses para se adequarem à nova realidade e demandas da educação escolar. É preciso também, que o professor escolha algumas metodologias e se aprofunde nelas, optando por aquela que julgar mais adequado no contexto considerado. Atualmente, muitas são as oportunidades e ferramentas ofertadas; entretanto utilizar várias ferramentas de forma superficial, talvez não seja um bom caminho. Nesse momento de pandemia, vários cursos on-line têm surgido, dando ao professor a oportunidade de aperfeiçoamento, e é necessário que o professor fique "antenado" a esse novo cenário.

O principal objetivo das Metodologias Ativas é incentivar os alunos a aprender de forma autônoma e participativa, por meio de situações-problemas fictícias ou reais. A proposta é que o aluno esteja no centro do processo de aprendizagem, participando ativamente e sendo responsável pela construção de seu próprio conhecimento.

Conforme relato anterior, nossas experiências, enquanto professores de Matemática na Educação Básica, nos mostram várias dificuldades que muitos professores e alunos têm ao lidar com o objeto do conhecimento "Probabilidade" em situações de ensino e aprendizagem. A Probabilidade desempenha um importante papel na área de Matemática, bem como em diversas áreas do conhecimento, como na Ciência, na Tecnologia, na Medicina, dentre outras. Sua importância é ressaltada nos documentos oficiais como PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e BNCC (Base Nacional Comum Curricular), nos quais é tratada como um dos temas estruturantes. No caso da Probabilidade, ela está associada à Estatística, devido as suas afinidades, conforme poderá ser visto mais adiante.

Sendo um assunto interessante e importante para a formação de um cidadão crítico e ativo no mundo cotidiano, e diante das dificuldades encontradas por professores para promoverem o ensino, e pelos alunos, para desenvolverem a aprendizagem da Probabilidade, ficamos instigados a buscar por mais informações a respeito do ensino de Probabilidade na Educação Básica e por estratégias que contribuíssem para o processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo. Assim, realizamos um mapeamento de dissertações produzidas no Profmat sobre o tema Probabilidade e que tinham alguma relação direta ou indireta com Metodologias

Ativas na Educação. Esse mapeamento nos apontou caminhos e mostrou que alguns professores têm buscado formas de diversificar o ensino, a fim de promover a aprendizagem dos alunos de uma forma mais ativa. Esse mapeamento foi consolidado em forma de artigo e apresentado no IX Encontro Mineiro de Educação Matemática, com o título: Um mapeamento de dissertações do Profmat sobre o ensino de Probabilidade. (PALMEIRA JR, PAGANI, FERREIRA, 2021)

Diante disso, nosso objetivo geral pode ser expresso na seguinte pergunta: ***"De que forma uma sequência didática, desenvolvida por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL[1], pode contribuir para melhorar o ensino e consequentemente promover a aprendizagem dos alunos?"***

Esta dissertação se desenvolve em seis capítulos. Neste presente capítulo, apresentamos a introdução, que retrata nossas experiências e inquietações em relação ao ensino e aprendizagem dos conteúdos relacionados ao tema Probabilidade, os problemas pandêmicos enfrentados durante nosso curso de metrado e os objetivos da nossa pesquisa.

No capítulo 2, descrevemos o referencial teórico relacionado à Educação. Fizemos um breve histórico sobre a educação brasileira, relatando desde seu desenvolvimento no Brasil em 1549, quais eram seus objetivos iniciais, a sanção da primeira lei em 1827, a implementação da Escola Nova em 1920 até o desenvolvimento dos atuais documentos oficiais. Buscamos também explorar, de uma forma geral, as Metodologias Ativas na educação e, de forma específica, como a Estratégia de Aprendizagem TBL (Aprendizagem em Equipes[2]) deve ser desenvolvida de forma a possibilitar um melhor aprendizado do conteúdo de Probabilidade com foco no aluno, rompendo, dessa forma, com o ensino tradicional.

No capítulo 3, abordamos o conteúdo de Probabilidade, com seus conceitos, definições, proposições e demonstrações, explorando diversos exemplos que podem contribuir para a sala de aula do professor, bem como variadas estratégias de resolução desses exemplos, que julgamos interessantes para serem trabalhados e discutidos com os alunos em sala de aula. Nesse capítulo, também consta o link de um programa que possibilita o cálculo rápido da probabilidade do problema dos aniversários, que será apresentado no próprio capítulo.

No capítulo 4, apresentamos a metodologia de pesquisa desenvolvida e sua abordagem e os métodos de coleta de dados utilizados na construção desta dissertação.

---

[1] TBL-em inglês, *Team Based Learning.*

[2] A tradução de TBL (Team Based Learning) para o português é ABE (Aprendizagem Baseada em Equipes), porém utilizamos em toda a dissertação a tradução "Aprendizagem em Equipes" por entender que a aprendizagem se desenvolve em equipes e não baseada nas equipes.

Após o embasamento teórico dos temas relatados nos capítulos 2, 3 e 4, construímos nossa sequência didática para o desenvolvimento do trabalho. Assim, no capítulo 5 apresentamos nossa sequência didática, juntamente com o levantamento e a análise dos resultados, com o intuito de responder a nossa pergunta e promover e favorecer o ensino-aprendizagem desses conteúdos para alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Belo Horizonte. Utilizamos Metodologias Ativas, por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL, também conhecida como Aprendizagem em Equipes.

Para finalizar, no capítulo 6, apresentamos nossas considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, o que poderia ser modificado na Estratégia de Aprendizagem TBL de forma a contribuir ainda mais para o aprendizado de nossos alunos e quais são nossas expectativas futuras em relação ao ensino e à aprendizagem da Probabilidade.

2 EDUCAÇÃO, METODOLOGIAS ATIVAS E ESTRATÉGIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM

2.1 Um Breve Histórico sobre a Educação Brasileira

A educação brasileira, segundo Azevedo (2018), Souza (2019) e Santos (2019), inicia-se em 1549, com a chegada dos portugueses ao Brasil, cuja missão era a catequização indígena. Eles tinham como objetivos a conversão dos índios à fé cristã, especificamente à religião católica. Portugal percebe a necessidade de comunicação com os índios e então começa um processo de transformação da cultura local: vários hábitos vão se modificando, assim como a crença, os costumes e vestimentas. Também seria necessária uma forma de comunicação mais eficaz, que se deu por meio da educação jesuítica aos índios.

Naquela época, foi necessária a construção de pequenas escolas, improvisadas, chamadas missões, que tinham um mínimo de infraestrutura para tornar o processo de alfabetização possível. Essa construção se deu por meio da própria comunidade indígena, já as escolas para os filhos dos colonos eram mais estruturadas, pois recebiam mais investimentos da coroa portuguesa. O próprio currículo escolar era diferenciado, pois os objetivos de formação para os índios eram mais voltados para a religiosidade e o aprendizado da língua portuguesa, enquanto para os filhos dos colonos era uma formação mais diversificada, tendo em seu currículo: Matemática, Gramática, Artes, Humanidades, Filosofia, entre outros. A educação dos índios era uma tarefa encampada pelo padre José de Anchieta, considerado um dos pedagogos mais influentes da educação jesuítica denominada Companhia de Jesus.

Segundo Azevedo (2018), em 1759, a Companhia de Jesus foi expulsa do Brasil devido ao tratado de Madrid, assinado por Portugal e Espanha, em 1750. Com isso, surge um modelo de educação voltado para o trabalho, que somente em 1772 ocorre de maneira formal, após uma reforma denominada pombalina. Tal reforma coloca o professor como um personagem central no processo de ensino, fazendo com que as escolas busquem por professores mais especializados e não mais os jesuítas.

Como reforça Azevedo (2018), ainda há muito o que se pesquisar, mas, pelos estudos feitos até então, essa reforma diminuiu a quantidade de pessoas que teriam acesso à formação, devido à escassez de professores qualificados naquela época.

Em 1808, a coroa portuguesa é expulsa de Portugal, o que faz com que ela injete grandes investimentos na educação brasileira, de maneira que surgem as primeiras escolas de cursos superiores. Logicamente, tais escolas eram voltadas exclusivamente para filhos dos portugueses e a aristocracia brasileira.

Ainda conforme relata Azevedo (2018), em 1827 foi sancionada a primeira lei educacional brasileira, que trazia em seu artigo 1º que "Em todas as cidades, vilas e lugares mais populosos, haverá as escolas de primeiras letras que forem necessárias". Escolas de primeiras letras eram as escolas primárias. Mesmo com algumas reformas, e, após a Proclamação da República, em 1889, as escolas continuaram melhores para as elites e esquecidas para a classe mais baixa.

Com a implementação da Escola Nova, em 1920, sob influência do educador Anísio Teixeira[3], tendo como base as propostas educativas do filósofo americano John Dewey[4], houve uma tentativa de tornar a educação mais inclusiva. Após a criação do Ministério da Educação, na década de 1930, surgem as escolas técnicas agrícolas, comercial e industrial, para atender a classe mais pobre e principalmente as demandas daquela época. Nesse período surgem o SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial), em 1942, e o SENAC (Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial), em 1946.

John Dewey, acreditava que o conhecimento é adquirido por meio de consensos, resultantes de discussões baseadas em situações-problemas que façam o aluno construir seu próprio aprendizado, baseado em reflexões individuais e coletivas. O que torna a escola, para esse autor, um local propício para práticas conjuntas e de promoção de situações de cooperação, ao invés de lidar com as crianças de forma isolada.

> O professor deve apresentar os conteúdos escolares na forma de questões ou problemas e jamais dar de antemão respostas ou soluções prontas. Em lugar de começar com definições ou conceitos já elaborados, deve usar procedimentos que façam o aluno raciocinar e elaborar os próprios conceitos para depois confrontar com o conhecimento sistematizado. Pode-se afirmar que as teorias mais modernas da didática, como o construtivismo e as bases teóricas dos Parâmetros Curriculares Nacionais, têm inspiração nas ideias do educador. (RAMALHO apud BRANDÃO, 2015, p. 30).

---

[3] Anísio Teixeira, nasceu em 1900, no Rio de Janeiro. Jurista, educador e escritor, foi um dos personagens principais para a implantação da Escola Nova no Brasil nas décadas de 1920 e 1930.

[4] John Dewey, nasceu em 1859, em Burlington-USA. Estudou artes e filosofia e é reconhecido como um dos fundadores da escola filosófica de Pragmatismo. Seus trabalhos estavam alinhados ao movimento da Escola Nova no Brasil.

Na década de 1960, em Pernambuco, já existiam relatos dos ensinamentos de Paulo Freire[5] em comunidades pobres, visando a alfabetização de adultos, utilizando de métodos próprios, em que a memorização seria deixada de lado e atividades voltadas ao pensamento e construção das ideias seriam preponderantes (BRANDÃO, 2015).

Em 1961, é promulgada a primeira LDB (Lei de Diretrizes e Bases) da educação, seguida por uma nova versão em 1971, que vigorou até a promulgação da mais recente, em 1996. A atual LDB (9394/96) foi sancionada em 1996 e explicita que, no Ensino Médio, o aluno seja capaz de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las, criar, formular, ao invés da simples memorização.

A partir dos princípios definidos na nova LDB, em um trabalho conjunto entre o Ministério da Educação e os professores de todo País, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para o Ensino Fundamental, em 1997, e, para o Ensino Médio, em 1999, definindo assim, referências curriculares comuns a todas as regiões brasileiras, apoiados em competências básicas para a formação de nossos jovens, que buscam orientar os professores e apontam caminhos que abordam novas metodologias. Os PCN (BRASIL, 1997,1999) são documentos oficiais que visam orientar o ensino, a fim de garantir a todas as crianças e adolescentes o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania.

A ideia de uma organização curricular, com uma base nacional comum, já estava inserida nos PCN do Ensino Fundamental e Médio, sendo que, no Ensino Médio, essa organização divide os conhecimentos em 3 grandes áreas, a saber:

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e suas Tecnologias.

É importante notar que, nos PCN do Ensino Médio, a Matemática está junto com a Ciências da Natureza como uma única grande área. Porém, com a criação da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), na etapa do Ensino Fundamental, essas áreas aparecem divididas em 5 grandes áreas, a saber: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso, “separando”, assim, a Ciências da Natureza da Matemática. Já na parte que se refere ao Ensino Médio tem-se a seguinte divisão: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e os Itinerários Formativos. Percebe-se que a separação da

[5] Paulo Freire, nasceu em 1921, em Recife. Filósofo, escritor e educador, é considerado um dos pensadores mais notáveis na história da pedagogia mundial.

Matemática da área de Ciências da Natureza foi necessária, visto que a Matemática é uma ferramenta que possibilita ao educando ler, interpretar e transformar a realidade, de modo que ela possui relação direta com a linguagem, as ciências humanas e as ciências da natureza. Além disso, ela possui características próprias, como uma proposta de trabalho que inclui a educação financeira e o raciocínio lógico, podendo também ser trabalhada com a programação e a robótica. (BRASIL, 2018)

Ao ser oficialmente lançada para o Ensino Fundamental, em dezembro de 2017, e para o Ensino Médio, em dezembro de 2018, a BNCC visa definir uma forma progressiva de aprendizagens essenciais, que os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio), de maneira a assegurar os direitos de aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

Buscando um alinhamento comum curricular nacional, a BNCC especifica um mínimo que se espera que as escolas desenvolvam com os alunos em todo o Brasil, em todas as áreas do conhecimento. Dessa forma, ela apresenta dez competências gerais, no âmbito pedagógico, que dão sustentação para assegurar os direitos de aprendizagens e o desenvolvimento dos alunos, das quais aqui destacamos a 9 e a 10, pois procuram desenvolver habilidades socioemocionais, habilidades essas que fazem parte do nosso trabalho de pesquisa, uma vez que nosso trabalho é baseado na Estratégia de Aprendizagem TBL.

Quadro 1 – Um Recorte das Competências Gerais da Educação Básica

Competência	Descrição
9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte: Brasil (2018)

Na BNCC, competência é definida como “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho”. (BRASIL, 2018, p. 8).

Ao manifestar preferência em trabalhar por competências, a BNCC deixa claro o que os alunos devem “saber” (desenvolvendo conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e também o que devem “saber fazer”, ou seja, utilizar de seus conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, para o pleno exercício da cidadania, a resolução de problemas e a participação no mundo do trabalho.

Ao se comprometer com uma educação integral, a BNCC espera que os alunos sejam capazes de resolver problemas de forma proativa, colaborativa, sabendo lidar com o excesso de informações de forma que as analisem, critiquem e decidam o que é realmente relevante e importante para sua formação enquanto sujeito da aprendizagem. Pode-se observar um pacto federal para sua implementação, que, por meio de sua base curricular, busca minimizar as diferenças socioeconômicas, por meio de uma educação igualitária, pautada na equidade, no reconhecimento de que as necessidades dos alunos são diferentes, na diversidade cultural e igualdade, dando oportunidade de ingresso e permanência na educação básica (BRASIL, 2018).

Como forma de substituir um currículo único, engessado e muito amplo, por um modelo diversificado e flexível, conforme explicitado na BNCC, a Lei nº 13.415/201754 alterou a LDB, estabelecendo que o currículo do Ensino Médio será orientado pela Base Nacional Comum Curricular, que inclui itinerários formativos, organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino (BRASIL, 2018).

Dessa forma, é preciso, além de uma base comum curricular, que os professores busquem por Metodologias de Ensino-Aprendizagem que favoreçam esse desenvolvimento. Pensando nisso, nosso trabalho busca a utilização de uma estratégia de ensino-aprendizagem que possa, em consonância com as orientações da BNCC, contribuir para o desenvolvimento do Ensino e promover a Aprendizagem dos alunos, contribuindo assim, para seu desenvolvimento pessoal e interpessoal, a qual será explicitada no próximo capítulo.

2.2 Metodologias Ativas na Educação

Quando ouvimos a palavra Educação, naturalmente, vem à nossa cabeça a ideia de escola e, consequentemente, muitos pensam em uma sala de aula, com alunos enfileirados, em que o professor explica sobre um determinado assunto, eles anotam e no final desse processo ocorre a temerosa avaliação. Os conteúdos são transmitidos de maneira única, na esperança de que todos os alunos absorvam o que está sendo transmitido, sem levar em consideração que as pessoas são diferentes e que tendem a aprender de maneiras diferentes.

Esse tipo de escola, que foi fundamental no século XVIII e XIX, na época industrial, se tornou obsoleta; porém, atualmente, ainda permanece "viva". Em contraposição a esse tipo de escola, surgem escolas que sugerem a participação efetiva do aluno, valendo-se de estratégias de ensino-aprendizagem mais atuais.

A Escola Nova, proposta por John Dewey, em 1920, pautada pelo aprender fazendo, converge com os pensamentos de Paulo Freire, sobre uma educação dialógica e participativa, que se desenvolve por meio da problematização da realidade. Ambas propostas, estão diretamente relacionadas às metodologias ativas, uma vez que nessas metodologias o aluno passa a ser o sujeito ativo de sua própria aprendizagem, seja na forma presencial, em casa ou de maneira híbrida, sempre mediada pelo professor, e orientada pela iniciativa, cooperação e de forma autônoma, por meio da experiência e do autoconhecimento (BACICH, MORAN, 2018).

Cabe aqui salientar também que os PCN já faziam alusão às Metodologias Ativas, quando cita que

> A "pedagogia renovada" é uma concepção que inclui várias correntes que, de uma forma ou de outra, estão ligadas ao movimento da Escola Nova ou Escola Ativa. Tais correntes, embora admitam divergências, assumem um mesmo princípio norteador de valorização do indivíduo como ser livre, ativo e social. **O centro da atividade escolar não é o professor nem os conteúdos disciplinares, mas sim o aluno, como ser ativo e curioso.** O mais importante não é o ensino, mas o processo de aprendizagem. Em oposição à Escola Tradicional, a Escola Nova destaca o princípio da aprendizagem por descoberta e estabelece que a atitude de aprendizagem parte do interesse dos alunos, que, por sua vez, aprendem fundamentalmente pela experiência, pelo que descobrem por si mesmos. (BRASIL, 1997, p. 28, grifos nossos)

Segundo Wadsworth (1995), para Piaget, "todo conhecimento é uma construção resultante das ações da criança" e que essa construção do conhecimento "ocorre quando acontecem ações físicas ou mentais sobre objetos que, provocando o desequilíbrio, resultam em assimilação e acomodação dessas ações e, dessa forma, em construção de esquemas ou conhecimento" (WADSWORTH, 1995, p. 13). Dessa forma, percebemos cada vez mais a importância das Metodologias Ativas como um meio de tornar o aluno um sujeito ativo no processo do ensino-aprendizagem, a fim de potencializar o desenvolvimento do seu conhecimento.

Bacich e Moran consideram que, atualmente, dois conceitos são extremamente importantes para a aprendizagem: Aprendizagem Ativa e Aprendizagem Híbrida. Conforme descrevem,

> [...] As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor; a

> aprendizagem híbrida destaca a flexibilidade, a mistura e compartilhamento de espaços, tempos, atividades, materiais, técnicas e tecnologias que compõem esse processo ativo. Híbrido, hoje, tem uma mediação tecnológica forte: físico-digital, móvel, ubíquo, realidade física e aumentada, que trazem inúmeras possibilidades de combinações, arranjos, itinerários, atividades. (BACICH & MORAN, 2018, p. 4).

Para Filatro e Cavalcanti, as Metodologias Ativas

> são estratégias, técnicas, abordagens e perspectivas de aprendizagem individual e colaborativa que envolvem e engajam os estudantes no desenvolvimento de projetos e/ou atividades práticas. Nos contextos em que são adotadas, o aprendiz é visto como um sujeito ativo, que deve participar de forma intensa de seu processo de aprendizagem (mediado ou não por tecnologias), enquanto reflete sobre aquilo que está fazendo. (FILATRO & CAVALCANTI, 2018, p. 29)

Nesse sentido, o professor tem um papel fundamental, pois ele é o autor ou designer de roteiros de aprendizagens, que contribuem para as diversas possibilidades de implantação dessas metodologias, que podem ser realizadas por projetos, resolução de problemas, investigação, sala de aula invertida, gamificação, STEAM[6], entre outros (BACICH, MORAN, 2018). Entretanto, o aluno deve ser sempre o protagonista do processo de ensino-aprendizagem.

Uma das formas de se desenvolver as aprendizagens ativas e/ou híbridas é utilizar a "Sala de Aula Invertida", do inglês *Flipped Classroom,* em que o professor sai do papel central do processo de ensino-aprendizagem e coloca o aluno como protagonista de sua própria aprendizagem. Nesse sentido, ele deixa de ser um sujeito passivo para dar lugar a um agente ativo em busca de seu próprio conhecimento, a fim de aumentar sua participação e engajamento. A proposta dessa metodologia é fazer em casa o que se fazia na aula e fazer na aula o que se fazia em casa. Ou seja, em casa o aluno busca/pesquisa pelos conhecimentos propostos pelo professor, que irá propor caminhos, por exemplo, livros, artigos, pesquisas na internet, videoaulas, entre outros e na aula ele realizará atividades avaliativas ou não, podendo ser individual ou em grupo, experimentações, resolução de problemas complexos, baseado em tudo que foi pesquisado/assistido.

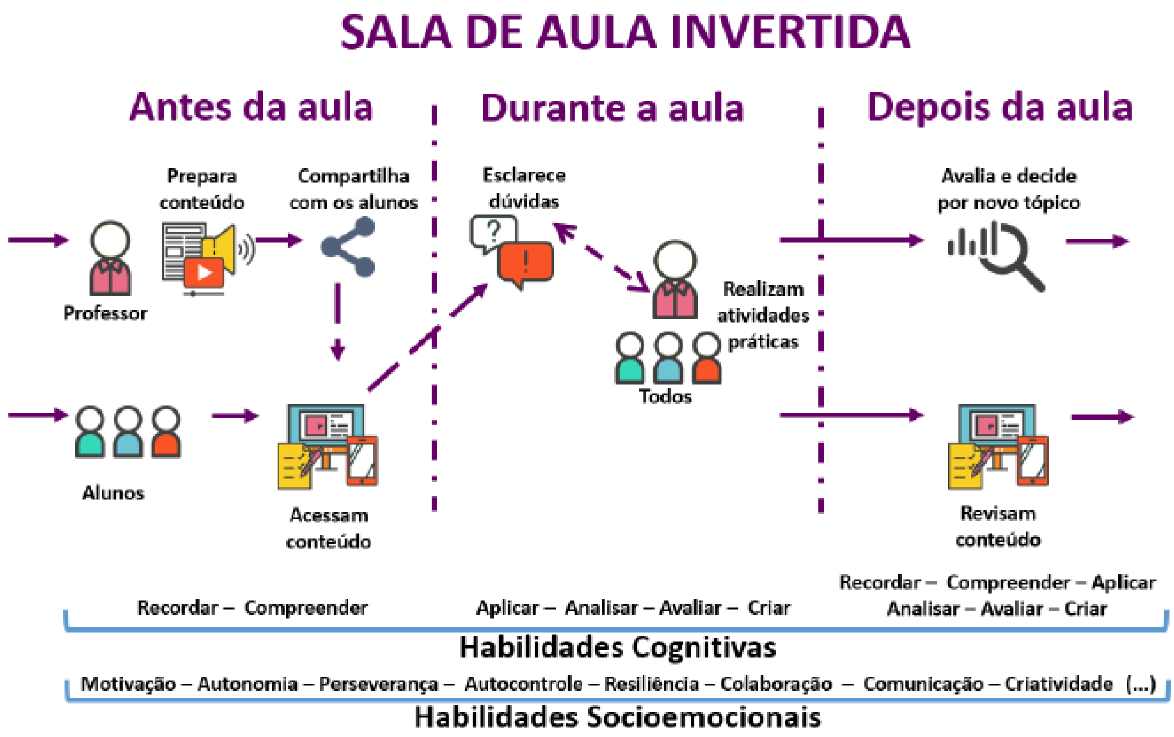
Assim, quanto mais o aluno se informar, maior será a chance de sucesso nas atividades propostas *a posteriori*, e, nesse sentido, ele vai ganhando autonomia em seu processo educativo. Observem a importância que tem o professor nesse processo, pois ele deverá criar caminhos diversos para contribuir com a aprendizagem dos alunos. Além disso, o professor como

---

[6] STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Design and Mathematics) refere-se ao desenvolvimento do currículo das áreas de ciências, tecnologia, engenharia, artes, design e matemática por meio de projetos e práticas interdisciplinares de maneira que o aluno coloque a mão na massa.

mediador também é o responsável pela formalização dos conteúdos ao final do processo, evitando, assim, compreensões que possivelmente possam estar equivocadas e introduzindo símbolos inerentes à escrita própria do objeto de conhecimento estudado. Nesse sentido, o planejamento se torna fundamental para alinhar todo o trabalho a ser desenvolvido, não se esquecendo sempre do processo avaliativo processual, dando *feedbacks* constantes aos alunos e retomando o que perceber que ainda não foi consolidado. Na figura a seguir, tem-se a ilustração do processo de aplicação da sala de aula invertida.

Figura 1: Sala de aula invertida



Fonte: https://nte.ufsm.br/images/PDF_Capacitacao/2016/RECURSO_EDUCACIONAL/Ebook_FC.pdf Acesso em: 18 nov. 2021.

Dessa forma, é fundamental que as escolas possibilitem formas de aperfeiçoamento dos professores, ofereçam recursos tecnológicos para sua formação, bem como para o desenvolvimento das atividades, lembrando que há possibilidades de trabalhos sem a tecnologia. Porém, como os alunos atuais estão inseridos em um mundo tecnológico e dinâmico, envolvê-los nesse mundo pode contribuir bastante para o desenvolvimento de suas aprendizagens e de novos conhecimentos no mundo digital.

Uma forma de aplicar as Metodologias Ativas em nosso trabalho foi utilizar a Estratégia de Aprendizagem TBL, para promover o Ensino-Aprendizagem de Probabilidade. A seguir explicaremos com mais detalhes sobre essa estratégia.

2.2.1 A Estratégia Metodológica TBL (Aprendizagem em Equipes)

A TBL (Aprendizagem em Equipes) é uma estratégia metodológica de ensino-aprendizagem que procura promover a aprendizagem dos alunos por meio da colaboração, participação efetiva, comunicação, autoaprendizagem e resolução de problemas complexos do assunto a ser estudado.

Essa estratégia foi desenvolvida nos anos de 1970 para cursos de Administração, por Larry Michaelsen[7], para se trabalhar com turmas com muitos alunos, em torno de cem, mas que também pode ser aplicada em turmas menores.

A TBL passou a ser mundialmente difundida nos anos 2000, quando o governo norte-americano passou a financiar professores da área da saúde e os incentivavam na busca de novas Metodologias de Ensino-Aprendizagem, fazendo com que a TBL se tornasse uma das principais estratégias. (KRUG *et al.*, 2016)

A busca por essas novas estratégias de ensino-aprendizagem se dá quando pesquisadores/professores percebem que a sociedade passou a ter fácil acesso à informação. Antigamente, como não havia muitas formas de informação, os professores levavam essas informações para as salas de aula, transmitiam-nas aos alunos, e esses tinham que compreender o que era ensinado.

Atualmente, se desejamos adquirir conhecimentos sobre um determinado assunto é muito fácil o acesso à pesquisa sobre qualquer tema, tanto em nossa língua materna quanto em outras. Dessa forma, tendo interesse sobre um certo assunto, podemos acessar informações de várias partes do mundo. Conforme Bacich e Moran, estudos mostram que quando o professor fala menos, orienta mais, e o aluno participa de forma ativa, a aprendizagem é mais significativa. (BACICH, MORAN, 2018)

A TBL pode ser trabalhada em conjunto com outras estratégias metodológicas, como a Aprendizagem Baseada em Problemas, Aprendizagem Baseada em Projetos, Estudo de Casos, entre outras, potencializando ainda mais sua capacidade de desenvolver a aprendizagem dos alunos. A TBL incentiva a aprendizagem por estudos autônomos, em grupos, gerando discussões sobre problemas complexos. Trabalhar com resolução de problemas faz com que os alunos descubram, reflitam, experimentem, discutam e dessa forma construam seu aprendizado

---

[7] Larry Michaelsen é professor emérito de administração da Universidade de Oklahoma. Ele também é professor emérito da University of Central Missouri, estudioso da Carnegie, estudioso sênior da Fulbright e ex-editor do Journal of Management Education.

com significado, de forma autônoma e ao mesmo tempo colaborativa. O processo de resolução de problemas é

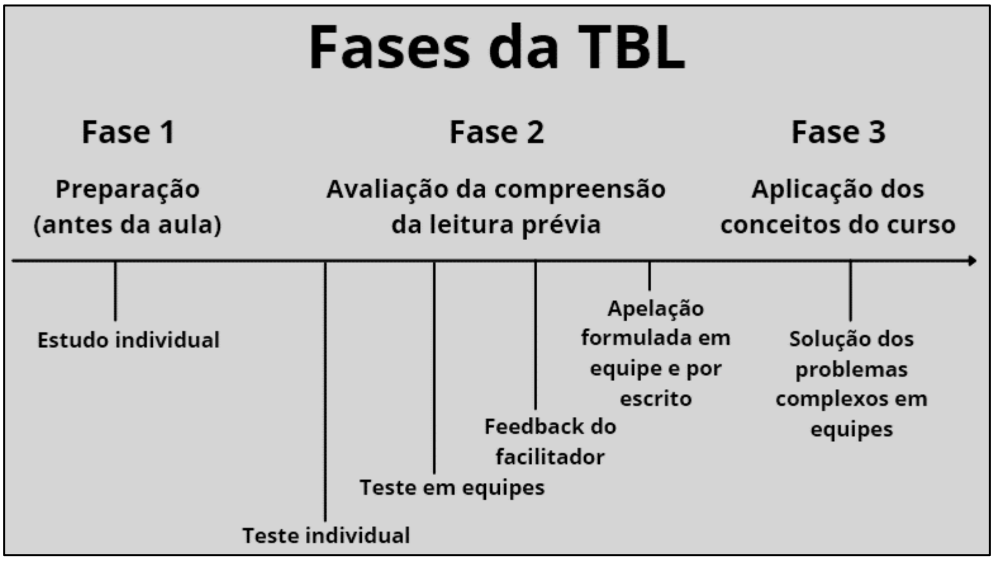
> [..] uma parte integrante do processo da aprendizagem Matemática; isso significa que os alunos aprendem Matemática enquanto estão resolvendo problemas e adquirem maior confiança para usar a Matemática de forma condizente com sua realidade (COSTA, MARTINS & PAGANI, 2021, p.51)

Uma sessão de TBL inicia-se com a divisão da turma em grupos de 5 a 7 alunos. Tal divisão deve ser feita pelo professor a fim de diversificar a formação do grupo, evitando grupos que possuam alunos somente com facilidade ou dificuldade em relação a uma determinada matéria e que possuam laços de amizades muito intensos, o que não seria benéfico para o grupo. Dessa forma, o professor deve mesclar os participantes do grupo de forma diversificada.

Após a divisão dos grupos, o professor deve disponibilizar com antecedência, o(s) material(is) que será(ão) utilizado(s) na sessão da TBL, como por exemplo, livros, artigos, dissertações, videoaulas, sites, entre outros, a fim de que os alunos, em seu tempo, façam leituras, assistam a vídeos, façam resumos e anotações sobre o tema em questão, a fim de se preparem para os testes, denominados testes de garantia de preparo. Essa preparação desenvolve no aluno habilidades como responsabilidade e autoaprendizagem, uma vez que ele precisa se preparar individualmente para as avaliações, individual e em equipes, que serão aplicadas após seu estudo.

A realização de uma sessão de TBL pode ser sintetizada na imagem a seguir.

Figura 2: Fases da TBL



Fonte: Oliveira (2015, p. 12)

A primeira avaliação é denominada Teste de Garantia de Preparo Individual (TGPi), que será realizada em sala, individualmente, por todos os alunos, e que nos fornecerá dados importantes sobre o que cada um deles conseguiu absorver sobre o tema em questão. Nesse momento os alunos recebem um gabarito, conforme apresentado a seguir, e devem preenchê-lo conforme as instruções nele contidas. A seguir, apresentamos o gabarito de aprendizagem individual em branco e preenchido e a pontuação obtida por um determinado aluno.

Figura 3: Gabarito de Aprendizagem Individual em branco

Gabarito de Aprendizagem – Avaliação do preparo prévio individual.

Nome: ____

Instruções: Cada questão vale cinco pontos e você deve assinalar um total de cinco pontos em cada linha. Se estiver totalmente seguro da resposta, marque 5 pontos na alternativa escolhida. Se estiver com dúvida entre duas, três ou quatro distribua os cinco pontos entre elas. Se você estiver totalmente inseguro sobre a resposta correta, você pode assinalar 1 ponto em cada célula.

Alternativa/ Questão	A	B	C	D	E	Alternativa correta	Nº de pontos
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Como cada questão vale 5 pontos e são dez questões, a pontuação máxima é de 50 pontos. Você se classifica em S (suficiente) se tiver 35 pontos ou mais ou em I (insuficiente) se fizer menos de 35 pontos.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2015, p. 13)

Figura 4: Gabarito de Aprendizagem Individual preenchido

Gabarito de Aprendizagem – Avaliação do preparo prévio individual.

Nome: X X X X X X X 36 pontos

Instruções: Cada questão vale cinco pontos e você deve assinalar um total de cinco pontos em cada linha. Se estiver totalmente seguro da resposta, marque 5 pontos na alternativa escolhida. Se estiver com dúvida entre duas, três ou quatro distribua os cinco pontos entre elas. Se você estiver totalmente inseguro sobre a resposta correta, você pode assinalar 1 ponto em cada célula.

Alternativa/ Questão	A	B	C	D	E	Alternativa correta	Nº de pontos
1	5	–	–	–	–	A	5
2	–	1	2	2	–	C	2
3	–	–	–	4	1	D	4
4	3	2	–	–	–	B	2
5	–	3	2	–	–	D	0
6	5	–	–	–	–	A	5
7	–	–	5	–	–	C	5
8	–	5	–	–	–	B	5
9	–	–	–	5	–	D	5
10	–	3	–	2	–	B	3

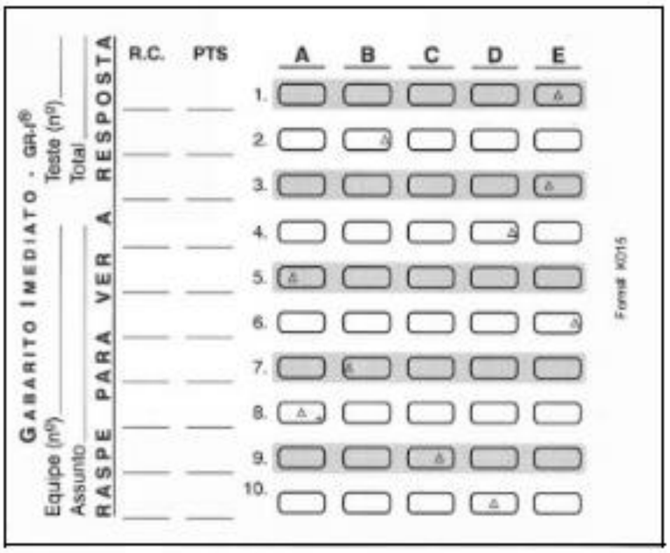
Como cada questão vale 5 pontos e são dez questões, a pontuação máxima é de 50 pontos. Você se classifica em S (suficiente) se tiver 35 pontos ou mais ou em I (insuficiente) se fizer menos de 35 pontos.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2015, p. 14)

A segunda avaliação é denominada Teste de Garantia de Preparo em Equipes (TGPe), que será realizada em sala e em equipes, no mesmo dia do TGPi, e que proporcionará uma rica discussão sobre o que foi assinalado no TGPi por cada aluno. Essa parte do desenvolvimento da estratégia é bem mais dinâmica, uma vez que cada aluno pode expressar e defender suas ideias, utilizando seus recursos de comunicação e argumentação com o objetivo de convencer o grupo do que o levou a marcar uma determinada opção de resposta; assim, a maioria decidirá, de forma democrática, qual será a resposta final do grupo. Percebe-se que a estratégia dialoga diretamente com a competência geral da educação básica 9, proposta pela BNCC, que diz que, os alunos devem "exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza" (BRASIL, 2018, p. 10).

Para registrar as respostas da avaliação em equipes, os alunos recebem um gabarito especial do tipo raspadinha, em que devem raspar a resposta que eles consideram correta. Esse gabarito já sinaliza para o aluno se sua resposta está correta; caso não, ele pode raspar outra resposta. A seguir apresentamos o modelo do gabarito.

