EWERTON TERRA MONTEZUMA MARTINS

METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PERSPECTIVA DE SUA UTILIZAÇÃO COM MÉTODOS DE CONTAGEM

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Dezembro 2021

EWERTON TERRA MONTEZUMA MARTINS

METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PERSPECTIVA DE SUA UTILIZAÇÃO COM MÉTODOS DE CONTAGEM

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
Dezembro 2021

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

M386 Martins, Ewerton Terra Montezuma.

METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS : UMA PERSPECTIVA DE SUA UTILIZAÇÃO COM MÉTODOS DE CONTAGEM / Ewerton Terra Montezuma Martins. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2022.

195 f. : il.
Inclui bibliografia.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2022.
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.

1. Métodos de Contagem. 2. Resolução de Problemas. 3. Processo de Ensino e Aprendizagem. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

EWERTON TERRA MONTEZUMA MARTINS

METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PERSPECTIVA DE SUA UTILIZAÇÃO COM MÉTODOS DE CONTAGEM

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 16 de dezembro de 2021.

Profª. Drª. Arilise Moraes De Almeida Lopes
D.Sc. - IFF

Profª. Dr. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Dr. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

A Deus, por guiar meus passos. Aos meus pais, pelos ensinamentos morais. Ao meu irmão Antônio. À minha esposa Bruna.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por estar presente em minha vida, permitindo que conseguisse ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho, e tornado possível essa conquista.

À minha companheira e esposa Bruna por toda parceria, cumplicidade e suporte nos momentos mais difíceis dessa jornada.

Aos meus pais Joaldo e Elizabeth por nunca terem medido esforços para me proporcionar um ensino de qualidade durante todo o meu período escolar, me apoiando e incentivando em todos os momentos. Meu irmão Antônio pelo apoio e companheirismo.

Meus avós Jodir (in memoriam) e Onicéia e minha tia Eliane por todo apoio que sempre me deram e pela compreensão da minha ausência enquanto me dedicava à realização deste trabalho.

À Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, por todos os recursos materiais e humanos disponibilizados ao longo dessa jornada e à Sociedade Brasileira de Matemática, pelo oferecimento deste curso.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática da UENF, pelos conhecimentos que me foram transmitidos, em especial ao meu orientador professor Oscar Alfredo Paz La Torre, pela paciência, compromisso e dedicação na tarefa de me orientar. Aos meus companheiros de turma, que partilharam comigo muitos momentos de tensão e alegria. Aos participantes do teste exploratório pela contribuição que foi dada.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e à UENF, pelo oferecimento deste curso.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A todos que participaram direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, cito alguns Valbia, Walter, Sandra, Aluízio, Bárbara, Filipe, Maria, Letícia, Jonatas, Pâmella.

"Matemática não é apenas números e sim envolve letras e toda capacidade que o humano conseguir expressar."

(François Viète.)

Resumo

Os Métodos de Contagem constituem um campo da Matemática que por vezes é considerado por alunos e professores como difícil. Isso acontece porque algumas vezes são apresentados utilizando fórmulas ou situações modelos que acabam inibindo a participação dos alunos, dificultando o desenvolvimento da criatividade e autonomia deles nas mais diversas situações propostas. Assim, os Métodos de Contagem se apresentam como conceitos afastados da realidade dos alunos, chegando a ser paradoxal, pois acabam se distanciando de sua principal ideia que é de oferecer ferramentas para a realização adequada de uma contagem, algo que muitas vezes acontece de forma intuitiva. Desta forma, é de grande importância repensar as metodologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Assim, este trabalho utiliza a metodologia criada pelo matemático Geoge Polya intitulada Resolução de Problemas, como ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Métodos de Contagem. Tal metodologia passou a ser interpretada como possibilidade de otimizar o ensino e aprendizagem de conceitos e procedimentos da Matemática escolar. A presente pesquisa tem como objetivo analisar quais são as contribuições da metodologia Resolução de Problemas para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do Ensino Médio em Métodos de Contagem. Essa pesquisa possui um cunho qualitativo e foi desenvolvida por meio de intervenção pedagógica, mediante a um teste exploratório, aplicado numa turma de 3ª série do Ensino Médio na modalidade Regular, de uma escola pública estadual no município de Campos dos Goytacazes - RJ. Devido à suspensão das aulas presenciais ocorrida por conta da pandemia do Covid-19, a aplicação da Sequência Didática ocorreu de maneira remota com adoção de aulas on-line utilizando o Google Meet. É valido ressaltar que, todos os problemas usados na aplicação foram desenvolvidos pelo pesquisador, visando proporcionar novas situações aos alunos participantes da pesquisa. Verificou-se que o uso da metodologia Resolução de Problemas deu oportunidade ao aluno de ser o protagonista no processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo autonomia e criatividade, frente às situações apresentadas. Constata-se que, a referida metodologia pode contribuir, de forma relevante para o processo de ensino e aprendizagem dos Métodos de Contagem para os alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Palavras-chaves: Métodos de Contagem, Resolução de Problemas, Processo de Ensino e Aprendizagem.

Abstract

Counting Methods is a field of Mathematics that is sometimes considered by students and teachers as difficult. This happens because sometimes they are presented using formulas or model situations that end up inhibiting students' participation, hindering the development of their creativity and autonomy in the most diverse proposed situations.Thus, the Counting Methods are presented as concepts far removed from the students' reality, becoming paradoxical, as they end up distancing themselves from its main idea, which is to offer tools for the proper performance of a count, something that often happens intuitively. . Thus, it is very important to rethink the methodologies used in the teaching and learning process of students. Thus, this work uses the methodology created by the mathematician Geoge Polya entitled Problem Solving, as a tool for teaching and learning the concepts of Counting Methods. Such methodology came to be interpreted as a possibility to optimize the teaching and learning of concepts and procedures in school mathematics. This research aims to analyze the contributions of the Problem Solving methodology to the teaching and learning process of high school students in Counting Methods. This research has a qualitative nature and was developed through a pedagogical intervention, through an exploratory test, applied in a 3rd grade high school class in the Regular modality, in a state public school in the city of Campos dos Goytacazes - RJ. Due to the suspension of in-person classes due to the Covid-19 pandemic, the application of the Didactic Sequence occurred remotely with the adoption of online classes using Google Meet. It is worth mentioning that all the problems used in the application were developed by the researcher, aiming to provide new situations for the students participating in the research. It was found that the use of the Problem Solving methodology gave the student the opportunity to be the protagonist in the teaching and learning process, developing autonomy and creativity, in face of the situations presented. It appears that this methodology can significantly contribute to the teaching and learning process of Counting Methods for students in the 3rd grade of high school.

Key-words: Counting Methods, Problem Solvind, Teachind and Learning Process.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de gráficos

Lista de abreviaturas e siglas

PFC	Princípio Fundamental da Contagem
EM	Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
PI	Piauí
RJ	Rio de Janeiro
COVID	Corona Vírus Disease
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sumário

Introdução

Os Métodos de Contagem estão presentes no cotidiano das pessoas, geralmente, de maneira bastante natural. Sendo assim, basta notar que, uma pessoa ao longo do dia faz uso de diversos meios formais e/ou não formais para realizar Contagens e, assim, desenvolver decisões necessárias para uma determinada situação.

Com isso, é possível desenvolver uma reflexão acerca de um grande número de situações que a Contagem está presente no dia a dia das pessoas. Desde os Anos Iniciais como, por exemplo, quando uma criança na hora de escolher os integrantes que irão compor uma equipe, indicando os integrantes escolhidos. Até ao logo da vida adulta como, por exemplo, quando uma pessoa ao ligar o GPS, e verifica as diversas possibilidades de caminhos para se chegar a um determinado destino, ou até mesmo, na hora de se vestir ou de escolher o que irá comer.

Desta forma, quando a ideia de Contagem é trabalhada no Contexto Escolar, a formalização dos recursos utilizados para realizar diversas contagens algumas vezes acaba sendo trabalhada com o aluno de forma mecanizada, muitas vezes levando ao aluno seguir padrões pré-estipulados, perdendo a naturalidade de sua essência.

Estudos apontam que, os Métodos de Contagem são apresentados aos alunos do Ensino Médio por meio da utilização de fórmulas e/ou problemas-modelos, o que, muitas vezes, acontece devido ao fato do professor não se sentir preparado ou não estar confiante em sua prática docente para desenvolver com os alunos o processo de ensino e aprendizagem desse campo da Matemática (CARVALHO, 2006). Sendo assim, tal campo, normalmente, acaba sendo classificado por alunos e professores como difícil. Gerando como consequência, prática docente e processo de ensino e aprendizagem dos alunos a reprodução de questões que funcionam como modelos (CARVALHO, 2006).

Entretanto, apesar das Técnicas Básicas de Contagem serem essencialmente baseadas nos conhecimentos das operações aritméticas, (LIMA et al., 2006a, p. 123) reforçam a ideia de que, “Problemas de contagem estão entre os considerados mais difíceis pelos alunos (e professores) do Ensino Médio”. É provável que, muito disso apresenta relação com o fato de que, na maior parte das vezes, os alunos são apresentados a situações “frias”, com dados irreais, que fogem do cotidiano deles e, acabam não despertando nos alunos o interesse para encarar tais problemas.

(MORGADO et al., 1991, p. 2) apontam que, “[...] a aprendizagem destes conceitos se faz, de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema”. A consequência gerada na reprodução de aulas expositivas, essas que apresentam pouco significado para os alunos, acabam que, por vezes inibe a participação deles, implicando no impedimento para o desenvolvimento da autonomia e da criatividade dos alunos. Diante de tal situação, os alunos, ao se depararem com os problemas, foram treinados para aplicar fórmulas, essas como única alternativa para encontrar a solução dos problemas, ou seja, acabam não analisando as diferentes possibilidades de caminhos e maneiras para desenvolver a resolução de determinada questão.

Sendo assim, durante o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, com relação aos Métodos de Contagem, faz-se necessário repensar as práticas de ensino para que a aprendizagem dos alunos tenha êxito, não sendo algo paradoxal, pois ao mesmo tempo em que, a ideia de Contagem é intuitiva, infelizmente, na maioria das vezes, na prática acaba sendo algo que causa incômodo e insatisfação por ambas as partes, professores e alunos.

Desta forma, faz-se importante repensar nas metodologias de ensino utilizadas no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Por esse motivo, pensou-se na seguinte questão de pesquisa: Quais são as contribuições da Metodologia Resolução de Problemas para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do Ensino Médio em Métodos de Contagem? Com intuito de responder tal questão, traçou-se o seguinte objetivo geral, apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos com relação aos Métodos de Contagem.

Para atingir o objetivo geral, essa pesquisa apresenta como objetivos específicos:

(i) Promover uma revisão bibliográfica acerca do tema Métodos de Contagem (Análise Combinatória) e Metodologia Resolução de Problemas em literaturas especializadas nos assuntos;

(ii) Realizar uma pesquisa sobre Propostas Didáticas quem trabalhem com Métodos de Contagem;

(iii) Realizar a elaboração da Proposta Didática e questionários para a coleta dos dados;

(iv) Promover um levantamento com professores de Matemática;

(v) Realizar uma análise dos dados coletados no levantamento realizado com os professores;

(vi) Utilizar Ferramentas Digitais como recurso para promover a aplicação de forma remota;

(vii) Realizar a aplicação da Proposta Didática e do questionário dos alunos;

(viii) Analisar os resultados obtidos na Proposta Didática e no questionário.

A presente pesquisa possui uma abordagem qualitativa e seu desenvolvimento ocorreu por meio de Intervenção Pedagógica com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada no município de Campos dos Goytacazes – RJ. Assim sendo, a estrutura de tal pesquisa apresenta uma divisão em quatro capítulos, além da introdução, conforme apresentado nos próximos parágrafos.

O capítulo 1 apresenta o Referencial Teórico que fundamenta esta pesquisa com os seguintes tópicos: (i) Contagem no Cotidiano; (ii) Estudo dos Métodos de Contagem na Educação Básica; (iii) Métodos Básicos de Contagem (Noções Básicas de Conjuntos, Princípio Fundamental da Contagem, Princípio Aditivo, Permutações Simples, com Repetições e Circulares, Arranjos Simples e Combinações Simples); (iv) Metodologia Resolução de Problemas; (v) Ferramentas Digitais (*Google Meet* e *Microsoft Whiteboard*) e (vi) Trabalhos Relacionados.

O capítulo 2 apresenta os Aspectos Metodológicos desta pesquisa e sua estrutura é composta pelos tópicos: (i) Caracterização da Pesquisa; (ii) O Espaço Escolar; (iii) Público-alvo; (iv) Etapas da Pesquisa; (v) Proposta Didática; (vi) Relação dos trabalhos utilizados como referência para o desenvolvimento da Proposta Didática; (vii) Detalhamento da Proposta Didática; (viii) Análise dos professores a respeito dos questionários propostos e (ix) Elaboração dos questionários.

O capítulo 3 intitulado Experimentação e Análise dos dados apresenta o relato sobre a experimentação da Proposta Didática, com alunos da 3ª série do Ensino Médio e a análise dos questionários. Ele é fundamentado a partir da coleta dos dados com relação as atividades desenvolvidas e aplicadas nos três encontros desta pesquisa. Em seguida, discursa sobre a avaliação da aprendizagem, realizando uma análise geral sobre a aplicação da Proposta Didática e, por fim, apresenta uma análise sobre o questionário aplicado aos alunos.

Por fim, o último capítulo desta pesquisa é intitulado Considerações Finais, esse expõe as reflexões desenvolvidas a respeito da pesquisa realizada.

Capítulo 1

Referencial Teórico

Este capítulo apresenta os tópicos que compõe o Referencial Bibliográfico desta pesquisa e, ele é composto por três aspectos.

Assim, são apresentados alguns Métodos Básicos de Contagem trabalhados na Educação Básica durante o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos alunos, tais como: os Princípios Multiplicativo (chamado também por Princípio Fundamental da Contagem) e Aditivo, as Permutações Simples, com Repetições e Circulares, os Arranjos Simples e as Combinações Simples.

Como também, este capítulo apresentada a metodologia de ensino intitulada Metodologia Resolução de Problemas, desenvolvida pelo matemático húngaro George Polya, funcionando como referencial teórico para a execução desta pesquisa.

Assim como também, neste capítulo, é feita uma breve apresentação sobre as Ferramentas Digitais: *Google Meet* e *Whiteboard*, responsáveis por possibilitar a aplicação das atividades que compõe a Proposta Didática desta pesquisa ocorrer de forma remota, uma vez que, as aulas presenciais foram suspensas devido a pandemia gerada pelo COVID-19. Por fim, este capítulo é composto por uma análise dos trabalhos relacionados ao tema desta pesquisa.

1.1 Contagem no Cotidiano

Em diversos momentos ao longo do dia faz-se necessário utilizar a tomada de decisão, desde pequenas escolhas pessoais até caminhos e possibilidades para a execução de tarefas importantes. Assim, algumas vezes, as decisões podem acontecer de forma rápida e prática. Contudo, em outros momentos faz-se necessário refletir ou fazer análises com relação as suas diferentes possibilidades, ou seja, diferentes formas para efetuar a decisão.

Desta forma, buscou-se exemplificar nesta pesquisa situações presentes no cotidiano das pessoas que utilizam recursos relacionados a tomada de decisão, como, por exemplo, a escolha das diferentes possibilidades para fazer combinações de roupas ao se vestir, determinar senhas para contas ou *smartphone*, combinar possibilidades para resultados em tabelas de competições, como as competições esportivas e diversas outras situações presentes no cotidiano das pessoas. Então, a tomada de decisão vai desde situações comuns do cotidiano até as que, de certa forma, obrigam as pessoas, mesmo que intuitivamente, a pensar nas possibilidades e tomar decisões que precisam ser estudas e analisadas antes de serem finalizadas.

Assim, este capítulo visa fornecer recursos para facilitar a contagem, a análise e as tomadas de decisões. Nele é proposto realizar uma apresentação das Técnicas Básicas de Contagem, tais como: os Princípios Multiplicativo e Aditivo, as Permutações Simples, com Repetições e Circulares, os Arranjos Simples e as Combinações Simples. Além de oferecer possibilidades e caminhos buscando auxiliar na determinação do número de elementos dos conjuntos formados atendendo a determinadas regras, sem que haja assim a necessidade de enumerar previamente seus elementos. Os estudiosos da área Morgado et al. (2006) afirmam que,

> [...] A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada a história da Matemática e a forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança e "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem (MORGADO et al., 2006, p. 17).

Com isso, esta pesquisa apresenta dois recursos essenciais para o desenvolvimento e utilização do Raciocínio Combinatório no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, esses são: O Princípio Fundamental da Contagem (PFC), também conhecido como Princípio Multiplicativo, e o Princípio Aditivo.

Assim sendo, almejando exemplificar, explicar e apresentar ambos princípios baseados em conceitos e/ou definições, e também, dialogar sobre suas importâncias tanto para o contexto educacional quanto para o contexto social, esta pesquisa busca, em seções distintas, apresentar tais finalidades e, posteriormente, fundamentar os conceitos dos princípios com técnicas básicas para o desenvolvimento da contagem e das tomadas de decisões. Com isso, espera-se que, os alunos desenvolvam sua autonomia para aplicar as Técnicas Básicas de Contagem, assim como também, seus próprios recursos frente a um problema qualquer da área de Contagem.

É valido ressaltar que, visando oferecer situações inéditas, os exemplos e as explicações dos conteúdos propostos são criações próprias do autor desta pesquisa.

1.2 Estudos dos Métodos de Contagem na Educação Básica

É muito comum em problemas de Análise Combinatória encontrar situações em que se busque realizar contagens e listar agrupamentos de diversos elementos, podendo em alguns casos serem resolvidos, até, por meio de estimativas. Segundo (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 4) "[...] há, em geral, quatro aspectos da combinatória moderna: listar, contar, estimar e existir".

Já segundo (MELLO, 2017, p. 12) "é fato que apesar de reconhecermos a importância do ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio, este conteúdo da matemática, quando explorado sob a forma de problemas, apresenta certas dificuldades em relação a sua formulação e a interpretação dos seus enunciados".

Mas, de acordo com Vazquez e Noguti (2004)

> [...] Acreditamos que o ensino da combinatória é valido quando utilizamos raciocínio e entendimento das fórmulas propostas pelos matemáticos. A aplicação direta de fórmulas sem o entendimento da mesma faz com que os alunos apenas repitam passos e trabalhem mecanicamente, tornando o seu estudo e aprendizado apenas um jogo de fórmulas (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 7).

Em alguns casos, em problemas de Contagem os alunos conseguem desenvolver a solução utilizando conceitos adquiridos na Educação Básica, fugindo assim da aplicação de fórmulas e padrões pré-estabelecidos.

