UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FÁBIO CÉZAR SILVEIRA DE CASTRO

UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

REDENÇÃO - CE

2021

FÁBIO CÉZAR SILVEIRA DE CASTRO

UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Castro, Fábio Cézar Silveira de.

C355m

Um método alternativo para resolução de equações do terceiro grau / Fábio Cézar Silveira de Castro. - Redenção, 2024.
43f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientador: Prof. Dr. João Fracisco da Silva Filho.

1. Matemática - Equações do terceiro grau. 2. Polinômios do terceiro grau. 3. Raízes. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

FÁBIO CÉZAR SILVEIRA DE CASTRO

**UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO
DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 22/12/2021

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho
____
Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Guimarães
____
Prof. Dr. Antonio Alisson Pessoa Guimarães
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Francisco de Assis Benjamim Filho.
____
Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho
Universidade Federal do Cariri – UFCA

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por finalizar mais uma etapa da minha vida estudantil e com saúde física e mental.

Agradeço a minha mãe Ana Cleide Silveira de Castro por todo apoio na minha vida estudantil e pessoal, também aos meus irmãos Túlio Studart de Castro Filho, Edison Gomes da Silveira Neto, Desirêe Silveira de Castro e Anya Silveira de Castro. Agradeço a minha esposa Ana Lídia Medeiros de Castro, meus filhos Jõao Pedro Medeiros de Castro e Mariah Medeiros de Castro que sempre estiveram ao meu lado me apoiando em minhas decisões.

Agradeço aos meus colegas de turma do Profmat, Renato, Wirlan, Dennis, Felipe, Salustriano, Paulo, Silvio e Ananias, à Unilab, aos seus funcionários e a todos os nossos professores do curso.

Agradeço aos professores da minha banca examinadora, Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães e Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho, pelas valiosas contribuições.

Agradecimento especial ao meu orientador, Professor Doutor João Francisco da Silva Filho por todo o apoio, orientações e paciência comigo na construção desse trabalho. Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta me ajudaram e apoiaram nesse desafio.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), que financiou a bolsa de estudo durante meu mestrado.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."(Galileu Galilei)

RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo central o estudo de métodos para a resolução de equações polinomiais do terceiro grau (ou simplesmente, equações do terceiro grau), e com tal intuito, são apresentados conceitos relativos a números complexos e alguns de seus resultados iniciais necessários para a dedução posterior dos métodos, juntamente com exposição da teoria básica de polinômios para o mesmo fim. Dessa maneira, torna-se possível demonstrar a fórmula de Cardano-Tartaglia a fim de descobrir raízes de polinômios e equações do terceiro grau para, logo após, apontarmos a fórmula obtida por Pereira e Silva Filho (2019), o qual auxilia bastante na simplificação do encontro das outras raízes a partir de uma terceira raiz conhecida. Por fim, baseado em alguns dos resultados obtidos por Silva Filho, Pereira e Castro (2022), será deduzida uma fórmula fechada que nos permite propor um método alternativo para encontrar raízes de polinômios e equações do terceiro grau, podendo ser utilizado em equações e polinômios do terceiro grau que possuem no máximo duas raízes reais distintas, de forma menos trabalhosa, quando comparado com a aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia.

Palavras-chave: Equações do terceiro grau. Polinômios do terceiro grau. Raízes.

ABSTRACT

The present dissertation has as its central objective the study of methods for the resolution of polynomial equations of the third degree (or simply, equations of the third degree), and to this end, concepts related to complex numbers and some of their initial results necessary for the subsequent deduction of the methods are presented, together with exposure of the basic theory of polynomials for the same purpose. Thus, it is possible to demonstrate the Cardano-Tartaglia formula in order to discover roots of polynomial and equations of the third degree to then point out the formula obtained by Pereira and Silva Filho (2019), which greatly assists in simplifying the encounter of the other roots from a known third root. Finally, due to some results obtaneid by Silva Filho, Pereira and Castro (2022), a closed formula will be deduced that allows us to propose an alternative method to find polynomial roots and equations of the third degree, and can be used in equations and polynomials of the third degree that have a maximum of two distinct real roots, in a less laborious way, when compared with the application of the Cardano-Tartaglia formula.

Keywords: Third degree equations. Third degree polynomials. Roots.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é propor um método alternativo para a resolução de equações do terceiro grau, baseado em uma fórmula fechada que simplifica, não apenas a solução desse tipo de equação, mas também a caracterização das suas raízes. Para isso, apresentaremos uma abordagem relativa a números complexos e polinômios, depois faremos uma breve revisão sobre equações do terceiro grau, posteriormente chegando aos resultados principais.

Com isto em mente, e baseado em Ávila (2013), Lima et al (2012), Soares (2009), Gonçalves (2013) e Domingues e Iezzi (2003), no segundo capítulo iremos apresentar os números complexos e polinômios sobre um corpo em uma incógnita, incluindo definições preliminares e alguns resultados elementares, bem como resultados clássicos, tais como: a fórmula de De Moivre e o algoritmo da divisão de polinômios. Esses resultados serão extremamente necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes, pois constituem importantes pré-requisitos na demonstração dos resultados principais.

No terceiro capítulo, baseado em Gonçalves (2013) e Lima (1987), apresentaremos a fórmula de Cardano-Tartaglia e sua demonstração, bem como um resultado mais recente, constante na literatura e obtido por Pereira e Silva Filho (2019), ambos utilizados para encontrar as raízes de polinômios e de equações do terceiro grau. No final desse capítulo, apresentaremos ainda alguns exemplos sobre os referidos resultados.

No quarto capítulo, baseado em Silva Filho, Pereira e Castro (2022), serão exibidos os resultados principais obtidos no trabalho, relacionados a uma fórmula fechada para calcular as raízes de polinômios e equações do terceiro grau, que nos permite propor um método alternativo para determinar raízes de polinômios e equações do terceiro grau. Desse modo, buscamos uma maior simplicidade de se obter as raízes de polinômios e equações do terceiro grau que possuem no máximo duas raízes reais distintas, tornando-se menos trabalhoso do que usar a fórmula de Cardano-Tartaglia.

No quinto e último capítulo, fazemos a conclusão da dissertação, onde fechamos o raciocínio quanto à resolução de equações do terceiro grau à luz dos resultados obtidos, possivelmente criando expectativas para novos trabalhos que possam usar este como base para a geração de novos conhecimentos acadêmicos.

2 POLINÔMIOS

Nesse capítulo, falaremos um pouco sobre algumas definições, propriedades e alguns resultados importantes relacionados a números complexos, corpo e polinômios sobre um corpo em uma variável, que compreendem informações importantes para os capítulos seguintes. Para maiores detalhes, recomendamos a leitura de Ávila (2013), Soares (2009), Gonçalves (2013) e Domingues e Iezzi (2003).

2.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Designamos por números complexos, um conjunto numérico denotado por $\mathbb{C}$, que corresponde a uma interessante extensão do conjunto dos números reais, conforme descrevemos nessa seção. Um elemento $z \in \mathbb{C}$ é escrito na forma

$$z = x + yi,$$

onde "i" é chamado de unidade imaginária, tal que $i = \sqrt{-1}$ e x, y representam as partes real e imaginária de z, respectivamente. Mais precisamente, escrevemos

$$\mathbb{C} = \{x + yi; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

A parte real de z pode ser denotada por $Re\, z$ e a parte imaginária por $Im\, z$, ou seja,

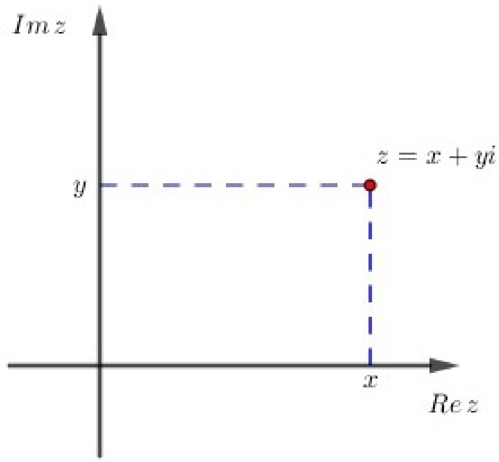
$$Re\, z = x \qquad \text{e} \qquad Im\, z = y,$$

com isso, podemos escrever

$$z = (Re\, z) + (Im\, z)\, i.$$

Na Figura 1, a seguir, tem-se uma representação do Plano Complexo, onde o eixo x corresponde ao eixo real e o eixo y corresponde ao eixo imaginário.

Figura 1 – O Plano Complexo.



Fonte: Autor (2021).

Observação 2.1 Observe que todo número real é, também, um número complexo que possui a parte imaginária nula.

Veremos agora duas definições básicas, porém importantes, sobre os números complexos.

Definição 2.1 Dados números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, eles serão iguais se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definição 2.2 Denotamos por $\overline{z}$ o conjugado do número complexo $z = x + yi$, isto é, $\bar{z} = x - yi$.

Exemplo 2.1 O conjugado do número complexo $z = 2 - 3i$ é $\overline{z} = 2 + 3i$.

Analogamente aos números reais, temos as operações de soma e produto nos números complexos, que estendem as operações de soma e produto definidas nos reais.