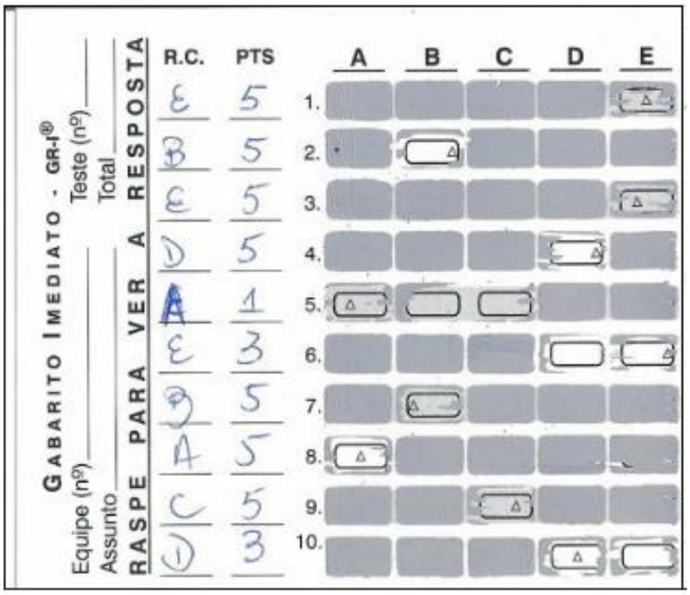
Figura 5: Gabarito de Retroalimentação Imediata - GRI



Fonte: Oliveira (2015, p. 15)

No gabarito anterior, é possível ver quais seriam as respostas corretas. Supondo que após as discussões os alunos raspem uma opção incorreta, eles podem raspar uma outra resposta novamente, após nova discussão, e caso ainda esteja incorreta, após nova discussão podem raspar outra alternativa e assim, sucessivamente. Se na primeira tentativa eles marcarem a opção correta, eles conseguem 5 pontos, caso precisem de duas tentativas, marcam 3 pontos, se precisarem de três tentativas, marcam apenas 1 ponto, necessitando de mais de três tentativas, não marcam ponto. A seguir apresentamos um gabarito de retroalimentação raspado.

Figura 6: Gabarito de Retroalimentação Imediata raspado - GRIr



Fonte: Oliveira (2015, p. 18)

Se, durante a avaliação individual ou nas discussões em equipes, os alunos perceberem algum erro de gabarito ou algum problema de dupla interpretação na própria questão, após o TPGe eles podem registrar esse problema em um documento disponibilizado pelo professor. O pedido dos alunos deverá ser analisado pelo professor e ele dará seu *feedback* para os alunos no mesmo dia. Caso os alunos, ainda assim, não concordem com a explicação do professor, eles podem fazer uma apelação, por escrito, citando referências de leitura ou videoaulas, argumentando por que a questão teria algum erro, e encaminhar para o professor por e-mail. Ele analisará a questão dando o retorno para os alunos, e, em caso necessário, pode anular a questão. Essa análise não precisa ser feita no mesmo dia da avaliação. É de extrema importância o *feedback* do teste, e, sendo assim, o professor deve oportunizar um momento para discussão das questões, bem como uma retomada de conceitos e detalhamento do conteúdo com os alunos.

A sessão finaliza com uma avaliação em equipes, com a resolução de problemas mais complexos, a fim de perceber se os alunos são capazes de resolver tais problemas de forma cooperativa nas equipes.

Inúmeras são as vantagens de se trabalhar com a TBL, pois quando ela propõe fazer com que os alunos façam leituras prévias, pode-se acabar despertando o interesse deles sobre um determinado assunto, e isso pode fazer com que os alunos busquem por novos conhecimentos, o que pode enriquecer ainda mais as discussões nos testes em equipes. Ela também é capaz de desenvolver habilidades interpessoais e em equipes, como a comunicação, cooperação, o respeito à opinião do outro, entre outras. A seguir apresentamos um quadro comparativo da TBL com as aulas tradicionais.

Quadro 2 – Métodos Tradicionais x TBL

Parâmetro	Métodos Tradicionais	TBL
Aluno	Sujeito receptor e passivo	Sujeito ativo
Professor	Transmissor do conhecimento	Mediador do conhecimento
Ambiente	Competitivo e excludente	Cooperativo e includente
Disposição física	Alunos organizados em fileiras.	Alunos organizados em fileiras e em equipes.
Aprendizagem	Pela memorização e reprodução de informações.	Por descobertas individuais e em equipes, por construção do raciocínio.
Aulas	Expositivas, centradas no professor.	Expositivas, dialogadas, centradas no aluno.
Metodologia	Transmissiva	Ativa
Avaliação	Somativa, uniforme, privilegia o produto e a devolução do conteúdo transmitido pelo professor.	Formativa, processual, privilegia a conscientização do aluno durante o processo.
Resultado	Formação de aluno reprodutor de informação, não criativo, individual, com dificuldade de trabalhar em grupos.	Formação de um aluno criativo, autônomo, argumentativo, que sabe trabalhar em grupo e capaz de resolver problemas.

Fonte: Elaborado pelo AUTOR (2021)

É possível perceber a importância das Metodologias Ativas na Educação, principalmente na educação do século XXI, em que os alunos estão super conectados, vivendo em um mundo dinâmico e em constante transformação. As Metodologias Ativas vão ao encontro das propostas pedagógicas sugeridas nos PCN e na BNCC, quando essas propõem eixos estruturantes que buscam uma aprendizagem criativa, crítica, personalizada, empreendedora e compartilhada. Na próxima seção, apresentaremos conceitos e definições acerca do tema Probabilidade, conteúdo que é o objeto central de nossa pesquisa e sobre o qual percebemos certa dificuldade por parte dos alunos, principalmente no Ensino Médio.

3 PROBABILIDADE

3.1 Um Breve Histórico

O início do pensamento probabilístico está associado não apenas a diversas formas de jogos de azar que existiam a cerca de 3000 anos a.c., mas, também ao processamento de dados estatísticos, que já eram realizados nos censos na Babilônia, China e Egito, naquela época.

Em Roma, os dados demográficos eram registrados com o objetivo de cobrança de impostos. Na China, os dados estatísticos vinham da agricultura, para fins comerciais.

Existem provas arqueológicas de jogos de azar em várias partes do mundo, utilizando o astrágalo[8] como prática de um jogo, denominado jogo do osso, registradas a mais de 40000 anos. Com a evolução desse jogo, surge o jogo de dados, há cerca de 3000 anos a.c., na Índia e Mesopotâmia, e depois se difundiu para o mundo Grego e Romano.

Com o propósito de tentar quantificar a chance de ganhar ou perder, em jogos de azar, surge a primeira obra de estudo da teoria da Probabilidade, denominada *Liber De Ludo Aleae*[9] (Sobre os Jogos de Azar), proposta pelo italiano, Girolamo Cardano (1501 – 1576), que em sua época não teve grandes repercussões, mesmo porque, pensar que as coisas aconteciam por obra dos deuses era bem mais relevante do que pela matemática. Com isso, sua obra foi publicada somente em 1663, após sua morte. Essa obra representa um marco inicial da Teoria das Probabilidades.

Cardano, era um jogador compulsivo, jogava diariamente, tendo jogado xadrez por mais de 40 anos, e dados, por mais de 25 anos. Lembrando que, naquela época, esses jogos eram um meio de diversão e ao mesmo tempo uma forma de ganhar dinheiro por meio de apostas. (HAZZAN, 2006)

Galileu Galilei (1564 – 1642) também teve uma contribuição importante para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. Certa vez, um amigo lhe propôs a responder à seguinte pergunta: ao jogar três dados cúbicos, numerados de 1 a 6, o número 9 e o número 10 podem ser obtidos de seis maneiras diferentes. Porém, a experiência me mostra que o 10 é obtido com uma frequência maior que o 9. Por quê? Após muitos e minuciosos estudos, Galileu

---

[8] O astrágalo é um osso do calcanhar de um animal específico que possui o formato de um tetraedro irregular.
[9] “A palavra *aleae* refere-se a jogos de dados e tem a mesma raiz de aleatorius que significa eventos sujeitos ao acaso, dependentes de fatores incertos.” (GADELHA, 2004, p. 2)

mostrou que de 216 casos possíveis, há 27 possibilidades de a soma ser 10 e 25 possibilidades de a soma ser 9. Ou seja, o que seu amigo descobriu com a prática, e que deve ter jogado muitas vezes para percebê-la, ele lhe mostrou com estudos teóricos. (MORGADO, 2016)

Em 1654, na França, um nobre francês, chamado Antoine Gambaud (1610 – 1685), pergunta a Blaise Pascal (1623 – 1662) como resolver o problema, denominado Problema da divisão de apostas. O problema é o seguinte: “Dois jogadores que possuem a mesma experiência em jogos tiveram que interromper um jogo, antes do término, de maneira que cada um já possuía uma quantidade de pontos em um certo momento. Sendo assim, como deveriam dividir a aposta?”

Esse problema será apresentado no subitem 3.8, com duas possíveis soluções. A partir desse problema, Pascal envia sua primeira carta (das sete cartas trocadas por eles, sobre esse e outros problemas) a Pierre de Fermat (1601 – 1665), dando início à base da Moderna Teoria das Probabilidades. (CALABRIA & CAVALARI, 2013; HAZZAN, 2006).

No século XVII e XVIII, a Moderna Teoria das Probabilidades tomaria uma proporção maior, envolvendo a matemática, economia e política, quando, em 1662, John Graunt (1620 – 1674), Edmund Halley (1656 – 1742), Euler (1710 – 1761), Simpson (1687 – 1768) e Richard Price (1723 – 1791) utilizam os registros de falecimentos para determinar a taxa de mortalidade em Londres, as quais seriam utilizadas para o cálculo de seguros de vida. (MORGADO, 2016)

Em 1713, foi publicada uma das mais importantes obras sobre a Teoria das Probabilidades, denominada *Ars Conjectandi*, de autoria de Jacques Bernoulli (1654 – 1705), com contribuições muito importantes de Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1761), na qual se encontra a Lei dos Grandes Números (LGN), hoje chamado Teorema de Bernoulli, que se enuncia, conforme Junqueira (2014, p. 58), da seguinte maneira: “A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de experimentos cresce indefinidamente.”

Como aponta Junqueira (2014, p. 58), nos séculos XVIII e XIX, a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Markov (1856 – 1922) e Liapounav (1857 – 1918), sucedeu a escola soviética, cujo grande destaque foi Kolmogorov (1903-1987), que axiomatizou corretamente a Teoria das Probabilidades, e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional. A seguir, apresentamos como os documentos oficiais sugerem o trabalho com a Probabilidade.

3.2 Nos documentos Oficiais: PCN e BNCC.

Nos PCN, o objeto matemático Probabilidade, associa-se à Estatística, formando um bloco de conteúdos denominado Tratamento da Informação.

Segundo os PCN, esse bloco de conteúdos tem relevância ímpar, devido à sua demanda atual no campo social e à possibilidade de um trabalho interdisciplinar, para além dos muros da escola, com outras áreas do conhecimento, uma vez que a estatística, pode e deve ser trabalhada com as ciências, a geografia, a história, entre outras, levando o aluno a observar que muitos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória.

Assim, espera-se que as escolas e, consequentemente, seu corpo docente, utilizem o bloco de conteúdos Estatística e Probabilidade como ferramenta de desenvolvimento de pesquisas, análise, seleção e construções gráficas, tabelas, discussões acerca de temas de interesse dos alunos, conforme demandas de cada região, a fim de despertar no educando o interesse por pesquisar e manter-se sempre informado sobre temas relevantes para sua comunidade.

Dessa maneira, o desafio é fazer com que a Probabilidade contribua de forma significativa para o desenvolvimento intelectual do aluno, levando-o a pensar de forma lógico-matemática, a desenvolver a capacidade de análise crítica, a fazer inferências e à criatividade, aguçando assim, sua intuição.

Em relação à Probabilidade, os PCN, tem como principal finalidade que:

> [...] o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 52)

É de extrema importância perceber que esse bloco perpassa todas as séries do Ensino Fundamental e que as escolas devem ir aprofundando os conceitos e definições de seus conteúdos à medida que se avança nos ciclos dos anos iniciais, em forma de espiral, tentando sempre relacioná-los de forma interdisciplinar ou transdisciplinar, dando mais sentido aos conteúdos e fazendo com que os alunos percebam-nos como instrumento para o desenvolvimento de atitudes críticas diante de questões sociais, políticas, culturais e científicas da atualidade.

Fazer com que o aluno pesquise, faça levantamento de dados, selecione-os e, a partir daí, elabore argumentos plausíveis para comprovar e justificar suas ideias é a essência do bloco

Tratamento da Informação. Perceba que argumentar é diferente de demonstrar, ou seja, a argumentação sugere práticas discursivas logicamente embasadas por meio de pesquisa; já a demonstração, sugere uma lógica formal baseada em definições.

Nesse sentido, é de extrema importância o papel do professor para fazer com que, tanto os subtópicos de Estatísticas quanto os de Probabilidade, sejam trabalhados de forma interdisciplinar, dando mais sentido aos conteúdos para os alunos. Também, faz-se necessário que o professor elabore atividades que proporcionem aos alunos um aprofundamento nos experimentos e simulações, estimando e/ou comprovando as probabilidades desenvolvidas.

Com relação à BNCC, ela sozinha não conseguirá mudar a desigualdade educacional em nosso país, até mesmo pelo seu tamanho e sua diversidade cultural. Mas, ela norteará não somente o trabalho das escolas, como influenciará na formação profissional e continuada dos professores, bem como direcionará a produção de materiais didático-pedagógicos Brasil afora. Daí sua grande importância.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas para serem trabalhadas no Ensino Fundamental, são elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Com relação à Probabilidade, ela propõe um trabalho de maneira a desenvolver habilidades para coletar, organizar, interpretar e analisar dados que possibilitem a tomada mais assertiva de decisões.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC sugere o desenvolvimento de habilidades relacionadas à compreensão de conceitos fundantes no estudo de Probabilidades, tais como, aleatoriedade, capacidade de identificar eventos certos, impossíveis e possíveis de acontecer, experimentos aleatórios e espaço amostral. Também, espera-se que, à medida que os anos avancem e o aluno passe pelos níveis educacionais escolares, a diversidade de problemas cresçam, de forma que os alunos vivenciem novas e desafiadoras situações-problemas.

Já nos anos finais do Ensino Fundamental, é necessário ampliar os estudos, conceitos e definições, de maneira que os alunos coloquem a mão na massa e façam experimentos aleatórios e simulações para interpretar os resultados obtidos, de forma a quebrar alguns paradigmas ou senso comum. Há também a possibilidade de se trabalhar a Probabilidade envolvendo a análise combinatória, cujos problemas necessitem apenas da árvore de possibilidades ou do Princípio Fundamental de Contagem (PFC).

A BNCC, está completamente alinhada com os PCN, de forma que também sugere um trabalho em que os objetos de conhecimentos e as habilidades sejam retomadas, ampliadas e aprofundadas. A BNCC do ensino fundamental, sugere, dentro das unidades temáticas para cada ano, o desenvolvimento de objetos de conhecimento e habilidades, as quais se espera que o aluno desenvolva, ao longo de seus nove anos de estudo no ensino fundamental. No rodapé abaixo, segue o link[10] que leva aos objetos de conhecimento e habilidades referentes à Matemática, com o qual é possível acessar a unidade temática Probabilidade e Estatística, ano a ano.

A unidade temática Probabilidade e Estatística, permite ao professor o uso de ferramentas tecnológicas como calculadora, planilhas eletrônicas, softwares, entre outros, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, possibilitando desenvolver nos alunos um pensamento computacional, além de prepará-lo para o mercado de trabalho. Algumas dessas ferramentas possibilitam, além do raciocínio lógico-matemático e agilidade, uma riqueza incomensurável na visualização dos dados coletados.

No Ensino Médio, a BNCC adota um par de medidas para cada unidade temática, sendo que para a Probabilidade e Estatística, tem-se o par denominado certeza e incerteza, que está diretamente associado ao estudo de fenômenos aleatórios, de estimativas, de análises e de inferências estatísticas.

Propor alguns problemas de incerteza e fazer com que os alunos busquem formas de resolvê-los, expressando e compartilhando ideias e estratégias matemáticas é uma forma muito pertinente para o desenvolvimento estatístico e probabilístico no Ensino Médio.

Conforme explicitado na própria BNCC, o maior desafio para o professor é proporcionar aos alunos a visão de que a Matemática faz parte de nossa cultura e história e que não é um conjunto de regras e técnicas a serem memorizadas. Assim, a BNCC estabelece as cinco competências específicas de Matemática[11] que devem ser desenvolvidas ao longo de todo o Ensino Médio.

Definidas as competências, a BNCC define as habilidades a serem desenvolvidas por competências. Destacaremos aqui as habilidades relacionadas à Probabilidade. São elas:

---

[10] Link: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-iniciais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades. Acesso em: 15 set. 2021.

[11] As cinco competências específicas da Matemática para o ensino médio: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias#competencias-especificas-de-matematica-e-suas-tecnologias-para-o-ensino-medio. Acesso em: 21 out. 2021.

Tabela 1 – Habilidades de Probabilidade da BNCC do Ensino Médio.

Competência 3 – Habilidade (EM13MAT311)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
Competência 3 – Habilidade (EM13MAT312)	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
Competência 5 – Habilidade (EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Brasil (2018)

Podemos pensar a Probabilidade de forma isolada em muitas situações, até porque, vimos que ela surgiu há muitos anos, com o intuito de analisar situações de jogos. Porém, a relação muito próxima da Probabilidade com a Estatística, com o objetivo de coletar, analisar e organizar dados para se calcular as chances de acontecimentos de determinados fenômenos, faz com que, não só antigamente, mas também na atualidade, trabalhe-se a Estatística com a Probabilidade. Exatamente por isso, os documentos oficiais como os PCN e a BNCC trazem unidades temáticas com os dois conteúdos juntos. Ao longo da história, embora com origens distintas, os conceitos desses dois conteúdos acabam se relacionando, dando origem a palavra Estocástico[12].

A Estatística juntamente com a Probabilidade, aliadas aos poderosos recursos computacionais da atualidade, têm extrema importância mundial, uma vez que elas podem ser utilizadas como ferramentas nas mais diversas áreas, como medicina, economia, psicologia, geografia, marketing, engenharia, entre outras.

É importante ressaltar também que muitos livros didáticos vinculam a Probabilidade à Análise Combinatória, dando mais ênfase a problemas que envolvem métodos de contagem e, às vezes, esquecem da aplicação da Probabilidade em situações reais, cujos problemas são resolvidos por métodos que não necessitam da Análise Combinatória. Em alguns problemas, nem se calcula a Probabilidade, ou seja, o resultado é deixado em forma de fração com as fórmulas de combinatória (arranjo, permutação, combinação, entre outras). Não que a Análise Combinatória não seja importante, mas é preciso ficar claro para o aluno que a Probabilidade e

[12] Estocástico: processos que dependem da lei do acaso, imprevisível.

a Análise Combinatória são independentes, e que devem ser relacionadas, quando adequado, e distinguidas, quando necessário.

Quando a BNCC determina uma unidade temática, denominada Probabilidade e Estatística, espera-se que esses conteúdos sejam trabalhados com aplicações em situações-problemas reais, de forma interdisciplinar e transdisciplinar. Aprofundar demais em problemas de Probabilidade com Análise Combinatória pode desmotivar os alunos, devido à complexidade da Análise Combinatória. Ou seja, é importantíssimo o papel do professor em mostrar para o aluno que a Probabilidade tem várias aplicações para além da Análise Combinatória. Sendo assim, o professor pode trabalhar a Probabilidade com uma compreensão significativa de seus conceitos elementares, como uma abordagem frequentista, condicional, de eventos independentes, geométrica, sobre o teorema de Bayes, de distribuição binomial, entre outras.

AMORIM e MOZER (2020), explicitam quatro consequências não desejadas ao se priorizar o trabalho da Probabilidade com a análise combinatória, são elas:

> 1) Desenvolve-se nos alunos (e em parte dos professores) a falsa ideia de dependência e até mesmo de indissociabilidade das áreas de Probabilidade e Análise Combinatória;
> 2) Deixa-se de desenvolver nos alunos boa parte do raciocínio probabilístico elementar que, como veremos à frente, é fundamental não só para as aplicações modernas da Teoria das Probabilidades em diversas áreas do conhecimento, como para lidar com problemas e informações cotidianas relacionadas à área;
> 3) Muitos problemas da área têm soluções tanto pelo caminho combinatório quanto pelo caminho probabilístico. Soluções de problemas com uso dos raciocínios implícitos nas propriedades da probabilidade, nos importantes teoremas de Bayes e da probabilidade total, no raciocínio condicional, entre outros, podem ser uma oportunidade para o professor desenvolver esses tópicos de forma simultânea com a abordagem combinatória, comparar as soluções e permitir que o aluno possa escolher a estratégia que lhe parece mais eficiente. Focar apenas em soluções combinatórias elimina as oportunidades didáticas que a abordagem por dois olhares distintos pode trazer.
> 4) Dadas as dificuldades intrínsecas aos problemas combinatórios, que têm elevado grau de variação de níveis de dificuldades, o foco do ensino de Probabilidade em problemas combinatórios pode trazer uma desnecessária aversão ou medo dos alunos às áreas de Probabilidade e Estatística. No caso dessa última, que guarda ainda menos dependência do raciocínio combinatório, o problema da aversão já foi constatado por diversos educadores estatísticos e relatados em documentos da área. (AMORIM, V. & MOZER, G., 2020, p. 2)

Entendemos que, a partir do momento que as escolas, juntamente com seu corpo docente, alinhem seus projetos políticos pedagógicos pautados nos PCN e na BNCC, poderemos sim, fazer com que os alunos tenham uma educação voltada para um modelo mais inovador e que desperte o interesse de seus educandos. A seguir apresentamos os conceitos de determinados termos e a definição clássica de Probabilidade.

3.3 Conceitos e a Definição Clássica

Primeiramente conceituaremos alguns termos matemáticos para, então, construirmos a definição Clássica da Probabilidade. A Probabilidade surgiu com o intuito de tentar medir a chance de acontecimentos de um determinado experimento. Um experimento pode ser do tipo:

- ***determinístico:*** quando realizado diversas vezes, sob mesmas condições, produz resultados previsíveis.

  Exemplo: Soltar uma bola de uma altura de 10 metros e marcar o tempo em que ela se chocará com o chão. Se repetirmos esse experimento várias vezes, sob as mesmas condições, o tempo de queda será sempre o mesmo.

- ***aleatório:*** quando realizado diversas vezes, sob mesmas condições, produz resultados imprevisíveis.

  Exemplo: Ao se lançar um dado cúbico numerado de 1 a 6, sabe-se que sairá um número de 1 a 6, porém, não é possível prever qual o número que ficará voltado para cima.

Para o cálculo da Probabilidade, o mais interessante é trabalhar com experimentos do tipo aleatório e, para isso, faz-se necessário saber o significado de Espaço Amostral e Evento.

- ***Espaço Amostral:*** é o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório. É preciso tomar um certo cuidado, pois a realidade pode ser diferente da nossa intuição.

  Exemplo: Ao se lançar um dado cúbico numerado de 1 a 6, o Espaço Amostral será {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Esse espaço amostral é chamado de equiprovável.

  Exemplo: Ao se lançar dois dados cúbicos numerados de 1 a 6, o Espaço Amostral será {(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3); ... (4,6); (5,6); (6,6)}. É importante observar que são 36 possibilidades e que se considerarmos apenas a soma, por exemplo, soma 2 ou soma 7, é possível perceber que a soma 7 é mais provável de sair que a soma 2. Ou seja, o espaço amostral para a soma não é equiprovável.

- ***Espaço Amostral Equiprovável:*** Um espaço amostral equiprovável, é um espaço amostral em que a chance de ocorrer cada evento é igualmente provável para todos os eventos em questão.

- ***Evento:*** é um subconjunto do espaço amostral, ou seja, é um conjunto formado pelos possíveis resultados de um experimento aleatório.

  Exemplo: Ao se lançar um dado cúbico numerado de 1 a 6, quais são as possibilidades de sair um número par? Esse evento é igual a {2, 4, 6}.

Um evento é dito certo, se a chance de ele ocorrer é igual a 100%. Por exemplo, se um dado cúbico tiver todas suas faces numeradas com o algarismo 1, ao lançar esse dado, com certeza sairá o algarismo 1.

Um evento é dito impossível se a chance de ele ocorrer é igual a 0%. Por exemplo, se um dado cúbico numerado de 1 a 6 for lançado e o evento for a chance de sair o número 7, esse evento é impossível.

A Probabilidade tem como objetivo principal trabalhar com experimentos aleatórios, pois é utilizada para medir a chance de ocorrer um evento imprevisível. Conforme cita Junqueira (2014), no livro de Kasner e Newman (1976), é necessário também tomar certo cuidado, pois calcular uma probabilidade é determinar a chance de ela ocorrer e não a certeza de ocorrê-la.

> [...] E, portanto, uma relação de probabilidade, não de certeza, que obtemos da maioria de nossas premissas e conclusões. Temos certeza de que uma moeda cairá após ser jogada para o ar. [...] Mas a maior parte do que acreditamos não chega a atingir a certeza, embora variem de intensidade de crença. Assim, podemos estar quase certos de que uma moeda comum não dará “cara” 100 vezes seguidas. [...] Talvez seja possível explicar esta atitude. Algumas coisas acontecem no mundo de acordo com as leis naturais, que (a não ser que acreditemos em milagres) operam inexoravelmente. Assim, por causa da gravitação, as moedas caem. [...] Mas sabemos muito pouco a respeito dos fenômenos que nos cercam. Não conhecemos as leis que obedecem, nem, na verdade, se obedecem a alguma lei. Podemos predizer os movimentos dos planetas a milhões de milhas no espaço, mas ninguém pode predizer se cairá “cara ou coroa” numa moeda ou a combinação de um par de dados. Acontecimentos desta espécie, e outros sem conta, atribuímos ao acaso. (KASNER; NEWMAN, 1976, p. 217 apud JUNQUEIRA, 2014, p. 60).

Além dos conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento, é bastante comum trabalhar com as operações de eventos, utilizando as ideias de complementar, união, interseção e diferença, que, provavelmente, já foram vistas em séries anteriores, quando se trabalha com a Teoria de Conjuntos. A seguir, definir-se-á Probabilidade clássica, frequentista, condicional, eventos independentes, bem como algumas aplicações em situações-problemas e as operações de eventos, utilizando as ideias da Teoria de Conjuntos.

A primeira definição formal sobre Probabilidade em um espaço amostral equiprovável, aparece na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576), que define Probabilidade como sendo a razão entre o número de “casos favoráveis” sobre o número de “casos possíveis”. O número de “casos possíveis”, que é o tamanho do conjunto espaço amostral, será sempre representado pela letra S e o número de “casos favoráveis”, que é o tamanho do conjunto evento, será representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Sendo assim, a Probabilidade de ocorrência de um determinado evento A, será dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

em que, n(A) é o número de elementos do evento A e n(S) é o número de elementos do espaço amostral.

Seja a razão entre o número de “casos favoráveis” e o número de “casos possíveis”, de maneira que o conjunto seja finito e não-vazio, e supondo que os eventos são igualmente prováveis, temos como consequências imediatas da definição, a seguintes propriedades:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset S$;

ii) $P(S) = 1$;

iii) $P(\emptyset) = 0$;

iv) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Observação: Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

Demonstração:

i) Como $n(S) > 0$ e $n(A) > 0$, com $n(S) \geq n(A)$, temos que $0 \leq P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \leq 1$.

ii) O número de eventos de S é igual a $n(S)$, então $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$.

iii) O número de eventos de $\emptyset$ é igual a $n(\emptyset) = 0$, então $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$.

iv) Se A tem $n(A)$ eventos e B tem $n(B)$ eventos, e como A e B são eventos mutuamente exclusivos, ou seja, não possuem eventos em comum, logo, o número de eventos de $A \cup B$, dado por $n(A \cup B)$ será igual a $n(A) + n(B)$, então $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B)$.

Proposições, como consequências da definição de Probabilidade:

Proposição 1: $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Demonstração:

Sabemos que $1 = P(S) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$.

Portanto, $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Proposição 2: Se $A \subset B$, então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração:

Como $B = A \cup (B - A)$ temos $P(B) = P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A)$, e portanto $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Corolário: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração:

Como $P(A) = P(B) - P(B - A)$ e $P(B - A) \geq 0$ resulta que $P(A) \leq P(B)$.

Proposição 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração:

Temos que $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ (I) e $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ (II).

Somando (I) e (II), temos

$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) \quad \rightarrow$

$P(A) + P(B) = P(A) + P(B - A) + P(A \cap B) \quad \rightarrow$

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \quad \rightarrow$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

A seguir apresentamos a definição frequentista de Probabilidade, bem como alguns exemplos.

3.4 Definição Frequentista

A ideia de se utilizar a frequência relativa, que é um objeto de estudo da Estatística na Probabilidade, surge, segundo REZENDE (2020), na segunda metade do século XVII, não como definição, mas, como um critério empírico para avaliar cálculos associados a Probabilidades relativas a jogos.

Assim, uma forma de calcular a Probabilidade de um evento A cujo espaço amostral é S, é analisando a frequência relativa desse evento em relação a n repetições do experimento associado a S.

Dessa maneira, se o evento A ocorre n(A) vezes em n repetições independentes, podemos trabalhar com a aproximação da razão n(A) sobre n, para o cálculo da probabilidade de ocorrência do evento A, que será a frequência relativa de A, ou seja:

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n} \cong P(A).$$

Suponha um experimento aleatório de espaço amostral S e um evento A $\subset S$. Também suponha que o experimento seja repetido n vezes, sendo n(A) o número de vezes em que o evento A ocorra. Então, a probabilidade do evento A ocorrer será dada por

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}, com\ 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Para compreendermos melhor a aplicação da definição frequentista, usaremos o exemplo de Rezende (2020, p. 30), em que uma moeda é lançada diversas vezes e os resultados obtidos nos lançamentos, são registrados conforme a seguinte tabela.

Tabela 2 – Resultados obtidos nos lançamentos de uma moeda.

Primeiros n lançamentos	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Número de caras	7	54	518	5.063	50.215	500.602
Número de coroas	3	46	482	4.937	49.785	499.398
Proporção de caras	0,7	0,54	0,518	0,5063	0,50215	0,500602
Proporção de coroas	0,3	0,46	0,482	0,4937	0,49785	0,499398

Fonte: Rezende (2020)

Seja A o evento sair cara no lançamento de uma moeda não viciada, então, $P(A) = \frac{1}{2}$.

Considerando os resultados obtidos, temos:

Tabela 3 – Proporção de caras obtidas em n lançamentos.

n	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$\frac{n(A)}{n}$	0,7	0,54	0,518	0,5063	0,50215	0,500602

Fonte: Rezende (2020)

Assim, $P(A) \approx \frac{n(A)}{1.000.000} \approx 0{,}500602$. No limite, $\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = 0{,}5$.

Em resumo, a Probabilidade sob o ponto de vista da definição frequentista, é o limite de uma frequência relativa, ou seja, a Probabilidade de ocorrência de um evento A é o valor para o qual a frequência relativa de A converge. É importante que fique claro para o aluno que, segundo a LGN (Lei dos Grandes Números), no lançamento de uma moeda uma grande quantidade de vezes, o valor da Probabilidade tende a 0,5, mas não significa dizer que será exatamente 0,5, como pode ser visto na tabela 2. Porém, quanto maior o valor de n mais esse valor tende a se estabilizar próximo de 0,5, ou seja, sua Probabilidade aproxima-se de 0,5.

É importante que se perceba em que momento a Probabilidade Clássica deve dar lugar à Probabilidade Frequentista. E que não são todos os momentos que se deve aplicar a Probabilidade Frequentista. Dessa forma, é fundamental que o professor saiba claramente as definições dos diversos tipos de Probabilidades.

Apresentaremos agora dois exemplos que ilustram situações nas quais a Probabilidade Frequentista é mais adequada que a Probabilidade Clássica.

Exemplo 1: Uma loja que vende chocolates depende de, entre outros fatores, saber se uma pessoa gosta ou não de chocolates. Ao analisar o gosto de um cliente, como estimar a probabilidade de que ele goste de chocolate?

Se analisarmos a situação sob o ponto de vista da Probabilidade Clássica, temos 50% de chance, ou seja, pensando nos eventos como equiprováveis, uma pessoa gosta ou não gosta de chocolates. Será que isso faz sentido?

O mais sensato a se fazer nesse caso é analisar o perfil das pessoas que passam próximas à loja e verificar, não apenas se a pessoa gosta de chocolate, como também com que frequência costuma comer chocolates e por qual tipo de chocolate ela tem preferência, ou seja, uma série de análises deve ser feita. Desse modo, a Probabilidade Frequentista é a melhor escolha nessa situação.

Exemplo 2: Uma rede de locadora de veículos possui 200 lojas na grande São Paulo, sendo 150 delas na capital. Imagine que um cliente retire um carro em uma dessas 200 lojas e pode devolvê-lo em qualquer outra loja dessa região.

a) Qual é a probabilidade de que um carro alugado em uma dessas lojas seja devolvido numa loja da capital?

Se todas as lojas tiverem probabilidades equiprováveis de receber o carro, teremos um problema modelado pela Probabilidade Clássica, dessa forma, a probabilidade será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

b) Há mais de uma abordagem possível para esse problema?

É muito difícil, em uma situação como essa, termos uma probabilidade equiprovável, ou seja, é muito mais real que pessoas que alugam carros, entregue-os com mais frequência em uma determinada loja do que outra, o que fará com que algumas lojas necessitem de mais espaço e um maior número de funcionários para dar conta da demanda de devoluções da frota. Dessa forma, a Probabilidade Frequentista se torna o modelo ideal para se medir essa probabilidade de forma mais real.

É importante ressaltar que, apesar da grande importância da Probabilidade Clássica, sua utilização requer certos cuidados, pois tem suas limitações, bem como a Probabilidade Frequentista. Vejamos alguns exemplos práticos. Considere as seguintes situações-problemas, nas quais desejamos obter a probabilidade:

1) O lançamento de um dado resultar em um número par.
2) Um medicamento em testes fazer efeito em um paciente.

3) O melhor batedor de pênaltis de sua equipe fazer um gol de pênalti em uma partida de futebol, considerando que naquela partida houve um pênalti para sua equipe.
4) Chover em Belo Horizonte durante a noite do dia 25 de dezembro de 2025.

É comum que nosso aluno pense que, para todas as situações acima, existem apenas duas possibilidades: par ou ímpar, faz efeito ou não faz efeito, faz o gol ou não faz, choverá ou não choverá, porém, com exceção do problema 1, os eventos não são equiprováveis.

No caso do problema 1, a Probabilidade Clássica é a melhor forma de se obter o resultado da probabilidade, embora esse resultado possa também ser obtido com a Probabilidade Frequentista. O problema 2 já requer uma série de testes com o medicamento nos pacientes, bem como a observação de sua eficácia, fazendo com que sua probabilidade seja obtida por meio de um n = número de pessoas, suficientemente grande, utilizando a Probabilidade Frequentista. Já no problema 3, apesar de a imprensa esportiva utilizar de dados anteriores para calcular as chances de acerto, esses dados podem não ser tão precisos, pois, ao longo de uma temporada, o atleta passa por várias situações que podem mudar tais dados, como por exemplo, problemas físicos, psicológicos, idade, entre outros. Porém, se os fatores citados forem próximos dos anos anteriores, a Probabilidade Frequentista será um ótimo caminho para o cálculo da Probabilidade. Por fim, no problema 4, temos a situação mais intuitiva que nos problemas anteriores, pois as chances de chuva, em um dia qualquer, não são constantes e devem ser observados vários fatores climáticos como estação do ano, temperatura e vento, para se determinar tal Probabilidade. Sendo assim, esse tipo de Probabilidade, necessita de modelos mais sofisticados do que uma simples Probabilidade Frequentista.

É fundamental que busquemos por modelos mais adequados para cada situação-problema e, também, por maneiras diversificadas de resolução de um mesmo problema, quando possível, para que nosso aluno perceba que não existe uma única forma de resolver certos problemas.

Dessa forma, apresentaremos a seguir a definição axiomática de Probabilidade, que estrutura toda a Teoria das Probabilidades, introduzida na primeira metade do século XX, por A. N. Kolmogorov[13], em que se encaixam os casos particulares das Probabilidades apresentadas anteriormente e também englobam as Probabilidades geométricas, de espaços amostrais não equiprováveis e espaços amostrais infinitos.

---

[13] Kolmogorov, nasceu em Moscou, em 1903, foi um matemático importantíssimo para o desenvolvimento da teoria das Probabilidades.

3.5 Definição Axiomática

No estudo da Teoria de Conjuntos, temos que um conjunto infinito A é dito enumerável, se for possível estabelecer uma correspondência biunívuca dele com o conjunto dos números naturais, o que significa dizer que existe uma bijeção $\mathcal{F} : \mathbb{N} \rightarrow$ A. A definição que apresentaremos a seguir, se restringe a espaços amostrais infinitos, porém, enumeráveis, devido à complexidade e a não utilização dos não enumeráveis no Ensino Médio.

Definição: Seja S um espaço amostral enumerável. Considere uma função $\mathcal{F} : P(S) \rightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto S. Ou seja, $\mathcal{F}$ associa a cada evento $A \subset S$ um número real $P(A)$. Essa função será uma Probabilidade se:

i) $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall A \subset S$;

ii) $P(S) = 1$;

iii) Se $\{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{A_n\}_{n \geq 1} \subset P(S)$, em que $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \geq 1; i \neq j$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Vejamos um exemplo de Probabilidade infinita cujo espaço amostral é enumerável e que se pode trabalhar no Ensino Médio.

Exemplo: Ao lançar uma moeda sucessivamente até se obter cara, qual a Probabilidade que isso ocorra após quarto lançamento?

Consideremos *i* o número de lançamentos e A_i o instante em que sairá cara que representaremos aqui por *K* e coroa por *C*. Sendo assim, temos:

Para *i* = 1, $P(A_1) = P(K) = \frac{1}{2}$;

Para *i* = 2, $P(A_2) = P(CK) = \frac{1}{4}$;

Para *i* = 3, $P(A_3) = P(CCK) = \frac{1}{8}$;

Para *i* = 4, $P(A_4) = P(CCCK) = \frac{1}{16}$;

Para *i* = 5, $P(A_5) = P(CCCCK) = \frac{1}{32}$;

Para *i* = 6, $P(A_6) = P(CCCCCK) = \frac{1}{64}$;

Para *i* = 7, $P(A_7) = P(CCCCCCK) = \frac{1}{128}$; e assim, sucessivamente.

