

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PAULO JULIO DE FREITAS

ATIVIDADES PRÁTICAS DE MATEMÁTICA APLICADAS NA TOPOGRAFIA

TRÊS LAGOAS - MS
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

PAULO JULIO DE FREITAS

ATIVIDADES PRÁTICAS DE MATEMÁTICA APLICADAS NA TOPOGRAFIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas – UFMS, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

TRÊS LAGOAS - MS
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PAULO JULIO DE FREITAS

**ATIVIDADES PRÁTICAS DE MATEMÁTICA APLICADAS NA
TOPOGRAFIA**

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional, da Universidade Federal de Mato
Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas –
UFMS, como requisito para obtenção do título
de Mestre em Matemática sob a orientação do
Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva
UFMS/CPTL

Prof. Dr. André Vicente
Unioeste

TRÊS LAGOAS - MS
2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde, sabedoria e assim conseguir concluir essa etapa da minha vida.

A minha esposa e companheira Janaini, que teve toda compreensão e paciência, durante o tempo de estudos do mestrado e que sempre me apoiou nos momentos de dificuldade.

Aos meus pais, Paulo e Ivone, por estarem sempre comigo em todos os momentos da minha vida me dando suporte, incentivo e me ajudando a alcançar meus objetivos. Aos meus irmãos Geanlucas e Luana que sempre estiveram do meu lado, pela colaboração e apoio durante essa etapa.

Agradeço ao Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza pelas orientações e os conselhos no desenvolvimento deste trabalho. Aos Professores do Curso Mestrado PROFMAT por todo conhecimento transmitido.

Os colegas de sala da Turma do PROFMAT 2019, pela amizade no decorrer do curso, pelos aprendizados adquiridos e compartilhados, e toda descontração no período de estudo.

RESUMO

Este trabalho apresenta exemplos de atividades práticas de matemática utilizando conceitos do ensino médio aplicadas na topografia. Inicialmente será apresentada uma breve introdução à topografia, seu histórico, definições, e referencial teórico matemático com todas as demonstrações dos conceitos que serão utilizados nas atividades práticas. O referencial topográfico ajudará o professor de matemática a ter mais familiaridade nos assuntos relacionados à topografia. Ao final, o projeto didático é iniciado com a construção de um teodolito caseiro, para fazer as medições de ângulos, após tem-se a apresentação de vários exemplos de atividades práticas envolvendo os assuntos da topografia como a determinação de distâncias verticais e horizontais, determinação da área de terrenos poligonais e também a representação em escala dos levantamentos. Assim, com estas atividades o professor terá um ensino bastante atrativo e contextualizado.

Palavras-chave: Topografia, Trigonometria, Geometria, Teodolito.

ABSTRACT

This work presents examples of practical math activities using high school concepts applied in topography. Initially, a brief introduction to topography, its history, definitions, and theoretical mathematical framework will be presented with all the demonstrations of the concepts that will be used in practical activities. The topographic framework will help the mathematics teacher to become more familiar with the issues related to topography. At the end, the didactic project begins with the construction of a home-made theodolite, to make the measurements of angles, after which there are the presentation of several examples of practical activities involving the topography subjects such as the determination of vertical and horizontal distances, determination the area of polygonal land and also the scale representation of the surveys. So with these activities the teacher will have a very attractive and contextualized teaching.

Keywords: Topography, Trigonometry, Geometry, Theodolite.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Representação Planimétrica e Altimétrica de uma pirâmide.....	16
Figura 2.1: Ângulo	17
Figura 2.2: Divisão dos arcos côngruos.....	18
Figura 2.3: Ângulo em radiano.....	19
Figura 2.4: Relações métricas no triângulo retângulo.....	20
Figura 2.5: Razões trigonométrica.....	21
Figura 2.6: Lei dos senos no triângulo acutângulo.	23
Figura 2.7: Lei dos senos no triângulo obtusângulo.	24
Figura 2.8: Lei dos cossenos no triângulo acutângulo.....	25
Figura 2.9: Lei dos cossenos no triângulo obtusângulo.....	26
Figura 2.10: Quadrado.....	28
Figura 2.11: Retângulo.....	28
Figura 2.12: Paralelogramo	29
Figura 2.13: Área do triângulo.	30
Figura 2.14: Área do triângulo em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido	31
Figura 2.15: Demonstração da fórmula de Heron.....	32
Figura 2.16: Triângulo Esférico.....	34
Figura 3.1: Representação do plano topográfico	36
Figura 3.2: Estaca e Piquete.....	38
Figura 3.3: Balizas	38
Figura 3.4: Nível Cantoneira	39
Figura 3.5: Tripé.....	40
Figura 3.6: Modelos de trena.....	40
Figura 3.7: Teodolito	41
Figura 3.8: Nível de luneta.....	42

Figura 3.9: Estação total.....	42
Figura 3.10: Ângulos Horizontais.....	44
Figura 3.11: Eixo Zênite-Nadir	45
Figura 3.12: Levantamento por poligonação	47
Figura 3.13: Levantamento por intersecção	48
Figura 3.14: Levantamento por Irradiação.....	48
Figura 3.15: Levantamento por triangulação	49
Figura 3.16: Levantamento por ordenadas.....	50
Figura 4.1: Aplicativo para medir ângulo.....	53
Figura 4.2: Celular com a mira.....	53
Figura 4.3: Materiais para construção do teodolito 1	54
Figura 4.4: Teodolito 1	55
Figura 4.5: Medição do ângulo com Teodolito 1	56
Figura 4.6: Teodolito 2	57
Figura 4.7: Medição do ângulo com teodolito 2	57
Figura 4.8: Apontamento do teodolito para o Ponto A.	59
Figura 4.9: Apontamento do teodolito para o Ponto B.	59
Figura 4.10: Determinando o ângulo AOB.....	60
Figura 4.11: Apontando o teodolito para o alinhamento da árvore.....	61
Figura 4.12: Apontando o teodolito para o topo da árvore.....	61
Figura 4.13: Determinando o ângulo da medição.....	62
Figura 4.14: Distâncias inacessíveis.....	63
Figura 4.15: Distância entre dois locais inacessíveis.....	64
Figura 4.16: Vértices do Terreno poligonal	66
Figura 4.17: Levantamento por triangulação	67
Figura 4.18: Latitude e Longitude	72
Figura 4.19: Distância com coordenadas	73

Figura 4.20: Levantamento por coordenadas.	75
Figura 4.21: Altura do edifício I	78
Figura 4.22: Altura do edifício II	79
Figura 4.23: Levantamento do comprimento e altura de uma torre inclinada	80
Figura 4.24: Descobrindo escala do desenho	83
Figura 4.25: Representação do levantamento topográfico	84

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	12
1. INTRODUÇÃO À TOPOGRAFIA.....	14
2. REFERÊNCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO.....	17
2.1 ÂNGULO.....	17
2.2 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULOS RETÂNGULOS.....	19
2.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	21
2.4 LEI DOS SENOS.....	22
2.5 LEI DOS COSSENOS.....	25
2.6 ÁREA DE POLÍGONOS.....	27
2.6.1 Área do quadrado.....	28
2.6.2 Área do retângulo.....	28
2.6.3 Área do paralelogramo.....	29
2.6.4 Área do triângulo.....	29
2.6.4.1 Área de triângulo em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido.....	30
2.6.4.2 Área de triângulo em função da medida dos três lados.....	31
2.7 LEI DOS COSSENOS NOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS.....	33
3. REFERÊNCIAL TEÓRICO TOPOGRÁFICO.....	36
3.1 ERROS NAS MEDIDAS TOPOGRÁFICAS.....	36
3.2 EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NAS MEDIÇÕES.....	37
3.2.1 Acessórios de medição.....	37
3.2.2 Instrumentos de medição.....	40
3.3 ESCALAS.....	43
3.4 MEDIDAS ANGULARES NA TOPOGRAFIA.....	43
3.4.1 Ângulos Horizontais.....	44

3.4.2 Ângulos Verticais	45
3.5 LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO PLANIMÉTRICO.....	46
3.5.1 Levantamento por poligonação.....	46
3.5.2 Levantamento por intersecção.....	47
3.5.3 Levantamento por irradiação	48
3.5.4 Levantamento por coordenadas	49
3.5.5 Levantamento por triangulação	49
3.5.6 Levantamento por Ordenada	49
3.6 LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO ALTIMÉTRICO	50
4. PROJETO DIDÁTICO: ATIVIDADES PRÁTICAS DE MATEMÁTICA APLICADAS NA TOPOGRAFIA	52
4.1 CONSTRUINDO UM TEODOLITO.....	52
4.2 METODOLOGIA PARA DETERMINAR MEDIDAS ANGULARES	58
4.3 METODOLOGIA PARA CALCULAR MEDIDAS DE DISTÂNCIAS	62
4.4 METODOLOGIA PARA CALCULAR ÁREAS DE TERRENOS POLIGONAIS.....	66
4.4.1 Levantamento por triangulação	66
4.4.2 Levantamento por coordenadas	71
4.5 METODOLOGIA PARA CALCULAR DISTÂNCIAS VERTICAIS	77
4.6 ATIVIDADES COM ESCALAS.....	82
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
REFERÊNCIAS	87

INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios do professor na atualidade é apresentar os conteúdos de forma contextualizada e atrativa. Pensando nisso, este trabalho tem como objetivo trazer exemplos de atividades práticas, utilizando conteúdo da trigonometria e geometria aplicados na topografia.

A motivação para a elaboração destas atividades surgiu da aula do professor Eduardo Wagner no Programa de Aperfeiçoamento dos Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) referência [13], que apresentou um modelo de aula bastante didático com trigonometria aplicada no cotidiano.

Os conhecimentos na área facilitam a formulação de estratégias e atividades para levar aos alunos a oportunidade de fazer alguns trabalhos feitos por topógrafos utilizando-se de conteúdo do ensino médio.

Nos dias atuais, pelas recomendações das bibliografias [6] e [7], do ensino contextualizado e de interdisciplinaridade, o professor deve apresentar ao aluno onde os conteúdos de matemática são utilizados no cotidiano, e quais aspectos desses conteúdos podem estar alinhados a outra disciplina.

Na própria referência [7], observa-se que a trigonometria pode ser utilizada para fazer medições e cálculos de distâncias inacessíveis, sendo esta a matemática aplicada de forma prática na topografia. Dessa forma, a topografia é uma excelente área para ser trabalhada no ensino de matemática, pois é possível utilizar muitos conteúdos básicos, como a lei dos senos e lei dos cossenos para os cálculos de distâncias horizontais, razões trigonométricas para os cálculos de distâncias verticais e cálculo de áreas com fórmulas variadas para a determinação da área da superfície plana de um determinado local.

Visando a interdisciplinaridade será apresentado o cálculo de distâncias com o uso de coordenadas geográficas, e assim, o professor poderá apresentar os conceitos do globo terrestre com todos os elementos que serão utilizados em sua aula e demonstrando as ligações destes conteúdos com a geografia.

Os conteúdos matemáticos, necessários para a aplicação das atividades práticas, são previstos, para o ensino médio, segundo as referências [6] e [7], exceto para o cálculo de distâncias com coordenadas geográficas, que precisará de conceitos da geometria esférica. Dessa forma, esse tópico será um aprofundamento para os alunos.

O texto foi organizado, pensando no professor que queira utilizar tais atividades práticas em suas aulas, desta forma, foram detalhadas todas as etapas do processo e apresentados todos os conhecimentos prévios necessários para a compreensão dos conteúdos.

No Capítulo 1, foi realizada uma introdução à topografia apresentando que, desde a antiguidade, o homem utiliza a matemática para fazer trabalhos ligados a topografia, como demarcação de propriedades, construção de mapas e obras. Também serão apresentadas as definições da topografia.

No Capítulo 2, será apresentado o referencial teórico matemático, com todos os conceitos matemáticos necessários, que serão utilizados na aplicação das atividades. Este capítulo tem grande relevância, pois servirá de apoio para que o professor mostre para os alunos onde cada conteúdo da matemática será utilizado nas atividades aplicadas.

No Capítulo 3, é apresentado o referencial teórico topográfico para que o professor tenha todos os conhecimentos mínimos da área. Este capítulo servirá de suporte, uma vez que a topografia não é a área de formação dos professores de matemática. Tais conceitos o ajudarão para que ele possa estar preparado para sanar as possíveis dúvidas dos alunos de forma clara e satisfatória, trazendo assim mais segurança em suas aulas.

No Capítulo 4, será apresentado o projeto didático, com exemplos de atividades práticas de matemática utilizando-se os conceitos de topografia. Este capítulo terá a metodologia de como o professor poderá construir um instrumento topográfico caseiro, para fazer as medições dos ângulos, e com esse, será possível determinar a medida de distâncias inacessíveis, a altura de árvores ou edifícios, e também realizar o cálculo de áreas em terrenos poligonais. Também será apresentado, de forma alternativa, o cálculo de distâncias horizontais e áreas utilizando-se os conceitos da geometria esférica. Em uma atividade de fechamento, tem-se a apresentação da escala como meio do aluno representar o levantamento topográfico que foi realizado.

Com isso, os alunos terão uma ótima oportunidade de estar aprendendo conceitos de uma área inexplorada por eles, podendo estimular em alguns alunos o interesse de seguirem o caminho das ciências exatas.

1. INTRODUÇÃO À TOPOGRAFIA

Neste capítulo foram utilizadas as referências [4], [5], [10] e [12].

O homem historicamente sempre teve o hábito de conhecer e explorar o meio em que vive, e com passar do tempo foram percebendo a necessidade de se fazer demarcações de suas terras para o plantio de seus alimentos e fixação de suas residências. Para suprir essas necessidades buscaram alguns conhecimentos para auxiliarem nessas operações, surgindo assim os primeiros conhecimentos e instrumentos topográficos.

Os primeiros povos a desenvolver instrumentos topográficos foram os egípcios e mesopotâmicos, depois vieram também os chineses, hebreus, gregos e romanos. A partir desses instrumentos foi possível a construção de rotas comerciais, mapas topográficos e erguer construções.

Os egípcios utilizavam conceitos da topografia na construção de sistemas de irrigação, elaboração de mapas, construção de pirâmides e dentre outras obras. Relembrando as grandes construções históricas dos povos egípcios, como a pirâmide de Queops, que teve sua construção durante 30 anos, tem sua base aproximadamente quadrada, sendo que seus ângulos internos tem: $90^{\circ}3'2''$; $89^{\circ}56'58''$; $89^{\circ}56'27''$ e $90^{\circ}0'33''$ e também a medida das arestas da base são: 230,25m; 230,45m; 230,39m e 230,35m. A construção dessa pirâmide pode ser considerada um feito bastante expressivo, pois considerando que os instrumentos utilizados na época possuíam uma precisão baixa, se comparado aos instrumentos modernos, podemos considerar estes resultados grandiosos.

Com o passar dos anos os instrumentos topográficos foram evoluindo, sendo que, nos dias atuais temos instrumentos eletrônicos, com interface de fácil manejo e com grande precisão.

O significado da palavra Topografia vem do grego "*TOPOSGRAPHEN*", etimologicamente "*topos*" significa lugar e "*graphen*" equivale a descrição, logo temos que topografia é a descrição de um lugar. Segundo as referências, este significado abrange a algumas definições, como a ciência que tem por objetivo conhecer, descrever e

representar graficamente sobre uma superfície plana porções de terra da superfície terrestre.

Temos que a palavra Geometria também tem origem grega sendo que, “geo” significa terra, enquanto “metria” é medir, logo temos que geometria em sua origem tem significado de medir terra. Com isso podemos concluir que etimologicamente a geometria está inserida na topografia, pois para descrever um determinado local será necessário fazer medições de terra, e assim estará utilizando os conceitos da geometria.

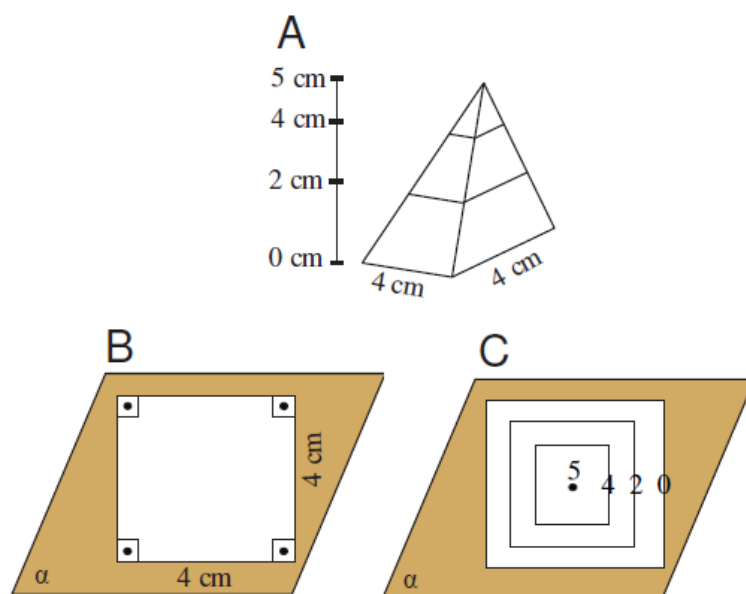
A topografia pode ser entendida como um ramo da Geodésia, a ciência que estuda e determina as formas e dimensões do planeta Terra. Desse modo, a Geodésia é a ciência que estuda a Terra como um todo, enquanto a topografia estuda apenas uma porção limitada da sua superfície terrestre. A Geodésia está fora dos limites deste trabalho, sendo este restrito a topografia.

As operações feitas em campo, como coletar dados para depois serem representados, é denominado como levantamento topográfico, sendo este trabalhado com medidas (lineares e angulares) realizadas em uma porção terrestre, e a partir dos dados podem-se calcular as coordenadas, áreas, volumes, dentre outras. Após os cálculos fazem a representação gráfica em mapas ou plantas.

A topografia pode ser dividida em duas partes: topologia e topometria. A topologia é definida como parte que estuda as formas exteriores da superfície da Terra e as leis que a regem. Por sua vez, a topometria tem como objetivo fazer medições características de uma determinada área da superfície terrestre. Posteriormente também temos a subdivisão da topometria em planimetria e altimetria.

Planimetria é parte da topometria que estuda o terreno levando em consideração medidas planimétricas, ou seja, consideram apenas medidas de distâncias e ângulos horizontais, sem utilizar a ideia de relevo do terreno. Já a Altimetria estuda o terreno considerando medidas altimétricas, como as medidas de relevos, temos então que neste caso apenas as medidas de distância e ângulos na vertical. Conforme a figura 1.1, temos uma pirâmide de base quadrada no espaço em 1.1(A), sua representação planimétrica em 1.1(B) e sua representação altimétrica em 1.1(C).

Figura 1.1: Representação planimétrica e altimétrica de uma pirâmide.



FONTE: Adaptado de Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

Com isso, o objetivo principal da topometria é a representação planimétrica e altimétrica de uma determinada região da superfície terrestre. Dependendo da necessidade da região, a representação poderá abordar simultaneamente os ramos da planimetria e altimetria, assim para estes casos serão denominados como representação planialtimétrica.

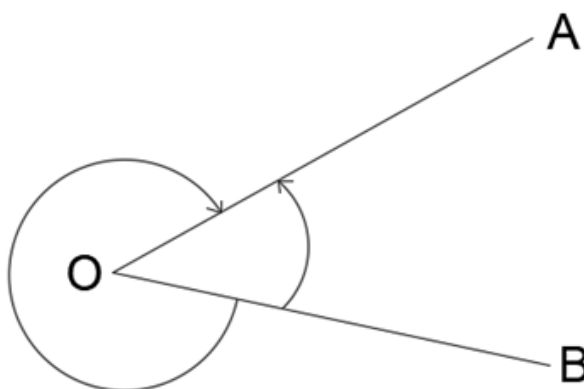
2. REFERÊNCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO

Neste capítulo serão apresentados todos os conceitos matemáticos necessários para a aplicação do projeto didático. As referências utilizadas foram [2], [3], [8], [9], [11] e [14]. Será considerado que o leitor já compreende os conceitos sobre semelhança e congruência de triângulos.

2.1 ÂNGULO

A região formada por duas semirretas de mesma origem recebe o nome de ângulo, ou seja, considere duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ no mesmo plano, a região angular ou simplesmente ângulo de vértice O é uma das duas regiões no plano limitadas pelos lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, segue a representação na figura 2.1.

Figura 2.1: Ângulo.



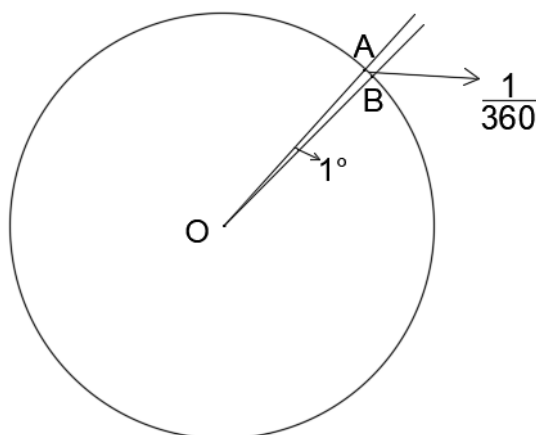
Fonte: Autor.