Definição 2.3 A soma e o produto de números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ são definidas por:

(a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;

(b) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$.

Exemplo 2.2 Dados os números complexos $z = 2 + i$ e $w = -1 + 2i$, temos que

$$\begin{aligned} z + w &= (2 + i) + (-1 + 2i) = 1 + 3i \quad \text{e} \\ z \cdot w &= (2 + i)(-1 + 2i) = -4 + 3i. \end{aligned}$$

Adiante, veremos algumas propriedades importantes relacionadas a conjugado de números complexos.

Proposição 2.1 Dados z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ quaisquer, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; (b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Demonstração:

(a) Sendo $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, por definição, temos

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i,$$

mas por outro lado, veja que

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i),$$

daí, basta comparar as igualdades obtidas para concluir o primeiro item.

(b) Por definição, temos que

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

no entanto,

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

então comparamos as igualdades obtidas para concluir o segundo item. $\square$

Quando trabalhamos com números reais, definimos o valor absoluto (ou módulo) de um número real x, como sendo a distância de x até a origem do plano cartesiano, denotando-o por $|x|$. Na definição a seguir, dada por Soares (2009, p. 7), temos uma extensão de módulo dos números reais aplicado aos números complexos.

Definição 2.4 Dado um número complexo $z = x + yi$, definiremos seu módulo pela expressão

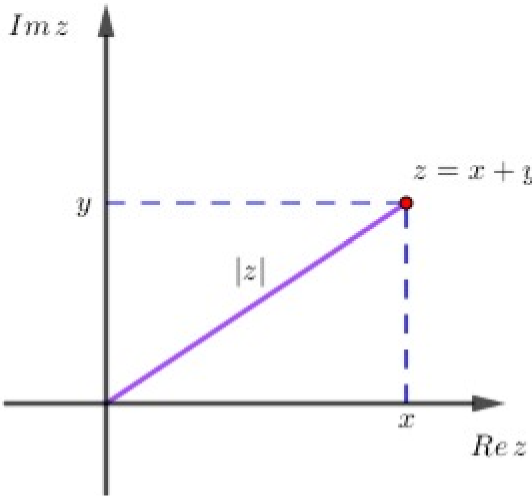
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2}.$$

Exemplo 2.3 O módulo do número complexo $z = 3 + 4i$, obtido a partir da expressão acima, será dado por

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

A Figura 2 nos trás a representação geométrica da definição de módulo que introduzimos anteriormente:

Figura 2 – Módulo de um número complexo.



Fonte: Autor (2021).

Observação 2.2 A partir das definições anteriores, podemos concluir que, para $z = x+yi$ e $\bar{z} = x - yi$, temos:

(a) $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$;

(b) $z \cdot \overline{z} = (x + yi).(x - yi) = |z|^2$.

Proposição 2.2 Para quaisquer z, w pertencentes ao conjunto dos números complexos são válidas as seguintes propriedades:

(a) $|z + w| \leq |z| + |w|$; (b) $|z \cdot w| = |z||w|$.

Demonstração:

(a) Pela Observação 2.2, temos que

$$|z + w|^2 = (z + w) \cdot \overline{(z + w)} = (z + w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w},$$

mas como $w\overline{z} = \overline{\overline{w}z}$, logo

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + 2Re\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de $|w| = |\overline{w}|$.

Da última desigualdade, temos que

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2,$$

ou ainda,

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

(b) Como $|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw}$, temos que

$$|zw|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2,$$

implicando que

$$|zw| = |z||w|. \qquad \square$$

Prosseguiremos definindo, sobre o conjunto dos números complexos, o simétrico e inverso multiplicativo.

Definição 2.5 Seja $z = x + yi$ um número complexo, definimos:

(a) $-z = (-x) + (-y)i$; (b) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.

Exemplo 2.4 Dado $z = 2 + 3i$, temos que seus simétrico e inverso multiplicativo são dados por

$$-z = -(2 + 3i) = -2 - 3i \qquad \text{e} \qquad z^{-1} = \frac{2 - 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

Observação 2.3 Um número complexo que possui a parte real nula é chamado de imaginário puro. Em contrapartida, um número complexo será real se, e somente se, for igual ao seu conjugado.

Uma outra maneira de representação de um número complexo é através da sua forma polar, na qual relacionamos as coordenadas cartesianas e polares. Primeiramente, associamos cada par ordenado a um número complexo, de modo que $z = x + yi = (x, y)$, conforme ilustra a Figura 3, de modo que obtemos as relações

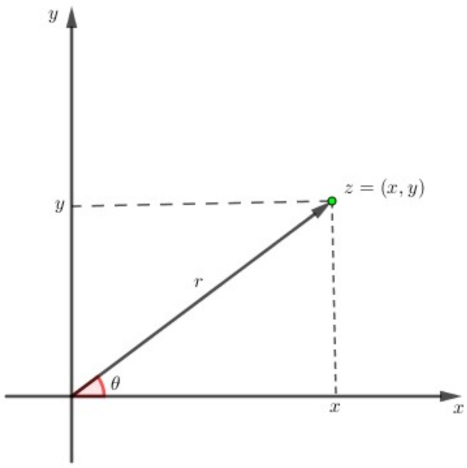
$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

logo

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

mas como $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, temos ainda que $z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Figura 3 – Forma polar de um par ordenado.



Fonte: Autor (2021).

Definição 2.6 Dado um valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ para o qual

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

dizemos que θ é o argumento de z e denotamos por $\theta = \arg(z)$.

Exemplo 2.5 Escreva o número complexo $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ na forma polar.

Solução: Inicialmente, devemos observar que $|z| = 1$ e, além disso, precisamos encontrar $\theta \in [0, 2\pi)$ satisfazendo as condições

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde temos que $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Nessas condições, concluímos que

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

corresponde à forma polar de z.

Proposição 2.3 Dados $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$ não-nulos, temos que

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

Demonstração: Por um cálculo direto, veja que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2|\left[\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha)\right] \\ &= |z_1||z_2|\left[\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right], \end{aligned}$$

onde usamos as fórmulas do seno da soma e do cosseno da soma, conforme Paiva (2009, p. 53-54). □

Definição 2.7 Sejam z um número complexo arbitrário e $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$z^n = \begin{cases} 1, \text{ se } z \neq 0 \text{ e } n = 0, \\ z, \text{ se } n = 1, \\ z \cdot z^{n-1}, \text{ se } n > 1, \\ (z^{-1})^{-n}, \text{ se } z \neq 0 \text{ e } n < 0. \end{cases}$$

Definição 2.8 Se z_0 é um número complexo arbitrário, definimos uma raiz n-ésima (ou raiz de ordem n) de z_0 pelo número complexo z, tal que $z^n = z_0$.

Observação 2.4 A simbologia $\sqrt[n]{z_0}$ representa uma raiz qualquer da equação anterior.

Antes de vermos exemplos sobre essa última definição, passamos ao seguinte resultado.

Proposição 2.4 (Fórmula de De Moivre) Dados $n \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta).$$

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre n, dividindo-a em dois casos:

1º Caso: $n \geq 0$.

Para $n = 0$ e $n = 1$, verifica-se o resultado diretamente pela Definição 2.7, então suponha que a igualdade é verdadeira para $n - 1 > 0$, ou seja,

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{n-1} = \cos[(n-1)\theta] + i\operatorname{sen}[(n-1)\theta],$$

daí multiplicando membro a membro por $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, obtemos

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\left\{\cos[(n-1)\theta] + i\operatorname{sen}[(n-1)\theta]\right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos\theta\cos[(n-1)\theta] - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}[(n-1)\theta] + \\ i\left\{\operatorname{sen}\theta\cos[(n-1)\theta] + \cos\theta\operatorname{sen}[(n-1)\theta]\right\}.\end{aligned}$$

Usando as fórmulas do seno e do cosseno da soma, obtemos

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta),$$

logo, pelo princípio de indução finita (cf. GONÇALVES, 2013, p. 16), a igualdade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2º Caso: $n < 0$.

Neste caso, temos que $n = -m$, com $m \in \mathbb{N}$ e assim

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \frac{1}{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^m} = \frac{1}{\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)},$$

onde usamos o primeiro caso. Dessa forma, observe que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \frac{1}{\cos(m\theta) + i \operatorname{sen}(m\theta)} \cdot \frac{\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)}{\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)},$$

implicando

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \frac{\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)}{\cos^2(m\theta) + \operatorname{sen}^2(m\theta)} = \cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta),$$

onde usamos a identidade fundamental da trigonometria encontrada em Lima et al (2012, p. 224).

Usando o fato do cosseno ser uma função par e do seno ser uma função ímpar (cf. LIMA et al, 2012, p. 225), concluímos da última igualdade que

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta) = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta),$$

que encerra a demonstração. $\square$

Corolário 2.1 Dado $z \in \mathbb{C}$ não-nulo arbitrário, então este admite n raízes n-ésimas, dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

onde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e θ denota o argumento de z.

Demonstração: Decorre diretamente da Fórmula de De Moivre (cf. Proposição 2.4).