Observe que o problema satisfaz os axiomas i) e ii) da definição acima, pois, o axioma i) é trivial e utilizando a fórmula da soma de PG infinita, provamos o axioma ii):

$$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Por fim, utilizando novamente a fórmula de PG infinita é possível calcular o que se pede, utilizando o axioma iii):

$$P(B) = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + \cdots = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots = \frac{\frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{16}.$$

Como consequências da Definição axiomática de Probabilidade, tanto para espaços amostrais finitos quanto infinitos, incluindo aqui os infinitos não enumeráveis, temos algumas propriedades importantes a considerar e que serão provadas a seguir, conforme AMORIM & MOZER (2020, p. 42).

Se $\mathcal{F} : P(S) \to [0,1]$ é uma Probabilidade conforme a definição anterior, então:

i) $P(\emptyset) = 0$;

ii) Se $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ são eventos mutuamente excludentes, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j$ tais que, $1 \leq i < j \leq n,$ então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,;$$

iii) Para quaisquer $A, B \subset S$ tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

iv) $P(A) = 1 - P(A^C),\ \forall A \subset S$;

v) $A \subset B \subset S \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.

Demonstrações:

i) Dado um evento $A \subset S$ qualquer, temos $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$. Assim, pelo axioma da união, temos que: $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \Longrightarrow P(\emptyset) = 0$.

ii) Os eventos A_1 e $B = A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ são mutuamente excludentes. Então, pelo axioma da união, temos que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) = P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right)$$

Utilizando o mesmo argumento acima, obtemos de forma recursiva

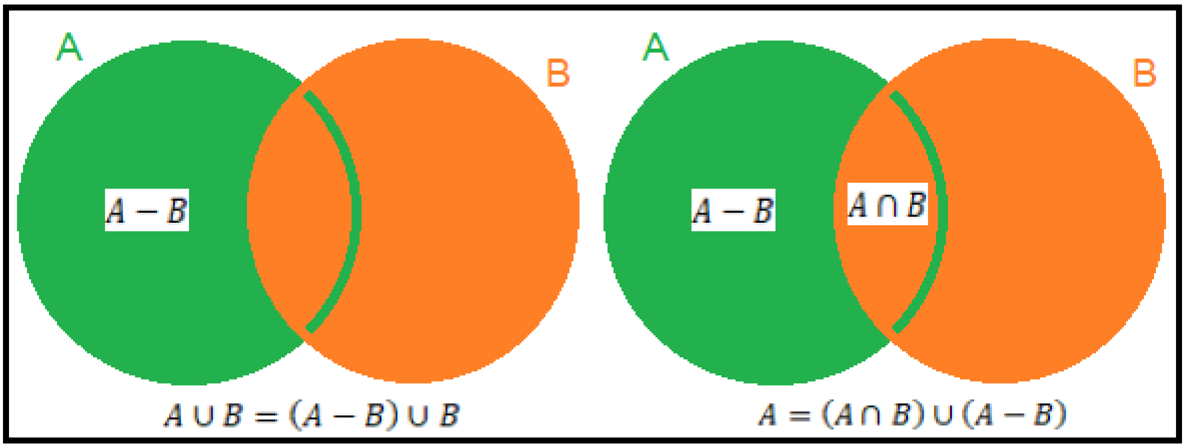
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P\left(\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P\left(\bigcup_{i=3}^{n} A_i\right) = \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

iii) O evento $A \cup B$ pode ser reescrito como $(A - B) \cup B$. Por outro lado, temos que:

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$, como pode ser visto na imagem abaixo.

Figura 7: Propriedade da união de eventos



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Dessa forma, aplicando novamente o axioma da união, temos:

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P\big((A - B) \cup B\big) = P(A - B) + P(B) \Rightarrow P(A - B) = P(A \cup B) - P(B) \\ P(A) = P(A - B) \cup P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \end{cases}$$

Logo, $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) \Rightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

iv) Para todo $A \subset S$, A e A^C são mutuamente excludentes. Logo, $A \cup A^C = S \Rightarrow P(A) + P(A^C) = P(A \cup A^C) = P(S) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^C)$.

v) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A) \Rightarrow P(B) = P\big(A \cup (B - A)\big) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$.

Essas propriedades também são válidas para a Probabilidade Condicional, que veremos a seguir.

Com intuito de incentivar atividades interessantes em sala de aula e, consequentemente, a aplicação da definição de Probabilidade e suas propriedades, nesse caso a propriedade iv, apresentamos a seguir, o problema dos aniversários. Esse problema pode ser trabalhado e muito bem explorado com os alunos da 2ª série do ensino médio, inclusive tabulando os dados com uso de planilhas eletrônicas e em seguida calculando suas Probabilidades. Pode-se também, antes de colher os dados, pedir para que os alunos façam uma estimativa do que eles imaginam ser a resposta.

Exemplo:

Consideremos um ano de 365 dias e suponhamos que o aniversário de uma pessoa possa cair com igual probabilidade em qualquer um dos dias do ano. Consideremos um grupo de n pessoas, sendo $2 \leq n \leq 365$. Se essas n pessoas são escolhidas ao acaso, qual a probabilidade de que pelo menos duas dessas pessoas façam aniversário em um mesmo dia? A partir de quantas pessoas no grupo essa probabilidade é superior a 50%? E a partir de quantas pessoas essa probabilidade é superior a 99%?

Consideremos o evento *A*: “pelo menos duas pessoas fazem aniversário na mesma data”.

Dessa forma, o evento A^C será: “não há duas pessoas no grupo que façam aniversário na mesma data”.

Considerando que as datas de nascimento como equiprováveis, a melhor maneira de resolver este problemas é calcular a probabilidade do evento *A* não ocorrer e, a seguir, usamos a propriedade *iv)* para calcular *P(A)*, ou seja:

$$P(A) + P(A^C) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^C) \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Atribuindo valores a *n*, verificamos que para $n > 22$, a probabilidade passa de 50%, ou seja, serão necessárias, no mínimo, 23 pessoas para que a probabilidade seja maior que 50%. Da mesma forma, temos que para $n > 56$ a probabilidade passa de 99%, sendo assim, serão necessárias, no mínimo, 57 pessoas para que a probabilidade seja maior que 99%. Na tabela 4, temos os cálculos das probabilidades de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia, em um grupo de *n* pessoas, para alguns valores de *n*.

Tabela 4 – Problema dos aniversários.

n	Probabilidade $\cong$
10	11,7%
20	41,1%
22	47,6%
23	50,7%
30	70,6%
40	89,1%
50	97,0%
56	98,8%
57	99,01%
60	99,4%

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Caso algum professor deseje trabalhar com esse problema em sala de aula, desenvolvemos um programa a fim de facilitar o cálculo de sua probabilidade para um número *n* de pessoas. Para isso, basta digitar um valor para *n*, em que *n* é a quantidade de pessoas reunidas e na última linha teremos essa probabilidade. A seguir apresentamos o script do programa do Problema dos Aniversários, que foi desenvolvido utilizando o programa Visual Studio.

```
{class Program
   {static void Main(string[ ] args)
      {Console.WriteLine(" PROBLEMA DOS ANIVESÁRIOS ");
         Console.WriteLine("");
         Console.Write("Considere uma sala com n pessoas. Qual é a probablidade de que pelo menos duas dessas pessoas façam aniversário no mesmo dia?");
         Console.WriteLine("");
         Console.Write("Digite o número de pessoas reunidas: ");
         double n = double.Parse(Console.ReadLine());
         double tempo = 365;

         if(n != 365) {
            Console.WriteLine("");
            double valor1 = potenciacao(n, tempo);
            Console.WriteLine("");
            double valor2 = fatoracao(n, tempo);
            Console.WriteLine("");
            double respostaFinal = 1 - (valor2 / valor1);
            double porcentagem = respostaFinal * 100;
            Console.WriteLine("Probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia: " + porcentagem + "%");
         }else
         {Console.WriteLine("A porcentagem final é: 100%");
         }
         Console.ReadKey();}

      static double potenciacao(double y, double x)
      {double a = 1;
         for (double i = 1; i <= y; i++)
         {a *= x;}
         Console.Write("Espaço amostral: ");
         Console.Write(a);
         return a;
         Console.ReadKey();}

      static double fatoracao(double y, double x)
      {double a = x;
         for (int i = 1; i < y; i++)
           {a = a*(x-i);}
         double respostaFinal = a;
         Console.Write("Evento: " + respostaFinal);
                  return respostaFinal;} } }
```

Compartilhamos, a seguir, o link com o programa executável, em que você terá acesso ao problema dos aniversários.

https://drive.google.com/file/d/1w9GfQ_HmOt5D1MVXwQ_vGAycyw5fAZNC/view?usp=sharing

Quando você abrir o hiperlink e baixar o programa, você terá a tela inicial a seguir.

Figura 8 – Tela inicial do programa do problema dos aniversários.

```
         _________ PROBLEMA DOS ANIVESÁRIOS _________

Considere uma sala com n pessoas. Qual é a probablidade de que
pelo menos duas dessas pessoas façam aniversário no mesmo dia?

Digite o número de pessoas reunidas: _
```

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Digitando, o número de pessoas reunidas no campo identificado acima e clicando em enter, aparecerá o cálculo da Probabilidade na última linha, conforme pode ser visto na figura a seguir. O valor que aparece na antepenúltima linha é o espaço amostral e o que aparece na penúltima linha é o evento. Utilizando a Probabilidade Clássica, isto é, o quociente entre o evento e o espaço amostral multiplicado por 100, tem-se a Probabilidade em porcentagem, ou seja, o valor da última linha.

Figura 9 – Tela inicial do programa do problema dos aniversários.

```
         _________ PROBLEMA DOS ANIVESÁRIOS _________

Considere uma sala com n pessoas. Qual é a probablidade de que
pelo menos duas dessas pessoas façam aniversário no mesmo dia?

Digite o número de pessoas reunidas: 23

Espaço amostral: 8,56516793531503E+58
Evento: 4,22008193020924E+58
Probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário
no mesmo dia: 50,7297234323985%
```

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Com este programa, você pode calcular as Probabilidades de forma rápida. A seguir, apresentamos algumas estratégias interessantes e que podem ser discutidas em sala de aula com os alunos envolvendo o jogo da Mega-Sena.

3.6 Estratégias para Mega-Sena

Outras situações interessantes de se explorar com os alunos da 2ª série do Ensino Médio são as estratégias a se traçar ao jogar na Mega-Sena. No jogo pode-se marcar 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ou 15 números, sendo necessário acertar 6 para ganhar o prêmio da Mega-Sena. Na tabela a seguir, apresentamos o total de combinações possíveis ao se jogar uma certa quantidade de números em uma determinada aposta, o valor da aposta, bem como a probabilidade de ganhar na Mega-Sena com cada aposta. Quando se fala que a chance de ganhar na Mega-Sena não é zero, mas é quase, não estamos exagerando, basta observar na tabela a seguir. Se você jogar 15 números, precisará desembolsar R$ 22.522,50 e suas chances de ganhar aumentarão 5.005 vezes, mas, ainda assim serão pequenas.

Tabela 5 – Probabilidade de acertar os 6 números na Mega-Sena.

Quantidade de números jogados	**Possibilidades de acertar na Mega-Sena**	**Valor da aposta (R$)**	**Probabilidade de ganhar na Mega-Sena**
6	$C_{6,6} = 1$	4,50	$\frac{C_{6,6} \cdot C_{54,0}}{C_{60,0}} = \frac{1}{50.063.860} = 0{,}00000002$
7	$C_{7,6} = 7$	31,50	$\frac{C_{7,6} \cdot C_{53,0}}{C_{60,0}} = \frac{7}{50.063.860} = 0{,}00000014$
8	$C_{8,6} = 28$	126,00	$\frac{C_{8,6} \cdot C_{52,0}}{C_{60,0}} = \frac{28}{50.063.860} = 0{,}00000056$
9	$C_{9,6} = 84$	378,00	$\frac{C_{9,6} \cdot C_{51,0}}{C_{60,0}} = \frac{84}{50.063.860} = 0{,}00000168$
10	$C_{10,6} = 210$	945,00	$\frac{C_{10,6} \cdot C_{50,0}}{C_{60,0}} = \frac{210}{50.063.860} = 0{,}00000419$
11	$C_{11,6} = 462$	2.079,00	$\frac{C_{11,6} \cdot C_{49,0}}{C_{60,0}} = \frac{462}{50.063.860} = 0{,}00000923$
12	$C_{12,6} = 924$	4.158,00	$\frac{C_{12,6} \cdot C_{48,0}}{C_{60,0}} = \frac{924}{50.063.860} = 0{,}00001846$
13	$C_{13,6} = 1.716$	7.722,00	$\frac{C_{13,6} \cdot C_{47,0}}{C_{60,0}} = \frac{1.716}{50.063.860} = 0{,}00003428$
14	$C_{14,6} = 3.003$	13.513,50	$\frac{C_{14,6} \cdot C_{46,0}}{C_{60,0}} = \frac{3.003}{50.063.860} = 0{,}00005998$
15	$C_{15,6} = 5.005$	22.522,50	$\frac{C_{15,6} \cdot C_{45,0}}{C_{60,0}} = \frac{5.005}{50.063.860} = 0{,}00009997$

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

A priori, ao jogar 1 cartão com 7 números ou 7 cartões com 6 números, tem-se as mesmas chances e paga-se o mesmo valor, ou seja, é proporcional. Jogar 1 cartão com 8 números ou 28 cartões com 6 números, também. Jogar 1 cartão com 9 números ou 84 cartões com 6 números, idem. E, assim, sucessivamente, até jogar 1 cartão com 15 números ou 5.005

cartões com 6 números as possibilidades são iguais e o valor a ser pago aumenta proporcionalmente.

Porém, a Mega-Sena nos dá a possibilidade de ganhar acertando 5 ou 4 números e é aí que entra a estratégia do jogo. Quando se joga mais cartões com 6 números, a Probabilidade de acertar 5 ou 4 números é maior do que quando se joga menos cartões com mais números, pagando o mesmo valor. Vejamos a seguir a tabela com a Probabilidade de acertar a quina no jogo da Mega-Sena.

Tabela 6 – Probabilidade de acertar 5 números na Mega-Sena.

Quantidade de números jogados	Possibilidades de acertar a quina no jogo da Mega-Sena	Valor da aposta (R$)	Probabilidade de acertar 5 números na Mega-Sena
6	$C_{6,5} = 6$	4,50	$\frac{C_{6,5} \cdot C_{54,1}}{C_{60,0}} = \frac{6 \cdot 54}{50.063.860} = 0{,}00000647$
7	$C_{7,5} = 21$	31,50	$\frac{C_{7,5} \cdot C_{53,1}}{C_{60,0}} = \frac{21 \cdot 53}{50.063.860} = 0{,}00002223$
8	$C_{8,5} = 56$	126,00	$\frac{C_{8,5} \cdot C_{52,1}}{C_{60,0}} = \frac{56 \cdot 52}{50.063.860} = 0{,}00005817$
9	$C_{9,5} = 126$	378,00	$\frac{C_{9,5} \cdot C_{51,1}}{C_{60,0}} = \frac{126 \cdot 51}{50.063.860} = 0{,}00012836$
10	$C_{10,5} = 252$	945,00	$\frac{C_{10,5} \cdot C_{50,1}}{C_{60,0}} = \frac{252 \cdot 50}{50.063.860} = 0{,}00025168$
11	$C_{11,5} = 462$	2.079,00	$\frac{C_{11,5} \cdot C_{49,1}}{C_{60,0}} = \frac{462 \cdot 49}{50.063.860} = 0{,}00045218$
12	$C_{12,5} = 792$	4.158,00	$\frac{C_{12,5} \cdot C_{48,1}}{C_{60,0}} = \frac{792 \cdot 48}{50.063.860} = 0{,}00075935$
13	$C_{13,5} = 1.287$	7.722,00	$\frac{C_{13,5} \cdot C_{47,1}}{C_{60,0}} = \frac{1.287 \cdot 47}{50.063.860} = 0{,}00120824$
14	$C_{14,5} = 2.002$	13.513,50	$\frac{C_{14,5} \cdot C_{46,1}}{C_{60,0}} = \frac{2.002 \cdot 46}{50.063.860} = 0{,}00183949$
15	$C_{15,5} = 3.003$	22.522,50	$\frac{C_{15,5} \cdot C_{45,1}}{C_{60,0}} = \frac{3.003 \cdot 45}{50.063.860} = 0{,}00269925$

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Perceba que jogar 1 cartão com 7 números, gastando R$ 31,50, tem-se 0,00002223 chances de acertar a quina. Porém, fazendo 7 cartões com 6 números, pagando o mesmo valor de R$ 31,50, de maneira que não tenham 5 números repetidos em cartões distintos, tem-se 7 vezes 0,00000647 chances de acertar a quina, ou melhor, 0,00004529 chances, o que representa mais que o dobro de chances de acertar a quina. Jogando 1 cartão com 8 números, gastando R$ 126,00, tem-se 0,00005817 chances de acertar a quina. Porém, fazendo 28 cartões com 6 números, pelos quais se paga o mesmo valor, de maneira que não tenham 5 números repetidos em cartões distintos, tem-se 28 vezes 0,00000647 chances de acertar a quina, isto é, 0,00018116 chances, o que representa mais que o triplo de chances de acertar a quina. Jogando 1 cartão com 9 números, gastando R$ 378,00, tem-se 0,00012836 chances de acertar a quina. Porém, fazendo 84 cartões com 6 números, pelos quais se paga o mesmo valor, de maneira que não tenham 5 números repetidos em cartões distintos, tem-se 84 vezes 0,00000647 chances de acertar a quina, ou seja, 0,00054348 chances, o que representa mais que o quádruplo de chances de acertar a quina. O ENEM já propôs uma questão que envolvia esse raciocínio. Observe a seguir a questão.

Figura 10: Questão 171 do ENEM 2009 prova amarela

Questão 171

A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto {01, 02, 03, ..., 59, 60}, custava R$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

A $1\frac{1}{2}$ vez menor.

B $2\frac{1}{2}$ vezes menor.

C 4 vezes menor.

D 9 vezes menor.

E 14 vezes menor.

Fonte: http://educacao.globo.com/provas/enem-2009/questoes/171.html. Acesso em: 19 dez. 2021.

Vejamos agora, o comparativo de se acertar a quadra, jogando mais números em um mesmo cartão, com mais cartões com menos números.

Tabela 7 – Probabilidade de acertar 4 números na Mega-Sena.

Quantidade de números jogados	**Possibilidades de acertar a quina no jogo da Mega-Sena**	**Valor da aposta (R$)**	**Probabilidade de acertar 4 números na Mega-Sena**
6	$C_{6,4} = 15$	4,50	$\frac{C_{6,4} \cdot C_{54,2}}{C_{60,0}} = \frac{15 \cdot 1.431}{50.063.860} = 0{,}00042875$
7	$C_{7,4} = 35$	31,50	$\frac{C_{7,4} \cdot C_{53,2}}{C_{60,0}} = \frac{35 \cdot 1.378}{50.063.860} = 0{,}00096337$
8	$C_{8,4} = 70$	126,00	$\frac{C_{8,4} \cdot C_{52,2}}{C_{60,0}} = \frac{70 \cdot 1.326}{50.063.860} = 0{,}00185403$
9	$C_{9,4} = 126$	378,00	$\frac{C_{9,4} \cdot C_{51,2}}{C_{60,0}} = \frac{126 \cdot 1.275}{50.063.860} = 0{,}0032089$
10	$C_{10,4} = 210$	945,00	$\frac{C_{10,4} \cdot C_{50,2}}{C_{60,0}} = \frac{210 \cdot 1.225}{50.063.860} = 0{,}00471897$
11	$C_{11,4} = 330$	2.079,00	$\frac{C_{11,4} \cdot C_{49,2}}{C_{60,0}} = \frac{330 \cdot 1.176}{50.063.860} = 0{,}0077517$
12	$C_{12,4} = 495$	4.158,00	$\frac{C_{12,4} \cdot C_{48,2}}{C_{60,0}} = \frac{495 \cdot 1.128}{50.063.860} = 0{,}01115296$
13	$C_{13,4} = 715$	7.722,00	$\frac{C_{13,4} \cdot C_{47,2}}{C_{60,0}} = \frac{715 \cdot 1.081}{50.063.860} = 0{,}01543858$
14	$C_{14,4} = 1.001$	13.513,50	$\frac{C_{14,4} \cdot C_{46,2}}{C_{60,0}} = \frac{1.001 \cdot 1.035}{50.063.860} = 0{,}02069427$
15	$C_{15,4} = 1.365$	22.522,50	$\frac{C_{15,4} \cdot C_{45,2}}{C_{60,0}} = \frac{1.365 \cdot 990}{50.063.860} = 0{,}026999253$

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Perceba que jogar 1 cartão com 7 números, gastando R$ 31,50, tem-se 0,00096337 chances de acertar a quadra. Porém, fazendo 7 cartões com 6 números, pelos quais se paga o mesmo valor de R$ 31,50, de maneira que não tenham 4 números repetidos em cartões distintos, tem-se 7 vezes 0,00042875 chances de acertar a quadra, ou seja, 0,00300125 chances, o que representa mais que o triplo de chances de acertar a quadra. Jogando 1 cartão com 8 números, gastando R$ 126,00, tem-se 0,00185403 chances de acertar a quadra. Porém, fazendo 28 cartões com 6 números, pelos quais se paga o mesmo valor, de maneira que não tenham 4 números repetidos em cartões distintos, tem-se 28 vezes 0,00042875 chances de acertar a quadra, ou seja, 0,012005 chances, o que representa mais que o sêxtuplo de chances de acertar a quadra. Jogando 1 cartão com 9 números, gastando R$ 378,00, tem-se 0,0032089 chances de acertar a quadra. Porém, fazendo 84 cartões com 6 números, pelos quais se paga o mesmo valor, de maneira que não tenham 4 números repetidos em cartões distintos, tem-se 84 vezes 0,00042875 chances de acertar a quadra, ou seja, 0,036015 chances, o que representa mais que 11 vezes as chances de acertar a quadra. À medida que se aumenta a quantidade de cartões, maiores são as chances de fazer quinas e quadras, jogando-se mais cartões com 6 números do que menos cartões com mais números, pagando-se o mesmo valor.

Em uma aula com os alunos da 2ª série do ensino médio, colocamos essa questão do ENEM 2009 para discussão, explorando a possibilidade de se ganhar na Mega-Sena e também discutindo essas estratégias de jogos. Foi um momento de muitas reflexões e aprendizado, o que nos deixou impressionados como os alunos despertam interesse nesse tipo de situação-problema.

3.7 Probabilidade Condicional

A Probabilidade Condicional é de extrema importância para se trabalhar com Probabilidades aplicadas nas Ciências, bem como em diversas áreas e situações cotidianas. A seguir, apresentamos sua definição e um exemplo de aplicação da Probabilidade Condicional.

Definição:

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S e uma Probabilidade P, em que, a Probabilidade do evento A ocorrer sabendo que o evento B ocorreu, é representada por P(A/B), definida por:

$$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}.$$

Utilizando a definição axiomática da Probabilidade, temos que:

$$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{n(A \cap B)}}{\mathrm{n(B)}},$$

uma vez que:

$$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{n(\mathrm{A \cap B})}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{\mathrm{n(A \cap B)}}{\mathrm{n(B)}}.$$

É importante observar também, de acordo com a definição, temos que:

$$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} \Rightarrow \mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A/B)} \cdot \mathrm{P(B)}.$$

Analogamente,

$$\mathrm{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} \Rightarrow \mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(B/A)} \cdot \mathrm{P(A)}.$$

O que resulta em:

$$\mathrm{P(A/B)} \cdot \mathrm{P(B)} = \mathrm{P(B/A)} \cdot \mathrm{P(A)}.$$

Apresentamos, a seguir, mais um exemplo interessante e que é muito trabalhado com a 2ª série do Ensino Médio.

Exemplo:

Uma moeda é lançada três vezes seguidas. Considere os eventos a seguir e determine a Probabilidade Condicional $P(B/A)$.

A) Sair cara (K) no 2º lançamento.

B) Sair coroa (C) em algum lançamento.

Resolução:

No lançamento de uma moeda três vezes seguidas, temos como espaço amostral $S = \{(KKK), (KKC), (KCK), (KCC), (CKK), (CKC), (CCK), (CCC)\}$. A Probabilidade Condicional $P(B/A)$, significa a Probabilidade de sair coroa, sabendo que no 2º lançamento saiu cara. Pelo espaço amostral S, temos 4 possibilidades de sair cara no 2º lançamento e que dentre essas 3 são as possibilidades de sair coroa, ou seja, $P(B/A) = \frac{3}{4}$.

Utilizando a definição, temos que:

$$P(B/A) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4}.$$

3.8 Probabilidade de Eventos Independentes

Definição:

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S, com $P(B) \neq 0$, dizemos que A é independente de B quando $P(A/B) = P(A)$.

Dizemos que dois ou mais eventos são independentes quando a Probabilidade de um certo evento não depende, ou não interfere, na Probabilidade do outro.

Proposição:

Dados os eventos $A, B \subset S$ tais que $P(A), P(B) \neq 0$, temos:

A é independente de $B \Leftrightarrow B$ é independente de $A \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Demonstração:

Primeiramente temos que: A é independente de $B \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) \Leftrightarrow B$ é independente de A. Por outro lado, B é independente de $A \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Os livros, em sua maioria, trazem, como definição, a Probabilidade de Eventos Independentes, como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Essa definição tem certa vantagem, pois inclui os casos em que $P(A) = 0$ e $P(B) = 0$. Porém, para o ensino médio, acreditamos que a definição anterior seja mais compreensível por parte do aluno, por ser mais intuitiva. A seguir, veremos uma aplicação desse tipo de Probabilidade.

Exemplo:

Um casal pretende ter 4 filhos. Calcule a probabilidade de o casal ter mais de um filho do sexo masculino.

Resolução:

Como a probabilidade de o segundo filho ser do sexo masculino, não depende do sexo do primeiro, a probabilidade do terceiro não depende do primeiro e segundo e a probabilidade do quarto filho não depende dos três anteriores. Dizemos que, a probabilidade procurada é uma probabilidade de eventos independentes. Sendo assim, $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

Como a probabilidade procurada é a de que o casal tenha mais de um filho do sexo masculino (M), podemos calcular a probabilidade de que todos sejam do sexo feminino (F), ou que apenas um seja do sexo masculino e retirar de 1, ou seja:

a) todos do sexo feminino (FFFF): $P(X) = P(A_1 \cap B_1 \cap C_1 \cap D_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

b) apenas 1 do sexo masculino (MFFF): $P(Y) = P(A_2 \cap B_2 \cap C_2 \cap D_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{4}$.

Então, temos: $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(X) + P(Y) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.

Apresentamos a seguir, um problema interessante e de grande repercussão histórica, que pode ser discutido com os alunos e que envolve probabilidade de eventos independentes, que é o problema dos pontos, identificado em uma das 7 cartas trocadas por Fermat e Pascal, e citado no subitem 3.1.

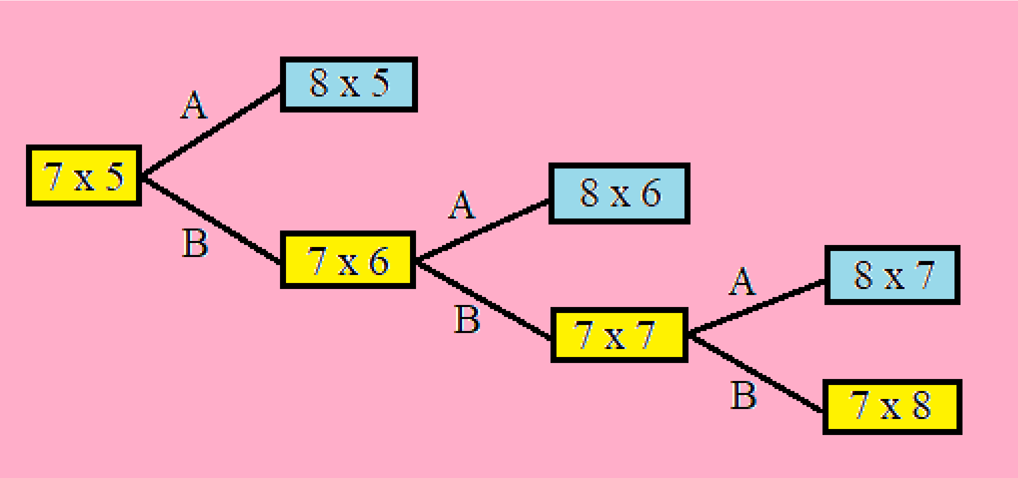
“ Dois jogadores, possuem a mesma habilidade, para um determinado jogo de dados. O primeiro jogador que conseguir 8 vitórias será o vencedor. O jogo é interrompido quando o jogador A possui 7 vitórias e o jogador B, 5 vitórias. Como deve ser dividido o valor da aposta que é de 600 moedas de ouro?”

É importante, que se perceba, que podemos considerar duas soluções para esse problema, uma com a visão de passado e outra com a visão de futuro; na segunda, pensamos na probabilidade clássica.

1ª resolução: (visão de passado) – analisando o que já ocorreu na partida, o valor deveria ser dividido proporcionalmente a 7 e 5, uma vez que o jogador A venceu 7 vezes e o jogador B venceu 5. Sendo assim, O jogador A deveria ficar com $\frac{7}{12}$ do valor da aposta e o jogador B com $\frac{5}{12}$. Ou seja, o jogador A deveria receber: $\frac{7}{12} \cdot 600 = 350$ moedas de ouro. Enquanto, o jogador B deveria receber: $\frac{5}{12} \cdot 600 = 250$ moedas de ouro.

2ª resolução: (visão de futuro) – analisando o que poderia acontecer na partida, caso ela não tivesse sido interrompida, teríamos as seguintes possibilidades de terminar o jogo. Vamos fazer uma árvore com as possibilidades, para ficar mais fácil a visualização.

Figura 11: Problema dos dados



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Perceba que, para o jogador B ganhar, ele teria que vencer três partidas seguidas. Usando a probabilidade, ele teria: $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ de chances de ganhar o jogo, ou seja, ele deveria receber $\frac{1}{8} \cdot 600 = 75$ moedas de ouro. Enquanto que o jogador A teria $\frac{7}{8}$ de chances; sendo assim, deveria receber $\frac{7}{8} \cdot 600 = 525$ moedas de ouro.

A seguir apresentamos outro problema que muitas vezes, nosso senso comum, pode estar incorreto na tomada de decisão feitas por deduções prováveis:

“Para incentivar a carreira promissora de João no tênis, seu pai ofereceu a ele um prêmio se ele ganhar (pelo menos) dois sets seguidos em uma série de três sets, que será jogada com seu pai e o campeão do clube que frequentam, alternando entre pai-campeão-pai ou campeão-pai-campeão, de acordo com a escolha de João. O campeão é melhor jogador que o pai de João. Qual sequência João deve escolher?”

Se você pensou em responder pai-campeão-pai, pois jogar duas vezes com o pai seria mais fácil que jogar duas vezes com o campeão, sua resposta está incorreta.

Resolução:

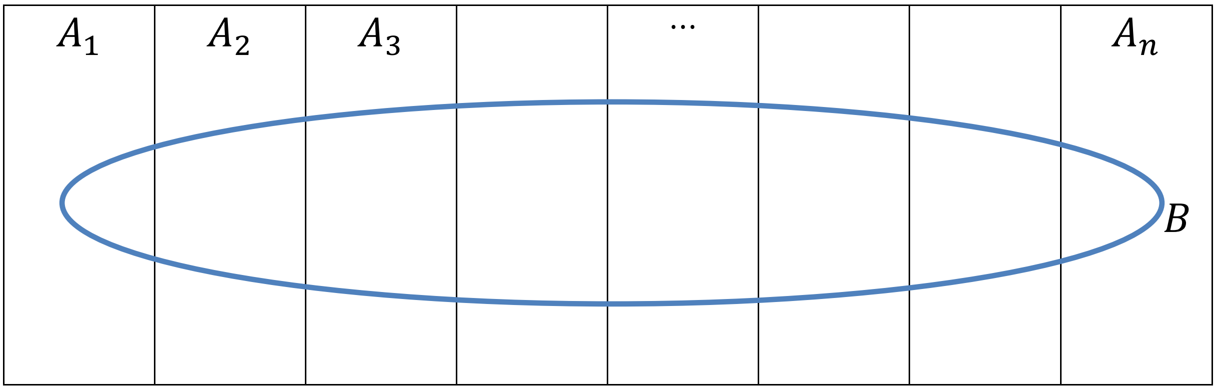
A probabilidade de João ganhar do pai é de 60% = 0,6 e de ganhar do campeão é de 40% = 0,4, logo, ele possui mais chances de ganhar do pai. Para ambas as sequências, para João ganhar o prêmio, ele precisa ganhar as duas primeiras, ou as duas últimas, ou todas. Logo, na sequência pai-campeão-pai, a probabilidade de João ganhar o prêmio é $0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}336$, ou seja, ele possui 33,6% de chances. Na sequência, campeão-pai-campeão, a probabilidade de João ganhar o prêmio é $0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}384$, ou seja, ele possui 38,4% de chances. Logo, João tem maior chance de ganhar na sequência campeão-pai-campeão.

Embora a definição clássica resolva uma boa parte dos problemas de probabilidades, ela possui certas limitações, pois não pode ser aplicada em problemas cujo espaço amostral é infinito e/ou equiprováveis, sendo assim, é necessária uma visão mais ampla da Probabilidade, que veremos nos próximos subitens.

3.9 Teorema da Probabilidade Total

Para melhor entender o teorema, observe a ilustração a seguir.

Figura 12: Teorema da Probabilidade Total



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Definição:

Seja B um evento contido em uma união de eventos disjuntos, ou seja, mutuamente exclusivos, $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, em que $P(A_1), P(A_2), P(A_3), \cdots, P(A_n) > 0$, então

$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) + \cdots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$.

Demonstração:

Temos que $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$. Então,

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_n) \Longrightarrow$

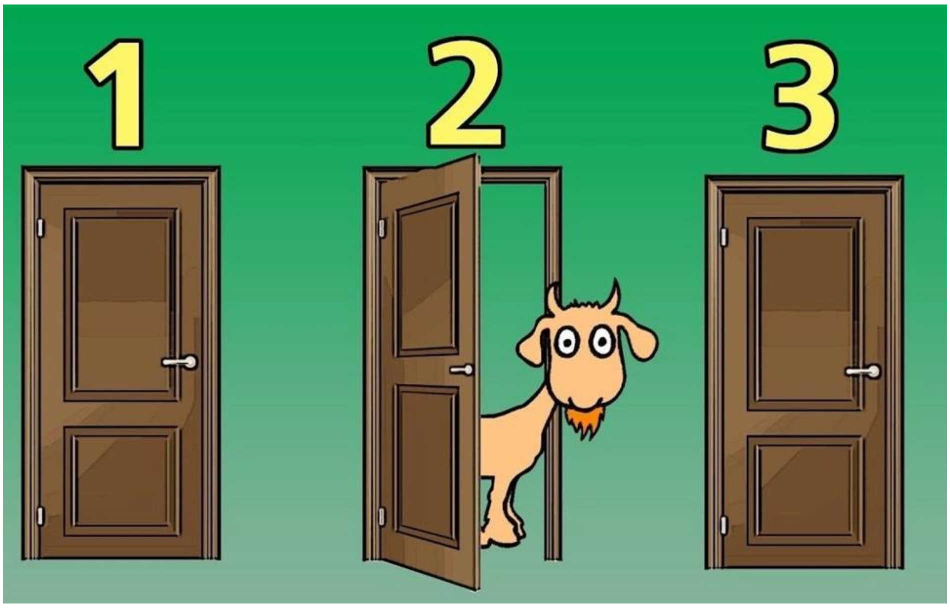
$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) + \cdots + P(B/A_n) \cdot P(A_n).$

Exemplo:

Um problema interessante, em que podemos aplicar o Teorema da Probabilidade Total, é o famoso problema de Monty Hall. Esse problema surgiu em uma TV Americana, e consistia em apresentar aos telespectadores 3 portas, sendo que uma delas continha um prêmio relevante e as outras duas, continham dois bodes, ou seja, prêmios irrelevantes. Após o telespectador escolher uma porta, o apresentador abria uma das portas (que não continha o prêmio relevante) que ele não tinha escolhido, e perguntava-lhe se gostaria de mudar de porta ou manter a porta escolhida. O que você faria?

Esse problema é muito interessante e a princípio provoca uma discussão riquíssima em sala de aula. Em outra oportunidade, já tive a possibilidade de aplicar essa situação em sala e a participação dos alunos foi algo formidável. A seguir, apresentamos sua resolução utilizando a definição do teorema da Probabilidade Total.

Figura 13: Problema de Monty Hall



Fonte: https://scontent.fplu4-1.fna.fbcdn.net/v/t1.6435-9/32116518_805919756275298_6279324697368723456_n.jpg?_nc_cat=107&ccb=1-5&_nc_sid=730e14&_nc_ohc=QRBmHR7gHR4AX9Arazv&_nc_ht=scontent.fplu4-1.fna&oh=00_AT8xkx1QFWp8Zk_IeiE8bSHbZGq71tDv54NoUd2_khw--A&oe=61F61F61. Acesso em: 19 dez 2021.