As duas formas mais utilizadas para representar a unidade de medida dos ângulos são graus (com suas subdivisões minutos e segundos) e radianos. Existem outras formas de representação, porém como estes, em geral, são os mais abordados em sala de aula, vamos nos ater a estes modelos.

Considere uma circunferência, dividindo-a em 360 arcos iguais, temos que cada arco equivale a um ângulo central de 1 grau, que pode ser representado como 1° , assim podemos afirmar que um grau equivale a $1/360$ da circunferência conforme figura 2.2. O uso da divisão do valor 360 vem dos povos babilônios pois eles acreditavam que a

duração do giro do sol em relação a Terra era de 360 dias, com isso 1° seria equivalente o arco percorrido pelo Sol em um dia.

Figura 2.2: Divisão dos arcos côngruos.

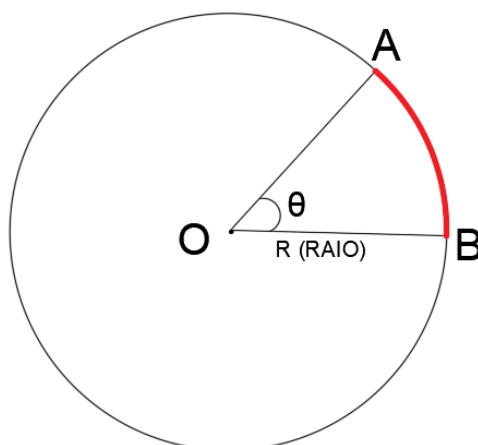


Fonte: Autor.

Seguindo o raciocínio anterior, podemos dividir um grau em 60 arcos iguais, sendo que cada arco terá o valor de um minuto, denotado por $1'$, e repetindo a divisão do arco de um minuto em 60 arcos iguais teremos um segundo que pode ser representado por $1''$. Com isso temos que um grau equivale a 60 minutos ($1^\circ = 60'$) e também um minuto equivale a 60 segundos ($1' = 60''$).

Outra forma de representação do ângulo é o radiano, que neste caso é a proporção do comprimento do arco com seu raio. Por exemplo, considere a figura 2.3, o ângulo θ em radiano equivale ao comprimento do arco AOB dividido pelo raio (R), $\theta_{rad} = \frac{\text{Comprimento do arco } AOB}{\text{Raio}}$, assim, podemos simplificar a definição de um ângulo em radiano, como sendo o número de vezes que o arco referente ao ângulo pode ser dividido com comprimento do raio.

Figura 2.3: Ângulo em radiano.



Fonte: Autor.

Nas atividades práticas será necessária a medição de ângulos, de modo que seja possível determinar as medidas de distâncias inacessíveis e posteriormente a área da superfície do local.

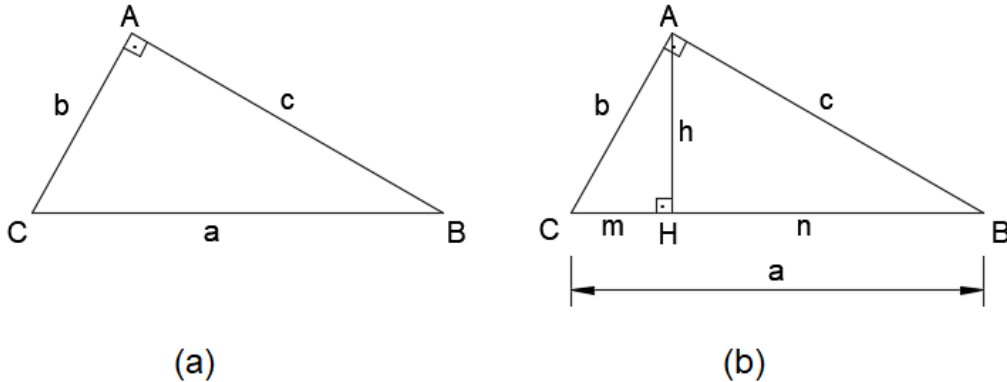
2.2 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Nesta seção, será apresentado as relações métricas no triângulo retângulo devido as semelhanças entre eles. Dentre as relações temos o teorema de Pítágoras.

Teorema de Pitágoras 2.1: Seja um triângulo retângulo, temos que o quadrado da medida da hipotenusa, equivale a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração: Considere um triângulo ABC , retângulo em A , tal que, a hipotenusa mede “ a ” e seus catetos medem “ b ” e “ c ” figura 2.4(a). Assim, marque o ponto H no segmento $\overline{BC}$, tal que, o segmento $\overline{AH}$ seja a altura relativa ao vértice A , e com medida “ h ”, também denotamos o segmentos $\overline{CH}$ como “ m ” e $\overline{HB}$ como “ n ” figura 2.4(b).

Figura 2.4: Relações métricas no triângulo retângulo.



FONTE: Autor.

Note a semelhança, caso AA entre os três triângulos ΔABC , ΔACH e ΔAHB representados na figura 2.4(b), pois em $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ temos ângulo $\hat{C}$ comum, $\hat{AHC} = \hat{BAC} = 90^\circ$, em $\Delta ABC \sim \Delta ABH$ temos ângulo $\hat{B}$ comum e $\hat{AHB} = \hat{BAC} = 90^\circ$ e em $\Delta ABH \sim \Delta ACH$ temos ângulo $\hat{AHC} = \hat{BHA} = 90^\circ$ e $\hat{ACH} = \hat{BAH}$.

Na semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔACH , temos as correspondências dos vértices $\hat{A} \leftrightarrow \hat{H}$, $\hat{B} \leftrightarrow \hat{A}$ e $\hat{C} \leftrightarrow \hat{C}$, assim temos as seguintes proporções:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = m \cdot a. \quad (2.1)$$

Considerando a semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔABH temos as correspondências dos vértices $\hat{A} \leftrightarrow \hat{H}$, $\hat{B} \leftrightarrow \hat{B}$ e $\hat{C} \leftrightarrow \hat{A}$, assim temos as seguintes proporções:

$$\begin{aligned} \frac{c}{n} &= \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = n \cdot a, \\ \frac{b}{h} &= \frac{a}{c} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Conforme a semelhança entre os triângulos ΔABH e ΔACH , temos as correspondências dos vértices $\hat{A} \leftrightarrow \hat{C}$, $\hat{B} \leftrightarrow \hat{A}$ e $\hat{H} \leftrightarrow \hat{H}$, assim temos as seguintes proporções:

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = m \cdot n.$$

Somando as igualdades (2.1) e (2.2), encerrando a demonstração do Teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} b^2 = m \cdot a \\ c^2 = n \cdot a \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$$

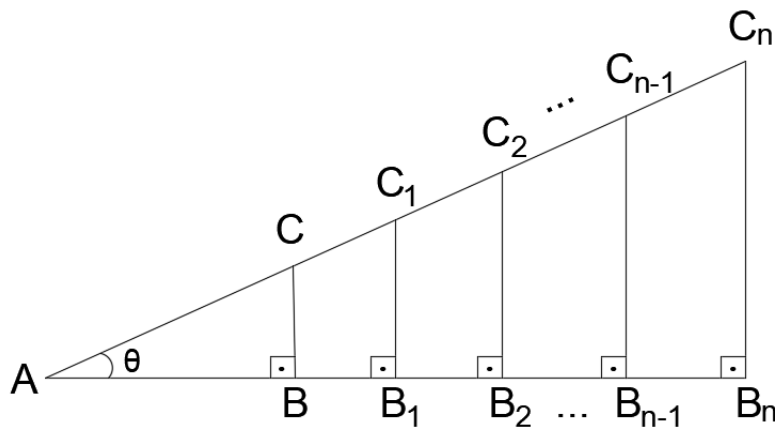
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

O teorema de Pitágoras será utilizado no cálculo de distâncias verticais, em um exemplo prático com uma torre inclinada.

2.3 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Considere dois segmentos de mesma origem $\overline{AC_n}$ e $\overline{AB_n}$, tal que o menor ângulo entre eles denominado de θ é agudo, ou seja, $0 < \theta < 90^\circ$, trace perpendiculares sobre o $\overline{AB_n}$ assim formaremos vários triângulos retângulos de acordo com a figura 2.5, note que todos estes triângulos serão semelhantes pelo caso AA, pois temos θ ângulo em comum e o outro ângulo devido as perpendiculares.

Figura 2.5: Razões trigonométricas.



FONTE: Autor.

Temos as seguintes semelhanças de triângulos: $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \dots \sim \triangle AB_{n-1}C_{n-1} \sim \triangle AB_nC_n$. Com isso teremos as proporções:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1}C_{n-1}}}{\overline{AC_{n-1}}} = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AC_n}}, \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \dots = \frac{\overline{AB_{n-1}}}{\overline{AC_{n-1}}} = \frac{\overline{AB_n}}{\overline{AC_n}}, \\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1}C_{n-1}}}{\overline{AB_{n-1}}} = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{AB_n}}. \end{aligned}$$

Estas razões são denominadas como seno, cosseno e tangente, elas alteram seu valor conforme os valores θ . Dessa forma, temos as seguintes razões:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{AC_1}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1} C_{n-1}}}{\overline{AC_{n-1}}} = \frac{\overline{B_n C_n}}{\overline{AC_n}},$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \dots = \frac{\overline{AB_{n-1}}}{\overline{AC_{n-1}}} = \frac{\overline{AB_n}}{\overline{AC_n}},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{AB_1}} = \dots = \frac{\overline{B_{n-1} C_{n-1}}}{\overline{AB_{n-1}}} = \frac{\overline{B_n C_n}}{\overline{AB_n}}.$$

As razões trigonométricas, serão aplicadas nas atividades para determinar as distâncias verticais, assim, será possível determinar a altura de árvores, prédios e torres.

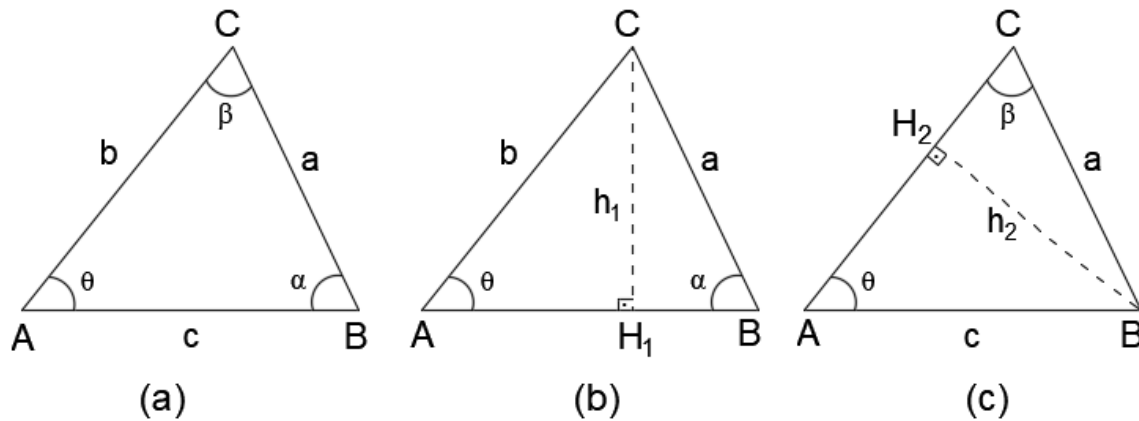
2.4 LEI DOS SENOS

Nesta seção temos a lei dos senos, este conceito será utilizado nas atividades práticas para determinar distância a pontos inacessíveis. Será demonstrado o teorema para cada natureza do triângulo.

Teorema (Lei dos Senos) 2.2: Seja um triângulo qualquer, temos que a proporção do quociente da medida de um lado, pelo seno do ângulo oposto, equivale ao quociente das medidas de quaisquer dos outros lados, pelos senos dos seus ângulos opostos respectivamente.

Demonstração: Primeiramente, considere um triângulo acutângulo (todos os ângulos são menores que 90°) figura 2.6(a), com suas medidas descritas.

Figura 2.6: Lei dos senos no triângulo acutângulo.



FONTE: Autor.

Marque o ponto H_1 no segmento $\overline{AB}$ no triângulo ΔABC , tal que, $\overline{CH_1}$ seja altura relativa ao vértice C conforme figura 2.6(b), considerando as razões trigonométrica temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen } \theta, \quad (2.3)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{h_1}{a} \Rightarrow h_1 = a \cdot \text{sen } \alpha. \quad (2.4)$$

Igualando as equações (2.3) e (2.4) obtemos:

$$b \cdot \text{sen } \theta = a \cdot \text{sen } \alpha \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \theta} = \frac{b}{\text{sen } \alpha}.$$

Marque o ponto H_2 no segmento $\overline{AC}$ do triângulo ΔABC , tal que, $\overline{BH_2}$ seja a altura relativa ao vértice B conforme figura 2.6(c). Considerando as razões trigonométrica temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen } \theta, \quad (2.5)$$

$$\text{sen } \beta = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen } \beta. \quad (2.6)$$

Igualando as duas proposições (2.5) e (2.6), obtemos:

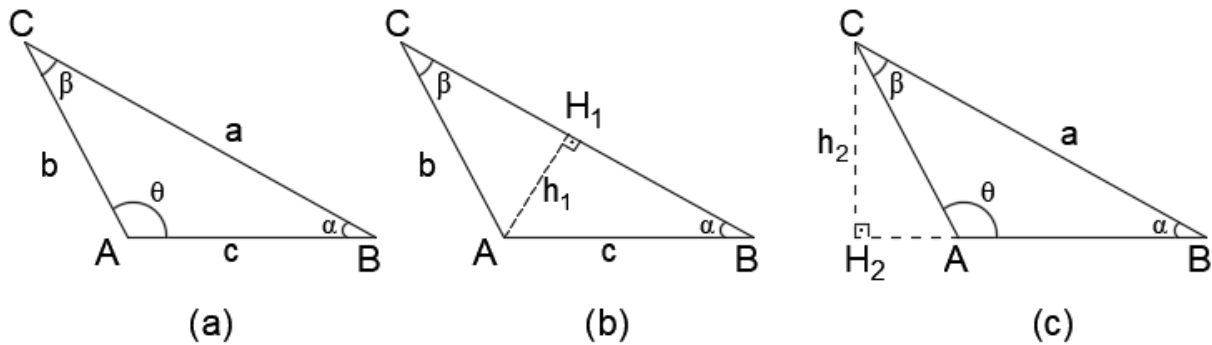
$$c \cdot \text{sen } \theta = a \cdot \text{sen } \beta \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \theta} = \frac{c}{\text{sen } \beta}.$$

Demonstra-se a lei dos senos para todos os triângulos acutângulo.

$$\frac{a}{\text{sen } \theta} = \frac{b}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \beta}.$$

A demonstração segue o mesmo princípio nos triângulos obtusângulo (um ângulo maior que 90° e menor que 180°), considere o triângulo ΔABC com as medidas representadas na figura 2.7(a).

Figura 2.7: Lei dos senos no triângulo obtusângulo.



FONTE: Autor.

Marque o ponto H_1 no triângulo ΔABC , sobre o segmento $\overline{BC}$, tal que, o segmento $\overline{AH_1}$, seja a altura relativa ao vértice A figura 2.7(b), usando as razões trigonométricas temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen} \beta, \quad (2.7)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen} \alpha. \quad (2.8)$$

Igualando as duas equações (2.7) e (2.8) obtemos:

$$b \cdot \text{sen} \beta = c \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow \frac{b}{\text{sen} \alpha} = \frac{c}{\text{sen} \beta}.$$

No prolongamento do segmento $\overline{AB}$, marque o ponto H_2 , tal que, $\overline{CH_2}$ seja a altura relativa ao vértice C figura 2.7(c), usando as razões trigonométricas temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen} \alpha, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{sen } (180^\circ - \theta) &= \frac{h_2}{b}, \text{ como } \text{sen } (180^\circ - \theta) = \text{sen} \theta, \\ h_2 &= b \cdot \text{sen} \theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Igualando as duas proposições (2.9) e (2.10) temos:

$$b \cdot \text{sen} \theta = a \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow \frac{b}{\text{sen} \alpha} = \frac{a}{\text{sen} \theta}.$$

Finalizando a demonstração para triângulos obtusângulos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\beta}.$$

A demonstração do triângulo retângulo é trivial, desta forma fica demonstrado a lei dos senos.

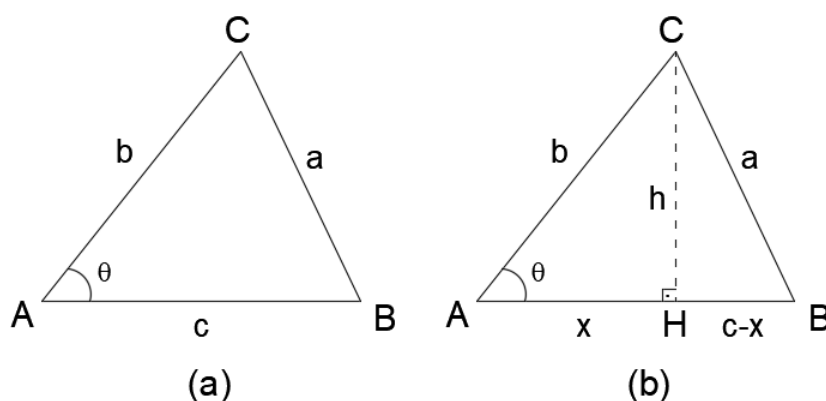
2.5 LEI DOS COSSENOS

Nesta seção temos a lei dos cossenos, esse conceito será utilizado nas atividades práticas para determinar a distância entre dois pontos ambos inacessíveis, a lei dos cossenos é uma generalização do teorema de Pitágoras. A demonstração será apresentada analisando as naturezas do triângulo

Teorema (Lei dos Cossenos) 2.3: Considere um triângulo qualquer, temos que o quadrado da medida de um dos lados, equivale a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraído o dobro do produto das medidas desses lados, pelo cosseno do ângulo compreendido entre eles.

Demonstração: No primeiro caso, considere um triângulo acutângulo $\triangle ABC$, conforme a figura 2.8(a), sendo assim o ângulo $\theta < 90^\circ$, marque o ponto H no segmento $\overline{AB}$, tal que, $\overline{CH}$ seja a altura relativa ao vértice C , segue a representação na figura 2.8(b) com suas medidas e ângulos denominados.

Figura 2.8: Lei dos cossenos no triângulo acutângulo.



FONTE: Autor.

Ainda na figura 2.8(b), no triângulo ΔACH , usando o teorema de Pitágoras e a razão trigonométrica do cosseno, temos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2, \quad (2.11)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\theta. \quad (2.12)$$

No triângulo ΔBCH usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2, \quad (2.13)$$

substituindo (2.11) em (2.13):

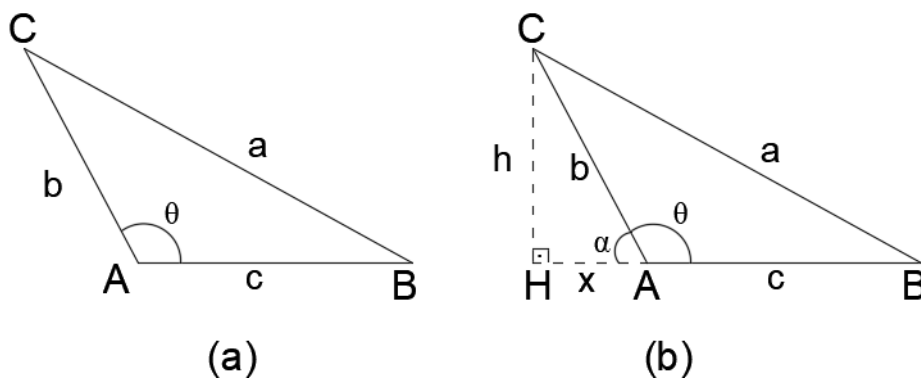
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - x^2 + (c - x)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx, \end{aligned} \quad (2.14)$$

substituindo (2.12) em (2.14), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\theta.$$

De forma análoga, podemos seguir o raciocínio para os outros ângulos. No segundo caso, para um triângulo obtusângulo, conforme a figura 2.9(a), e sendo o ângulo analisado $90^\circ < \theta < 180^\circ$, marque o ponto H no prolongamento do segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{CH}$ seja a altura relativa ao vértice C , conforme a figura 2.9(b).

Figura 2.9: Lei dos cossenos no triângulo obtusângulo.



FONTE: Autor.

Na figura 2.9(b) no triângulo ΔACH , usando o teorema de Pitágoras e a razão trigonométrica do cosseno sabendo que $\alpha + \theta = 180^\circ$, temos:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2, \quad (2.15)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\alpha . \quad (2.16)$$

No triângulo $\triangle BCH$ usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = h^2 + (x + c)^2 , \quad (2.17)$$

substituindo (2.15) em (2.17), obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - x^2 + (x + c)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - x^2 + x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x, \end{aligned} \quad (2.18)$$

substituindo (2.16) em (2.18):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha . \quad (2.19)$$

Como $\alpha + \theta = 180^\circ$, então $\cos\alpha = -\cos\theta$, substituindo em (2.19), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\theta .$$

Está demonstrado a lei do cosseno para $90^\circ < \theta < 180^\circ$, para um terceiro caso no triângulo retângulo com $\theta = 90^\circ$, não necessita fazer a demonstração, pois $\cos\theta = 0$, e neste caso, a relação ficaria idêntica ao teorema de Pitágoras.