Exemplo 2.6 As raízes cúbicas da unidade são os números complexos, dados por

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{e} \\ z_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i. \end{aligned}$$

2.2 POLINÔMIOS SOBRE UM CORPO

Nesta seção, baseado em Gonçalves (2013) e Domingues e Iezzi (2003), abordaremos um pouco sobre polinômios e a definição de corpo, além disso, veremos as operações e outros elementos relacionados a estas estruturas algébricas tão importantes em Matemática.

Definição 2.9 Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ não-vazio munido de duas operações, chamadas de adição e multiplicação

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (soma)} \quad \text{ e } \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (multiplicação)}$$

satisfazendo, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$, as seguintes as propriedades:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma);
2. Existe $0 \in \mathbb{K}$, tal que $a + 0 = 0 + a$ (existência do elemento neutro da soma);
3. Existe $-a \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (existência do simétrico);
4. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma);
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação);
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade à esquerda) e
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade à direita);
7. Existe $1 \in \mathbb{K} - \{0\}$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade do produto);
9. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$;
10. Se $a \neq 0$, então existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ satisfazendo $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Segundo Domingues e Iezzi (2003), os números reais $\mathbb{R}$, por exemplo, constituem um corpo, assim como o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, e trabalharemos exclusivamente com estes.

Definição 2.10 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $a_0, a_1, ..., a_n$ elementos em $\mathbb{K}$, então dizemos que um polinômio $P(x)$ sobre $\mathbb{K}$ na variável x, é uma expressão dada por

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Observação 2.5 Chamaremos de $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre o corpo $\mathbb{K}$ em uma variável x.

Definição 2.11 Considerando $\mathbb{K}$ um corpo e dois polinômios sobre $\mathbb{K}$, tais que

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \quad \text{e} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,$$

dizemos que $P(x) = Q(x)$ quando $a_i = b_i$ para todo $i = 0, 1, 2, ..., m$.

Observação 2.6 Dizemos que $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é identicamente nulo, quando $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 2.7 Dizemos que $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é constante quando $a_k = 0$ para todo índice $k > 0$.

A definição a seguir nos traz um importante conceito relacionada a polinômios.

Definição 2.12 Dado $P(x)$ um polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$, tal que

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, de modo que tenhamos $a_n \neq 0$, dessa forma dizemos que $P(x)$ é um polinômio de grau n.

Observação 2.8 O grau de um polinômio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ será denotado por $\partial P(x)$.

A seguir, definiremos as operações de soma e produto de polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma variável x.

Definição 2.13 Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Para quaisquer dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ sobre $\mathbb{K}$, tais que

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \quad \text{e} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m,$$

a soma e o produto serão definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \text{(a) } (P+Q)(x) &= c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m \qquad \text{e} \\ \text{(b) } (P \cdot Q)(x) &= d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m, \end{aligned}$$

sendo $c_k = a_k + b_k$ e $d_j = a_0b_j + a_1b_{j-1} + \cdots + a_jb_0$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$.

Observação 2.9 Quando os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ possuem graus diferentes, os coeficientes correspondentes no polinômio de menor grau são considerados iguais a zero.

Observação 2.10 É possível verificar que para quaisquer polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, obtemos:

(a) $\partial(P+Q)(x) \leq \partial P(x) + \partial Q(x)$ com $P(x) + Q(x) \neq 0$.

(b) $\partial(P \cdot Q)(x) = \partial P(x) + \partial Q(x)$ com $P(x) \cdot Q(x) \neq 0$.

Definição 2.14 Dado um corpo $\mathbb{K}$, temos que $\alpha \in \mathbb{K}$ será denominada uma raiz de um polinômio $P(x)$ não nulo sobre $\mathbb{K}$, quando $P(\alpha) = 0$.

Exemplo 2.7 Dado o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2$, uma de suas raízes é $r = 1$, pois

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Observação 2.11 O conjunto de todas as raízes de um polinômio $P(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ será denotado por $\mathcal{Z}(P)$.

Uma outra operação muito importante é a divisibilidade entre polinômios, que definiremos agora.

Definição 2.15 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $P(x)$ e $S(x)$ polinômios sobre $\mathbb{K}$, então dizemos que $S(x)$ divide $P(x)$, quando existe um polinômio $Q(x)$, tal que

$$P(x) = S(x)Q(x).$$

Exemplo 2.8 O polinômio $P_2(x) = (x-1)$ divide o polinômio $P_1(x) = x^2 + x - 2$, pois

$$P_1(x) = P_2(x)(x+2).$$

A seguir, apresentamos um importante resultado sobre polinômios conhecido como algoritmo da divisão de polinômios.

Proposição 2.5 (Algoritmo da Divisão) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $P(x)$ e $S(x)$ polinômios em $\mathbb{K}[x]$ com $S(x) \neq 0$, então existem únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ em $\mathbb{K}[x]$, tais que

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

onde $R(x)$ é nulo ou $\partial R(x) < \partial S(x)$.

Demonstração: Faremos a demonstração em duas partes, contemplando existência e unicidade:

1ª Parte (Existência)

Para mostrar a existência de tais polinômios, vamos primeiro observar os seguintes casos:

- Para $P(x) = 0$ (polinômio nulo), tem-se que $S(x) = R(x) = 0$ cumprem as condições enunciadas.
- Para $P(x) \neq 0$ e $\partial P(x) < \partial S(x)$, basta tomar $Q(x) = 0$ e $R(x) = P(x)$.

Nessas condições, vamos considerar $P(x) \neq 0$ com $\partial P(x) \geq S(x)$ e provar o resultado por indução sobre o grau de $P(x)$, conforme os passos descritos a seguir;

1º Passo: Para $\partial P(x) = 0$, devemos ter $\partial S(x) = 0$ devido à hipótese, portanto $P(x)$ e $S(x)$ serão polinômios constantes, ou seja,

$$P(x) = a_0 \qquad \text{e} \qquad S(x) = b_0 \neq 0,$$

então basta tomar $R(x) = 0$ e $Q(x) = b_0^{-1} a_0$ para atender às condições enunciadas.

2º Passo: Suponha que $\partial P(x) = n > 0$ e que a proposição seja verdadeira para todo polinômio de grau m com $0 \leq m < n$. Consideremos o polinômio $P_1(x)$, definido por

$$P_1(x) = P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} S(x),$$

que satisfaz $\partial P_1(x) < \partial P(x)$ e usando a hipótese de indução, temos que

$$P_1(x) = S(x) Q_1(x) + R_1(x),$$

onde $R_1(x) = 0$ ou $\partial R_1(x) < \partial S(x)$.

Dessa forma, temos que

$$P(x) = S(x) Q_1(x) + R_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{m-n} S(x),$$

ou ainda,

$$P(x) = \left[Q_1(x) + a_n b_m x^{n-m} \right] S(x) + R_1(x),$$

na qual $R_1(x) = 0$ ou $\partial R_1(x) < \partial S(x)$. Finalmente, basta tomar $R(x) = R_1(x)$ e $Q(x) = Q_1(x) + a_n b_m x^{n-m}$ para concluir a existência.

2ª Parte (Unicidade)

Suponhamos que existam $Q_1(x)$ e $R_1(x)$, tais que

$$Q(x)S(x) + R(x) = Q_1(x)S(x) + R_1(x),$$

onde $\partial R(x) < \partial S(x)$ quando $R(x) \neq 0$. Neste caso, temos que

$$[Q(x) - Q_1(x)]S(x) = [R_1(x) - R(x)],$$

daí, como $S(x) \neq 0$, ocorre $Q(x) - Q_1(x) = 0$, se e somente se, $R_1(x) - R(x) = 0$.

Suponhamos por absurdo que $R_1(x) \neq R(x)$, então $Q(x) \neq Q_1(x)$ e com isso, observe que

$$\partial\{[Q(x) - Q_1(x)]S(x)\} = \partial\{[R_1(x) - R(x)]\},$$

mas como $\partial\{[Q(x) - Q_1(x)]S(x)\} = \partial[Q(x) - Q_1(x)] + \partial S(x)$, ou seja,

$$\partial\{[R_1(x) - R(x)]\} \geq \partial S(x),$$

que é um absurdo, donde concluímos que $R_1(x) = R(x)$ e $Q(x) = Q_1(x)$. $\square$

3 EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Neste capítulo, vamos relatar um pouco sobre as equações de terceiro grau, apresentando a fórmula de Cardano-Tartaglia e uma fórmula mais recente, bem como suas respectivas demonstrações e exemplos resolvidos sobre equações do terceiro grau. Recomendamos a leitura de Lima (1987), Gonçalves (2013) e Pereira e Silva Filho (2019) para mais detalhes.

3.1 RAÍZES DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar a fórmula de Cardano-Tartaglia, que permite obter as raízes de uma equação do terceiro grau. Na sequência, apresentamos uma fórmula mais recente, obtida por Pereira e Silva Filho (2019), que permite expressar duas raízes de uma equação do terceiro grau em termos de uma terceira. Recomendamos também a leitura do artigo de Pereira e Silva Filho (2017).

A primeira proposição nos traz a conhecida *fórmula de Cardano-Tartaglia*, conforme enunciado a seguir:

Proposição 3.1 (Cardano-Tartaglia) Considere uma equação polinomial do terceiro grau com coeficentes reais, dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

então as suas raízes podem ser obtidas pela fórmula

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

onde $p = -\dfrac{b^2 - 3ac}{3a^2}$ e $q = \dfrac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}$.

