FERNANDA GODOY DOS SANTOS

ENSINO DE CÔNICAS E PROPOSTAS DE ABORDAGEM DO TEMA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Fernando de Souza Bastos

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

S237e
2022

Santos, Fernanda Godoy dos, 1993-
Ensino de cônicas e propostas de abordagem do tema no ensino médio / Fernanda Godoy dos Santos. – Florestal, MG, 2022.
1 dissertação eletrônica (44 f.): il. (algumas color.).

Inclui apêndices.
Orientador: Fernando de Souza Bastos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2022.
Referências bibliográficas: f. 31.
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2022.007
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Configurações Unidimensionais. 4. Cônicas. 5. Estudo e Ensino. I. Bastos, Fernando de Souza, 1984-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 23. ed. 516.152

Bibliotecário(a) responsável: Kellen dos Santos Silva Barbosa CRB-6/ES 548

FERNANDA GODOY DOS SANTOS

ENSINO DE CÔNICAS E PROPOSTAS DE ABORDAGEM DO TEMA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de agosto de 2022.

Assentimento:

Fernanda Godoy dos Santos
Autora

Fernando de Souza Bastos
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos professores, em especial aos de matemática, que se encantam com a educação e acreditam que ela é a única forma de transformar o mundo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a Deus, por ter me dado força, me sustentado e me guiado para mais essa conquista.

Aos meus pais, Danielle da Silva Godoy e José Antônio dos Santos, meus primeiros mestres nessa vida, que me ensinaram os valores morais e éticos, com muito amor e dedicação, que sonharam junto comigo, me apoiaram em todos os momentos e sempre acreditaram em mim.

Ao meu marido, Nayan Domingues Teixeira, que sempre esteve ao meu lado, me apoiando e dando força para finalizar o curso. Agradeço pela paciência, e por me trazer paz na correria desse momento.

Ao meu orientador, Fernando de Souza Bastos, que me incentivou com toda dedicação, a concluir esta etapa, me auxiliando com paciência e sabedoria. Sou muito grata pela orientação competente e encorajadora durante a realização da dissertação.

Aos meus amigos do PROFMAT, com quem convivi e compartilhei as alegrias e angústias do curso. Que dividiam o lanche, toda sexta-feira para deixar a jornada mais leve. Em especial, agradeço a Carla Lobenwein, que me dava carona para Florestal, e me deixava em casa com segurança.

Aos meus familiares e amigos, que contribuíram, direta ou indiretamente para aumentar a minha motivação na realização do mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

SANTOS, Fernanda Godoy dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2022. **Ensino De Cônicas E Propostas De Abordagem Do Tema No Ensino Médio**. Orientador: Fernando de Souza Bastos.

Apesar da importância no ensino de Matemática e no desenvolvimento tecnológico, estudos apontam, que em geral, o estudo das Cônicas ocorre de maneira superficial e com fórmulas decoradas no Ensino Básico, o que dificulta o aprendizado dos estudantes. Visando oferecer práticas diferentes daquelas que vivenciamos no Ensino Básico, apresentamos alguns trabalhos e dissertações sobre o tema e selecionamos três abordagens para construirmos as Cônicas utilizando materiais manipuláveis, tais como, régua e compasso. A partir disso, produzimos três vídeos ilustrativos com base nas construções selecionadas com o objetivo de inspirar e facilitar o entendimento de professores interessados em aplicá-las em sala de aula. Produzimos também três Planos de Aula sobre a Elipse, Hipérbole e Parábola, utilizando dobradura, que poderá auxiliar na introdução do conteúdo, com o intuito de possibilitar a compreensão das Cônicas como lugar geométrico, com o objetivo de conduzir ao entendimento de sua forma algébrica. Além disso, desenvolvemos um aplicativo no Software R, que apresenta a partir da fórmula geral, a respectiva Cônica.

Palavras-chave: Cônicas. Ensino. Software R.

Abstract

SANTOS, Fernanda Godoy dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2022. **Teaching Conics and Proposals for Approaching the Theme in High School**. Adviser: Fernando de Souza Bastos.

Despite the importance of teaching Mathematics and technological development, studies show that, in general, the study of Conics occurs superficially and with decorated formulas in Basic Education, which makes it difficult for students to learn. In order to offer different practices from those we experience in Basic Education, some works and dissertations on the subject are presented and three approaches are selected to build the Conics using manipulable materials, such as ruler and compass. From this, three illustrative videos are produced based on the selected constructions in order to inspire and facilitate the understanding of teachers interested in applying them in the classroom. We also produced three Lesson Plans on the Ellipse, Hyperbole and Parabola, using folding, which can assist in the introduction of the content, in order to enable the understanding of conics as a geometric locus, in order to lead to the understanding of their algebraic form. In addition, we developed an application in Software R, which presents, from the general formula, the respective Conic.

Keywords: Conics. Teaching. R software.

Lista de Figuras

Sumário

Motivação

O desenvolvimento deste trabalho, tem como inspiração a minha trajetória escolar no ensino básico e superior, em relação ao ensino de Cônicas.

Fiz o Ensino Médio em uma escola da rede particular de Belo Horizonte, onde a maioria dos conteúdos matemáticos foram trabalhados de forma expositiva. Especialmente, o conteúdo de Cônicas, que precisam previamente dos conteúdos de Geometria Analítica bem consolidados, tais como: distância entre dois pontos, ou entre um ponto e uma reta. Tais assuntos foram ensinados com fórmulas prontas, aplicações direta e resolução de exercícios. Meu primeiro e único contato com a Geometria Analítica, ocorreu em 2010, quando cursava o terceiro ano do Ensino Médio, que hoje, denotamos como terceira série.

Em 2011, fui aprovada no vestibular da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) em Licenciatura em Matemática. As provas do vestibular ocorreram no final de 2010, quando concluía o Ensino Médio, e foi o primeiro ano que utilizaram o ENEM como a 1ª etapa da UFMG, pois nos anos anteriores a própria universidade que criava as provas da 1ª etapa de seu vestibular.

A mudança da primeira etapa gerou um desconforto muito grande em mim, pois a primeira etapa da UFMG era muito conteudista, e o ENEM já trazia a ideia de aplicar a matemática em questões cotidianas, além de ser uma prova muito extensa. Então, naquele primeiro momento, eu já senti a mudança do ensino de matemática no Brasil.

No primeiro período, do curso de Matemática, tive um conteúdo chamado Geometria Analítica e Álgebra Linear (GAAL), onde os professores já pré-estabeleciam que os estudantes tinham estudado Geometria Analítica no Ensino Médio. E novamente, o meu contato com as Cônicas foi puramente algébrico. Importante ressaltar que estamos falando sobre a formação de professores de Matemática. Lembro que apresentei muita dificuldade no conteúdo, pois tive que estudar o que perdi no Ensino Básico, para acompanhar o Ensino Superior.

Então, em 2015, cursei a disciplina obrigatória "Análise da Prática Pedagógica Estágio II", ministrada pela professora Teresinha Fumi Kawasaki. Esta disciplina é ofertada pela Faculdade de Educação (FAE) da Universidade Federal de Minas Gerais para o curso de licenciatura em Matemática e eu tive a oportunidade de fazer o estágio obrigatório no Colégio Técnico da UFMG (COLTEC), onde continuei trabalhando como monitora, recebendo bolsa da CAPES.

No estágio, acompanhei a professora Nora Olinda Cabrera Zúniga, em duas turmas da terceira série do Ensino Médio durante aproximadamente três meses. Nesse período, ela lecionou o conteúdo de Cônicas. E ela foi uma grande inspiração na explicação desses conteúdos para mim. Pois ela não colocava fórmulas prontas no quadro para os alunos decorarem e sim, construía o raciocínio matemático aos poucos até chegar no seu objetivo. Pude perceber que os alunos absorveram muito bem o conceito das Cônicas, as suas construções e sabiam aplicar o conceito no cotidiano das aulas.

Eu e duas colegas de classe do curso de Matemática, fizemos o estágio juntas no

COLTEC, e participamos de uma aula de hipérbole fantástica utilizando material manipulável. Mas achamos tão importante divulgar esse método, que criamos um artigo, para ser apresentado no Encontro Nacional de Educação Matemática, em São Paulo, em 2016, relatando a nossa experiência durante o estágio docente, na introdução do conteúdo de hipérbole na terceira série do Ensino Médio utilizando material manipulável.

Em 2019, ingressei no mestrado profissionalizante (PROFMAT) na Universidade Federal de Viçosa – Campus Florestal (UFV), que é um programa de pós graduação semi-presencial em Matemática, que tem como objetivo qualificar professores de Matemática em exercício na Educação Básica. Em 2020, o professor Fernando Bastos, me convidou para participar da VIII SEMAT, que é um evento realizado anualmente na UFV, que conta com a apresentação de palestras, mesa redondas, debates e apresentação de trabalhos criados pelos estudantes para discutirem temas relevantes na área de Matemática. Como em 2020, vivemos a pandemia de Covid-19, o evento foi totalmente online, assim, para a minha apresentação criei um vídeo que ensinava a construir uma parábola a partir de dobradura, como uma maneira de introduzir o conteúdo no Ensino Médio. Vários professores, estudantes da graduação e do mestrado assistiram e elogiaram bastante o método e relataram que não conheciam essa metodologia. Acredito que foi bastante construtivo na formação dos participantes da palestra.

Quando comecei a trabalhar com a dissertação do mestrado, eu tinha certeza que gostaria de trabalhar com esse tema, para pesquisar outras construções que podem ser utilizadas em sala de aula, reunir essas informações e auxiliar os professores que também buscam maneiras diferentes de trabalhar Cônicas com seus alunos.

Logo, apresento este trabalho que buscou tais objetivos. Espero poder contribuir com o ensino de Cônicas e com o ensino e aprendizagem de Matemática de forma prática.

Introdução

Existem alguns trabalhos e artigos que discutem a necessidade de transformar o ensino de Matemática, em algo mais concreto e prático, ou seja, mais ligado ao cotidiano, para que o aluno encontre sentido e aplicação naquilo que aprende e desenvolve em sala de aula. Nesse contexto, cabe ressaltar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) amplia e reforça os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que já se preocupavam em destacar a importância dessa transformação para um ensino mais prático. Então, apesar da reorganização dos conteúdos existentes na Base Nacional Comum Curricular, não houve a ruptura da visão sobre o tema Cônicas.

Para compreender essa discussão, é preciso ter em mente que a evolução do currículo do Ensino de Matemática ocorreu de forma gradual. De acordo com as informações contidas no portal do MEC (http://portal.mec.gov.br/), na década de 20, o ensino tinha um caráter elitista, marcado pela mecanização dos processos sem compreensão. Na década de 60, o ensino foi influenciado pela Matemática Moderna, em que a Matemática do Ensino Básico se aproximava da Matemática estudada pelos pesquisadores. E, apenas na década de 80, é que as reformas começaram a aproximar o ensino da Matemática aos aspectos sociais.

Atualmente, utilizamos a abordagem de conceitos e métodos sobre a perspectiva de resolução de problemas e a melhor forma de trabalhá-la é aproximando o "abstrato" do "concreto", o máximo possível. Como por exemplo, no Fundamental 2, o ensino de números fracionários, a partir da analogia com as fatias de uma pizza. Isso, pois, quando os livros didáticos trazem metodologias que desenvolvem a dialética entre o "concreto" e o "abstrato". Entendemos facilitar a compreensão do assunto e fazer mais sentido para o estudante.

Nesse aspecto, é relevante destacar que, diante de toda reorganização e adequação do conteúdo, pode-se observar que o conteúdo de Geometria Analítica segue sendo trabalhado no âmbito abstrato, sem nenhuma analogia com o que há de concreto. Na contramão da proposta estabelecida para todos os outros conteúdos que devem ser trabalhados como parte de uma ciência que contribui para solucionar problemas e não apenas repetir mecanicamente o algébrico.

Para desenvolver no aluno a capacidade de raciocinar matematicamente é fundamental que ele conheça bem os conceitos do que está sendo estudado, e observamos que os livros didáticos trazem fórmulas prontas e exercícios que não estimulam o raciocínio para o aluno descobrir em quais situações o conceito estudado pode ser aplicado no cotidiano.