Ainda conforme afirmam Vazquez e Noguti (2004)

> [...] Cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los. As operações combinatórias são essenciais para o desenvolvimento cognitivo, por isso seria de extrema importância que o aluno tivesse contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica, para familiarizar-se com problemas de contagem, descrevendo os casos possíveis e contando-os através de uma representação por ele escolhida, sem regras em princípio, de modo que ele adquirisse um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas, visando uma posterior formalização no ensino médio (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 6).

Desta forma, muitas vezes, os professores durante suas práticas docentes acabam seguindo padrões de aplicações de fórmulas ou utilizando problemas modelos, que acabam norteando o ensino dos Métodos de Contagem por meio de reprodução de modelo de resolução. Com isso, os alunos acabam não desenvolvendo suas criatividade e autonomia frente as mais diversas situações enfrentadas durante a resolução de um problema.

Morgado et al. (2006) defendem que

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problema, e verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos dessa parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução (MORGADO et al., 2006, p. 2).

Já (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004) afirmam que

> Na análise combinatória estuda-se formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, com os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente, em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 40).

Gerando como consequência que, o estudo dos Métodos de Contagem como, por exemplo, as Permutações, os Arranjos e as Combinações é responsável pela análise de estruturas e relações discretas, sendo de grande importância, pois possui aplicações nas mais diversas áreas de conhecimentos (MELLO, 2017, p. 10).

(VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 5) defendem que “A Análise Combinatória serve hoje de base a várias teorias da Análise Matemática: probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, etc.”.

Sendo assim, em acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, o Raciocínio Combinatório possui extrema importância para os contextos educacional e social. Segundo (BRASIL, 2000)

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem duvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 2000, p. 44).

Morgado et al. (2006) defendem que

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada a história da Matemática e a forma pela qual as pessoas tem seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é contar, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem (MORGADO et al., 2006, p. 15).

Nesse sentido, Vazquez e Noguti (2004) afirmam que,

> Esse tema parece não ser bem visto tanto por docentes como discentes de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução destes conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o princípio fundamental da contagem pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 6).

Conforme apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), a aplicação de ideias relacionadas aos Pensamentos Probabilísticos e Combinatórios aplicados a fenômenos naturais e do cotidiano constituem aplicações da Matemática em questões do mundo real e, acabaram tornando-se bastante complexas. Isso reafirma a importância de uma abordagem cuidadosa em relação aos conteúdos de: Contagem, Estatística e Probabilidade no Ensino Médio (BRASIL, 2000, p. 44).

Assim, pode-se observar no Quadro 1 os temas referentes ao ensino dos Métodos de Contagem para o Ensino Médio apontados pela (BRASIL, 2018), esses detalhados por série de escolaridade, objeto de conhecimento e habilidades.

I. Ensino Médio

Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidades referentes à Análise Combinatória abordados no Ensino Fundamental

Competência Específica	Habilidades
<u>Competência Específica 3:</u> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Fonte: Elaboração Própria

Cabe ressaltar que, de acordo com Brasil (2018), os problemas de contagem

> [...] devem, inicialmente, estar restritos aqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, aqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BRASIL, 2018, p. 273).

Assim, fazendo uma reflexão referente ao que foi apresentado nesta seção da pesquisa e, visando desenvolver uma Proposta Didática que contribua para o ensino e a aprendizagem dos Métodos de Contagem para alunos do Ensino Médio, essa buscou desenvolver as habilidades, apontadas ao longo do texto, norteadas pela (BRASIL, 2018).

1.3 Métodos Básicos de Contagem

Em diversos momentos ao longo do dia faz-se necessário utilizar a tomada de decisão, desde efetuar pequenas escolhas pessoais, até, determinar caminhos e possibilidades para a execução de determinada tarefas. Sendo assim, algumas vezes, as decisões podem acontecer de forma rápida e prática. Mas, em outros momentos, faz-se necessário refletir ou fazer análises com relação as suas diferentes possibilidades, ou seja, diferentes formas para efetuar determinada decisão.

Sendo assim, além desta pesquisa apresentar seções distintas destinadas tanto ao Princípio Multiplicativo quanto ao Princípio Aditivo. Esta também é composta por seções dedicadas, separadamente, as Permutações, aos Arranjos e as Combinações, conforme são apresentado nos próximos parágrafos deste texto. Sendo valido ressaltar que, os exemplos e as explicações que compõem esta pesquisa foram elaboradas pelo próprio autor desta pesquisa.

1.3.1 Conjuntos

Ao se referir ao conteúdo matemático Contagem, inicialmente, deve-se apresentar a Noção Básica de Conjunto. Sendo assim, segundo (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 10) "[...] um conjunto é uma coleção de objetos, chamados de elemento, que possuem uma propriedade comum ou que satisfazem determinada condição".

Já na Matemática Escolar, a ideia de conjunto consiste em algo essencial, que está presente em diversos conceitos. Os conjuntos podem ser formados a partir de objetos de diferentes naturezas, tais como: pessoas e números (SOUZA; GARCIA, 2016).

Definição 1.1.

Cardinalidade de um Conjunto

(LIMA et al., 2006a, p. 38), afirmam que "[...] para contar os elementos de um conjunto é necessário usar a noção de correspondência biunívoca, ou bijeção [...]."

Essa bijeção é chamada de contagem dos elementos de um determinado conjunto, e o número associado a esta contagem é chamado de Cardinalidade do Conjunto.

Utilizando a ideia de Cardinalidade, pode-se comparar conjuntos e determinar se são ou não equivalentes. Assim, (LIMA et al., 2006a, p. 44) afirmam que, dois conjuntos X e Y são (numericamente) equivalentes quando têm o mesmo número cardinal.

Com relação a ideia de Número, cabe ressaltar que, de acordo com (SILVEIRA ÊNIO ANO MARQUES, 2015, p. 28) “Número é a ideia de quantidade que nos vem a mente quando contamos, ordenamos e medimos. Numeral é toda representação de um número, seja ela escrita, falada ou digitada.”

Já (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 8) define numeral como uma forma de representar um número. Essa representação pode ser feita a partir de um símbolo gráfico (algarismo), uma palavra ou um gesto. Sendo assim, deve-se ter em mente que um mesmo número pode ser representado com diferentes numerais, por exemplo, pode-se representar o número três como *trois*, *three*, III. Podendo assim perceber que, no cotidiano das pessoas costuma-se utilizar a palavra número quando na verdade se refere a palavra numeral.

Desta forma, uma ação que qualquer indivíduo realiza diariamente de forma intuitiva é contar. Ao contar, normalmente, as pessoas realizam uma correspondência um a um entre um elemento e um numeral. Pode-se notar que, a contagem pode ser feita antes mesmo do estabelecimento do número, pois indivíduos que ainda não possuem o conhecimento de número conseguem realizar contagens a partir da ideia intuitiva de numeral.

Assim, as subseções seguintes, possuem definições retiradas dos livros Matemática Completa, volume 1 dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior e Paulo Roberto Câmara de Souza, da editora FTD, ano 2016 e do livro Matemática Contexto & Aplicações, do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, ano 2016.

Definição 1.2.

Representação de um Conjunto

"Um conjunto por ser representado de várias maneiras. Geralmente é indicado com letras maiúsculas (A, B, C, ...) e com letras minúsculas seus elementos (a, b, c, ...)."[1]

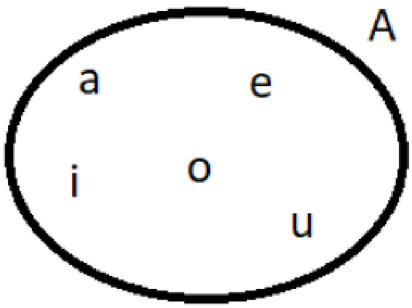
Um determinado conjunto pode ser representado das seguintes maneiras:

- Colocando-se seus elementos entre chaves, separados por vírgula, ou ponto e vírgula, por exemplo, A = {a, e, i, o, u};
- Por meio de uma ou mais propriedades que caracterize seus elementos, por exemplo, A = {x | x é vogal do nosso alfabeto};

[1] (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 11)

- Representados por meio de um esquema denominado diagrama de Venn.

Figura 1 – Representação de um conjunto



Fonte: Autoria própria.

Definição 1.3.

Tipos de Conjunto

Considerando que um conjunto possua elementos, é possível, inicialmente, classificá-lo como: Finito ou Infinito, em relação à quantidade de elementos pertencentes a ele. O Quadro 2 aponta de maneira formal, uma definição para estas duas situações.[2]

Quadro 2 – Tipos de Conjuntos, Definição e Exemplos

Tipos de Conjunto	**Definição**	**Exemplos**
Finito	Um conjunto é finito quando tem um número determinado de elementos	Conjunto de vogais: A = a, e, i, o, u
Infinito	Um conjunto é infinito quando não é finito, ou seja, não é possível a contagem de todos os seus elementos.	Conjunto dos números ímpares: B = 1, 3, 5, ...

Fonte: Elaboração Própria

Contudo, um determinado Conjunto pode não possuir elementos ou então possuir apenas um único elemento. Tal Conjunto é classificado como Vazio ou Unitário, de acordo com a presença ou não de um único elemento. Em relação a essas possibilidades, é possível ver no Quadro 3 uma definição formal para estes casos. [3]

[2] (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 11)
[3] (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 11)

Quadro 3 – Tipos de Conjuntos especiais, Definição e Exemplos

Tipos de Conjunto	**Definição**	**Exemplos**
Unitário	Um conjunto é unitário quando é formado por um único elemento.	H = x | x é um número natural maior que 6 e menor que 8
Vazio	Conjunto vazio é aquele que não possui elementos. O conjunto vazio pode ser representado por { } ou $\varnothing$.	V = x | x é um número natural menor que zero

Fonte: Elaboração Própria

Definição 1.4.

Igualdade de Conjuntos

Analisando os conjuntos A = {x | x é estado da região sudeste do Brasil} e B = {Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais, Espírito Santo}, pode-se perceber que, eles possuem exatamente os mesmos elementos. Nesse caso, pode-se afirmar que os conjuntos A e B são iguais.

Dois conjuntos A e B são iguais, deve-se indicar A = B, quando possuem exatamente os mesmos elementos. Dois conjuntos A e B são diferentes, deve-se indicar $A \neq B$, se pelo menos, um dos elementos de um dos conjuntos não pertence ao outro conjunto. [4]

Vale reforçar que, a ordem em que os elementos são dispostos não os diferenciam, como, por exemplo, os conjuntos C = {1, 2, 3, 4} e D = {3, 2, 4, 1} possuem os mesmos elementos, portanto tem-se que C = D.

Definição 1.5.

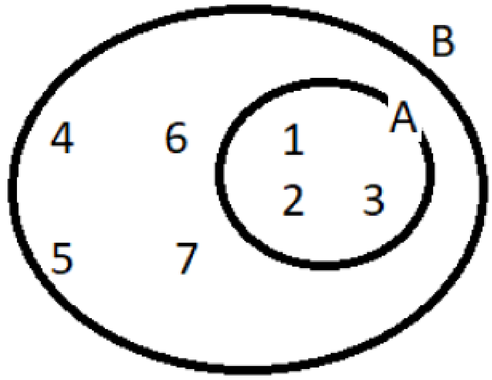
Subconjuntos

Considerando-se os conjuntos A = {Rio de Janeiro, São Paulo, Minas Gerais, Espírito Santo} e B = {x | x é um estado do Brasil}, pode-se concluir que, todo elemento do conjunto A também é elemento do conjunto B. Portanto, pode-se afirmar que, o conjunto A é um subconjunto de B.

Um conjunto A é subconjunto de outro conjunto, B, quando qualquer elemento de A também pertence a B. Quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto B tem-se uma relação de inclusão e é possível apontar que A está contido em B ou, ainda, que A é parte de B. Pode-se dizer também que B contém A (Figura 2).[5]

4 (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 12)
5 (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 12)

Figura 2 – Relação de Inclusão entre dois conjuntos dados



Fonte: Autoria própria.

Analisando a figura acima (Figura 2), pode-se perceber que, todos os elementos do conjunto A são também elementos do conjunto B. Logo, tem-se $A \subset B$ (A está contido em B), ou que A é parte de B.

Definição 1.6.

Relação de Inclusão entre Conjuntos

A relação de inclusão apresenta três propriedades básicas. Considere três conjuntos A, B e C quaisquer de um determinado conjunto universo U, tem-se que:[6]

- $A \subset A$ (propriedade reflexiva);
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então A = B (propriedade antissimétrica);
- Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (propriedade transitiva).

Definição 1.7.

Complementar de um Conjunto

Dado um conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o conjunto $A = \{2, 4, 6\}$. Basta fazer uma breve observação dos elementos dos conjuntos dados, para perceber que $A \subset U$. Logo, o complementar de A em relação a U será o conjunto $\{1, 3, 5\}$, pois é formado pelos elementos de U que não pertencem a A.

Dado um conjunto A, subconjunto de um universo U, chama-se complementar de A em relação a U o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a A; indica-se C_U^A ou C^A.[7]

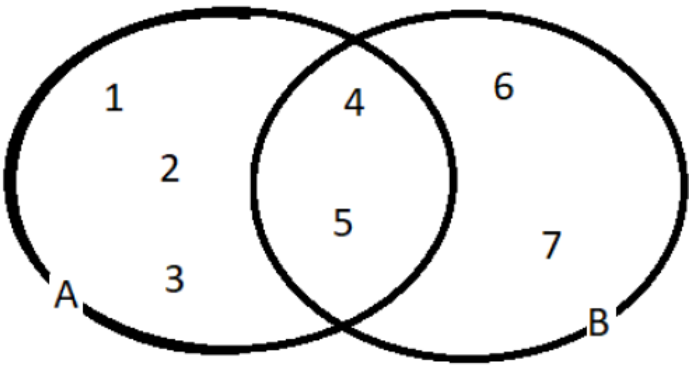
[6] (DANTE, 2016, p. 28)
[7] (DANTE, 2016, p. 28)

Definição 1.8.

Operações entre Conjuntos

A união, ou reunião, de dois conjuntos A e B, deve-se indicar por $A \cup B$, esse é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B: $A \cup B$= {x | $x \in A$ ou $x \in B$}. (Figura 3) [8]

Figura 3 – União entre dois conjuntos dados

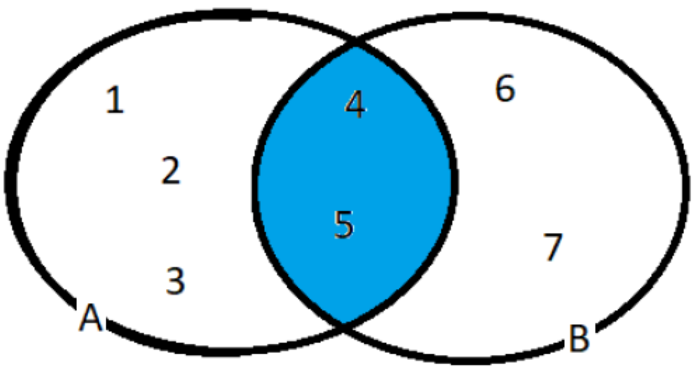


Fonte: Autoria própria.

A intersecção de dois conjuntos, A e B, deve-se indicar $A \cap B$, esse é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também pertencem a B: $A \cap B$ = {x | $x \in A$ e $x \in B$}.

Ainda utilizando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, dados no exemplo anterior, tem-se que, $A \cap B$ = $\{4, 5\}$ (Figura 4).

Figura 4 – Intersecção entre dois conjuntos dados



Fonte: Autoria própria.

Dados dois conjuntos, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, é possível escrever o conjunto C, esse formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem

[8] (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 15)

ao conjunto B, deste modo, tem-se que $C = \{1, 2, 3\}$. Neste caso, o conjunto C é chamado diferença entre A e B, indicado por $A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$.[9]

Definição 1.9.

Número de elementos da união de conjuntos

Suponha a seguinte situação:

Um professor de Literatura decidiu realizar uma pesquisa com suas turmas de primeira série do Ensino Médio relacionada à quantidade de alunos que leram as obras literárias: O Cortiço, de Aluísio Azevedo e a Moreninha, de Joaquim Manuel de Macedo. Os resultados obtidos pelo professor indicam que: 36 alunos leram os dois livros, 61 alunos leram O Cortiço, 51 alunos leram A Moreninha e 20 alunos não leram nenhum dos dois livros. Qual a quantidade de alunos que participaram da pesquisa?

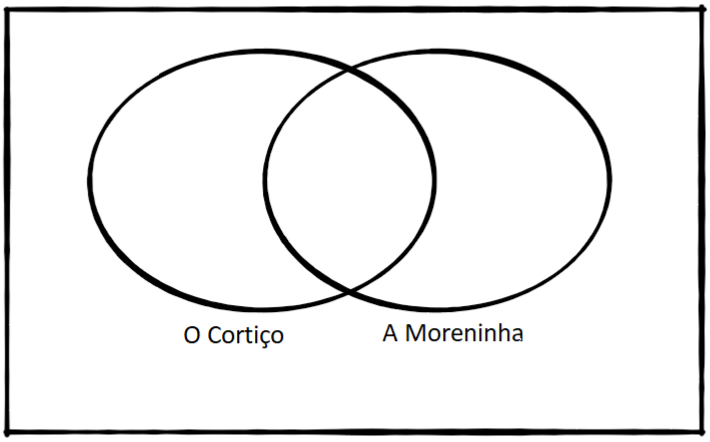
Para solucionar este problema, deve-se, inicialmente, compreender o problema: verificar o que se pede e reunir as informações dadas. Em seguida, fazer uma breve leitura visando perceber que, o problema pede para que seja determinada a quantidade de alunos que participaram da pesquisa. Para que se possa chegar a tal conclusão foram fornecidos os seguintes dados:

- Foram dois livros trabalhados: O Cortiço de Aluísio Azevedo e A Moreninha de Joaquim Manuel de Macedo;
- 36 alunos leram os dois livros;
- 61 alunos leram O Cortiço;
- 51 alunos leram A Moreninha;
- 20 alunos não leram nenhum dos dois livros.

Ainda nesse momento de compreensão do problema, cabe ressaltar que, é possível representar essa situação por meio do Diagrama de Venn, conforme apresentado na Figura 5.