Demonstração: Se dividirmos a equação por a, obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

ou ainda,

$$x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d} = 0,$$

onde $\tilde{b} = \dfrac{b}{a}$, $\tilde{c} = \dfrac{c}{a}$ e $\tilde{d} = \dfrac{d}{a}$. Substituindo nessa equação $x = y - \dfrac{\tilde{b}}{3}$, vamos obter

$$\left(y - \frac{\tilde{b}}{3}\right)^3 + \tilde{b}\left(y - \frac{\tilde{b}}{3}\right)^2 + \tilde{c}\left(y - \frac{\tilde{b}}{3}\right) + \tilde{d} = 0,$$

desenvolvendo os produtos, chegaremos em

$$y^3 + 0 \cdot y^2 + \left(\tilde{c} - \frac{\tilde{b}^2}{3}\right)y + \frac{2\tilde{b}^3}{27} - \frac{\tilde{b}\tilde{c}}{3} + \tilde{d} = 0,$$

então reescrevemos a última equação na forma

$$y^3 + py + q = 0,$$

onde estamos adotando as notações $p = \tilde{c} - \dfrac{\tilde{b}^2}{3}$ e $q = \dfrac{2\tilde{b}^3}{27} - \dfrac{\tilde{b}\tilde{c}}{3} + \tilde{d}$.

Observação 3.1 Deve-se ainda notar que valem as relações

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

Na equação $y^3 + py + q = 0$, vamos substituir $y = u + v$ para obter, após simplificações,

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0,$$

que equivale a

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0,$$

portanto, precisamos encontrar u e v, tais que

$$u^3 + v^3 = -q \qquad \text{e} \qquad uv = -\frac{p}{3}.$$

Agora que conhecemos a soma e o produto de u^3 e v^3, então estes são as raízes da equação do segundo grau

$$s^2 - (u^3 + v^3)s + (u^3v^3) = 0,$$

que equivale a

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0,$$

daí usamos a fórmula de Bháskara, encontrada em Lima et al (2012, p. 122), para obter

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

consequentemente,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Da última igualdade, obtemos

$$x = -\frac{\tilde{b}}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ou ainda,

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

concluindo a demonstração. □

Nas mesmas condições da Proposição 3.1, podemos verificar que o discriminante da equação polinomial do terceiro grau também pode ser usado para caracterizar as raízes.

Corolário 3.1 Dada a equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com coeficientes reais e discriminante $D = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2$, onde $p = -\dfrac{b^2 - 3ac}{3a^2}$ e $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$, temos que:

(a) Se $D = 0$, a equação possui três raízes reais, sendo duas delas iguais.

(b) Se $D > 0$, a equação possui uma raiz real e duas complexas conjugadas.

(c) Se $D < 0$, a equação possui três raízes reais distintas.

Demonstração: Faremos a demonstração em três partes, conforme veremos a seguir:

1° Caso: $D = 0$.

Usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, conforme a Proposição 3.1, expressamos as raízes da equação por

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ou ainda,

$$x = -\frac{b}{3a} + u + v,$$

onde temos que as raízes cúbicas não são necessariamente iguais, visto que todo número real não-nulo possui três raízes cúbicas complexas.

Como $u^3 + v^3 = -q$ e $uv = -\dfrac{p}{3}$, temos que $u = 0$ equivale a termos $v = 0$, logo as três raízes são reais e dadas por $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a}$. Agora suponha que $u \neq 0$, então existem três possibilidades para o valor de u, que são elas

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad u_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \quad \text{e} \quad u_3 = \overline{\omega}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

assim, considerando $u = \omega^k \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ com $k \in \{0, 1, 2\}$ e lembrando que $\dfrac{1}{\omega} = \overline{\omega}$ (pois ω é um número complexo unitário), vamos ter

$$v = -\frac{1}{\omega^k} \cdot \frac{p}{3} \cdot \sqrt[3]{-\frac{2}{q}} = \overline{\omega}^k \cdot \sqrt[3]{\frac{p^3}{27} \cdot \frac{2}{q}} = \overline{\omega^k} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \overline{u},$$

onde $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e as raízes cúbicas acima denotam números reais.

Sendo assim, as raízes serão da forma $x = -\frac{b}{3a} + u + \overline{u}$ e como $u + \overline{u} \in \mathbb{R}$, teremos que as três raízes serão reais. Mais especificamente, de acordo com as raízes cúbicas da unidade $1, \omega$ e $\omega^2 = \overline{w}$, obtemos

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

bem como,

$$x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} + (\omega + \overline{\omega})\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

onde as raízes cúbicas acima denotam números reais.

Daí obtemos

$$x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

que equivale a

$$x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

portanto se $D = 0$, então a equação possui três raízes reais, sendo duas delas iguais.

2° Caso: $D > 0$.

De modo análogo, temos pela fórmula de Cardano-Tartaglia que

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ou equivalentemente,

$$x = -\frac{b}{3a} + u + v,$$

expressam as raízes da equação.

Sejam α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^3 = u^3$ e $\beta^3 = v^3$, então temos que $u_1 = \alpha$, $u_2 = \omega\alpha$ e $u_3 = \overline{\omega}\alpha$ são os possíveis valores de u e $v_1 = \beta$, $v_2 = \omega\beta$ e $v_3 = \overline{\omega}\beta$ são os possíveis valores de v.

Nessas condições, observe que se $u = 0$, tem-se que da expressão das raízes acima citada, a equação possui uma raiz real e duas complexas não reais, dadas por

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \beta, \quad x_2 = -\frac{b}{3a} + \omega\beta \quad \text{e} \quad x_3 = -\frac{b}{3a} + \overline{\omega}\beta,$$

enquanto isso para $u \neq 0$, podemos escrever $u = u_k = \alpha\omega^{k-1}$ com $k \in \{1, 2, 3\}$ e assim

$$v = -\frac{p}{3u} = \frac{-p}{3\alpha\omega^{k-1}} = \frac{-p\beta\,\overline{\omega}^{k-1}}{3\alpha\omega^{k-1}\beta\,\overline{\omega}^{k-1}} = \beta\,\overline{\omega}^{k-1} = \beta\,\overline{\omega^{k-1}} = v_k.$$

Diante dos cálculos acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{3a} + \alpha + \beta, \\ x_2 &= -\frac{b}{3a} + \omega\alpha + \overline{\omega}\beta \text{ e} \\ x_3 &= -\frac{b}{3a} + \overline{\omega}\alpha + \omega\beta, \end{aligned}$$

por fim, escrevemos ainda

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \alpha + \beta \;\text{ e }\; x_{2,3} = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\alpha + \beta)\,i,$$

portanto x_1 é real e x_2 e x_3 são números complexos conjugados.

3° Caso: $D < 0$.

Tomando u e v como no caso anterior, temos que u^3 e v^3 são números complexos conjugados, isso significa que ambos estão no mesmo círculo trigonométrico em sua forma polar, donde temos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D},$$

então escrevendo-os na forma trigonométrica, obtemos

$$u^3 = |u^3|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{e} \quad v^3 = |v^3|(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

onde $|u|^3 = |v|^3 = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ e $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{q}{2|u^3|}\right)$.

Pelo Corolário 2.1, temos que as raízes cúbicas de u e v são dadas por

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{|u^3|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right],\\
u_2 &= \sqrt[3]{|u^3|}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\right] \quad \text{e}\\
u_3 &= \sqrt[3]{|u^3|}\left[\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right],
\end{aligned}$$

bem como,

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sqrt[3]{|v^3|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)\right],\\
v_2 &= \sqrt[3]{|v^3|}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\right] \quad \text{e}\\
v_3 &= \sqrt[3]{|v^3|}\left[\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right].
\end{aligned}$$

Sabendo que $uv = -\frac{p}{3}$ e p é um número real, temos

$$u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_3, u_3v_1, u_3v_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R},$$

logo as raízes da equação são dadas por

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{b}{3a} + u_1 + v_1 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt[3]{|u^3|}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),\\
x_2 &= -\frac{b}{3a} + u_2 + v_2 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt[3]{|u^3|}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) \quad \text{e}\\
x_3 &= -\frac{b}{3a} + u_3 + v_3 = -\frac{b}{3a} + 2\sqrt[3]{|u^3|}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right),
\end{aligned}$$

com isso, vemos que, neste caso, obtemos três raízes reais. □

Mais recentemente, Pereira e Silva Filho (2019) obtiveram uma fórmula que nos permite relacionar diretamente as raízes de uma equação do terceiro grau, de modo que podemos escrever duas raízes em termos de uma terceira raiz.