Preocupados com o ensino das Cônicas no Ensino Básico buscamos observar como o assunto é tratado nos documentos oficiais. Percebemos que o ensino da Parábola, é encontrado na unidade temática de Álgebra, como a resolução de uma equação do segundo grau, entretanto, não é mencionada a sua importância geométrica, para o melhor entendimento do estudante.

As habilidades da BNCC a serem trabalhadas com os alunos, que podem ser associadas ao estudo da Parábola, são habilidades que pedem para resolver e elaborar problemas cujos modelos são funções polinomiais do 2° grau, para identificar padrões e criar conjecturas, para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é uma função polinomial de 2° grau do tipo $y = ax^2$. E o máximo que se aproxima da Geometria é a sua representação geométrica no plano cartesiano.

Nesse cenário, a única habilidade que menciona a palavra "Cônica", pede para investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a Cônica. Em que, novamente, não se explora o conceito e a definição. Ensinar Matemática de uma forma mais concreta, não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim, saber como que esses conceitos se relacionam nas situações de vivência às quais o aluno é, ou será submetido, ainda que estas relações sejam da própria Matemática. Em relação a isso, cabe ressaltar que o conteúdo de Cônicas é trabalhado em Física e Astronomia, por meio, por exemplo, da órbita dos planetas em volta do sol, que é elíptica. Nesse cenário, a parábola é utilizada para descrever o movimento de projéteis. No entanto, apesar de o estudante poder conseguir resolver questões que envolvam Cônicas na disciplina Física, ele pode apresentar dificuldade em associar essas questões da Física ao estudo de Cônicas, na Matemática.

Por fim, observamos que a BNCC orienta que o estudante trabalhe a investigação e formulação de argumentos que devam surgir a partir de experiências empíricas, com materiais concretos e a utilização de tecnologias digitais. Assim, entendemos que o estudante, por meio da investigação, deva criar conjecturas e construir argumentos que possa validá-las. A fim de contribuir com o ensino e a aprendizagem do conceito das "Cônicas" no Ensino Médio, utilizando a competência específica 5 da Base Nacional Comum Curricular

> "Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas."(BRASIL, 2018).

Este trabalho tem por objetivo geral, investigar propostas de abordagem sobre o ensino de Cônicas e a partir disso oferecer um material de apoio ao professor para tratar o tema. Serão disponibilizados três Planos de Aula para introduzir o conteúdo, três videoaulas ensinando a construir as Cônicas a partir de materiais manipuláveis e além disso, pretende-se ainda, disponibilizar um *dashboard* interativo para visualização de algumas Cônicas construídas a partir de suas equações gerais.

Cônicas: Contexto Histórico e Definições

"*A filosofia está escrita em um grande livro que está diante dos nossos olhos, e este, é o universo, mas não poderemos entender este livro sem antes não aprendermos a linguagem e compreendermos os símbolos no qual está escrito. Este livro está escrito em linguagem matemática. Sem a qual nos perderemos em vão por um labirinto escuro.*" (Galileo Galilei)

De acordo com Roque e Carvalho (2012), alguns historiadores acreditam que as Cônicas sugiram na Grécia antiga a partir da solução do famoso problema da duplicação dos cubos que consistia em desenhar a duplicação de um cubo utilizando apenas régua e compasso. Era necessário que o volume do novo cubo deveria ser duas vezes o volume do cubo original.

Ainda, de acordo com os mesmos autores, pesquisadores da época sugeriram algumas soluções, para o problema da duplicação dos cubos, como por exemplo, Hipócrates de Quios (470 a.C – 410 a.C). Porém, matemáticos gregos consideraram que a sua sugestão para encontrar a solução era tão difícil quanto o problema original.

Após Hipócrates, o matemático Arquitas (428 a.C – 347 a.C) encontrou uma solução utilizando seções Cônicas e cilindros, no entanto, apesar de ser uma solução não utilizava apenas régua e compasso. E logo, Menecmo (380 a.C – 320 a.C) encontrou a solução usando a interseção de duas Cônicas, sendo importante ressaltar que na época não existia uma definição analítica para Cônicas. A solução de Menecmo é geométrica, sem os simbolismos algébricos conhecidos hoje, mas teve um papel importante, afinal a partir de sua solução que as Cônicas apareceram na matemática.

Apolônio de Perga (262 a.C – 190 a.C) foi o primeiro matemático a reunir o estudo das Cônicas. Ele considerou uma superfície Cônica circular, não necessariamente reta e interceptou a superfície com um plano de várias inclinações. Assim, observou que se encontra uma parábola ao interceptar a superfície Cônica paralelamente a geratriz, também se encontra uma elipse ao interceptar uma única folha da superfície na horizontal e pode se encontrar uma hipérbole ao interceptar as duas folhas da superfície. Após esse estudo, até o século XVI não se descobriu nada sobre as Cônicas.

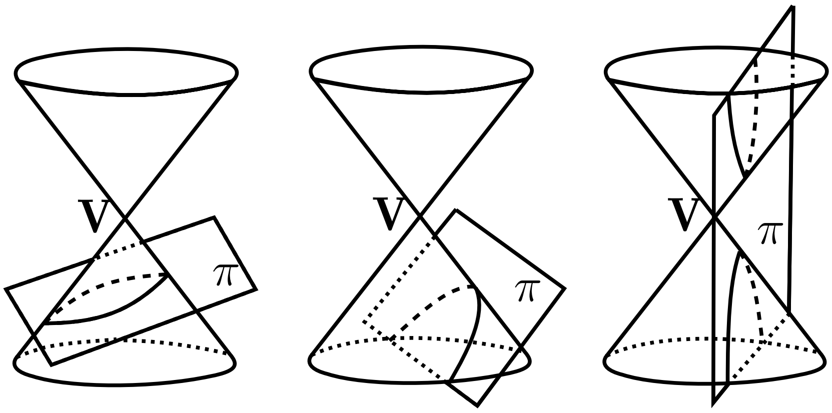
No século XVI Girard Desargues (1591 -1661) estudando sobre perspectiva fez um trabalho importante que propõe uma teoria unificada das Cônicas trabalhando em projeções. Por muito tempo as Cônicas foram estudadas a partir da secção de um plano por uma superfície Cônica, então Philippe de la Hire (1640 -1768) inovou o estudo ao trabalhar com as Cônicas no plano a partir dos seus focos, como utilizamos atualmente. Neste trabalho já era utilizada a geometria analítica de Descartes.

De acordo com Roque e Carvalho (2012) o objetivo de Descartes era utilizar a geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, na qual regras simples de composição levassem dos objetos simples a outros mais complexos. Por razões puramente geométricas, era necessário algebrizar a geometria. Depois de Philippe de la Hire, trabalhar com as Cônicas a partir de seus focos, Ruggero Giuseppe Boscovich (1711 – 1787), padre jesuíta, da Croácia que definiu as Cônicas a partir da sua excentricidade. E finalmente

Germinal Pierre Dandelin (1794 -1847) criou o Teorema de Dandelin, que foi bastante utilizado nos livros didáticos da educação básica.

O Teorema de Dandelin diz que a secção de um cone circular reto por um plano que não passe pelo vértice, é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Abaixo, é possível observar a Figura 3.1 que representa tal Teorema.

Figura 3.1: Secção Cônica que apresenta a Elipse, a Hipérbole e a Parábola. Base para a demonstração do Teorema de Dandelin



As Cônicas formadas a partir da secção do Cone Circular Reto por um plano, visto na Figura 3.1, podem ser definidas conforme apresentado no que segue.

Para definirmos as Cônicas como lugar geométrico, utilizaremos a definição de distância entre dois pontos a seguir.

Definição 3.1: $dist(P,Q)$ é a distância entre os pontos P e Q.

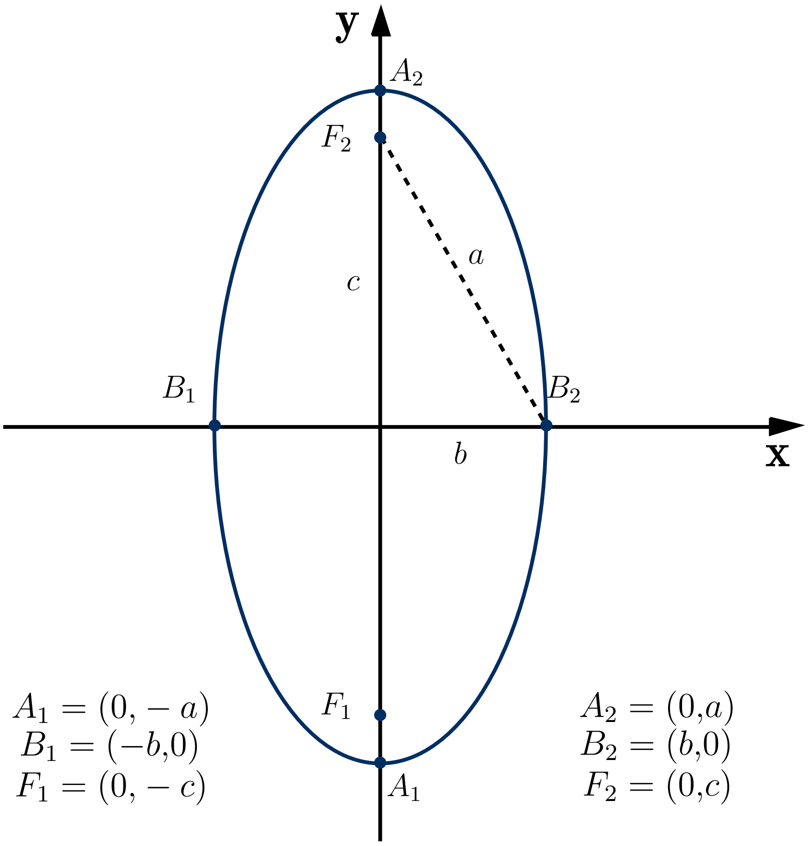
Elipse

Definição 3.2: A Elipse é o conjunto dos pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante, ou seja, se $dist(F_1,F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos P tais que:

$$dist(P,F_1) + dist(P,F_2) = 2a, \text{em que } a > c > 0$$

.

Figura 3.2: Elipse com foco nos pontos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0,c)$



De maneira prática, temos que:

> "Uma elipse pode ser desenhada se fixarmos as extremidades de um barbante de comprimento $2a$ nos focos e esticarmos o barbante com uma caneta. Movimentando-se a caneta, mantendo o barbante esticado, a elipse será traçada." (SANTOS, 2014)

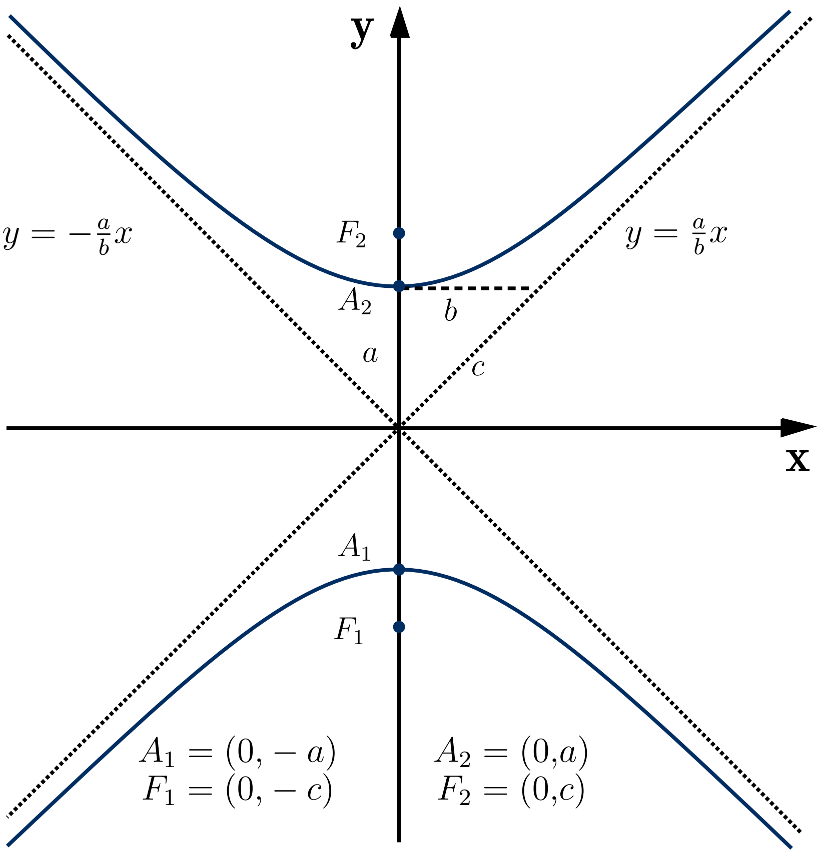
Hipérbole

Definição 3.3: A hipérbole é o conjunto dos pontos P no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos $F1$ e $F2$ (focos) é constante, ou seja, se $dist(F1,F2) = 2c$, então a hipérbole é o conjunto dos pontos P tais que

$$|dist(P,F_1) - dist(P,F_2| = 2a, \text{em que } a < c$$

De acordo com Santos (2014), podemos desenhar uma parte de um ramo de uma hipérbole ao fixar uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos então, a extremidade de um barbante (de comprimento igual da régua menos $2a$) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte do ramo da hipérbole será traçada.