2.6 ÁREA DE POLÍGONOS

A área de uma região poligonal em um plano pode ser calculada por várias formas, de acordo com a característica e informações do polígono, intuitivamente a área será um valor positivo. Nas próximas subseções, veremos alguns tipos de polígonos e como podemos calcular suas áreas.

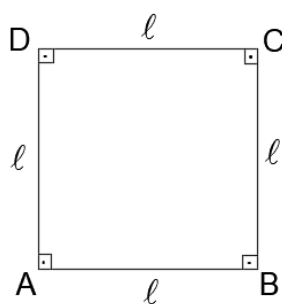
Uma das atividades dos topógrafos é determinar a área da superfície de um local, assim, a seguir, será apresentado fórmulas para calcular área de alguns polígonos, como o quadrado, retângulo, paralelogramo e triângulo, e para outros polígonos com quantidade maior de lados a estratégia será dividir a superfície do polígono e determinar a área de cada parte separada.

2.6.1 Área do quadrado

As características do quadrado são: quadrilátero com todos lados congruentes e também os quatro ângulos congruentes, ou seja, quatro ângulos retos. Na figura 2.10 temos a representação de um quadrado $ABCD$ de lado “ l ”, a área do quadrado é:

$$\text{Área}(ABCD) = l^2.$$

Figura 2.10: Quadrado



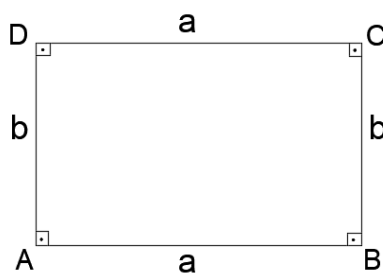
FONTE: Autor.

2.6.2 Área do retângulo

Um polígono denominado como retângulo tem como característica: ser um quadrilátero com quatro ângulos congruentes retos, se $ABCD$ é um retângulo então sua área é o produto de $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$, de acordo com a figura 2.11, temos que a área do retângulo pode ser representada por:

$$\text{Área}(ABCD) = a \cdot b .$$

Figura 2.11: Retângulo.

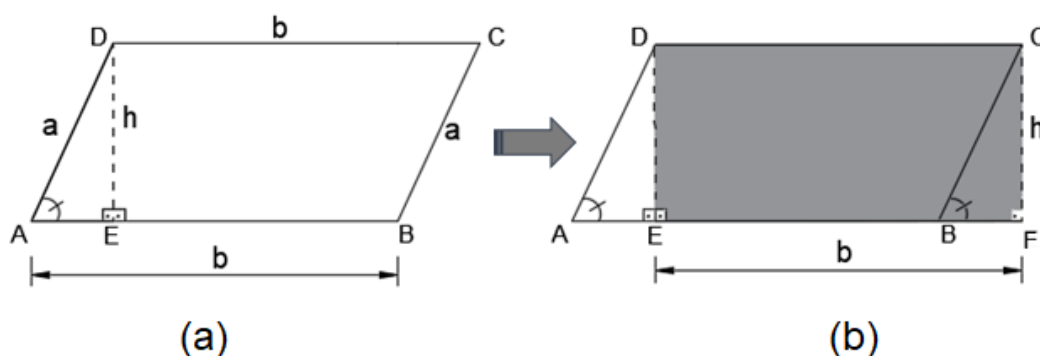


FONTE: Autor.

2.6.3 Área do paralelogramo

Como definição, os paralelogramos são quadriláteros que possuem dois pares de lados opostos paralelos, assim temos que os lados opostos são congruentes e ângulos opostos também são congruentes. Conforme a figura 2.12(a), a área do paralelogramo pode ser calculada pelo produto da base (b) e sua altura (h), ou seja, $\text{Área} = b \cdot h$.

Figura 2.12: Paralelogramo



FONTE: Autor.

A demonstração pode ser feita observando que, na figura 2.12(b), os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BCF$ são congruentes, caso LLL, pois $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AE} = \overline{BF}$ e $\overline{DE} = \overline{CF}$. Todos triângulos congruentes possuem a mesma área, assim segue que:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(BCDE) + \text{Área}(AED)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(BCDE) + \text{Área}(BCF)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(CDEF) = b \cdot h.$$

Concluindo a demonstração da área do paralelogramo $\text{Área}(ABCD) = b \cdot h$.

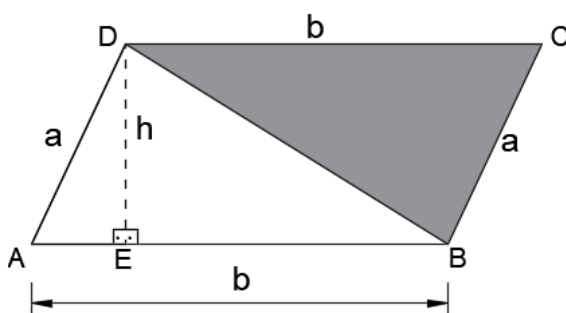
2.6.4 Área do triângulo

A definição de triângulo se restringe a um polígono de três lados. A área de qualquer triângulo é a metade da área delimitada por um paralelogramo que possui a mesma base e altura. Considere a figura 2.13, o paralelogramo $ABCD$ possui base " b " e altura " h ", tracemos a diagonal $\overline{BD}$, percebesse que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$ são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{BD}$ lado em comum, então os dois

triângulos tem a mesma área, logo a área do triângulo $\triangle ABD$ será a metade do paralelogramo $ABCD$.

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABD) &= \frac{1}{2} \cdot \text{Área}(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \\ \text{Área}(ABD) &= \frac{b \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Figura 2.13: Área do triângulo.



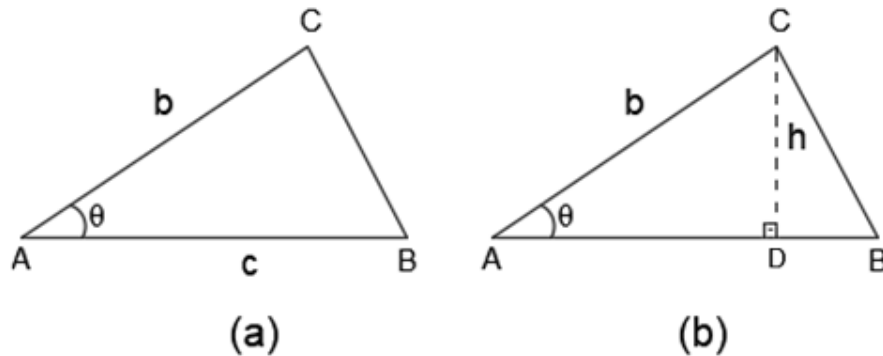
FONTE: Autor.

Ainda sobre o estudo da área do triângulo, veremos mais duas variações de como pode ser calculado a área do triângulo.

2.6.4.1 Área de triângulo em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido

Como já foi definido anteriormente, a área do triângulo é a metade do produto de uma base pela altura, porém, pode acontecer de não ter o valor da altura, nesta subseção, demonstraremos como calcular a área em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido entre eles. Considere a figura 2.14(a), temos as informações sobre o triângulo $\triangle ABC$.

Figura 2.14: Área do triângulo em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido



FONTE: Autor.

Seja o segmento $\overline{AB}$ a base do triângulo, marque o ponto D no segmento $\overline{AB}$, tal que, $\overline{CD}$ seja a altura relativa ao vértice C , conforme já apresentado no item 2.6.4, temos:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{c \cdot h}{2}. \quad (2.20)$$

Usando a razão trigonométrica do seno no triângulo $\triangle ABC$, na figura 2.14(b), temos:

$$\text{sen} \theta = \frac{h}{b} \quad \Rightarrow \quad h = b \cdot \text{sen} \theta, \quad (2.21)$$

substituindo (2.21) em (2.20), obtemos:

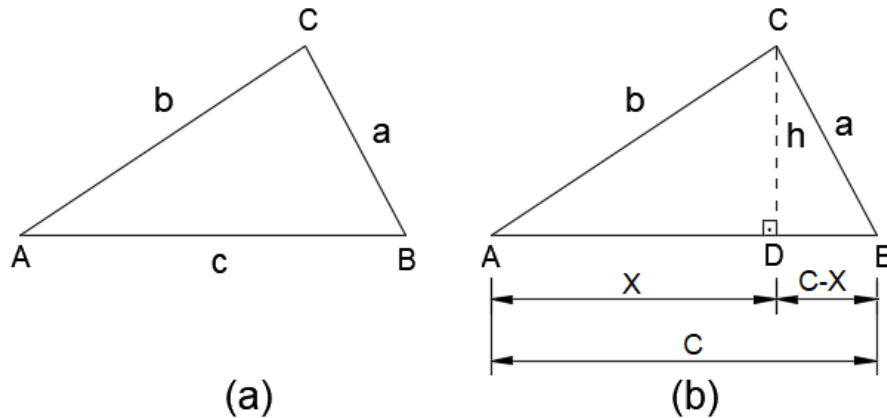
$$\text{Área}(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen} \theta}{2}.$$

Está demonstrado a propriedade desejada.

2.6.4.2 Área de triângulo em função da medida dos três lados

Outra variação, de como pode ser calculado a área do triângulo, em função da medida dos três lados, foi demonstrada pelo famoso matemático Heron de Alexandria. Este caso ficou conhecido como a fórmula de Heron. Considere o triângulo $\triangle ABC$ da figura 2.15(a), com suas devidas medidas, marque o ponto D no segmento $\overline{AB}$, tal que, $\overline{CD}$ seja a altura relativa ao vértice C , conforme figura 2.15(b) considere a medida do segmento $\overline{AD} = x$, logo $\overline{BD} = c - x$.

Figura 2.15: Demonstração da fórmula de Heron



FONTE: Autor.

No triângulo $\triangle ACD$ usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = b^2 - x^2, \quad (2.22)$$

$$h^2 = (b - x) \cdot (b + x). \quad (2.23)$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle BCD$:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2, \quad (2.24)$$

substituindo (2.22) em (2.24):

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - x^2 + (c - x)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \quad \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \quad \Rightarrow \\ x &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

substituindo (2.25) em (2.23), temos:

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(b - \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)}{2c} \right) \cdot \left(b + \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)}{2c} \right) \\ h^2 &= \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2c} \right) \cdot \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}{2c} \right) \\ h^2 &= \frac{[a^2 - (b - c)^2] \cdot [-a^2 + (b + c)^2]}{4c^2} \\ 4c^2 h^2 &= [a^2 - (b - c)^2] \cdot [-a^2 + (b + c)^2] \\ 4c^2 h^2 &= (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b + c) \cdot (-a + b + c). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como o semiperímetro do triângulo $\triangle ABC$ é representado por:

$$p = \frac{a + b + c}{2} \quad \Rightarrow \quad 2p = a + b + c. \quad (2.27)$$

Então podemos reescrever, cada parcela do produto de (2.26), utilizando a propriedade de (2.27):

$$(a + b - c) = a + b - c + c - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$

$$(a - b + c) = a - b + c + b - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$

$$(a + b + c) = 2p,$$

$$(-a + b + c) = -a + b + c + a - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a),$$

substituindo na equação (2.26), temos:

$$4c^2h^2 = 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)$$

$$c^2h^2 = 4p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)$$

$$c \cdot h = \sqrt{4p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$c \cdot h = 2 \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

$$\frac{c \cdot h}{2} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

$$\text{Como } \text{Área}(ABC) = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{c \cdot h}{2}.$$

Obtemos que a área do triângulo pode ser calculada conforme a demonstração do matemático Heron:

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

2.7 LEI DOS COSSENOS NOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Para elaborar o cálculo de distâncias por coordenadas geográficas será necessário abordar tópicos relacionados a geometria esférica, que neste caso, usa o plano de trabalho a superfície esférica. Temos o triângulo esférico sendo uma figura com três arcos de circunferência máximas na superfície esférica contida em algum hemisfério. Segue na figura 2.16 a representação do triângulo esférico ΔABC .

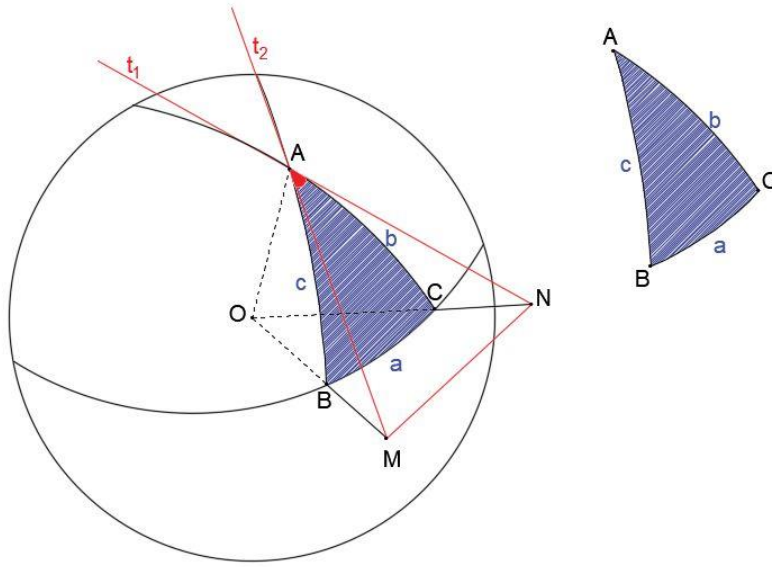
Seja o triângulo esférico sendo os lados os arcos a , b e c , e seus ângulos opostos respectivamente $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, temos a seguinte relação:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A}).$$

Segue a demonstração, na figura 2.16, em que temos a superfície de uma esfera de centro O e raio r , sobre esta temos o triângulo ΔABC de lados a , b e c , estes lados

medidos conforme os ângulos $B\hat{O}C, A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$. Considere as retas t_1 e t_2 tangentes respectivamente as circunferências máximas AB e AC no ponto A . Temos os segmentos AO, OB e OC , sendo o raio da esfera, prolongando o segmento OB até a intersecção com a reta t_2 , temos o ponto M , da mesma forma prolongando OC até a intersecção com t_1 temos o ponto N . Temos os seguintes ângulos retos $O\hat{A}M$ e $O\hat{A}N$.

Figura 2.16: Triângulo Esférico



FONTE: Autor.

Assim, utilizando as razões trigonométricas nos triângulos ΔAOM e ΔAON , temos:

$$\text{sen}(b) = \frac{AN}{ON}, \cos(b) = \frac{AO}{ON}, \text{sen}(c) = \frac{AM}{OM}, \cos(c) = \frac{AO}{OM}, \quad (2.28)$$

usando o teorema de Pitágoras nos triângulos AOM e AON , temos:

$$OM^2 = AO^2 + AM^2, \quad (2.29)$$

$$ON^2 = AO^2 + AN^2, \quad (2.30)$$

somando as expressões (2.29) e (2.30):

$$\begin{aligned} OM^2 + ON^2 &= 2AO^2 + AM^2 + AN^2, \\ 2AO^2 &= (OM^2 - AM^2) + (ON^2 - AN^2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Aplicando a lei dos cossenos (geometria plana) nos triângulos ΔMNO e ΔMNA :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos(a), \quad (2.32)$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos(\hat{A}). \quad (2.33)$$

segue subtraindo (2.33) de (2.32):

$$0 = (OM^2 - AM^2) + (ON^2 - AN^2) - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos(a) + 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos(\hat{A}). \quad (2.34)$$

subtraindo (2.31) de (2.34), temos:

$$\begin{aligned} -2AO^2 &= -2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos(a) + 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos(\hat{A}), \\ 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos(a) &= 2AO^2 + 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos(\hat{A}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

dividindo (2.35) por $2 \cdot OM \cdot ON$, temos:

$$\cos(a) = \frac{AO}{OM} \cdot \frac{AO}{ON} + \frac{AN}{OM} \cdot \frac{AM}{ON} \cdot \cos(\hat{A}). \quad (2.36)$$

substituindo as razões trigonométricas (2.28) em (2.36), temos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A}).$$

De forma análoga segue a lei dos cossenos esféricos para os outros ângulos:

$$\begin{aligned} \cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{B}), \\ \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\hat{C}). \end{aligned}$$

Este conteúdo será utilizado no cálculo de distâncias no globo terrestre, utilizando coordenadas geográficas, será aplicado em uma atividade que no princípio serão calculadas as distâncias entre os lados dos polígonos e posteriormente calculado a área da superfície.

3. REFERÊNCIAL TEÓRICO TOPOGRÁFICO

Neste capítulo serão apresentados os conceitos topográficos necessários para a compreensão e aplicação do projeto em sala de aula, foram utilizadas as referências [1], [4], [5], [10] e [12].

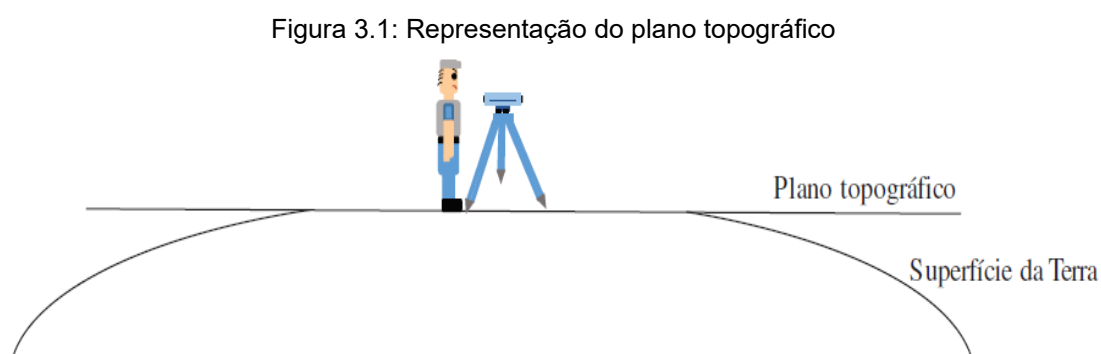
A topografia baseia-se na geometria aplicada, em que se imaginam as figuras geométricas na superfície em estudo. Quando realizado o estudo topográfico, faz-se o levantamento das características do terreno, como formas de figuras geométricas, com suas dimensões, perímetros, posições.

São muitas as áreas que a topografia pode ser utilizada, por exemplo, na Engenharia Civil, Agronomia, Cartografia, Engenharia de Agrimensura, Engenharia Ambiental, Engenharia Florestal, Engenharia Mecânica, Zootecnia, dentre outras.

Com isso, percebemos que a geometria está aplicada em diversas áreas, e pensando unicamente com a topografia, fazendo com que a utilização da topografia no ensino da matemática, melhora o processo de ensino e aprendizagem deixando mais contextualizado.

3.1 ERROS NAS MEDIDAS TOPOGRÁFICAS

Os levantamentos topográficos são elaborados sobre a curvatura da superfície terrestre, porém os dados levantados consideram a superfície sendo plana, denominado como plano topográfico, por isso este levantamento tem um erro chamado de erro esférico, conforme apresentado na figura 3.1:



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

A utilização do plano topográfico faz com que os levantamentos tenham um certo limite devido a simplificação do plano. Segundo a NBR 13133 (Execução de Levantamento Topográfico), o limite deste plano segue as dimensões com aproximadamente 80 km, porém na prática os topógrafos utilizam este limite na dimensão de até 20 km.

Com isso, o profissional deve analisar corretamente os limites em seus levantamentos, pois quanto maior for o plano topográfico, maior será o erro devido a forma esférica da superfície terrestre. Nas atividades práticas será analisado o erro esférico no cálculo da distância entre duas cidades.

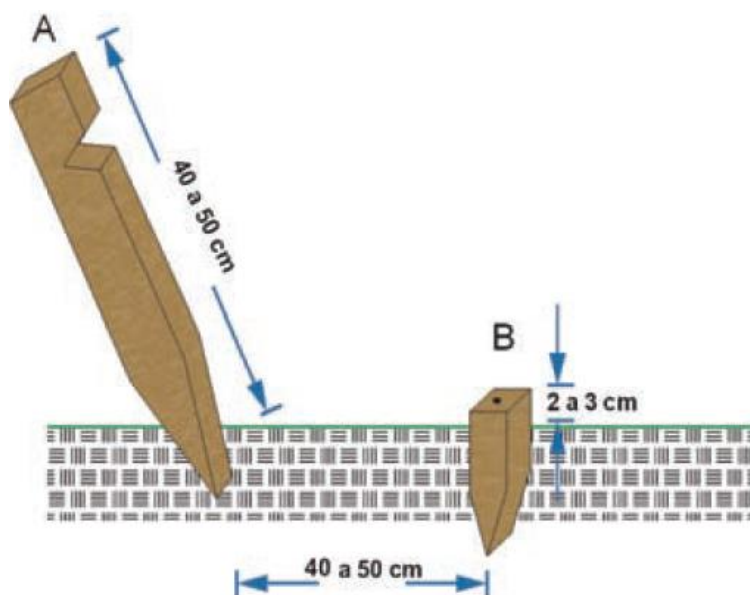
3.2 EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NAS MEDIÇÕES

Os equipamentos são indispensáveis para a realização de um bom levantamento topográfico. Estes equipamentos podem ser divididos em instrumentos (equipamentos que fazem as medições) e acessórios (equipamentos que auxiliam na realização das medições do levantamento).