Para utilizarmos o Teorema da Probabilidade Total, vamos particionar o espaço amostral (S) em dois eventos:

A_1: “o telespectador escolheu a porta com o prêmio relevante” e

A_2: “o telespectador escolheu a porta com o bode”.

Assim, temos $P(A_1) = \frac{1}{3}$ e $P(A_2) = \frac{2}{3}$, e temos também as probabilidades dos eventos:

B: ganhar o prêmio relevante trocando de porta e

C: ganhar o prêmio relevante sem trocar de porta.

Então, temos:

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) \Longrightarrow$

$P(B) = 0 \cdot \dfrac{1}{3} + 1 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

$P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) = P(C/A_1) \cdot P(A_1) + P(C/A_2) \cdot P(A_2) \Longrightarrow$

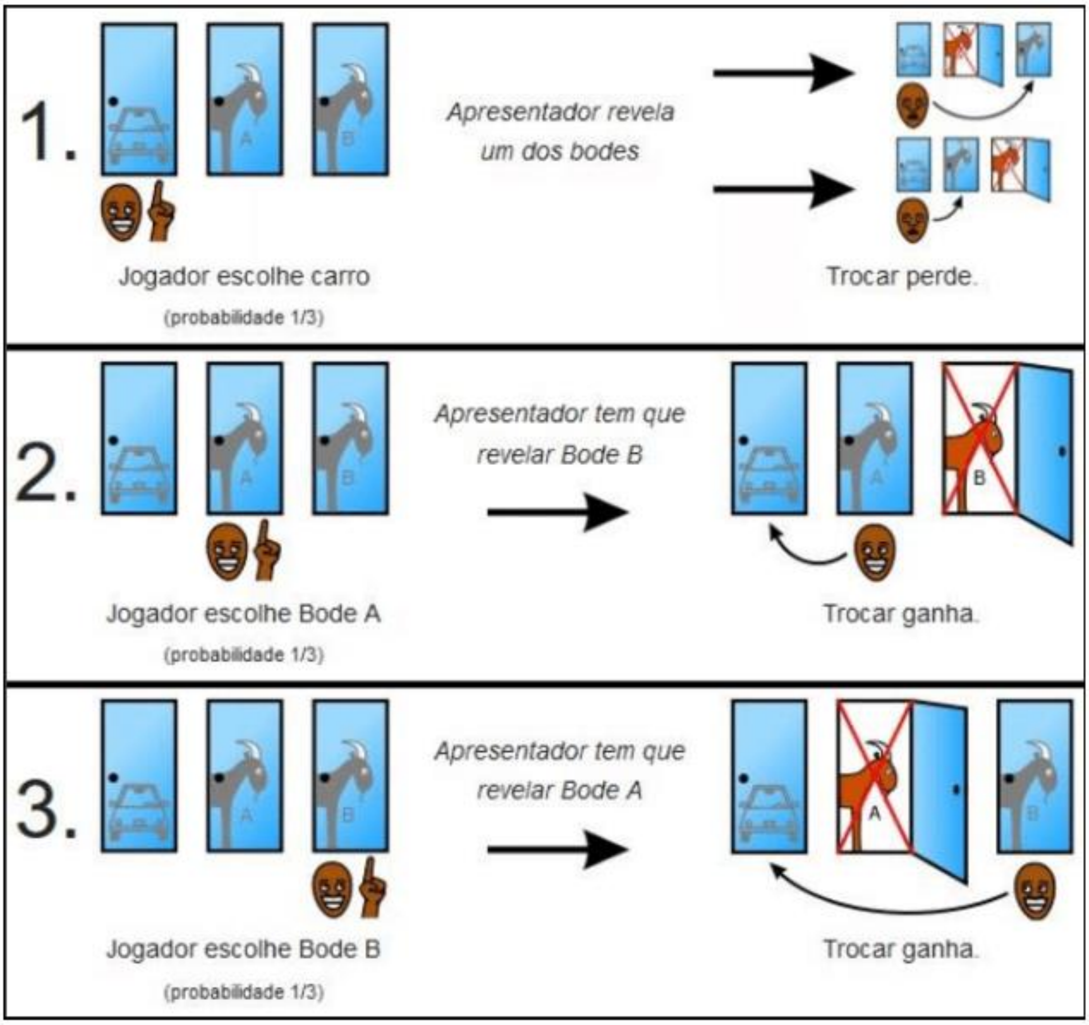
$P(C) = 1 \cdot \dfrac{1}{3} + 0 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}.$

Portanto, a probabilidade do telespectador ganhar o prêmio trocando de porta $P(B) = \frac{2}{3}$, é maior do que a probabilidade não trocando de porta $P(B) = \frac{1}{3}$. Sendo mais preciso, a probabilidade de ele ganhar o prêmio trocando de porta é o dobro de quando ele não troca.

Apresentamos agora, uma resolução de maneira ilustrativa.

Consideremos as três possibilidades de escolha da porta e a estratégia de trocar de porta, após a pergunta do apresentador. Dessa forma teremos:

Figura 14: Ilustração do desenvolvimento do Problema de Monty Hall



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Problema-de-Monty-Hall-para-100-portas-Um-estudo-recente-5-submeteu-humanos-e-pombos_fig8_314656345. Acesso em: 21 dez 2021.

Situação 1: O telespectador escolhe a porta que tem o prêmio.

Como o telespectador irá trocar de porta, se o apresentador abrir a porta 2 ou 3 tanto faz, certamente ele perderá o prêmio, pois, ao trocar de porta, mudará para uma que tem um bode.

Situação 2: O telespectador escolhe a segunda porta, na qual está o bode.

Nessa situação, o apresentador só poderá abrir a terceira porta, na qual está o bode, como o telespectador irá trocar de porta, então, certamente ele ganhará o prêmio.

Situação 3: O telespectador escolhe a terceira porta, na qual está o bode.

Nessa situação, o apresentador só poderá abrir a segunda porta, na qual está o bode, como o telespectador irá trocar de porta, então, certamente ele ganhará o prêmio.

Ou seja, nas três situações possíveis, se o telespectador trocar de porta, em duas delas ele ganhará o prêmio. Logo, concluímos que trocar de porta é a melhor opção.

3.10 Teorema de Bayes

A seguir apresentamos a equação do Teorema de Bayes, note que essa equação é um pouco complexa de ser trabalhada a nível de ensino médio, porém, com as definições de Probabilidade Condicional, Probabilidade de eventos independentes e Teorema da Probabilidade Total é possível resolver os problemas que envolvem o Teorema de Bayes, pois a memorização da equação torna-se desnecessária.

Teorema:

Seja $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$, sendo que os eventos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ são disjuntos dois a dois, tais que $P(A_i) \neq 0$ para todo $i = 1,2,3, \cdots, n$ e $P(B) \neq 0$, então

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$

Demonstração:

A prova desse teorema deriva diretamente da definição da Probabilidade Condicional, da Probabilidade dos eventos independentes e do Teorema da Probabilidade Total. Ou seja,

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}.$$

A seguir apresentamos um exemplo que pode ser trabalhado na 2ª série do ensino médio utilizando o teorema de Bayes.

Exemplo 1:

Existem apenas dois modos, mutuamente excludentes, de Bianca ir para Barcelona participar de um congresso: ou de navio ou de avião. A probabilidade de Bianca ir de navio é de 40% e de ir de avião é de 60%. Se ela for de navio, a probabilidade de chegar ao congresso com dois dias de atraso é de 8,5%. Se ela for de avião, a probabilidade de chegar ao congresso com dois dias de atraso é de 1%. Sabe-se que Bianca chegou com dois dias de atraso ao congresso em Barcelona. Qual a probabilidade de ela ter ido de avião?

Resolução:

É uma probabilidade condicional, pois, temos a informação que ela atrasou. Consideremos:

A_1: a probabilidade que ela vá de avião; então $P(A_1) = 60\%$.

A_2: a probabilidade que ela vá de avião; então $P(A_2) = 40\%$.

B/A_1: a probabilidade que ela irá atrasar, tendo ido de avião; então $P(B/A_1) = 1\%$.

B/A_2: a probabilidade que ela irá atrasar, tendo ido de navio; então $P(B/A_2) = 8{,}5\%$.

B: a probabilidade que ela venha a se atrasar.

Utilizando o Teorema de Bayes, temos:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}01}{0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}085} = \frac{0{,}006}{0{,}04} =$$

$0{,}15$, ou seja, a probabilidade de Bianca ter ido de avião é de 15%.

Outro exemplo bem interessante para se trabalhar na 2ª série do ensino médio e que os próprios especialistas (médicos) costumam se assustar por motivo errôneo, devido a cálculos incorretos, é a estimativa de uma certa doença para um determinado paciente. Vejamos a seguir.

Exemplo 2:

Após vários pacientes serem submetidos a testes para detectar o Coronavírus, também conhecido por Covid-19, foi comprovado que tais testes possuem uma acurácia de 90%. Ou seja, em 90% dos casos o teste acerta. Sendo assim, se uma pessoa está com Covid-19, se o teste der positivo, significa que 90% dos pacientes têm a doença e desses, 10% não têm. Dos 10% que não têm a doença, o teste também acerta, ou seja, em 90% destes, o exame dará negativo e os 10% dos pacientes restantes tem a doença. Suponha que uma pessoa fez o teste e que o resultado foi positivo. Sabendo que, em um determinado momento, 1% da população nacional está com a doença, qual a probabilidade dessa pessoa ter realmente a doença?

Resolução:

D : as pessoas que apresentam a doença; $P(D) = 1\%$.

nD : as pessoas que não apresentam a doenças; $P(nD) = 99\%$.

+/D : as pessoas cujo teste deu positivo e realmente têm a doença; $P(D/+) = 90\%$.

+/nD : as pessoas cujo teste deu positivo, mas não têm a doença. $P(D/-) = 10\%$.

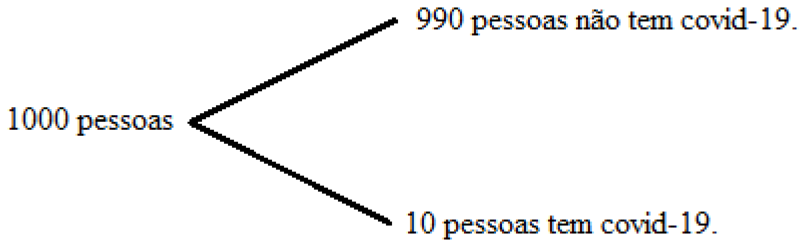
A probabilidade de que a pessoa realmente tenha a doença, sabendo que o resultado do teste foi positivo, é dada por:

$$P(D/+) = \frac{P(+/D) \cdot P(D)}{P(+/D) \cdot P(D) + P(+/nD) \cdot P(nD)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}99} = \frac{0{,}009}{0{,}108} = 8{,}3\%.$$

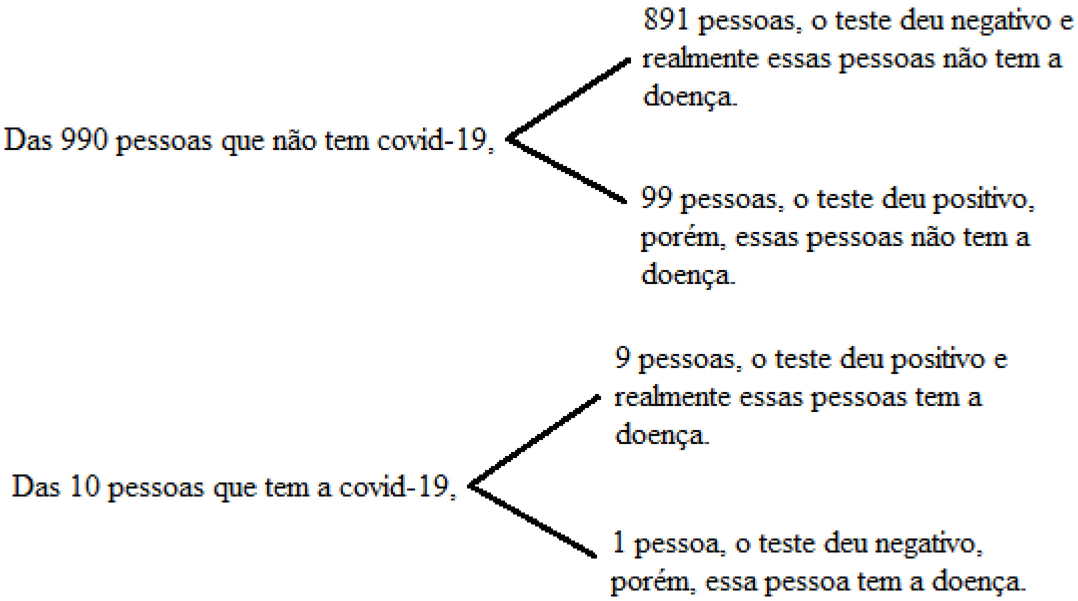
Conforme relatado por AMORIM e MOZER, 2020, p. 60, “em uma pesquisa similar, um terço dos médicos alemães estimaram que a probabilidade pedida estava em torno de 90% e 95% dos médicos americanos concluíram que a probabilidade seria próxima de 75%. Porém, o valor correto é de 8,3%.”

Outra forma de se calcular essa probabilidade é fazendo o diagrama de árvores. Para facilitar os cálculos vamos considerar uma população com 1000 pessoas, em que todas fizeram o teste. Das 1000 pessoas, como 1% da população tem covid-19, então:

Figura 15: Diagrama de árvores



Como o teste tem uma acurácia de 90%, então:



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

Dessa forma, fica fácil usar a Probabilidade Clássica, ou seja, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, em que, $n(S) = 99 + 9 = 108$ e $n(A) = 9$, sendo assim, temos que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{108} = 0{,}08333\ldots \cong 8{,}3\%.$$

Consideramos fundamental apresentar esse tipo de situação-problema aos alunos, pois são situações aplicáveis à vida real. Também devemos buscar maneiras diferentes de resolução, evitando sempre que possível decorar fórmulas complexas, ampliando as possibilidades de resolução desses problemas.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Uma pesquisa surge da necessidade ou inquietação de determinadas pessoas, acerca de um determinado problema ou da constatação de um certo fenômeno.

Pesquisar, de uma forma mais geral, é procurar uma informação que não sabemos e que nos interessa. Consultar livro, revistas, documentos, conversar com pessoas mais experientes, são formas de pesquisa, considerada como sinônimo de busca, de investigação e indagação. (PRODANOV & FREITAS, 2013)

Para Prodanov e Freitas, pesquisar cientificamente, significa

> [...] realizarmos essa busca de conhecimentos, apoiando-nos em procedimentos capazes de dar confiabilidade aos resultados. A natureza da questão que dá origem ao processo de pesquisa varia. O processo pode ser desencadeado por uma dificuldade, sentida na prática profissional, por um fato para o qual não conseguimos explicações, pela consciência de que conhecemos mal alguma situação ou, ainda, pelo interesse em criarmos condições de prever a ocorrência de determinados fenômenos. (PRODANOV & FREITAS, 2013, p. 44)

Sendo assim, esta pesquisa se deu por causa da nossa inquietação acerca da dificuldade encontrada por professores e alunos em relação ao ensino e à aprendizagem da Probabilidade, em turmas da 2ª série do Ensino Médio, ao longo de vários anos de experiência como professores de Matemática.

Dessa forma, buscamos na Estratégia de Aprendizagem TBL, formular hipóteses na tentativa de buscar caminhos que minimizassem nossas inquietações, a fim de responder ao nosso questionamento que era ***“De que forma uma sequência didática, desenvolvida por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL, pode contribuir para melhorar o ensino e consequentemente promover a aprendizagem dos alunos?”***.

No intuito de responder a essa pergunta, elaboramos e buscamos respostas para os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar uma sequência didática com intuito de promover o ensino e a aprendizagem de Probabilidade por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL;
- Elaborar e aplicar um questionário de sondagem inicial;
- Elaborar e aplicar um questionário final de *feedback*;

- Aplicar uma sequência didática a fim de promover o ensino e a aprendizagem de Probabilidade por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL;
- Apresentar novas situações-problemas relacionadas aos vários tipos de Probabilidade, assim como a resolução desses.

Concordamos que "nenhuma pesquisa é totalmente controlável, com início, meio e fim previsíveis. A pesquisa é um processo em que é impossível prever todas as etapas. O pesquisador está sempre em estado de tensão porque sabe que seu conhecimento é parcial e limitado." (GOLDENBERG, 2004)

A palavra Metodologia que vem do grego, deriva dos termos 'meta" = ao largo; "odos" = caminho e "logos" = discurso, estudo.

Segundo Prodanov e Freitas, metodologia é

> [...] compreendida como uma disciplina que consiste em estudar, compreender e avaliar os vários métodos disponíveis para a realização de uma pesquisa acadêmica. A Metodologia, em um nível aplicado, examina, descreve e avalia métodos e técnicas de pesquisa que possibilitam a coleta e o processamento de informações, visando ao encaminhamento e à resolução de problemas e/ou questões de investigação. (PRODANOV & FREITAS, 2013, p. 14)

A metodologia define métodos científicos diferentes para a realização de uma pesquisa. O método científico é um conjunto de afazeres que se deve empregar para realizar uma investigação, ou seja, é a linha condutora utilizada no processo da pesquisa. (PRODANOV & FREITAS, 2013, p. 24)

O método utilizado em nossa pesquisa foi o Hipotético-Dedutivo, uma vez que, a partir do problema: ***"dificuldade de ensinar e aprender probabilidade na 2ª série do ensino médio"***, nossa pesquisa buscou formular hipóteses por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL, na tentativa de propor soluções relacionadas ao problema.

Conforme Pradanov & Freitas (2013),

> A pesquisa científica, com abordagem hipotético-dedutiva, inicia-se com a formulação de um problema e com sua descrição clara e precisa, a fim de facilitar a obtenção de um modelo simplificado e a identificação de outros conhecimentos e instrumentos, relevantes ao problema, que auxiliarão o pesquisador em seu trabalho. " (PRODANOV & FREITAS, 2013, p. 32)

Este capítulo trata da metodologia e do contexto da pesquisa, sendo dividido em três seções. Na primeira seção, descrevemos nosso entendimento sobre pesquisa qualitativa. Na segunda seção, discorremos sobre sequência didática, que foi o fio condutor para o desenvolvimento do nosso trabalho. E, finalmente, na terceira e última seção, apresentamos como foi desenvolvida a nossa sequência didática.

4.1 Pesquisa Qualitativa

Sob o ponto de vista da abordagem do problema, a pesquisa descrita nesta dissertação apresenta uma abordagem qualitativa, pois mantivemos um contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo. Mas, também, entendemos que nessa abordagem, além de considerar as respostas descritivas dos alunos, poderíamos fazer um levantamento quantitativo dos acertos e erros em relação a cada questão abordada. Nesse sentido, Goldenberg (2004) aponta que

> A maior parte dos pesquisadores em ciências sociais admite, atualmente, que não há uma única técnica, um único meio válido de coletar os dados em todas as pesquisas. Acreditam que há uma interdependência entre os aspectos quantificáveis e a vivência da realidade objetiva no cotidiano. A escolha de trabalhar com dados estatísticos ou com um único grupo ou indivíduo, ou com ambos, depende das questões levantadas e dos problemas que se quer responder. É o processo da pesquisa que qualifica as técnicas e os procedimentos necessários para as respostas que se quer alcançar. Cada pesquisador deve estabelecer os procedimentos de coleta de dados que sejam mais adequados para o seu objeto particular. O importante é ser criativo e flexível para explorar todos os possíveis caminhos e não reificar a ideia positivista de que os dados qualitativos comprometem a objetividade, a neutralidade e o rigor científico. (GOLDENBERG, 2004, p. 62)

No entanto, sob a ótica da pesquisa qualitativa, é fundamental que o pesquisador tenha flexibilidade e criatividade na coleta e análise dos dados. Não existem regras precisas, o bom resultado da pesquisa depende da sensibilidade do pesquisador. (GOLDENBERG, 2004)

Em nossa pesquisa, destacamos técnicas de pesquisa como: questionários, gravação de áudio, observação participante e análise documental.

Assim, aplicamos um questionário inicial, cuja finalidade era identificar o que os alunos lembravam sobre conceitos e aplicação de Probabilidade e em quais séries eles já tinham estudado o tema. Esse questionário funcionou como uma espécie de diagnóstico sobre o tema proposto e ajudou a nortear as questões das avalições.

Após o estudo do tema, utilizando a Sala de Aula Invertida, e em seguida, a Estratégia de Aprendizagem TBL, os alunos deveriam resolver as questões propostas, individualmente e em grupos, e durante a resolução deveriam gravar os áudios de suas respectivas discussões nos grupos. Nesse momento, o pesquisador assumiu o papel de observador participante e pode perceber todo o dinamismo que a Estratégia de Aprendizagem propunha.

E, por fim, foi aplicado um questionário final, para avaliar o que os alunos acharam da Estratégia de Aprendizagem TBL aplicada no desenvolvimento da pesquisa.

4.2 Sequência Didática

A sequência didática é uma maneira de configurar de forma ordenada, como e quais atividades serão desenvolvidas com os alunos. É uma forma de personalização e de organização de todas as atividades que serão desenvolvidas para alcançar o objetivo maior, que é a aprendizagem do estudante.

A aprendizagem é uma construção individual (particular) que cada pessoa realiza graças à ajuda que recebe de outras pessoas. Essa construção, que será realizada por parte do educando, está diretamente relacionada ao seu interesse e disponibilidade, de seus conhecimentos prévios e de sua experiência. (ZABALA, 1998)

Assim, aplicamos nosso questionário inicial, como forma de levantar os conhecimentos prévios dos alunos. Para o desenvolvimento de nossa sequência didática, enumeramos 8 (oito) itens importantes a considerar. São eles:

1) Conteúdos a serem trabalhados;
2) Objetivos;
3) Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas;
4) Tempo para estudo (leituras, videoaulas e registro delas);
5) Tempo para a realização das atividades avaliativas;
6) Disponibilização do material necessário para a execução do trabalho;
7) Detalhamento de cada aula da sequência didática;
8) Finalização da sequência didática.

Como forma de validação, mas sobretudo de possibilitar pistas para elucidar algumas atividades ou acrescentar novas, Zabala (1998, p. 63) sugere algumas perguntas a se fazer no desenvolvimento de uma sequência didática. Na sequência didática existem atividades:

a) que nos permitem determinar os conhecimentos prévios dos alunos?
b) em que os conteúdos são propostos, de forma que sejam significativos para os alunos?
c) que podemos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento dos alunos?
d) que representam um desafio alcançável pelos alunos e fazem avançar com a ajuda necessária?
e) que provocam um conflito cognitivo e promovem a atividade mental dos alunos, de forma que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
f) que estimulem a autoestima e o autoconhecimento em relação às aprendizagens, ou seja, que os alunos sentem que aprenderam?

g) que ajudem os alunos a adquirirem habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhes permita serem cada vez mais autônomos em suas aprendizagens?

As perguntas sugeridas por Zabala no desenvolvimento de uma sequência didática, nos ajudam também a perceber e a (re)avaliar o processo de desenvolvimento da Estratégia de Aprendizagem TBL, de forma que elas se complementam.

A seguir, apresentamos o contexto de nossa pesquisa, considerando as condições em que nossa sequência didática foi desenvolvida.

4.3 Contexto de pesquisa

Nossa sequência didática foi desenvolvida no período de 22/10/2021 a 24/11/2021, de forma presencial para todos os alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Belo Horizonte - Minas Gerais, após a aprovação da direção e da coordenação da escola.

O trabalho foi desenvolvido nas duas turmas da 2ª série, porém, os dados coletados e analisados referem-se a turma A. Essa turma tinha 43 alunos, porém, com o remanejamento de alunos da turma A para a turma B, no início do ano, a numeração da chamada ia até o número 47. Por isso, na próxima seção, será possível notar que nos referimos a um aluno cujo número é 47.

Como os alunos, em sua maioria, estudaram nessa escola desde os anos iniciais, então, podemos afirmar que a maioria deles já havia tido contato com algum raciocínio probabilístico e estudado alguns conceitos relacionados à Probabilidade em várias séries anteriores; porém eles lembravam muito pouco do assunto.

Como forma de comprovar e analisar o que os alunos ainda lembravam de Probabilidade, aplicamos um questionário de sondagem inicial no dia 22/10/2021, cujo resultado será apresentado na próxima seção.

Os alunos que participaram da nossa pesquisa, eram menores de 18 anos, exceto uma aluna. Dessa forma, solicitamos aos participantes e aos seus respectivos responsáveis, que preenchessem e assinassem os termos de Consentimento e Assentimento exigidos legalmente. Assim, os alunos e seus responsáveis ficaram cientes de que todas as informações seriam utilizadas de forma anônima, cuja única finalidade é a de pesquisa.

Os alunos se prepararam previamente, utilizando os materiais disponibilizados pelo pesquisador, e nas datas marcadas fizeram as avaliações individuais e em grupos, conforme proposto pela Estratégia de Aprendizagem TBL.

Por fim, os alunos preencheram no dia 24/11/2021 um questionário final, em que puderam avaliar a estratégia metodológica utilizada e se, o quanto e de que forma essa metodologia contribuiu para o desenvolvimento de sua aprendizagem acerca do tema estudado. Os resultados da pesquisa, bem como o questionário final, serão apresentados no próximo capítulo desta dissertação.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Conforme abordado anteriormente, o pensamento Probabilístico já era utilizado a mais de 3000 anos a.C.. Com o passar do tempo, a necessidade de se comprovar por meio de regras matemáticas a resolução de determinados problemas, fez com que matemáticos do século XVIII e XIX, por meio de axiomas, desenvolvessem a Teoria das Probabilidades, o que deu um caráter extremamente formal a esse conteúdo. Com o surgimento dos documentos oficiais PCN e BNCC, no século XX, que propõe currículos básicos comuns, a Probabilidade ganha um lugar de destaque.

No Ensino Básico, sua importância pode ser medida por meio dos documentos oficiais, que sugerem que a Probabilidade seja trabalhada em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No Ensino Médio, a Probabilidade possui novas formas de desenvolvimento, para conseguir resolver problemas que, até então, não devem ter sido abordados no Ensino Fundamental.

Dessa maneira, novos conceitos e propriedades surgem, além da ampliação e consolidação dos conceitos e propriedades já desenvolvidos no Ensino Fundamental.

Para se trabalhar a Probabilidade de maneira significativa, é fundamental um planejamento de tempo e propostas metodológicas que facilitem o aprendizado dos alunos, visto que, por experiências anteriores, sabemos da dificuldade deles com esse tema.

Sendo assim, nossa sequência didática, foi desenvolvida com base na Estratégia de Aprendizagem TBL, que vai ao encontro das novas propostas metodológicas da Educação, conforme proposto por BACICH & MORAM (2018) e OLIVEIRA (2015), entre outros. Ela foi dividida em três partes, que nomeamos: Percurso Metodológico 1 (Atividades 1 e 2), Percurso Metodológico 2 (Atividades 3 e 4) e Resolução de Problemas Complexos (Atividade 5), os quais serão apresentados e analisados separadamente mais adiante.

Como já mencionado anteriormente, nossa pesquisa foi realizada em uma escola particular de Belo Horizonte, com uma turma de 2ª série do Ensino Médio, com 43 alunos. Iniciamos o trabalho com um questionário de sondagem inicial, a seguir aplicamos uma sequência didática composta de 3 fases (que são os percursos metodológicos 1 e 2 e a resolução de problemas complexos) e finalizamos com outro questionário, denominado questionário de sondagem final. Inicialmente esse trabalho foi elaborado para ser desenvolvido de forma remota (on-line) devido à pandemia. Porém, com o retorno das aulas, ele foi reformulado e desenvolvido presencialmente.

Devido ao tipo de abordagem da nossa pesquisa, optamos por não aplicar uma avaliação de múltipla escolha, com gabarito, conforme especifica a Estratégia de Aprendizagem TBL, uma vez que entendemos que para termos uma análise qualitativa e podermos interpretar de forma mais detalhada os dados, era necessária uma avaliação discursiva. Dessa forma, todas as avaliações aplicadas foram discursivas, tanto individualmente quanto em equipes.

O planejamento da nossa sequência didática foi apresentado à Direção e à Coordenação da escola e, após aprovado, foi posto em execução. Esse planejamento encontra-se detalhado no Anexo A.

Apresentamos, a seguir, as respostas do questionário de sondagem inicial, que se encontra no Anexo B. No dia da aplicação do questionário, 7 alunos haviam faltado à aula e, com isso, o resultado apresentado baseia-se no preenchimento dos questionários dos 36 alunos presentes. Os alunos foram identificados de acordo com o número de chamada. O objetivo desse questionário era saber se os alunos se lembravam de alguns conceitos relacionados à Probabilidade e seus significados, situações em que ela pode ser utilizada, séries anteriores nas quais ela foi estudada e em qual o grau de dificuldade os alunos a classificam. A seguir, apresentamos as perguntas, juntamente com as respostas dos alunos, e uma breve análise dos dados coletados.

5.1 Questionário de Sondagem Inicial

1) Idade dos alunos que participaram da pesquisa:

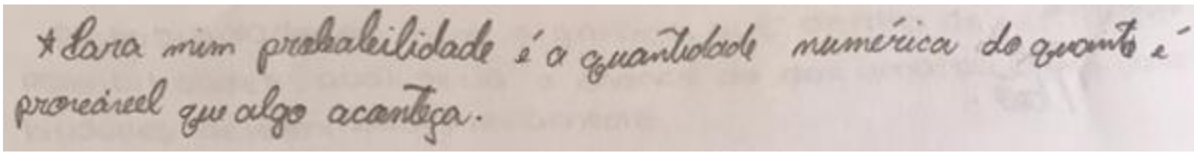
Figura 16 – Idade dos alunos que participaram da pesquisa

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

2) Para você, o que significa Probabilidade?

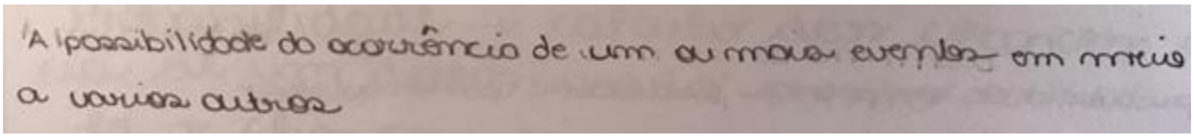
Respostas de três estudantes:

Figura 17 – Resposta do Estudante 28


*Para mim probabilidade é a quantidade numérica do quanto é provável que algo aconteça.

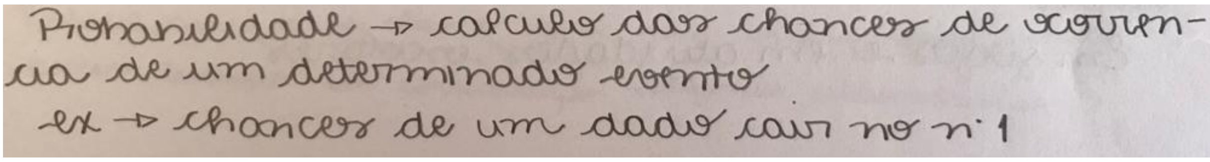
Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 18 – Resposta do Estudante 8


A possibilidade da ocorrência de um ou mais exemplos em meio a vários outros

Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 19 – Resposta do Estudante 26

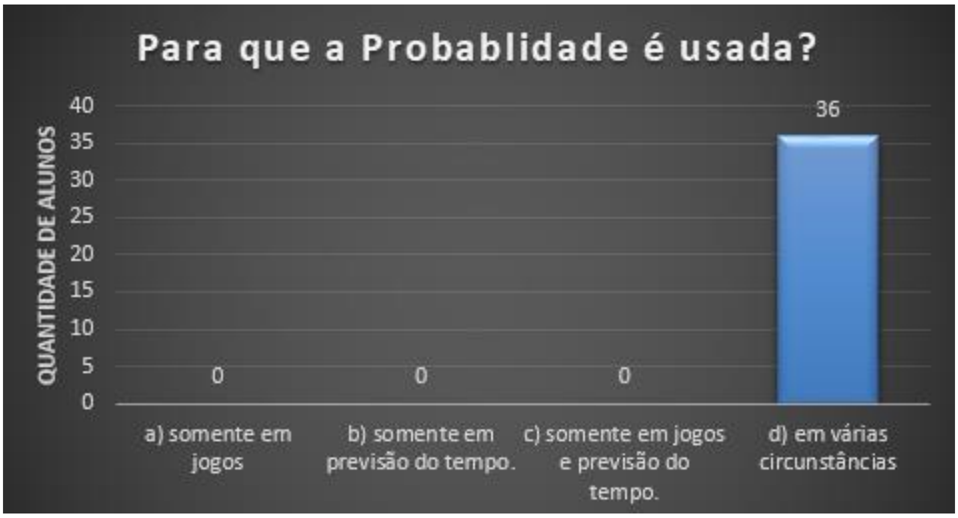

Probabilidade → calculo das chances de ocorrência de um determinado evento
ex → chances de um dado cair no nº 1

Fonte: Dados do Pesquisador

É possível perceber que os estudantes possuem a ideia do conceito de Probabilidade, pois a maioria das respostas foram muito semelhantes a dos três estudantes apresentadas acima, e estas estão bem próximas das ideias em torno do conceito de Probabilidade. Alguns estudantes além de responder à pergunta trouxeram exemplos para o conceito, como podemos notar na resposta do Estudante 26.

3) Para você a Probabilidade é usada ...

Figura 20 – Para que a Probabilidade é usada, segundo os alunos.



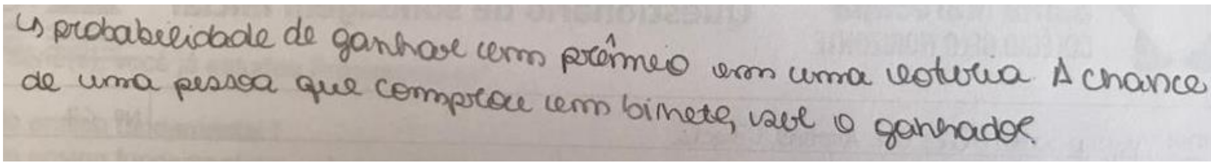
Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Conforme o gráfico apresentado anteriormente é unânime para os estudantes que a Probabilidade pode ser usada em diversas circunstâncias.

4) Caso você tenha marcado a opção (d) para a resposta anterior, descreva brevemente uma outra situação em que se pode usar a Probabilidade.

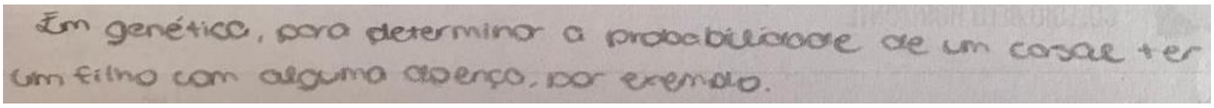
Respostas de três estudantes:

Figura 21 – Resposta do Estudante 36



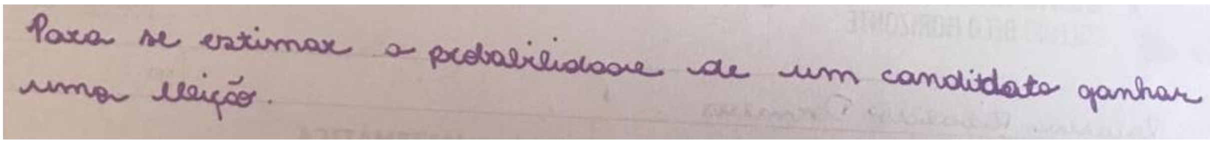
Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 22 – Resposta do Estudante 7



Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 23 – Resposta do Estudante 34

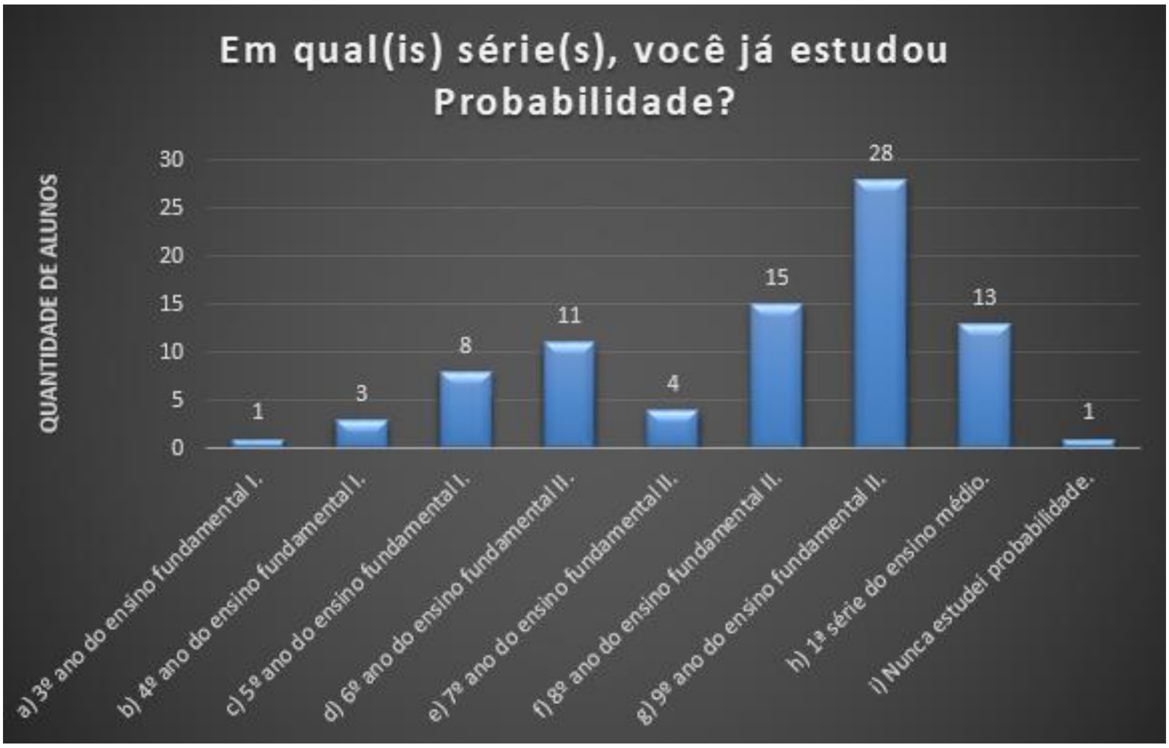


Fonte: Dados do Pesquisador

Todos os estudantes conseguiram apresentar outras circunstâncias, além das apresentadas acima, em que a Probabilidade pode ser aplicada e muitos reafirmaram isso ao escrever que em Biologia estão usando a Probabilidade para o estudo de genética.