Figura 3.3: Hipérbole com focos F1= (0,-c) e F2 = (0,c)



Parábola

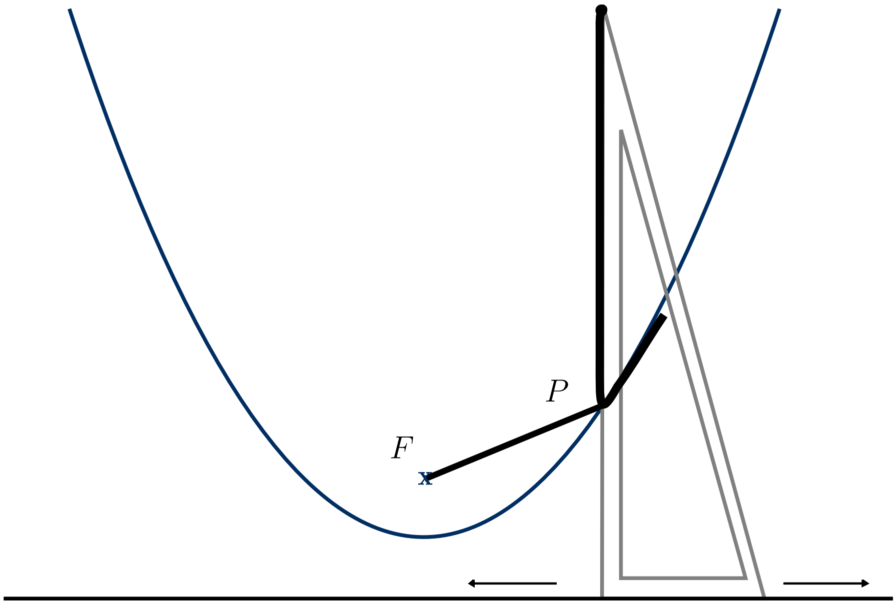
Definição 3.4: A parábola é o conjunto dos pontos P no plano equidistantes de uma reta r (diretriz) e um ponto F (foco), não pertencente a r, ou seja, a parábola é conjunto dos pontos P tais que

$$dist(P,F) = dist(P,r)$$

De maneira prática temos que,

> "Podemos desenhar uma parte da parábola da seguinte forma. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz), no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela, uma parte da parábola é traçada" (SANTOS, 2014)

Figura 3.4: Conjunto dos pontos $P = (x,y)$ tais que $dist(P,F) = dist(P,r)$



Equação Geral das Cônicas

Na seção anterior definimos as Cônicas a partir da definição de lugar geométrico. Nesta seção iremos demonstrar a equação geral.

Chamamos de Cônica o conjunto de pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem a equação do segundo grau com duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.1}$$

Esta equação se diz completa quando todos os coeficientes A, B, C,D,E, F são não nulos. Temos em (3.1),

- três termos do segundo grau: $Ax^2 + Bxy + Cy^2$;
- dois termos do primeiro grau: Dx e Ey;
- um termo independente: F.

Definição 3.5: Denomina-se Cônica o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja a razão entre as distâncias a um ponto fixo F e uma reta fixa d é igual a uma constante não negativa e. O ponto fixo é chamado de foco, a reta de reta diretriz e a razão constante e é a excentricidade da Cônica. Quando $e = 1$ a Cônica é chamada de parábola, quando $0 < e < 1$ de elipse e quando $e > 1$ de hipérbole.

Para iniciarmos a demonstração da equação geral das Cônicas, considere que em um sistema de coordenadas cartesianas, temos que um ponto $P(x, y)$ pertence a uma Cônica se, e somente se,

$$\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{a^2+b^2}} = e, \tag{3.2}$$

em que, $F(x_0,y_o)$ é o foco, $d : ax+by+c = 0$ é a diretriz e e é uma constante não negativa. Se $k^2 = \frac{e^2}{a^2+b^2}$, temos:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = k^2|ax+by+c|^2 = (kax+kby+kc)^2. \tag{3.3}$$

Substituindo $l = ka$, $m = kb$ e $n = kc$ obtemos a equação focal das Cônicas

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (lx+my+n)^2 = 0, \tag{3.4}$$

em que, x_0 e y_0 são as coordenadas do foco e $lx+my+n = 0$ é a equação da reta diretriz. Observamos que,

$$\begin{aligned}
&(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (lx+my+n)^2 = 0 \Rightarrow \\
&(1-l^2)x^2 + (-2lm)xy + (1-m^2)y^2 + [-2(x_0+ln)]x + [-2(y_0+mn)]y+ \\
&\qquad + (x_0^2+y_0^2-n^2) = 0.
\end{aligned}$$

Considerando $A = 1-l^2$, $B = -2lm$, $C = 1-m^2$, $D = -2(x_0+ln)$, $E = -2(y_0+mn)$ e $F = x_0^2+y_0^2-n^2 = 0$, obtemos a equação (3.1), conforme abaixo,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{3.5}$$

A equação (3.1) é denominada Equação Geral das Cônicas. Variando os valores das constantes A,B,C,D,E e F podemos obter pontos, retas, circunferências, parábolas, elipses e hipérboles.

Revisão de Literatura sobre Cônicas e Construções Práticas

Neste capítulo, analisamos algumas dissertações e reunimos construções práticas para que os professores possam utilizar em sala de aula, propondo atividades que contribuam para a compreensão do conceito e dos elementos das Cônicas.

Analisamos os trabalhos de Lopes (2011), Gonçalves (2012), Naralina Viana Soares da Silva (2013), Calvoso (2014), Nascimento (2015), Tenani, Silveira e Uribe (2015), Melo (2016), Soares (2016), Moro (2017), Wellington Sergio da Silva (2017) e Fonseca, Lutz e Leivas (2019).

O objetivo da dissertação de Lopes (2011) foi auxiliar os professores da Educação Básica, no estudo das Cônicas. Ele apresentou a construção de cada Cônica utilizando materiais manipuláveis, tais como, esquadro e um fio extensível. Além disso, ele descreveu a história das Cônicas e apresentou um estudo destas curvas no plano sob os aspectos geométricos e analíticos. Assim como Lopes (2011), Gonçalves (2012), sugeriu uma proposta para introduzir as Cônicas, na terceira série do Ensino Médio, ela defende que quando relacionamos o ensino de Cônicas utilizando a tecnologia, podemos obter uma melhor compreensão do conteúdo. Ela sugere em sua dissertação, três investigações matemáticas, sendo uma proposta investigativa para cada Cônica, utilizando o Software GeoGebra.

A utilização do Software GeoGebra, é recomendada pelos autores de textos acadêmicos da área de Matemática, principalmente, quando trabalhamos com Cônicas. Naralina Viana Soares da Silva (2013), por exemplo, desenvolveu uma sequência didática abordando o tema, fundamentada nos registros das representações semióticas, com contribuições da geometria dinâmica. Utilizando o GeoGebra, ela construiu a Elipse, Hipérbole e Parábola, utilizando o conceito de lugar geométrico. Deduziu suas definições, e por fim fez suas respectivas parametrizações. Proporcionando ao estudante, uma sequência didática que trabalha com a imagem da Cônica utilizando a tecnologia e a sua definição formal.

Calvoso (2014) também acredita, que o uso da tecnologia pode deixar o conteúdo mais atrativo, para os estudantes da terceira série do Ensino Médio. Segundo ele, o conteúdo tem pouco tempo para ser trabalhado de acordo com a base curricular de São Paulo e, por isso, é tratado de forma superficial e genérica com os estudantes. Assim, ele criou uma sequência didática utilizando o GeoGebra e escreveu algumas curiosidades sobre as suas aplicações, na Astronomia, Acústica e Arquitetura, afim de conquistar o interesse pelas Cônicas.

A autora Nascimento (2015), concorda com o Calvoso (2014), quando ele relata que o conteúdo é trabalhado de forma superficial. Para ela, os livros tratam o conteúdo de maneira algébrica e os docentes, muitas vezes, não possuem o domínio e desconhecem as aplicações do assunto. Ou seja, há muitas dificuldades para transmitir aos estudantes a importância desses conceitos. Em sua dissertação, ela propõe uma reflexão sobre o estudo das Cônicas mostrando sua relação com outras áreas da matemática, trazendo aplicações reais e, no final, sugere uma oficina para os professores trabalharem com as Cônicas de forma lúdica e construtivista. As atividades propostas nessa oficina permitem a construção de seções Cônicas (elipse, hipérbole e parábola) por meio do software GeoGebra, dobraduras em papel, e também, por meio de materiais concretos.

É possível observar que a preocupação com a forma que o conteúdo é trabalhado é discutido em textos acadêmicos e podemos reunir várias metodologias para auxiliar os professores em suas práticas docentes, seja com tecnologia ou materiais manipuláveis. Tenani, Silveira e Uribe (2015), escreveram um trabalho com atividades diversificadas buscando a construção do conhecimento, sem perder o formalismo matemático. Eles apresentaram a construção das Cônicas a partir de dobraduras, afim de auxiliar os professores a introduzir o conteúdo teórico.

Soares (2016), escreveu de forma mais abrangente sobre as Cônicas. Além de escrever sobre a história, selecionou algumas aplicações, assim como, construções práticas e propostas para o uso em sala de aula. Em suas construções, ele utilizou materiais manipuláveis tais como: cola, tesoura, barbante, emburrachado e também o software GeoGebra para exemplificar as propriedades refletoras tanto exploradas em sua dissertação.

Apesar de todas as recomendações de uso da tecnologia existem autores que discutem a dificuldade de inserí-la em sala de aula. Melo (2016), por exemplo, acredita que um dos grandes desafios dos professores de matemática hoje, é inserir a tecnologia em suas aulas. Ainda sim, em seu artigo apresentado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, ela discute possibilidades de explorar o conteúdo das Cônicas a partir do Software GeoGebra. O objetivo de seu trabalho foi promover um ensino mais inovador e prático, descrevendo as construções da Elipse, Hipérbole e Parábola no GeoGebra.

Seguindo o raciocínio que o uso da tecnologia pode ajudar no ensino e aprendizagem de Matemática, Wellington Sergio da Silva (2017) também utilizou o GeoGebra em sua dissertação. Ele acredita que o formalismo exagerado e a presença de ideias abstratas da Matemática, sejam os principais motivos da dificuldade dos estudantes no Ensino Básico. Segundo ele, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, tem sido utilizada em muitas áreas de ensino, especificamente no ensino da Geometria e se pode observar muitas vantagens com ela. Em sua dissertação, ele faz uma pesquisa bibliográfica sobre a Teoria e, desenvolve uma sequência didática para o ensino de Cônicas no plano utilizando o Software GeoGebra. Por fim, aplica a sequência em uma turma da terceira série do Ensino Médio e descreve os resultados.

Existem várias dissertações relacionadas ao ensino de Matemática que utilizam práticas com dobraduras. Moro (2017), mostra em sua dissertação de mestrado, que a dobradura pode ajudar e ser um diferencial no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, pois essa metodologia desenvolve a concentração, estimula a criatividade e concretiza uma ideia. Ela descreve a construção de vários conteúdos matemáticos, como por exemplos, dos principais polígonos regulares, tetraedro e algumas aplicações aritméticas.