[9] (DANTE, 2016, p. 30)

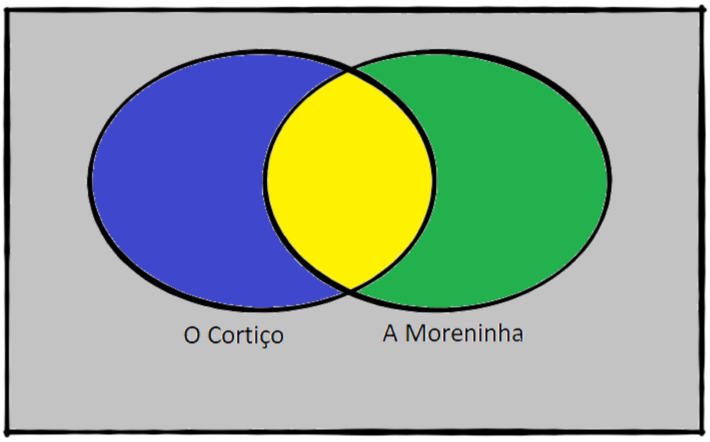
Figura 5 – Resolução do exemplo de determinação do número de elementos de um conjunto



Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, ao fazer uso dessa representação, o conjunto Universo (total de alunos que participaram da pesquisa) e a união dos quatro subespaços gerados (Figura 6):

Figura 6 – Representação por meio de um Diagrama de Venn do exemplo de determinação do número de elementos de um conjunto



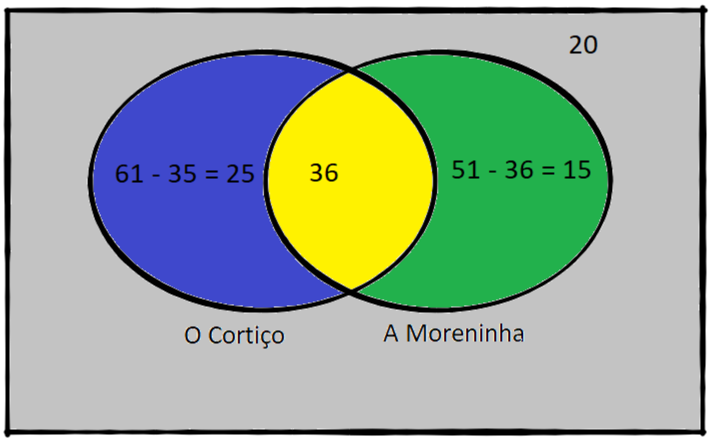
Fonte: Autoria própria.

- Número de alunos que leram apenas O Cortiço;
- Número de alunos que leram apenas A Moreninha;
- Número de alunos que leram os dois livros;
- Número de alunos que não leram nenhum dos dois livros.

Posteriormente, a compreensão do problema, é necessário estabelecer um plano de resolução. Uma possibilidade é realizar a contagem do número de elementos que cada um dos subconjuntos citados acima possui e, em seguida, somar tais quantidades.

Colocando em prática o plano de resolução tem-se que, como 36 alunos leram os dois livros e 61 alunos leram O Cortiço, pode-se concluir que, 25 alunos leram apenas O cortiço. De forma análoga, conclui-se que, dos 51 alunos que leram A Moreninha, 15 leram apenas A Moreninha. Considerando os 20 alunos que responderam que não leram nenhum dos dois livros (Figura 7):

Figura 7 – Representação por meio de um Diagrama de Venn da resolução exemplo de determinação do número de elementos de um conjunto



Fonte: Autoria própria.

Total = $25 + 36 + 15 + 20 = 96$ alunos participaram dessa pesquisa.

Considerando-se por fim que, o número de alunos que não leram nenhum dos dois livros, é possível concluir que, 96 alunos participaram da pesquisa (76 + 20 = 96).

Sendo A e B dois conjuntos finitos, o número de elementos do conjunto $A \cup B$, que é indicado por $n(A \cup B)$ é dado pela seguinte relação: $n(A \cup B)$ = $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.[10]

Utilizando essa relação na situação anterior, é possível perceber que:

$n(A \cup B)$: número de alunos que leram pelo menos um dos dois livros;

$n(A)$: número de alunos que leram O Cortiço;

$n(B)$: número de alunos que leram A Moreninha;

$n(A \cap B)$ número de alunos que leram O Cortiço e A moreninha;

$n(A \cup B)$ = $n(A) + n(B)\check{\ }n(A \cap B)$;

$n(A \cup B)$ = $61 + 51\check{\ }36$

$n(A \cup B)$ = 76 alunos leram pelo menos um dos dois livros.

Uma situação importante acontece quando os dois conjuntos dados são Disjuntos, ou seja, a intersecção ente eles é um conjunto vazio $n(A \cap B = \varnothing)$. Neste caso, como não há intersecção e um conjunto que não possui elementos, o número de elementos da união de dois conjuntos será $n(A \cup B)$ = $n(A) + n(B)$.

[10] (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 16)

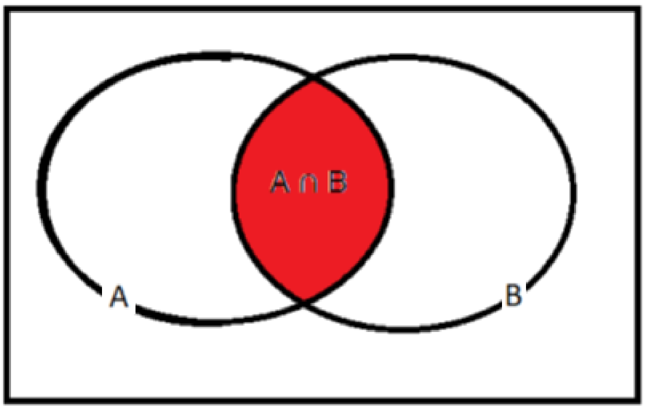
De modo geral, dados dois conjuntos finitos A e B. Como $n(A)$ inclui n($A \cap B$) e $n(B)$ também inclui n($A \cap B$), então:

$n(A \cup B)$ = [$n(A)n(A \cap B)$] + $n(A \cap B)$ + $n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B)$ = $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

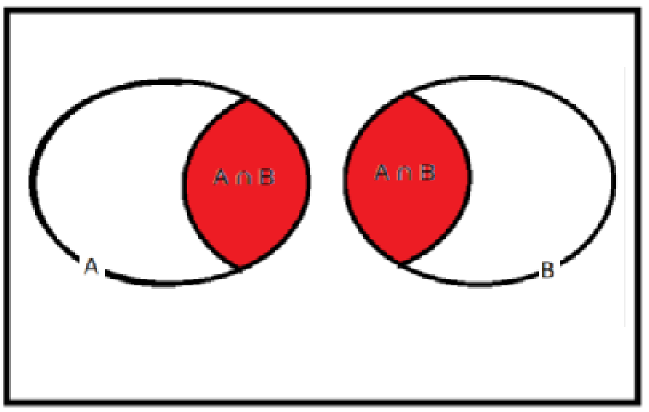
Essa relação fica fácil de ser entendida quando é levada para a representação gráfica. Note que, essa região é pertencente aos dois conjuntos dados. Ao analisar de forma separada os conjuntos, deve-se ter cuidado para evitar a contagem repetida do termo $n(A \cap B)$. Observe a Figura 8 e a Figura 9

Figura 8 – Representação por meio de um Diagrama de Venn da intersecção de dois conjuntos



Fonte: Autoria própria.

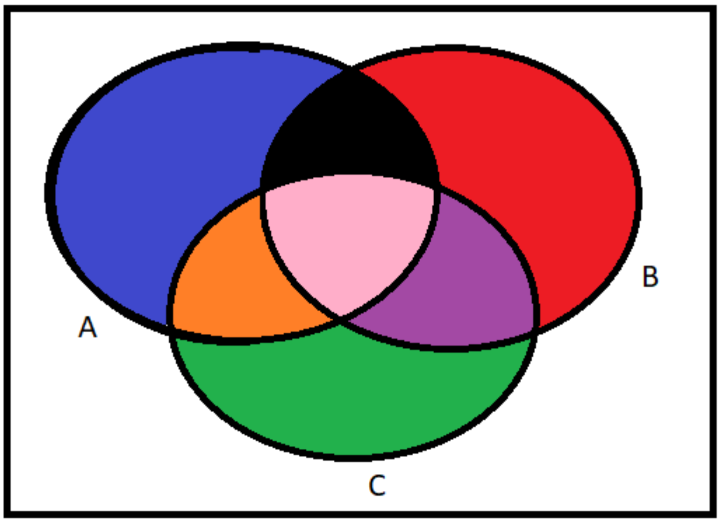
Figura 9 – Representação por meio de um Diagrama de Venn da intersecção de dois conjuntos separados



Fonte: Autoria própria.

Quando são considerados três conjuntos a dinâmica é bem parecida, basta observar o diagrama com mais atenção e, determinar o número de elementos de cada um dos sete subespaços gerados e, em seguida, somar suas quantidades. Observe a Figura 10:

Figura 10 – Representação de três conjuntos dados por meio de um Diagrama de Venn



Fonte: Autoria própria.

Região Azul: $n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Região Vermelha: $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Região Verde: $n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Região Preta:$n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$

Região Roxa: $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

Região Laranja: $n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

Região Rosa: $n(A \cap B \cap C)$

A soma do número de elementos de todas as regiões é:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

Observe o exemplo a seguir composto por três conjuntos:

Um restaurante oferece tipos especiais de drinks. Dente eles, os mais vendidos são o Manhattan, o *Bloody Mary* e o *Blue Lagoon*. Os garçons constataram que, num certo dia, o consumo de bebidas se deu de acordo com a tabela abaixo. Quantas pessoas consumiram drinks neste dia?

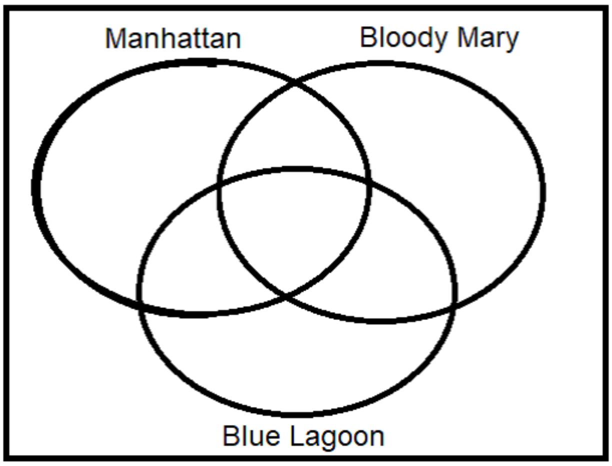
Drinks Consumidos	**Número de Consumidores**
Manhattan	24
Bloody Mary	10
Blue Lagoon	22
Manhattan e *Bloody Mary*	3
Manhattan e *Blue Lagoon*	5
Bloody Mary e *Blue Lagoon*	4
Os três	2
Nenhum dos três	4

Baseado no exemplo anterior, inicialmente é feita a compreensão do problema. Feita a leitura, pode-se perceber que, o problema pediu a quantidade de clientes que consumiram drinks nesse restaurante durante o dia analisado. Os dados fornecidos podem ser organizados da seguinte forma:

- 2 pessoas consumiram os três drinks;
- 4 pessoas consumiram o *Bloody Mary* e o *Blue Lagoon*;
- 5 pessoas consumiram o *Manhattan* e o *Blue Lagoon*;
- 3 pessoas consumiram o *Manhattan* e o *Bloody Mary*;
- 22 pessoas consumiram o *Blue Lagoon*;
- 10 pessoas consumiram o *Bloody Mary*;
- 24 pessoas consumiram o *Manhattan*;
- 4 pessoas não consumiram nenhum dos três drinks.

Como ocorreu no exemplo anterior, nesse momento de compreensão do problema, é feita a representação da situação por meio do Diagrama de Venn (Figura 11).

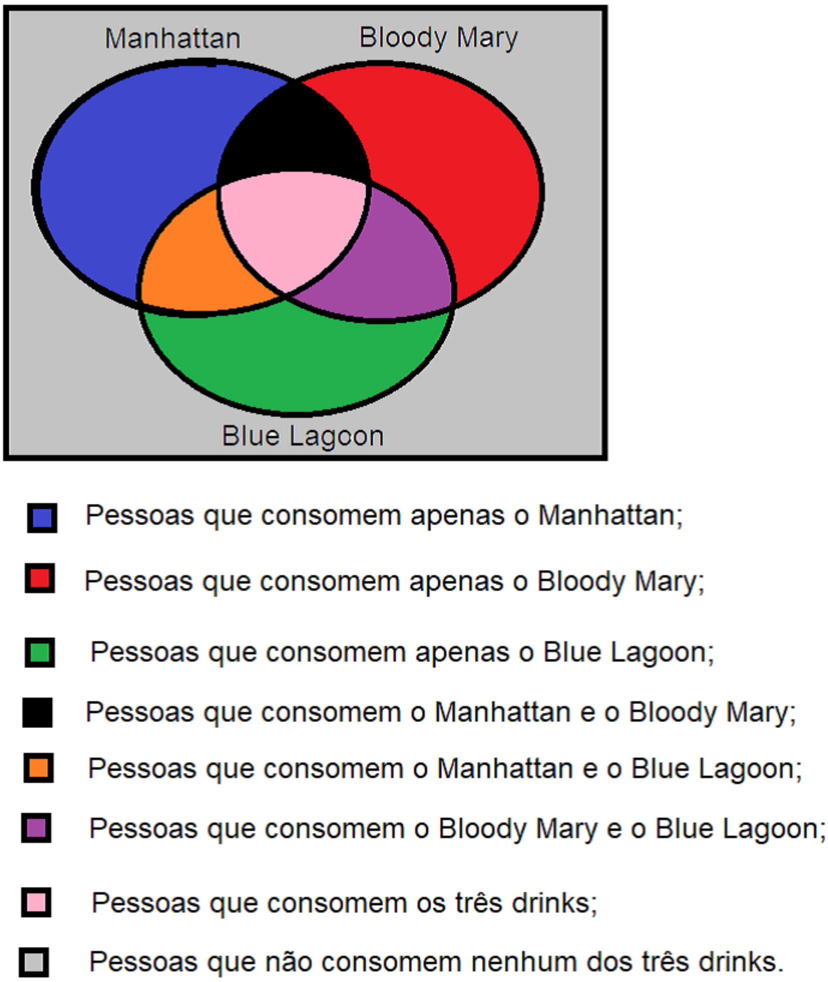
Figura 11 – Representação do exemplo de um problema envolvendo três conjuntos



Fonte: Autoria própria.

Utilizando um esquema de cores para destacar os oito subespaços gerados, tem-se que, de acordo com Figura 12:

Figura 12 – Representação do exemplo de um problema envolvendo três conjuntos indicando suas regiões

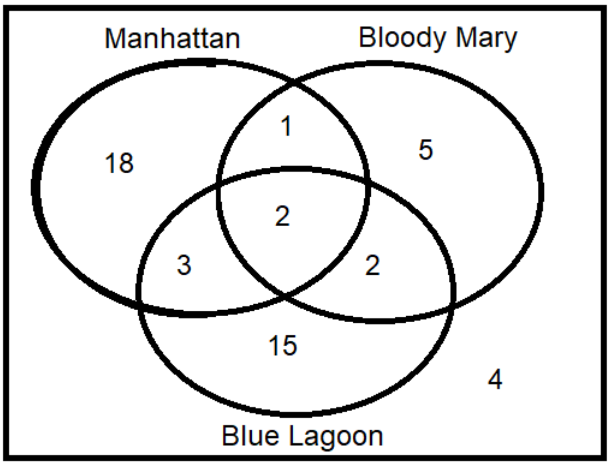


Fonte: Autoria própria.

O plano de resolução para o problema é desenvolvido efetuando a contagem do número de elementos que cada um dos subconjuntos citados acima possuem e, em seguida, somar as quantidades.

Colocando em prática o plano de resolução tem-se que, (Figura 13) como 2 pessoas consumiram os três drinks e 4 pessoas consumiram *Bloody Mary* e o *Blue Lagoon*, então pode-se concluir que, 2 pessoas consumiram apenas *Bloody Mary* e o *Blue Lagoon*. De forma análoga ,pode afirmar que, 3 pessoas consumiram apenas o *Manhattan* e o *Blue Lagoon* e 1 pessoa consumiu apenas *Manhattan* e o *Bloody Mary*. Note que, como 2 pessoas consumiram os três drinks, 3 pessoas consumiram apenas o *Manhattan* e o *Blue Lagoon* e 1 pessoa consumiu apenas o *Manhattan* e o *Bloody Mary*, é possível concluir que, 18 pessoas consumiram apenas o *Manhattan*. De forma análoga, conclui-se que, 5 pessoas consumiram apenas o *Bloody Mary* e 15 pessoas consumiram apenas o *Blue Lagoon*. Considerando as 4 pessoas que não consumiram nenhum destes três drinks:

Figura 13 – Resolução do exemplo de um problema envolvendo três conjuntos indicando suas regiões



Fonte: Autoria própria.

Total = 18 + 1 + 5 + 2 + 2 + 3 + 15 + 4 = 49 pessoas consumiram drinks neste dia.

Definição 1.10.

Princípio Fundamental da Contagem

Dando continuidade ao texto e em conformidade com afirmações feitas anteriormente, esta seção se dedica ao Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo).

Suponha que Carlos vá todos os dias para a escola de bicicleta junto com sua irmã, Aline. Quando chegam à escola, eles colocam as bicicletas juntas no bicicletário e, em seguida, por questões de segurança utilizam um cadeado com senha. Num determinado dia, Aline saiu mais cedo que Carlos e queria ir embora, porém não sabia a senha do cadeado.

Sabendo que o cadeado possui apenas três dígitos de 0 a 9, qual seria o número máximo de senhas testadas para que Aline consiga abrir o cadeado?

Buscando resolver tal problema, esta pesquisa apresenta como possibilidade de resolução a seguinte explicação para que Aline consiga abrir o cadeado. Aline deve tomar três decisões, porque o cadeado possui apenas três dígitos. Sendo assim, tem-se que:

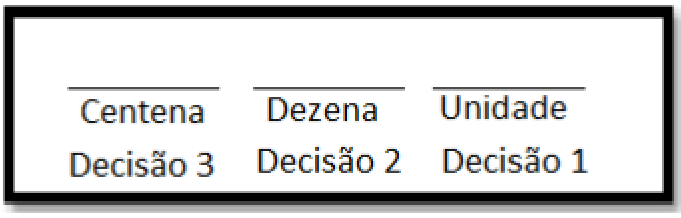
D_1: Qual algarismo irá ocupar a ordem das unidades;

D_2: Qual algarismo irá ocupar a ordem das dezenas;

D_3: Qual algarismo irá ocupar a ordem das centenas.

Assim, a Figura 14 mostra a configuração para a tomada de decisão para tal situação:

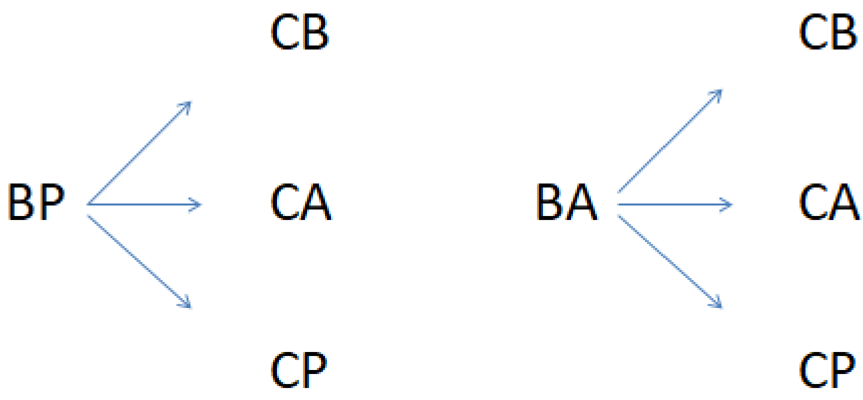
Figura 14 – Configuração para tomada de decisão da situação das senhas.