3.2.1 Acessórios de medição

Um dos acessórios mais utilizados no levantamento topográfico são os piquetes, seu objetivo é demarcar os pontos topográficos utilizados na medição. Devem ser enterrados ficando aparente cerca de 2 a 3cm. Em caso de necessidade de localização de piquetes em terrenos grandes, são utilizadas as estacas, sendo sua função é servir de localização dos piquetes, elas devem ter comprimento aparente de 40 a 50cm de altura. Segue, na figura 3.2(A), a representação de uma estaca e na figura 3.2(B) a representação de um piquete.

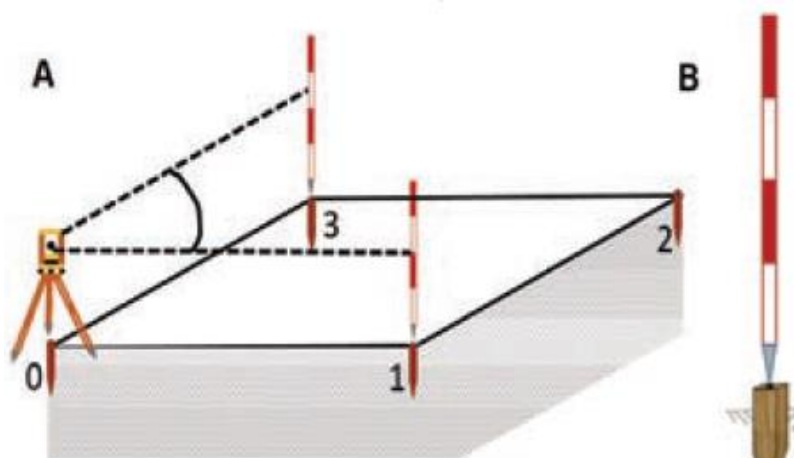
Figura 3.2: Estaca e Piquete



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

Temos outro acessório, as balizas, cujo objetivo é facilitar a visualização dos pontos topográficos, conforme a figura 3.3(A). Temos o posicionamento das balizas exatamente nos pontos topográficos, sendo que assim é possível fazer o levantamento do ângulo $\hat{103}$. Na figura 3.3(B), temos a representação de como deve ficar a baliza posicionada exatamente acima dos piquetes, sendo este demarcado nos pontos topográficos.

Figura 3.3: Balizas



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

É muito importante que a baliza fique exatamente na vertical, ou seja, fique perpendicular em relação ao solo, e para que isso ocorra temos outro equipamento acessório, denominado de nível cantoneira, que objetiva, especificamente, mostrar para o usuário a posição exata da baliza em relação ao solo. Na figura 3.4, temos a representação do nível cantoneira dotado por uma bolha, para assegurar que a baliza esteja exatamente na sua posição vertical.

Figura 3.4: Nível Cantoneira



FONTE: Veiga, Zanetti e Faggion (2012).

O tripé, representado na figura 3.5, é outro acessório, que serve para apoiar os instrumentos de medição como teodolito, nível de luneta, estação total e GNSS. Este acessório vem com três garras, sendo uma em cada perna, para facilitar a fixação no terreno e garantir a verticalidade do tripé. Suas pernas são ajustáveis para melhor regulação, na parte superior temos um nível bolha para auxiliar no posicionamento perfeito do tripé. Na última parte temos uma base nivelada para a fixação dos instrumentos de medição.

Figura 3.5: Tripé



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

3.2.2 Instrumentos de medição

Dentre os equipamentos necessários para o levantamento topográfico, temos os instrumentos de medição, um dos mais utilizados é a trena, formada por uma fita métrica, com o objetivo de medir distâncias horizontais, ou diferenças de níveis, seu comprimento pode variar de 20 a 100 m. Na figura 3.6, apresentamos alguns modelos de trenas disponíveis no mercado.

Figura 3.6: Modelos de trena



FONTE: Veiga, Zanetti e Faggion (2012).

Os teodolitos são instrumentos destinados a medição de ângulos horizontais ou verticais, podem ser utilizados para determinar os ângulos internos ou externos em uma poligonal e, com auxílio de um distanciômetro, podem também fazer medição de distâncias horizontais e verticais. Podem ser classificados, de acordo com seu uso, como topográfico, astronômico ou geodésico. Também podem ser diferenciados conforme sua exatidão nas medições. Segue na figura 3.7 a representação do instrumento teodolito.

Figura 3.7: Teodolito



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

Temos o nível luneta, outro instrumento topográfico, formado por uma luneta e um nível esférico, utilizado para fazer medidas de distâncias verticais em dois ou mais pontos, podendo ser utilizado com o auxílio de mira falante (consiste em uma régua graduada com divisões demarcadas). Possuem a capacidade de medir ângulos verticais, porém, neste caso, não possuem uma grande precisão. Segue a representação do nível luneta na figura 3.8.

Figura 3.8: Nível de luneta



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

A estação total é a evolução do teodolito com o distanciômetro, já citado, consiste em um instrumento eletrônico utilizado para determinar ângulos, distâncias e coordenadas. Com sua versatilidade, não é necessário utilizar anotações, pois tudo fica gravado em seu sistema interno e, posteriormente, poderão ser descarregados em um computador e tratadas com auxílio de um software que gera um mapa topográfico. Na figura 3.9 temos a representação da estação total.

Figura 3.9: Estação total



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

Utilizando a estação para determinar coordenadas, deve-se fazer, no primeiro ponto topográfico, a anotação de sua coordenada, podendo ser um valor fictício, ou simplesmente fixar a origem do sistema de coordenadas, após isso, é necessário fazer as

medições dos outros pontos no plano topográfico girando o instrumento, caso algum ponto não seja visível para a estação total, pode-se mudar o instrumento para outro ponto que já foi levantado a sua coordenada.

Considerando como um grande avanço no levantamento de coordenadas temos o GNSS (Sistema Global de Navegação por Satélite). Neste caso irá trabalhar com a coordenada real do ponto topográfico, este instrumento está ligado a uma rede de satélites que com sinal via rádio vão mostrar qual coordenada tridimensional do ponto onde se localiza o instrumento.

3.3 ESCALAS

No levantamento topográfico será feito a descrição do local analisado com medidas, ângulos, formas, porém para fazer a representação mais fiel possível deve-se utilizar uma relação de proporcionalidade, entre as características reais do local analisado, com o que será descrito no papel. Com isso, temos que essa relação de proporcionalidade, do tamanho do objeto real com a sua representação gráfica, é denominada como escala.

A descrição de locais ou objetos muito grandes devem ser feitos com tamanho reduzidos, pois é inviável fazer as representações utilizando tamanhos reais, também acontece o inverso, quando tem um objeto muito pequeno, neste caso devem ser ampliados as proporções para serem melhor compreendidos.

Temos como exemplo a escala 1/500 (lê-se um está para quinhentos), neste caso, temos a seguinte proporção: uma parte na representação gráfica equivale a quinhentas partes no objeto real, ou seja, utilizando centímetros como unidade comparativa, temos que 1 cm na representação gráfica corresponde a 500 cm no objeto real.

3.4 MEDIDAS ANGULARES NA TOPOGRAFIA

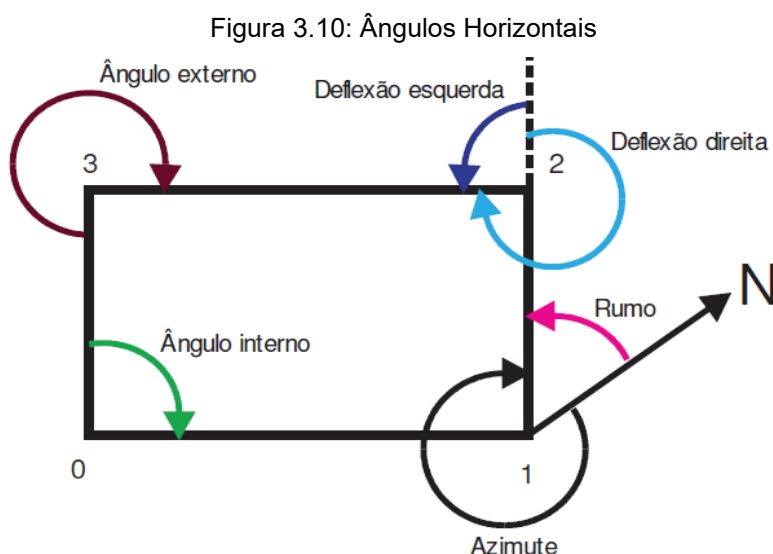
A topografia é a ciência que estuda e descreve uma porção da superfície terrestre, e ela faz isso fundamentando-se em conhecimentos matemáticos presentes na geometria e trigonometria. Com isso, muitos elementos geométricos, como ângulos e distâncias, serão utilizados nos estudos topográficos.

Os ângulos na topografia são medidos em graus ou radianos. Temos uma divisão em duas classes, os ângulos horizontais e os ângulos verticais, sendo que cada classe possui suas subdivisões.

3.4.1 Ângulos Horizontais

Os ângulos descritos como horizontais serão medidos exclusivamente no plano horizontal figura 3.10. Os ângulos denominados como diretos, com subdivisões interno ou externo, seguem com a mesma compreensão utilizada na geometria, ou seja, quando o ângulo se encontra interno ao polígono, é denominado ângulo interno, e quando se encontra externo ao polígono é denominado ângulo externo. Já os ângulos de deflexões, podem ser divididos de direita e esquerda, este será o ângulo medido a partir de um alinhamento a um outro prolongamento do alinhamento, o ângulo localizado a direita do alinhamento segue como deflexão direita e de forma análoga do outro lado temos a deflexão esquerda.

Temos os ângulos que também ajudam na orientação na representação gráfica, sendo eles o rumo e azimuth. O azimuth tem origem sempre no Norte (Verdadeiro ou Magnético) e segue no sentido anti-horário até a abertura desejada. O rumo tem origem no Norte ou Sul, porém sem sentido pré-determinado, podendo ser medido no sentido horário ou anti-horário, sempre será o menor ângulo entre os alinhamentos.



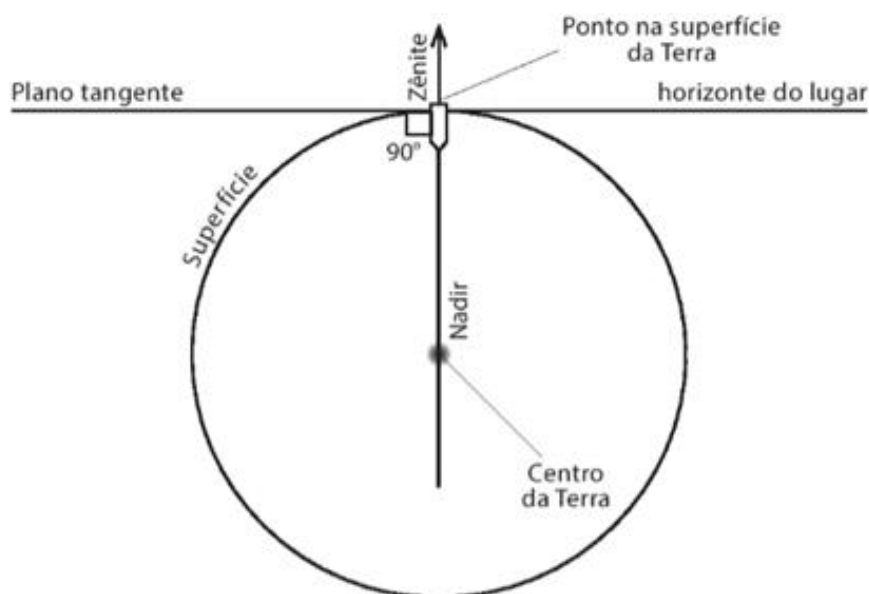
FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

Ainda na figura 3.10, temos em 3.10(0) o ângulo interno, pois está interno no polígono, em 3.10(3) o ângulo externo pois está externo no polígono, em 3.10(2), temos os ângulos de deflexão sendo a linha pontilhada o alinhamento, o ângulo medido a direita até o prolongamento representa a deflexão a direita, e também, temos medindo a esquerda do alinhamento a deflexão esquerda. Representados em 3.10(1), temos os ângulos de orientação, que neste caso necessita saber a localização do norte (N), medindo a partir do Norte, no sentido anti-horário, temos o azimuth e o menor ângulo partindo neste caso do Norte o rumo.

3.4.2 Ângulos Verticais

Para medir os ângulos verticais, primeiro é necessário compreender o sentido do eixo Zênite-Nadir. Zênite é definido como a direção, partindo do plano horizontal da superfície terrestre, no sentido ascendente projetado até o infinito, ou seja, sai do local analisado e vai transversalmente até o céu, já Nadir, é considerado o oposto do Zênite, sendo a direção, partindo do plano horizontal da superfície terrestre, no sentido descendente projetado até o centro da Terra. Segue a figura 3.11 a representação do eixo Zênite-Nadir.

Figura 3.11: Eixo Zênite-Nadir



FONTE: Botelho, Prado e Paula (2018).

Os ângulos verticais zenitais têm origem no eixo Zênite, acima do instrumento, e segue na direção do centro da Terra até o ponto na superfície que deseja medir, este ângulo vai de 0° (Zênite) até o 180° (Nadir). Os ângulos verticais nadirais seguem o mesmo raciocínio, só que agora tem origem no eixo Nadir, e segue na direção do céu, até o ponto da superfície que deseja medir, também variam de 0° (Nadir) e vai até 180° (Zênite).

Temos os ângulos verticais de inclinação, este tem origem no plano horizontal da superfície terrestre e vai até o eixo Zênite-Nadir, sendo que valores positivos partem de 0° (Plano Horizontal) até 90° (Zênite) e valores negativos partem de 0° (Plano Horizontal) até 90° (Nadir)

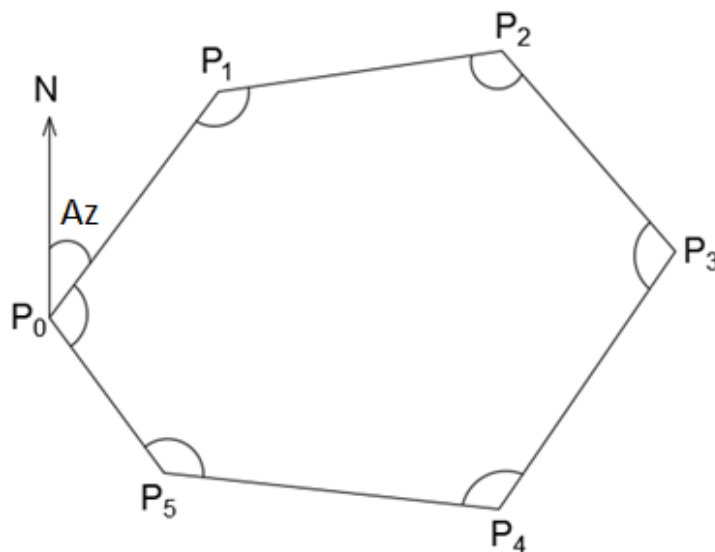
3.5 LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO PLANIMÉTRICO

No levantamento topográfico planimétrico são feitos vários procedimentos, mas sem considerar o relevo do local analisado. Para fazer a representação gráfica é necessário a medida dos ângulos, distâncias, localização gráfica, posição e orientação. O levantamento topográfico planimétrico é dividido em: irradiação, intersecção, poligonação, coordenadas, ordenadas e triangulação. É recomendável que antes do levantamento o topógrafo faça um reconhecimento do local que será analisado, e também que faça a demarcação dos vértices da poligonal do terreno.

3.5.1 Levantamento por poligonação

Para realizar o levantamento por poligonação, deve-se primeiro demarcar todos os vértices do terreno, tornando uma superfície poligonal, conforme a figura 3.12, no primeiro vértice (P_0) deve-se medir o azimute para servir de orientação e para os cálculos posteriores, a partir daí segue medindo todos os ângulos da poligonal e distâncias de seus lados.

Figura 3.12: Levantamento por poligonação



FONTE: Autor.

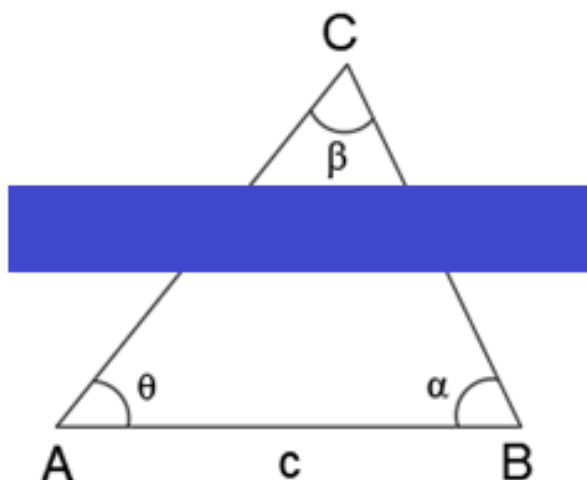
No término das medições, o topógrafo poderá analisar se houve erro de medição dos ângulos ao calcular a soma dos ângulos internos da poligonal. Este método pode ser utilizado com duas variações, poligonal aberta quando o topógrafo começa em um vértice e termina em outro e também com poligonal fechada neste caso começa e termina no mesmo vértice.

3.5.2 Levantamento por intersecção

Este levantamento é indicado para pequenas áreas, sendo o único método indicado quando alguns vértices estão com localização inacessíveis, por exemplo, locais muito íngreme ou com existência de brejos.

Conforme a figura 3.13, neste método é necessário medir a distância de dois pontos aqui denominados como A e B , para formar um triângulo com o vértice inacessível C , posteriormente faz as medições dos ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$, com esses dados segue os cálculos utilizando a lei dos senos apresentado na seção 2.4.

Figura 3.13: Levantamento por intersecção

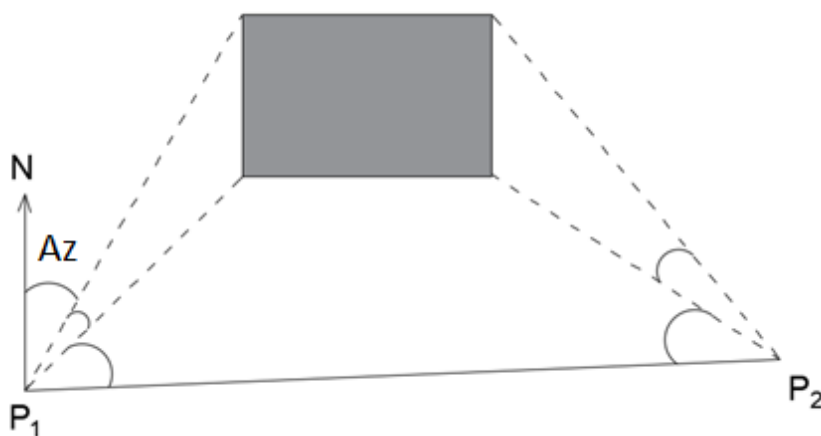


FONTE: Autor.

3.5.3 Levantamento por irradiação

Este levantamento é muito utilizado como auxiliar ao levantamento por poligonação, sendo útil quando na parte interna da poligonal existe um objeto que precisa ser detalhado. Assim, a partir dos vértices da poligonal faz-se as medições de ângulos e distâncias, até os pontos que detalham o objeto, conforme a figura 3.14.

Figura 3.14: Levantamento por Irradiação



FONTE: Autor.

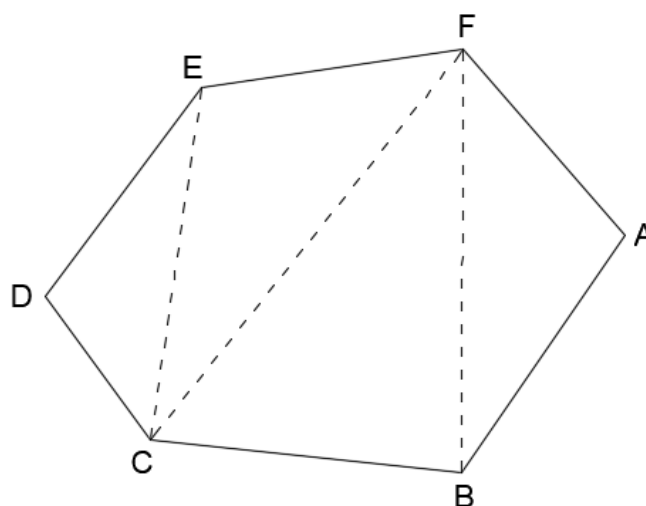
3.5.4 Levantamento por coordenadas

No levantamento por coordenadas existe a necessidade de se ter a coordenada de dois pontos para servir de suporte, após isso, faz-se a representação do terreno no plano cartesiano, com a demarcação de todos os vértices do terreno. Assim, o instrumento faz o levantamento das outras coordenadas para efetuar os cálculos das distâncias e áreas. Este método é muito utilizado por topógrafos que utilizam estação total.

3.5.5 Levantamento por triangulação

No levantamento por triangulação, faz-se a decomposição da região topográfica do terreno em triângulos, segue-se fazendo a medição de todos os lados dos triângulos, conforme figura 3.15. No cálculo da área é utilizado a fórmula de Heron, calculando a área em função da medida dos três lados, conforme apresentado no item 2.6.4.2.