Semelhante a Moro (2017), Fonseca, Lutz e Leivas (2019), apresentaram no XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, um artigo propondo a construção da Elipse, Hipérbole e Parábola com dobradura, para que os estudantes entendam e compreendam a definição das Cônicas como um lugar geométrico, levando assim, ao entendimento de sua fórmula algébrica.

Conseguimos então, observar que vários autores indicam metodologias diferentes para serem trabalhadas em sala de aula, sendo as principais, o uso da tecnologia, dobradura e material concreto. Sabemos que pode ser difícil para o professor encontrar recursos adequados à sua prática pedagógica, seja pela estrutura disponível na escola em que trabalha, ou por ter alguma dificuldade em lidar com o tema.

Sendo assim, na tentativa de auxiliar o ensino de Cônicas, elaboramos três vídeos, mostrando a construção da Elipse, Parábola e Hipérbole, que poderão ser utilizados por professores em suas práticas pedagógicas e que podem ajudar na abordagem do tema, tornando assim, o ensino de Cônicas mais concreto e dinâmico.

Resultados

Neste capítulo iremos apresentar os produtos de nossa pesquisa que foram divididos em três partes: Dobraduras, Comprovações Matemáticas em relação as dobraduras e um aplicativo capaz de plotar graficamente as Cônicas a partir de sua equação geral.

5.1 Dobraduras

Inicialmente, criamos três vídeos que mostram as construções práticas da Elipse, Hipérbole e Parábola apresentadas na dissertação de Nascimento (2015). Elas podem ser acessadas a partir dos links a seguir:

Construção da Elipse Por Dobradura - https://youtu.be/JtWHhDNP99c,

Construção da Hipérbole Por Dobradura - https://youtu.be/5_0y8lHY4Xk e

Construção da Parábola Por Dobradura - https://www.youtube.com/watch?v=VFOR-qCs4mM

Também criamos três Planos de Aula utilizando as dobraduras apresentadas nos vídeos. Eles estão descritos no Apêndice 1, sendo o Plano de Aula 1, a construção da Elipse, o Plano de Aula 2, a construção da Hipérbole, e o Plano de Aula 3, a construção da Parábola. Os Planos de Aula servem para auxiliar a introdução do conteúdo de Cônicas nas turmas da terceira série do Ensino Médio.

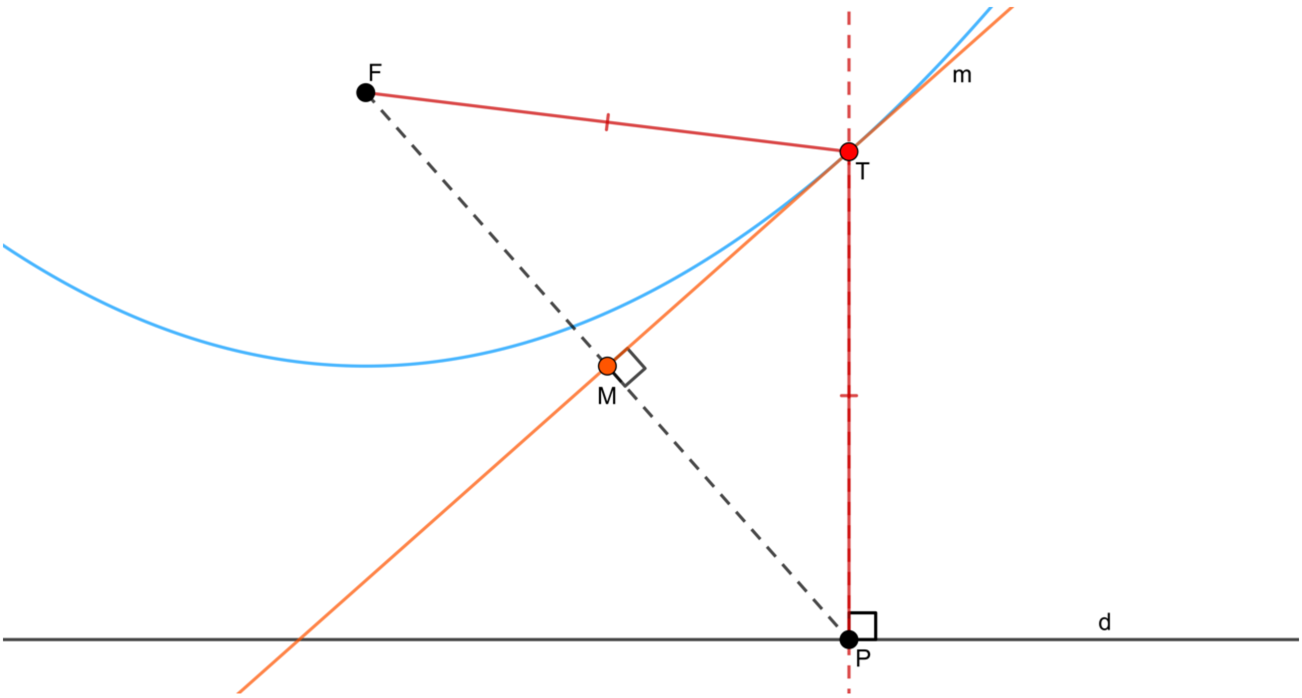
5.2 Comprovações Matemáticas

Para comprovarmos que as dobraduras apresentadas neste capítulo formam as respectivas Cônicas, apresentamos nas seções abaixo demontrações matemáticas dos argumentos utilizados nas construções práticas da Parábola, Elipse e Hipérbole.

5.2.1 Construção da Parábola

1. Ao dobrar a folha de forma que o ponto P coincida com o ponto F, temos que a marca da dobra será a mediatriz de P e F, que denotaremos por m.

Figura 5.1: Mediatriz de P e F

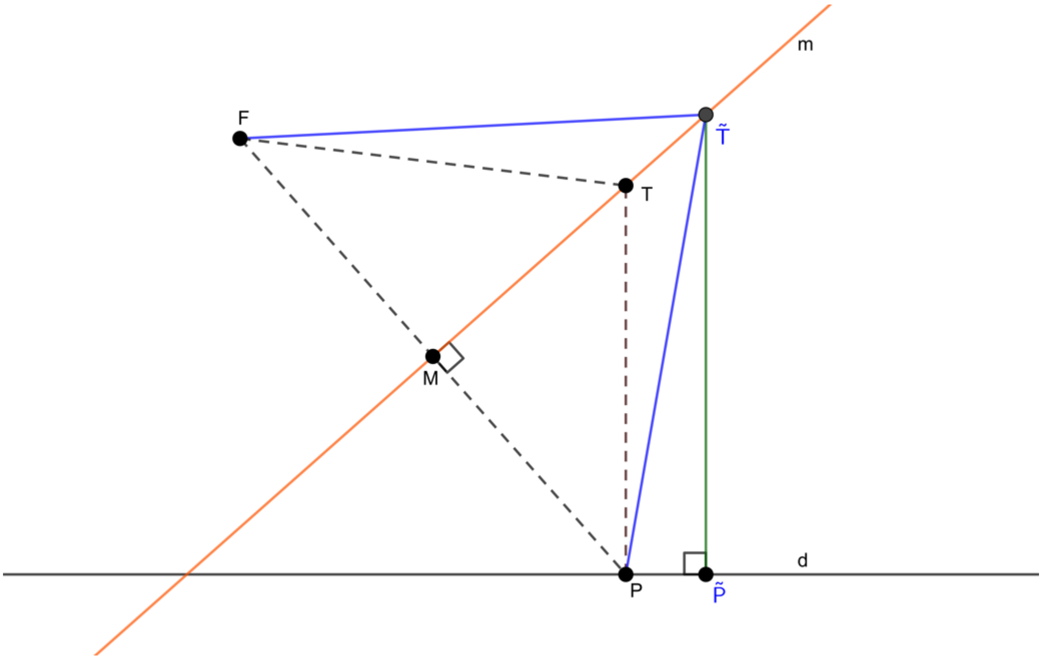


2. Queremos verificar que m é tangente a parábola de foco F e diretriz d.

2.1 Seja $T \in m$ tal que $\overline{TP} \perp d$ e seja $M = \overline{FP} \cap m =$ ponto médio de F e P.
Temos, $\triangle TMF \cong \triangle TMP$ pelo caso LAL:
$$\begin{cases} T\widehat{M}F = T\widehat{M}P = 90^\circ \\ \overline{MF} = \overline{MP} \end{cases}$$
Logo, $\overline{TF} \equiv \overline{TP}$. Assim, T está na parábola.

2.2 Agora, iremos verificar que T é único. Então pegaremos um ponto diferente de T e mostraremos que ele não está na parábola.
Seja $\widetilde{T} \in m$, tal que, $\widetilde{T} \neq T$ e seja $\widetilde{P}$ a projeção de $\widetilde{T}$ sobre d.

Figura 5.2: A projeção de $\widetilde{T}$ sobre d



Como $\widetilde{T} \neq T$, temos que $\widetilde{P} \neq P$.

E de maneira análoga ao caso anterior, temos que $\overline{\widetilde{T}F} = \overline{\widetilde{T}P}$ e o triângulo $\widetilde{T}P\widetilde{P}$ é retângulo em $\widehat{P}$.

Logo, $\overline{\widetilde{T}\widetilde{P}} < \overline{\widetilde{T}P} \Rightarrow \widetilde{T}$ não está na parábola.

Dessa maneira provamos que a reta m é tangente a parábola.

Isso vale para qualquer ponto P que se inicie a dobradura. E a medida que variamos o ponto P apareceram feixes de retas tangentes, que formarão a envoltória da parábola.

5.2.2 Construção da Elipse

1. Ao dobrar a folha de forma que o ponto P coincida com o ponto F_2, temos que a marca da dobra será a mediatriz de P e F_2, que denotaremos por m.

2. Considere C o círculo de centro F_1 e raio r.

3. Seja ε a elipse com focos F_1 e F_2 e eixo maior igual ao raio do círculo.

   Queremos mostrar que m é tangente a ε

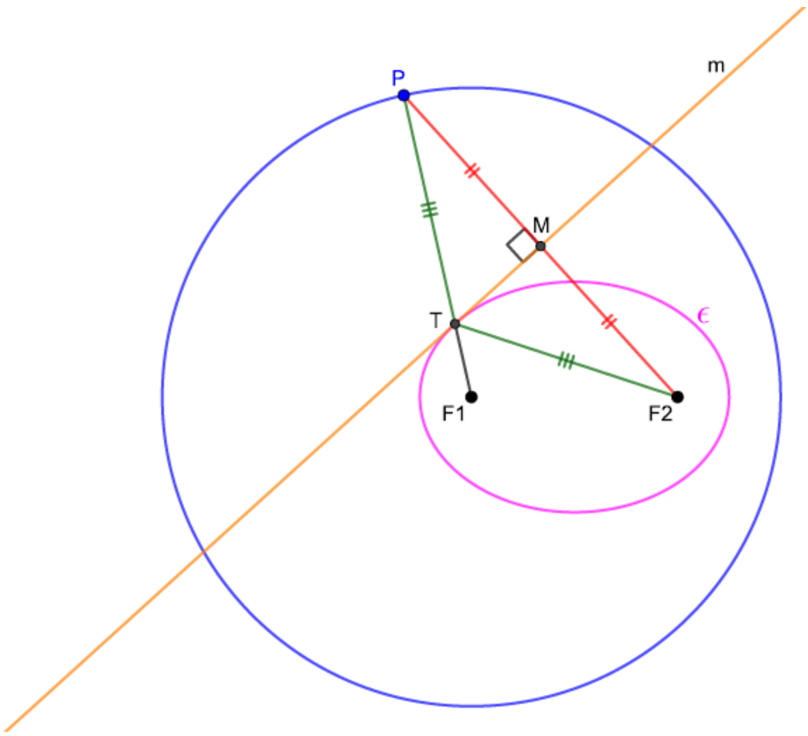
   (a) Seja $T = \overline{F_1P} \cap m$ e $M \in m$ o ponto médio de F_2 e P.