5) Em qual(is) série(s), você já estudou Probabilidade? (Essa pergunta pode ter mais de uma resposta.)

Figura 24 – Série em que os alunos estudaram Probabilidade



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

6) Em relação ao que você já estudou sobre Probabilidade, você classifica esse conteúdo como?

Figura 25 – Grau de dificuldade quanto a Probabilidade

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

7) Você vê alguma relação entre os conteúdos de Probabilidade e Análise Combinatória?

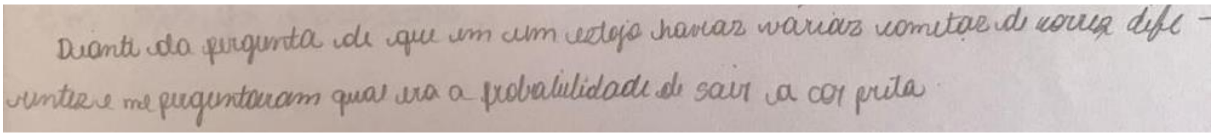
Figura 26 – Relação entre Probabilidade e Análise Combinatória

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

8) Você já usou o conceito de Probabilidade em algum momento da vida? Se sim, relate como foi sua experiência.

Respostas de três estudantes:

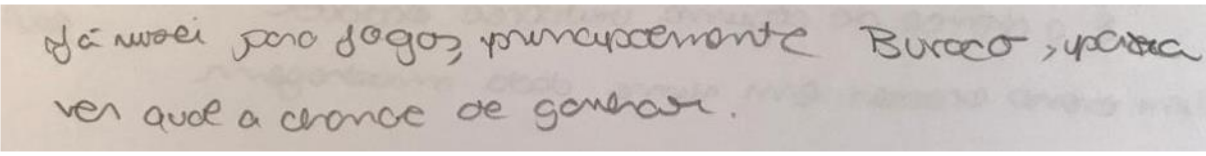
Figura 27 – Resposta do Estudante 17



Diante da pergunta de que em um estojo havia várias canetas de cores dife-
rentes e me perguntaram qual era a probabilidade de sair a cor preta

Fonte: Dados do Pesquisador

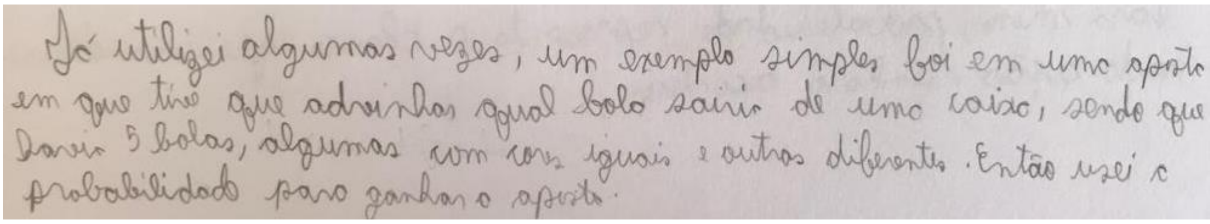
Figura 28 – Resposta do Estudante 35



Já usei para jogos principalmente Buraco, para
ver qual a chance de ganhar.

Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 29 – Resposta do Estudante 9



Já utilizei algumas vezes, um exemplo simples foi em uma aposta
em que tive que adivinhar qual bola sairia de uma caixa, sendo que
havia 5 bolas, algumas com cores iguais e outras diferentes. Então usei a
probabilidade para ganhar a aposta.

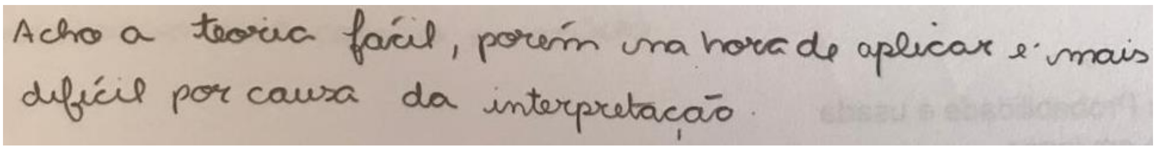
Fonte: Dados do Pesquisador

Os Estudantes 17 e 9 apresentam situações de Probabilidade Clássica e de simples entendimento. O Estudante 35 demonstra que há Probabilidade envolvida no jogo, porém percebemos pela sua resposta que ele determina essa probabilidade pela sua experiência. Sendo assim, percebemos que a ideia de Probabilidade apresentada por esses Estudantes, e os demais, são situações relacionadas à problemas de simples resolução. Isso nos leva a introduzir situações-problemas em que outros tipos de Probabilidades sejam desenvolvidos.

9) Registre, abaixo, outros aspectos que julgar relevantes sobre este assunto e/ou suas expectativas sobre os estudos que desenvolveremos sobre Probabilidade.

Respostas de três estudantes:

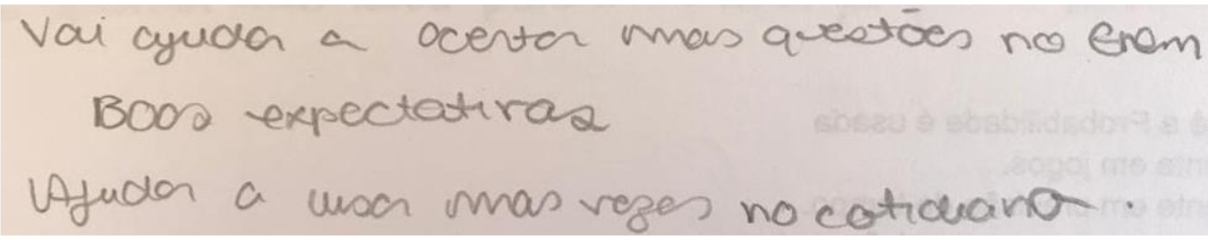
Figura 30 – Resposta do Estudante 23



Acho a teoria fácil, porém na hora de aplicar é mais
difícil por causa da interpretação.

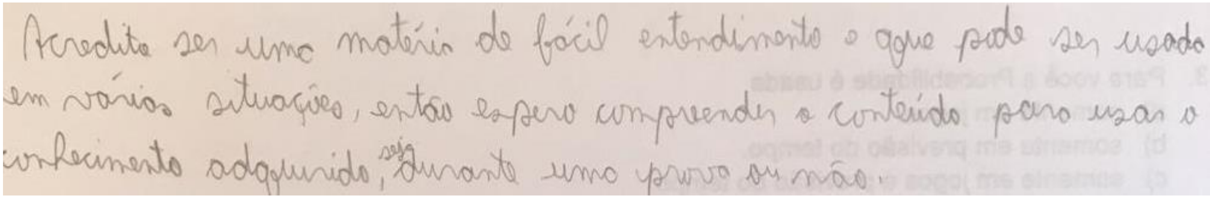
Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 31 – Resposta do Estudante 35


Vai ajuda a acerta mas questões no Enem
Boas expectativas
Ajuda a usar mas vezes no cotidiano.

Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 32 – Resposta do Estudante 9


Acredito ser uma matéria de fácil entendimento e que pode ser usado em vários situações, então espero compreender o conteúdo para usar o conhecimento adquirido, seja durante uma prova ou não.

Fonte: Dados do Pesquisador

Analisando os gráficos e as respostas discursivas dos Estudantes, foi possível notar que eles possuem uma ideia clara do conceito de Probabilidade, bem como que eles percebem que ela pode ser aplicada em várias circunstâncias e que já foi estudada em várias séries anteriores. Classificaram-na, em sua maioria, como um grau médio de dificuldade, entendem que ela pode ser trabalhada juntamente com a análise combinatória e que já a utilizaram, provavelmente, de forma intuitiva, em alguns momentos de suas vidas. Possuem (igual aos demais) uma boa expectativa com relação ao estudo que iríamos desenvolver.

A seguir, apresentaremos o desenvolvimento dos percursos metodológicos 1 e 2, utilizando a Estratégia de Aprendizagem TBL por meio de Metodologias Ativas, que visam melhorar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos.

5.2 Percurso Metodológico I

O Percurso Metodológico I é composto pelas Atividades 1 e 2, conforme o cronograma apresentado no Anexo A. A Atividade 1, que se encontra no Anexo C, foi encaminhada aos alunos no dia 25/10/2021.

A Atividade 1 era composta pelas aulas 1, 2, 3 e 4 e deveria ser realizada no período de 25/10/2021 a 02/11/2021. Nesse período, os alunos deveriam assistir aos 4 vídeos propostos pelo professor, fazer uma leitura do conteúdo no livro didático adotado pela escola, conforme orientado na atividade, e fazer uma pesquisa complementar, caso julgassem necessário. Essa atividade estava relacionada aos conceitos, à definição clássica de Probabilidade e à Probabilidade envolvendo a união de dois ou mais eventos. A aula 4 consistia no registro do entendimento do aluno relacionado aos vídeos, à leitura do livro didático, à pesquisa complementar e deveria ser postada na aba tarefas, na plataforma *Teams*, para que o professor fizesse a avaliação de toda a atividade.

Conforme explicitado por Bacich (2018), os estudantes aprendem de forma diferente e em tempos diferentes e com mais significado, quando esse aprendizado se dá de forma autônoma. Dessa forma, nossa pesquisa utilizando a Estratégia de Aprendizagem TBL, ofereceu aos estudantes atividades em que cada um pôde construir sua aprendizagem em seu tempo e da forma que julgava mais significativa, uma vez que eles realizaram e registraram suas próprias pesquisas de maneira autônoma e dando significado para o conteúdo, personalizando-o e discutindo em grupos todos os conceitos durante as avaliações em equipes e posteriormente com o professor. A seguir, apresentamos os links que dão acesso aos registros feitos por três estudantes.

Atividade 1 do Estudante 1:
https://drive.google.com/file/d/14fCJpi2YOeYfv99CGmktdcjAt2QO23D1/view?usp=sharing

Atividade 1 do Estudante 9:
https://drive.google.com/file/d/1R7gmMLkpMebozTGcfiR95HgM1AgjTe9G/view?usp=sharing

Atividade 1 do Estudante 47:
https://drive.google.com/file/d/1_ao2em5OamBHFUoMW0OY32rr6oI5aGGD/view?usp=sharing

Após a execução da Atividade 1, que foi concluída pelos estudantes até o dia 02/11/2021, eles realizaram a Atividade 2, no dia 03/11/2021, que consistia no desenvolvimento das aulas 5 e 6, ou seja, as avaliações individuais (TGPi) e em equipes (TGPe). Como sugere a TBL, a avaliação individual é a mesma avaliação em equipes. Essa avaliação, com sua respectiva resolução, encontra-se no Anexo D. A seguir apresentamos a análise do desenvolvimento dessa primeira parte do trabalho.

5.3 Análise do desenvolvimento e dos resultados do Percurso Metodológico I

O trabalho com Metodologias Ativas fez com que os estudantes saíssem de sua zona de conforto, como receptores do conhecimento, e o trabalho os colocou como protagonistas de suas próprias aprendizagens. Foi interessante perceber, ao longo da semana que antecedeu a avaliação, o desejo de vários deles em tirar dúvidas sobre os assuntos abordados nos vídeos e no livro didático, bem como nas pesquisas realizadas por alguns estudantes, que extrapolaram o material enviado na atividade 1. Conforme explicita Bacich e Moran,

> As metodologias ativas constituem alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem no aprendiz, envolvendo-o na aprendizagem por descoberta, investigação ou resolução de problemas. Essas metodologias contrastam com a abordagem pedagógica do ensino tradicional centrado no professor, que é quem transmite a informação aos alunos. No entanto, a proposta de um ensino menos centrado no professor não é nova. No início do século passado, John Dewey concebeu e colocou em prática a educação baseada no processo ativo de busca do conhecimento pelo estudante, que deveria exercer sua liberdade. Para Dewey, a educação deveria formar cidadãos competentes e criativos, capazes de gerenciar sua própria liberdade. Sua proposta era a de que a aprendizagem ocorresse pela ação, o *learning by doing*, ou aprender fazendo, hands-on. (BACICH & MORAN, 2018, p. 27 e 28).

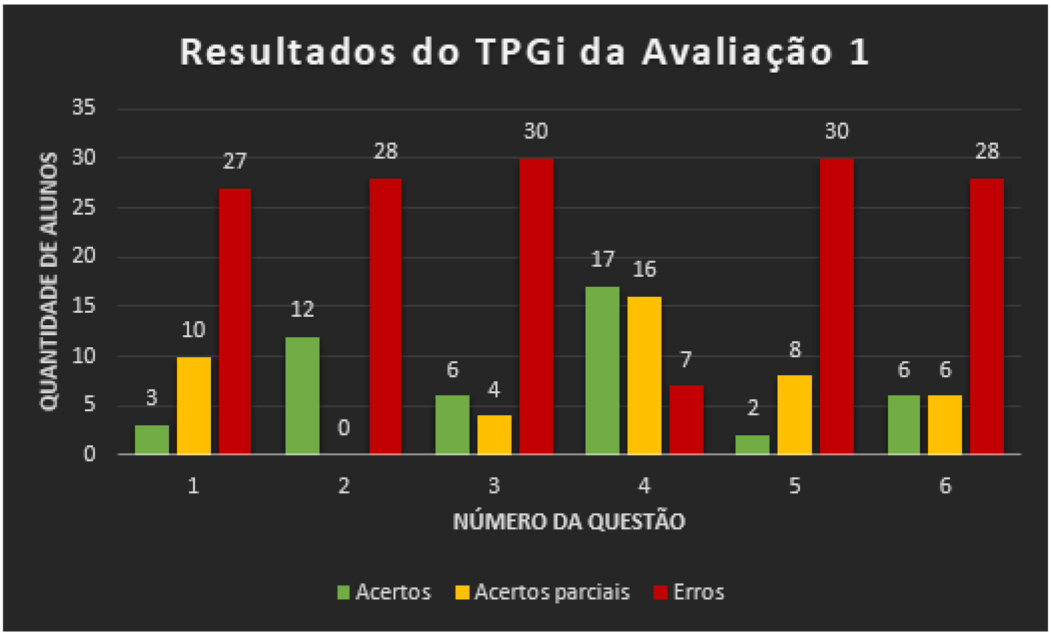
Corroborando com as ideias de Bacich e Moran (2018), percebemos que os estudantes tiveram liberdade para construir o próprio conhecimento de forma autônoma e significativa, pois estudaram sobre o assunto e produziram seus registros individualmente. Também compartilharam esses conhecimentos com os colegas de sala, uma vez que trocaram ideias entre os pares antes das avaliações. A imagem a seguir mostra o momento da realização da avaliação individual (TPGi).

Figura 33 – Momento da realização da avaliação individual

Fonte: Dados do Pesquisador

No dia da realização das avaliações individual e em equipes, 40 estudantes estavam presentes. Dessa forma, apresentamos a seguir o resultado da avaliação individual (TGPi) e algumas repostas deles e nossas considerações acerca desses resultados.

Figura 34 – Resultados da 1ª avaliação individual (TGPi)

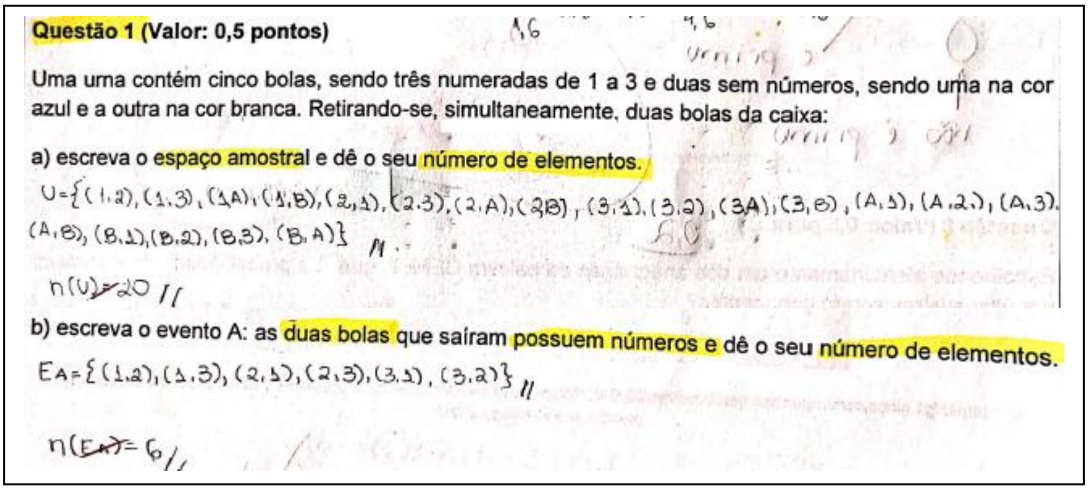


Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Questão 1: Como pode ser visto nas figuras 35, 36 e 37, a seguir, os estudantes compreendem bem o que é espaço amostral e evento e sabem representá-los usando a notação de conjuntos, bem como o número de elementos de um conjunto. Porém, apenas 7,5% dos estudantes interpretaram a questão corretamente, e 25% interpretaram de forma parcialmente correta, pois não consideraram que deveriam tirar duas bolas da caixa, consideraram como se fosse apenas uma bola. Com isso, o espaço amostral e o evento ficaram incorretos. Consideramos incorretas as respostas, porém, se os estudantes usassem esses valores para calcular a probabilidade, esse cálculo ficaria correto.

Estudante 3: Na figura 35 a seguir, é possível observar que a estudante considerou que a ordem era importante, ou seja, desconsiderou a palavra "simultaneamente", de modo que ela errou a questão. Mas, é possível notar que com os estudos feitos utilizando a TBL, antes da avaliação, a estudante compreendeu de forma clara o que significa espaço amostral e evento, bem como soube escrever suas representações por meio da notação de conjuntos.

Figura 35 – Resposta da Estudante 3 para a questão 1


Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Uma urna contém cinco bolas, sendo três numeradas de 1 a 3 e duas sem números, sendo uma na cor azul e a outra na cor branca. Retirando-se, simultaneamente, duas bolas da caixa:

a) escreva o espaço amostral e dê o seu número de elementos.

U={(1,2),(1,3),(1A),(1,B),(2,1),(2,3),(2,A),(2B),(3,1),(3,2),(3A),(3,B),(A,1),(A,2),(A,3),(A,B),(B,1),(B,2),(B,3),(B,A)}

n(U)=20

b) escreva o evento A: as duas bolas que saíram possuem números e dê o seu número de elementos.

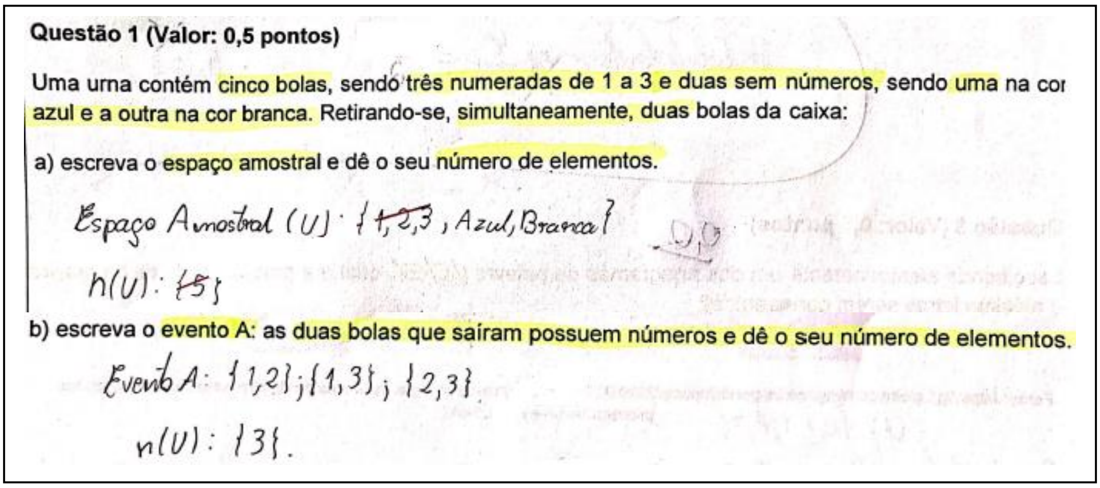
EA={(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)}

n(EA)=6

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 34: É possível perceber que, após os estudos utilizando a TBL, esse estudante compreendeu o significado de espaço amostral e evento e soube escrevê-los utilizando a notação de conjunto, embora tenha considerado na letra (a) a retirada de apenas uma bola. Porém, na letra (b), o estudante interpretou corretamente a questão.

Figura 36 – Resposta do Estudante 34 para a questão 1


Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Uma urna contém cinco bolas, sendo três numeradas de 1 a 3 e duas sem números, sendo uma na cor azul e a outra na cor branca. Retirando-se, simultaneamente, duas bolas da caixa:

a) escreva o espaço amostral e dê o seu número de elementos.

Espaço Amostral (U): {1,2,3, Azul, Branca}

h(U): {5}

b) escreva o evento A: as duas bolas que saíram possuem números e dê o seu número de elementos.

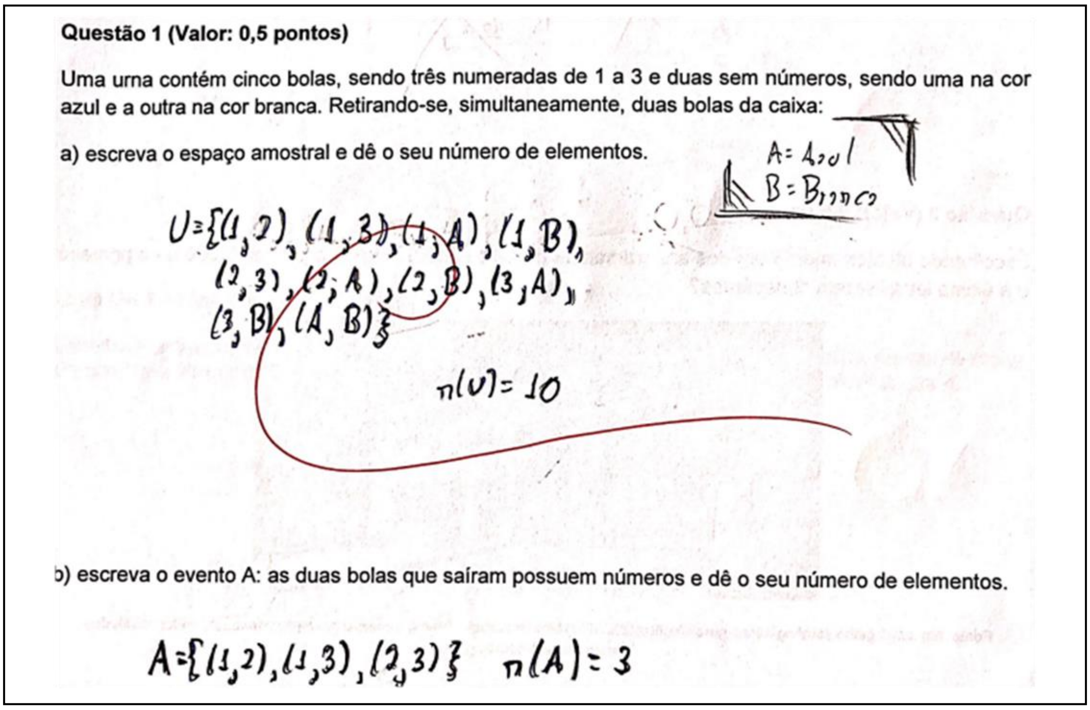
Evento A: {1,2};{1,3};{2,3}

n(U): {3}.

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 13: Essa estudante interpretou corretamente a questão e é possível observar que ela escreveu corretamente a linguagem de conjuntos, assim como os estudantes anteriores.

Figura 37 – Resposta do Estudante 13 para a questão 1


Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Uma urna contém cinco bolas, sendo três numeradas de 1 a 3 e duas sem números, sendo uma na cor azul e a outra na cor branca. Retirando-se, simultaneamente, duas bolas da caixa:

a) escreva o espaço amostral e dê o seu número de elementos.

A: Azul
B: Branco

$U=\{(1,2),(1,3),(1,A),(1,B),(2,3),(2,A),(2,B),(3,A),(3,B),(A,B)\}$

$n(U)=10$

b) escreva o evento A: as duas bolas que saíram possuem números e dê o seu número de elementos.

$A=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ $n(A)=3$

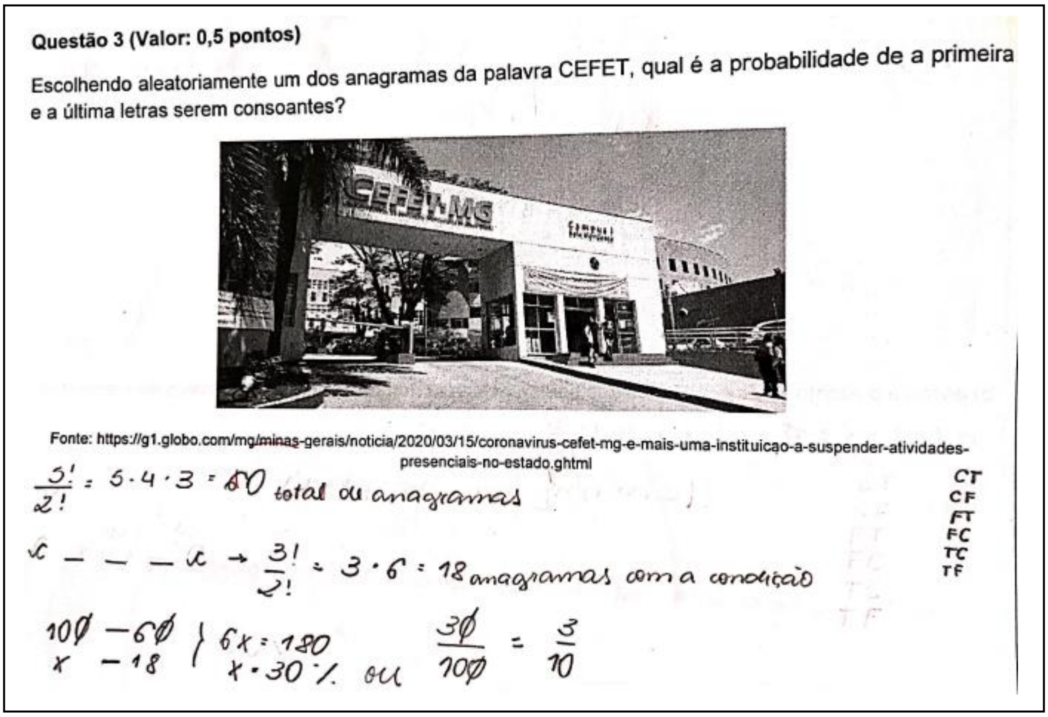
Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 2: As respostas dos alunos e nossas observações em sala de aula, após os estudos realizados por meio da TBL, nos sugerem que os alunos ampliaram suas compreensões sobre o conceito de espaço amostral e evento, pois a maioria deles o descreveram corretamente em sua resolução. A dificuldade encontrada pelos estudantes nessa questão não foi o conteúdo de Probabilidade, mas o conceito de número primo. Todos os estudantes utilizaram a definição de Probabilidade clássica corretamente, porém dos 28 estudantes que erraram a questão, cerca de 90%, consideraram 1 como número primo. Se não fosse isso, teríamos uma quantidade significativa de acerto. Mas, essa questão nos possibilitou resgatar esse conceito durante a correção feita com os estudantes após a avaliação.

Questão 3: A TBL possibilitou a identificação de lacunas em conhecimentos prévios de alguns estudantes, uma vez que apenas 15% deles acertaram a questão. Essa questão envolvia além dos conhecimentos de Probabilidade, a Análise Combinatória, conteúdo já trabalhado com eles anteriormente.

Estudante 26: A estudante interpretou corretamente a questão e calculou corretamente a probabilidade.

Figura 38 – Resposta da Estudante 26 para a questão 3



Questão 3 (Valor: 0,5 pontos)

Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra CEFET, qual é a probabilidade de a primeira e a última letras serem consoantes?

Fonte: https://g1.globo.com/mg/minas-gerais/noticia/2020/03/15/coronavirus-cefet-mg-e-mais-uma-instituicao-a-suspender-atividades-presenciais-no-estado.ghtml

$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ total de anagramas

CT CF FT FC TC TF

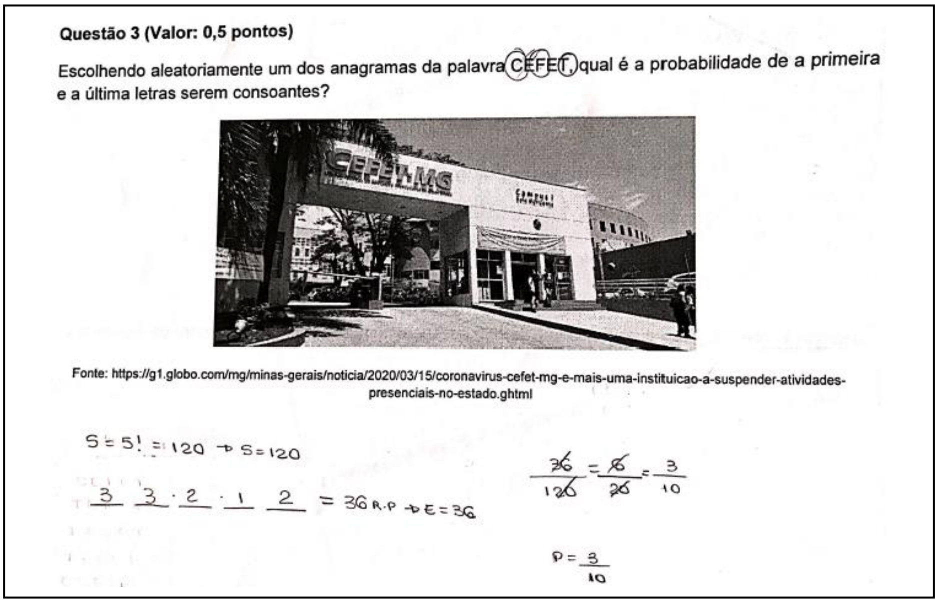
c _ _ _ c $\rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \cdot 6 = 18$ anagramas com a condição

$100 - 60$, $x - 18$ } $6x = 180$, $x = 30\%$ ou $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 9: Apesar da resposta final estar correta, a estudante calculou de forma incorreta o espaço amostral e o evento, pois desconsiderou a repetição de elementos na permutação das letras. Porém, é possível perceber mais uma vez que a definição de Probabilidade Clássica está bem clara para ela, assim como para a maioria dos estudantes.

Figura 39 – Resposta da Estudante 9 para a questão 3



Questão 3 (Valor: 0,5 pontos)

Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra CEFET, qual é a probabilidade de a primeira e a última letras serem consoantes?

Fonte: https://g1.globo.com/mg/minas-gerais/noticia/2020/03/15/coronavirus-cefet-mg-e-mais-uma-instituicao-a-suspender-atividades-presenciais-no-estado.ghtml

$S = 5! = 120 \rightarrow S = 120$

$\underline{3}\ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}\ \underline{2} = 36$ R.P $\rightarrow E = 36$

$\frac{36}{120} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

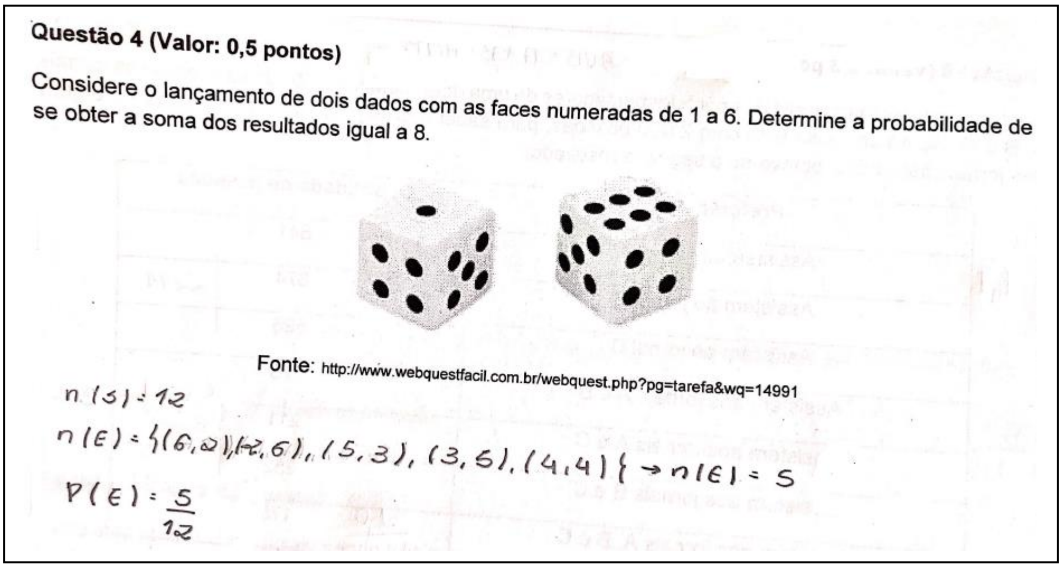
$P = \frac{3}{10}$

Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 4: Nessa questão, que envolvia o lançamento de dois dados, 42,5% dos estudantes acertaram totalmente e 40% deles acertaram parcialmente. Alguns não acertaram, pois calcularam incorretamente o evento, acertando apenas o espaço amostral.

Estudante 26: A estudante escreveu corretamente o evento, porém errou o espaço amostral. Nessa questão, alguns estudantes erraram o cálculo do espaço amostral e outros acertaram; porém, no evento, consideraram o (4,4) duas vezes, o que fez com que a probabilidade ficasse incorreta.

Figura 40 – Resposta da Estudante 26 para a questão 4



Questão 4 (Valor: 0,5 pontos)

Considere o lançamento de dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade de se obter a soma dos resultados igual a 8.

Fonte: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=tarefa&wq=14991

$n(S) = 12$

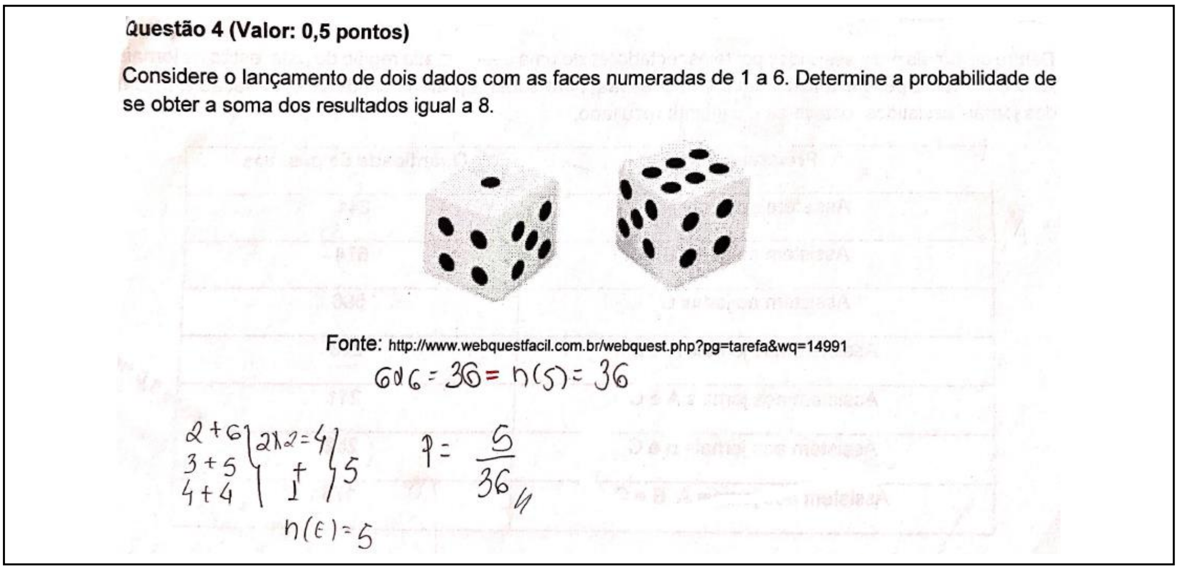
$n(E) = \{(6,2),(2,6),(5,3),(3,5),(4,4)\} \rightarrow n(E) = 5$

$P(E) = \frac{5}{12}$

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 31: A estudante interpretou corretamente a questão e calculou corretamente a probabilidade.

Figura 41 – Resposta da Estudante 31 para a questão 4



Questão 4 (Valor: 0,5 pontos)

Considere o lançamento de dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade de se obter a soma dos resultados igual a 8.