Fonte: Autoria própria.

Observe que, existem 10 modos de tomar a Decisão 1, assim como também, 10 modos de tomar a Decisão 2 e, também, 10 modos de tomar a Decisão 3. Note também que, cada permuta de algarismo de uma ordem, irá gerar um número distinto. Tem-se que (Figura 15):

Figura 15 – Aplicação do PFC para a situação das senhas.



Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, o Princípio Fundamental da Contagem diz que, se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D_1, existem y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy (LIMA et al., 2006b, p. 89).

Dando continuidade a escrita deste texto, a próxima definição se dedica ao Princípio Aditivo.

Definição 1.11.

Princípio Aditivo

Como foi feito na seção anterior, apresentação de exemplo e resolução do mesmo ambos elaborados pelo autor desta pesquisa, esta seção segue a mesma configuração.

Suponha que, Marcos no sábado tenha um aniversario para ir. Como queria estar bem vestido, ele separou as melhores roupas que incluíam duas bermudas, uma azul e outra preta, e três camisas de cores distintas, sendo uma branca, uma preta e uma azul. De quantas formas marcos poderá se vestir para ir à festa?

Os próximos parágrafos se dedicam a apresentação da solução elaborada para este estudo e trabalho dissertativo. Buscando melhor fluidez do texto, o autor utiliza as seguintes legendas:

BP**:** bermuda preta;

BA**:** bermuda azul;

CP**:** camisa preta;

CA**:** camisa azul;

CB**:** camisa branca.

Sendo assim, para resolver tal problema, basta observar que, utilizando a BP é possível compor três opções de vestuário: {BP e CP, BP e CA, BP e CB}. Já utilizando a BA também é possível compor três opções de vestuário: {BA e CP, BA e CA, BA e CB}.

Então, o número de opções para Marcos se vestir com as opções de roupas disponíveis consiste na soma do número de elementos de cada um dos conjuntos disjuntos, ou seja, conjuntos cuja interseção é um conjunto vazio, sendo assim, dados dois conjuntos distintos A e B, tem-se que, $A \cap B = \varnothing$, portanto apresenta-se seis formas diferentes para se vestir.

Após apresentar o problema e a resolução do mesmo formulados pelo autor desta pesquisa, os próximos parágrafos se dedicam a apresentar aspectos conceituais e definição do Princípio Aditivo segundo estudiosos e pesquisadores da área.

Segundo (MORGADO et al., 2006), se A e B são dois conjuntos, com p e q elementos respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

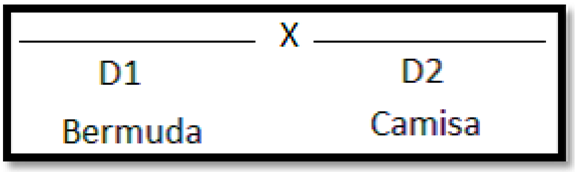
Desta maneira, pode-se utilizar o PFC para obter o número de elementos do conjunto, com relação ao exemplo dado, basta observar que Marcos, ao escolher a bermuda deverá escolher em seguida a camisa que irá vestir. Assim, Marcos terá que tomar duas decisões, então:

D_1**:** escolha da bermuda;

D_2**:** escolha da camisa.

A Figura 16 ilustra as decisões a serem tomadas para a situação proposta, referente as possibilidades de modos para se vestir:

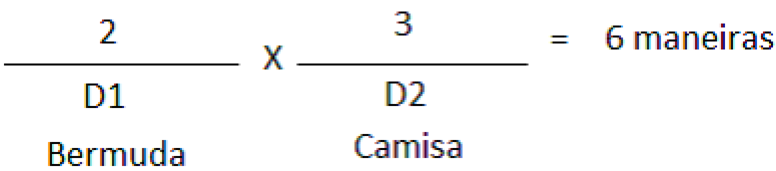
Figura 16 – Configuração para tomada de decisão da situação referente ao modo de se vestir.



Fonte: Autoria própria.

Buscando explicar as possibilidades, isto é, as opções para cada tomada de decisão, tem-se que, na primeira decisão Marcos possui duas possibilidades e, em seguida, na segunda decisão ele possui três escolhas distintas. Então, o número de maneiras que Marcos possui para se vestir consiste em seis maneiras diferentes (Figura 17)

Figura 17 – Aplicação do PFC para a situação referente ao modo de se vestir.

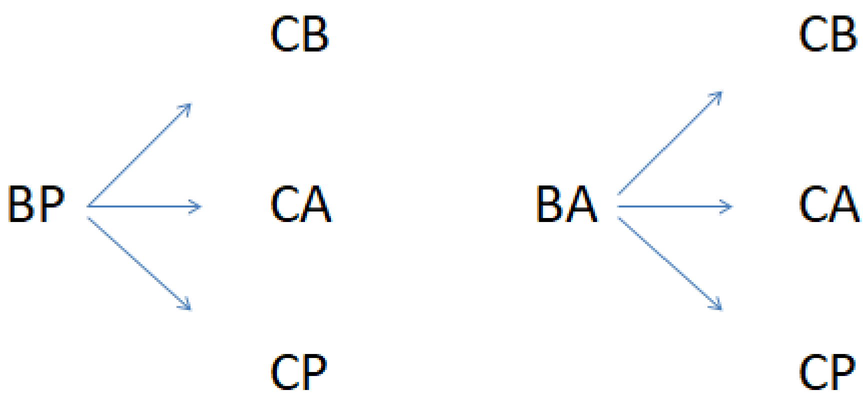


Fonte: Autoria própria.

Note que, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem é possível obter o número de elementos do conjunto: $\{BP$ e CP, BP e CA, BP e CB, BA e CP, BA e CA, BA e $CB\}$, essas são as possíveis combinações.

Contudo, o pesquisador, para tal princípio, apresenta outra forma de resolução, o Diagrama de Árvores, expondo as seis combinações possíveis para resolver o exemplo. Em seguida, ele expõe a resolução por meio do diagrama, mostrando por meio da visualização gráfica as possíveis combinações de vestuário com as roupas de Marcos, conforme a Figura 18:

Figura 18 – Diagrama de Árvores para o Exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Assim, o pesquisador apresenta uma nova situação para analisar, estudar e, posteriormente, conjecturar o Princípio Aditivo.

Quantos números pares de três algarismos distintos existem?

Utilizando a mesma forma de organização para o texto desta pesquisa, os próximos parágrafos se dedicam a apresentação da resolução do problema elaborada pelo pesquisador. Sendo assim, inicialmente, é importante perceber que, um número é par quando a sua ordem das unidades é ocupada por um algarismo par, ou seja, suas possibilidades são: 0, 2, 4, 6, 8. Porém, para que o número possua três algarismos, o algarismo 0 não pode ocupar a ordem das centenas, pois caso isso acontecesse, o número formado apresenta dois algarismos, desconsiderando assim o algarismo 0 na ordem das centenas. Então, para o problema proposto, faz-se importante dividir ele em dois possíveis casos:

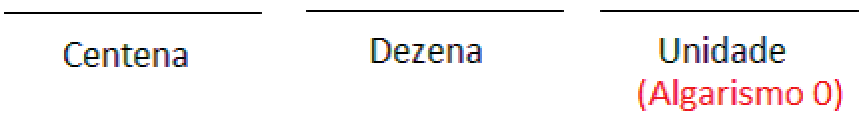
Primeiro caso: o algarismo 0 irá ocupar a ordem das unidades; Primeiro caso: o algarismo 0 não irá ocupar a ordem das unidades.

Assim, é valido perceber que, nesta pesquisa, os casos são tratados como conjuntos distintos e, ao final da resolução, aplica-se o Princípio Aditivo. Analisando, separadamente, os casos tem-se que:

Primeiro caso: o algarismo 0 irá ocupar a ordem das unidades;

Como o número deve ser formado por algarismos distintos, e o 0 deve ocupar a ordem das unidades, deve-se analisar as decisões, algarismo da centena e algarismo da dezena, devendo serem tomadas da seguinte forma - veja a Figura 19:

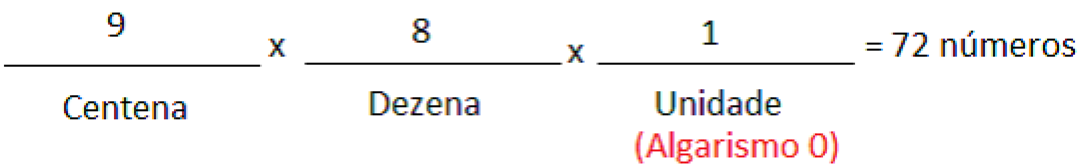
Figura 19 – Configuração para tomada de decisão referente à situação de determinação dos números pares (o algarismo 0 ocupando a ordem das unidades).



Fonte: Autoria própria.

Para a ordem das centenas, pode-se escolher um algarismo dentre os nove algarismos disponíveis $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Uma vez escolhido o algarismo das centenas, dispõe-se de oito algarismos para ocupar a ordem das dezenas, isto é, qualquer algarismo, exceto o algarismo escolhido para a ordem das centenas e o algarismo 0 ocupando a ordem das unidades. O resultado é demonstrado na Figura 20:

Figura 20 – PFC para a situação de determinação dos números pares (o algarismo 0 ocupando a ordem das unidades).

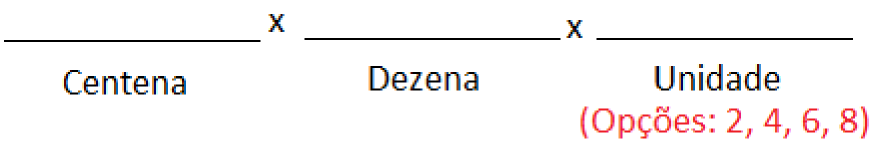


Fonte: Autoria própria.

<u>Primeiro caso</u>: o algarismo 0 não irá ocupar a ordem das unidades.

Agora no segundo caso, ainda é importante levar em consideração que o número deve ser formado por algarismos distintos, mas como o algarismo 0 não pode ocupar a ordem das unidades, deve-se escolher, primeiramente, um algarismo do conjunto $\{2, 4, 6, 8\}$ para ocupar tal ordem. A Figura 21 mostra as decisões a serem tomadas nesse caso:

Figura 21 – Configuração para tomada de decisão referente à situação de determinação dos números pares (o algarismo 0 não ocupando a ordem das unidades).

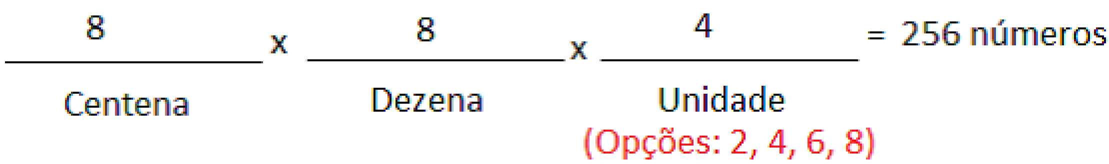


Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, para escolher o algarismo que deve ocupar a ordem das unidades, existe quatro opções. Já para a ordem das centenas, é essencial lembrar da exclusão do algarismo 0, ou seja, na ordem das centenas não existe a possibilidade de utilização do algarismo 0, pois caso isso acontecesse, escolha do algarismo 0, tem-se a formação de um número com dois algarismos. Com relação ao algarismo escolhido para a ordem das unidades, restam 8 opções.

Por fim, para realizar a escolha do algarismo para ocupar a ordem das dezenas, tem-se disponível 8 opções, pois apesar de não poder escolher dois algarismos já escolhidos, os escolhidos para a ordem das centenas e das unidades, pode-se escolher o algarismo 0 para a ordem das dezenas, pois a escolha desse algarismo para tal ordem não apresenta nenhuma restrição. Portanto, para a ordem das dezenas tem-se disponível 8 opções de algarismos. Tem-se então que, tal disposição é demonstrada na Figura 22:

Figura 22 – PFC para a situação de determinação dos números pares (o algarismo 0 não ocupando a ordem das unidades).



Fonte: Autoria própria.

Em conformidade com citação inicial, cada um dos casos foi tratado como um conjunto de possibilidades. O primeiro conjunto, Conjunto dos números pares de três algarismos distintos que terminam com o algarismo zero, possuiu 72 elementos e no segundo conjunto, Conjunto dos números pares de três algarismos distintos que não terminam com o algarismo zero possuiu 256 elementos. Desta forma, aplicando o Princípio Aditivo tem-se que, $72 + 256 = 328$ possibilidades para formar números pares com três algarismos distintos.

Sendo assim, durante a resolução de um problema de Contagem, deve-se fazer uso de todos os recursos disponíveis para encontrar sua solução. Segundo Lima et al. (2006a), uma boa estratégia para resolver problemas de Contagem é:

> 1) Postura. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
>
> 2) Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
>
> 3) Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa e a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar (LIMA et al., 2006a, p. 86).

Em algumas situações, pode-se destacar que, a ideia da Diferença de Conjuntos como uma importante ferramenta na resolução de problemas de Contagem durante o processo de ensino e aprendizagem dos alunos no contexto educacional.

Definição 1.12.

Permutações

Quando se pesquisa, estuda e analisa problemas de Contagem, tanto professores quanto alunos devem compreender como importante os procedimentos que, diversas vezes, são utilizados a fim de facilitar a contagem, ou seja, as possibilidades para formar grupos com os n elementos disponíveis, permutando-os sempre para gerar novos grupos.

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de Contagem, deve-se associar a permutação a noção de embaralhar, isto é, trocar objetos de posição.[11]

Sabe-se que, as possibilidades de efetuar trocas por meio de permutações podem ocorrer de três maneiras distintas, essas são: i) Permutação Simples, ii) Permutação com Repetição e iii) Permutação Circular. Esta definição de Permutações será subdividida em três partes, sendo elas: 1.13 Permutações Simples, 1.14 Permutações com Repetição e 1.15 Permutações Circulares, todas com a finalidade de abordar, separadamente, as três formas de permutar.

Definição 1.13.

Permutações Simples

Nesta parte da pesquisa, os aspectos conceituais são apresentados antes do exemplo e do desenvolvimento da análise, diferentes de como foi feito nas partes apresentadas anteriormente.

Sendo assim, faz-se necessário pensar, inicialmente, de quantos modos possíveis para organizar n pessoas numa fila. Note que, nenhuma pessoa será acrescentada ou retirada da fila. Tem-se assim que, apenas com a permuta das n pessoas é possível formar diferentes configurações de filas, ou seja, agrupamentos distintos para n pessoas na fila.

Com a finalidade de explicar o raciocínio desenvolvido referente a organização e as possibilidades de escolha para arrumar a fila, faz-se importante analisar as decisões tomadas. Assim, para o primeiro lugar na fila tem disponível n opções, ou seja, qualquer uma das pessoas pode ocupar o primeiro lugar. Já para a segunda decisão, tendo escolhido a pessoa que vai ocupar o primeiro lugar da fila, tem-se disponível $n-1$ opções. Para a terceira posição, de maneira análoga a decisão anterior, tem-se $n-2$ opções. Seguindo tal lógica, sempre retirando uma possibilidade de escolha, para a última posição, existe apenas um modo de escolher a pessoa que deve ocupar a última posição na fila. Desta forma, aplicando o PFC, pode-se concluir que, existem $(n) \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$ modos de organizar uma fila dispondo de n pessoas.

É valido observar que, o intuito deste problema era de descobrir quantos agrupamentos (configurações de filas) possíveis poderiam ser formados utilizando n elementos distintos.

[11] (DANTE, 2016, p. 206)

Note também que, a ordem da escolha de cada elemento gera um novo agrupamento e, esses agrupamentos são chamados de Permutação Simples.

Dando continuidade a escrita desta pesquisa, os próximos parágrafos se dedicam a exposição e análise de situações propostas. Veja a seguir:

Quantos são os anagramas da palavra $LIVRO$?

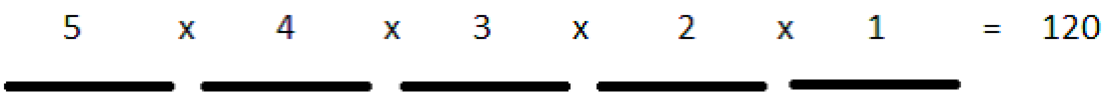
Para determinar quantos são os possíveis anagramas para a palavra $LIVRO$, deve-se permutar as letras que compõem tal palavra. Então, é possível pensar nesse problema como a formação de uma fila, cada fila consiste em um anagrama diferente, no caso exemplificado, com cinco elementos, cada elemento representa uma letra da palavra. Com a finalidade de encontrar a solução do problema, cinco decisões devem ser tomadas, ou seja, quais elementos devem ocupar cada uma das cinco posições, conforme é mostrado a Figura 23:

Figura 23 – Utilização do Princípio Multiplicativo para a tomada de decisões do problema

Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, note que, a primeira decisão dispõe de cinco opções. Uma vez feita a escolha da primeira decisão, a segunda escolha terá quatro opções. Seguindo com as escolhas de maneira análoga, obtém-se como resultado a ilustração na Figura 24:

Figura 24 – Resolução do Problema dos anagramas da palavra LIVRO a partir do Princípio Multiplicativo



Fonte: Autoria própria.

Em alguns problemas de contagem, é comum encontrar produtos cujos fatores são números naturais consecutivos. Buscando evitar que estes cálculos tornem-se muito extensos, adota-se um símbolo chamado de Fatorial, que será definido da seguinte forma:

Sendo n um número natural, com $n \geq 2$, definimos fatorial de n como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 a n e indicamos por $n!$.[12]

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$$

Portando, a solução do problema acima poderia ser facilmente escrita como $5! = 120$ possíveis anagramas. Pode-se concluir então que, a Permutação Simples de n elementos pode ser escrita como $P_n = n!$.

[12] (BONJORNO; JR.; SOUZA, 2016, p. 182)

Tal exemplo também possui outra forma de resolução, consistindo na necessidade de listar todos os anagramas da palavra livro e em seguida contá-los, o que, com certeza, daria muito mais trabalho e sendo bem mais cansativo, além de ser desnecessário, por ser um problema que deseja encontrar a quantidade de anagramas e não suas possíveis configurações.

Definição 1.14.

Permutações com Repetições

Inicialmente, para esta definição, deve ser retornada a configuração de escrita feita em exemplos anteriores, iniciando-se a partir de uma situação proposta.

Quantos são os anagramas da palavra $CARRO$?