Figura 3.15: Levantamento por triangulação



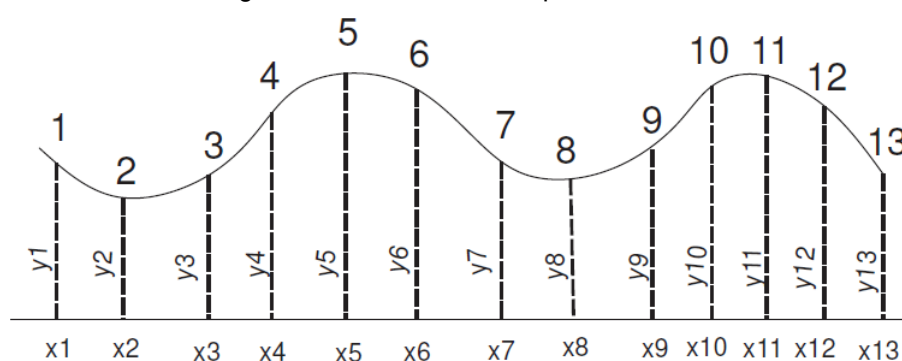
FONTE: Autor.

3.5.6 Levantamento por Ordenada

Este levantamento é utilizado quando temos regiões com alinhamentos curvos, conforme mostra a figura 3.16. Primeiramente faz-se o alinhamento de suporte, sendo este utilizado como o eixo das abcissas. A partir do alinhamento suporte, faz-se as

medições das ordenadas, conforme a necessidade. Assim, cada ponto de medição terá sua coordenada, sendo a abscissa no alinhamento de suporte e a ordenada. Este método geralmente é aplicado como auxiliar no levantamento por poligonação.

Figura 3.16: Levantamento por ordenadas



FONTE: Machado, Cartaxo e Andrade (2014).

Nas atividades práticas, serão utilizado o método de triangulação no levantamento topográfico planimétrico, e também terá a aplicação do método de intersecção em um exemplo prático.

3.6 LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO ALTIMÉTRICO

O levantamento topográfico altimétrico, que também é conhecido como nivelamento, tem por objetivo determinar as distâncias verticais nas superfícies topográficas, formando-se os relevos de um determinado lugar. Dentre as distâncias verticais temos: a cota, altitude e diferença de nível.

Cota é a distância vertical de um ponto qualquer até um plano de referência qualquer na superfície terrestre. Altitude é a distância na vertical entre um ponto físico na superfície terrestre até o plano de referência altimétrica, sendo este o nível médio dos mares. Diferença de nível é a diferença de altura, cota ou altitude entre dois pontos quaisquer na superfície terrestre.

Para a determinação destas distâncias, ou diferenças verticais, temos alguns métodos de nivelamento topográfico sendo: barométrico, por satélites, trigonométrico e geométrico.

No nivelamento barométrico as distâncias verticais são obtidas utilizando um instrumento chamado barômetro. Este instrumento é capaz de medir as diferenças de pressão atmosférica, podendo assim determinar qual é a altitude do terreno.

Com o Sistema Global de Navegação por Satélite (GNSS), é possível determinar a posição espacial em qualquer lugar na superfície terrestre, que esteja ao alcance do satélite, sendo este outro método de nivelamento por satélite.

Temos o nivelamento trigonométrico, para determinar as distâncias verticais utilizamos conhecimentos matemáticos da trigonometria, geralmente os instrumentos utilizados são os teodolitos e estação total.

No nivelamento geométrico realiza-se a medição da diferença de distâncias na vertical, utilizando-se o instrumento chamado de nível luneta. Assim, é possível calcular qual a diferença de nível dos dois pontos analisados.

Nas atividades práticas, com levantamento topográfico altimétrico, será utilizado o modelo de levantamento trigonométrico, com o auxílio do teodolito caseiro. Será obtido os ângulos verticais e, posteriormente, com as razões trigonométrica determinarão as distâncias verticais.

4. PROJETO DIDÁTICO: ATIVIDADES PRÁTICAS DE MATEMÁTICA APLICADAS NA TOPOGRAFIA

Neste capítulo foram utilizadas as referências [8], [9], [11] e [13].

Com o intuito de tornar as aulas de matemática mais atrativas e recreativas, neste capítulo serão apresentados vários exemplos de atividades práticas envolvendo conceitos da topografia. Sabendo que o objetivo da topografia é conhecer, descrever e representar graficamente, sobre uma superfície plana, porções de terra da superfície terrestre, o professor juntamente com os alunos trabalhará fazendo algumas funções dos topógrafos, descrevendo um local escolhido, determinando suas medidas, áreas e executando essas atividades com conceitos matemáticos da educação básica.

Para realizar o levantamento topográfico será necessário a construção de um teodolito caseiro, e de um local amplo de fácil movimentação para fazer as medições.

No texto a seguir será apresentado algumas atividades exemplos simulando a aplicação em aula, pois devido a pandemia do covid-19, ocasionada pelo vírus SARS-COV-2, não foi possível a realização de aulas práticas com os alunos, objetivo inicial deste trabalho. Assim, utilizando estes exemplos práticos explicativos, o professor poderá estar adaptando-os em suas aulas.

4.1 CONSTRUINDO UM TEODOLITO

A construção do teodolito utiliza como referência a aula no Programa de Aperfeiçoamento dos Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) em 2016, apresentada pelo professor Eduardo Wagner, referência [13]. Nela foi exposto uma metodologia para aulas práticas com a trigonometria, e para isso é necessário um instrumento para fazer a medição dos ângulos, este denominado como teodolito caseiro.

Será apresentado dois modelos de teodolito caseiro: Teodolito 1, segue o proposto pelo professor Eduardo Wagner, referência [13]; Teodolito 2, foi idealizado pelo próprio autor. Em ambos, será necessário um aparelho smartphone, pois com a ajuda de um aplicativo será possível fazer medições de ângulos. A diferença dos dois modelos de teodolito caseiro é a base que dá suporte ao aparelho, que tem o objetivo de trazer estabilidade para o celular, fazendo com que as medições tenham a exatidão necessária nos levantamentos dos ângulos.

O aplicativo escolhido pelo o autor é gratuito e está disponível nas plataformas que usam sistema operacional Android. Conforme a figura 4.1, temos o aplicativo “Medidor de ângulo”, disponibilizado pela empresa Smart Tool Factory [15], que possibilita, de forma fácil e prática, a medição de ângulos verticais com uma boa exatidão. No mesmo aplicativo temos a função bússola, que será utilizada para fazer medição de ângulos horizontais. Sua orientação para medição dos ângulos seguem os lados do smartphone, podendo ser utilizada na posição vertical ou horizontal.

Figura 4.1: Aplicativo para medir ângulo



FONTE: < https://play.google.com/store/apps/details?id=com.stfactory.anglemeter&hl=pt_BR&gl=US>

Para ter exatidão nas medições, é recomendado utilizar uma mira no smartphone. Esta mira pode ser feita com canudo fixado na lateral do aparelho com fita adesiva, conforme figura 4.2. Desta forma, o usuário estará olhando pelo canudo até o ponto que pretende fazer a medição, assim sua visão terá o foco necessário, facilitando os apontamentos. Este processo é o mesmo para os dois modelos de teodolito.

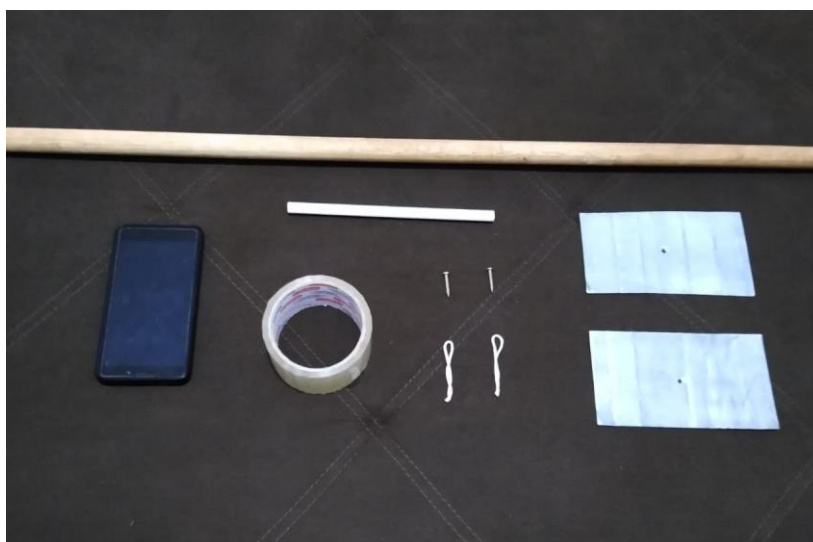
Figura 4.2: Celular com a mira



FONTE: Autor

O teodolito 1, tem fabricação fácil e com materiais acessíveis, ideal para ser construído juntamente com os alunos na própria escola. Os materiais necessários são: smartphone, canudo, cabo de vassoura, duas placas com rigidez suficiente para suportar o peso do smartphone, dois parafusos ou pregos, elásticos e fita adesiva, segue os materiais apresentados na figura 4.3. As medidas das placas são as mesmas do smartphone utilizado, nas medições na largura, pode ser acrescentado a largura do canudo, para fixar as placas no cabo de vassoura e deverá ser feito um furo no centro de cada placa.

Figura 4.3: Materiais para construção do teodolito 1



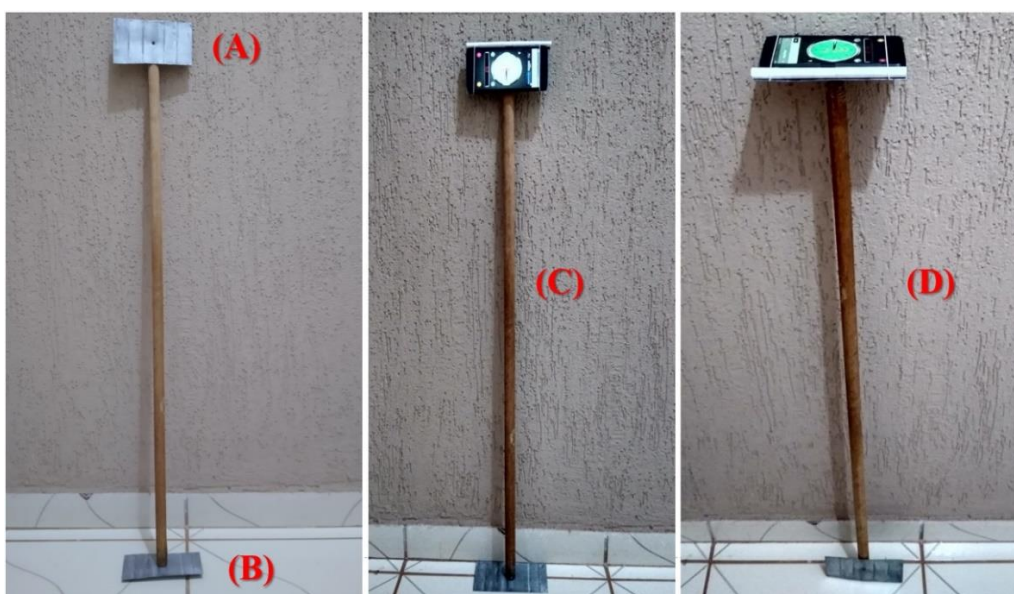
FONTE: Autor

Segue a construção fixando as placas no cabo de vassoura. Em uma extremidade do cabo deve-se fixar a placa na lateral conforme figura 4.4(A), para fixar pode-se utilizar um martelo pregando o parafuso no cabo, ou uma chave de fenda para a construção com parafuso. Esta extremidade será utilizada para fazer medição de ângulos verticais, o final da chapa deve coincidir com a extremidade do cabo, pois esta extremidade também servirá de apoio nas medições de ângulos horizontais.

Na outra extremidade do cabo deve-se fixar a placa na região circular, o ideal é que faça a retificação desta extremidade para que a chapa fique bem apoiada no cabo, esta extremidade será utilizada para fazer medição de ângulos horizontais, e servirá de apoio no chão para quando for fazer medição de ângulos verticais, segue o exemplo na figura 4.4(B).

Com a mira canudo já fixada no smartphone, coloque o smartphone na placa fixando-a com o elástico ou com a fita adesiva, temos, na figura 4.4(C), a representação de como ficará a extremidade do teodolito, quando for fazer a medição de ângulos verticais usando a placa fixada na lateral do cabo. Neste caso, a placa permite a rotação na vertical para os apontamentos. A figura 4.4(D), temos o posicionamento do smartphone para realizar a medição de ângulos horizontais, usando a placa fixada na superfície circular do cabo. Neste caso a placa permite a rotação na horizontal para os apontamentos.

Figura 4.4: Teodolito 1



FONTE: Autor

Para fazer a medição dos ângulos utilizando o teodolito 1, são necessários dois alunos, um aluno para segurar firme a base do teodolito mantendo-o na posição vertical (no aplicativo referência [15] tem a função nível bolha para verificar a posição vertical), e o outro aluno faz o apontamento olhando pelo canudo até o outro ponto de medição, coletando a medida do ângulo no aplicativo, em relação a posição do smartphone, conforme a figura 4.5. Lembrando que para cada tipo de ângulo horizontal ou vertical, tem a sua extremidade no teodolito.

Figura 4.5: Medição do ângulo com Teodolito 1

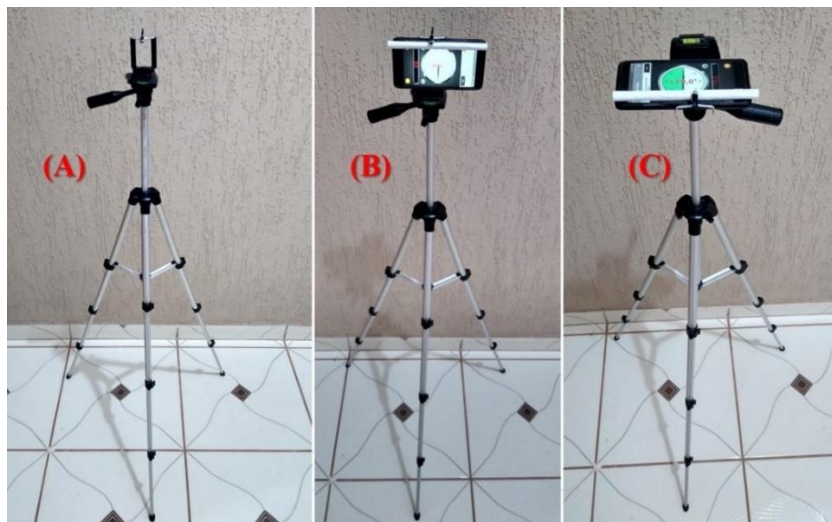


FONTE: Autor

No modelo de teodolito 2, não terá construção, mas será necessário comprar um tripé de câmera com suporte para smartphone. Segue, na figura 4.6(A), a representação do tripé. A escolha do tripé de câmera se faz devido a praticidade e variação que este produto tem, pois ele permite a rotação no plano horizontal em 360° e no plano vertical a rotação de 180° , facilitando a medição dos ângulos em todos os casos possíveis. Para a montagem, o tripé tem regulagem das pernas permitindo que as deixe com comprimentos diferentes, para o caso de se fazer a medição em um terreno irregular, e para auxiliar na parte superior tem um nível bolha, para que o usuário deixe o tripé em nível.

Temos, na figura 4.6(B), o smartphone na posição para medição de ângulos verticais, neste caso o usuário poderá medir o ângulo rotacionando para cima, e na figura 4.6(C), temos o smartphone na posição de medição de ângulos horizontais, em que o suporte permitirá rotação no plano horizontal.

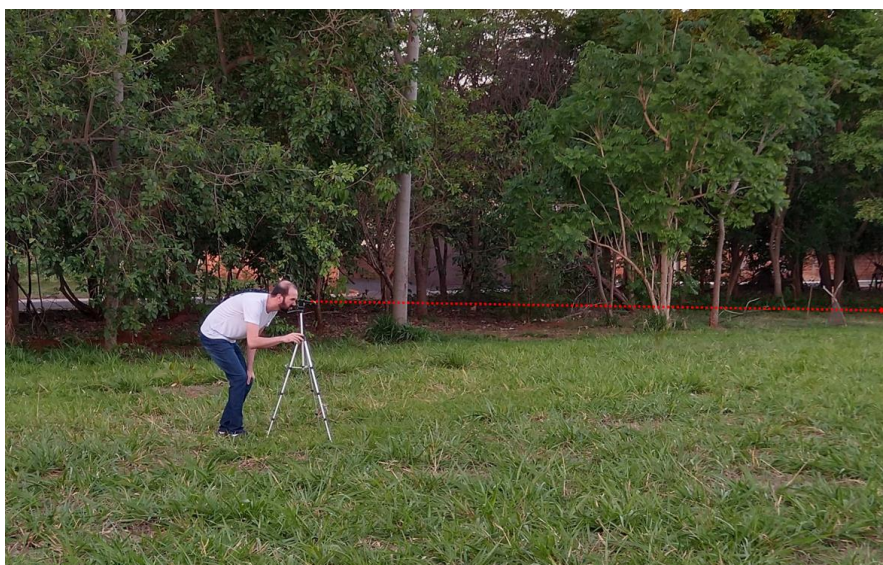
Figura 4.6: Teodolito 2



FONTE: Autor

Para fazer medição com o teodolito 2, é necessário apenas um aluno que faz o apontamento, pois o tripé tem a estabilidade necessária. Segue, da mesma forma, fazendo o apontamento olhando pelo canudo até o ponto de medição, coletando a marcação do ângulo no aplicativo, conforme figura 4.7. Também, neste teodolito, temos para cada tipo de ângulo (horizontal ou vertical) a posição correta do smartphone.

Figura 4.7: Medição do ângulo com teodolito 2



FONTE: Autor

A diferença entre os dois modelos de teodolito é a firmeza que o suporte traz para o apontamento. No caso do teodolito 1, é necessário que o aluno que vai segurar o cabo de vassoura, o segure firme na posição vertical para que a medição fique precisa, pois se movimentar o suporte, o aplicativo oscila o valor do ângulo, este problema não acontece com o suporte de tripé no teodolito 2, pois neste caso os três apoios ajustáveis permitem que o tripé fique imóvel.

4.2 METODOLOGIA PARA DETERMINAR MEDIDAS ANGULARES

Neste tópico serão apresentados dois exemplos de como medir ângulos horizontal e vertical utilizando o teodolito fabricado. As medições serão feitas utilizando somente o teodolito 2, que tem o suporte do tripé, porém, da mesma forma, o professor pode utilizar o modelo de teodolito 1 nas suas atividades práticas, pois a metodologia é a mesma.

Exemplo 4.1: Determine a medida do ângulo horizontal $A\hat{O}B$.

Primeiro passo é posicionar o teodolito na posição do vértice do ângulo ($\hat{O}$), segue colocando o celular na posição para medição de ângulos horizontais (no teodolito 1 temos a posição na figura 4.4(D) e no teodolito 2 temos a posição na figura 4.6(C)), utilizando-se a função bússola no aplicativo medidor de ângulo próximo passo é fazer o apontamento olhando pelo canudo até um dos pontos. Conforme a figura 4.8, temos o apontamento do teodolito para o ponto A , observando a orientação apresentada pela bússola de $175,9^\circ S$. Este apontamento é referente ao ângulo partindo do Norte até a semi reta $\overline{OA}$.

Figura 4.8: Apontamento do teodolito para o Ponto A.



FONTE: Autor

Ainda com o teodolito posicionado no vértice $\hat{O}$, faça o apontamento para o outro ponto, aqui denominado de B (semi reta $\overline{OB}$), e observe na bússola o valor da orientação, neste exemplo foi de $20,7^\circ NE$, conforme a figura 4.9. Este ângulo é medido a partir do Norte até a semi reta $\overline{OB}$.

Figura 4.9: Apontamento do teodolito para o Ponto B.



FONTE: Autor

A diferença entre as orientações da bússola é o ângulo desejado, neste caso foi $175,9^\circ - 20,7^\circ = 155,2^\circ$. Logo, o ângulo $\hat{A}OB = 155,2^\circ$, segue na figura 4.10, a apresentação do ângulo $\hat{A}OB$.

Figura 4.10: Determinando o ângulo $\widehat{AOB}$.

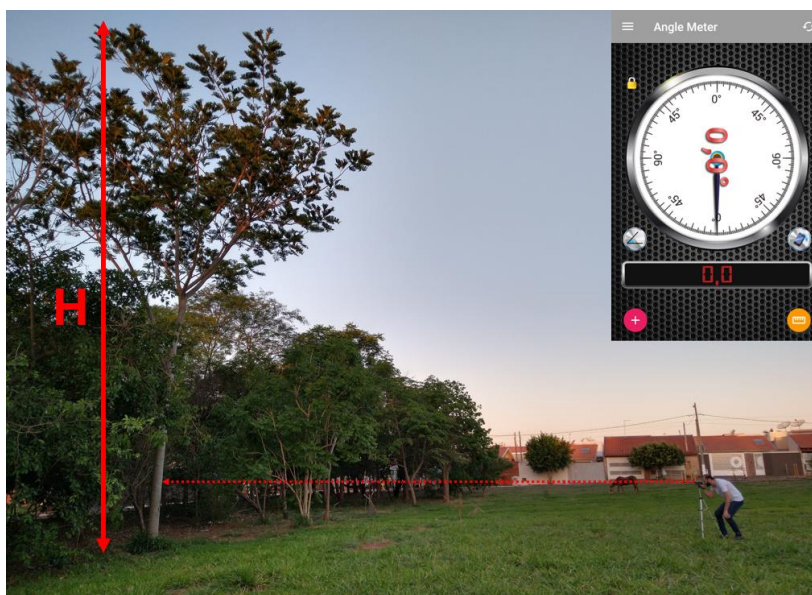
FONTE: Autor

Esta metodologia será utilizada em todas as atividades práticas, que tem a medição de algum ângulo horizontal, desta forma, tais detalhes não serão citados novamente.