Proposição 3.2 (Pereira-Silva Filho, 2019) Considere um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, dado por $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e que admite uma raiz $r \in \mathbb{R}$. Nessas condições, as demais raízes desse polinômio são dadas por

$$w_{1,2} = -\frac{(ar+b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a},$$

onde $\Omega = b^2 - 3ac$ e $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Demonstração: Como $P(r) = ar^3 + br^2 + cr + d = 0$, obtemos

$$P(x) = P(x) - P(r),$$

ou ainda,

$$P(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (ar^3 + br^2 + cr + d).$$

Pondo em evidências os coeficientes, vamos ter

$$P(x) = a(x^3 - r^3) + b(x^2 - r^2) + c(x - r),$$

então usando as fatorações $x^3 - r^3 = (x - r)(x^2 + rx + r^2)$ e $x^2 - r^2 = (x - r)(x + r)$, obtemos

$$P(x) = (x - r)[a(x^2 + rx + r^2) + b(x + r) + c].$$

Organizando os termos a partir dos expoentes da variável e agrupando os termos independentes, vamos ter

$$P(x) = (x - r)[ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)].$$

Denominando $Q(x) = ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)$, temos que

$$P(x) = (x - r)Q(x),$$

então usando a fórmula de Bháskara, observada em Lima et al (2012, p. 122) obtemos que as raízes de $Q(x)$ são dadas por

$$w_{1,2} = \frac{-(ar + b) \pm \sqrt{\Delta_Q}}{2a}. \tag{1}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \Delta_Q &= (ar + b)^2 - 4a(ar^2 + br + c) \\ &= -a(3ar^2 + 2br + c) + b^2 - 3ac, \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$\Delta_Q = \Omega - aP'(r), \tag{2}$$

onde $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ é a derivada de $P(x)$.

Finalmente, substituímos a igualdade (2) em (1) para concluirmos que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a},$$

a qual determina as outras duas raízes do polinômio $P(x)$. □

3.2 ALGUNS EXEMPLOS

Observe agora alguns exemplos resolvidos sobre equações do terceiro grau, retirados do Livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770 e encontrados no artigo de Lima (1987).

Exemplo 3.1 Encontre as raízes da equação cúbica $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Resolução: Primeiramente, os valores de p e q são, respectivamente, -6 e -9, portanto vamos obter

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 0,$$

e além disso, como

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

temos que

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{e} \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Pela referida fórmula de Cardano Tartáglia, temos

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + u_1 + v_1 \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}(u_1 + v_1) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u_1 - v_1\right) i,$$

logo

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{0}{3 \cdot 1} + 2 + 1 = 3, \\ x_2 &= -\frac{0}{3 \cdot 1} - \frac{1}{2}(2+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2-1)i = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{e} \\ x_3 &= -\frac{0}{3 \cdot 1} - \frac{1}{2}(2+1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(2-1)i = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Sendo assim, as raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ são

$$\left\{3, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Exemplo 3.2 Encontre as raízes da equação cúbica $x^3 - 6x - 40 = 0$.
Resolução: Primeiramente, os valores de p e q são, respectivamente, -6 e -40, portanto vamos obter

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 392 = (14\sqrt{2})^2 > 0$$

e além disso, como

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

temos que

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{\frac{40}{2} + 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2} \quad \text{e} \\ v_1 &= \sqrt[3]{\frac{40}{2} - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pela referida fórmula de Cardano Tartáglia, temos

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + u_1 + v_1 \qquad \text{e} \qquad x_{2,3} = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}(u_1 + v_1) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\left(u_1 - v_1\right) i,$$

logo

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{0}{3 \cdot 1} + (2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2}) = 4, \\ x_2 &= -\frac{0}{3 \cdot 1} - \frac{1}{2}(2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})i \\ &= -\frac{4}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}{2}i = -2 + \sqrt{6}i \qquad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{0}{3\cdot 1} - \frac{1}{2}(2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})i \\ &= -\frac{4}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}{2}i = -2-\sqrt{6}i. \end{aligned}$$

Daí, as raízes da equação $x^3 - 6x - 40 = 0$ são

$$\{4, -2+\sqrt{6}i, -2-\sqrt{6}i\}.$$

Exemplo 3.3 Encontre as raízes da equação cúbica $x^3 + 3x + 2 = 0$.

Resolução: Primeiramente, os valores de p e q são, respectivamente, 3 e 2, portanto vamos obter

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 2 > 0,$$

logo, aplicando na Fórmula de Cardano-Tartáglia, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}} = \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, \\ x_2 &= w\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} - w^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \qquad \text{e} \\ x_3 &= w^2\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} - w\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Segue ainda que

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \qquad \text{e} \\ x_3 &= \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}\right) \qquad \text{e} \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Vejamos agora alguns exemplos na forma completa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ da equação do terceiro grau.

Exemplo 3.4 Encontre as raízes da equação cúbica $x^3 + 4x^2 - 91x - 490 = 0$.

Resolução: Substituindo x por

$$x = y - \frac{b}{3} = y - \frac{4}{3},$$

temos

$$\left(y-\frac{4}{3}\right)^3 + 4\cdot\left(y-\frac{4}{3}\right)^2 - 91\cdot\left(y-\frac{4}{3}\right) - 490 = 0.$$

Desenvolvendo os produtos, obtemos

$$\begin{aligned} y^3 - 3y^3\frac{4}{3} + 3y\frac{16}{9} - \frac{64}{27} + 4y^2 - \frac{32y}{3} + \frac{64}{9} - 91x + \frac{364}{3} - 490 &= 0 \qquad \text{ou} \\ y^3 - \frac{289y}{3} - \frac{9826}{27} &= 0, \end{aligned}$$

implicando que

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \left(\frac{-4913}{27}\right)^2 + \left(\frac{-289}{9}\right)^3 = 0.$$

onde $p = -\frac{289}{3}$ e $q = -\frac{9826}{27}$.

Além disso, como

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

temos que

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{4913}{27} + \sqrt{0}} = \sqrt[3]{\left(\frac{17}{3}\right)^3} = \frac{17}{3}$$

e

$$v_1 = \sqrt[3]{\frac{4913}{27} - \sqrt{0}} = \sqrt[3]{\left(\frac{17}{3}\right)^3} = \frac{17}{3}.$$

Pela referida fórmula de Cardano Tartáglia, temos

$$y_1 = -\frac{b}{3a} + u_1 + v_1 \qquad \text{e} \qquad y_{2,3} = -\frac{b}{3a} - \frac{1}{2}(u_1 + v_1) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)\,i,$$

logo

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{0}{3\cdot 1} + \frac{17}{3} + \frac{17}{3} = \frac{34}{3}, \\ y_2 &= -\frac{0}{3\cdot 1} - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{3} + \frac{17}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{17}{3} - \frac{17}{3}\right) i \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{34}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0)\,i = -\frac{17}{3} \qquad \text{e} \\ y_3 &= -\frac{0}{3\cdot 1} - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{3} + \frac{17}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{17}{3} - \frac{17}{3}\right) i \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{34}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}(0)\,i = -\frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Como $x = y - \dfrac{4}{3}$, temos que as raízes da equação original são dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{4}{3} = \frac{34}{3} - \frac{4}{3} = \frac{30}{3} = 10, \\ x_2 &= y_2 - \frac{4}{3} = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{21}{3} = -7 \qquad \text{e} \\ x_3 &= y_3 - \frac{4}{3} = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{21}{3} = -7, \end{aligned}$$

então as raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 91x - 490 = 0$ são

$$\begin{aligned} x_1 &= -7, \\ x_2 &= -7 \qquad \text{e} \\ x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5 Encontre as raízes da equação cúbica $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$.
Resolução: Substituindo x por

$$x = y - \frac{b}{3} = y + \frac{3}{3} = y + 1,$$

temos

$$(y+1)^3 - 3\,(y+1)^2 + 6(y+1) - 8 = 0.$$

Desenvolvendo os produtos, obtemos

$$\begin{aligned} y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 6y + 6 - 8 &= 0 \qquad \text{ou} \\ y^3 + 3y - 4 &= 0, \end{aligned}$$

obtendo o discriminante

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27} = 5,$$

onde $p = 3$ e $q = -4$.

Usando a fórmula de Cardano Tartáglia, vamos ter

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{5}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}},$$

mas como

$$2 + \sqrt{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \qquad \text{e} \qquad 2 - \sqrt{5} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3,$$

teremos

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Uma vez que $x_1 = y_1 + 1 = 1 + 1 = 2$, temos que

$$y_2 = w\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + w^2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{(w+w^2) + \sqrt{5}(w-w^2)}{2},$$

mas como $w + w^2 = -1$ e $w - w^2 = i\sqrt{3}$, logo

$$y_2 = \frac{-1+\sqrt{15}i}{2} \;\Rightarrow\; x_2 = 1 + y_2 = \frac{1+\sqrt{15}i}{2}.$$

Analogamente, temos que

$$y_3 = w^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + w\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{(w+w^2) + \sqrt{5}(w^2-w)}{2},$$

daí,

$$y_3 = \frac{-1-\sqrt{15}}{2} \;\Rightarrow\; x_3 = 1 + y_3 = \frac{1-\sqrt{15}i}{2},$$

então as raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$ são

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_2 &= \frac{1+\sqrt{15}i}{2} \qquad \text{e} \\ x_3 &= \frac{1-\sqrt{15}i}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6 Encontre as raízes da equação cúbica $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Resolução: Substituindo x por

$$x = y - \frac{b}{3} = y + \frac{6}{3} = y + 2,$$

temos

$$(y+2)^3 - 6(x+2)^2 + 11x - 6 = 0.$$

Desenvolvendo os produtos, obtemos

$$\begin{aligned} y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 &= 0 \qquad \text{ou} \\ y^3 - y &= 0, \end{aligned}$$

então calculando o discriminante D, concluímos que

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27} = -\frac{1}{27},$$

onde $p = -1$ e $q = 0$.