   Notamos que $\Delta PMT \cong \Delta F_2MT$ pelo caso LAL

   $$\begin{cases} T\widehat{M}F_2 = T\widehat{M}P = 90^\circ \\ \overline{MF_2} = \overline{MP} \end{cases}$$

   Logo, $\overline{TF_2} = \overline{TP}$. Portanto temos: $\overline{TF_1} + \overline{TF_2} = \overline{TF_1} + \overline{TP} = \overline{F_1P} =$ raio, então por definição $T \in \epsilon$.

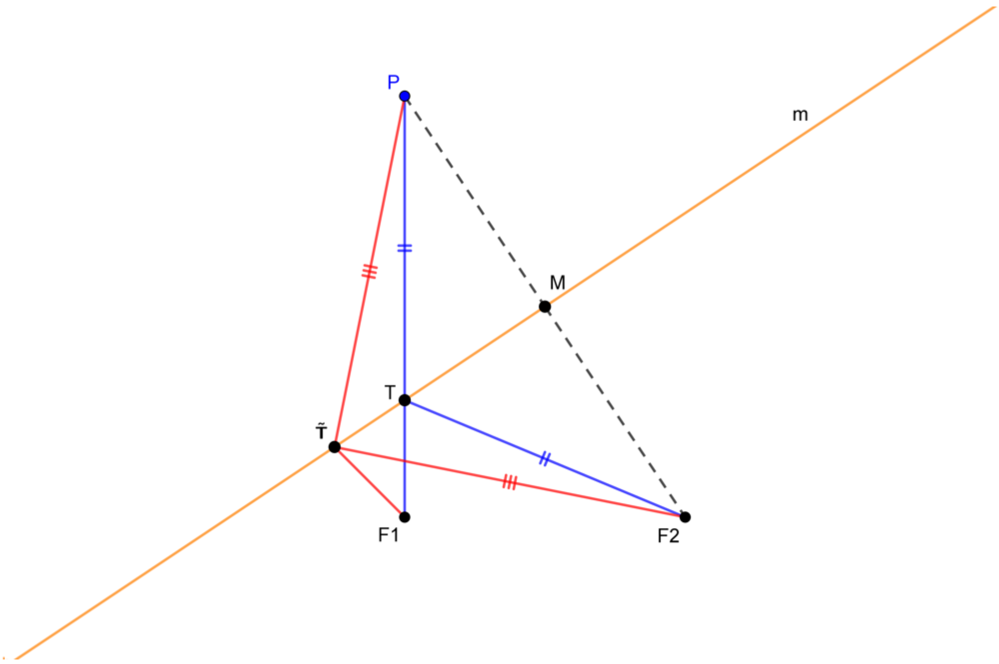
Figura 5.3: Elipse ε com focos F_1 e F_2



Dessa forma, encontramos um ponto de m que está na Elipse, para provar que é o ponto de tangência, vamos mostrar que ele é único.

2.2. Seja $\widetilde{T} \neq T$ um ponto de m, queremos verificar que $\widetilde{T} \notin \epsilon$, ou seja, $\overline{\widetilde{T}F_1} + \overline{\widetilde{T}F_2} \neq$ raio $= \overline{TF_1} + \overline{TF_2}$

Figura 5.4: Representação da congruência dos triângulos $\Delta\widetilde{T}MF_2$ e $\Delta\widetilde{T}MP$



Notamos que $\overline{\widetilde{T}P} = \overline{\widetilde{T}F_2}$ pois os triângulos $\Delta\widetilde{T}MF_2$ e $\Delta\widetilde{T}MP$, são congruentes, pelo caso LAL.

Temos que $\overline{\widetilde{T}F_1} + \overline{\widetilde{T}F_2} = \overline{\widetilde{T}F_1} + \overline{\widetilde{T}P}$.

Note que pela desigualdade triangular $\overline{\widetilde{T}F_1} + \overline{\widetilde{T}P} > \overline{PF_1} =$ raio.

Logo, $\widetilde{T} \notin \epsilon$.

Dessa maneira, provamos que m é tangente a ϵ.

Isso vale para qualquer ponto P que se inicie a dobradura. E a medida que variamos o ponto P apareceram feixes de retas tangentes, que formarão a envoltória da elipse.

5.2.3 Construção da Hipérbole

1. Ao dobra a folha de forma que o ponto P coincida com o ponto F_2, temos que a marca da dobra será a mediatriz de P e F_2, que denotaremos por m.

2. Considere C o círculo de centro F_1 e raio r.

3. Seja H a hipérbole com focos F_1 e F_2 e distância entre os vértices igual ao raio do círculo.

4. Queremos mostrar que m é tangente a H.

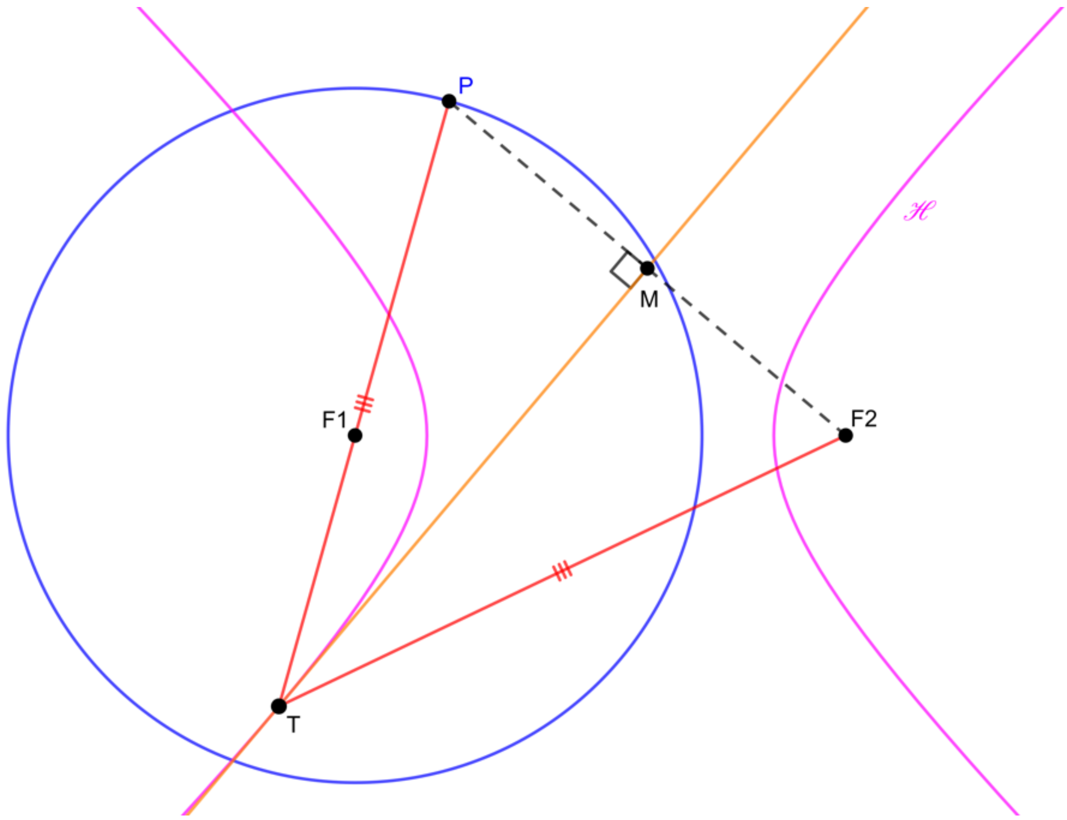
5. Seja $T = m \cap \overline{F_1P}$ e $M \in m$, ponto médio de F_2 e P.

   Os triângulos ΔF_2MT e ΔPMT são congruentes pelo caso LAL.

   $$\begin{cases} T\widehat{M}F_2 = T\widehat{M}P = 90^\circ \\ \overline{MF_2} = \overline{MP} \end{cases}$$

   Logo, $TF_2 = TP$

Figura 5.5: Representação da congruência dos triângulos ΔF_2MT e ΔPMT

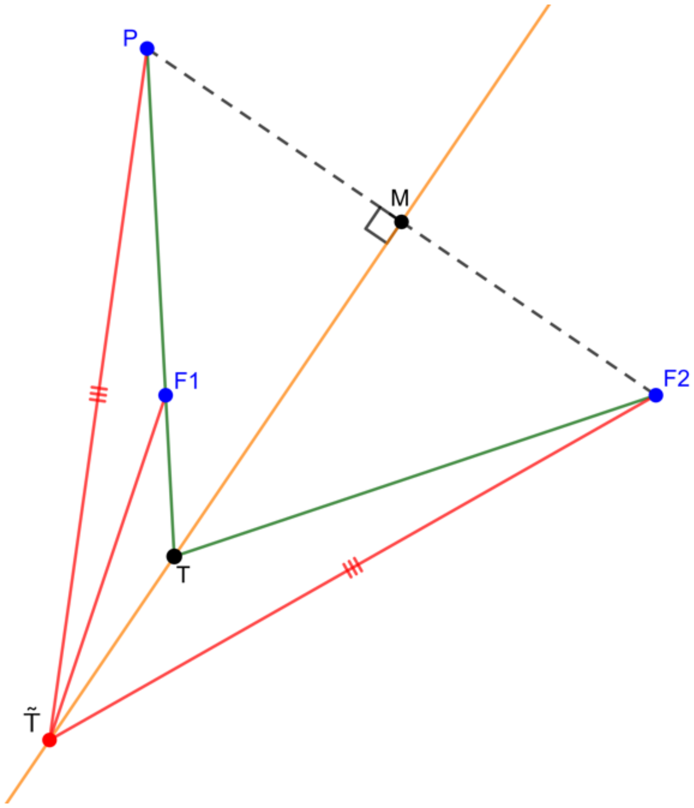


Então, $|\overline{TF_2} - \overline{TF_1}| = |\overline{TP} - \overline{TF_1}| =$ raio $\Rightarrow T \in H$.

Agora, iremos mostrar que ele é único.

6. Seja $\widetilde{T} \neq T, \widetilde{T} \in m$. Queremos mostrar que $\widetilde{T} \notin H$. Ou seja, que $|\overline{\widetilde{T}F_2} - \overline{\widetilde{T}F_1}| \neq$ raio $= |\overline{TF_2} - \overline{TF_1}|$

Figura 5.6: Representação da congruência dos triângulos $\Delta\widetilde{T}MP$ e $\Delta\widetilde{T}MF_2$



Notamos que $\overline{\widetilde{T}P} = \overline{\widetilde{T}F_2}$ pois $\Delta\widetilde{T}MP \cong \Delta\widetilde{T}MF_2$, pelo caso LAL.

Então, pela desigualdade triangular, temos que, $|\overline{\widetilde{T}F_2} - \overline{\widetilde{T}F_1}| = |\overline{\widetilde{T}P} - \overline{\widetilde{T}F_1}| < \overline{PF_1} =$ raio.

Logo $\widetilde{T} \notin H$.

Dessa maneira, provamos que m é tangente a hipérbole.

Isso vale para qualquer ponto P que se inicie a dobradura. E a medida que variamos o ponto P apareceram feixes de retas tangentes, que formarão a envoltória da hipérbole.

5.3 Aplicativo Para a Construção de Gráficos de Cônicas a Partir da Equação Geral

Finalizamos nossas propostas de abordagem das Cônicas, fornecendo um aplicativo construído na linguagem R que pode ser um recurso para auxiliar os professores em suas aulas, afinal o uso da tecnologia desempenha um papel importante no processo de ensino e aprendizagem.

O aplicativo construído na linguagem R com o uso do pacote Shiny pode ser acessado no link https://works.shinyapps.io/Conicas/, é gratuito e livre para uso. Ele é capaz de plotar graficamente as Cônicas a partir dos coeficientes de sua equação geral, dessa maneira acreditamos que ele possa enriquecer a abordagem do conteúdo.

É um aplicativo de fácil manuseio, basta clicar em “Gráficos”, na parte superior esquerda, colocar os coeficientes em seus respectivos campos e o gráfico da Cônica será criado automaticamente. Para utilizá-lo o usuário deve ter um conhecimento prévio sobre a equação geral de cada Cônica, e então, poderá observar as propriedades de cada curva e analisar diferenças.