Buscando apresentar a explicação para tal problema, inicia-se imaginando que todas as letras que compõe a palavra $CARRO$ são distintas, por exemplo, C, A, R_1, R_2 e O. Logo, o total de anagramas possíveis seria $P_5 = 5! = 120$ anagramas. Entretanto, é importante observar que, a permuta nos anagramas das letras R_1 e R_2 não geram um novo anagrama. Portanto, deve-se dividir o total de anagramas encontrados, ou seja, P_5, por P_2. Logo, tem-se que, o número de anagramas da palavra $CARRO$ será $\dfrac{P_5}{P_2} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{(5 \times 4 \times 3 \times 2!)}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Desta forma, é valido observe que, o raciocínio desenvolvido no problema anterior pode ser empregado sempre que se tiver uma permutação em que haja elementos repetidos, ou seja, Permutações com Repetições.

O número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$, onde α, β e γ representam o número de vezes que certo elemento se repete. [13]

Definição 1.15.

Permutações Circulares

Para construir o conceito de Permutação Circular, esta pesquisa propõe o seguinte exemplo:

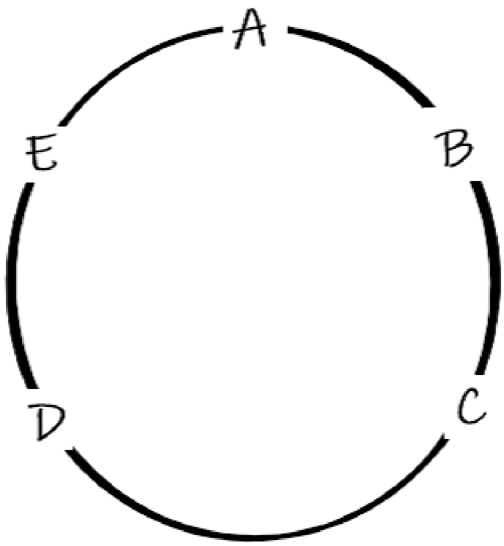
De quantas maneiras distintas Alberto, Bruna, Caio, Daniela e Estevão podem formar uma roda?

Dando continuidade, note que, pode-se imaginar a arrumação dessas pessoas como uma fila formada por cinco pessoas. Sendo assim, serão possíveis formar $P_5 = 5! = 120$

[13] (DANTE, 2016, p. 209)

possíveis rodas. Porém, a cada roda formada, deve-se analisar as diferentes formas de se ver a mesma roda. Considerando Alberto como A, Bruna como B, Caio como C, Daniela como D e Estevão como E, tem-se a roda $ABCDE$ conforme ilustrada na Figura 25:

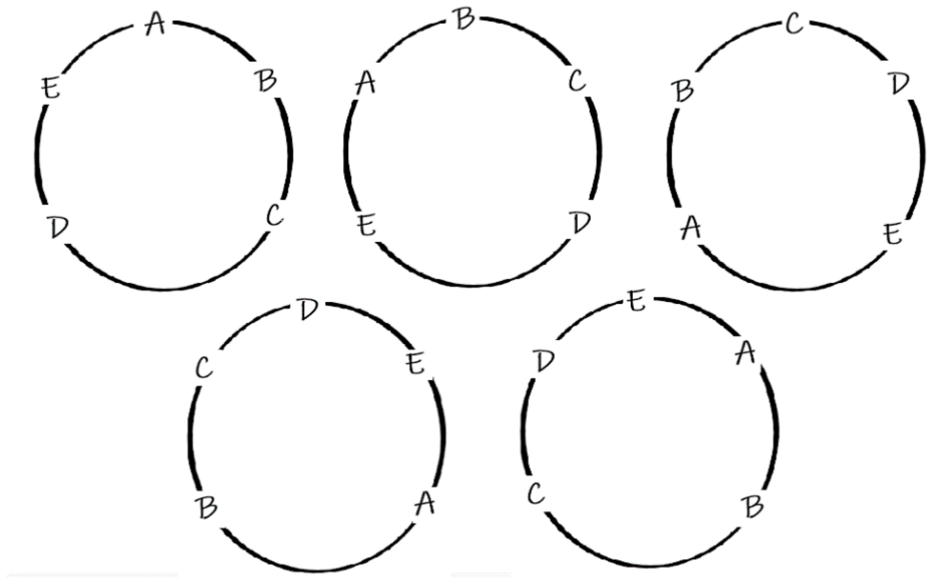
Figura 25 – Exemplo de uma roda formada por cinco pessoas



Fonte: Autoria própria.

Observando que, uma vez formada uma roda com cinco pessoas, deve-se desconsiderar outras cinco rodas cinco rodas formadas da mesma forma, apenas rotacionada, conforme apresentado na Figura 26:

Figura 26 – Exemplo das possíveis rotações de uma roda formada por cinco pessoas



Fonte: Autoria própria.

Desta forma, observando que, $ABCDE$, $BCDEA$, $CDEAB$, $DEABC$ e $EABCD$ formam a mesma roda, vista apenas de outro ângulo ou começando pela percepção de variação das pessoas. Portanto, para cada uma das $P_5 = 5!$ possíveis rodas formadas deve-se desconsiderar cinco. Logo, tem-se que, é possível formar $\dfrac{5!}{5} = \dfrac{5 \times 4!}{5} = 4! = 24$ rodas distintas.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é $PC_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ [14]

Definição 1.16.

Arranjo Simples

Para construir o conceito de Arranjo Simples, esta pesquisa propõe a situação a seguir:

Um campeonato de futsal de uma escola foi paralisado devido à pandemia. Para decidir a melhor forma para o retorno foi convocada uma reunião com dois integrantes dos times participantes, um capitão e um vice-capitão. Uma das equipes da 3ª série do Ensino Médio era composta por Aluísio, Bernardo, Cassio, Danilo e Enzo. De quantas maneiras distintas essa equipe poderá escolher o capitão e o vice-capitão para representá-la na reunião?

Considere, inicialmente, Aluísio como A, Bernardo como B, Cássio como C, Danilo como D e Enzo como E. Pode-se utilizar um quadro para listar todas as opções de escolha do capitão e do vice-capitão, conforme ilustrado no Quadro 4.

Quadro 4 – Lista de todas as possibilidades para a situação referente à escolha do capitão e do vice-capitão.

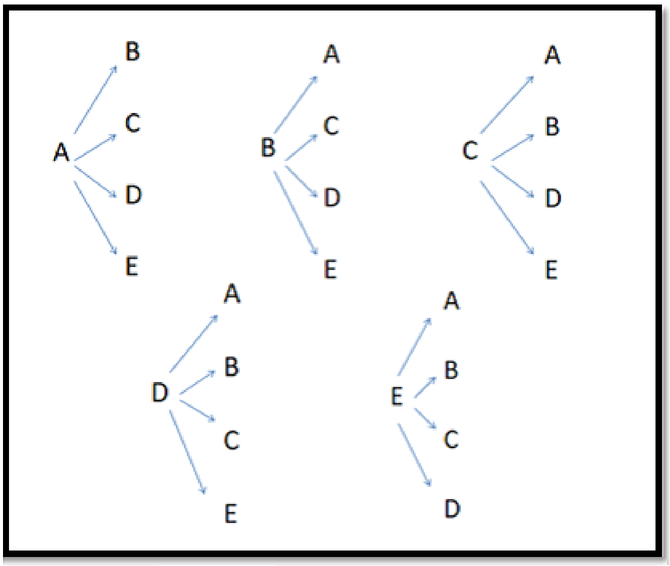
capitão	A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C	C	D	D	D	D	E	E	E	E
Vice-Capitão	B	C	D	E	A	C	D	E	A	B	D	E	A	B	C	E	A	B	C	D

Fonte: Elaboração Própria

Outra possibilidade para ilustrar os arranjos construídos no Quadro 4, é utilizar o Diagrama de Árvores para poder realizar a representação gráfica da situação. Sendo assim, observe graficamente a análise de todas as possibilidades para a escolha do capitão e do vice-capitão conforme apresentado na Figura 27.

[14] (LIMA et al., 2006a, p. 97)

Figura 27 – Uso do Diagrama de Árvores para a determinação de um capitão e um vice-capitão.



Fonte: Autoria própria.

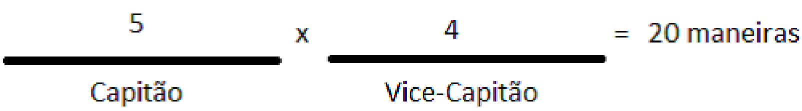
Pode-se utilizar o PFC para resolver tal problema. Ou seja, observe que se deve realizar duas escolhas, a saber: qual dos atletas será o capitão e qual deles será o vice-capitão. Assim, veja a Figura 28 que ilustra as decisões que devem ser tomadas no exemplo:

Figura 28 – Uso do PFC para propor a tomada de decisões na escolha de um capitão e um vice-capitão

Fonte: Autoria própria.

Note que, para a primeira decisão, têm-se cinco opções, pois qualquer um dos jogadores pode ser o capitão do time e para a segunda decisão, quatro opções, pois uma vez escolhido o capitão ele não poderá ser escolhido novamente. Logo, o desenvolvimento do PFC para o exemplo pode ser verificado na Figura 29:

Figura 29 – Resolução do problema da escolha de um capitão e um vice-capitão utilizando o PFC para a tomada de decisões



Fonte: Autoria própria.

Outra alternativa para resolver tal problema seria formar uma fila com os cinco alunos. Observe que isso pode ser feito por $P_5 = 5! = 120$ modos. Em seguida, pode-se pensar que, para cada dois elementos escolhidos, existe seis possibilidades de filas com os três elementos restantes que são descartadas. Com isso, torna-se conveniente efetuar a

Quadro 5 – Todas as possibilidades para a situação da escolha dos dois jogadores de um time com cinco atletas.

atleta 1	A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
atleta 2	B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

Fonte: Elaboração Própria

divisão do total de possíveis filas formadas pelo total de filas excluídas. Logo, $\frac{5!}{(5-2)!}$ = $\frac{5!}{3!}$ = $\frac{(5 \times 4 \times 3!)}{3!}$ = 5×4 = 20 maneiras.

Arranjos Simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados. Os Arranjos Simples de n elementos tomados p a p são representados por $A_((n,p))$ ou A_n^p e podem ser calculados por meio da relação $A_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!} n!/(n-p)!$. [15]

Definição 1.17.

Combinação Simples

De quantas formas é possível escolher dois jogadores de um time que possui cinco atletas?

Observe que, apesar desse exemplo ser similar a situação descrita na definição anterior (Definição 1.16), isto é, deseja-se selecionar dois elementos em um grupo de cinco elementos, agora deve-se contar apenas duplas, independentemente da posição que cada atleta ocupa. Note assim que, quando se escolhe a dupla A e B e a mesma escolha da dupla B e A. No Quadro 5, pode-se analisar todas as possibilidades:

Pode-se utilizar também o PFC para resolver tal problema. De modo similar ao exemplo 7, deve-se realizar duas escolhas: qual dos atletas será o capitão e qual deles será o vice-capitão. Veja a Figura 30:

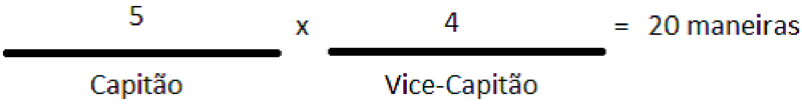
Figura 30 – Uso do PFC para a determinação do número de possibilidades das escolhas dos dois atletas

Fonte: Autoria própria.

Tem-se que, para a primeira decisão tem-se disponíveis cinco opções, pois qualquer um dos jogadores pode ser o capitão do time e, para a segunda decisão, quatro opções, pois uma vez escolhido o capitão ele não poderá ser escolhido novamente. Logo, a Figura 31 mostra como ficaria o PFC nessa situação:

[15] (DANTE, 2016, 2011)

Figura 31 – Uso do Princípio Multiplicativo para a determinação do número de possibilidades das escolhas de dois atletas



Fonte: Autoria própria.

Porém, como dito anteriormente, deve-se ter cuidado para não cometer um erro de contagem e contar cada dupla duas vezes, pois a dupla AB é a mesma dupla de BA. Portanto, é conveniente dividir por $2! = 2$. Logo tem-se $\dfrac{(5 \times 4)}{2} = 10$ duplas.

Outra alternativa para resolver tal problema seria formar novamente uma fila com os cinco alunos. Como visto anteriormente, isso pode ser feito de $P_5 = 5! = 120$ modos. Seguindo ainda de acordo com a situação descrita na definição anterior, pode-se pensar que, para cada dois elementos escolhidos tem-se seis possibilidades de filas com os três elementos restantes que são descartadas. Com isso, torna-se conveniente efetuar a divisão do total de possíveis filas formadas pelo total de filas excluídas. Por fim, para evitar um erro de contagem, deve-se dividir pelo fatorial do número de decisões tomadas (duas decisões, equivalentes a escolha dos dois atletas que irão representar a equipe). Logo, $\dfrac{5!}{2! \times (5-3)!} = \dfrac{5!}{2! \times 3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \dfrac{5 \times 4}{2!} = 10$ maneiras para forma as duplas.

Combinação Simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados. As Combinações Simples de n elementos tomados p a p são representados por $C(n, p)$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ e podem ser calculados por meio da relação $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!}$. [16]

1.4 Metodologia Resolução de Problemas

Esta seção da pesquisa se destina ao desenvolvimento de estudo e pesquisa sobre a metodologia de ensino intitulada Metodologia Resolução de Problemas segundo autores e estudiosos da área. Sendo assim, (DANTE, 2010) define que, um problema constitui um obstáculo a ser resolvido, de maneira genérica, nessa perspectiva, algo que necessita de resolução e exige o pensar do indivíduo que almeja solucioná-lo, acrescenta ainda que, o problema para um indivíduo não necessariamente precisa ser problema para outro indivíduo.

A Metodologia Resolução de Problemas é indicada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) devendo servir como ponto inicial para o desenvolvimento de atividades matemáticas e possíveis caminhos para “fazer Matemática” no Brasil.

[16] (DANTE, 2016, p. 215)

Sendo assim, durante o processo de desenvolvimento do ser humano, diversas vezes ele se deparou com problemas e teve que resolvê-los em prol do seu desenvolvimento. Atividades como confecção de artefatos, caça, construção de moradia, organização de grupos, entre outras, foram desenvolvidas de acordo com a necessidade de superar dificuldades encontradas em determinados momentos de sua história. Nesse sentindo, conforme defende (POLYA, 1977, p. 2) “Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o “animal que resolve problemas””.

No contexto escolar não é diferente, os professores devem estimular a curiosidade dos alunos frente a diversas situações, fazendo com que eles desenvolvam a curiosidade por resolver problemas e experimentem o prazer da descoberta de soluções. Segundo Polya (2006)

> [...] Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve por seus próprios meios experimentara a tensão e gozará o triunfo da descoberta (POLYA, 2006, p. V).

Porém, a utilização da Metodologia Resolução de Problemas não é algo que, a maioria dos professores consegue colocar em prática durante suas práticas docentes. Muitas vezes, os professores acabam focando apenas na obtenção das respostas para um determinado problema proposto, em alguns casos fazendo uso de artifícios muito elaborados na resolução dos problemas, gerando como consequência, a supressão da espontaneidade dos alunos frente a uma determinada situação. De acordo com Dante (2010)

> [...] De modo geral, as perplexidades, os erros, as irrelevâncias e os devaneios dos alunos são considerados prejudiciais, pois a focalização e na obtenção de respostas certas no menor tempo possível, o que corresponde a “cumprir o programa”. Artifícios para que se obtenham tais respostas são elaborados, porque não há tempo para que os alunos compreendam razoavelmente o que vai se passando. Tudo isso reprime a fantasia, a iniciativa e a espontaneidade do aluno, que se refugia em uma rotina segura, mas que quase não inspira, enquanto o professor alega que é o que se pode fazer (DANTE, 2010, p. 7).

1.4.1 Definição de um Problema

Diante do que foi abordado no item anterior, surge a necessidade de se definir o que é um problema. Assim, (DANTE, 2010) define um problema como um obstáculo a ser superado, algo que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo.

Tem-se portanto que, independentemente do contexto no qual o indivíduo se encontra, seja o contexto escolar ou contexto social, ele pode se deparar com um problema em diversos momentos da vida. Basta que, uma determinada situação gere um estorvo no qual exija do indivíduo o pensar em uma possível solução.

É importante perceber que, nem sempre diante de uma situação, o indivíduo se encontra diante de um obstáculo, ou então que, nem todos os indivíduos possuem a mesma dificuldade diante de determinada situação, pois o que para uns pode ser uma situação de extrema dificuldade, para outros a solução pode se apresentar com certa facilidade.

Quando um indivíduo se depara com determinada situação, deve ao analisá-la, refletir se realmente ela proporciona um real desafio, pois muitas vezes o desenvolvimento de uma solução se apresenta de forma muito simples, não demandando muito esforço, o que pode acarretar numa falta de interesse. Porém, a mesma situação pode se apresentar extremamente instigante para outro indivíduo, gerando assim o enorme prazer na busca de caminhos que possam gerar soluções.

Portanto, ainda segundo (DANTE, 2010, p. 11), “o que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro”.

Quando estimulado a superar um obstáculo, um indivíduo busca desenvolver uma série de processos que o possibilitem vencer tal desafio. Ele busca caminhos para obtenção de respostas que ainda não possui.

Desta forma, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início. No entanto é possível construí-la” (BRASIL, 1997, p. 44).

Uma definição de problema que possui certa concordância entre pesquisadores e educadores matemáticos é a de que: “problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a Solução” (LESTER, 1982, p. 12).

Os professores devem, durante suas aulas, buscar meios para estimular seus alunos na prática da resolução de problemas. Uma possibilidade é a de relacionar situações do cotidiano com os problemas matemáticos, visando mantê-los motivados a solucionar os desafios propostos, proporcionando aos professores um ambiente mais rico para lecionar suas disciplinas e desenvolverem suas práticas docentes.

Nesse sentido, conforme defende (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p. 81), “A Resolução de Problemas passa, então, a ser pensada como metodologia de ensino, ponto de partida e meio de se ensinar Matemática”.

Os professores visando enriquecer o processo de ensino e aprendizagem dos alunos devem propor aos alunos situações desafiadoras, visando gerar discussões proveitosas, que possam estimular e desenvolver seus raciocínios, e não problemas cujas soluções não os estimulem nem os exijam o pensar.

Segundo defende LUPINACCI M. L. V.; BOTIN (2004)

> [...] A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos" (LUPINACCI M. L. V.; BOTIN, 2004, p. 1).

Após uma reflexão da definição de problema segundo concepção dos autores citados e, uma vez compreendia tal definição, surge uma outra questão: O que é resolver um problema? Nesse sentido, Polya (1977) defende que

> [...] Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos que procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados (POLYA, 1977, p. 1).