Exemplo 4.2: Determine a medida do ângulo vertical, sendo o ângulo referente ao alinhamento da altura do teodolito até o topo de uma árvore.

Coloque o teodolito em uma posição que seja possível avistar o topo da árvore, utilizando a posição do teodolito para medição de ângulos verticais (no teodolito 1 temos a posição na figura 4.4(C) e no teodolito 2 temos a posição na figura 4.6(B)), selecione a função de medir ângulo no aplicativo, e coloque o smartphone na posição de ângulo 0° , neste caso é a posição horizontal, e conforme a figura 4.11, temos o posicionamento do teodolito, no alinhamento da árvore.

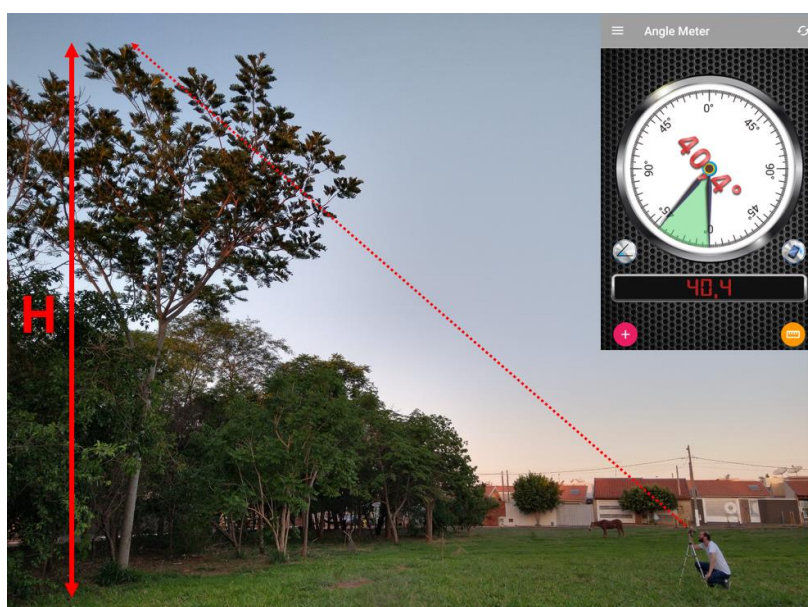
Figura 4.11: Apontando o teodolito para o alinhamento da árvore.



FONTE: Autor

Próximo passo, segue olhando pela mira do canudo, apontando o aparelho para o ponto mais alto da árvore, e colete o valor do ângulo apresentado no teodolito, conforme a figura 4.12, temos a representação dessa etapa.

Figura 4.12: Apontando o teodolito para o topo da árvore.



FONTE: Autor

Assim chegamos ao valor do ângulo vertical medido do alinhamento da altura do teodolito até o topo da árvore, segue na figura 4.13 a representação do ângulo que neste caso foi de $40,4^\circ$. Esta metodologia será utilizada nas atividades em que serão necessários medir ângulos verticais.

Figura 4.13: Determinando o ângulo da medição.



FONTE: Autor

Com o teodolito 1 as medições se fazem da mesma forma, prosseguindo com a ajuda de outro aluno para segurar firmemente a base do teodolito. Para fazer as medições de ângulos horizontais deve-se utilizar o smartphone na extremidade com a placa fixada da superfície circular, e quando for fazer a medição dos ângulos verticais, deve-se usar o aparelho na extremidade com a placa fixada na lateral do cabo de suporte.

4.3 METODOLOGIA PARA CALCULAR MEDIDAS DE DISTÂNCIAS

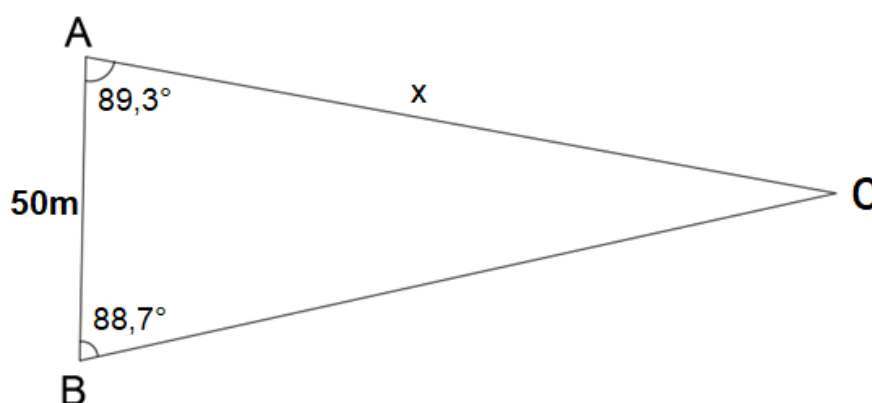
Para determinar a medida de distâncias o professor deve escolher um local amplo, de preferência com visão a pontos relativamente distantes, para mostrar ao aluno que, com conhecimentos matemáticos aplicados na topografia, podemos descobrir suas distâncias.

Em casos de distâncias pequenas o professor pode estar utilizando uma trena métrica de preferência com no mínimo 50 metros. Quando for medir distâncias grandes, o professor pode utilizar as propriedades da lei dos senos e da lei dos cossenos.

Exemplo 4.3: Cálculo da distância horizontal de um objeto ou edificação em relação a posição atual dos alunos.

Uma situação problema referente a este caso será apresentado na figura 4.14, no primeiro passo, com uma trena métrica, o professor demarca dois pontos distantes em 50 metros denominados como A e B . Neste momento, o professor pode relembrar a aula sobre lei dos senos, falando que seria este o conhecimento matemático aplicado nesta situação. Denominando o objeto que deseja descobrir a distância como ponto C , formando um triângulo $\triangle ABC$. Utilizando o teodolito caseiro, posicionando-o no vértice B , faz-se a medição do ângulo $\widehat{ABC}$ e, da mesma forma, posicionando o teodolito no vértice A descobre-se o ângulo $\widehat{BAC}$, e com as medidas destes ângulos segue a resolução com a lei dos senos.

Figura 4.14: Distâncias inacessíveis



FONTE: Autor.

Seguindo na figura 4.14, temos as medidas dos ângulos $\widehat{ABC} = 88,7^\circ$ e $\widehat{BAC} = 89,3^\circ$, e como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° , temos que o ângulo $\widehat{ACB} = 180^\circ - 88,7^\circ - 89,3^\circ$, logo $\widehat{ACB} = 2^\circ$. Usando a lei dos senos apresentado na seção 2.4 obtemos:

$$\frac{AC}{\text{sen}(\widehat{ABC})} = \frac{AB}{\text{sen}(\widehat{ACB})}$$

$$\frac{x}{\text{sen}(88,7^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}(2^\circ)}$$

$$x = \frac{50 \cdot \text{sen}(88,7^\circ)}{\text{sen}(2^\circ)}$$

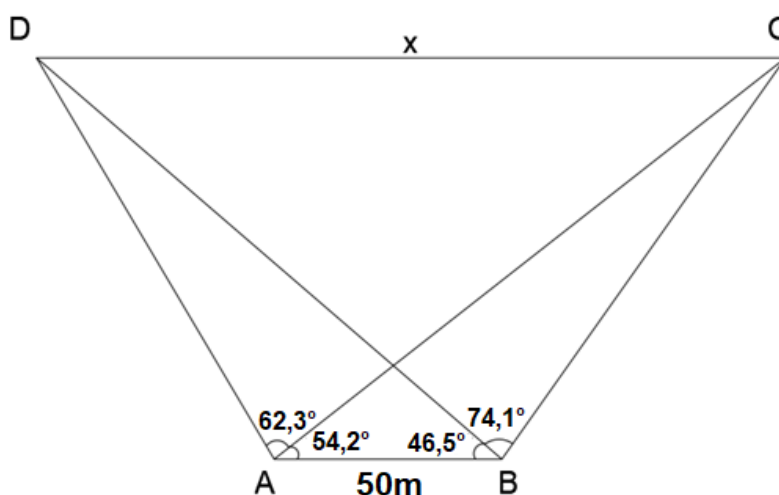
$$x = 1432,32 \text{ m}.$$

O ideal neste caso é fazer os cálculos diretamente na calculadora sem fazer os arredondamentos nos valores dos senos, assim chegando em um valor mais perto do real possível utilizando um instrumento de medição não profissional.

Exemplo 4.4: Determinar a distância horizontal entre dois pontos ambos inacessíveis.

Com o auxílio de uma lousa portátil, ou mesmo um caderno, o professor pode explicar a metodologia para os alunos. O primeiro passo é demarcar dois pontos distantes entre si 50 metros medidos com a trena métrica, denominados como A e B . Segue a resolução denominando os pontos inacessíveis como C e D , a distância entre eles como x , conforme figura 4.15.

Figura 4.15: Distância entre dois locais inacessíveis



FONTE: Autor.

Seguindo na figura 4.15 temos o quadrilátero $ABCD$, por construção $AB = 50m$, com o teodolito posicionado no vértice A , faz-se a medição dos ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{BAC}$, no exemplo numérico, apresentado acima, temos os seguintes valores $\widehat{CAD} = 62,3^\circ$, $\widehat{BAC} = 54,2^\circ$. Da mesma forma, posicionando o teodolito no ponto B , faz-se as medições dos ângulos $\widehat{CBD}$ e $\widehat{ABD}$, neste caso temos os valores $\widehat{CBD} = 74,1^\circ$ e $\widehat{ABD} = 46,5^\circ$.

No triângulo $\triangle ABC$, temos o ângulo $\widehat{ACB} = 180^\circ - 74,1^\circ - 46,5^\circ - 54,2^\circ = 5,2^\circ$, no triângulo $\triangle ABD$, temos o ângulo $\widehat{ADB} = 180^\circ - 62,3^\circ - 54,2^\circ - 46,5^\circ = 17^\circ$. Utilizando a lei dos senos no triângulo $\triangle ABD$, obtemos:

$$\frac{BD}{\text{sen}(\widehat{BAD})} = \frac{AB}{\text{sen}(\widehat{ADB})}$$

$$\frac{BD}{\text{sen}(54,2^\circ + 62,3^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}(17^\circ)}$$

$$BD = \frac{50 \cdot \text{sen}(116,5^\circ)}{\text{sen}(17^\circ)}$$

$$BD = 153,05 \text{ m}.$$

No triângulo $\triangle ABC$, utilizando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{BC}{\text{sen}(\widehat{BAC})} = \frac{AB}{\text{sen}(\widehat{ACB})}$$

$$\frac{BC}{\text{sen}(54,2^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}(5,2^\circ)}$$

$$BC = \frac{50 \cdot \text{sen}(54,2^\circ)}{\text{sen}(5,2^\circ)}$$

$$BC = 447,45 \text{ m}.$$

Segue a resolução no triângulo $\triangle BCD$, utilizando a lei dos cossenos:

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos \widehat{CBD}$$

$$x^2 = 447,45^2 + 153,05^2 - 2 \cdot 447,45 \cdot 153,05 \cdot \cos 74,1^\circ$$

$$x = \pm \sqrt{447,45^2 + 153,05^2 - 2 \cdot 447,45 \cdot 153,05 \cdot \cos 74,1^\circ}$$

$$x = 431,41 \text{ m}.$$

Temos que a distância entre os dois locais avistado pelo professor é de 431,41 metros.

Portanto, quando for necessário medir distâncias pequenas, pode-se utilizar diretamente a trena métrica, nos casos mais distantes, segue a recomendação de estar utilizando os conteúdos lei dos senos e lei dos cossenos, sendo necessário a medição de alguns ângulos com o teodolito.

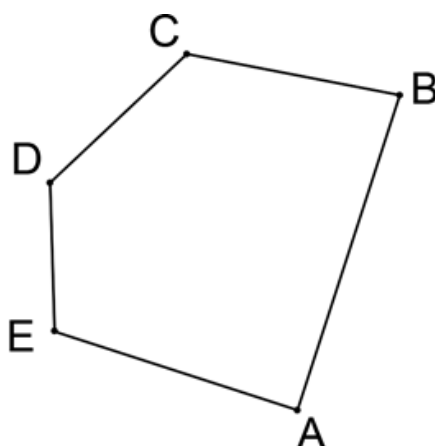
4.4 METODOLOGIA PARA CALCULAR ÁREAS DE TERRENOS POLIGONAIS

Para determinar áreas de terrenos poligonais, o professor deverá escolher um local que seja bem amplo, e de fácil movimentação, pois no levantamento topográfico será necessário o posicionamento do teodolito nos vértices do terreno.

Exemplo 4.5: Determinar a área do terreno poligonal.

Deve ser iniciada demarcando os vértices da região poligonal a ser levantada com as balizas para fazer a medição dos ângulos internos. Segue, na figura 4.16, um exemplo da demarcação dos vértices do terreno.

Figura 4.16: Vértices do Terreno poligonal



FONTE: Autor.

Será apresentado um método de levantamento *"in loco"*, este método é o levantamento por triangulação. Outro método apresentado será o de coordenadas geográficas, neste caso, será necessário saber as coordenadas de todos os vértices da poligonal do terreno.

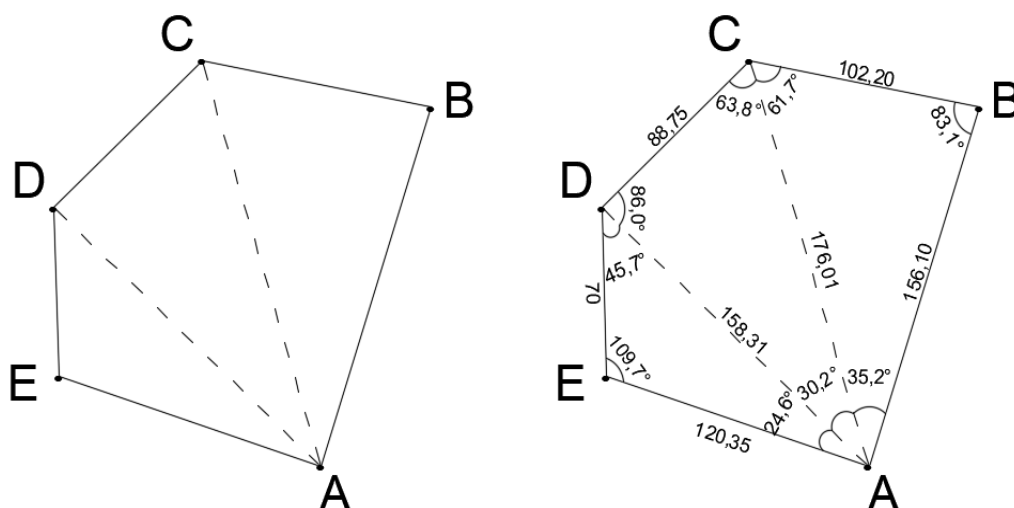
4.4.1 Levantamento por triangulação

Para fazer o levantamento por triangulação, o primeiro passo é decompor a região poligonal do terreno em vários triângulos, uma boa estratégia é fazer com que todos os

triângulos tenham um vértice em comum, pois assim não será necessário posicionar o teodolito no vértice em comum, facilitando o levantamento topográfico. A medição dos ângulos será feita posicionando o teodolito em cada vértice, os cálculos das distâncias utilizam a lei dos senos, sendo necessário saber a medida de pelo menos um dos lados dos triângulos. A medida deste lado pode ser feita utilizando-se a trena métrica ou utilizando um aplicativo que disponibilize este valor, por exemplo, temos o software gratuito Google Earth, que disponibiliza a distância retilínea entre pontos.

Na figura 4.17, temos um exemplo de como fazer a decomposição do terreno em triângulos, neste caso temos o vértice A em comum. Caso tenha algum vértice com difícil acesso, pode-se estar utilizando-o como o vértice em comum, pois assim, não será necessário o posicionamento do teodolito neste local.

Figura 4.17: Levantamento por triangulação



FONTE: Autor.

Segue na figura 4.17, um exemplo numérico do levantamento por triangulação, temos que o terreno poligonal ABCDE, feito a decomposição em triângulos, deve-se medir pelo menos um dos lados destes triângulos. Assim, considere então que o professor utilizando a trena métrica mediu a distância do lado $DE = 70$ metros, o próximo passo é o levantamento dos ângulos internos dos triângulos, para isso deve-se posicionar o teodolito em cada vértice que deseja medir o ângulo.

Com o teodolito posicionado no ponto E, faz-se a medição do ângulo $\hat{AED} = 109,7^\circ$, depois deve-se posicionar o teodolito no vértice D para fazer a medição do ângulo

$\widehat{ADE} = 45,7^\circ$. Como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° , logo temos que o ângulo $\widehat{DAE} = 180^\circ - 109,7^\circ - 45,7^\circ = 24,6^\circ$.

Segue o cálculo das distâncias dos lados do triângulo, utilizando a lei dos senos no triângulo $\triangle ADE$:

$$\frac{DE}{\text{sen}(\widehat{DAE})} = \frac{AD}{\text{sen}(\widehat{AED})}$$

$$\frac{70}{\text{sen}(24,6^\circ)} = \frac{AD}{\text{sen}(109,7^\circ)}$$

$$AD = \frac{70 \cdot \text{sen}(109,7^\circ)}{\text{sen}(24,6^\circ)}$$

$$AD = 158,31 \text{ m.}$$

$$\frac{DE}{\text{sen}(\widehat{DAE})} = \frac{AE}{\text{sen}(\widehat{ADE})}$$

$$\frac{70}{\text{sen}(24,6^\circ)} = \frac{AE}{\text{sen}(45,7^\circ)}$$

$$AE = \frac{70 \cdot \text{sen}(45,7^\circ)}{\text{sen}(24,6^\circ)}$$

$$AE = 120,35 \text{ m.}$$

Continuando o levantamento agora no triângulo $\triangle ADC$, já temos a medida do lado $AD = 158,31$ metros, falta apenas medir os ângulos, com o teodolito ainda posicionado no vértice D , faça a medição do ângulo $\widehat{ADC} = 86^\circ$, mudando a posição do teodolito para o vértice C , faça a medição do ângulo $\widehat{ACD} = 63,8^\circ$. Assim, temos que o ângulo $\widehat{CAD} = 180^\circ - 86^\circ - 63,8^\circ = 30,2^\circ$. Com a medida de todos os ângulos e do lado AD , segue o cálculo das distâncias no triângulo $\triangle ADC$ utilizando-se a lei dos senos:

$$\frac{AD}{\text{sen}(\widehat{ACD})} = \frac{CD}{\text{sen}(\widehat{CAD})}$$

$$\frac{158,31}{\text{sen}(63,8^\circ)} = \frac{CD}{\text{sen}(30,2^\circ)}$$

$$CD = \frac{158,31 \cdot \text{sen}(30,2^\circ)}{\text{sen}(63,8^\circ)}$$

$$CD = 88,75 \text{ m.}$$

$$\frac{AD}{\text{sen}(\widehat{ACD})} = \frac{AC}{\text{sen}(\widehat{ADC})}$$

$$\frac{158,31}{\text{sen}(63,8^\circ)} = \frac{AC}{\text{sen}(86^\circ)}$$

$$AC = \frac{158,31 \cdot \text{sen}(86^\circ)}{\text{sen}(63,8^\circ)}$$

$$AC = 176,01 \text{ m.}$$

Segue o levantamento agora no triângulo $\triangle ABC$, neste caso já temos a medida de um dos seus lados, pois $AC = 176,01$ metros. Com o teodolito ainda posicionado no vértice C , faça a medição do ângulo $\widehat{ACB} = 61,7^\circ$, mudando a posição do teodolito para o vértice B faz a medição do ângulo $\widehat{ABC} = 83,1^\circ$. Assim, obtemos que o ângulo $\widehat{BAC} = 180^\circ - 83,1^\circ - 61,7^\circ = 35,2^\circ$. Utilizando a lei dos senos seguem os cálculos das distâncias no triângulo $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\text{sen}(\widehat{ABC})} = \frac{BC}{\text{sen}(\widehat{BAC})}$$

$$\frac{176,01}{\text{sen}(83,1^\circ)} = \frac{BC}{\text{sen}(35,2^\circ)}$$

$$BC = \frac{176,01 \cdot \text{sen}(35,2^\circ)}{\text{sen}(83,1^\circ)}$$

$$BC = 102,20 \text{ m.}$$

$$\frac{AC}{\text{sen}(\widehat{ABC})} = \frac{AB}{\text{sen}(\widehat{ACB})}$$

$$\frac{176,01}{\text{sen}(83,1^\circ)} = \frac{AB}{\text{sen}(61,7^\circ)}$$

$$AB = \frac{176,01 \cdot \text{sen}(61,7^\circ)}{\text{sen}(83,1^\circ)}$$

$$AB = 156,10 \text{ m.}$$

Com a medida de todos os ângulos e lados dos triângulos é possível determinar a área da poligonal $ABCDE$, que será a soma das áreas dos triângulos $\triangle ADE$, $\triangle ADC$ e $\triangle ABC$. Para fazer esse cálculo, pode-se utilizar a fórmula da área de triângulo em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido, apresentado na seção 2.6.4.1, ou

também pode ser calculado utilizando a fórmula da área de triângulo em função da medida dos três lados, conhecida como fórmula de Heron, apresentada na seção 2.6.4.2.