Fonte: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=tarefa&wq=14991

$6 \times 6 = 36 = n(S) = 36$

$2+6$, $3+5$, $4+4$ | $2 \times 2 = 4$, $+1$ | 5

$n(E) = 5$

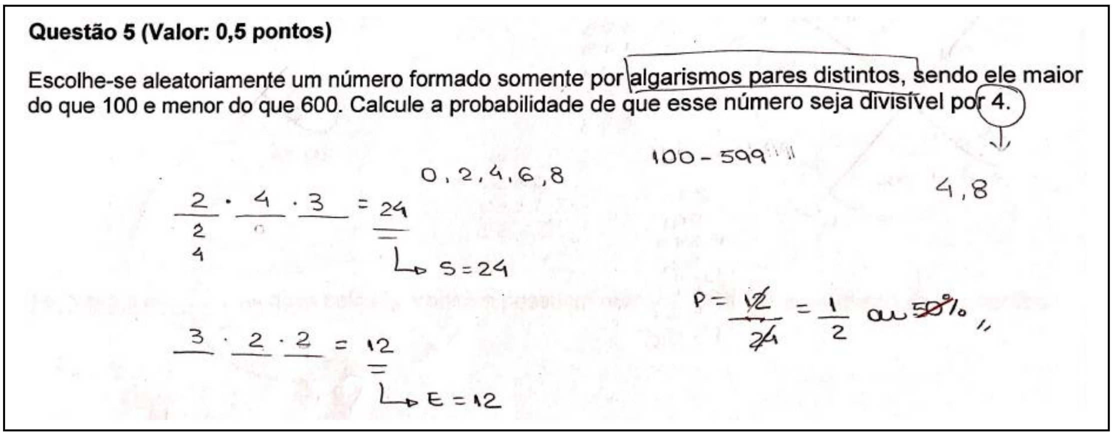
$P = \frac{5}{36}$

Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 5: Podemos dizer que essa foi a questão mais difícil da avaliação, tendo apenas 5% de acerto total e 20% de acerto parcial, sendo que também era uma questão que envolvia a análise combinatória e conceito de divisibilidade por 4, ou seja, quando se reúnem dois ou três conteúdos numa mesma questão, os estudantes costumam ter mais dificuldade. Os que acertaram parcialmente a questão, erraram o cálculo do evento e acertaram o cálculo do espaço amostral.

Estudante 9: A estudante calculou corretamente o espaço amostral, utilizando a análise combinatória, porém não se lembrava do critério de divisibilidade do 4, o que fez com que o evento ficasse incorreto.

Figura 42 – Resposta da Estudante 9 para a questão 5



Questão 5 (Valor: 0,5 pontos)

Escolhe-se aleatoriamente um número formado somente por algarismos pares distintos, sendo ele maior do que 100 e menor do que 600. Calcule a probabilidade de que esse número seja divisível por 4.

100 – 599

0, 2, 4, 6, 8

4, 8

$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

2

4

S = 24

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

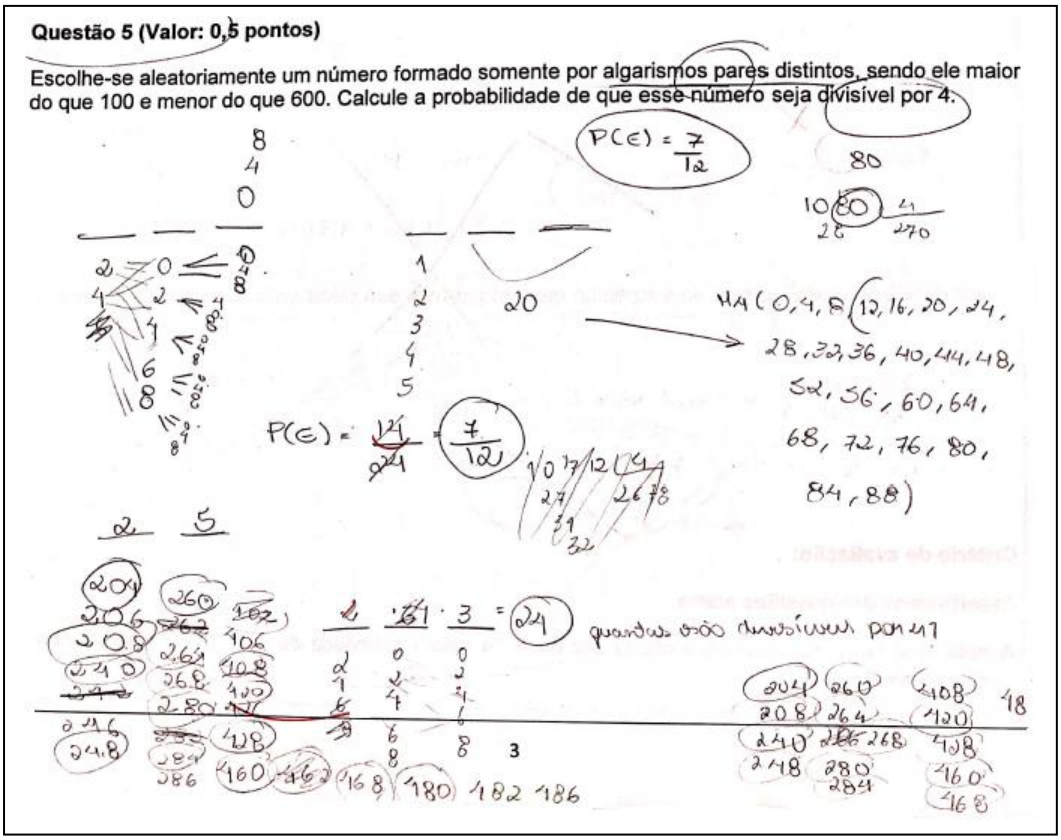
E = 12

$P = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ou 50%

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 39: A estudante calculou corretamente o espaço amostral utilizando a análise combinatória. Como não se lembrava do critério de divisibilidade do 4, escreveu cada número, porém esqueceu de um número, dessa forma o cálculo da probabilidade ficou incorreto.

Figura 43 – Resposta da Estudante 39 para a questão 5



Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 6: Essa questão envolvia a teoria de conjuntos, que foi estudada na 1ª série do ensino médio. Apenas15% dos estudantes acertaram totalmente a questão e outros 15% parcialmente, pois não conseguiram montar o diagrama de Venn corretamente. Ou seja, essa questão teve muito erro não por causa da Probabilidade em si, mas devido à montagem incorreta do diagrama de Venn, sendo que alguns estudantes não montaram o diagrama.

O resultado da avaliação individual (TGPi) ficou muito aquém do que esperávamos, uma vez que os estudantes tiveram uma média de 0,9 ponto, em um total de 3,0 pontos distribuídos, isto é, um rendimento de apenas 30%. Um ponto importante a considerar é que esse resultado foi "puxado" para baixo, não devido à Probabilidade, mas devido a conteúdos de séries anteriores, que muitos estudantes não lembravam, como por exemplo: números primos, critério de divisibilidade por 4 e construção do diagrama de Venn envolvendo conjuntos. Assim, o resultado foi importante, já que nos possibilitou trabalhar nas lacunas encontradas no período pós-pandemia.

Após a realização da avaliação individual (TGPi), os estudantes se reuniram nos grupos previamente determinados pelo professor e iniciaram a realização da avaliação em equipes (TGPe) conforme previsto pela TBL. Esse momento foi de uma riqueza imensurável, pois os estudantes trabalharam de forma cooperativa, discutindo as questões que haviam feito momento antes. As imagens a seguir, mostram o momento da realização dessa avaliação.

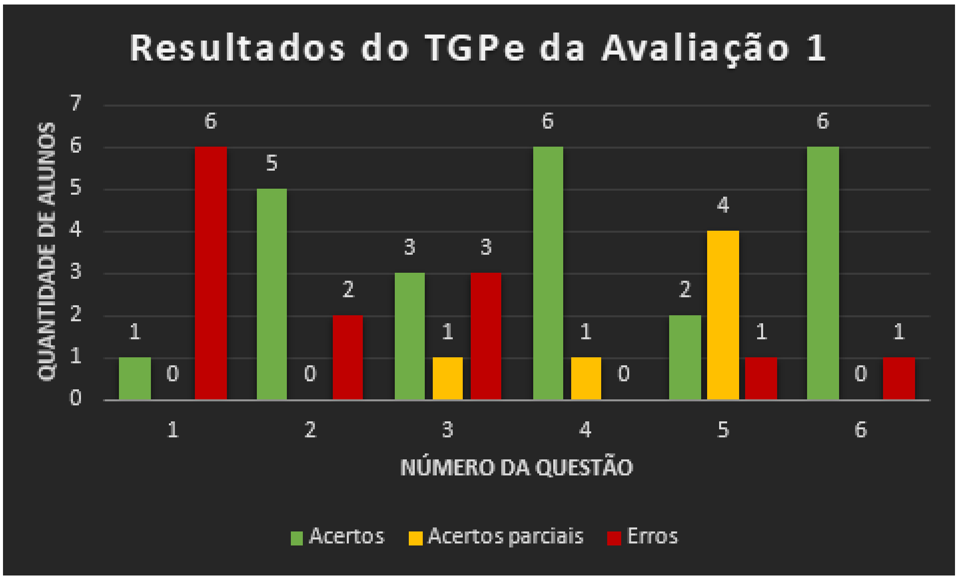
Figura 44 – Momento da realização da 1ª avaliação em equipes (TGPe)

Fonte: Dados do Pesquisador

Várias dúvidas surgiram durante a avaliação em equipes (TGPe) e, com certeza, também durante a avaliação individual (TGPi), porque foram momentos de muitas discussões até chegarem a um consenso para a resposta final que o grupo iria entregar. Esse momento foi muito importante, uma vez que os estudantes puderam apresentar aos colegas do grupo o raciocínio utilizado para resolver uma determinada questão e também a interpretação que eles tiveram para ela.

A seguir, apresentamos os resultados da avaliação em equipes (TGPe). É possível notar uma melhora significativa nos resultados, se comparado com o gráfico anterior. Observamos que a média dobrou, passando de 0,9 ponto para 1,8 pontos, ou seja, a média passou de 30% para 60%. No gráfico a seguir, é possível ver o resultado por questão.

Figura 45 – Resultados da 1ª avaliação em equipes (TGPe)



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Questão 1: Corroborando com a Estratégia de Aprendizagem da TBL, após muita discussão nos grupos acerca da interpretação que cada estudante teve, apenas um grupo conseguiu acertar a questão. Como muitos haviam interpretado a questão de forma errada, o índice de erro permaneceu alto para essa questão. Porém, quando os estudantes que interpretaram de forma correta a questão apresentaram suas respostas, era nítido o semblante de decepção daqueles que haviam interpretado de forma incorreta. Percebemos que é fundamental trabalhar com situações-problemas que envolvem esse tipo de interpretação.

Questão 2: Quando os estudantes discutiram a questão e se posicionaram em relação ao número 1 ser ou não primo, foi possível identificar o erro na avaliação individual, o que fez com que a questão tivesse um aumento considerável no percentual de acertos, passando de 30% no momento individual para 71,4% no momento em equipes. A TBL favoreceu significativamente a aprendizagem dos alunos no trabalho em equipes, conforme pode ser observado na discussão de um grupo, descrito abaixo:

Estudante 9: “Eu coloquei 1 como primo”.

Estudante 4: “Mas, 1 não é primo não”.

Estudante 9: “1 é primo gente, os primos são 1, 2, 3, 5, ...”

Estudante 22: “1 é primo”.

Estudante 4: “1 não é primo não, os primos precisam ter 2 divisores e o 1 é divisível apenas por ele mesmo”.

Estudante 9: “Ah entendi, então, eu errei essa questão. Beleza então, agora já entendi. Vamos para a próxima”.

Questão 3: Ao interpretarem, em grupos, a questão que envolvia análise combinatória, vários estudantes puderam explicar aos colegas sobre o raciocínio combinatório, o que aumentou significativamente o percentual de acertos, passando de 20% para 50%. A proposta da TBL com o trabalho em grupos possibilita discussões importantes e que favorecem o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, conforme pode ser visto a seguir:

Estudante 9: “Eu fiz análise combinatória, aquela permutação com repetição.”

Estudante 4: “Eu também fiz com permutação, o meu espaço amostral deu 60”.

Estudante 22: “Quê? Eu não fiz permutação não.”

Estudante 9: “Tem que fazer a permutação. Tem que fazer a permutação, que é 5 fatorial sobre 2 fatorial, que é 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2 fatorial sobre 2 fatorial, aí você corta o 2 fatorial com o 2 fatorial e aí dá 60.”

Estudante 4: “Aí você faz a permutação de 3, porque são 3 posições com repetição dos 2 E e multiplica por 6 e aí dá 18. Aí fica 18 sobre 60, aí só simplificar.”

Estudante 22: “Quê? Pera aí? Explica de novo. Ah tá entendi, agora eu entendi. Nossa eu não tinha pensado nisso não, então eu errei essa também, mas agora eu entendi.”

Questão 4: Como essa questão foi a mais fácil na avaliação individual, após as discussões em grupos, o resultado foi excelente, passando de 62,5% para 92,9%. Ou seja, a questão do cálculo da probabilidade no lançamento de dois dados, ficou muito clara para os estudantes, principalmente após a discussão nos grupos.

Questão 5: Apesar de ter sido a questão mais difícil da avaliação, após discutirem e perceberem o critério de divisibilidade por 4, alguns grupos conseguiram desenvolver corretamente a questão, aumentando o índice de acerto de 15% para 57,1%.

Questão 6: Apesar de individualmente o resultado ter sido muito baixo 22,5%, após as discussões em grupos, os estudantes conseguiram relembrar como se resolve problemas envolvendo união de conjuntos e, assim, o resultado foi excepcional, passando para 85,7%.

Dessa forma, percebemos que a aprendizagem por meio da TBL contribuiu de forma significativa para o aprendizado dos estudantes, além de desenvolver a cooperação e o trabalho em equipe.

No momento da avaliação em equipes (TGPe), pudemos perceber que estudantes que não conversam muito em sala se posicionaram sobre uma determinada questão e, até mesmo estudantes que dizem que não sabem matemática discutiram questões com estudantes que têm mais facilidade na matéria. Foi possível perceber, durante essa avaliação, que sim, a Matemática é para todos. Basta propormos formas de construção de conhecimentos que melhor se adequem aos estudantes, para que eles construam sua aprendizagem de forma significativa e possam discutir com seus pares de forma consistente.

Dessa forma, é possível notar que as avaliações em grupo, além de tornar o processo mais dinâmico, contribui com o desenvolvimento de um senso crítico no estudante, que aprenderá a compartilhar saberes, ouvindo, julgando, comparando e defendendo suas ideias de solução perante as dos seus colegas.

É possível notar, pelos gráficos anteriores e conforme descrevemos, uma melhora considerável nos resultados quando comparamos as avaliações individuais com as avaliações em equipes. Dessa forma, entendemos que os momentos em equipes são imprescindíveis para a construção do conhecimento dos estudantes.

A seguir, apresentaremos o Percurso Metodológico II e a análise de seus resultados.

5.4 Percurso Metodológico II

O Percurso Metodológico II é composto pelas Atividades 3 e 4, conforme o planejamento apresentado no Anexo A. No Anexo E, apresentamos a Atividade 3 encaminhada aos estudantes no dia 08/11/2021.

Na Atividade 3, os estudantes realizaram as aulas 7, 8, 9 e 10, no período de 08/11/2021 a 16/11/2021. Nesse período, eles deveriam assistir aos 4 vídeos propostos pelo professor, fazer uma leitura do conteúdo no livro didático adotado pela escola, conforme orientado na atividade, e fazer uma pesquisa complementar, caso julgassem necessário. Essa atividade estava relacionada à Probabilidade Condicional, Probabilidade de eventos independentes e Probabilidade binomial. A aula 10 consistia no registro do entendimento do estudante, relacionado aos vídeos, leitura do livro didático e da pesquisa complementar e deveria ser postada na aba tarefas, na plataforma *Teams*, para que o professor fizesse a avaliação de toda a atividade.

A seguir apresentamos os links dos registros feitos por três estudantes.

Atividade 3 do Estudante 13:
https://drive.google.com/file/d/1kS777Ax53N-lt0DFkI7gnxNloE9a8RvW/view?usp=sharing
Atividade 3 do Estudante 5:
https://drive.google.com/file/d/1AAkFOTadDhBYcfPM393hp1JwUYJNcoap/view?usp=sharing

Atividade 3 do Estudante 47:
https://drive.google.com/file/d/1WOV7LsHiXbEg-95DIuaDbdlU5Quul4I5/view?usp=sharing

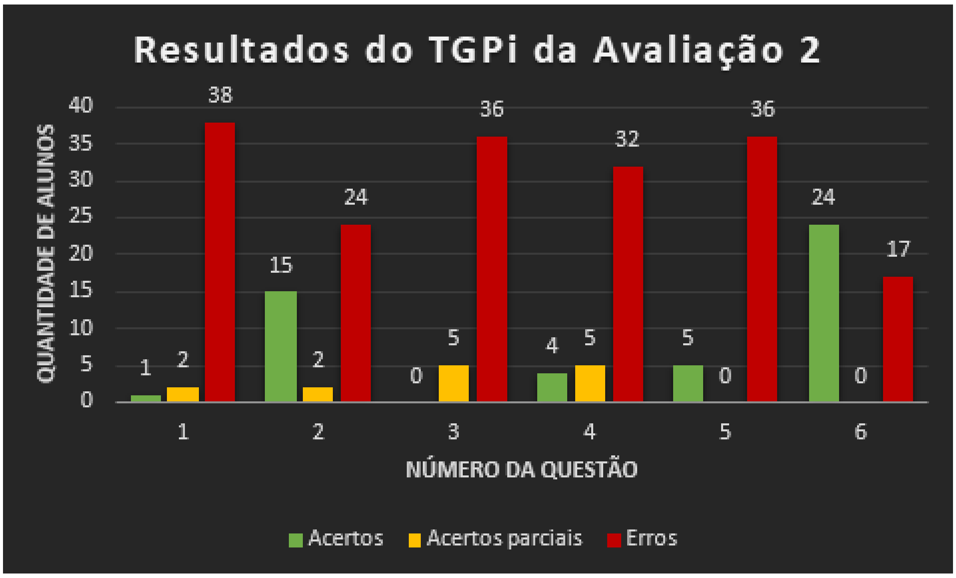
Após a execução da Atividade 3, que foi concluída pelos estudantes até o dia 16/11/2021, eles realizaram a Atividade 4 no dia 17/11/2021, e que consistia no desenvolvimento das aulas 11 e 12, ou seja, as avaliações individuais (TGPi) e em equipes (TGPe). Conforme já relatado anteriormente, a avaliação individual é a mesma avaliação em equipes, conforme sugerido pela TBL. Dessa forma, foi possível perceber os avanços nas aprendizagens dos estudantes ao comparar os resultados das avaliações individuais (TGPi) com os resultados das avaliações em equipes (TGPe). Essa avaliação, com sua respectiva resolução, encontra-se no Anexo F. A seguir apresentamos a análise do desenvolvimento dessa segunda parte do trabalho.

5.5 Análise do desenvolvimento e dos resultados do Percurso Metodológico II

Após vivenciarem a primeira parte do trabalho, os estudantes já possuíam uma certa "experiência" no desenvolvimento da Aprendizagem TBL. Dessa forma, acreditamos que os estudantes se prepararam para a segunda etapa do trabalho com uma outra perspectiva. Alguns estudantes, que por algum motivo não haviam se preparado muito bem para a primeira etapa, puderam se preparar melhor para a segunda parte e contribuíram/participaram mais do que na primeira parte. O trabalho envolvendo novas metodologias requer, tanto por parte dos estudantes quanto por parte dos professores, paciência e persistência, até que todos entendam de forma significativa a mudança de paradigma.

No dia da realização das avaliações, 41 estudantes estavam presentes. A seguir apresentamos o resultado do TGPi, as respostas de alguns estudantes, que representam as respostas da maioria, e nossas considerações.

Figura 46 – Resultados da 2ª avaliação individual (TGPi)



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Questão 1: Apenas 7,3% dos estudantes interpretaram a questão corretamente e a maioria deles não soube interpretar a questão, que envolvia Probabilidade de eventos independentes. Vários estudantes não compreenderam a ideia de que, se passa uma rosa de um vaso para o outro, esse outro vaso que representa um novo experimento, terá um novo espaço amostral com tamanho igual a 12, conforme é possível observar na avaliação a seguir.

Estudante 1: A estudante considerou que o tamanho do conjunto espaço amostral no experimento relacionado ao segundo vaso tinha tamanho 11 e não 12. Ela também não compreendeu que era necessário somar as probabilidades; dessa forma é possível notar que a aluna não compreendeu como resolver esse tipo de questão, o que nos possibilitou fazer uma intervenção com a turma, corrigindo a questão e apresentando esse erro, que é algo comum de acontecer nesse tipo de situação-problema.

Figura 47 – Resposta da Estudante 1 para a questão 1

Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Em uma mesa, há dois vasos com rosas. O vaso A contém 12 rosas das quais 7 têm espinhos, e o vaso B contém 11 rosas sendo que exatamente 5 não têm espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. Calcule a probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos.

Fonte: https://www.floresonline.com.br/vaso-30-rosas-colombianas-importadas-vermelhas

A 12 - 7 c/ espinhos

B 11 - 5 sem espinhos

Retirada com espin.

CASO 1 A - foi retirada c/ esp. = $\frac{7}{12}$ $\quad \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

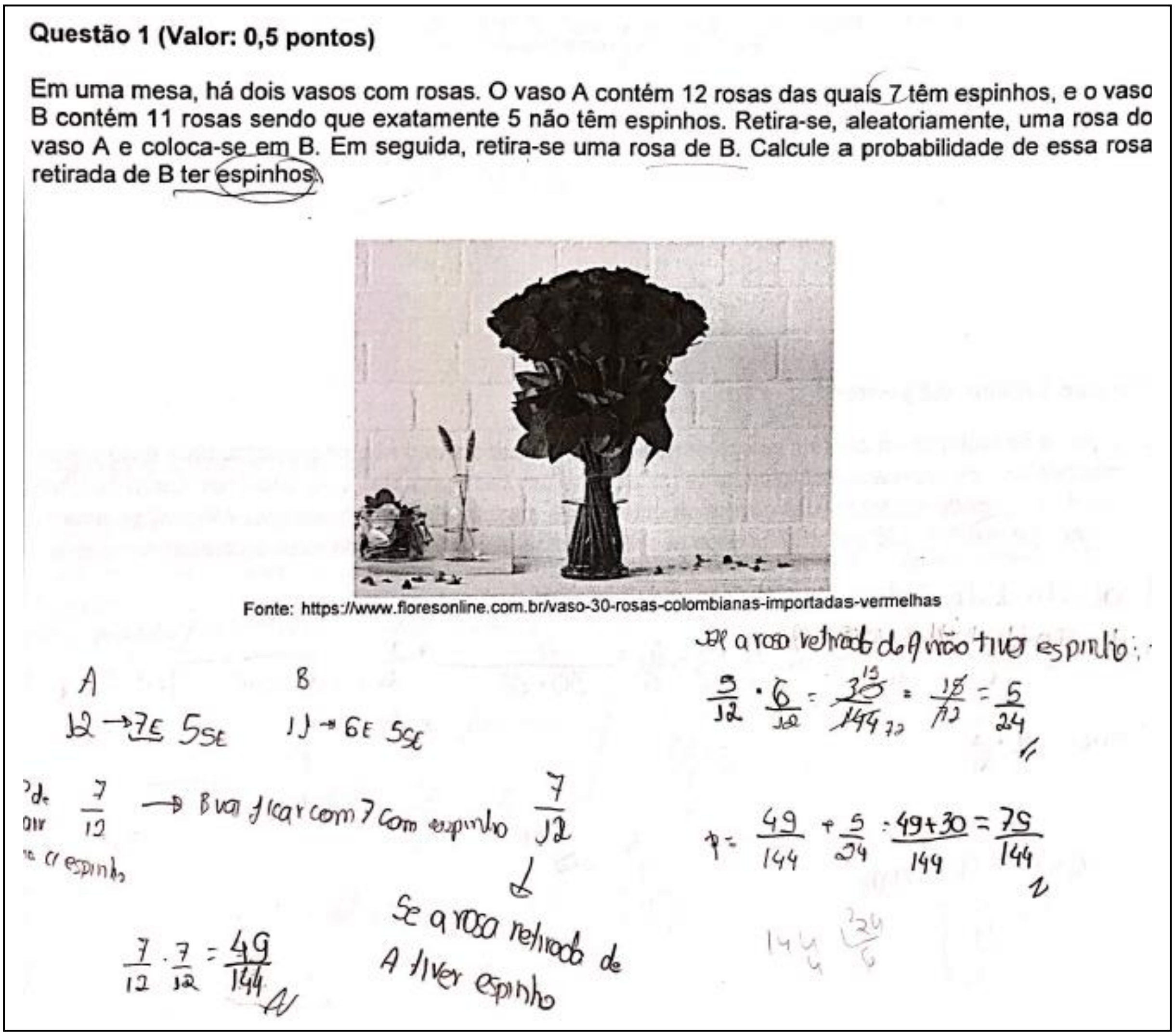
CASO 2 Foi retirada em A sem esp. = $\frac{5}{12}$ $\quad \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{5}{22}$

No caso 1, a probabilidade é de $\frac{7}{22}$, já no caso 2, ela é de $\frac{5}{22}$.

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 31: A TBL contribuiu para a aprendizagem da estudante, uma vez que em seus materiais de estudo tinham questões semelhantes, e é possível notar, na figura 48, que ela aplicou corretamente os conceitos de Probabilidade, bem como a definição de eventos independentes e interpretou corretamente a questão.

Figura 48 – Resposta da Estudante 31 para a questão 1



Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Em uma mesa, há dois vasos com rosas. O vaso A contém 12 rosas das quais 7 têm espinhos, e o vaso B contém 11 rosas sendo que exatamente 5 não têm espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. Calcule a probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos.

Fonte: https://www.floresonline.com.br/vaso-30-rosas-colombianas-importadas-vermelhas

A 12 → 7E 5SE

B 11 → 6E 5SE

$\frac{7}{12}$ → B vai ficar com 7 com espinho $\frac{7}{12}$

Se a rosa retirada de A tiver espinho

$\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$

Se a rosa retirada de A não tiver espinho:

$\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{30}{144} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$

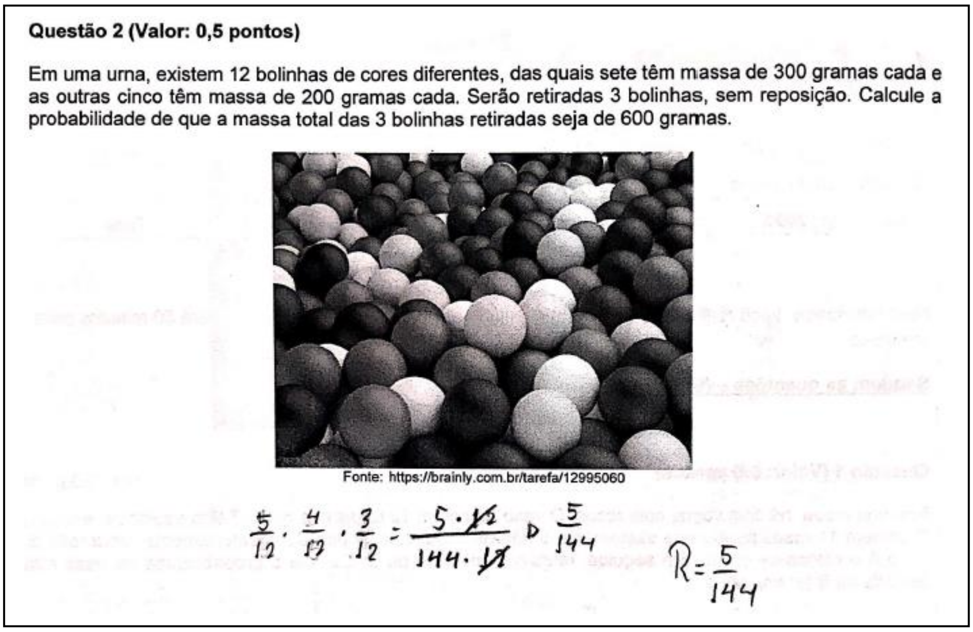
$P = \frac{49}{144} + \frac{5}{24} = \frac{49+30}{144} = \frac{79}{144}$

Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 2: Essa questão teve um índice de 39% de acerto e também era uma questão de Probabilidade de eventos independentes. Porém menos complicada de interpretar e de se calcular a Probabilidade, pois o resultado era direto e não precisava somar as Probabilidades como na questão 1.

Estudante 13: A resolução do estudante nos leva a crer que ele entendeu a definição de eventos independentes, pois ele efetuou o produto das probabilidades, porém, não leu com atenção a questão, que era para retirar as bolinhas, sem a reposição delas.

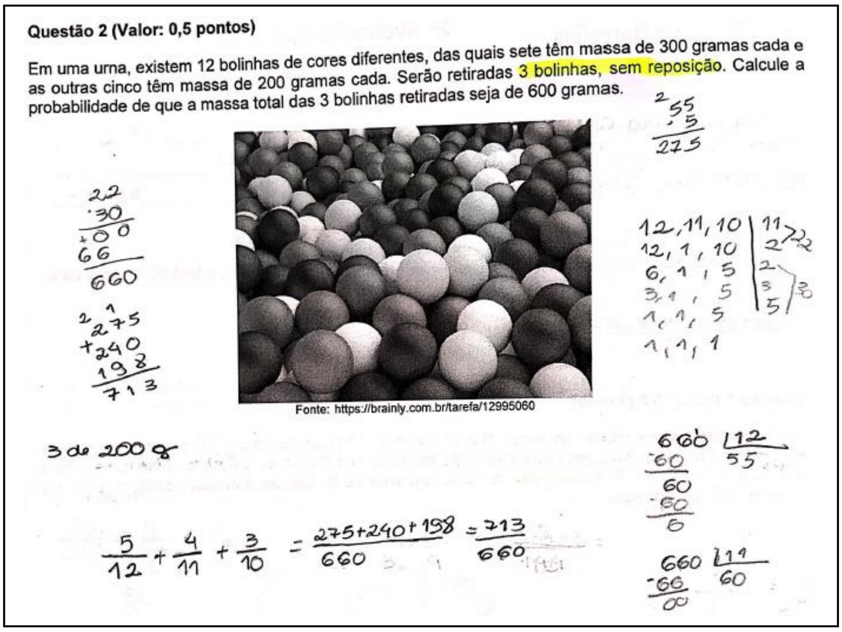
Figura 49 – Resposta do Estudante 13 para a questão 2



Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 2: A estudante determinou corretamente o número de elementos do conjunto espaço amostral e do evento, porém não entendeu a ideia de eventos independentes, ou seja, que era necessário multiplicar as probabilidades encontradas. Outros alunos fizeram da mesma forma. Assim, retomamos essa questão, corrigindo-a e apontando os erros cometidos pelos estudantes.

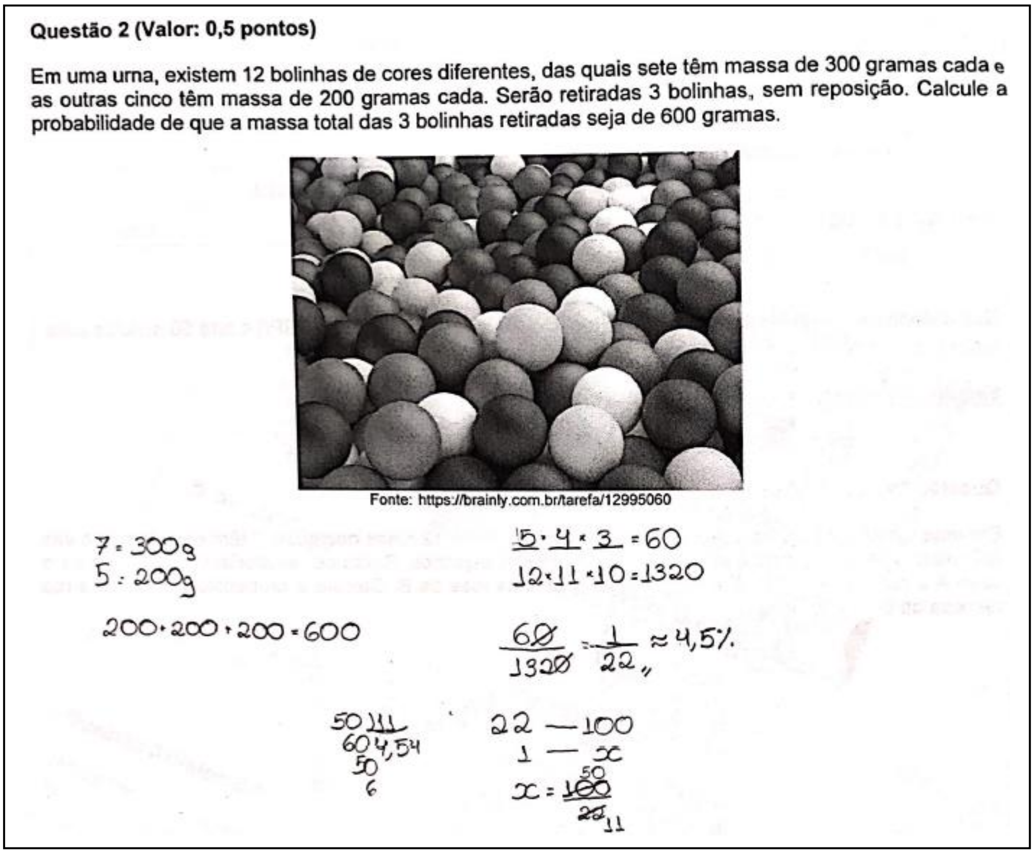
Figura 50 – Resposta da Estudante 2 para a questão 2



Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 14: A TBL favoreceu a aprendizagem dessa estudante, uma vez que ela resolveu a questão corretamente, utilizando os conceitos e definições de Probabilidade de Eventos Independentes baseados no material de estudo proposto na atividade desenvolvida.

Figura 51 – Resposta da Estudante 14 para a questão 2



Questão 2 (Valor: 0,5 pontos)

Em uma urna, existem 12 bolinhas de cores diferentes, das quais sete têm massa de 300 gramas cada e as outras cinco têm massa de 200 gramas cada. Serão retiradas 3 bolinhas, sem reposição. Calcule a probabilidade de que a massa total das 3 bolinhas retiradas seja de 600 gramas.

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/12995060

7 = 300g
5 : 200g

200 + 200 + 200 = 600

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60$
$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

$\frac{6\cancel{0}}{132\cancel{0}} = \frac{1}{22} \approx 4,5\%$

22 — 100
1 — x
$x = \frac{\cancel{100}^{50}}{\cancel{22}_{11}}$

50 |11
60 4,54
50
6

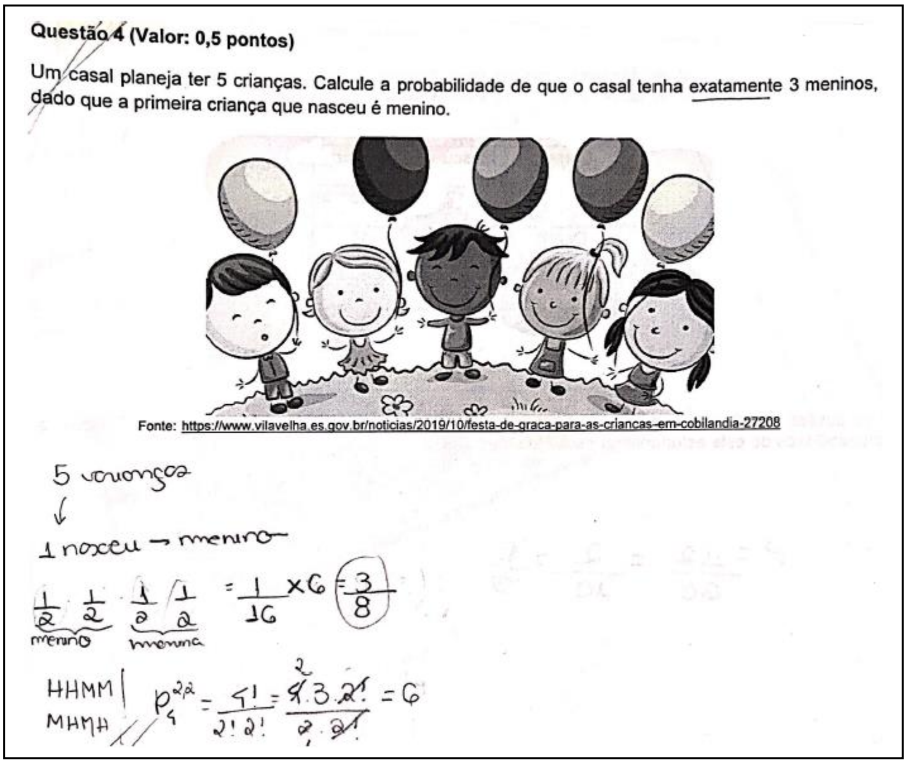
Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 3: Por envolver Análise Combinatória juntamente com Probabilidade, os estudantes apresentaram bastante dificuldade na questão. Apenas 12,2% deles conseguiram interpretá-la de forma parcialmente correta, pois calcularam uma parte da Probabilidade e não calcularam a outra. Nas questões que envolvem análise combinatória e que pedem para calcular "pelo menos", os estudantes têm muita dificuldade devido ao alto grau de interpretação exigido nesse tipo de questão.