Usando a fórmula de Cardano Tartáglia, temos

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{0}{2} + \sqrt{\frac{-1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{0}{2} - \sqrt{\frac{-1}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}i}{9}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}i}{9}} = 0,$$

mas como $x_1 = y_1 + 2$, temos que $x_1 = 2$ e também

$$y_2 = w\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{1}{3}\right)^3}} - w^2\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{1}{3}\right)^3}} = (w - w^2)\left[\sqrt[3]{i\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}}\right],$$

Simplificando, obtemos

$$y_2 = (w^2 - w)i\sqrt{\frac{1}{3}} = -\sqrt{3}i \cdot i\sqrt{\frac{1}{3}} = 1,$$

e com isso $x_2 = y_2 + 2 = 1 + 2 = 3$. Analogamente, temos que

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{1}{3}\right)^3}} - w\sqrt[3]{\sqrt{-\left(\frac{1}{3}\right)^3}} = (w^2 - w)\left[\sqrt[3]{i\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}}\right],$$

logo

$$y_3 = (w - w^2)\left[-\sqrt[3]{i\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}}\right].$$

Simplificando a expressão, vamos ter

$$y_3 = (w - w^2)i\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}i \cdot i\sqrt{\frac{1}{3}} = -1,$$

com isso, $x_3 = y_3 + 2 = -1 + 2 = 1$, logo as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ são 1, 2 e 3.

Se uma das raízes de um polinômio do terceiro grau for conhecida antecipadamente, poderemos utilizar de forma direta a Proposição 3.2 para determinar as demais raízes. A seguir, faremos alguns exemplos que ilustram essa afirmação.

Exemplo 3.7 Calcule as raízes do polinômio de terceiro grau $P(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$.

Resolução: Observe que $P(2) = 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 8 + 4 - 10 - 2 = 0$, logo $r = 2$ é raiz do polinômio $P(x)$, então segue pela Proposição 3.2 que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar+b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

determina as outras raízes de $P(x)$. Observe ainda que $a = b = 1, c = -5$ e $d = -2$, enquanto que

$$P'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 3.2^2 + 2.2 - 5 = 12 + 4 - 5 = 11.$$

Substituindo todos esses valores, obtemos

$$\Omega = b^2 - 3ac = 1^2 - 3.1.(-5) = 1 + 15 = 16,$$

então substituindo Ω e $P'(r)$ por seus valores correspondentes, vamos ter

$$w_{1,2} = -\frac{(1 \cdot 2 + 1) \pm \sqrt{16 - 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1},$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \\ w_2 &= \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.8 Calcule as raízes do polinômio de terceiro grau $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15$.

Resolução: Observe que $P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 27 - 18 + 6 - 15 = 0$, logo $r = 3$ é raiz do polinômio $P(x)$, então segue da Proposição 3.2 que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar+b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

determina as outras raízes de $P(x)$. Observe ainda que $a = 1, b = -2, c = 2$ e $d = -15$, enquanto que

$$P'(3) = 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = 27 - 12 + 2 = 17.$$

Substituindo todos esses valores, obtemos

$$\Omega = b^2 - 3ac = (-2)^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 6 = -2,$$

então substituindo Ω e $P'(r)$ por seus valores correspondentes, vamos ter

$$w_{1,2} = -\frac{(1 \cdot 3 - 2) \pm \sqrt{-2 - 1 \cdot 17}}{2 \cdot 1},$$

de onde obtemos que

$$w_1 = \frac{-1 - \sqrt{19}i}{2} \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{-1 + \sqrt{19}i}{2}.$$

Exemplo 3.9 Calcule as raízes do polinômio de terceiro grau $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$.
Resolução: Observe que $P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 7 = 1 + 3 + 3 - 7 = 0$, logo $r = 1$ é raiz do polinômio $P(x)$, então segue pela Proposição 3.2 que

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

determina as outras raízes de $P(x)$. Observe ainda que $a = 1, b = c = 3$ e $d = -7$, enquanto que

$$P'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3 = 3 + 6 + 3 = 12.$$

Substituindo todos esses valores, obtemos

$$\Omega = b^2 - 3ac = 3^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 9 = 0,$$

então substituindo Ω e $P'(r)$ por seus valores correspondentes, vamos ter

$$w_{1,2} = -\frac{(1 \cdot 1 + 3) \pm \sqrt{0 - 1 \cdot 12}}{2.1},$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} w_1 &= -2 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \\ w_2 &= -2 + \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Os resultados a serem apresentados têm como objetivo propor um método alternativo para resolver equações do terceiro grau, partindo de uma fórmula que simplifica a resolução desse tipo de equação. Nesse momento, apresentamos a seguir o resultado principal do nosso trabalho, que pode ser visto em Silva Filho, Pereira e Castro (2022) num contexto mais geral.

Teorema 4.1 Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, tais que $c^2 = 3bd$ e com seu termo independente não-nulo. Dessa forma, temos que as raízes de $P(x)$ são obtidas pela fórmula

$$x = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} - c}.$$

Demonstração: Considere o seguinte polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então queremos resolver a equação

$$P(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ou ainda,

$$bx^2 + cx + d = -ax^3.$$

Como $d \neq 0$, então podemos multiplicar e dividir por tal valor, o que nos dá uma equação equivalente à equação acima, ou seja,

$$3d(bx^2 + cx + d) = 3d(-ax^3) \quad \Longleftrightarrow \quad 3dbx^2 + 3cdx + 3d^2 = -3adx^3,$$

mas $c^2 = 3bd$, temos que a equação acima é equivalente a

$$c^2x^2 + 3cdx + 3d^2 = -3adx^3.$$

Sabendo que $d \neq 0$, podemos multiplicar a equação anterior por $9d$ para obtermos

$$9d(c^2x^2 + 3cdx + 3d^2) = 9d(-3adx^3),$$

logo,

$$\begin{aligned} & 9c^2dx^2 + 27cd^2x + 27d^3 = -27ad^2x^3 \\ \Longleftrightarrow\ & c^3x^3 + 9c^2dx^2 + 27cd^2x + 27d^3 = (c^3 - 27ad^2)x^3 \\ \Longleftrightarrow\ & (cx + 3d)^3 = (c^3 - 27ad^2)x^3. \end{aligned}$$

Sendo $c^2 = 3bd$, então, fazendo as manipulações algébricas adequadas na expressão $c^3 - 27ad^2$, obtemos

$$c^3 - 27ad^2 = 3bcd - 27ad^2 = 3d(bc - 9ad),$$

assim, temos que a equação que envolve x é equivalente a

$$(cx + 3d)^3 = 3d(bc - 9ad)x^3.$$

Uma vez que $x \neq 0$, pois $d \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por x^3 e reunir $cx + 3d$ e x sob o mesmo expoente, obtendo

$$\frac{(cx + 3d)^3}{x^3} = 3d(bc - 9ad) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{cx + 3d}{x} = \sqrt[3]{3d(bc - 9ad)},$$

ou equivalentemente,

$$c + \frac{3d}{x} = \sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3d}{x} = \sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} - c.$$

Observe que na expressão do lado direito da igualdade da última equação, como $3bd = c^2$, temos

$$3d(bc - 9ad) = 3bdc - 27ad^2 = c^3 - 27ad^2.$$

Observe que $d \neq 0$ e $a \neq 0$, já que o polinômio é de terceiro grau com termo independente não-nulo, logo $c^3 - 27ad^2 \neq c^3$ e isso nos garante que $\sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} - c \neq 0$. Concluímos então que

$$x = \frac{3d}{\sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} - c}$$

expressa as raízes de $P(x)$. Além disso, a expressão acima encontrada para x engloba as três raízes do polinômio, pois a raiz cúbica de um número real não nulo possui 3 soluções, uma real e duas complexas conjugadas. $\square$

Agora, considerando as raízes cúbicas de $3d(bc - 9ad)$, podemos descrever as raízes do polinômio a partir da raiz cúbica real dessa expressão.

Corolário 4.1 Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais que satisfazem $c^2 = 3bd$ e com termo independente não-nulo, então suas raízes são dadas por

$$r = \frac{3d}{\delta - c} \qquad \text{e} \qquad w_{1,2} = -\frac{6d}{(2c + \delta)^2 + 3\delta^2}[(2c + \delta) \pm \sqrt{3}\delta i],$$

onde δ é a raiz cúbica real de $3d(bc - 9ad)$.