No primeiro caso, utilizando a fórmula da área de triângulo em função da medida de dois lados e o ângulo compreendido, temos:

$$\text{Área}(ABCDE) = \text{Área}(ADE) + \text{Área}(ADC) + \text{Área}(ABC)$$

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABCDE) &= \frac{AE \cdot DE \cdot \text{sen}(\widehat{AED})}{2} + \frac{AD \cdot CD \cdot \text{sen}(\widehat{ADC})}{2} + \frac{AC \cdot BC \cdot \text{sen}(\widehat{ACB})}{2} \\ \text{Área}(ABCDE) &= \frac{120,35 \cdot 70 \cdot \text{sen}(109,7^\circ)}{2} + \frac{158,31 \cdot 88,75 \cdot \text{sen}(86^\circ)}{2} \\ &\quad + \frac{176,01 \cdot 102,20 \cdot \text{sen}(61,7^\circ)}{2} \\ \text{Área}(ABCDE) &= 18892,7 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

No segundo caso, utilizando a fórmula de Heron, área do triângulo em função da medida dos três lados, primeiro calculando o semiperímetro:

No triângulo $\triangle ADE$ temos o semiperímetro (p_1):

$$p_1 = \frac{AD + DE + AE}{2} = \frac{158,31 + 70 + 120,35}{2} = 174,33\text{m}.$$

No triângulo $\triangle ADC$ temos o semiperímetro (p_2):

$$p_2 = \frac{AD + CD + AC}{2} = \frac{158,31 + 88,75 + 176,01}{2} = 211,535\text{m}.$$

No triângulo $\triangle ABC$ temos o semiperímetro (p_3):

$$p_3 = \frac{AC + BC + AB}{2} = \frac{176,01 + 102,20 + 156,10}{2} = 217,155\text{m}.$$

Aplicando a fórmula de Heron temos:

$$\text{Área}(ABCDE) = \text{Área}(ADE) + \text{Área}(ADC) + \text{Área}(ABC)$$

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABCDE) &= \sqrt{p_1 \cdot (p_1 - AE) \cdot (p_1 - DE) \cdot (p_1 - AD)} + \\ &\quad \sqrt{p_2 \cdot (p_2 - AD) \cdot (p_2 - CD) \cdot (p_2 - AC)} + \sqrt{p_3 \cdot (p_3 - AC) \cdot (p_3 - BC) \cdot (p_3 - AB)} \\ \text{Área}(ABCDE) &= \sqrt{174,33 \cdot (174,33 - 120,35) \cdot (174,33 - 70) \cdot (174,33 - 158,31)} + \\ &\quad \sqrt{211,535 \cdot (211,535 - 158,31) \cdot (211,535 - 88,75) \cdot (211,535 - 176,01)} + \\ &\quad \sqrt{217,155 \cdot (217,155 - 176,01) \cdot (217,155 - 102,20) \cdot (217,155 - 156,10)} \\ \text{Área}(ABCDE) &= 18892,7 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

Assim, a área do terreno levantado é de 18892,7 m². Lembrando que este é só um exemplo numérico, logo, o professor poderá adaptar esta metodologia para outras situações, pois dependendo do tempo de aula é aconselhável que diminua a quantidade de vértices para o levantamento.

Temos também que a estratégia de deixar um vértice em comum para todos os triângulos é benéfica, pois, como no exemplo numérico, evita o levantamento do ângulo naquele vértice.

Em relação ao erro de fechamento devido a soma dos ângulos internos da poligonal, temos que considerar os seguintes contextos: primeiro, esta é uma atividade didática aplicada em uma aula prática, e segundo, o instrumento utilizado não é profissional, logo o resultado não terá um valor exato. Por isso, afim de deixar a atividade mais didática e prazerosa, pode-se considerar a desnecessidade de correção para este erro, pois utilizando a estratégia da soma dos ângulos internos do triângulo, para encontrar a medida do terceiro ângulo, retira-se esta possibilidade de aparecimento de algum erro devido a soma dos ângulos internos da poligonal.

4.4.2 Levantamento por coordenadas

Neste tópico será utilizará conceitos apresentados pela referência [14].

No levantamento, utilizando coordenadas, não será necessária a utilização do teodolito, para este modelo de levantamento será necessário somente as coordenadas dos locais onde se deseja determinar as distâncias. Na realização dos cálculos será considerado o planeta como uma esfera, utilizando o sistema de coordenadas geográficas.

Nesta atividade, teremos uma interdisciplinaridade entre a matemática e a geografia, pois na geografia são abordados conceitos vinculados ao sistema de coordenadas geográficas.

Temos o polo Norte, sendo a região localizada mais ao norte do planeta e da mesma forma o polo Sul como sendo a região mais ao sul do planeta. As referências para determinar a latitude e longitude, são respectivamente a linha do Equador e o Meridiano de Greenwich.

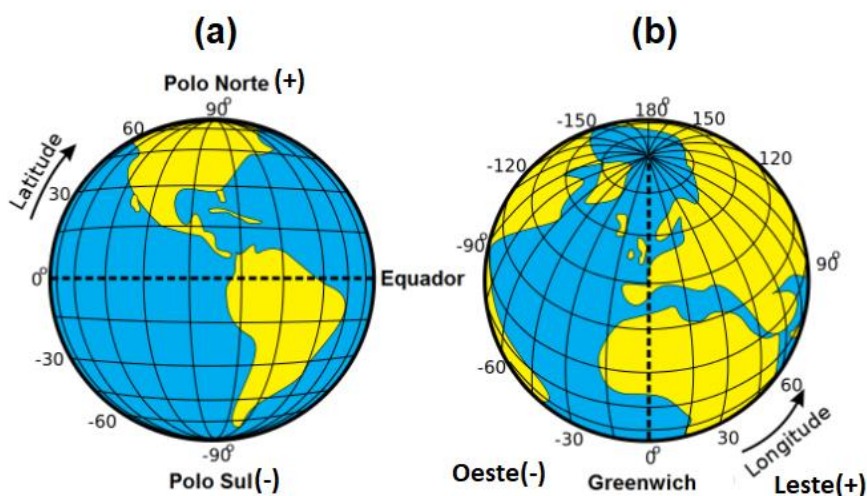
A linha do Equador é uma linha localizada no meio do caminho entre Polo Norte e o polo Sul, sendo a linha de latitude 0°. Temos também o Meridiano de Greenwich, este

segue do Polo Norte até o Polo Sul, sendo o eixo principal de origem do meridiano de longitude 0°.

Latitude é a distância do arco medida em graus, partindo da linha do Equador até um ponto na superfície terrestre, no sentido Linha do Equador para o Polo Norte(N) temos a variação de 0° a 90°, com valores positivos, no sentido Linha do Equador para o Polo Sul(S) temos a variação de 0° a 90° com valores negativos. Segue na figura 4.18(a) a representação dos Polos Norte e Sul, da linha do Equador e da latitude.

Longitude é a distância do arco medida em graus, partindo do Meridiano de Greenwich até um ponto qualquer na superfície terrestre, no sentido do Meridiano de Greenwich para Leste(E) temos a variação de 0° a 180° com valores positivos, no sentido do Meridiano de Greenwich para Oeste(W) temos a variação de 0° a 180° com valores negativos. Segue na figura 4.18(b) a representação do Meridiano Greenwich e da longitude.

Figura 4.18: Latitude e Longitude



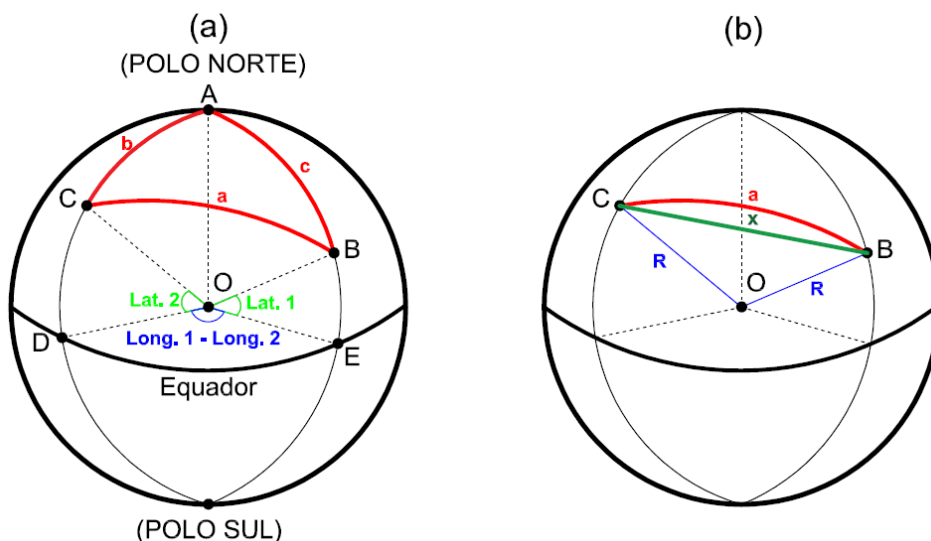
FONTE: (ADAPTADO) <<https://conhecimentocientifico.r7.com/o-que-sao-latitude-e-longitude-e-como-elas-nos-ajudam-nas-localizacoes/>>.

Para determinar a distância entre pontos na superfície terrestre, será utilizado a Lei dos cossenos no triângulo esférico apresentada na seção 2.7:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A}).$$

Considere a figura 4.19(a), na qual deseja-se descobrir a distância entre os pontos B e C , note que o ângulo $B\hat{O}E = \text{Latitude do ponto } B \text{ (} Lat. 1 \text{)}$, temos também que o ângulo $C\hat{O}D = \text{Latitude do ponto } C \text{ (} Lat. 2 \text{)}$, o ângulo $\hat{A} = a$ diferença entre as longitudes do ponto B e C ($Long. 1 - Long. 2$).

Figura 4.19: Distância com coordenadas



FONTE: Autor.

Ainda na figura 4.19(a), temos que os ângulos $A\hat{O}D = A\hat{O}E = 90^\circ$, com isso obtemos os seguintes valores:

$$\cos(b) = \cos(90^\circ - Lat. 2) = \text{sen}(Lat. 2),$$

$$\cos(c) = \cos(90^\circ - Lat. 1) = \text{sen}(Lat. 1),$$

$$\text{sen}(b) = \text{sen}(90^\circ - Lat. 2) = \cos(Lat. 2),$$

$$\text{sen}(c) = \text{sen}(90^\circ - Lat. 1) = \cos(Lat. 1).$$

Substituindo na lei dos cossenos no triângulo esférico, temos a equação:

$$\cos(\text{dist.}) = \text{sen}(Lat. 2) \cdot \text{sen}(Lat. 1) + \cos(Lat. 2) \cdot \cos(Lat. 1) \cdot \cos(Long. 1 - Long. 2).$$

Com esta equação é possível determinar a distância entre quaisquer pontos na superfície terrestre com as coordenadas geográficas. O comprimento da distância será medido em graus relativo ao arco percorrido, e para se ter a distância em quilômetros deve-se multiplicar pela distância relativa ao arco de 1° .

Considere que o raio do planeta seja aproximadamente 6370km, dessa forma temos:

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{1^\circ}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6370}{360} \cong 111,17747km.$$

Exemplo 4.6: Calcular a distância de Três Lagoas - MS na coordenada Latitude: 20° 45' 35" Sul, Longitude: 51° 41' 42" Oeste, até Campo Grande -MS na coordenada Latitude 20° 28' 53" Sul, Longitude 54° 36' 58" Oeste, e qual o erro esférico para esta distância?

Temos os seguintes dados:

Lat.1 = - 20°45'35" = - 20,75972° (Sul orientação negativa),

Long.1 = -51°41'42" = -51,69500 (Oeste orientação negativa),

Lat.2 = -20°28'53" = -20,48139° (Sul orientação negativa),

Long.2 = -54°36'58" = -54,61611° (Oeste orientação positiva),

Long.1 – Long.2 = -51,69500° - (-54,61611°) = 2,92111°.

Aplicando a equação da lei dos cossenos no triângulo esférico temos:

$$\begin{aligned} \cos(dist.) &= \sin(-20,48139^\circ) \cdot \sin(-20,75972^\circ) \\ &\quad + \cos(-20,48139^\circ) \cdot \cos(-20,75972^\circ) \cdot \cos(2,92111^\circ) \\ \cos(dist.) &= 0,99885 \\ dist. &= \arccos(0,99885) \\ dist. &= 2,74806^\circ. \end{aligned}$$

Como a distância de cada grau na superfície terrestre corresponde a aproximadamente 111,17747km, temos:

$$\begin{aligned} dist. &= 2,74806^\circ \cdot 111,17747km, \\ dist. &\cong 305,52236km \cong 305522,36m. \end{aligned}$$

Para determinar o erro esférico devemos calcular a distância entre as cidades em um plano reto, na figura 4.19(b) podemos considerar o ponto *C* sendo a cidade Campo Grande e o ponto *B* a cidade de Três Lagoas, a semi reta $\overline{BC} = x$ é a distância em plano reto. Aplicando a Lei dos cossenos da seção 2.5 no triângulo $\triangle OBC$ temos:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \cos(\widehat{BOC}) \\ x^2 &= R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos(dist) \\ x^2 &= 6370^2 + 6370^2 - 2 \cdot 6370 \cdot 6370 \cdot 0,9985 \\ x &\cong 305,49447km \cong 305494,47m. \end{aligned}$$

Assim, a distância em plano reto entre as cidades de Campo Grande e Três Lagoas é $305494,47m$, logo, o erro esférico para este caso será de $305522,36m - 305494,47m = 27,89m$.

Exemplo 4.7: Determinar a área do terreno poligonal, utilizando o método por coordenadas geográficas.

Para este cálculo devemos seguir a recomendação das referências de se utilizar distâncias até 20km, sendo assim, poderemos considerar a superfície terrestre como plana para determinar o cálculo da área, neste caso o erro esférico será descartado.

Considere a região representada na figura 4.20, com o auxílio do software Google Earth foram coletadas coordenadas de quatro pontos A, B, C e D na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, *campus* Três Lagoas, a fim de que se possa determinar as medidas dos seus lados e sua área.

Figura 4.20: Levantamento por coordenadas.



FONTE: Google Earth Pro.

Segue no quadro 4.1 as coordenadas geográficas de cada vértice do quadrilátero ABCD, apresentado na figura 4.20:

Quadro 4.1: Coordenadas geográficas do polígono

PONTO	LATITUDE	LONGITUDE
A	-20,782072°(S)	-51,666312°(W)
B	-20,782133°(S)	-51,665065°(W)
C	-20,784992°(S)	-51,665189°(W)
D	-20,784852°(S)	-51,666389°(W)

FONTE: Autor.

Como as distâncias entre os pontos são relativamente pequenas comparado ao tamanho da superfície terrestre, para esta atividade devemos utilizar mais casas decimais nas coordenadas geográficas, para que o levantamento fique o mais correto possível. Também, neste caso é aconselhável que os alunos utilizem calculadoras ou um editor de planilhas para auxiliá-los nesses cálculos.

O levantamento será feito por triangulação. Dessa forma, teremos os triângulos ΔABC e ΔACD . Após os cálculos das distâncias, faremos o cálculo das áreas utilizando a fórmula de área em função da medida dos três lados (Fórmula de Heron), por ser cálculos semelhantes aos apresentados no exemplo anterior seguem os resultados dos cálculos das distâncias no quadro 4.2 abaixo:

Quadro 4.2: Distâncias dos lados do quadrilátero

LADO	LAT.1	LONG.1	LAT.2	LONG.2	DISTÂNCIA (m)
AB	-20,782072	-51,666312	-20,782133	-51,665065	129,798
BC	-20,782133	-51,665065	-20,784992	-51,665189	318,125
CD	-20,784992	-51,665189	-20,784852	-51,666389	125,701
AD	-20,782072	-51,666312	-20,784852	-51,666389	309,184
AC	-20,782072	-51,666312	-20,784992	-51,665189	344,994

FONTE: Autor.

Considere como p_1 o semiperímetro do triângulo ΔABC e p_2 o semiperímetro do triângulo ΔACD

$$p_1 = \frac{AB + BC + AD}{2} = \frac{129,8 + 318,12 + 344,99}{2} = 396,459m ,$$

$$p_2 = \frac{AC + CD + AD}{2} = \frac{344,99 + 125,7 + 309,18}{2} = 389,939m.$$

Aplicando a fórmula de Heron, temos:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(ACD)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \sqrt{p_1 \cdot (p_1 - AB) \cdot (p_1 - BC) \cdot (p_1 - AC)} +$$

$$\sqrt{p_2 \cdot (p_2 - AD) \cdot (p_2 - CD) \cdot (p_2 - AC)}$$

$$\text{Área}(ABCD) = \sqrt{396,459 \cdot (396,459 - 129,798) \cdot (396,459 - 318,125) \cdot (396,459 - 344,994)}$$

$$+ \sqrt{389,939 \cdot (389,939 - 309,184) \cdot (389,939 - 125,701) \cdot (389,939 - 344,994)}$$

$$\text{Área}(ABCD) = 39983,2 \text{ m}^2.$$

Com isso, temos que a área do terreno é 39983,2m², esta atividade pode ser aplicada em um laboratório de informática, para que os alunos tenham acesso as outras ferramentas que os auxiliarão no desenvolvimento do levantamento com coordenadas geográficas, e também juntamente com o professor de geografia poderá estar explorando software de navegação geográfica gratuitos como Google Maps para o cálculo de distâncias entre cidades.

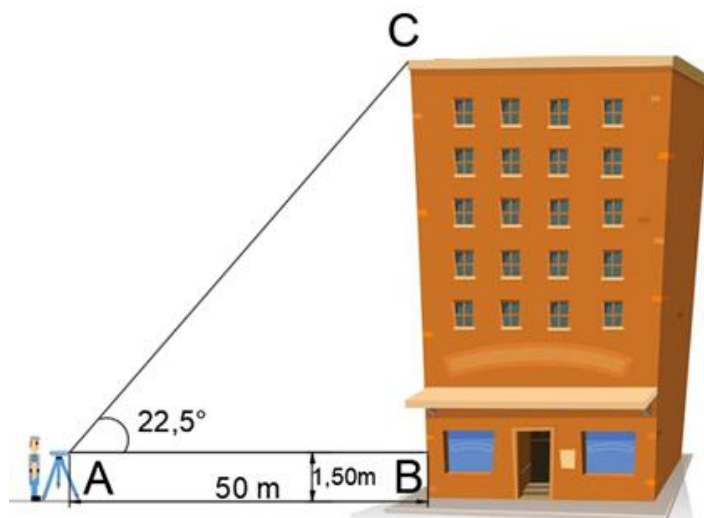
4.5 METODOLOGIA PARA CALCULAR DISTÂNCIAS VERTICAIS

Neste capítulo será apresentado algumas situações problemas envolvendo distâncias verticais, os conteúdos abordados serão relacionados a trigonometria, e com os exemplos numéricos apresentados o professor poderá adaptá-los para suas aulas práticas.

Exemplo 4.8: Cálculo da altura de um edifício.

O professor deverá avistar algum edifício próxima do local do levantamento para determinar a sua altura. Na figura 4.21, temos um exemplo numérico.

Figura 4.21: Altura do edifício I



FONTE: Adaptado de <<https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/262948-edificio-de-loja-de-desenho-animado>>.

Para determinar a altura do edifício, será necessário medir a distância do edifício até a posição do teodolito, e também fazer a medição do ângulo do alinhamento horizontal do teodolito até o topo do edifício. Segue que na figura 4.21, o teodolito está posicionado no ponto denominado como A . A distância da posição do teodolito até o edifício ponto B é $50m$, sendo o topo do edifício o ponto C , temos o triângulo retângulo $\triangle ABC$, em que a distância BC somada com a altura do teodolito é a altura do edifício. Fazendo a medição com o teodolito obtemos o ângulo $B\hat{A}C = 22,5^\circ$.