O Link pode ser aberto pelo computador ou celular e para utilizá-lo é necessário somente acesso à internet. À seguir, iremos mostrar sua tela inicial e um exemplo de gráfico formado.

Figura 5.7: Página Inicial do Aplicativo para Geração do Gráfico de Cônicas via coeficientes da Equação Geral.

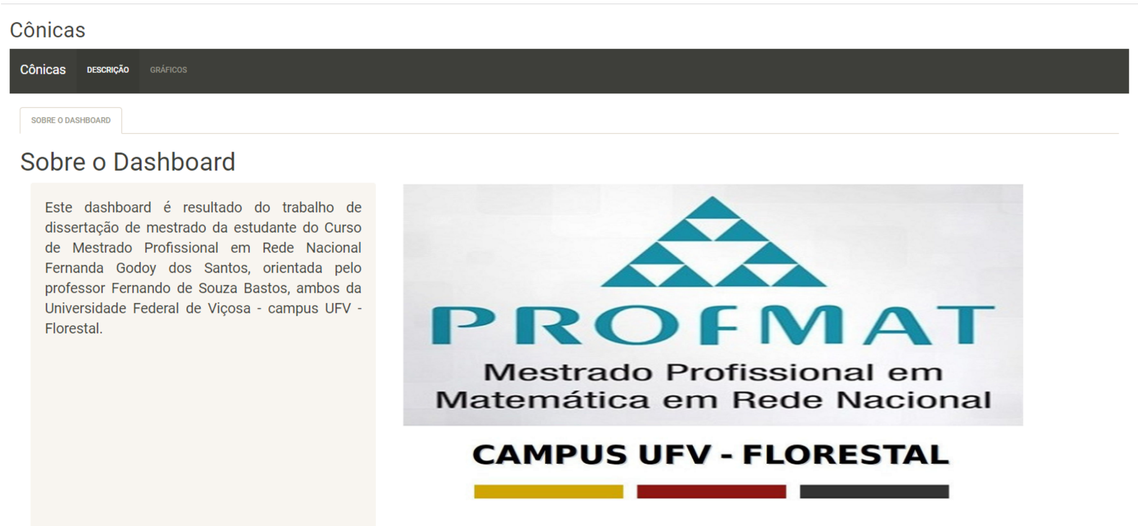
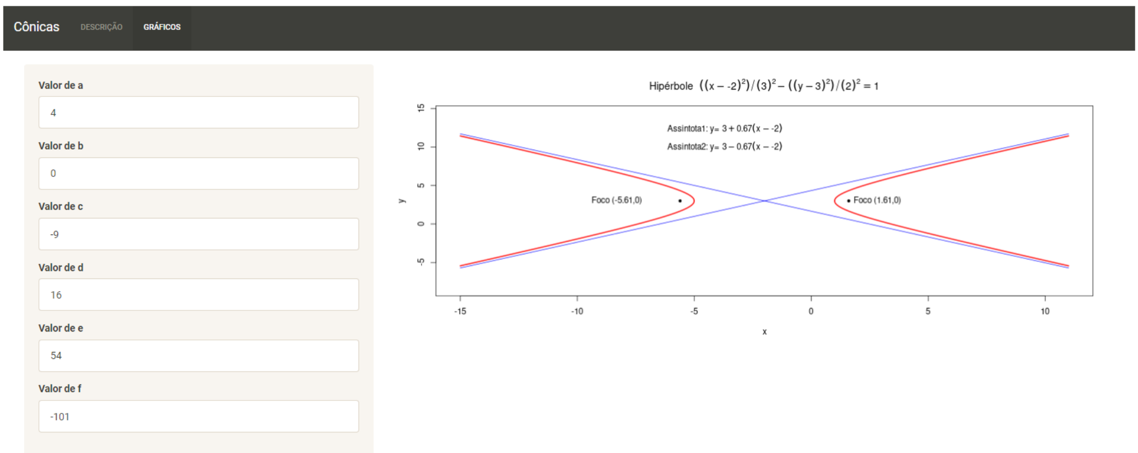


Figura 5.8: Gráfico da Hipérbole Gerada no Aplicativo a Partir da Escolha de Alguns Coeficientes da Equação Geral



Considerações Finais

Podemos observar nas dissertações analisadas, que o ensino de Cônicas, tem sido bastante discutido por professores da área de Matemática. Em maioria, esses estudos buscam metodologias variadas e ativas, utilizando materiais manipuláveis ou tecnologia, para auxiliar os professores na abordagem do conteúdo. O nosso objetivo foi reunir algumas dissertações com construções práticas das Cônicas, para facilitar a busca de metodologias práticas para os professores interessados em utilizar novas práticas na introdução do conteúdo.

Afim de atingir nossos objetivos com este trabalho que foi o de oferecer a professores formas de abordagens das Cônicas, a partir da nossa revisão de literatura criamos Planos de Aula e videoaulas nos quais trabalhamos a construção de cada Cônica, por meio do conceito de lugar geométrico, utilizando dobradura. Os Planos de Aula podem ser encontrados nos Apêndices dessa dissertação e as videoaulas foram carregadas no *Youtube*. Os links dessas videoaulas podem ser encontrados no Capítulo 5, Resultados.

Também comprovamos por demonstrações matemáticas, que as dobraduras apresentadas nos Planos de Aula realmente formam a Elipse, a Hipérbole ou a Parábola, para que os professores que utilizarem a metodologia possa compreender a fundamentação matemática do processo.

Além disso, algumas das referências bibliográficas discutem sobre o desafio do uso da tecnologia nas aulas de Matemática, então exploramos alguns recursos do software R, na criação de um aplicativo gratuito, que pudesse contribuir para uma abordagem mais dinâmica, visual e tecnológica. O aplicativo desenha a Cônica a partir dos coeficientes da equação geral e possibilita o aluno a plotar diversas curvas, observar os conceitos e propriedades de cada Cônica.

Sugerimos que os professores não se restrinjam à forma de abordagem do tema utilizando apenas os Planos de Aula e o aplicativo criado nesse trabalho, mas utilizem a dobradura para definir a ideia de lugar geométrico e utilizem o aplicativo como ferramenta para representar graficamente as figuras e analisar suas diferenças, talvez isso possa contribuir de forma significativa na aprendizagem dos estudantes.

Por fim, esperamos que as abordagens apresentadas nessa dissertação sejam úteis e sirvam como referência para os professores planejarem aulas mais dinâmicas e criativas e, além disso, sirvam como uma forma de motivação para que a troca de experiência possa enriquecer o ensino e aprendizagem de Matemática.

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 10 out. 2020.

Calvoso, Julio César. **Estudo das Cônicas Com Aplicações e o Software Geogebra Como Ferramenta de Apoio Didático**. 2014. Diss. (Mestrado) – Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Fonseca, Jussara Aparecida; Lutz, Maurício Ramos; Leivas, José Carlos Pinto. **Desenvolvendo o Conceito de Cônicas a Partir de Dobraduras**. 2019. Diss. (Mestrado) – Universidade Franciscana.

Gonçalves, Jaqueline Mendes. **As Secções Cônicas Abordadas Em Duas Estratégias De Ensino Utilizando O Aplicativo Geogebra**. 2012. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba.

Lopes, Juracélio Ferreira. **Cônicas e Aplicações**. 2011. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho".

Melo, Rayane de Jesus Santos. O Ensino das Cônicas Com Auxílio do Software Geogebra, 2016.

Moro, Ana Cecília Del. **Geometria das dobraduras e aplicações no Ensino Médio**. 2017. Diss. (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Nascimento, Ana Carolina Rabello. **Uma abordagem dinâmica e atual para o ensino das Cônicas na Educação Básica**. 2015. Diss. (Mestrado) – Universidade de Brasília.

Roque, Tatiana; Carvalho, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

Santos, Reginaldo J. Um curso de geometria analítica e álgebra linear. **Belo Horizonte: Imprensa Universitária**, 2014.

Silva, Naralina Viana Soares da. **Cônicas e suas diferentes representações**. 2013. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Silva, Wellington Sergio da. **Uma Proposta Didática Para o Ensino das Cônicas à Luz da Aprendizagem Significativa de David Ausubel**. 2017. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Campina Grande. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Soares, Allan de Sousa. **Cônicas Construções Atividades e Aplicações**. 2016. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual Do Sudoeste da Bahia. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Tenani, Lucas Ribeiro de Sousa; Silveira, Crhristoffer Lucas Bezão; Uribe, Eugenia Brunilda Opazo. Ensino De Cônicas e a Arte das Dobraduras, 2015.

Apêndice 1

Neste capítulo são apresentados os Planos de Aula sobre a construção via dobraduras da Elipse, Hipérbole e Parábola. Os planos de aula também podem ser acessados pelo link: https://www.overleaf.com/read/drpptwtbzvph.

8.1 Plano de Aula 1 - Elipse

UFV Universidade Federal de Viçosa

PLANO DE AULA: Construção da Elipse utilizando dobradura

Plano 1 de uma sequência de 3 planos.

Autora: Fernanda Godoy dos Santos

Orientador: Fernando de Souza Bastos

Habilidade da BNCC: (EM13MAT509) *Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.*

Objetivos específicos: Construir o conceito de Elipse como lugar geométrico no plano cuja a soma da distância a dois pontos fixos desse plano é constante.

Ano: 3ª Série do Ensino Médio

Tempo de Duração: 1h/a – 50 minutos.

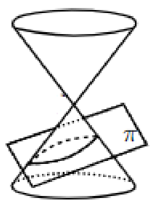
Recursos Necessários:

- Metade de uma Folha (Preferencialmente papel vegetal para que a dobradura fique mais visível)
- Lápis;
- Régua;
- Compasso.

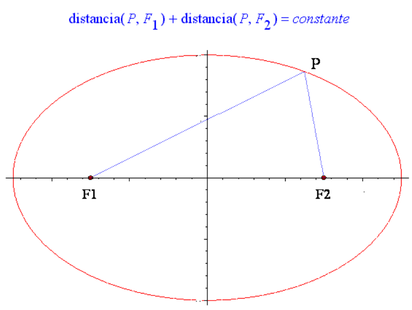
Conhecimento prévio: Distância entre dois pontos.

Procedimento:

Devemos introduzir explicando que a elipse é formada a partir da interseção de um plano com a superfície lateral de um cone, que não passa pelo vértice, não pode ser paralela à reta diretriz do cone e deve cortar apenas uma das folhas da superfície, como mostra a figura a seguir:

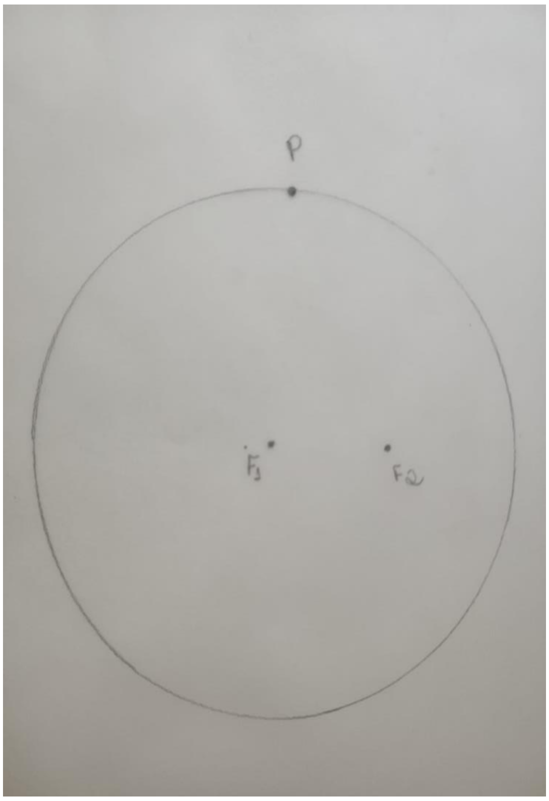


Podemos definir a Elipse sendo lugar geométrico no plano cuja a soma da distância a dois pontos fixos desse plano é constante. Ou seja, a Elipse é caracterizada pelo conjunto de pontos *P* do plano, cuja a soma das distâncias *PF1* e *PF2* é constante.