1.4.2 Diferença entre exercício e problema

Segundo (DANTE, 2010, p. 56), o ato de ensinar aos alunos a resolverem problemas é uma ação mais árdua que simplesmente ensinar conceitos, trabalhar habilidades ou desenvolver algoritmos. Quando um professor instrui a prática de algoritmos, ele atua como um orientador que fornece instruções de como funciona a execução. Na Metodologia Resolução de Problemas, os professores atuam incentivando e moderando ideias desenvolvidas pelos alunos, fazendo com que os alunos atuem ativamente, não apenas observando a Matemática a ser desenvolvida pelo professor.

Os professores devem então instigar a participação dos alunos, interrogando-os quando necessário, a fim de que eles possam compreender o problema e, em seguida, desenvolver caminhos para a busca da solução.

Na maioria das vezes, situações são apresentadas pelos professores, e os alunos acabam atuando de forma "mecanizada" aplicando algoritmos, a fim de apresentarem apenas a resposta para a pergunta feita. Desta forma, acabam desprezando a importância no processo de desenvolvimento da solução.

Tendo como consequência, a produção e a de falta de interesse em resolver tais situações propostas ou o uso de técnicas na resolução da situação, tornando assim um possível problema como um simples exercício.

Dante (2010) defende que

> [...] É preciso fazer uma clara distinção entre o que e um exercício e o que e um problema. Exercício, como o próprio nome diz, serve para praticar

> determinado algoritmo ou procedimento. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades (DANTE, 2010, p. 48)

Desta forma, os professores devem fazer uso de sua posição no processo de ensino e aprendizagem dos alunos e, propor em suas aulas, problemas que os possibilitem interagir, questionar e valorizar o processo de desenvolvimento da solução, enriquecendo assim os conhecimentos adquiridos a partir da situação proposta.

(POLYA, 2006, p. 1) defende que, os professores não devem auxiliar os alunos demais, pois caso isso ocorra, os alunos acabam não exercendo seu papel ativo e, com isso, não resta quase nada para que eles façam, e nem de menos, pois caso eles sejam deixado sozinhos, sem o auxílio suficiente, pode ser que acabem não experimentando o processo de resolução de um determinado problema.

Quando um problema for proposto, alguns alunos poderão apresentar dificuldades que os impossibilitem de solucioná-lo. Por mais que os alunos não se sintam capazes nem de iniciar suas soluções, o professor, neste momento, deve agir de maneira discreta, auxiliá-los dando a impressão de que eles possuem a autonomia necessária para o desenvolvimento do problema proposto.

Segundo Polya (2006)

> [...] O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante(POLYA, 2006, p. 1).

Assim, os professores devem despertar nos alunos o hábito de ao se depararem com um problema, realizarem indagações sobre os eles. Indagações estas que, visem possibilitar aos alunos descobrirem elementos tais como: “Quais são as incógnitas envolvidas no problema?”; “O que está sendo procurado?”; “Quais são as condições?”, entre outras.

(POLYA, 2006) defende que, ao propor que os alunos comecem a realizar indagações sobre determinada situação, os professores devem objetivar além de auxiliá-los a resolverem o problema, manifestar nos estudantes a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

Dante (2010) aponta as características um bom problema :

- [...]Ser desafiador para o aluno: a maioria dos problemas dados aos alunos é de problemas-padrão que não os desafiam. Os alunos devem ser colocados diante de problemas que os desafiem, que os motivem, que aumentem sua curiosidade em querer pensar neles e em procurar solucioná-los;
- Ser real para o aluno: problemas com dados e perguntas artificiais desmotivam o aluno. Os dados de um problema precisam ser reais, quer nas informações nele contidas, quer nos valores numéricos apresentados;

- Ser do interesse do aluno: Um problema que interessa aos adultos pode não interessar as crianças. A motivação é um dos fatores mais importantes para o envolvimento do aluno com o problema. E essa motivação é interior e natural quando os dados e as perguntas do problema fazem parte do dia a dia do aluno;
- Ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido: é interessante que o que se procura responder no problema, o elemento desconhecido, seja algo que na realidade desconhecemos e queremos saber;
- Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas: é importante que o problema possa gerar muitos processos de pensamento, levantar muitas hipóteses e propiciar várias estratégias de solução. O pensar e o fazer criativo devem ser componentes fundamentais no processo de resolução de problema;
- Ter um nível adequado de dificuldade: O problema deve ser desafiador, mas passível de ser resolvido pelos alunos daquela faixa etária especifica. Um nível de dificuldade muito além do razoável para uma determinada faixa etária pode levar os alunos a frustação e desanimo irreversíveis, traumatizando-os não só em relação a resolução de problemas, mas também em relação a matemática como um todo. E, às vezes, em relação a todas as atividades escolares (DANTE, 2010, p. 50).

1.4.3 Dante e as etapas da formulação de um problema

Muitas vezes os professores acabam criando nos alunos a ideia de que em um problema a resposta final é mais importe do que todo o processo de criação e obtenção da solução. Contudo, Dante (2010) afirma que

> [...] o que importa é o processo de formulação e resolução de problemas, e não tanto a obtenção da resposta. É o modo como o aluno formula e resolve um problema, os métodos, as estratégias e os procedimentos que ele utiliza (DANTE, 2010, p. 16).

De acordo com os (BRASIL, 1997, p. 56), um dos objetivos gerais do Ensino Fundamental é fazer com que o aluno possa “questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação”.

Já segundo Dante (2010) os PCNs apontam uma proposta que pode ser resumida nos princípios:

- O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
- O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da matemática;
- O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;

- A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (DANTE, 2010, p. 18).

Conforme defende (DANTE, 2010), sendo a Matemática uma área do conhecimento voltada para o raciocínio logico e com explicita relação entre contexto educacional e contexto social. Portanto sua metodologia de ensino deve valorizar os pensamentos e questionamentos dos alunos, por meio da exploração da oralidade, ou seja, deve-se estimular a expressão de ideias por parte dos alunos, oportunizando a exposição das suas estratégias diante de uma determinada questão.

De acordo com Dante (2010) os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para desenvolver problemas;
- Dar uma boa base matemática as pessoas;
- Liberar a criatividade do aluno (DANTE, 2010, p. 18).

1.4.4 Etapas da metodologia Resolução de Problemas

A metodologia de ensino e aprendizagem intitulada Metodologia Resolução de Problemas é composta por quatro etapas, contudo essas etapas não são fixas, podendo o aluno estar em duas etapas distintas simultaneamente.

A primeira etapa é denominada compreensão do problema, momento em que o revolvedor do problema, os alunos, buscam compreender com clareza o problema proposto, qual a solução que ele busca encontrar (POLYA, 2006).

A segunda etapa é denominada estabelecimento do plano de resolução, momento em que os alunos procuram desenvolver procedimentos que o auxiliem na resolução do problema em questão, tendo em mente situações semelhantes vivenciadas, buscando assim uma questão correlata, sendo válido ressaltar que, o estabelecimento do plano deve ser feito pelos alunos, pois quando indicado pelo professor ou colega, o aluno pode se esquecer no momento de sua execução (POLYA, 2006).

A terceira etapa denominada execução do plano, momento em que os alunos põem em prática a execução do plano estabelecido na etapa anterior, segunda etapa (POLYA, 2006).

A quarta e última etapa é chamada por retrospecto, essa consiste em fazer uma revisão e uma discussão de toda a questão, desde o problema proposto até a solução encontrada para ele (POLYA, 2006).

1.4.5 Atitude do professor na metodologia Resolução de Problemas

Segundo (POLYA, 2006), nessa metodologia de ensino os professores devem assumir a função de mediadores do processo de ensino e aprendizagem dos alunos, isto é, durante a resolução do problema pelos alunos, eles podem assumir o papel de aluno, e assim procurarem identificar os possíveis questionamentos dos alunos com relação as questões propostas.

Desta forma, os professores durante a mediação da aprendizagem devem buscar tornarem as aulas criativas, instigando a participação dos alunos, almejando trocas de informações e o aprendizado coletivo (CANAVARRO, 2007).

Assim, (POLYA, 2006, p. 13) defende que, “um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação tem com qualquer outra coisa”.

Cabe ressaltar que, o problema proposto pelo professor deve abordar três aspectos. O primeiro aspecto consiste no enquadramento do problema proposto com o nível do ensino ao qual os alunos estão inseridos. O segundo aspecto aborda que, o problema proposto deve motivar o interesse dos alunos, desenvolvendo atividades investigativas. Nesse aspecto é válido destacar que, o problema necessita estar adequado ao nível dos alunos, não podendo ser nem fácil nem difícil, almejando assim evitar o desinteresse deles. O terceiro, constitui a ideia que o problema deve aguçar a curiosidade dos alunos (POLYA, 2006, p. 1).

Em consonância, (DANTE, 2010) define que, os objetivos da formulação e resolução de problemas devem utilizar oito critérios, esses são: (i) fazer o aluno pensar produtivamente, (ii) desenvolver o raciocínio do aluno, (iii) ensinar o aluno a enfrentar situações novas, (iv) dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática, (v) tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras, (vi) equipar o aluno com estratégias para resolver problemas, (vii) dar uma boa base matemática as pessoas e, (viii) liberar a criatividade do aluno.

Por conseguinte, Dante (2010) aborda que

> [...] é preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar raciocínios lógicos e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções as questões que surgem em seu dia a dia, na escola ou fora dela (DANTE, 2010, p. 19).

Dante (2010) acrescenta que

> [...] Uma aula de matemática na qual os alunos, incentivados e orientados pelo professor, trabalhem de modo ativo – individualmente ou em pequenos grupos – na aventura de buscar a solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que o que segue o clássico esquema de explicar e repetir (DANTE, 2010, p. 21).

Assim, é essencial que os professores aprofundem os estudos dos conhecimentos e liberem a criatividade dos alunos (DANTE, 2010).

1.5 Ferramentas Digitais

A seguir são apresentadas as Ferramentas Digitais *Google Meet* e *Microsoft Whiteboard* que possibilitaram a aplicação desta pesquisa durante as aulas remotas provocadas pela pandemia do COVID-19.

1.5.1 Google Meet

O *Google Meet* é um serviço de comunicação desenvolvida pelo *Google* e, disponível no pacote do *G Suite for Education*, que consiste em um conjunto de ferramentas gratuitas da *Google*. Essa ferramenta foi bastante utilizada nas escolas como forma de possibilitar a interação entre os professores e os alunos, fazendo com que as aulas ocorressem de forma síncrona, podendo cada vídeo chamada ter até 250 participantes.

A vantagem do uso do *Google Meet* segundo apontam (SILVA; ANDRADE; SANTOS, 2020) é o fato de que esta ferramenta não necessita de instalação de aplicativo, e o acesso a sala virtual ocorre de forma direta por meio do *Google Crome*, esse é o navegador de internet também desenvolvido pela empresa *Google*, podendo assim ser utilizada pelo computador ou por meio de dispositivos móveis, utilizando, se necessário, o aplicativo *Google Meet*.

Ainda de acordo com (SILVA; ANDRADE; SANTOS, 2020), a reunião pode ser criada instantaneamente ou agendada a partir da ferramenta *Google* Agenda, e o link de acesso podendo ser disponibilizado por *e-mail* ou pelas redes sociais dos participantes.

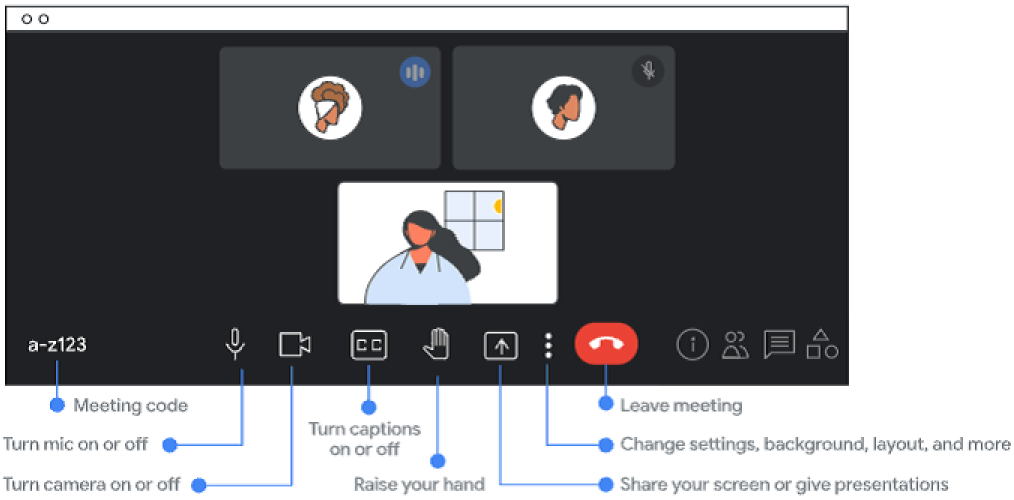
De acordo com as informações disponíveis no (GOOGLE, 2021) pode-se apontar que, as reflexões que compõem os próximos parágrafos.

O *Google Meet* possui um design interativo, o que facilita sua utilização, pois todos os controles estão disponíveis na barra inferior da janela de reunião.

Na imagem da Figura 32 pode-se apontar:

- O código da reunião localizado no canto inferior esquerdo;
- O controlador utilizado para ligar e desligar o microfone;

Figura 32 – Tela inicial do *Google Meet*



Fonte: Página do Administrador do *Google Workspace*.

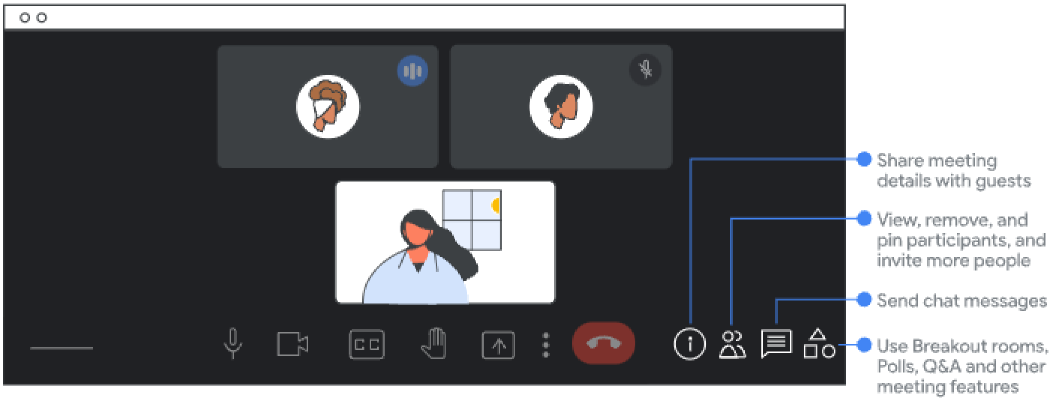
- O controlador utilizado para ligar e desligar a câmera;
- O controlador utilizado para ativar e desativar as legendas;
- O controlador utilizado para levantar a mão pedindo atenção durante a reunião;
- O controlador utilizado para o compartilhamento de imagens, arquivos, guias de outras páginas abertas ou a própria tela;
- O controlador utilizado para alterar algumas configurações, como alterar o *layout*, aplicação de efeitos visuais, possibilita a gravação da reunião entre outras;
- O controlador utilizado para sair da reunião ou finalizar a mesma retirando todos os participantes.

Ainda na tela inicial do *Google Meet* Figura 33

- O controlador que fornece detalhes sobre a reunião como o link para acesso e os anexos do *Google Agenda*;
- O controlador que fornece a visualização dos participantes permitindo a retirada ou acesso de algum;
- O controlador que permite acesso ao *Chat Messages*;
- O controlador que pode ser usado para a criação de enquetes, a possibilidade de gravação da reunião, a subdivisão da turma em grupos.

Sendo assim, de acordo com Silva, Andrade e Santos (2020) tem-se que

Figura 33 – Tela inicial do *Google Meet*



Fonte: Página do Administrador do *Google Workspace*.

> [...] Essas funcionalidades são importantes nesse contexto de isolamento social, visto que as instituições de ensino tem a oportunidade de transmitir as aulas para um grupo de estudantes de forma satisfatória priorizando o ensino-aprendizagem. Os professores não precisam ser Youtuber ou terem qualificação em área de tecnologia para apresentarem as aulas. Os recursos disponíveis no Meet são fáceis para a utilização e contribuem para uma educação favorável através do espaço virtual reduzindo o distanciamento das aulas presenciais (SILVA; ANDRADE; SANTOS, 2020, p. 8).

Então, nessa pesquisa o *Google Meet* foi utilizado como forma de proporcionar uma aula síncrona com os alunos participantes que, devido a Pandemia do Covid-19, tiveram suas aulas presenciais suspensas.

1.5.2 Microsoft Whiteboard

De acordo com as informações disponíveis no (MICROSOFT, 2021) pode-se apontar as reflexões que compõem os próximos parágrafos desta pesquisa.

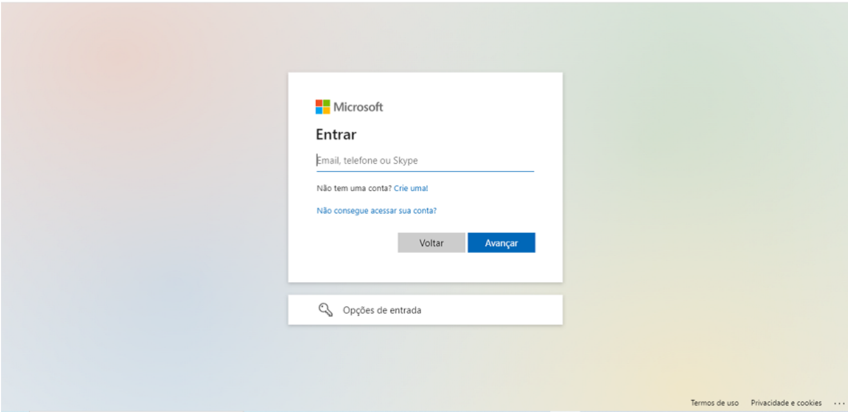
O *Microsoft Whiteboard* consiste em um aplicativo com a finalidade de oferecer uma tela inteligente e de forma livre, onde que se pode idealizar, criar e colaborar visualmente por meio da nuvem. Esse aplicativo permite a realização de reuniões, debates, aprendizagem e treinamento, planejamentos, gerenciamento de projetos entre outras possibilidades. Entre suas funções, é possível digitar textos, adicionar imagens, notas autoadesivas e grades de notas.

O aplicativo pode ser instalado nos sistemas operacionais a partir do *Windows 10* da *Microsoft Store*, e depois de instalado, o acesso será permitido a partir do *login* com uma conta *Microsoft* grátis (*Outlook*, *Hotmail*, *Live*, *Xbox*, etc).

Para os usuários que preferirem, a *Microsoft* disponibiliza uma versão online que pode ser acessada utilizando o *link* https://whiteboard.microsoft.com. Essa versão é compatível com versões atualizadas da maioria dos navegadores (*Microsoft Edge*, *Google Chrome*, *Firefox* e *Safari*).