Questão 4: Vários estudantes não conseguiram interpretar corretamente a questão, pois não conseguiram determinar o espaço amostral e/ou o evento corretamente. Não consideraram o fato dos filhos (menino e menina) poderem trocar de lugar no problema; dessa forma, apenas 21,9% deles conseguiram desenvolver a questão, e apenas 9,8% deles conseguiram acertar totalmente a questão. Essa questão envolvia Probabilidade de eventos independentes e Probabilidade Condicional e foi retomada em forma de correção, pontuando para os alunos qual a interpretação correta para esse tipo de questão.

Estudante 45: A Estudante entendeu perfeitamente a ideia de Eventos Independentes e Probabilidade Condicional, pois resolveu a questão corretamente, utilizando os conceitos e definições necessárias para o desenvolvimento da questão.

Figura 52 – Resposta da Estudante 45 para a questão 4


Questão 4 (Valor: 0,5 pontos)

Um casal planeja ter 5 crianças. Calcule a probabilidade de que o casal tenha exatamente 3 meninos, dado que a primeira criança que nasceu é menino.

Fonte: https://www.vilavelha.es.gov.br/noticias/2019/10/festa-de-graca-para-as-criancas-em-cobilandia-27208

5 crianças

1 nasceu → menino

$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{menino}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{menina} = \frac{1}{16} \times 6 = \frac{3}{8}$

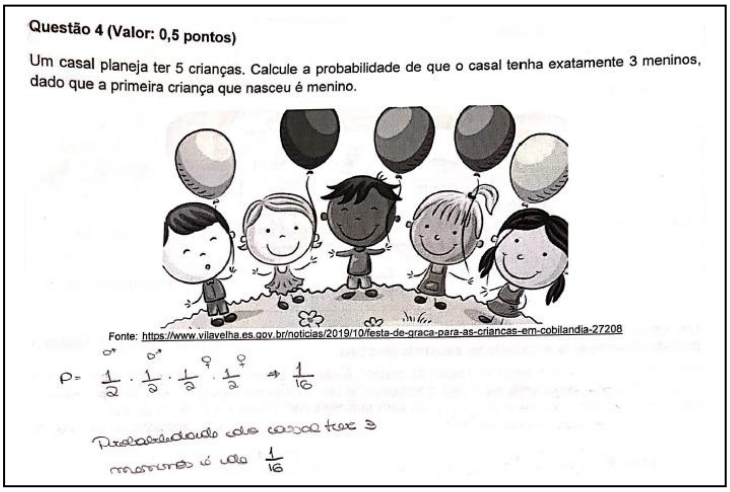
HHMM | MHMH

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 6$

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 1: A Estudante entendeu a ideia de Probabilidade Condicional, pois desconsiderou o primeiro filho; compreendeu a ideia de Eventos Independentes, pois efetuou o produto das Probabilidades necessárias, porém não considerou a possibilidade de mudança de posição entre meninos e meninas e, dessa forma, a questão ficou com resultado final incorreto.

Figura 53 – Resposta da Estudante 1 para a questão 4


Questão 4 (Valor: 0,5 pontos)

Um casal planeja ter 5 crianças. Calcule a probabilidade de que o casal tenha exatamente 3 meninos, dado que a primeira criança que nasceu é menino.

Fonte: https://www.vilavelha.es.gov.br/noticias/2019/10/festa-de-graca-para-as-criancas-em-cobilandia-27208

$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{16}$

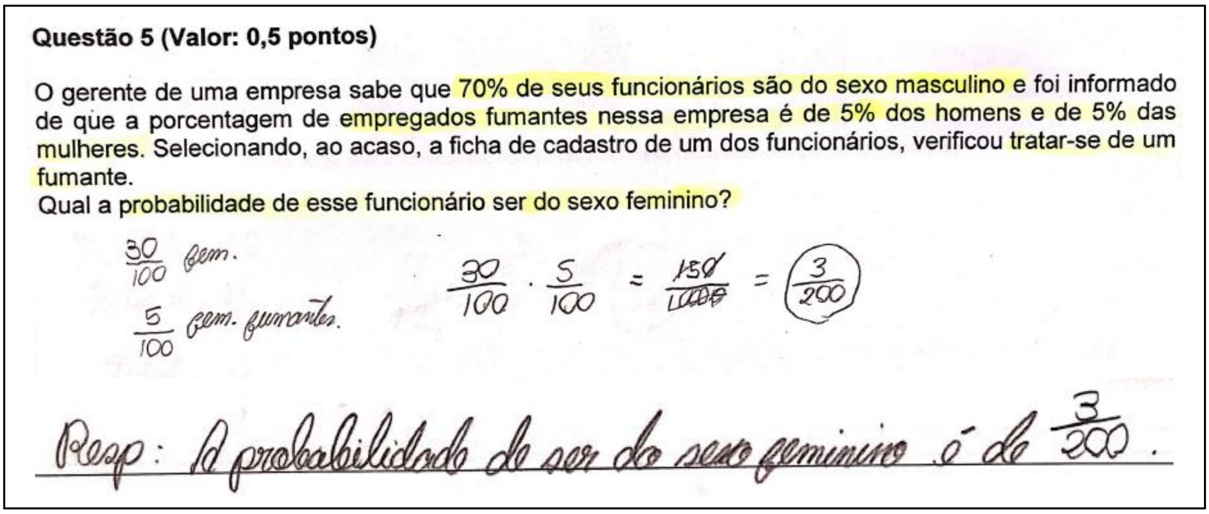
Probabilidade do casal ter 3 meninos é de $\frac{1}{16}$

Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 5: Apenas 12,2% dos estudantes resolveram a questão. A maioria deles não conseguiu perceber que a questão envolvia Probabilidade Condicional.

Estudante 34: O Estudante não interpretou corretamente a questão, uma vez que desconsiderou a possibilidade de ter homens entre os fumantes; dessa forma a questão ficou incorreta.

Figura 54 – Resposta do Estudante 34 para a questão 5



Questão 5 (Valor: 0,5 pontos)

O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5% das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou tratar-se de um fumante.

Qual a probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino?

$\frac{30}{100}$ fem.

$\frac{5}{100}$ fem. fumantes.

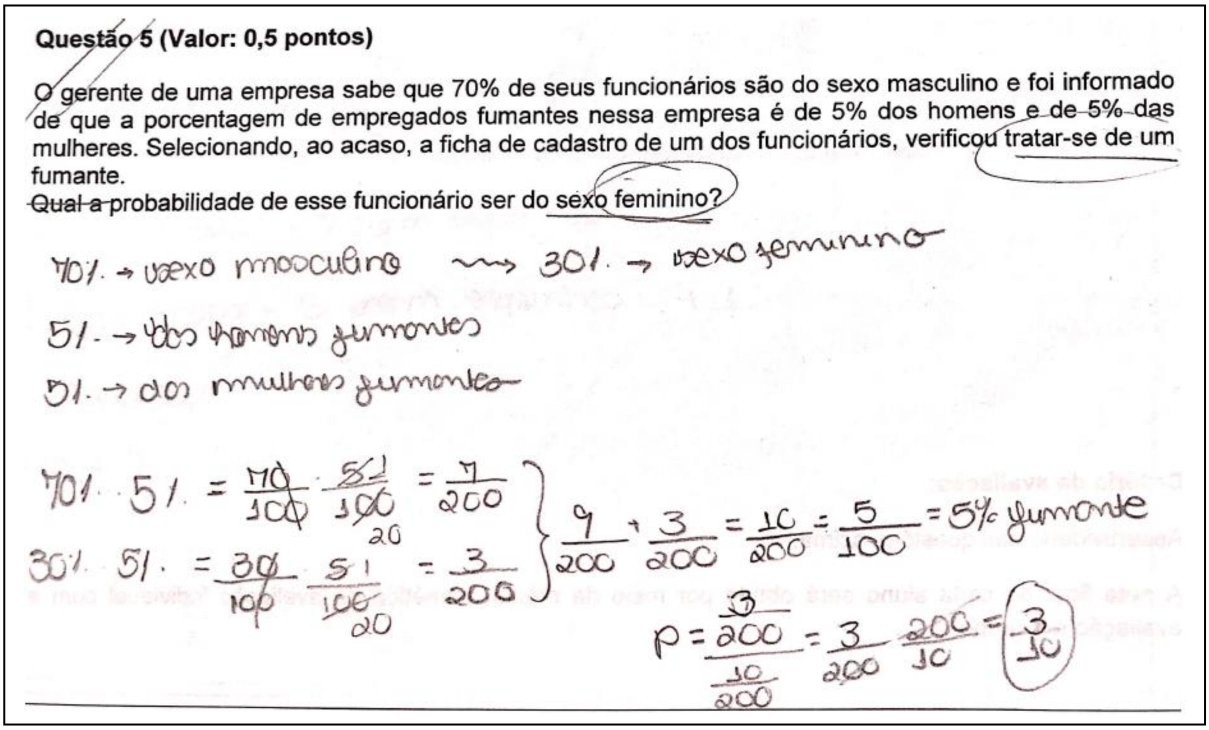
$$\frac{30}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{150}{10000} = \frac{3}{200}$$

Resp: A probabilidade de ser do sexo feminino é de $\frac{3}{200}$.

Fonte: Dados do Pesquisador

Estudante 45: A Estudante entendeu perfeitamente a ideia de Probabilidade Condicional, pois aplicou corretamente o conceito e a definição de Probabilidade Condicional na questão.

Figura 55 – Resposta da Estudante 45 para a questão 5



Questão 5 (Valor: 0,5 pontos)

O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5% das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou tratar-se de um fumante.

~~Qual a~~ probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino?

70% → sexo masculino ⇝ 30% → sexo feminino

5% → dos homens fumantes

5% → das mulheres fumantes

$$70\% \cdot 5\% = \frac{70}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{7}{200}$$

$$30\% \cdot 5\% = \frac{30}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{3}{200}$$

$$\frac{7}{200} + \frac{3}{200} = \frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 5\% \text{ fumante}$$

$$p = \frac{\frac{3}{200}}{\frac{10}{200}} = \frac{3}{200} \cdot \frac{200}{10} = \frac{3}{10}$$

Fonte: Dados do Pesquisador

Questão 6: Essa foi a questão na qual os alunos tiveram o melhor desempenho, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 46, uma vez que 58,5% dos estudantes conseguiram resolvê-la. Essa questão também envolvia Probabilidade Condicional, porém a interpretação requerida para a sua resolução era mais simples que da questão anterior.

Nessa segunda parte da pesquisa, o resultado da avaliação individual (TGPi) também ficou muito aquém dos que esperávamos, uma vez que os estudantes tiveram uma média de 1,0 ponto, em um total de 3,0 pontos distribuídos, ou seja, um rendimento de apenas 33,3%. Apesar de baixo, esse resultado foi melhor que o resultado da primeira parte da pesquisa. Cabe aqui ressaltar que essa parte da matéria de Probabilidade é mais complexa do que a primeira. Não fizemos a imagem fotográfica da realização da avaliação individual, pois julgamos que não era necessária.

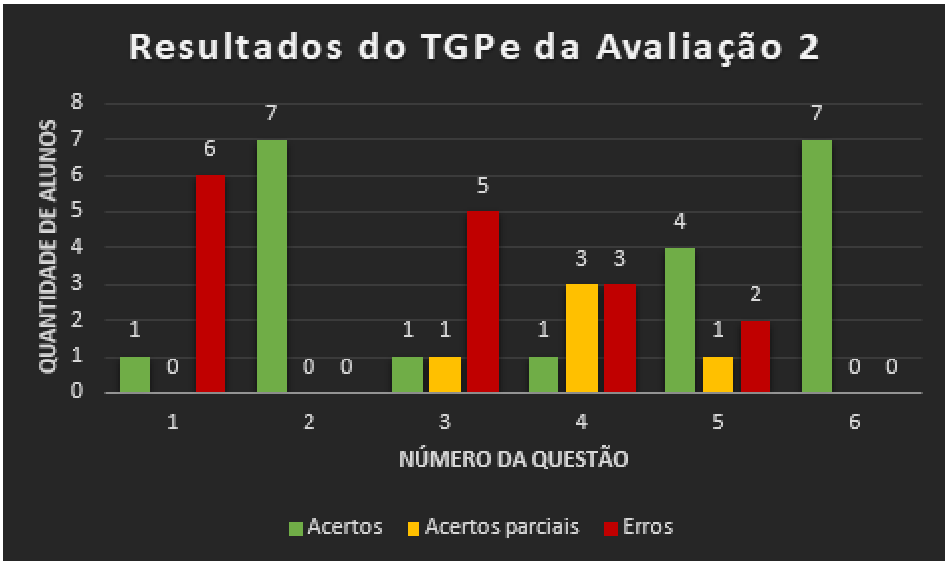
Após a realização da avaliação individual (TGPi), os estudantes se reuniram nos mesmos grupos em que realizaram o Percurso Metodológico 1 e iniciaram a realização da avaliação em equipes (TGPe). As imagens a seguir, mostram o momento da realização dessa avaliação.

Figura 56 – Momento da realização da 2ª avaliação em equipes (TGPe)

Fonte: Dados do Pesquisador

A seguir, apresentamos os resultados da avaliação em equipes (TGPe) e é possível notar uma melhora considerável na média dos estudantes, uma vez que a média das notas individuais foi 1,0 ponto e a média das notas em equipe foi de 1,6 pontos, ou melhor, a média percentual passou de 33,3% para 53,3%. No gráfico a seguir, é possível ver o resultado de acertos por questão das equipes.

Figura 57 – Resultados da 2ª avaliação em equipes (TGPe)



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Questão 1: Essa foi a questão em que os estudantes tiveram mais dificuldades e, mesmo após as discussões em grupos, eles não conseguiram interpretá-la de forma correta. O resultado passou de 4,9% de acerto para 14,3%, uma porcentagem muito baixa, de forma que fizemos uma correção detalhada sobre a questão após a avaliação em equipes.

Questão 2: Após as discussões dos estudantes acerca dessa questão, o resultado não poderia ser melhor, pois todos os grupos conseguiram resolvê-la de forma correta. O resultado passou de 39% de acerto para 100%. Segue o relato da discussão de um grupo sobre essa questão:

Estudante 16: "Só dá para fazer com o 200 gramas né?"

Estudante 2: "Isso! "

Estudante 23: "Eu fiz assim, coloquei 3 tracinhos, aí coloquei primeiro 5 em 12. Como são sem reposição, então cada vez que tirar uma bolinha da caixa vai diminuindo. Então, fica 5 em 12, depois 4 em 11, porque tem que diminuir uma bolinha e depois 3 em 10. Depois multiplica tudo e aí simplifica e dá 1 sobre 22."

Estudante 34: "Eu fiz assim também, meu resultado deu isso."

Estudante 16: "Eu também concordo. Todas concordam?"

Estudante 2: "Então acertamos. Arrasamos."

Questão 3: Como essa questão envolvia análise combinatória, os estudantes, tanto individualmente como em equipes, tiveram muita dificuldade em interpretá-la e em resolvê-la. Dessa forma, o resultado ficou abaixo do esperado e fizemos uma correção detalhada após a avaliação. O percentual, que era de 6,1% de acerto individualmente, passou para 21,4%, quando realizada em equipes.

Questão 4: O percentual de acerto dessa questão passou de 15,9% para 35,7%. Apesar de ter sido um aumento considerável, esperava-se um percentual de acerto maior para este tipo de questão.

Questão 5: Para essa questão, o percentual de acerto foi excelente, pois aumentou de 12,2% para 64,3%. Ou seja, em grupos, após as discussões, a maioria dos estudantes conseguiu resolver a questão.

Questão 6: Os estudantes que não tinham entendido essa questão, puderam entendê-la perfeitamente após as discussões em equipes. O resultado foi excepcional, passando de 58,5% de acerto para 100%.

Percebemos uma contribuição significativa no aprendizado dos estudantes utilizando a Estratégia de Ensino-Aprendizagem TBL, pois no momento da avaliação em equipes (TGPe) pudemos perceber uma participação muito intensa deles na tentativa de lembrarem o que haviam feito nas avaliações individuais e trocaram muitas informações sobre essas questões. Cada hora um estudante expunha seu raciocínio, na tentativa de explicar e convencer o outro de que sua resposta estava correta, até chegarem a um consenso de forma democrática e participativa com todos os alunos do grupo, por meio de um diálogo embasado nos estudos anteriores propostos pela TBL.

Foram discussões muito ricas e vários estudantes puderam compreender a resolução de várias questões por meio desses debates.

A seguir apresentaremos a resolução de problemas complexos e a análise de seus resultados.

5.6 Resolução de problemas complexos

O que a TBL traz como problemas complexos é o que comumente entendemos como problemas que possuem uma aplicação real na vida do estudante, de forma que eles têm uma importância significativa no processo de ensino-aprendizagem. A proposta de resolver problemas complexos é a terceira e última fase da Estratégia de Aprendizagem TBL. Conforme apresentado no planejamento que se encontra no Anexo A, essa fase refere-se à Atividade 5 e ela se encontra no Anexo G, com sua devida resolução.

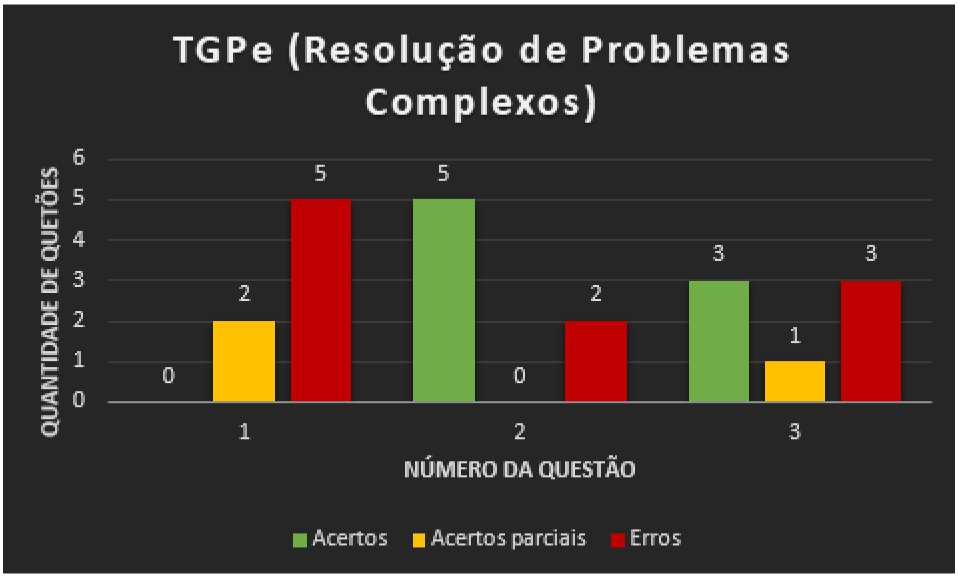
A Atividade 5, referente à resolução de problemas complexos, corresponde à aula 13 e foi realizada no dia 24/11/2021. Como a proposta para essa aula era a resolução de problemas em equipes, os estudantes se reuniram nos mesmos grupos em que realizaram as atividades anteriormente para a execução dessa tarefa. Não houve o momento individual conforme previsto na Estratégia TBL.

A proposta para essa atividade era resolver três problemas mais elaborados, que tivessem relação com os conteúdos estudados nos percursos metodológicos 1 e 2, e que também se aproximassem do raciocínio desenvolvido nas questões desses percursos. A seguir apresentamos a análise desses resultados.

5.7 Análise dos resultados da Avaliação sobre resolução de problemas complexos

No gráfico, a seguir, é possível observar uma análise quantitativa do resultado e, após o gráfico, faremos nossa análise qualitativa.

Figura 58 – Resultados da 3ª avaliação em equipes (TGPe)



Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Percebemos que os estudantes tiveram mais dificuldades na questão 1, que envolvia ideias do raciocínio combinatório ou que poderia ser resolvida por Eventos Independentes. Apenas 28,6% dos grupos conseguiram resolver de forma correta a letra (a) dessa questão e nenhum grupo conseguiu resolver a letra (b). Ou seja, confirmando o que já havíamos percebido anteriormente, quando propusemos problemas em que a probabilidade está associada a análise combinatória, foi possível notar uma certa dificuldade dos estudantes em resolvê-los.

A questão 2 apresentou um índice de acerto de 71,4%, o que nos surpreendeu, já que essa questão possui um raciocínio similar à questão 1 da 2ª avaliação, com um grau de dificuldade muito parecido e, naquele momento, o percentual de estudantes que conseguiram interpretá-la de forma correta foi de apenas 7,3%. Cabe aqui salientar que, após a 1ª e a 2ª avaliação em equipes, as questões foram corrigidas com os estudantes, conforme a proposta da TBL, o que contribuiu para a aprendizagem. Sendo assim, é possível notar um avanço considerável nos resultados após a correção e o entendimento por parte deles.

A questão 3, que envolvia a Probabilidade Condicional, teve um índice de acerto de 50%. É possível notar uma certa dificuldade em problemas que envolvam o teorema de Bayes. Esse tipo de questão requer por parte dos estudantes uma certa maturidade e como esse assunto é novo para eles, é necessário trabalhar mais problemas desse tipo para podermos desenvolver de forma significativa a aprendizagem dos estudantes.

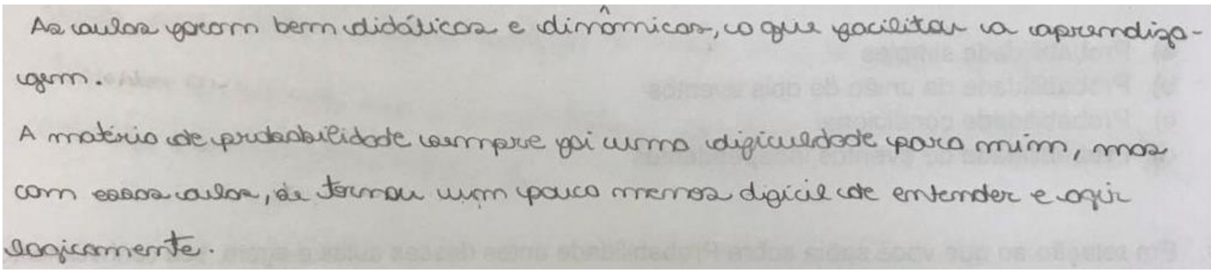
Por fim, apresentamos os dados coletados no questionário de sondagem final, que se encontra no Anexo H. No dia da aplicação do questionário, 16 estudantes haviam faltado a aula; com isso, o resultado apresentado baseia-se no preenchimento dos questionários dos 27 estudantes presentes. O objetivo desse questionário era entender qual a percepção deles em relação à Estratégia de Aprendizagem TBL aplicada para o desenvolvimento do conteúdo de Probabilidade.

5.8 Questionário de Sondagem Final

1) Você gostou das aulas de Probabilidade? As aulas atenderam às suas expectativas? Justifique suas respostas.

Respostas de quatro Estudantes:

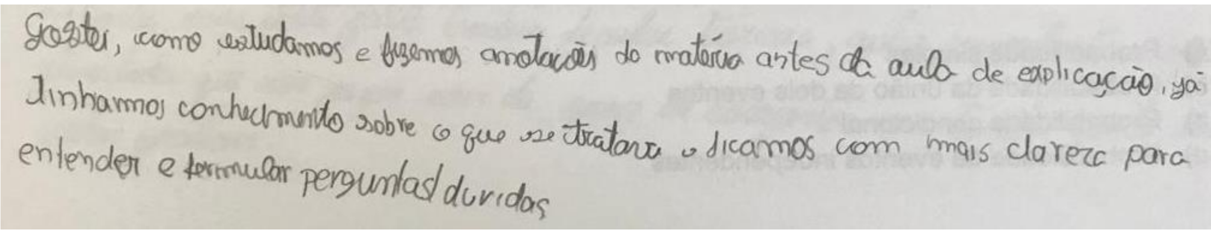
Figura 59 – Resposta da Estudante 9



As aulas foram bem didáticas e dinâmicas, o que facilita a aprendizagem.
A matéria de probabilidade sempre foi uma dificuldade para mim, mas com essas aulas, ela tornou um pouco menos difícil de entender e agir logicamente.

Fonte: Dados do Pesquisador

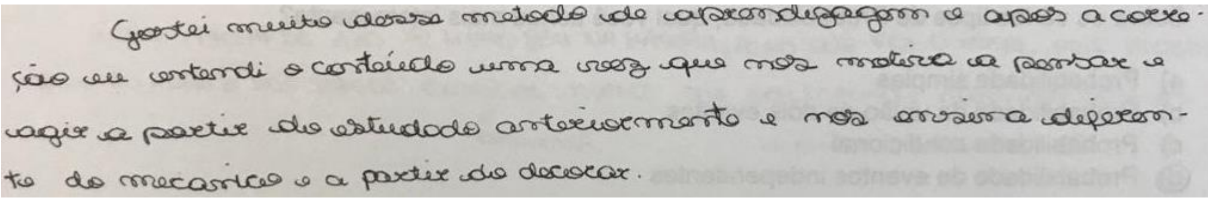
Figura 60 – Resposta da Estudante 31



Gostei, como estudamos e fizemos anotações da matéria antes da aula de explicação, já tínhamos conhecimento sobre o que se tratava e ficamos com mais clareza para entender e formular perguntas/dúvidas

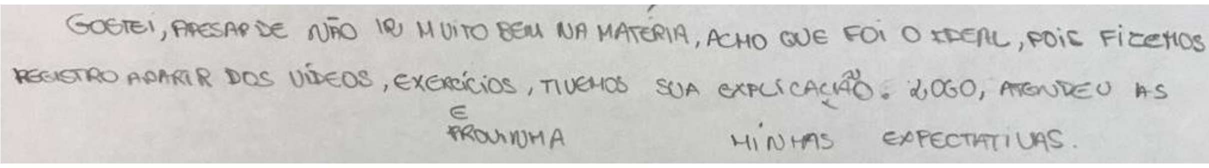
Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 61 – Resposta da Estudante 1


Gostei muito dessa metodo de aprendizagem e apos a corre-
ção eu entendi o conteúdo uma vez que nos motiva a pensar e
agir a partir do estudado anteriormente e nos ensina diferen-
te do mecanico e a partir do decorar.

Fonte: Dados do Pesquisador

Figura 62 – Resposta da Estudante 38


GOSTEI, APESAR DE NÃO IR MUITO BEM NA MATÉRIA, ACHO QUE FOI O IDEAL, POIS FIZEMOS
REGISTRO A PARTIR DOS VÍDEOS, EXERCÍCIOS, TIVEMOS SUA EXPLICAÇÃO. LOGO, ATENDEU AS
E
PROXIMA MINHAS EXPECTATIVAS.

Fonte: Dados do Pesquisador

De uma maneira geral os estudantes gostaram muito da forma como a TBL propõe o ensino-aprendizagem para eles, conforme pode ser observado nas respostas dos estudantes.

A seguir, apresentamos graficamente o grau de satisfação dos estudantes em relação aos Percursos Metodológicos trabalhados, bem como a preferência deles quanto ao método de aprendizagem e ao tipo de Probabilidade que preferem.

2) As aulas foram divididas em duas partes.

Sobre a primeira parte: “Espaço amostral e evento, Probabilidade e Probabilidade da união de dois eventos”, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

Figura 63 – Grau de satisfação dos alunos em relação ao Percurso Metodológico 1

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

3) Sobre a segunda parte: “Probabilidade de eventos independentes e Probabilidade Condicional”, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

Figura 64 – Grau de satisfação dos alunos em relação ao Percurso Metodológico 2

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

4) Em relação a Estratégia de Aprendizagem TBL, utilizada para desenvolver sua Aprendizagem, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

Figura 65 – Grau de satisfação dos alunos em relação a Estratégia de Aprendizagem TBL

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

5) Para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, você prefere

Figura 66 – Preferência dos alunos quanto ao método de aprendizagem

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Embora os estudantes tenham gostado da proposta de ensino-aprendizagem da TBL, eles ainda preferem o método tradicional.

6) Se você marcou a letra (d) na pergunta anterior, descreva o método que julga melhor e cite por que você o acha melhor.

   Nenhum Estudante marcou a letra (d).

7) Sobre os vários tipos de Probabilidade, qual você achou mais interessante?

Figura 67 – Preferência dos alunos quanto ao tipo de Probabilidade aprendida

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

8) Em relação ao que você sabia sobre Probabilidade antes dessas aulas e sabe agora, seu conhecimento

Figura 68 – Aumento de conhecimento do conteúdo de Probabilidade após as aulas

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2022)

Analisando os gráficos e as respostas discursivas dos estudantes, foi possível notar que eles se sentiram bastante satisfeitos com a proposta dos percursos metodológicos utilizando a Estratégia de Aprendizagem TBL. Mas, ainda assim, preferem o método tradicional de ensino, o que é possível compreender, pois o uso de Metodologias Ativas tira o estudante de sua zona de conforto e o obriga a buscar seu próprio conhecimento. A Probabilidade Condicional foi a preferida dos estudantes, sendo a escolha de 40,7% deles. E 85,1% dos estudantes sinalizaram que seus conhecimentos aumentaram significativamente após as aulas em que utilizaram a Estratégia TBL.

A seguir apresentamos nossas considerações finais acerca de nossa pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por respostas que apontem caminhos sobre nosso questionamento inicial: ***"De que forma uma sequência didática, desenvolvida por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL, pode contribuir para melhorar o ensino e consequentemente promover a aprendizagem dos alunos?"*** foi o que motivou todo o desenvolvimento desta dissertação. Com este trabalho buscamos uma estratégia que pudesse favorecer o ensino-aprendizagem da Probabilidade em turmas da 2ª série do Ensino Médio, utilizando a Estratégia de Aprendizagem TBL como forma de Metodologia Ativa, segundo Oliveira (2015), na possibilidade de colocar os estudantes no centro do processo de suas próprias aprendizagens, dando a eles mais autonomia, protagonismo, autoaprendizagem e espírito de colaboração.

A Estratégia de Aprendizagem TBL é muito utilizada em cursos superiores, principalmente na área da saúde, mas é importante aqui destacar que ela pode ser desenvolvida no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, bem como em outras séries do Ensino Médio ou do Ensino Fundamental, assim como fizemos com a Probabilidade na 2ª série do Ensino Médio.

Como forma diferenciada de trabalho, buscamos desenvolver dois percursos metodológicos, utilizando a Estratégia de Aprendizagem TBL. Esses percursos metodológicos foram aplicados em 02 (duas) turmas da 2ª série do Ensino Médio, em uma escola da rede particular de Belo Horizonte, porém os dados analisados são de apenas uma das turmas, a qual tinha 43 alunos. A TBL possibilitou uma forma autônoma de estudo aos estudantes, pois eles tinham que pesquisar sobre o tema Probabilidade, registrar os conceitos, definições e equações referentes ao tema, postar os registros no Microsoft *Teams*, de modo que esse processo era a preparação pessoal para a avaliação individual e em equipes, que seriam realizadas posteriormente. Assim, o registro do estudante e os materiais disponibilizados pelo professor, eram inicialmente suas fontes de estudo, uma vez que ele poderia buscar por outras fontes de pesquisa. Dessa maneira, o estudante foi um sujeito ativo de sua própria aprendizagem, pois ele deveria selecionar e registrar os assuntos mais importantes para a construção dessa aprendizagem.

A divisão em dois percursos metodológicos foi necessária devido à grande quantidade de conteúdos de Probabilidade existentes na 2ª série do Ensino Médio. No primeiro percurso, os estudantes concentraram suas aprendizagens nos conceitos de espaço amostral, evento, experimento aleatório, definição clássica de Probabilidade e Probabilidade da união de dois ou mais eventos. Dessa forma, eles se apropriaram da Estratégia de Aprendizagem TBL e construíram toda base conceitual, definições e equações sobre esses assuntos de forma autônoma.

Em um segundo momento, eles desenvolveram suas aprendizagens sobre Probabilidade de Eventos Independentes e Probabilidade Condicional. Agora, já tendo vivenciado a Estratégia TBL no momento anterior, os estudantes puderam traçar novas formas de estudo que pudessem contribuir ainda mais para o seu aprendizado, revendo o que não funcionou muito bem no primeiro momento e traçando novos caminhos, uma vez que a Estratégia TBL dá ao estudante essa autonomia.

Como forma de fechamento da Estratégia de Aprendizagem TBL, os estudantes resolveram três problemas envolvendo os assuntos estudados nos dois percursos metodológicos e puderam aplicar todo o conhecimento adquirido na resolução deles. Percebemos que algumas questões que os alunos não conseguiram resolver nos dois percursos metodológicos, foram resolvidas na resolução de problemas, após várias reflexões/discussões nas equipes. Assim, percebemos que a Estratégia de Aprendizagem TBL favoreceu a aprendizagem desses estudantes, após várias discussões nos percursos metodológicos anteriores, inclusive na resolução de problemas.

Cabe ressaltar que, para o desenvolvimento dos percursos metodológicos, são necessárias dedicação e organização muito intensas por parte dos estudantes; entretanto, a dedicação e a organização do professor também não são menores, pois ele como mediador de toda a aprendizagem necessita selecionar antecipadamente todo o material que será utilizado. Assim, é fundamental uma pesquisa de materiais de qualidade, sejam eles impressos ou não, em livros didáticos ou não, videoaulas gravadas por ele mesmo ou por outros professores e a indicação de sites de referência para os estudantes, caso eles queiram se aprofundar um pouco mais nos assuntos abordados.

Com o intuito de respondermos à nossa questão de pesquisa: ***“De que forma uma sequência didática, desenvolvida por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL, desenvolvida pode contribuir para melhorar o ensino e consequentemente promover a aprendizagem dos alunos?”***, optamos pela metodologia de pesquisa qualitativa, utilizando de questionários, observação participante e análise documental. Os dados foram gravados por meio de áudios e também registrados nas avaliações desenvolvidas pelos alunos, individualmente e em equipes. A pesquisa qualitativa nos forneceu flexibilidade na coleta e análise dos dados, uma vez que o pesquisador interagiu com os sujeitos de pesquisa e, em alguns momentos, julgamos necessário representar graficamente alguns dos dados analisados. Dessa forma, construímos alguns gráficos que nos permitiram uma análise mais rápida dos resultados encontrados.

Nosso referencial teórico está sustentado por dois eixos temáticos: um eixo que se refere ao ensino e à aprendizagem da Probabilidade, e outro que se refere ao ensino e à aprendizagem por meio da Estratégia de Aprendizagem TBL, utilizando as Metodologias Ativas na Educação.

Inicialmente, os estudantes ficaram um pouco assustados em saber que eles deveriam ler, assistir vídeos, fazer seus registros e ampliar sua pesquisa, caso achassem necessário, para depois fazerem uma prova individual e posteriormente em equipes, sem que o professor explicasse nada sobre o assunto. A fonte de leitura foi o próprio livro didático dos estudantes e as videoaulas foram selecionadas de forma que a explicação do professor foi bem próxima do que seria explicado pelo professor regente. Depois que realizaram o Percurso Metodológico I, fizeram as avaliações e entenderam a proposta, a realização do Percurso Metodológico II foi mais tranquila para os estudantes.

Apesar da desconfiança inicial dos estudantes e das dificuldades apresentadas nos resultados, vivenciamos uma experiência que contribuiu de forma significativa para a aprendizagem deles. Foi possível perceber pelas análises qualitativas e pelas gravações dos áudios, uma evolução substancial no aprendizado dos estudantes ao se comparar as avaliações individuais (1ª avaliação) com as avaliações em equipes (2ª avaliação) nos dois percursos metodológicos desenvolvidos, uma vez que o índice de acertos das questões aumentou significativamente. Dessa forma, entendemos que a TBL favoreceu a aprendizagem dos estudantes quanto ao conceito, às definições e às equações de Probabilidade. Que vários deles entenderam o que são, e como se aplicam as equações de Probabilidade da união de dois ou mais eventos, Probabilidade de Eventos Independentes e Probabilidade Condicional, embora alguns estudantes ainda apresentem dificuldades. Essas dificuldades puderam ser sanadas na 3ª série do Ensino Médio, em 2022, uma vez que retomamos esse assunto de forma revisional para esses alunos.

É possível compreender a desconfiança inicial dos estudantes com relação a Estratégia de Aprendizagem TBL, uma vez que há uma grande mudança de paradigma em relação à construção de seus aprendizados, uma vez que os estudantes passam a ser os agentes de sua própria aprendizagem, além de tirá-los de sua zona de conforto, o que ainda transfere o “sucesso” ou “fracasso” da aprendizagem para o próprio estudante. Entretanto, vale ressaltar que foi muito prazeroso vê-los fazendo esse movimento de busca pelo conhecimento antes das avaliações e o quanto as avaliações em equipes foram produtivas e contribuíram para o aperfeiçoamento dessa aprendizagem, pois eles trabalharam de forma colaborativa e proativa na construção desses conhecimentos.

Nesse ano de 2022, estamos novamente juntos com esses estudantes na 3ª série do ensino médio e optamos por começar a etapa de forma revisional com os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. É possível notar nos questionamentos e nas resoluções de problemas sobre Probabilidade uma evolução/maturidade muito significativa desses estudantes acerca do tema.

Conforme relatamos no capítulo 4, "nenhuma pesquisa é totalmente controlável, com início, meio e fim previsíveis. A pesquisa é um processo em que é impossível prever todas as etapas. O pesquisador está sempre em estado de tensão porque sabe que seu conhecimento é parcial e limitado." (GOLDENBERG, 2004)

Dessa forma, pensamos que se houvesse uma discussão das videoaulas e da leitura realizada pelos estudantes e entre eles e o professor antes da realização das avaliações, os resultados poderiam ser mais expressivos positivamente. Assim, numa próxima oportunidade, acreditamos que em outubro de 2022, faremos um ajuste na estratégia e aplicaremos novamente na nova turma da 2ª série, para compararmos os resultados da turma de 2021 com a turma de 2022 e, dessa forma, nos mantermos num movimento de constante busca pelo aperfeiçoamento das estratégias dentro do contexto das escolas e etapas de ensino.