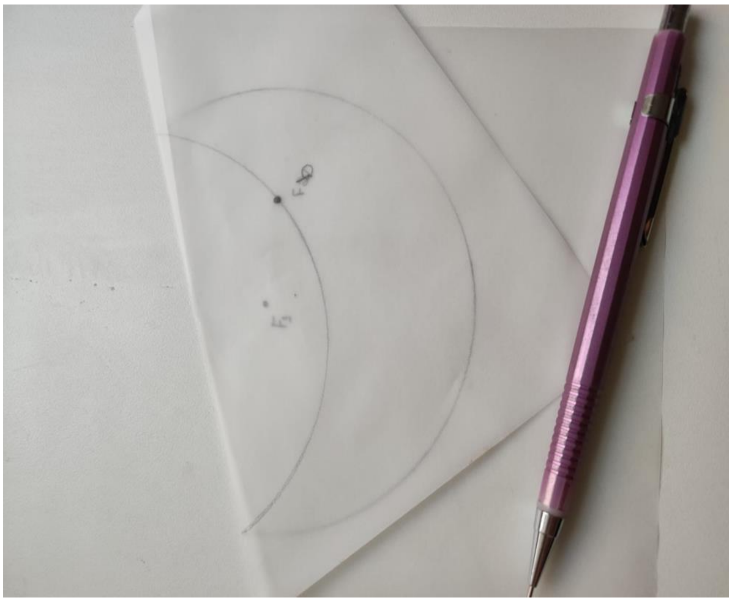


1. Desenhe uma circunferência, utilizando o compasso e marque o centro. Denotarei por *F1.*

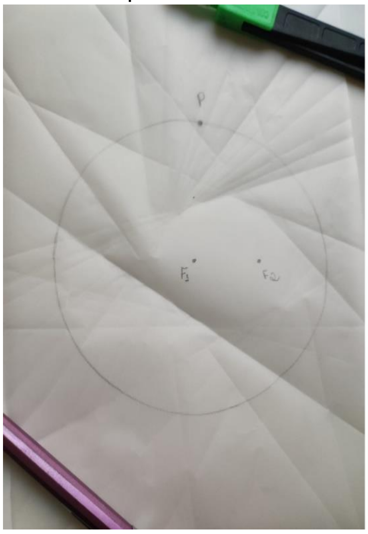
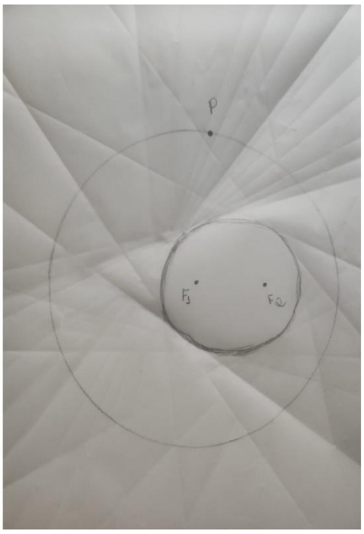
2. Marque um ponto fixo no interior do círculo, diferente do centro. Denotarei por *F2*. Esses pontos serão os focos da curva. E marque um ponto *P,* pertencente à circunferência.



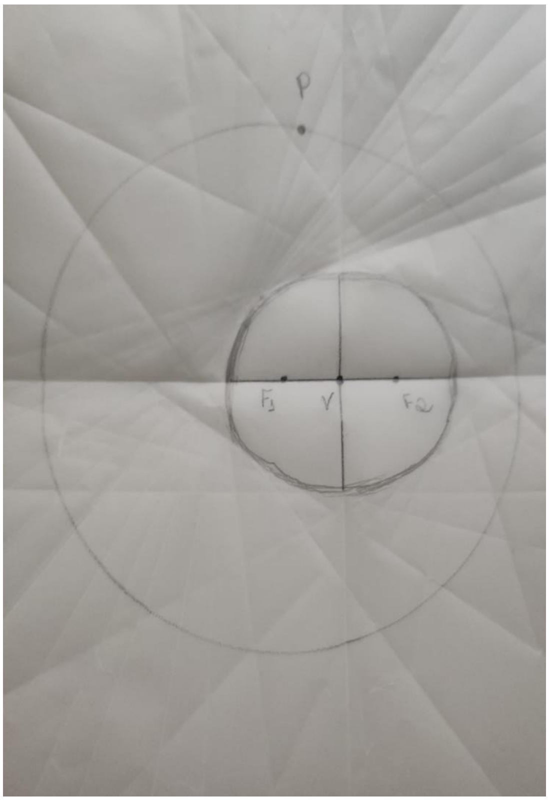
3. O ponto *P* será o nosso ponto de partida. Efetue uma dobra de forma que F2 coincida com o ponto *P.*



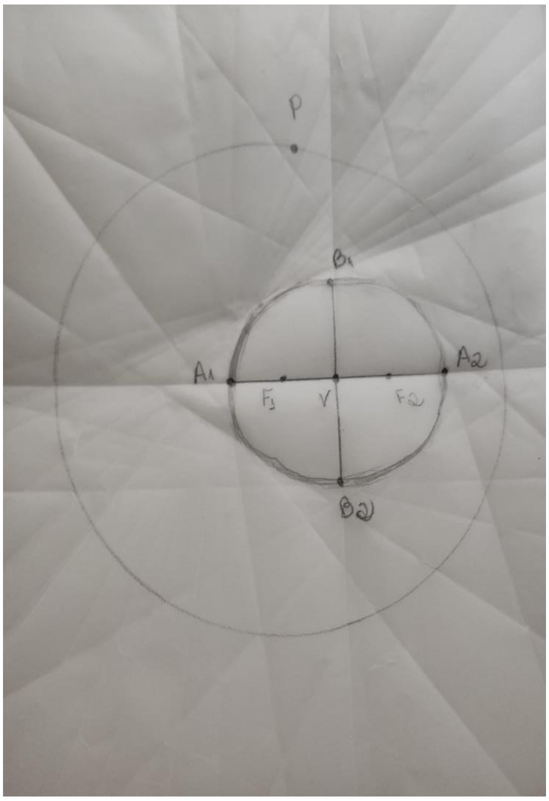
4. Devemos escolher alguns pontos da circunferência e sobrepô-los ao foco *F2*, dobrando o papel vegetal a cada ponto escolhido. Faça o mesmo processo com o máximo de pontos possíveis.
5. Abra o papel vegetal, e você poderá perceber a elipse dentro da circunferência inicial. Com o lápis, contorne a Elipse.

6. Para identificar os elementos da Elipse, realize as dobras que passa pelos focos para obter a reta focal. Com o lápis, marque a reta focal.
7. Efetue a dobra que faz com os focos se tornem coincidentes para obter a reta não focal. Desenhe a reta não focal.



8. Marque o ponto de interseção entre as retas focal e não focal para obter o centro da elipse.
9. Marque os pontos de interseção entre a curva e a reta focal para obter os vértices *A1* e *A2.*
10. Marque os pontos de interseção entre a curva e a reta não focal para obter os vértices *B1* e *B2.*



8.2 Plano de Aula 2 - Hipérbole

UFV Universidade Federal de Viçosa

PLANO DE AULA: Construção da Hipérbole utilizando dobradura

Plano 2 de uma sequência de 3 planos.

Autora: Fernanda Godoy dos Santos

Orientador: Fernando de Souza Bastos

Habilidade da BNCC: (EM13MAT509) *Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.*

Objetivos específicos: Construir o conceito de Hipérbole como lugar geométrico no plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante em valor absoluto.

Ano: 3ª Série do Ensino Médio

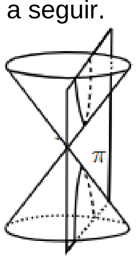
Tempo de Duração: 1h/a – 50 minutos.

Recursos Necessários:

- Metade de uma Folha (Preferencialmente papel vegetal para que a dobradura fique mais visível)
- Lápis;
- Régua;
- Compasso.

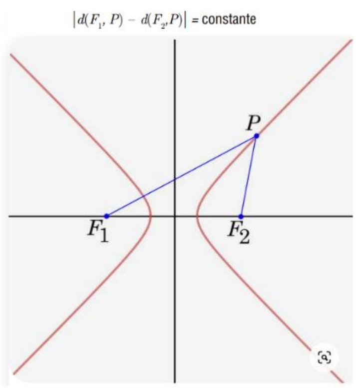
Conhecimento prévio: Distância entre dois pontos.

Procedimento:
Devemos introduzir explicando que a hipérbole é formada a partir da interseção de um plano paralelo ao eixo de um cone, que não contém o vértice, com as duas folhas de uma superfície cônica, como mostra figura a seguir.

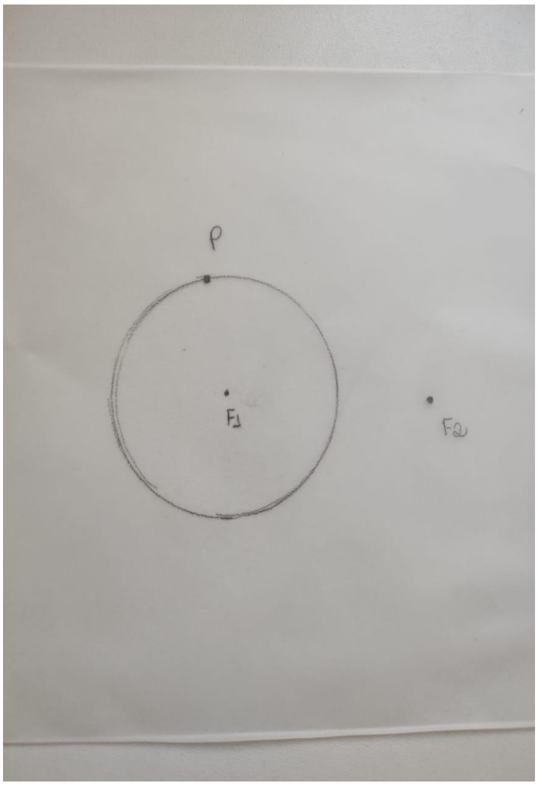


Podemos definir a Hipérbole sendo o lugar geométrico dos pontos no plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante em valor absoluto.

Fixando dois pontos distintos *F1* e *F2* de um plano, a hipérbole pode ser definida como o conjunto dos pontos desse plano cuja diferença, em módulo, das distâncias de cada um deles até *F1* e *F2* seja um valor constante menor que a distância *F1F2.*

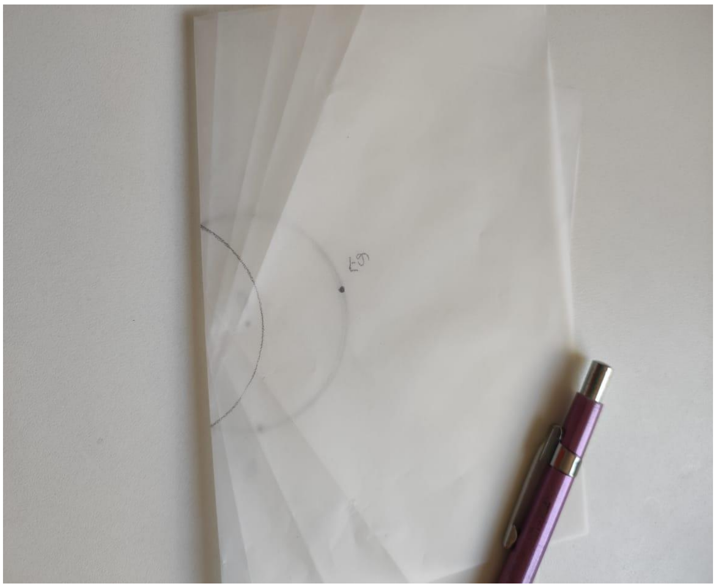


1. Desenhe uma circunferência, utilizando o compasso e marque o centro. Denotarei por *F1.* Marque um ponto fixo no exterior do círculo. Denotarei por *F2*. Esses pontos são os focos da curva. Escolha também um ponto de partida pertencente à circunferência, que denotarei por *P*.