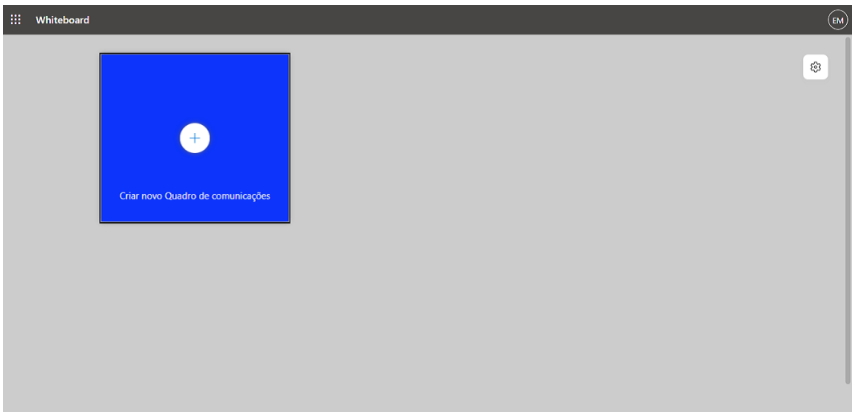
As imagens a seguir Figura 34, Figura 35 e Figura 36 trazem o designer da versão online do *Microsoft Whiteboard*.

Figura 34 – Tela de acesso ao *Microsoft Whiteboard.*



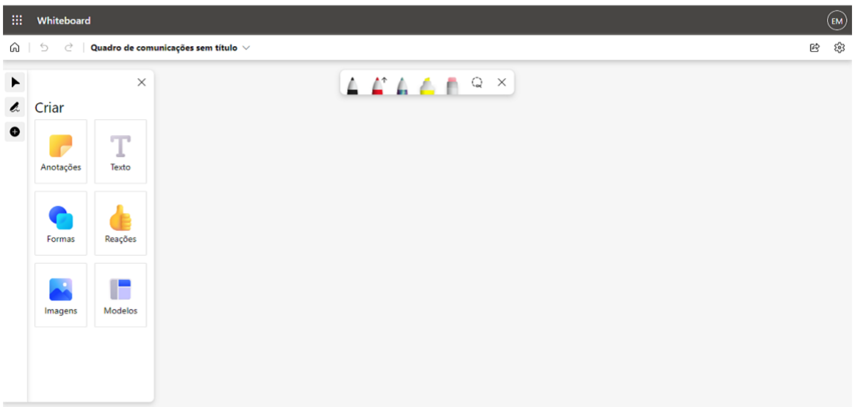
Fonte: Página do Administrador do *Microsoft Whiteboard*.

Figura 35 – Tela com a opção de criação do quadro branco no aplicativo *Microsoft Whiteboard*.



Fonte: Página do Administrador do *Microsoft Whiteboard*.

Figura 36 – Tela inicial do *Microsoft Whiteboard*.



Fonte: Página do Administrador do *Microsoft Whiteboard*.

1.6 Trabalhos Relacionados

Visando aprimorar esta pesquisa, realizou-se uma pesquisa no dia 07 de setembro de 2020 no Banco de Dissertações e Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)

Tal pesquisa realizada no Portal Capes encontrou, inicialmente, 524.474 entre dissertações e teses. Logo após, utilizou-se alguns filtros oferecidos pelo próprio site. (i) Ano: Escolheram-se os trabalhos entre 2016 e 2019, gerando 147.666 trabalhos. (ii) Grande Área de Conhecimento: Escolheu-se Ciências Exatas e da Terra, gerando 8.936 trabalhos. (iii) Área do Conhecimento: Matemática, gerando 1.042 trabalhos. (iv) Área Concentração: Ensino de Matemática, gerando 342 trabalhos. Em seguida, realizou-se uma leitura dos resumos desses arquivos pesquisados.

Por fim, escolheu-se filtrar novamente os trabalhos, optando-se por aqueles que realizaram aplicação em sala de aula com alunos do Ensino Médio utilizando a Metodologia Resolução de Problemas. Desta forma, chegou-se a três trabalhos. Esses são detalhados nos parágrafos a seguir, segundo a ordem cronológica.

1.6.1 O Ensino de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas.

A dissertação intitulada “O ENSINO DE ANALISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS” (FERNANDEZ, 2016), de autoria de COSME WEDSON BEZERRA FERNANDES consiste no desenvolvimento de uma proposta de ensino dos Princípios Básicos da Contagem, utilizando-se a Metodologia Resolução de Problemas.

Tal trabalho apresentou como objetivo “apresentar uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, em que os conceitos e definições de análise combinatória sejam apresentados após a resolução de problemas geradores. Bem como edificar todo o ensino em análise combinatória nos princípios básicos (aditivo e multiplicativo), sendo as fórmulas consequências naturais destes princípios” (FERNANDEZ, 2016, p. 7).

A Proposta Didática elaborada pelo autor foi desenvolvida a partir da exposição dos conteúdos propostos. Após o desenvolvimento dessa, pode-se perceber que, o autor defende que “é possível construir uma sequencia didática na qual o problema e o estopim do pensamento combinatório e a aprendizagem se torna mais significativa” (FERNANDEZ, 2016, p. 84).

Segundo o autor referenciado anteriormente, é possível edificar os conceitos matemáticos, em particular, os relacionados a análise combinatória, tendo como ponto de partida o problema, a Metodologia Resolução de Problemas e sua capacidade de desenvolver a autonomia, o raciocínio e a criatividade dos alunos, sendo capaz de ser inserida como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem desde os Anos Iniciais do Ensino

Fundamental.

1.6.2 O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

A dissertação intitulada "O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publicas" (PAZ, 2017), de autoria de Vanessa Prado Beraldo da Paz, foi desenvolvida para uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual chamada "Parque das Nações", do município de Bastos, localizado em São Paulo.

Tal trabalho apresentou como objetivo "apresentar o PFC através da metodologia Resolução de Problemas, dando ênfase na pratica pedagógica com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publicas (OBMEP)" (PAZ, 2017, p. 9). Visando alcançar o objetivo proposto, a autora desenvolveu e aplicou uma Proposta Didática constituída por questões da OBMEP adaptadas, tendo como tema o PFC.

A autora iniciou a tal Proposta Didática aplicando uma avaliação diagnóstica composta por quatro questões, essas foram retiradas do banco de questões da OBMEP, níveis 1 e 2, contendo algumas adaptações, visando contemplar o conteúdo de Problemas de Contagem, com intuito de realizar um levantamento de conhecimentos prévios. Essa primeira etapa teve duração de 100 minutos.

Posteriormente, no segundo momento, os alunos foram divididos em grupos, recebendo os problemas aplicados na primeira etapa para que fossem lidos de forma silenciosa e discutidos, agora objetivando o desenvolvimento das quatro etapas elaboradas por (POLYA, 2006) na Metodologia Resolução de Problemas: (i) Compreensão do Problemas; (ii) Estabelecimento de um Plano; (iii) Execução do Plano; (iv) Retrospecto. Nesse momento, os participantes receberam uma ficha com o proposito de auxiliá-los na organização do raciocínio. A segunda etapa teve duração de 200 minutos, que foram divididos em dois dias.

No último momento, terceira etapa, uma avaliação composta por três problemas retirados do banco de questões da OBMEP dos níveis 1 e 2, contendo algumas adaptações que visavam contemplar os conteúdos e habilidades referentes aos Problemas de Contagem que envolvessem o PFC, objetivando verificar a aprendizagem dos alunos com relação as atividades aplicadas anteriormente.

Após a aplicação e analise da sequencia didática, a autora concluiu que "a metodologia Resolução de Problemas apresenta-se como uma excelente estratégia para se ensinar Matemática" (PAZ, 2017, p. 98), pois a utilização de questões contextualizadas proporciona o aluno a fazer reflexões e questionamentos sobre problemas desafiadores, desenvolvendo sua autonomia, gerando assim um ambiente favorável para a aprendizagem.

1.6.3 Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3a série do Ensino Médio da cidade de União - PI: uma investigação acerca da Análise Combinatória.

A dissertação intitulada “Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3ª série do Ensino Médio da cidade de União - PI: uma investigação acerca da Análise Combinatória” (SILVA, 2018), de autoria de Antunino da Silva, foi desenvolvida para uma turma de 3ª série da modalidade regular do Ensino Médio de uma escola pública estadual, a Unidade Escolar Dr. Ezequias Costa, localizada no Povoado Novo Nilo na zona rural da cidade de União - PI.

Este trabalho teve como objetivo “analisar a importância das resoluções de situações problema de Análise Combinatória, através da referida estratégia proposta por George Polya (1995)” (SILVA, 2018, p. 8).

Visando alcançar o objetivo proposto, o autor desenvolveu e aplicou uma Proposta Didática que teve início com a partir da aplicação de dois pré-testes, com duração de 2 horas para cada um, de uma capacitação de 20 horas e um pós-teste com duração de 2 horas.

No primeiro pré-teste, foi trabalhado resoluções de problemas de Análise Combinatória retirados dos níveis 1 e 2 da primeira fase da OBMEP. Já para o segundo pré-teste, os problemas escolhidos foram referentes ao nível 3, também da primeira fase da OBMEP.

Estes pré-testes tiveram como objetivo analisar as estratégias utilizadas pelos alunos em relação às questões de Análise Combinatória. Eles foram compostos por dez questões subjetivas com base nas questões dos três níveis da OBMEP. Para aplicação desses pré-testes foram disponibilizadas 2 horas para cada.

Posterior à aplicação dos pré-testes, foi desenvolvida uma capacitação que teve duração de 20 horas, com objetivo de fazer com que os alunos pudessem melhorar seus conhecimentos em relação à utilização de estratégias para resolução de situações-problemas de Análise Combinatória.

Ao final da capacitação, foi aplicado um pós-teste, contendo as mesmas questões do questionário que compunha o segundo pré-teste.

Após a aplicação e análise da Proposta Didática, o autor concluiu que “há um grande déficit no aprendizado da Análise Combinatória” (SILVA, 2018), possivelmente decorrente da prática pedagógica abordada pelos professores que apresentam poucas vezes a resolução de situações-problemas com os alunos (SILVA, 2018, p. 79).

Posteriormente, foi realizada uma nova busca em dissertações defendidas no polo do próprio pesquisador, isto é, na Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF com tema relacionado. Uma primeira busca foi realizada em 15 de junho de 2021, no banco de dissertações do PROFMAT, com o Título de Análise Combinatória e Instituição UENF.

Desta forma, foram encontradas duas dissertações. Após a leitura do resumo, introdução e das considerações finais foi selecionado o trabalho a seguir.

1.6.4 Sala de aula invertida em tempos de pandemia: Uma proposta para o ensino dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

A dissertação intitulada “SALA DE AULA INVERTIDA EM TEMPOS DE PANDEMIA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DOS PRINCÍPIOS MULTIPLICATIVO E ADITIVO” (BOTELHO, 2020), de autoria de Daniela Alonso Botelho, foi desenvolvida para uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular, localizada no município de Campos dos Goytacazes, interior do Estado do Rio e Janeiro.

Tal trabalho apresentou como objetivo “investigar, através da percepção dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, como uma proposta didática baseada na metodologia Sala de Aula Invertida pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo” (BOTELHO, 2020, p. 7).

Assim, a Proposta Didática de tal trabalho foi iniciada com a aplicação de uma avaliação diagnóstica sobre os Princípios: Aditivo e Multiplicativo, objetivando verificar o nível de conhecimento dos alunos acerca de seus conceitos. Essa avaliação foi feita no formato de teste de múltipla escolha no *Google Form*, sendo pedido o envio pelo *WhattsApp* das resoluções das questões.

Feita a análise dos resultados da avaliação diagnóstica, a pesquisadora elaborou a Proposta Didática. Os encontros foram ministrados por meio do aplicativo *Google Classroom* devido ao Ensino Remoto Emergencial que vigorava no momento devido à Pandemia do

COVID-19.

Os encontros aconteceram de acordo com os horários das aulas regulares de Matemática da referida turma, que possuía seis horas/aula por semana, com duração de 50 minutos cada, divididas em: três aulas na terça-feira e três aulas na quinta-feira.

A primeira atividade teve duração de 2h 30 min e ocorreu de forma síncrona. Consistiu na apresentação da Metodologia Sala de Aula Invertida, dos objetivos e das atividades a serem realizadas. A atividade 1 foi desenvolvida em grupo e consistiu na Resolução de Problemas de Contagem com o apoio de materiais manipuláveis. Cabe ressaltar que, houve uma reflexão e discussão em relação as soluções apresentadas pelos grupos.

A atividade 1 foi composta por cinco questões que exploraram diferentes tipos de agrupamentos que objetivaram o uso dos materiais manipuláveis visando facilitar o processo de compreensão do Princípio Multiplicativo e buscou reunir conhecimentos, ideias e estratégias utilizadas nas etapas da resolução de problemas.

Em relação à disponibilização dos materiais manipuláveis, foram dadas as opções: (i) cada aluno pode confeccionar o próprio material ou (ii) a pesquisadora ofereceu o *kit* contendo os materiais necessários que poderiam ser retirados na própria escola. Vale ressaltar que, nessa pesquisa todos os alunos que participaram deste trabalho optaram pela segunda opção.

A atividade 3 ocorreu de forma síncrona. Esse segundo momento síncrono, teve duração de 2h 30 min e começou com uma discussão sobre o conteúdo abordado no vídeo do momento assíncrono anterior. Após uma reflexão sobre a atividade 1, aplicada a atividade 3 que propôs a construção de diagramas de árvore, em questões que relacionadas ao Princípio Multiplicativo. Posteriormente, foi realizada a comparação e discussão dos resultados obtidos.

No momento assíncrono 2, foi indicado que os alunos acessassem à plataforma *Khan Academy* e realizassem as recomendações propostas pela pesquisadora:

- Contagem dos resultados usando diagrama de árvore: referente a um vídeo com duração de 4min 30s, no qual é exposto um exemplo de Problema de Contagem que gira em torno da opção de escolha de motores e cores para escolher um carro.
- Como contar os resultados: vasos de flores: referente a um vídeo de duração de

3min em que é apresentado um Problema de Contagem que é preciso fazer uma combinação de uma variedade de flor.

- Princípio da Contagem: referente a quatro Problemas de Contagem, selecionados do banco de questões da plataforma utilizada.

No momento síncrono 3, houve uma discussão sobre eventuais dúvidas acerca das questões resolvidas na plataforma *Khan Academy*. Nesse momento foi aplicada a atividade 5, em grupo, composta por oito questões, objetivando realizar a verificação do nível de compreensão dos alunos acerca do Princípio Multiplicativo por meio da resolução e elaboração de Problemas de Contagem.

Já no momento assíncrono 3 os alunos assistiram a dois vídeos no *Youtube*, o primeiro com duração de 3min 34s intitulado “Princípio Aditivo – Análise Combinatória – Aula 02”, que trazia a definição desse princípio com uma aplicação simples como exemplo. O segundo vídeo, intitulado “Análise Combinatória – Princípios aditivo e Multiplicativo”, que tinha duração de 8 min 59s e a finalidade de mostrar diferentes situações que envolvessem estes princípios.

Em seguida, para finalizar a atividade 6, os alunos fizeram um resumo sobre os conteúdos abordados nos vídeos.

O momento síncrono 4 foi iniciado com uma discussão sobre os vídeos trabalhados no momento anterior. A atividade 7 foi desenvolvida em grupo e também teve duração de 2h 30 min. Essa era composta por sete questões que visaram averiguar o nível de compreensão dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

O último momento, chamado de momento síncrono 5 foi destinado a aplicação de uma avaliação de aprendizagem que teve duração de 1h 40 min e foi aplicada por meio de um *Google Form*. Essa avaliação foi composta por sete questões de múltipla escolha com variados níveis de dificuldade.

Após a aplicação da Proposta Didática e análise dos dados obtidos, a pesquisadora pode concluir que, em relação à aprendizagem do conteúdo, a mesma ocorreu de forma satisfatória (BOTELHO, 2020, p. 130).

Por fim, (BOTELHO, 2020) afirma que, de acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que a referida metodologia, com apoio das Tecnologias Digitais e de uma metodologia que abranja o uso de materiais manipuláveis, contribuiu de forma significativa para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos em relação aos Princípios Multiplicativo e aditivo (BOTELHO, 2020).

Assim, nos quadros a seguir (Quadro 6, Quadro 7, Quadro 8 e Quadro 9), apresentam-se os objetivos, semelhanças e diferenças entre os trabalhos relatados nesta pesquisa.

Quadro 6 – Trabalhos Relacionados (parte 1)

Título	Autor/ano	Proposta	Semelhança	Diferença
O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	(FERNANDEZ, 2016)	Apresentar uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, em destaque os conceitos e definições de análise combinatória sejam apresentados após a resolução de problemas geradores. Bem como edificar todo o ensino em análise combinatória nos princípios básicos (aditivo e multiplicativo), sendo as fórmulas consequências naturais destes princípios.	O uso da Metodologia Resolução de Problemas Uso dos Métodos básicos de Contagem (Princípio Aditivo; Princípio Multiplicativo; Permutações Simples, com Repetições e Circulares; Combinações Simples)	O uso de alguns Métodos Sofisticados de Contagem, tais como Os Lemas de Kaplansky e O Princípio das Gavetas.

Fonte: Elaboração Própria

Quadro 7 – Trabalhos Relacionados (parte 2)

Título	Autor/ano	Proposta	Semelhança	Diferença
O Princípio Fundamental da Contagem através da metodologia de Resolução de Problemas, com foco nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas	(PAZ, 2017)	Apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) através da metodologia Resolução de Problemas, dando ênfase na prática pedagógica com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)	Utilizou a Metodologia Resolução de Problemas.	Utilizou materiais concretos

Fonte: Elaboração Própria

Quadro 8 – Trabalhos Relacionados (parte 3)

Título	Autor/ano	Proposta	Semelhança	Diferença
Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3 série do Ensino Médio da cidade de União-PI: uma investigação acerca da Análise Combinatória	(SILVA, 2018)	Analisar a importância das resoluções de situações-problema de Análise Combinatória, através da referida estratégia proposta por George Polya (1995)	Utilização da Metodologia Resolução de Problemas com questões de Análise Combinatória	Utilizou apenas questões da OBMEP

Fonte: Elaboração Própria

Quadro 9 – Trabalhos Relacionados (parte 4)

Título	Autor/ano	Proposta	Semelhança	Diferença
SALA DE AULA INVERTIDA EM TEMPOS DE PANDEMIA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DOS PRINCÍPIOS MULTIPLICATIVO E ADITIVO	(BOTELHO, 2020)	Investigar, através da percepção dos alunos do 9 ano do Ensino Fundamental, como uma proposta didática baseada na metodologia Sala de Aula Invertida pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.	A utilização da Análise Combinatória	O uso da metodologia Sala de aula Invertida na aplicação nas séries finais do Ensino Fundamental

Fonte: Elaboração Própria

Capítulo 2

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo são apresentados os Aspectos Metodológicos da presente pesquisa, ele é dividido em duas seções. A primeira seção destinada a caracterização da pesquisa, momento em que descreve o tipo de pesquisa, o público-alvo e os instrumentos para a coleta dos dados. A segunda seção aborda a elaboração da Proposta Didática, ou seja, descreve as etapas de tal proposta. Contudo, buscando melhor fluidez deste texto, seus aspectos foram subdivididos em diferentes partes, conforme apresentado posteriormente.