Utilizando a razão trigonométrica tangente no triângulo $\triangle ABC$, temos:

$$Tg B\hat{A}C = \frac{BC}{AB}$$

$$Tg(22,5^\circ) = \frac{BC}{50}$$

$$BC = 50 \cdot Tg(22,5^\circ)$$

$$BC = 20,7m.$$

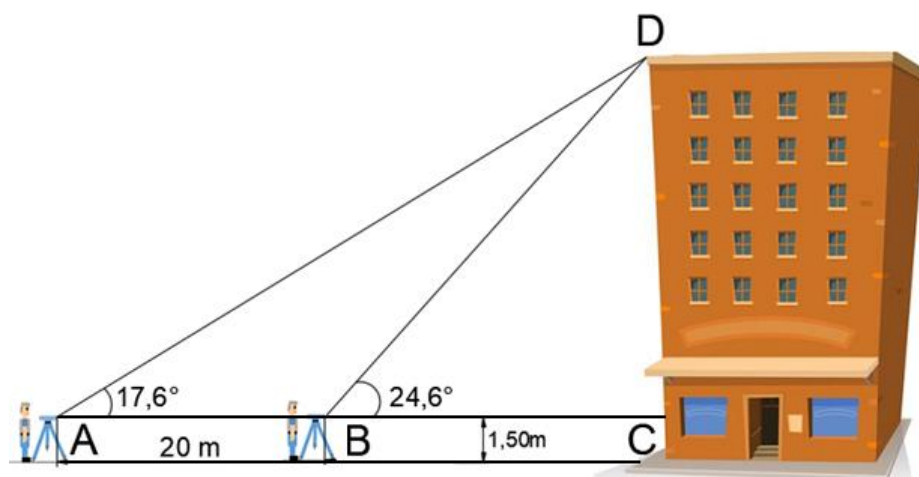
Logo, a altura do edifício será a distância $BC = 20,7m$, acrescentado à altura do teodolito $1,5m$, ou seja, altura = $20,7 + 1,5 = 22,2m$.

Temos o mesmo edifício, porém em uma situação em que não é possível medir a distância até o edifício na horizontal, para este caso será necessário fazer a medição do ângulo em dois pontos diferentes e medir a distância entre os pontos de medição.

Temos, na figura 4.22, o teodolito posicionado perto do edifício no ponto denominado como B , faz a medição do ângulo no alinhamento horizontal do teodolito até

topo do edifício no ponto D , temos, então, o ângulo $\widehat{CBD} = 24,6^\circ$, e posicionando o teodolito no ponto A , temos que a distância $AB = 20m$, segue fazendo a medição do ângulo $\widehat{CAD} = 17,6^\circ$. Temos os cálculos seguintes nos triângulos retângulo $\triangle BCD$ e $\triangle ACD$.

Figura 4.22: Altura do edifício II



FONTE: Adaptado de <<https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/262948-edificio-de-loja-de-desenho-animado>>.

Utilizando a razão trigonométrica tangente no triângulo $\triangle BCD$, temos:

$$\operatorname{Tg} \widehat{CBD} = \frac{CD}{BC}$$

$$\operatorname{Tg}(24,6^\circ) = \frac{CD}{BC}$$

$$BC = \frac{CD}{\operatorname{Tg}(24,6^\circ)}.$$

Utilizando a razão trigonométrica tangente no triângulo $\triangle ACD$, obtemos:

$$\operatorname{Tg} \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC}$$

$$\operatorname{Tg}(17,6^\circ) = \frac{CD}{20 + BC}$$

$$CD = \operatorname{Tg}(17,6^\circ) \cdot (20 + BC)$$

$$CD = 20 \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ) + BC \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ),$$

substituindo o valor de BC , temos:

$$CD = 20 \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ) + \frac{CD}{\operatorname{Tg}(24,6^\circ)} \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ)$$

$$CD - \frac{CD \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ)}{\operatorname{Tg}(24,6^\circ)} = 20 \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ)$$

$$CD \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{Tg}(17,6^\circ)}{\operatorname{Tg}(24,6^\circ)}\right) = 20 \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ)$$

$$CD = \frac{20 \cdot \operatorname{Tg}(17,6^\circ)}{\left(1 - \frac{\operatorname{Tg}(17,6^\circ)}{\operatorname{Tg}(24,6^\circ)}\right)}$$

$$CD = 20,7m.$$

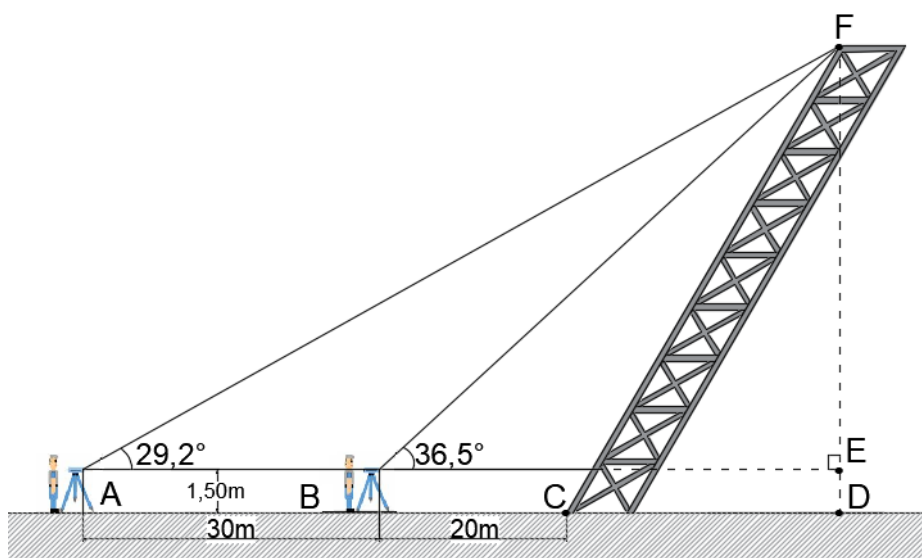
Logo, a altura do edifício será a distância $CD = 20,7m$, acrescentado à altura do teodolito $1,5m$, ou seja, altura = $20,7 + 1,5 = 22,2m$.

Exemplo 4.9: Calcular a altura e comprimento de uma torre inclinada.

Em outro estudo de caso, pode acontecer de ter uma torre inclinada perto do local da aula prática, neste caso, a altura até o solo não será o comprimento real do objeto, nesse exemplo, será necessário fazer alguns cálculos para chegar nesses valores.

Temos, na figura 4.23, uma torre que após problemas estruturais saiu de sua posição vertical ficando inclinada, na qual deseja-se descobrir qual é a sua altura do solo e o comprimento da torre em sua extensão inclinada.

Figura 4.23: Levantamento do comprimento e altura de uma torre inclinada



FONTE: Autor.

Para este exemplo será necessário fazer a medição do ângulo do alinhamento horizontal do teodolito até o topo da torre em dois pontos distintos, e também medir a distância da torre até o primeiro ponto e a distância entre os pontos de medição dos ângulos.

Continuando, na figura 4.23, temos o teodolito posicionado no ponto B o primeiro ponto de medição do ângulo, a distância do ponto B até a torre é o segmento $BC = 20m$, no alinhamento do teodolito temos os pontos A , B e E . Fazendo a medição do ângulo no ponto B , obtemos o ângulo $E\hat{B}F = 36,5^\circ$, segue a medição agora posicionando o teodolito no ponto A , faz-se a medição do ângulo $E\hat{A}F = 29,2^\circ$, e a distância entre as medições é o segmento $AB = 30m$. Temos os triângulos retângulos $\triangle AEF$ e $\triangle BEF$.

No triângulo $\triangle BEF$ utilizando a razão trigonométrica tangente, temos:

$$\begin{aligned} Tg E\hat{B}F &= \frac{EF}{BE} \\ Tg(36,5^\circ) &= \frac{EF}{BE} \\ BE &= \frac{EF}{Tg(36,5^\circ)}. \end{aligned}$$

Utilizando a razão trigonométrica tangente no triângulo $\triangle AEF$, temos:

$$\begin{aligned} Tg E\hat{A}F &= \frac{EF}{AE} \\ Tg(29,2^\circ) &= \frac{EF}{30 + BE} \\ EF &= Tg(29,2^\circ) \cdot (30 + BE) \\ EF &= 30 \cdot Tg(29,2^\circ) + BE \cdot Tg(29,2^\circ), \end{aligned}$$

substituindo o valor de BE , temos:

$$\begin{aligned} EF &= 30 \cdot Tg(29,2^\circ) + \frac{EF}{Tg(36,5^\circ)} \cdot Tg(29,2^\circ) \\ EF - \frac{EF \cdot Tg(29,2^\circ)}{Tg(36,5^\circ)} &= 30 \cdot Tg(29,2^\circ) \\ EF \cdot \left(1 - \frac{Tg(29,2^\circ)}{Tg(36,5^\circ)}\right) &= 30 \cdot Tg(29,2^\circ) \\ EF &= \frac{30 \cdot Tg(29,2^\circ)}{\left(1 - \frac{Tg(29,2^\circ)}{Tg(36,5^\circ)}\right)} \\ EF &= 68,5m. \end{aligned}$$

Logo, a altura da torre até o solo, será o segmento $EF = 68,5m$, acrescentado à altura do teodolito (1,5m), obtemos a altura $= DF = 68,5 + 1,5 = 70m$.

Voltando na equação de BE :

$$BE = \frac{EF}{Tg(36,5^\circ)}$$

$$BE = \frac{68,5}{Tg(36,5^\circ)}$$

$$BE = 92,6m.$$

Sabemos que o segmento $BE = BC + CD$, logo $CD = BE - BC = 92,6 - 20 = 72,6m$.

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle CDF$, temos:

$$CF^2 = CD^2 + DF^2$$

$$CF^2 = 72,6^2 + 70^2$$

$$CF = 100,9m.$$

Logo, temos que o comprimento da torre é $100,9m$ e sua altura até o solo é de $70,0m$. Essa metodologia pode ser aplicada para qualquer objeto inclinada que o professor possa avistar em sua aula prática.

Assim, os conteúdos necessários nas aulas práticas no levantamento das distâncias verticais serão as razões trigonométricas e o teorema de Pitágoras, logo esta atividade pode ser utilizada no ensino fundamental e no médio.

4.6 ATIVIDADES COM ESCALAS

No levantamento topográfico os engenheiros fazem a descrição do local que foi analisado no papel, para isto utilizam a relação de proporcionalidade, sendo que o desenho real é semelhante ao desenho descrito no papel. Como já foi dito está relação de proporcionalidade entre o local real e sua representação gráfica é denominada de escala.

Assim, depois do professor executar as atividades práticas já descritas, pode-se abordar a definição de escala nos levantamentos topográficos. Esta abordagem ajudará o professor a trabalhar assuntos envolvendo figuras proporcionais.

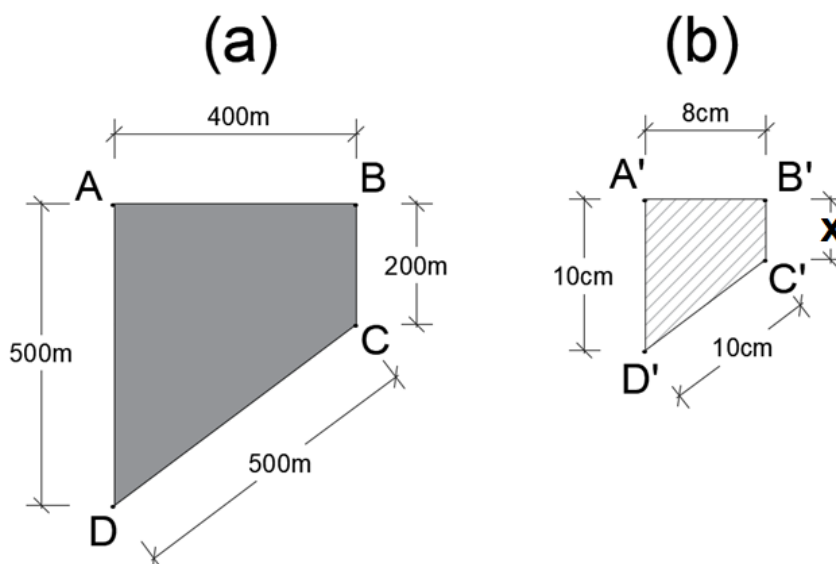
Após o professor explicar os conceitos relacionados a proporcionalidade, ele pode aplicar uma atividade, em que os alunos terão que descobrir a escala que foi utilizada no

desenho. Nesta atividade também pode ser abordado a transformação de unidades de medida.

Exemplo 4.10: Determinar a escala e medida do desenho.

Começando na figura 4.24(a), as medidas do terreno real, e também na figura 4.24(b) temos algumas medidas da representação do terreno no papel, neste caso desejasse descobrir a escala e a medida x utilizada no desenho.

Figura 4.24: Descobrindo escala do desenho



FONTE: Autor.

Por construção, temos que os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são semelhantes, assim, temos que os lados destes quadriláteros são proporcionais, ou seja:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'D'}{AD}$$

$$\frac{8cm}{400m} = \frac{x}{200m} = \frac{10cm}{500m} = \frac{10cm}{500m},$$

fazendo a conversão das unidades metros para centímetros, temos:

$$\frac{8cm}{40000cm} = \frac{x}{20000cm} = \frac{10cm}{50000cm} = \frac{10cm}{50000cm} = \frac{1}{5000}.$$

Simplificando, as expressões obtemos a escala 1 para 5000, ou seja, 1cm no desenho representa 5000cm no terreno real. Para determinar a medida x de $B'C'$ temos a seguinte proporção:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{x}{20000cm} = \frac{1}{5000},$$

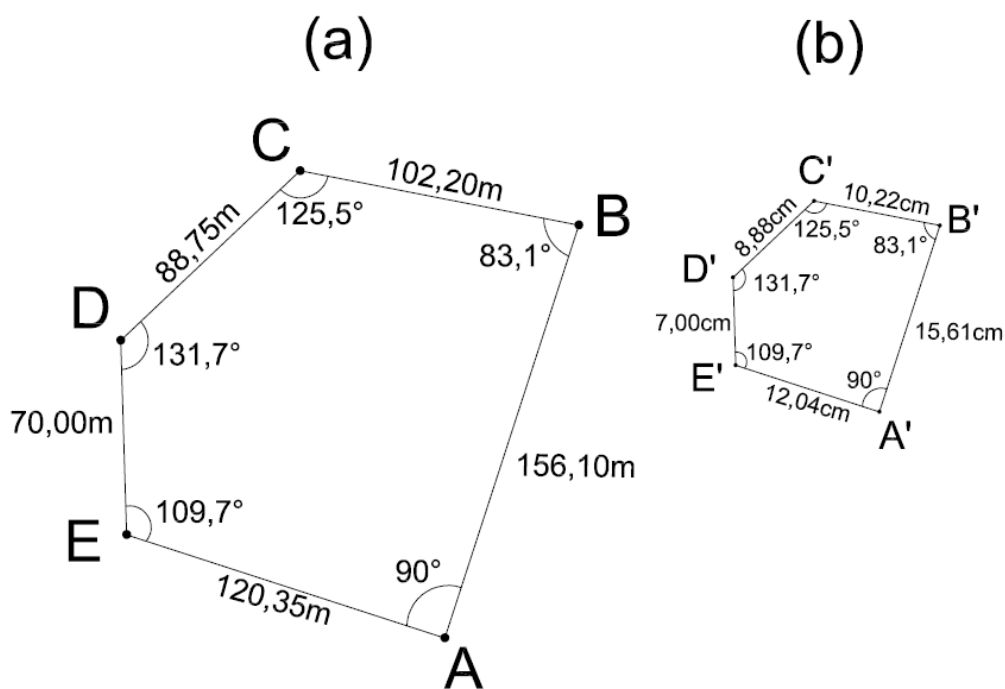
$$x = 4cm.$$

Exemplo 4.11: Representação em escala do terreno poligonal.

O professor pode propor aos alunos que eles realizem a representação do terreno que eles fizeram o levantamento topográfico. Para executar esta atividade será necessário um transferidor, régua e papel.

Voltando no Exemplo 4.5, do levantamento topográfico citado na seção 4.4.1, temos, na figura 4.25(a), as medidas dos lados e os ângulos internos, coletados segundo atividade apresentada, assim usaremos esses valores para fazer a representação gráfica.

Figura 4.25: Representação do levantamento topográfico



FONTE: Autor.

No primeiro momento, o professor pode estimular a criatividade dos alunos, pedindo que façam a representação, sem fornecer a escala a eles, somente entregando uma folha, solicitando que façam a representação nos limites da medida da folha de papel, dependendo da dificuldade, o professor pode estar auxiliando com algumas dicas,

pedindo, por exemplo, para os alunos observarem as maiores medidas máximas de largura e comprimento do terreno.

Em um segundo momento, o professor pode apresentar uma escala para os alunos fazerem a representação. Seguindo o exemplo da figura 4.25, será utilizado a escala 1/1000, ou seja, 1cm na representação gráfica corresponde a 1000cm no terreno, sendo assim, os polígonos proporcionais, temos as seguintes semelhanças entre o polígono do terreno $ABCDE$ e o polígono da representação gráfica $A'B'C'D'E'$:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{A'E'}{AE} = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{A'B'}{156,10m} = \frac{B'C'}{102,20m} = \frac{C'D'}{88,75m} = \frac{D'E'}{70m} = \frac{A'E'}{120,35m} = \frac{1}{1000},$$

fazendo a conversão das unidades metros para centímetros, temos:

$$\frac{A'B'}{15610cm} = \frac{B'C'}{10220cm} = \frac{C'D'}{8875cm} = \frac{D'E'}{7000cm} = \frac{A'E'}{12035cm} = \frac{1}{1000},$$

obtendo os valores da representação gráfica:

$$A'B' = 15,6cm; B'C' = 10,2cm; C'D' = 8,9cm; D'E' = 7,0cm; A'E' = 12,0cm.$$

A representação deste polígono semelhante está na figura 4.25(b). Para facilitar a execução do desenho, o recomendado é que os alunos utilizem somente uma casa decimal nas medidas dos lados, e também trabalhem com o ângulo inteiro, pois fazendo a representação a mão será difícil ter uma precisão acima destes parâmetros.

Assim, temos a finalização de todo o levantamento topográfico que veio, desde a escolha de um bom local para a atividade, as medições dos ângulos, a determinação das distâncias e área da superfície plana e pôr fim a representação do terreno em escala, englobando vários temas da matemática em cada etapa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades práticas apresentadas podem ser aplicadas na forma de um projeto geral, englobando todas as atividades na mesma etapa do ensino após os conteúdos do referencial matemático já terem sido explicados, ou se o professor preferir, pode estar aplicando as atividades de forma separada, de acordo com o que for abordado nos conteúdos matemáticos faz-se as atividades práticas.

Por exemplo, após ensinar os conceitos sobre razões trigonométricas, pode-se aplicar as atividades de cálculo de distâncias verticais, da mesma forma, depois que explicar os conceitos de lei dos senos e lei dos cossenos, aplica-se as atividades para cálculo de distâncias horizontais, e segue, após o estudo de áreas em superfícies planas, a aplicação do cálculo de áreas em terrenos poligonais.

É aconselhável que a atividade de representação em escala só seja aplicada após o estudo das áreas em terrenos poligonais, pois necessita das medidas do terreno, também, nessa etapa, o professor pode relembrar os conceitos de proporcionalidade. A atividade de cálculo de distâncias, com coordenadas geográficas, deve ser aplicada por último, pois é uma atividade de aprofundamento que utiliza conceitos da geometria esférica. Nesse caso, o professor poderá incluir novamente as atividades já estudadas como cálculo de áreas e representação em escala.

Por fim, mesmo sem aplicar essas atividades com alunos reais é notório que eles apreciariam a utilização dessas atividades extraclasse, estimariam a possibilidade de explorar os ambientes fora da sala de aula, respondendo perguntas do seu dia-a-dia: Qual a altura daquela árvore da escola? Qual tamanho daquele edifício? A que distância da escola está aquela torre? Qual a área do terreno da escola? Dessa forma, usando este material, o professor, juntamente com os alunos, poderão realizar algumas funções dos topógrafos em várias atividades práticas bastante atrativas e contextualizadas, sendo uma ótima oportunidade para um aprendizado significativo.

REFERÊNCIAS

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 13133; **Execução de Levantamento Topográfico** - 1994
- [2] B. BOYER, Carl; **História da Matemática**, São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques; **Geometria Euclidiana Plana**: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [4] BORGES, Alberto de Campos; **Topografia: Aplicada à Engenharia Civil**, 3ª edição: São Paulo, Blucher, 2013.
- [5] BOTELHO Manoel Henrique Campos, PRADO Jarbas de Francischi Jr, SILVA Lyrio de Paula; **ABC DA TOPOGRAFIA**: Editora BLUCHER, 2018.
- [6] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, 1997.
- [7] BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Resolução CEB n.3, 1998.
- [8] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César; **Temas e Problemas**, 3ª edição: Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.
- [9] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César; **Temas e Problemas Elementares**, 2ª edição: Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [10] MACHADO José Coelho Júnior, CARTAXO Fernando Rolim Neto, CARTAXO Júlio da Silva Correa de Oliveira; **Topografia Geral**: Recife, EDUFRPE, 2014.

- [11] MUNIZ Neto, Antonio Caminha; **Tópicos de Matemática Elementar**, Volume 2. Geometria Plana Euclidiana: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [12] VEIGA, Luiz Augusto Koenig, ZANETTI, Maria Aparecida Zehnpfennig, FAGGION, Pedro Luis; **Fundamentos de Topografia**: Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [13] WAGNER, Eduardo. Vídeo-aula no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio; **Trigonometria Prática**: IMPA, 2016. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=jV5WDz7ZDwI&list=PLo4jXE-LdDTShBmE67I02tiHBaaT41-ph> > Acesso em: 25 Agosto de 2020.
- [14] ZANELLA, Idelmar André. Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações. Londrina-PR, 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2013.
- [15] < https://play.google.com/store/apps/details?id=com.stfactory.anglemeter&hl=pt_BR&gl=US > Acesso em: 10 Novembro de 2020.