Sendo assim, esperamos que esse trabalho venha contribuir para que outros professores possam utilizar a Estratégia de Aprendizagem TBL, bem como possam ser encorajados a buscar novas formas de ensino, de maneira que colabore de forma significativa para o aprendizado de seus estudantes.

REFERÊNCIAS

AMORIM, V. e MOZER, G. **Probabilidade além da Combinatória: Tópicos e Problemas reais com foco no raciocínio probabilístico.** Rio de Janeiro: Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica, 2020.

AZEVEDO, R. **A história da Educação no Brasil: uma longa jornada rumo à universalização.** Copyright © 2021, Gazeta do Povo. Todos os direitos reservados. mar 2018. Disponível em: https://www.gazetadopovo.com.br/educacao/a-historia-da-educacao-no-brasil-uma-longa-jornada-rumo-a-universalizacao-84npcihyra8yzs2j8nnqn8d91/. Acesso em: 11 out. 2021.

BACICH, L. MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora.** Porto Alegre: Penso, 2018.

BRANDÃO, J. **Metodologias Ativas na Educação:** Um Estudo de Caso em uma Instituição de Ensino Tecnológico. 86 fl. Dissertação (Mestrado) – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza, (CEETEPS), São Paulo. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 9394, de 20 de Dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC:** Educação é a Base. Brasília: MEC, 2018, 595p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

CALABRIA, A., CAVALARI, M. **Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades**. 62 fl. Sociedade Brasileira de História da Matemática: X Seminário Nacional de História da Matemática, Campinas. 2013.

COSTA, M. S., MARTINS, A.C.J, PAGANI, E.M.L. Ensino de Aprendizagem de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas: uma tendência metodológica. In: CONGRESSO INTERNACIONAL MOVIMENTOS DOCENTES, 2021, Diadema, SP. **Anais...** Disponível em https://www.movimentosdocentes.com/21anais. Acesso em 10 abr. 2022

FILATRO, A. CAVALCANTI, C. C. **Metodologias Inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa.** São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

GADELHA, A. Teorema da Probabilidade I. **Uma pequena história da Probabilidade.** Rio de Janeiro, p. 1-16, mar. 2004.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro - São Paulo: Editora Record, 2004.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Combinatória e Probabilidade. São Paulo: Saraiva, 2006.

JUNQUEIRA, A. L. N. **Probabilidade na Educação Básica:** Um Estudo sobre Concepções de Professores de Matemática. 421 fl. Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo, (UNIAN), São Paulo. 2014.

KRUG, R. R. VIEIRA, M. S. M. MACIEL, M. V. A. ERDMANN, T. R. VIEIRA, F. C. F. KOCH, M. C. GROSSEMAN, S. O "Bê-Á-Bá" da Aprendizagem Baseada em Equipe The "Bê-Á-Bá" of Team-Based Learning. *In*: Revista Brasileira de Educação Médica nº 40, 9, 2016, Santa Catarina.
MORGADO, A. CARVALHO, J. CARVALHO, P. FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade:** com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, C. A. **Metodologia Ativa de Ensino-Aprendizagem:** Manual do TBL. Itu: Edição do Autor, 2015. Edição do Kindle.

PALMEIRA JR, E. L. PAGANI, E. M. L. FERREIRA, F. A. Um Mapeamento de Dissertações do Profmat sobre o Ensino de Probabilidade. *In*: IX ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, 2021, Pouso Alegre.

PRODANOV, C. C. FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico.** Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

REZENDE, R. L. **Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos.** 144 fl. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, (UFG), Goiânia. 2020.

SANTOS. R. R. dos. **Breve Histórico do Ensino Médio no Brasil**. *In*: Seminário Cultura E Política Na Primeira República: Campanha Civilista Na Bahia, 2010, Bahia.

SOUZA, J. C. S. de; SANTOS, M. C. **Contexto histórico da educação brasileira.** Revista Educação Pública, v. 19, nº 12, 25 de junho de 2019. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/19/12/contexto-historico-da-educacao-brasileira

WADSWORTH, B. J. **Inteligência e Afetividade da Criança na Teoria de Piaget.** São Paulo: Pioneira, 1995.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

BIBLIOGRAFIA

CARLONI, P. C. **O Estudo de Probabilidade no Ensino Médio.** 59 fl. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, (UFES), Vitória. 2019.

DIAS, S. R. VOLPATO, A. N. **Práticas inovadoras em Metodologias Ativas.** Florianópolis: Contexto Digital, 2017.

FILHO, A. B. de F. **Probabilidade:** Uma Proposta a Luz da BNCC. 2020. 54 fl. Dissertação (Mestrado) – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), Redenção. 2020.

GOMES, G. C. **Probabilidade e Estatística:** Quantificando a incerteza. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

GONDIM, H. F. **Probabilidade e Probabilidade Geométrica:** Conceitos e exemplos aplicáveis no ensino básico. 78 fl. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, (UFMGS), Campo Grande. 2013.

JAMES, B. R. **Probabilidade:** Um curso em nível intermediário. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2010.

MARCONI, M. A. LAKATOS, E. M. **Fundamento de Metodologia Científica.** São Paulo: Atlas, 2003.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado:** Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

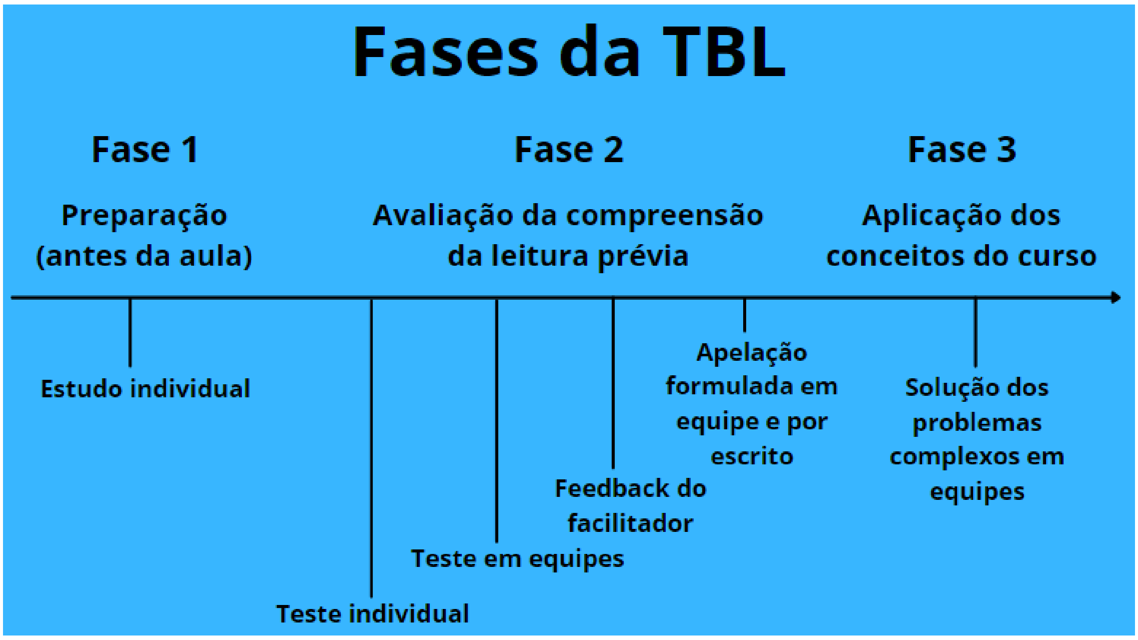
PINHEIRO, G. S. **Ensino de Probabilidade:** Um jogo e as contribuições dos registros das partidas. 99 fl. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (UFRGS), Porto Alegre. 2019.

ROSS, S. **Probabilidade:** Um curso moderno com aplicações. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ANEXO A – Planejamento da Sequência Didática sobre Probabilidade desenvolvida segundo as etapas da TBL

A Estratégia de Aprendizagem TBL, será aplicada duas vezes em nosso trabalho. Em um primeiro momento (de 25/10/2021 a 05/11/2021), para desenvolver os conteúdos sobre espaço amostral, evento, probabilidade e probabilidade da união de dois eventos, e em um segundo momento (de 08/11/2021 a 19/11/2021) para desenvolver os conteúdos sobre probabilidade condicional e probabilidade de eventos independentes. Para cada um dos dois momentos, desenvolveremos as fases I e II da estratégia, e num terceiro momento (24/11/2021), desenvolveremos a fase III, abordando todos os conteúdos desenvolvidos no primeiro e segundo momento, conforme ilustrado a seguir.

Figura 69: Fases da TBL para o desenvolvimento da sequência didática



Fonte: Elaborado pelo AUTOR (2021)

1) Conteúdos a serem trabalhados:
   - Espaço amostral e evento;
   - Probabilidade;
   - Probabilidade da união de dois eventos;
   - Probabilidade condicional;
   - Probabilidade de eventos independentes.
2) Objetivos:
   - Conceituar probabilidade, experimento aleatório, espaço amostral e evento;

- Reconhecer que uma das características da probabilidade é a previsão de resultados;
- Determinar a probabilidade de um evento em um espaço amostral finito, independentemente da experimentação;
- Utilizar técnicas de contagem como auxílio nos cálculos de probabilidade;
- Desenvolver e aplicar o conceito de probabilidade condicional.

3) Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:
    - (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
    - (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
    - (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.
4) Tempo para a execução da sequência didática: 08 horas-aula (50 minutos cada), divididas em 2 partes (Atividade I e Atividade III) de 04 horas-aula cada. **(Aulas assíncronas)**
5) Tempo para realização das atividades avaliativas: 05 horas-aula (50 minutos cada), divididas em 3 partes (Atividade II, Atividade IV e Atividade V), sendo 02 horas-aula para as atividades II e IV e 01 hora-aula para a atividade V. **(Aulas presenciais)**
6) Material necessário para a execução: será enviado para o aluno em outro documento.
7) Detalhamento de cada aula da sequência didática (tempo para cada aula: 50 minutos):

Tabela 8 – Cronograma das Atividades

Fase I	Atividade 1	Aula 1: Assistir aos 4 vídeos da atividade 1.	(25/10/2021 a 02/11/2021)
		Aula 2: Leitura do livro didático, conforme descrito na atividade 1.	
		Aula 3: Pesquisa e leitura de material complementar, conforme descrito na atividade 1.	
		Aula 4: Registro no caderno sobre os assuntos estudados na atividade 1.	
Fase II	Atividade 2	Aula 5: Teste de garantia de preparo individual (TGPi) sobre os assuntos das aulas anteriores.	(03/11/2021)
		Aula 6: Teste de garantia de preparo em equipes (TGPe) sobre os assuntos das aulas anteriores.	
Fase I	Atividade 3	Aula 7: Assistir aos 4 vídeos da atividade 2.	(08/10/2021 a 16/11/2021)
		Aula 8: Leitura do livro didático, conforme descrito na atividade 2.	
		Aula 9: Pesquisa e leitura de material complementar, conforme descrito na atividade 2.	
		Aula 10: Registro no caderno sobre os assuntos estudados na atividade 2.	
Fase II	Atividade 4	Aula 11: Teste de garantia de preparo individual (TGPi) sobre os assuntos das aulas anteriores.	(17/11/2021)
		Aula 12: Teste de garantia de preparo em equipes (TGPe) sobre os assuntos das aulas anteriores.	
Fase III	Atividade 5	Aula 13: Resolução de problemas complexos em equipes.	(24/11/2021)

Fonte: Elaborada pelo AUTOR (2021)

8) Finalização da sequência didática: A sequência didática será finalizada com a aplicação de uma avaliação de resolução de problemas complexos, sendo que essa avaliação será resolvida em equipes (aula 13).

ANEXO B – Questionário de sondagem inicial

Questionário de sondagem inicial

Nome:			Nº
2ª série / Ensino Médio	Turmas: **A B**	Disciplina: **MATEMÁTICA**	
Data: **22/10/2021**	Professor(a): **Edemilson Lemos Palmeira Júnior**		

Caro(a) aluno(a),

Sua participação será muito importante para o desenvolvimento de minha pesquisa de mestrado junto ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do CEFET-MG.

Sendo assim, peço que respondam a esse questionário inicial para, em seguida, darmos início às nossas atividades sobre Probabilidades.

Como informado anteriormente, essas informações serão analisadas em minha pesquisa de mestrado e vocês não serão identificados em nenhum momento.

Muito obrigado pela contribuição, participação e interesse!

Professor Edemilson Lemos Palmeira Júnior (Pesquisador)

Professora Dra. Érica Marlúcia Leite Pagani (Orientadora)

1. Qual a sua idade?
   a) 15 anos
   b) 16 anos
   c) 17 anos
   d) Outra
2. Para você, o que significa Probabilidade?
3. Para você a Probabilidade é usada
   a) somente em jogos.
   b) somente em previsão do tempo.
   c) somente em jogos e previsão do tempo.
   d) em várias circunstâncias.
4. Caso você tenha marcado a opção (d) para a resposta anterior, descreva brevemente uma outra situação em que se pode usar a Probabilidade.
5. Em qual(is) série(s), você já estudou Probabilidade?
   a) 3º ano do ensino fundamental I.
   b) 4º ano do ensino fundamental I.

c) 5º ano do ensino fundamental I.
d) 6º ano do ensino fundamental II.
e) 7º ano do ensino fundamental II.
f) 8º ano do ensino fundamental II.
g) 9º ano do ensino fundamental II.
h) 1ª série do ensino médio.
i) Nunca estudei probabilidade.

6. Em relação ao que você já estudou sobre Probabilidade, você classifica esse conteúdo como
   a) fácil.
   b) médio.
   c) difícil.
7. Você vê alguma relação entre os conteúdos de Probabilidade e Análise Combinatória?
   a) Sim
   b) Não
   c) Não sei responder
8. Você já usou o conceito de Probabilidade em algum momento da vida? Se sim, relate como foi sua experiência.
9. Registre, abaixo, outros aspectos que julgar relevantes sobre este assunto e/ou suas expectativas sobre os estudos que desenvolveremos sobre Probabilidade.

Obrigado por sua participação!

ANEXO C – Atividade 1

Caro(a) aluno(a), para promovermos a aprendizagem de probabilidade, vamos utilizar uma Estratégia de Aprendizagem denominada TBL (Team Based Learning), traduzindo para o português ABE (Aprendizagem em Equipes). Como se pode observar, o próprio nome já deixa claro que vamos trabalhar em equipes. Sendo assim, é de extrema importância a participação de todos.

Serão desenvolvidas 5 atividades. Com o desenvolvimento dessas atividades, objetivamos que vocês construam conhecimentos relativos a probabilidade, para em seguida, serem capazes de aplicar os conteúdos na resolução de problemas, conforme sugere a unidade temática Probabilidade e Estatística segundo a BNCC.

Aividade 1 – (Valor: 2 pontos)

Nessa primeira atividade, você irá se preparar individualmente, de maneira **assíncrona**, para o próximo encontro que será na forma presencial. É fundamental seu envolvimento nessa tarefa, uma vez que, na próxima atividade, você realizará um teste de garantia de preparo individual (TGPi) e depois um teste de garantia de preparo em equipes (TGPe). O objetivo nessa atividade é que você entenda o conceito de probabilidade, espaço amostral, evento, experimento aleatório, cálculo de probabilidade e probabilidade da união de dois eventos. Para isso, sugiro que se prepare de três formas:

1ª forma: Leia e faça todos os registros que julgar necessário, em seu caderno, das páginas 290 a 301 do livro parte II. Faça os exercícios e poste em tarefas no *teams*, conforme data e horário agendado pelo professor.

2ª forma: Entre nos links abaixo, assista aos vídeos sobre probabilidade e faça todos os registros complementares, vistos na 1ª forma, que julgar necessário, em seu caderno.

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=8g571hUvgeo (tempo: 13 minutos)

Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=_AaYS_kTvps (tempo: 9 minutos)

Vídeo 3: https://www.youtube.com/watch?v=U99Rensi0as (tempo: 10 minutos)

Vídeo 4: https://www.youtube.com/watch?v=QkO3HJgzTrA&t=45s (tempo: 13 minutos)

3ª forma: Busque outras fontes na internet ou em livros, para se embasar melhor sobre o tema e cite tais fontes na entrega de seu trabalho.

Depois de ler sobre a matéria, assistir aos vídeos e fazer seus registros, poste no *Teams* o resumo de seus registros, conforme data e rubrica anexa. Essa parte da tarefa valerá 2 pontos.

Na entrega do trabalho você pode mostrar exemplos para a consolidação do conteúdo.

BOM TRABALHO!

ANEXO D – Atividade 2: 1ª Avaliação

Nome:				Nº
2ª série / Ensino Médio		Turma: A	Disciplina: **MATEMÁTICA**	
Data: **03/11/2021**	Professor: **Edemilson Lemos Palmeira Júnior**			Nota:

Nessa atividade, você realizará o teste de garantia de preparo individual (TGPi) e terá 50 minutos para realizá-lo.

Seguem as questões – (Valor: 3 pontos)

Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Uma urna contém cinco bolas, sendo três numeradas de 1 a 3 e duas sem números, sendo uma na cor azul e a outra na cor branca. Retirando-se, simultaneamente, duas bolas da caixa:

a) escreva o espaço amostral e dê o seu número de seus elementos.

Resolução:

U = {(1,2), (1,3), (2,3), (1,a), (2,a), (3,a), (1,v), (2,v), (3,v), (a,v)}

n(U) = 10

b) escreva o evento A: as duas bolas que saíram possuem números e dê o seu número de elementos.

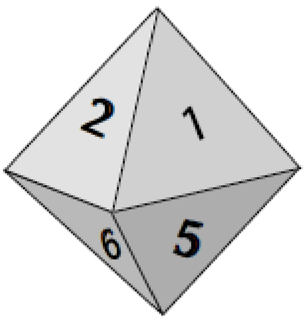
Resolução:

A = {(1,2), (1,3), (2,3)}

n(A) = 3

Questão 2 (Valor: 0,5 pontos)

No lançamento de um dado que possui o formato de octaedro regular, numerado de 1 a 8, qual é a probabilidade de sair um número primo?



Fonte: https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2019/06/aap-recomendaes-de-matemtica-2-srie-do-em_2017_3b.pdf

Resolução:

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} → n(U) = 8 e A = {2, 3, 5, 7} → n(A) = 4

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{4}{8} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{2}$.

Questão 3 (Valor: 0,5 pontos)

Escolhendo aleatoriamente um dos anagramas da palavra CEFET, qual a probabilidade de suas primeira e última letras serem consoantes?

Fonte: https://g1.globo.com/mg/minas-gerais/noticia/2020/03/15/coronavirus-cefet-mg-e-mais-uma-instituicao-a-suspender-atividades-presenciais-no-estado.ghtml

Resolução:

$$n(U) = P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60 \quad \text{e} \quad n(A) = 3 \times \frac{3!}{2!} \times 2 = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{18}{60} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{10}$$

Portanto, a probabilidade é $\frac{3}{10}$.

Questão 4 (Valor: 0,5 pontos)

Considere o lançamento de dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade de se obter a soma dos resultados igual a 8.

Fonte: http://www.webquestfacil.com.br/webquest.php?pg=tarefa&wq=14991

Resolução:

$$n(U) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} \quad \rightarrow \quad n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{5}{36}$$

Portanto, a probabilidade é $\frac{5}{36}$.

Questão 5 (Valor: 0,5 pontos)

Escolhe-se aleatoriamente um número formado somente por algarismos pares distintos, maior do que 100 e menor do que 600. Calcule a probabilidade de que esse número seja divisível por 4.

Resolução:

$\mathrm{n(U)} = 2 \times 4 \times 3 = 24$

$\mathrm{A} = \{204, 208, 240, 248, 260, 264, 268, 280, 284, 408, 420, 428, 460, 468, 480\} \quad \rightarrow$

$\mathrm{n(A)} = 15$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(U)}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P(A)} = \frac{15}{24} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P(A)} = \frac{5}{8}$$

Portanto, a probabilidade é $\frac{5}{8}$.

Questão 6 (Valor: 0,5 pontos)

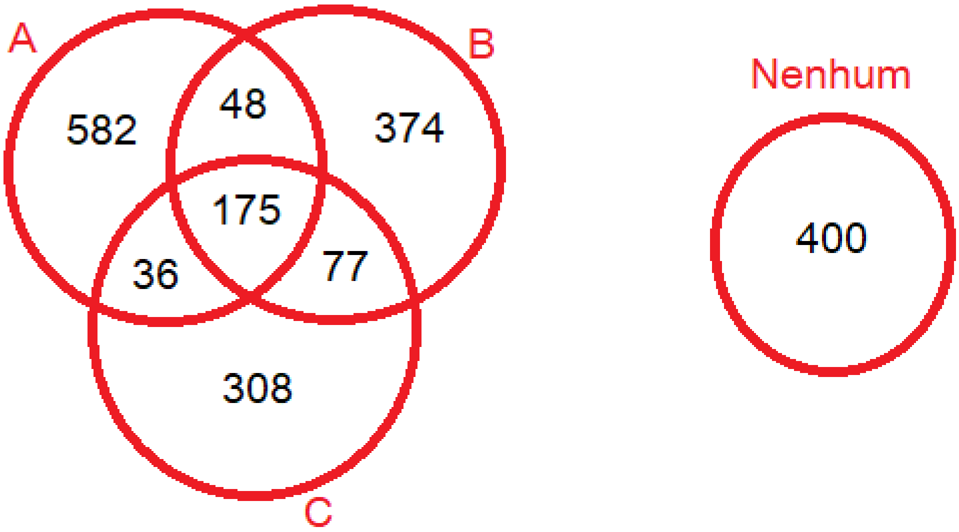
Dentre os jornais mais assistidos por telespectadores de uma determinada região do país, estão os jornais A, B e C. Numa pesquisa feita com 2 000 pessoas, para saber a preferência delas em relação a algum dos jornais assistidos, obteve-se o seguinte resultado:

Preferências	**Quantidade de pessoas**
Assistem o jornal A	841
Assistem o jornal B	674
Assistem o jornal C	596
Assistem os jornais A e B	223
Assistem os jornais A e C	211
Assistem os jornais B e C	252
Assistem os jornais A, B e C	175

Com base nos dados da tabela acima, qual a probabilidade de se escolher uma pessoa pesquisada e essa não assistir a nenhum dos jornais?

Resolução:

Construindo o diagrama de Venn, temos:



$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{400}{2000} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{5}$

Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{5}$.

Critério de avaliação:

Assertividade das questões acima.

A nota final de cada aluno, será obtida por meio da média aritmética da avaliação individual com a avaliação em grupo.

ANEXO E – Atividade 3

Nas atividades I e II, vocês já puderam entender a proposta de trabalho da Estratégia de Aprendizagem TBL (Aprendizagem em Equipes). Seguindo essa mesma estratégia, vamos concluir nosso estudo com as atividades III, IV e V. Segue a atividade III.

Aividade 3 – (Valor: 2 pontos)

Nessa segunda atividade, você irá se preparar individualmente, de maneira **assíncrona**, para o próximo encontro que será de forma presencial. É fundamental seu envolvimento nessa tarefa, uma vez que, na próxima atividade, você realizará um teste de garantia de preparo individual (TGPi) e depois um teste de garantia de preparo em equipes (TGPe). O objetivo nessa atividade é que você entenda o que é probabilidade condicional, probabilidade de eventos independentes e probabilidade binomial. Para isso, sugiro que se prepare de três formas:

1ª forma: Leia e faça todos os registros que julgar necessário, em seu caderno, as páginas 304 a 311 do livro parte II. Faça os exercícios e poste em tarefas no *teams*, conforme data e horário agendado pelo professor.

2ª forma: Entre nos links abaixo, assista aos vídeos sobre probabilidade e faça todos os registros complementares, vistos na 1ª forma, que julgar necessário, em seu caderno.

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=uo16XTg2CIQ (tempo: 9 minutos)

Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=VifuLscFmV0 (tempo: 13 minutos)

Vídeo 3: https://www.youtube.com/watch?v=gIEV5DG1AXw (tempo: 10 minutos)

3ª forma: Busque outras fontes na internet ou em livros, para se embasar melhor sobre o tema e cite tais fontes na entrega de seu trabalho.

Depois de ler sobre a matéria, assistir aos vídeos e fazer seus registros, poste no *Teams* o registro de tudo que você julgar importante sobre a matéria, conforme data e rubrica anexa. Essa atividade valerá 2 pontos.

Na entrega do trabalho você pode mostrar exemplos para a consolidação do conteúdo.

BOM TRABALHO!

ANEXO F – Atividade 4: 2ª Avaliação

Nome:			Nº
2ª série / Ensino Médio	Turma: A B	Disciplina: **MATEMÁTICA**	
Data: **17/11/2021**	Professor: **Edemilson Lemos Palmeira Júnior**		Nota:

Nessa atividade, você realizará o teste de garantia de preparo individual (TGPi) e terá 50 minutos para realizá-lo.

<u>Seguem as questões – (Valor: 3 pontos)</u>

Questão 1 (Valor: 0,5 pontos)

Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 12 rosas das quais 7 tem espinhos e o vaso B contém 11 rosas sendo que exatamente 5 não tem espinhos. Retira-se, aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. Calcule a probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos.

Fonte: https://www.floresonline.com.br/vaso-30-rosas-colombianas-importadas-vermelhas

Resolução:

Podemos tirar uma rosa do vaso B contendo espinhos, tendo tirado a primeira rosa do vaso A, contendo ou não espinhos, sendo assim, temos:

Tirando uma rosa de A que contém espinhos e depois uma de B que contém espinhos, a probabilidade é igual a

$$\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$$

Tirando uma rosa de A que não contém espinhos e depois uma de B que contém espinhos, a probabilidade é igual a

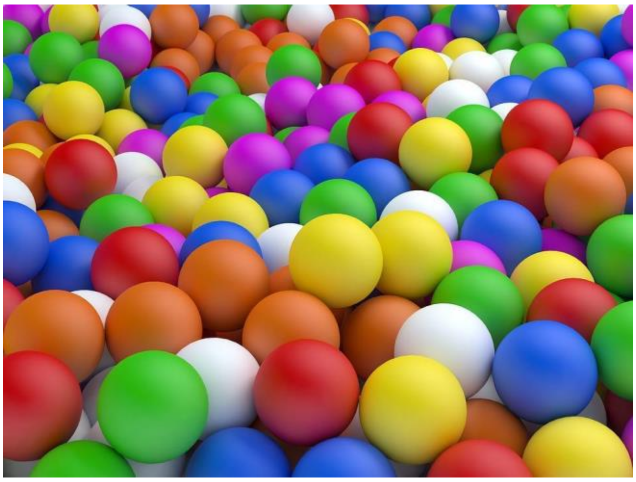
$$\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{30}{144}$$

Portanto, a probabilidade de se retirar uma rosa do vaso B e ela ter espinhos é de

$$\frac{49}{144} + \frac{30}{144} = \frac{79}{144}$$

Questão 2 (Valor: 0,5 pontos)

Em uma urna existem 12 bolinhas de cores diferentes, das quais sete têm massa de 300 gramas cada e as outras cinco têm massa de 200 gramas cada. Serão retiradas 3 bolinhas, sem reposição. Calcule a probabilidade de que a massa total das 3 bolinhas retiradas seja de 600 gramas.



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/12995060

Resolução:

Devemos considerar a retirada de 3 bolinhas de 200 g para que a massa total seja 600g. Portanto, a probabilidade P(A) pedida é

$$\mathrm{P(A)} = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P(A)} = \frac{1}{22}$$

Questão 3 (Valor: 0,5 pontos)

Uma prova de Matemática contém seis questões. Sabe-se que o aluno não se preparou para essa prova, de maneira que ele marcará aleatoriamente uma opção em cada uma das seis questões. Cada questão tem cinco opções de resposta, das quais somente uma é correta. Para ser aprovado ele precisa acertar pelo menos duas das seis questões, sendo assim, calcule a probabilidade desse aluno ser reprovado.

Resolução:

Para o aluno ser reprovado ele precisa errar todas ou errar 5 e acertar apenas 1. Então, a probabilidade é dada por

$$P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot 6 \;\rightarrow\; P(A) = \frac{4^6}{5^6} + \frac{4^5 \cdot 6}{5^6} \;\rightarrow\; P(A) = \frac{4^5 \cdot (4+6)}{5^6}$$

$$\rightarrow\; P(A) = \frac{2^{10} \cdot 10}{5^6} \;\rightarrow$$

$$P(A) = \frac{2^{10} \cdot 2}{5^5} \;\rightarrow\; P(A) = \frac{2^{11}}{5^5} \;\; ou \;\; P(A) = \frac{2048}{3125} \;\; ou \;\; P(A) = 65{,}5\%$$

Questão 4 (Valor: 0,5 pontos)

Um casal planeja ter 5 crianças. Calcule a probabilidade de que o casal tenha exatamente 3 meninos, dado que a primeira criança que nasceu é menino.

Fonte: https://www.vilavelha.es.gov.br/noticias/2019/10/festa-de-graca-para-as-criancas-em-cobilandia-27208

Resolução:

Se a primeira criança já é um menino, então, as outras 4, devem ser 2 meninos e 2 meninas.

Sendo assim, temos que

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_{4,2} \;\rightarrow\; \mathrm{P(A)} = \frac{1}{16} \cdot 6 \;\rightarrow\; \mathrm{P(A)} = \frac{3}{8}$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{3}{8}$.

Questão 5 (Valor: 0,5 pontos)

O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5% das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou tratar-se de um fumante.

Qual a probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino?

Resolução:

Se 70% dos funcionários são do sexo masculino, então 100% – 70% = 30% são do sexo feminino. Portanto, a probabilidade condicional pedida é igual a

$$P(A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05}{0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}7 \cdot 0{,}05} \rightarrow P(A) = \frac{0{,}015}{0{,}015 + 0{,}035} \rightarrow P(A) = \frac{0{,}015}{0{,}05} \rightarrow P(A) = \frac{3}{10}$$

Questão 6 (Valor: 0,5 pontos)

Uma escola de Ensino Médio fez uma pesquisa para conhecer as carreiras que os alunos escolheram para prestar o vestibular. A tabela a seguir apresenta as carreiras escolhidas pelos 160 estudantes entrevistados.

Carreira	Masculino	Feminino
Medicina	12	20
Direito	10	16
Publicidade	12	24
Letras	6	16
Outras	20	24

Um desses estudantes é escolhido ao acaso e sabe-se que ele é do sexo masculino. Calcule a probabilidade de este estudante ter escolhido Medicina.

Resolução:

Número de alunos do sexo masculino: 12 + 10 + 12 + 6 + 20 = 60.

Número de alunos do sexo masculino que escolheram medicina: 12.

A probabilidade de um aluno do sexo masculino ter escolhido medicina é igual a

$$P(A) = \frac{12}{60} \rightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

Critério de avaliação:

Assertividade das questões acima.

A nota final de cada aluno, será obtida por meio da média aritmética da avaliação individual com a avaliação em grupo.

ANEXO G – Atividade 5: Resolução de Problemas Complexos

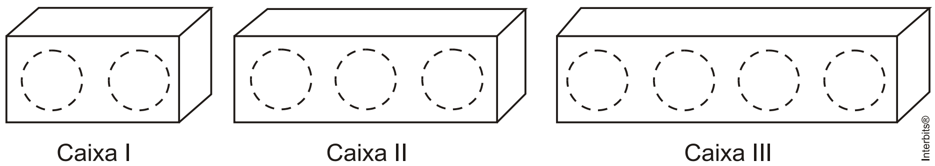
Nome:			Nº
2ª série / Ensino Médio	Turma: A B	Disciplina: **MATEMÁTICA**	
Data: **26/11/2021**	Professor: **Edemilson Lemos Palmeira Júnior**		Nota:

Nessa atividade, você realizará o teste de garantia de preparo em equipes (TGPe) e terá 50 minutos para realizá-lo.

Questão 1

Uma urna tem 9 bolas, cada uma marcada com uma das letras de A a I:

Esmeralda sorteia duas bolas para entrarem na caixa I, três bolas para entrarem na caixa II, e as quatro bolas restantes são colocadas na caixa III.



a) Qual é a probabilidade de que a bola A esteja na caixa I?

RESOLUÇÃO:

O espaço amostral será igual a 9!

O evento será igual a 2 x 8 x 7!

A probabilidade é dada por: $P(A) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7!}{9!} = \frac{2 \cdot 8!}{9 \cdot 8!} = \frac{2}{9}$

b) Qual é a probabilidade de que haja uma bola com vogal em cada caixa?

RESOLUÇÃO:

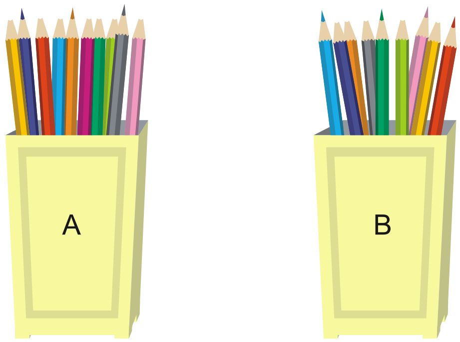
O espaço amostral será igual a 9!

O evento será igual a 3! x 6! x 2 x 3 x 4

A probabilidade é dada por: $P(A) = \frac{3! \cdot 6! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{9!} = \frac{6 \cdot 6! \cdot 24}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{6 \cdot 24}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 3}{9 \cdot 7} = \frac{2}{7}$

Questão 2

Em um escritório, há dois porta-lápis: o porta-lápis A, com 10 lápis, dentre os quais 3 estão apontados, e o porta-lápis B, com 9 lápis, dentre os quais 4 estão apontados.



Um funcionário retira um lápis qualquer ao acaso do porta-lápis A e o coloca no porta-lápis B. Novamente ao acaso, ele retira um lápis qualquer do porta-lápis B.

Calcule a probabilidade de que este último lápis retirado não tenha ponta.

RESOLUÇÃO:

Probabilidade do lápis retirado de **A** ser apontado **e** o lápis retirado de **B** não ter ponta:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100}$$

Probabilidade do lápis retirado de **A** não ter ponta **e** o lápis retirado de **B** não ter ponta:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{100}$$

Portanto, a probabilidade do último lápis retirado não ter ponta será dada por:

$$P = \frac{15}{100} + \frac{42}{100} = \frac{57}{100} = 0{,}57.$$

Questão 3

Um piloto de fórmula 1 tem 50% de chance de vencer uma corrida sob chuva, mas se não chover, suas chances caem para 25%. Os serviços de meteorologia estimam em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida. Sabendo que o piloto venceu, qual a probabilidade de ter chovido durante a competição?

RESOLUÇÃO:

Evento A: o piloto venceu a corrida

Evento B: choveu no dia da corrida

Temos que calcular P(B/A).

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O piloto tem 50% de chances de vencer a corrida se chover e a probabilidade de chover é 30%. O piloto tem 25% de chances de vencer a corrida se não chover e a probabilidade de não chover é 70%.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(B/A) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7} \quad \rightarrow \quad P(B/A)$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}175} \quad = 0{,}46$$

Logo, a probabilidade de ter chovido durante a corrida é de 46%.

ANEXO H – Questionário de sondagem final

Questionário de sondagem final sobre probabilidade

<table>
<tr><td colspan="4">Nome:</td><td>Nº</td></tr>
<tr><td colspan="2">2ª série / Ensino Médio</td><td>Turmas: A B</td><td colspan="2">Disciplina: MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td>Data: 22/11/2021</td><td colspan="3">Professor(a): Edemilson Lemos Palmeira Júnior</td><td></td></tr>
</table>

Caro aluno,

Este é o questionário final das nossas aulas sobre Probabilidades.

Como informado anteriormente, estas informações irão ser analisadas em minha pesquisa de mestrado e vocês não serão identificados em nenhum momento.

Muito obrigado pela contribuição, participação e interesse!

Professor Edemilson Lemos Palmeira Júnior (Pesquisador)

Professora Dra. Érica Marlúcia Leite Pagani (Orientadora)

1. Você gostou das aulas de probabilidade? As aulas atenderam às suas expectativas? Justifique suas respostas.

2. As aulas foram divididas em duas partes.
   Sobre a primeira parte: "Espaço amostral e evento, Probabilidade e Probabilidade da união de dois eventos", classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   a) Muito satisfeito(a).
   b) Satisfeito(a).
   c) Pouco satisfeito(a).

3. Sobre a segunda parte: "Probabilidade de eventos independentes e Probabilidade Condicional", classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   a) Muito satisfeito(a).
   b) Satisfeito(a).
   c) Pouco satisfeito(a).

4. Em relação a metodologia ativa (TBL) utilizada para desenvolver sua aprendizagem, classifique seu nível de satisfação e aprendizado.

   a) Muito satisfeito(a).
   b) Satisfeito(a).
   c) Pouco satisfeito(a).

5. Para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, você prefere

    a) o método tradicional.
    b) o método TBL.
    c) tanto faz.
    d) outro(s).

6. Se você marcou a letra (d) na pergunta anterior, descreva o método que julga melhor e cite porque você o acha melhor.

7. Sobre os vários tipos de Probabilidade, qual você achou mais interessante?

    a) Probabilidade simples
    b) Probabilidade da união de dois eventos
    c) Probabilidade condicional
    d) Probabilidade de eventos independentes

8. Em relação ao que você sabia sobre Probabilidade antes dessas aulas e agora, seu conhecimento

    a) continua o mesmo.
    b) aumentou significativamente.