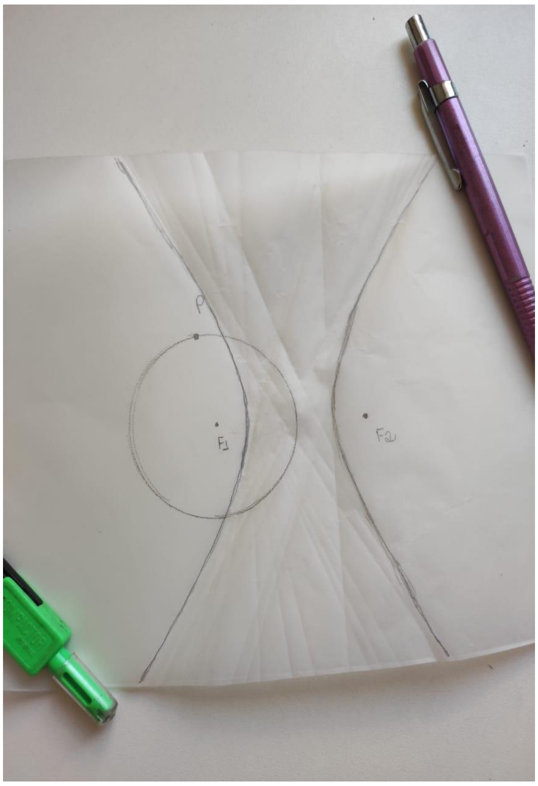


2. Efetue uma dobra de forma que *F2* coincida com o ponto *P*.

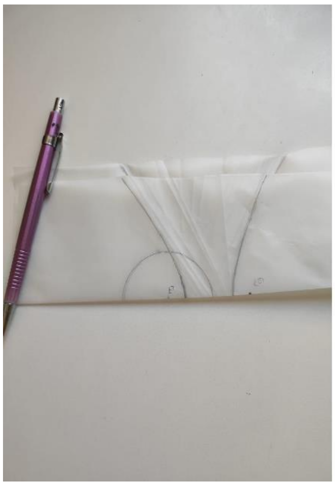
3. Faça o mesmo processo com o máximo de pontos possíveis, percorrendo por toda circunferência.

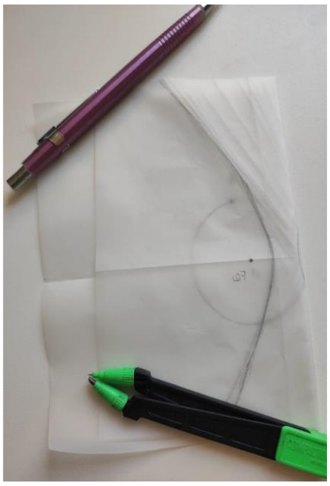


4. Abra o papel vegetal, e você poderá perceber a Hipérbole. Com o lápis, contorne-a.

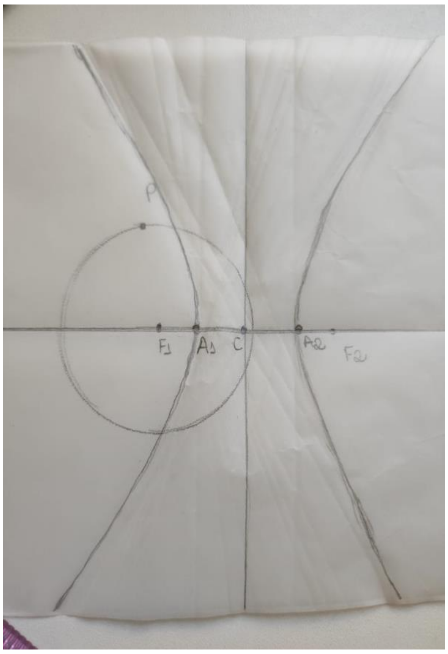


5. Para identificar os elementos da hipérbole, realize as dobras que passa pelos focos para obter a reta focal e efetue a dobra que faz com os focos se tornem coincidentes para obter a reta não focal.

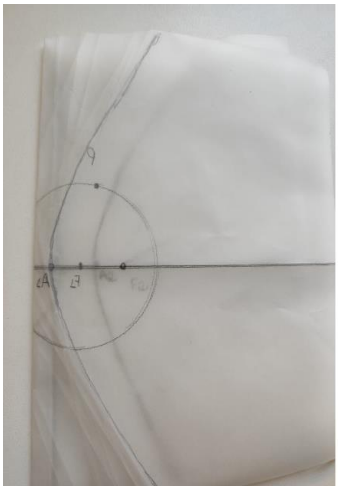


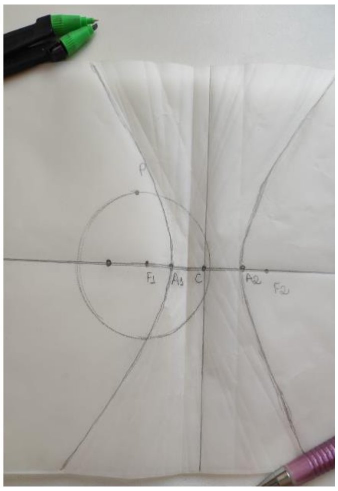


6. Com o lápis, desenhe a reta focal e não focal. Marque também os pontos de interseção entre a curva e a reta focal para obter os vértices *A1* e *A2.*
   E marque o ponto de interseção entre as retas focal e não focal para obter o centro da Hipérbole.



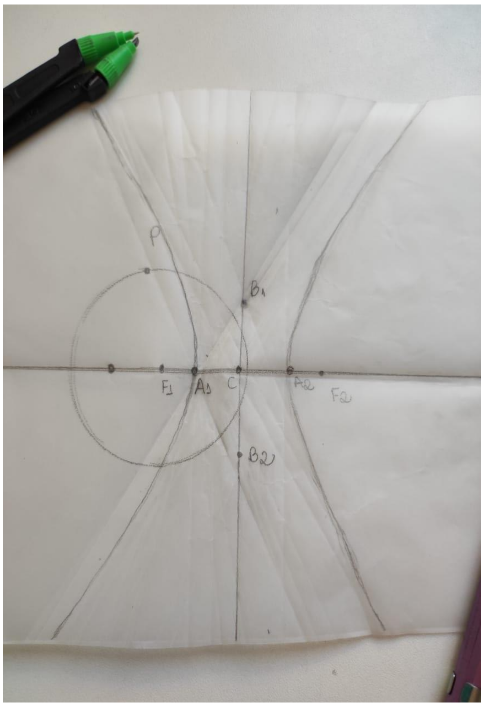
7. Para obter os vértices *B1* e *B2*, faça uma dobra de forma que o centro *C* coincida com o vértice *A1* e marque o ponto em que o foco *F2* incide na reta focal.





8. Faça duas possíveis dobras que passam por *A1* e fazem com que, simultaneamente, o ponto marcado encoste à reta não focal.

9. Verifique que, ao efetuar a dobra que gera a reta focal, os pontos encontrados coincidem. Marque *B1* e *B2.*



8.3 Plano de Aula 3 - Parábola

PLANO DE AULA: Construção da Parábola utilizando dobradura

Plano 3 de uma sequência de 3 planos.

Autora: Fernanda Godoy dos Santos

Orientador: Fernando de Souza Bastos

Habilidade da BNCC: (EM13MAT509) *Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.*

Objetivos específicos: Construir o conceito de parábola como lugar geométrico dos pontos do plano situados à mesma distância (equidistantes) de um ponto fixo F, chamado foco, e de uma reta fixa (d), chamada diretriz.

Ano: 3ª Série do Ensino Médio

Tempo de Duração: 1h/a – 50 minutos.

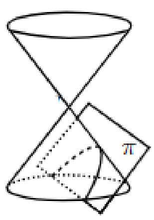
Recursos Necessários:

- Metade de uma Folha (Preferencialmente papel vegetal para que a dobradura fique mais visível)
- Lápis;
- Régua;

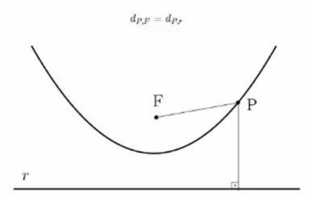
Conhecimento prévio: Distância entre dois pontos.

Procedimento:

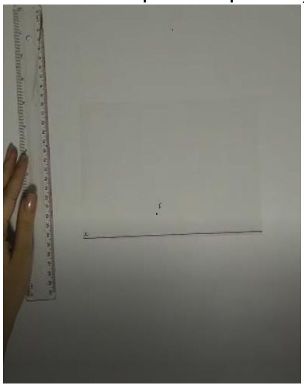
Devemos introduzir explicando que a parábola é formada a partir da interseção de um plano com a superfície lateral de um cone, como mostra a figura a seguir:



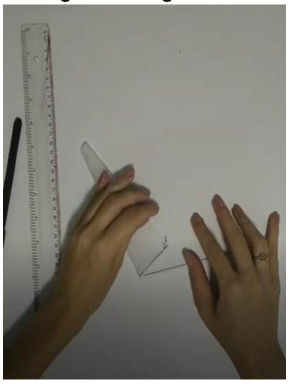
Podemos definir a Parábola sendo o lugar geométrico (ou conjunto) dos pontos do plano situados à mesma distância (equidistantes) de um ponto fixo *F*, que chamaremos de foco, e de uma reta fixa *r* que chamaremos de diretriz, pertencentes ao mesmo plano da cônica.



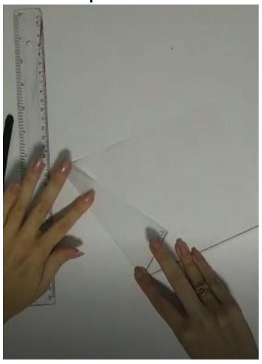
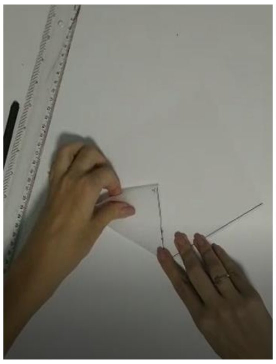
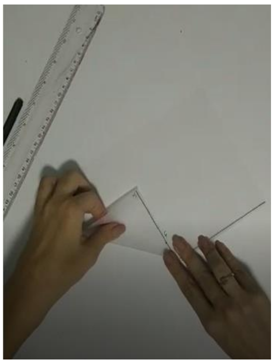
1. O primeiro passo é desenhar a reta diretriz, em qualquer parte da folha, no meu exemplo, irei desenhá-la perto da margem do papel vegetal. Em seguida, devemos marcar o ponto F (foco) em qualquer parte da folha desde que não pertença a reta.



2. Devemos então, pegar um ponto da reta e levá-lo até o foco, de forma que esse ponto coincida com o foco, como mostra a figura a seguir.

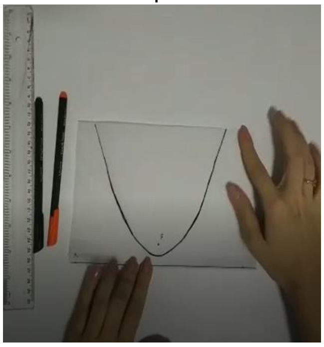


3. Logo, devemos escolher alguns pontos da reta e sobrepô-los no foco, dobrando o papel vegetal a cada ponto escolhido.

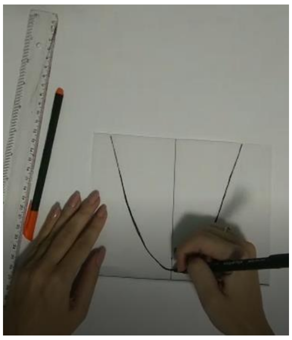
  

É importante repetir o processo com o máximo de pontos possíveis da reta, mudando o ângulo de forma que o papel vegetal fique marcado por todos os lados, até que a curva apareça.

4. Em seguida, o estudante deverá desenhar a parábola formada.



5. Para identificar os elementos da parábola iremos fazer uma dobra perpendicular a reta diretriz no papel vegetal que passa pelo foco e marcaremos a reta formada, essa reta é denominada por reta focal e a partir disso marcaremos o vértice da parábola, que será a interseção da reta focal com a curva.



6. Após a curva desenhada podemos trabalhar com a definição.
A distância do foco até o vértice terá a mesma distância que o vértice até a reta diretriz. Os estudantes podem comprovar utilizando a régua.
Em seguida, determinaremos um ponto P que deve possuir a mesma distância do foco a reta diretriz e isso deve valer para qualquer ponto que o estudante escolha na parábola.