Demonstração: Inicialmente observe que $\delta - c \neq 0$, uma vez que $\delta = \sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} \neq c$. Pela Fórmula de De Moivre e pelo Teorema 4.1, temos

$$r = \frac{3d}{\delta - c} \qquad \text{e} \qquad w_{1,2} = \frac{3d}{\delta\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - c} = -\frac{6d}{(\delta + 2c) \pm \sqrt{3}\delta i},$$

então multiplicando o numerador e o denominador de w_1 e w_2 por $(\delta + 2c) - \sqrt{3}\delta i$ e $(\delta + 2c) + \sqrt{3}\delta i$, respectivamente, obtemos ainda

$$r = \frac{3d}{\delta - c}, \qquad \text{e} \qquad w_{1,2} = -\frac{6d}{(\delta + 2c)^2 + 3\delta^2}[(\delta + 2c) \pm \sqrt{3}\delta i],$$

o que conclui a demonstração. $\square$

A partir do exposto, podemos ver diretamente o seguinte corolário quanto à quantidade de raízes reais do polinômio.

Corolário 4.2 Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais que satisfazem $c^2 = 3bd$, então este admite no máximo duas raízes reais distintas.

Demonstração: Decorre diretamente do Corolário 4.1, pois caso $d \neq 0$, temos apenas uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas ou três raízes reais iguais. De fato, no caso em que $\delta = 0$ temos

$$w_{1,2} = -\frac{6d}{4c^2}(2c) = -3\frac{d}{c} \Rightarrow r = w_{1,2},$$

logo temos três raízes reais iguais. No caso em que $\delta \neq 0$, temos que $w_{1,2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ e neste caso, teremos apenas uma raiz real e o resultado está provado, pois

$$w_{1,2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{3}d\delta}{(2c+\delta)^2 + 3\delta^2} = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{3}d\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0.$$

Em resumo, no caso em que $d \neq 0$ as únicas possibilidades em relação à quantidade de raízes reais são: três raízes reais iguais (uma única raiz real com multiplicidade três) ou uma única raiz real (as demais são complexas e não reais).

Se $d = 0$, como $c^2 = 3bd$, temos $c^2 = 0$, donde $c = 0$. Assim, o polinômio se torna apenas $P(x) = ax^3 + bx^2$, o qual possui apenas 0 e $-\frac{b}{a}$ como raízes. Neste caso, se $b = 0$, as três raízes serão nulas, e se $b \neq 0$, teremos 2 raízes reais distintas para o polinômio.

Por fim, este último corolário fala a respeito da possibilidade da mudança de uma variável para que possamos obter a condição $c^2 = 3bd$ e possamos assim usar a fórmula do Teorema 4.1.

Corolário 4.3 Um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ do terceiro grau sobre os reais possui no máximo duas raízes reais distintas, se e somente se, existe uma constante $t \in \mathbb{R}$, tal que o polinômio

$$P_t(x) = P(x+t) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t$$

satisfaz a relação $c_t^2 = 3b_t d_t$.

Demonstração: Dividimos a demonstração em duas partes, as quais descrevemos a seguir:

1ª Parte: Admita que $P(x)$ possui no máximo duas raízes reais distintas.

Como todo polinômio do terceiro grau com coeficientes reais possui pelo menos uma raiz real, digamos $r \in \mathbb{R}$, podemos definir o polinômio $\widetilde{P}(y) := P(y + r)$. Para tal polinômio temos:

$$\begin{aligned} P(y+r) &= a(y+r)^3 + b(y+r)^2 + c(y+r) + d \\ &= a(y^3 + 3y^2r + 3yr^2 + r^3) + b(y^2 + 2yr + r^2) + c(y+r) + d \\ &= ay^3 + (3ar+b)y^2 + (3ar^2 + 2br + c)y + (ar^3 + br^2 + cr + d), \end{aligned}$$

onde $ar^3 + br^2 + cr + d = 0$, pois r é raiz do polinômio $P(x)$. Daí

$$P(y+r) = Ay^3 + By^2 + Cy,$$

onde $A = a$, $B = 3ar+b$ e $C = 3ar^2+2br+c$ e, portanto, $\widetilde{P}(y)$ possui termo independente nulo.

Por meio de um polinômio $P(x)$, obtemos um outro polinômio com o termo independente nulo, de maneira que podemos supor

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c),$$

com $b^2 - 4ac \leq 0$, pois $ax^2 + bx + c = 0$ possui no máximo uma raiz real. Vamos olhar para a expressão de $P_t(x)$ para t arbitrário:

$$\begin{aligned} P_t(x) &= P(x+t) = a(x+t)^3 + b(x+t)^2 + c(x+t) \\ &= ax^3 + (3at+b)x^2 + (3at^2 + 2bt + c)x + (at^3 + bt^2 + ct) \\ &= a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t. \end{aligned}$$

Assim, vamos considerar dois casos:

1° Caso: $b^2 = 3ac$.

Fazendo $t = -\dfrac{b}{3a}$, temos $b_t = 0$ e

$$\begin{aligned} c_t &= 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c \\ &= \frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c \\ &= \frac{3ac - b^2}{3a} \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto $b_t = c_t = 0$ e assim $P_t(x)$ satisfaz $c_t^2 = 3b_t d_t$ para $t = -\dfrac{b}{3a}$.

2° Caso: $b^2 \neq 3ac$.

Como vimos acima na expressão de $P_t(x)$ para t arbitrário, vamos observar qual condição sobre t faz $c_t^2 = 3b_t d_t$ seja satisfeita:

$$\begin{aligned} & c_t = 3b_t d_t \\ \iff\ & (3at^2 + 2bt + c)^2 = 3(3at+b)(at^3 + bt^2 + ct) \\ \iff\ & 9a^2t^4 + 4b^2t^2 + c^2 + 12abt^3 + 6act^2 + 4bct = 9a^2t^4 + 12abt^3 + 9act^2 + 3bt^2 + 3bct \\ \iff\ & (b^2 - 3ac)t^2 + bct + c^2 = 0. \end{aligned}$$

O valor de t que satisfaz a última igualdade obtida será uma raiz da equação quadrática $(b^2 - 3ac)t^2 + bct + c^2 = 0$. Pela Fórmula de Bháskara, encontrada em Lima et al (2012, p. 122), temos

$$\begin{aligned} t &= \frac{-bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 4(b^2 - 3ac)c^2}}{2(b^2 - 3ac)} \\ &= \frac{-bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 4b^2c^2 + 12ac^3}}{2(b^2 - 3ac)} \\ &= \frac{-bc \pm \sqrt{-3b^2c^2 + 12ac^3}}{2(b^2 - 3ac)} \\ &= \frac{-bc \pm \sqrt{3c^2(-b^2 + 4ac)}}{2(b^2 - 3ac)} \\ &= \frac{-bc \pm c\sqrt{3(-b^2 + 4ac)}}{2(b^2 - 3ac)} \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{-b \pm \sqrt{-3(b^2-4ac)}}{2(b^2-3ac)}c,$$

e assim para $t = \frac{-b+\sqrt{-3(b^2-4ac)}}{2(b^2-3ac)}c$, tem-se que $P_t(x)$ satisfaz $c_t^2 = 3b_t d_t$, como queríamos. Observe ainda que temos $b^2 - 4ac \leq 0$, portanto $t \in \mathbb{R}$.

2ª Parte: Sendo $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, suponhamos que $P_t(x) = P(x+t)$ possui os coeficientes que satisfazem $c_t^2 = 3b_t d_t$, então pelo Corolário 4.2, conclui-se que o polinômio $P_t(x)$ possui no máximo duas raízes reais distintas. Agora, sendo r_1 e r_2 as raízes reais distintas de $P_t(x)$ e definindo $s_1 := r_1 + t$ e $s_2 := r_2 + t$, temos que s_1 e s_2 são reais distintos e além disso,

$$P(s_1) = P(r_1 + t) = P_t(r_1) = 0$$

e

$$P(s_2) = P(r_2 + t) = P_t(r_2) = 0,$$

ou seja, s_1 e s_2 são raízes reais distintas de $P(x)$.

Suponha por absurdo que exista s_3 real tal que $s_3 \neq s_1$ e $s_3 \neq s_2$ com $P(s_3) = 0$, isto é, s_3 é uma terceira raiz real distinta das duas anteriores, de modo que $P(x)$ possua três raízes reais distintas, então para $r_3 := s_3 - t$ teríamos que

$$P_t(r_3) = P(r_3 + t) = P(s_3) = 0,$$

isto é, s_3 seria uma terceira raiz real de $P_t(x)$ e, além disso r_3 seria distinta das duas raízes reais r_1 e r_2, isto contradiz o fato de $P_t(x)$ possuir no máximo duas raízes reais distintas, portanto, $P(x)$ admite, também, no máximo duas raízes reais distintas. $\square$

Na sequência, apresentamos alguns exemplos, onde aplicamos os resultados obtidos, onde verificaremos as condições necessárias para o uso da nova fórmula e caso necessário faremos a mudança de variável.

Exemplo 4.1 Determine as raízes da equação $x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$.

Solução: Observe que

$$c^2 = 3^2 = 9 = 3bd = 3 \cdot 1 \cdot 3 \quad \text{e} \quad bc - 9ad = 1 \cdot 3 - 9 \cdot 1 \cdot 3 = 3 - 27 = -24,$$

logo

$$\sqrt[3]{3d(bc - 9ad)} = \sqrt[3]{-216} = -6, -6\omega \text{ e } -6\overline{\omega},$$

onde $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Usando a fórmula do Teorema 4.1, temos que

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{3 \cdot 3}{6+3} = -1, \\ w_2 &= -\frac{3 \cdot 3}{6\omega + 3} = -\frac{9}{-3 + 3\sqrt{3}i + 3} = \frac{3}{\sqrt{3}i} = -\sqrt{3}i \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$w_3 = -\frac{3\cdot 3}{6\overline{\omega}+3} = -\frac{9}{-3-3\sqrt{3}i+3} = -\frac{3}{\sqrt{3}i} = \sqrt{3}i$$

são as raízes procuradas.

Exemplo 4.2 Calcule as raízes da equação $x^3 + x^2 + 6x + 12 = 0$.

Solução: Percebemos que a relação entre os coeficientes $c^2 = 3bd$ é verdadeira, pois

$$c^2 = 6^2 = 36 = 3bd = 3\cdot 1\cdot 12$$

e

$$bc - 9ad = 1\cdot 6 - 9\cdot 1\cdot 12 = 6 - 108 = -102,$$

logo

$$\sqrt[3]{3d(bc-9ad)} = \sqrt[3]{-3672} = -6, -6\sqrt[3]{17}\omega \text{ e } -6\sqrt[3]{17}\overline{\omega}.$$

Usando a fórmula do Teorema 4.1, temos que

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{3\cdot 12}{6\sqrt[3]{17}+6} = -\frac{6}{\sqrt[3]{17}+1}, \\ w_2 &= -\frac{3\cdot 12}{6\sqrt[3]{17}\omega+6} = \frac{12}{(\sqrt[3]{17}-2)-\sqrt[3]{17}\sqrt{3}i} \quad \text{e} \\ w_3 &= -\frac{3\cdot 12}{6\sqrt[3]{17}\overline{\omega}+6} = \frac{12}{(\sqrt[3]{17}-2)+\sqrt[3]{17}\sqrt{3}i}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{3\cdot 12}{6\sqrt[3]{17}+6} = -\frac{6}{\sqrt[3]{17}+1}, \\ w_2 &= \frac{3}{\sqrt[3]{289}-\sqrt[3]{17}+1}[(\sqrt[3]{17}-2)+\sqrt[3]{17}\sqrt{3}i] \quad \text{e} \\ w_3 &= \frac{3}{\sqrt[3]{289}-\sqrt[3]{17}+1}[(\sqrt[3]{17}-2)-\sqrt[3]{17}\sqrt{3}i] \end{aligned}$$

são as raízes procuradas.

Exemplo 4.3 Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 7$.

Solução: Percebemos que a relação entre os coeficientes $c^2 = 3bd$ não é verdadeira, pois

$$c^2 = 11^2 = 121 \neq 105 = 3\cdot(-5)\cdot(-7) = 3bd,$$

entretanto podemos efetuar manipulações em $P(x)$ de forma a satisfazer o Teorema 4.1. Assim, faz-se necessário determinarmos o valor para $t \in \mathbb{R}$ tal que $P_t(x) = P(x+t) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t$ satisfaça a condição $c_t^2 = 3b_t d_t$.

Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned} P(x+t) &= (x+t)^3 - 5(x+t)^2 + 11(x+t) - 7 \\ &= x^3 + (3t-5)x^2 + (3t^2-10t+11)x + (t^3-5t^2+11t-7) \\ &= a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t, \end{aligned}$$

logo

$$c_t^2 = 3b_t d_t \Leftrightarrow (3t-10t+11)^2 = 3(3t-5)(t^3-5t^2+11t-7),$$

expandindo as expressões na igualdade do lado direito, temos
$9t^4+100t^2+121-60t^3+66t^2-220t = 9t^4-45t^3+99t^2-63t-15t^3+75t^2-165t+105$,
assim, simplificando a expressão anterior, temos

$$8t^2-8t-16=0 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \text{ ou } t=-1.$$

Considerando $t=2$, temos

$$P_2(x)=P(x+2)=x^3+x^2+3x+3,$$

que é o polinômio do Exemplo 4.1.

Como $P_2(x)=P(x+2)$, então a é raiz de $P_2(x)$ se, e somente se, $a+2$ é raiz de $P(x)$, logo as raízes de $P(x)$ são obtidas somando 2 nas raízes de $P_2(x)$, desse modo, obtemos

$$w_1=1, \qquad w_2=2-\sqrt{3}i \qquad \text{e} \qquad w_3=2+\sqrt{3}i,$$

que são as raízes de $P(x)$.

Exemplo 4.4 Determine as raízes o polinômio $P(x)=x^3-2x^2+3x-6$.

Solução: Percebemos que a relação entre os coeficientes $c^2=3bd$ não é verdadeira, pois

$$c^2=3^2=9\neq 36=3\cdot(-2)\cdot(-6)=3bd,$$

entretanto podemos efetuar manipulações em $P(x)$ de forma a satisfazer o Teorema 4.1. Assim, faz-se necessário determinarmos o valor para $t\in\mathbb{R}$ tal que $P_t(x)=P(x+t)=a_tx^3+b_tx^2+c_tx+d_t$ satisfaça a condição $c_t^2=3b_td_t$.

Nesse sentido, temos que

$$\begin{aligned} P(x+t) &= (x+t)^3-2(x+t)^2+3(x+t)-6 \\ &= x^3+(3t-2)x^2+(3t^2-4t+3)x+(t^3-2t^2+3t-6) \\ &= a_tx^3+b_tx^2+c_tx+d_t, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} c_t^2=3b_td_t &\Leftrightarrow (3t^2-4t+3)^2=3(3t-2)(t^3-2t^2+3t-6) \\ &\Leftrightarrow 9t^4-24t^3+34t^2-24t+9=9t^4-24t^3+39t^2-72t+36 \\ &\Leftrightarrow 5t^2-48t+27=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{5} \text{ ou } t=9. \end{aligned}$$

Considerando $t=9$, temos

$$P_9(x)=P(x+9)=x^3+25x^2+210x+588.$$

Percebemos que a relação entre os coeficientes $(c')^2=3b'd'$ é verdadeira, pois

$$(c')^2=210^2=44100=3\cdot 25\cdot 588=3b'd'$$

e

$$b'c'-9a'd'=25\cdot 210-9\cdot 1\cdot 588=5250-5292=-42,$$

logo

$$\sqrt[3]{3d'(b'c'-9a'd')}=\sqrt[3]{-74088}=-42,\ -42\omega \text{ e } -42\overline{\omega},$$

Usando a fórmula do Teorema 4.1, temos que

$$w_1 = \frac{3\cdot 588}{-42-210}=\frac{1764}{-252}=-7,$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{3 \cdot 588}{-42\omega - 210} = \frac{1764}{-189 - 21\sqrt{3}i} = -9 + \sqrt{3}i \quad \text{e} \\ w_3 &= \frac{3 \cdot 588}{-42\overline{\omega} - 210} = \frac{1764}{-189 + 21\sqrt{3}i} = -9 - \sqrt{3}i, \end{aligned}$$

então as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$ são

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 + 9 = 2, \\ x_2 &= -9 - \sqrt{3}i + 9 = -\sqrt{3}i \quad \text{e} \\ x_3 &= -9 + \sqrt{3}i + 9 = \sqrt{3}i \end{aligned}$$

são as raízes procuradas.

5 CONCLUSÃO

Diante dos estudos realizados, percebe-se a dificuldade de se resolver equações do terceiro grau fazendo-se uso da fórmula de Cardano-Tartaglia, por isso vimos a necessidade de uma abordagem mais simples para a resolução de algumas equações. Foi nesse ponto de vista que desenvolvemos, neste trabalho, uma fórmula que simplifica de forma hábil o processo de encontrar as raízes de equações do terceiro grau, agilizando a resolução delas dado que as condições sejam atendidas. Para uma versão mais geral desse resultado, recomendamos ao leitor o artigo de Silva Filho, Pereira e Castro (2022). Dessa maneira, esperamos que este trabalho possa ser um ponto de partida para futuras pesquisas acadêmicas semelhantes que contribuam, assim como este projeto, para a árdua e prazerosa missão de repassar o conhecimento matemático para os alunos, de maneira que, em um futuro próximo, haja ampliação dos estudos na área.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo, **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

DOMINGUES, Hygino H. IEZZI, Gelson **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: editora Atual, 2003.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, Elon Lages. A Equação do terceiro grau. **Matemática Universitária**, v. 5, p. 10-23, 1987.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1.** 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: Paiva**. 1. ed., v. 3. São Paulo: Moderna, 2009.

PEREIRA, Odete Elana Sousa; SILVA FILHO, João Francisco da. O Método de Newton-Raphson e as Funções Polinomiais do Terceiro Grau. **Matemática e Estatística em Foco**, v. 5, n. 1, p. 22-36, 2017.

PEREIRA, Odete Elana Sousa; SILVA FILHO, João Francisco da. Revisitando as Equações do Terceiro Grau. **Revista Professor de Matemática Online**. v. 7(2), 205-214, 2019.

SILVA FILHO, João Francisco da; PEREIRA, Odete Elana Sousa; CASTRO, Fábio Cézar Silveira de. Simplificando a Resolução da Equação do Terceiro Grau. **Revista Professor de Matemática Online**. v. 10, p. 440-453, 2022.

SOARES, Márcio Gomes, **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.