2.1 Caracterização da Pesquisa

A pesquisa em questão é do tipo qualitativa e foi desenvolvida por meio de Intervenção Pedagógica, por meio de um Teste Exploratório. Nesse teste, a Proposta Didática foi experimentada com alunos da 3ª série do Ensino Médio do Liceu de Humanidades de Campos, essa é uma escola estadual situada no município de Campos dos Goytacazes - RJ.

Devido à Pandemia do COVID-19, as aulas regulares foram conduzidas por meio da Plataforma *Google Classroom*, também conhecida por *Google* Sala de aula. Contudo, alguns professores optaram também pelo uso da Ferramenta Digital *Google Meet*, essa sem a obrigatoriedade ou exigência da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, com a finalidade de possibilitar encontros síncronos por meio de vídeo conferência. Na turma com a qual foi desenvolvida esta pesquisa, a professora regente responsável pela disciplina Matemática fazia uso de tal recurso e, tinha regularidade de encontros marcados com os alunos nos dias e horários das aulas.

Para a aplicação da Proposta Didática desta pesquisa, os encontros aconteceram sempre no contra turno para que, não atrapalhasse as aulas regulares de nenhuma disciplina. Cabe ressaltar que, pesquisador, visando facilitar a interação com os alunos, também fez uso da ferramenta *Google Meet*.

Pensando na caracterização da pesquisa, foram definidos alguns conceitos para embasar as análises desenvolvidas neste capítulo.

Inicialmente, tem-se que, Gerhardt e Silveira (2009) definem a Metodologia Científica como

> [...] o estudo sistemático e lógico dos métodos empregados nas ciências, seus fundamentos, sua validade e sua relação com as teorias científicas. Em geral, o método científico compreende basicamente um conjunto de dados iniciais e um sistema de operações ordenadas adequado para a formulação de conclusões, de acordo com certos objetivos predeterminados (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.11).

Com relação ao termo pesquisa, Gil et al. (2002) define como sendo o

> [...] procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados (GIL et al., 2002, p. 17).

Como citado anteriormente, a referida pesquisa qualitativa foi desenvolvida por meio de Intervenção Pedagógica. Sendo assim, (DAMIANI et al., 2013, p. 58) afirmam que, ela pode ser definida como sendo "investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências (mudanças, inovações) – destinadas a produzir avanços, melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos que delas participam – e a posterior avaliação dos efeitos dessas interferências".

E, conforme afirmam (PEREIRA et al., 2018, p. 67), "os métodos qualitativos são aqueles nos quais é importante a interpretação por parte do pesquisador com suas opiniões sobre o fenômeno em estudo. Neles a coleta de dados muitas vezes ocorre por meio de entrevistas com questões abertas".

Já (ZANELLA, 2013, p. 99) defende que, "o método de pesquisa qualitativo preocupa-se em conhecer a realidade segundo a perspectiva dos sujeitos participantes da pesquisa".

Outra característica que acentua o caráter qualitativo desta pesquisa apresenta relação com os alunos, sujeitos participantes da pesquisa, que, segundo aponta Teixeira (2006)

> [...] Na pesquisa qualitativa o pesquisador procura reduzir a distância entre a teoria e os dados, entre o contexto e a ação, usando a lógica da análise fenomenológica, isto é, da compreensão dos fenômenos pela sua descrição e interpretação. As experiências pessoais do pesquisador são elementos importantes na análise e compreensão dos fenômenos estudados (TEIXEIRA, 2006, p. 137).

Vale ressaltar que, as pesquisas de cunho qualitativo em acordo com (DAMIANI et al., 2013, p. 58) ressaltam que, "são aplicadas, ou seja, têm como finalidade contribuir para a solução de problemas práticos".

E, de acordo com (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 11) só se inicia uma pesquisa se existir uma pergunta, uma dúvida para a qual se quer buscar a resposta. Pesquisar, portanto, é buscar ou procurar resposta para alguma coisa, alguma questão.

Conforme citado nos objetivos específicos, esta pesquisa teve início por meio de uma revisão bibliográfica acerca dos temas Métodos de Contagem (Análise Combinatória) e Metodologia Resolução de Problemas, com a finalidade de reunir material teórico necessário para que servissem como norteamento para a elaboração do Capítulo 1, constituindo assim o início de uma pesquisa exploratória. Conforme aponta (GIL et al., 2002, p. 44), "a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos".

Com relação a realização da revisão bibliográfica, foi possível reunir e analisar alguns trabalhos que nortearam a elaboração e o desenvolvimento da Proposta Didática descrita nesta pesquisa.

Ainda de acordo com Gil et al. (2002) tem-se que

> [...] A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. Por exemplo, seria impossível a um pesquisador percorrer todo o território brasileiro em busca de dados sobre a população ou renda per capta; todavia, sem tem a sua disposição uma bibliografia adequada, não terá maiores obstáculos para contar com as informações requeridas (GIL et al., 2002, p. 45).

Visando a familiarização com as situações descritas acerca dos temas Métodos de Contagem e Metodologia Resolução de Problemas, foi realizada uma pesquisa exploratória, objetivando ter uma visão apurada do cenário trabalhado acerca desses dois temas. Podendo assim, dissertar de forma embasada a respeito da metodologia mencionada e, elaborar de maneira mais proveitosa uma Proposta Didática que contemple de forma ampla o objetivo geral desta pesquisa, isto é, o de apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos sobre os Métodos de Contagem.

A respeito das Pesquisas Exploratórias, Gil et al. (2002) aponta que

> [...] Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipótese. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado [...] (GIL et al., 2002, p. 41).

Buscando responder a Questão de Pesquisa: “Quais são as contribuições da Metodologia Resolução de Problemas para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do Ensino Médio em Métodos de Contagem?”. Elaborou-se uma Proposta Didática composta por três momentos, composta por uma abordagem qualitativa, desenvolvida por meio de Intervenção Pedagógica.

2.2 O espaço escolar

A pesquisa foi desenvolvida com alunos do Liceu de Humanidades de Campos, uma escola pública estadual localizada na Praça Barão do Rio Branco n°. 15 – Centro, situada no município de Campos dos Goytacazes – RJ.

A escola foi fundada no dia 11 de abril de 1847 e oferece o Ensino Fundamental Anos Finais no turno da manhã e o Ensino Médio nos turnos da manhã, da tarde e da noite. Possui atualmente dois mil e oitenta e sete alunos matriculados.

Com relação as instalações físicas do Espaço Escolar, a instituição é composta por cento e sete salas, essas apresentando boas condições físicas. Porém, nem todas possuem boas condições de climatização, pois algumas salas não contam com aparelhos de ar condicionado em bons estados para o funcionamento. A referida instituição conta com uma boa biblioteca, composta por uma vasta quantidade de livros, um bom laboratório de informática, com as máquinas em perfeito estado de funcionamento e com acesso à Internet regular.

A suspensão das aulas presenciais por conta da pandemia do COVID-19 levou a instituição, assim como outras instituições municipais, estaduais e particulares, a adotarem o Ensino Remoto, fazendo com que os encontros presenciais que ocorriam nas instituições de ensino fossem substituídos pelo *Google Classroom*, esse consiste em um Ambiente Virtual de Aprendizagem e, em alguns casos, utilizando a ferramenta *Google Meet* para realizar reuniões *online*, possibilitando assim melhor interação entre professor-alunos e alunos-alunos.

Sendo válido abordar que, a justificativa que fez com que a referida escola fosse escolhida para a realização desta pesquisa, deve-se ao fato de o pesquisador ser servidor estadual lotado na referida instituição de ensino.

2.3 Público Alvo

A pesquisa foi realizada em uma turma de 3ª série do Ensino Médio da modalidade regular, exatamente a turma 3003, da escola mencionada anteriormente. A classe era composta por vinte alunos, porém apenas cinco participaram desta pesquisa. Segundo relatado pela professora da turma, um fato que justificava a ausência do restante dos alunos era a dificuldade em acesso à Internet. Os alunos que participantes foram identificados por A1, A2, ..., An, em ordem numérica.

2.4 Instrumentos de Coleta de Dados

Para a referida pesquisa, as observações do pesquisador em relação à participação dos alunos durante a aula e as atividades propostas, atividades essas que foram desenvolvidas por meio do *Google Forms*, também chamado de *Google Formulário*, foram os instrumentos utilizados para a coleta de dados.

Com relação aso formulário, (GIL et al., 2002, p. 115) aponta que, "pode ser definido como a técnica de coleta de dados em que o pesquisador formula questões previamente elaboradas e anota as respostas".

De acordo com Marconi e Lakatos (2003)

> [...] São vários os procedimentos para a realização da coleta de dados, que variam de acordo com as circunstâncias ou com o tipo de investigação. Em linhas gerais, as técnicas de pesquisa são: 1. Coleta Documental. 2. Observação. 3. Entrevista. 4. Questionário. 5. Formulário. 6. Medidas de Opiniões e de Atitudes. 7. Técnicas Mercadológicas. 8. Testes. 9. Sociometria. 10. Análise de Conteúdo. 11. História de vida (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 166).

(ZANELLA, 2013, p. 64) defende que, "as técnicas mais utilizadas para a coleta de dados são: análise documental, entrevista, questionário e observação. A opção por uma ou uma combinação delas depende do tipo, da abordagem e do objetivo da investigação".

Sendo assim, segundo (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 190), "A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar".

Ainda de acordo com (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 191), "A observação ajuda o pesquisador a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento".

Visando atingir o objetivo geral que é o de Apresentar a metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos sobre os Métodos de Contagem, foram seguidas as seguintes etapas:

1. Revisão Bibliográfica acerca do tema Métodos de Contagem (Análise Combinatória) e Metodologia Resolução de Problemas em literaturas especializadas nos assuntos;

2. Pesquisa sobre propostas didáticas que trabalharam com Métodos de Contagem;

3. Elaboração da proposta didática e questionários para coleta de dados;

4. Teste exploratório da proposta didática com professores de matemática;

5. Análise dos dados levantados no teste exploratório;

6. Aplicação da proposta didática e do questionário dos alunos;

7. Análise dos resultados obtidos na aplicação e no questionário.

2.4.1 Questionário

Utilizando o aplicativo de gerenciamento de pesquisa *Google Form* idealizou-se, inicialmente, um questionário para ser respondido por professores com diferentes tipos de experiências atuantes na 3ª série do Ensino Médio, com a finalidade que pudessem avaliar e propor sugestões visando o sucesso para a aplicação da Proposta Didática.

Tal questionário Apêndice F foi composto por vinte e duas perguntas, sendo cinco perguntas abertas, identificando o sujeito participante da pesquisa e possibilitando ao mesmo oferecer sua opinião sobre as atividades desenvolvidas, já as outras dezessete perguntas fechadas, referentes ao tempo de atuação na Educação Básica e, que buscasse promover uma análise a respeito da Proposta Didática.

Seu objetivo principal foi de avaliar a coerência da Proposta Didática apresentada com a apropriação para ser aplicada na 3ª série do Ensino Médio. Após a validação, os questionários foram transcritos para o *Google Forms* para serem aplicados aos alunos participantes da experimentação.

Segundo apontam (MARCONI; LAKATOS, 2003, p. 201), "Questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador".

Os Apêndice C, Apêndice D e Apêndice E se referem as Avaliações Diagnósticas aplicadas ao final de cada encontro. Elas eram compostas por sete perguntas objetivas desenvolvidas pelo pesquisador e, divididas da seguinte forma: O primeiro questionário referente ao encontro 1 foi composto de duas perguntas, o segundo, referente ao encontro 2 e contava com três perguntas e o terceiro, referente ao encontro 3 foi composto por duas perguntas.

Os alunos deveriam enviar as soluções por meio de um arquivo, esse atendendo ao formato que fosse conveniente (*jpge, word, pfd*, etc). Assim, a finalidade foi de avaliar a maneira com os alunos utilizavam a Metodologia Resolução de Problemas frente às questões de Contagem.

O Apêndice G é composto por um questionário que foi respondido pelos alunos participantes da pesquisa. Esse segundo questionário possibilitou aos alunos avaliarem a metodologia de ensino experimentada nesta pesquisa.

Assim, tal questionário respondido pelos alunos foi composto de doze perguntas, sendo três delas abertas, que identificaram o aluno e possibilitaram que eles pudessem apontar pontos positivos e negativos acerca da metodologia experimentada, e as outras nove perguntas, essas buscaram identificar pontos relevantes para essa pesquisa, tais como: se o aluno já teve contato com o conteúdo em questão, a opinião a respeito dos *slides* e problemas trabalhados na experimentação, assim como também, uma auto avaliação a respeito da capacidade de resolver problemas.

2.4.2 Respostas dos Participantes nas Atividades Propostas

Após a aplicação da Proposta Didática, foram coletadas e analisadas as respostas dos participantes das atividades propostas. As atividades foram construídas com o objetivo de trabalhar os temas: Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão; Princípio Fundamental da Contagem; Princípio Aditivo; Permutações (Simples, com Repetições e Circulares); Arranjos Simples e Combinações Simples. As análises das atividades estão descritas no Capítulo 3.

2.5 Análise de Dados

A coleta de dados nesta pesquisa ocorreu por meio de questionários, observações dos participantes e, por fim, análise das respostas dos participantes nas atividades propostas.

A aplicação do primeiro questionário, respondido pelos professores Apêndice F ocorreu durante o mês de maio de 2021 e contou com a participação de cinco professores da Educação Básica atuantes na 3ª série do Ensino Médio.

Com relação ao questionário dos alunos, esse ocorreu ao final de cada encontro Apêndice C, Apêndice D e Apêndice E e contou com a participação de cinco alunos, chamados aqui de A1, A2, A3, A4 e A5.

De acordo com (GIL et al., 2002, p. 90), "[...] o processo de análise e interpretação é fundamentalmente interativo, pois o pesquisador elabora pouco a pouco uma explicação lógica do fenômeno [...]".

2.6 Proposta Didática

Como mencionado anteriormente, tal Proposta Didática foi aplicada numa turma de 3ª série do Ensino Médio. Em relação ao calendário escolar, a turma possuía cinco horas/aulas por semana da disciplina Matemática, essas com duração de cinquenta minutos cada hora/aula, sendo duas na segunda-feira e três na quarta-feira. A Proposta Didática foi aplicada no contra turno, e sua aplicação foi dividida em três encontros que ocorreram nos dias 09, 11 e 13 de agosto de 2021.

Os encontros foram ministrados por meio do Ensino Remoto Emergencial, utilizando para seu desenvolvimento a ferramenta *Google Classroom*. O pesquisador, assim com a professora titular da turma, optou por complementar o Ambiente Virtual de Aprendizagem *Google Classroom* com a ferramenta *Google Meet*, que possibilitou a realização de encontros virtuais síncronos, facilitando assim a conexão entre alunos-professor.

Com relação a Proposta Didática, essa foi desenvolvida objetivando atividades para o estudo individual e trabalho em equipe, tendo o pesquisador exercendo o papel de mediador durante todo processo de ensino e aprendizagem dos alunos participantes. Ou seja, intervindo quando necessário, propondo questionamentos visando gerar discussões acerca de determinados pontos de vista e buscando mantê-los motivados frente a cada desafio proposto.

Conforme aponta Moran (2018)

> [...] A aprendizagem é mais significativa quando motivamos os alunos intimamente, quando eles acham sentido nas atividades que propomos, quando consultamos suas motivações profundas, quando se engajam em projetos em que trazem contribuições, quando há diálogo sobre as atividades e a forma de realizá-las (MORAN, 2018, p. 1) .

Desta forma, nessa pesquisa foram utilizados três encontros com duração de 30 minutos cada. Os encontros foram divididos em cinco momentos, sendo eles:

1. Exposição da situação problema;
2. Busca por soluções;
3. Discussão das atividades apresentadas;
4. Apresentação dos conceitos matemáticos;
5. Avaliação.

Durante cada encontro foi utilizado:

- *Slides* criados no *PowerPoint* composto por problemas iniciais, questionamentos sobre os mesmos, sugestões de resoluções, a formalização do conceito matemático proposto e, por fim, sua aplicação no referido problema almejando demonstrar a praticidade para o uso formal do conceito aplicado a um determinado problema;
- O aplicativo *Whiteboard* que, em conjunto com a mesa digitalizadora, proporcionou ao pesquisador poder desenvolver cálculos, desenhos, tabela, entre outros, como se estivesse utilizando o quadro branco;
- A ferramenta de gerenciamento de pesquisas *Google Form*, utilizada para a aplicação dos questionários.

Nas próximas subseções são descritas, de forma detalhada, as atividades que compõe a referida Proposta Didática.

2.6.1 Detalhamento da Proposta Didática

A Proposta Didática foi estruturada para que ocorresse em três encontros, cada encontro referente a um respectivo momento com relação ao uso do aplicativo *Google Meet* e, visou atender ao seguinte plano de trabalho exposto a seguir nesta pesquisa.

<u>Encontro 01</u>

- Conteúdos:
  - Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão;
  - Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo);
  - Princípio Aditivo.
- Duração:
  - 30 minutos.
- Materiais Utilizados:
  - Computador, Celular / *Tablet*;
  - Plataforma *Google Meet*;
  - Arquivo do *PowerPoint*;
  - Aplicativo *Microsoft Whiteboard*;
  - Mesa Digitalizadora;
  - Formulário do *Google* (*Google Form*);

  - Caderno.

- Objetivos:

  - Apresentar a metodologia Resolução de Problemas como uma ferramenta que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos;
  - Fazer com que os alunos compreendam os conceitos de Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão, Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo) e Princípio Aditivo;
  - Detectar possíveis maneiras de combinar elementos de um determinado agrupamento e enumerá-los utilizando estratégias particulares;
  - Interpretar e resolver problemas que abordem conceitos de Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão, Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo) e Princípio Aditivo;
  - Identificar a utilização dos conteúdos abordados nessa aula em situações do cotidiano.

Encontro 02

- Conteúdos:

  - Permutações Simples;
  - Permutações com Repetições;
  - Permutações Circulares.

- Duração:

  - 30 minutos.

- Materiais Utilizados:

  - Computador, Celular / *Tablet*;
  - Plataforma *Google Meet*;
  - Arquivo do *PowerPoint*;
  - Aplicativo *Microsoft Whiteboard*;
  - Mesa Digitalizadora;
  - Formulário do *Google* (*Google Form*);
  - Caderno.

- Objetivos:
  - Fazer com que os alunos compreendam os conceitos relacionados às Permutações (Simples, com Repetições e Circulares);
  - Detectar possíveis maneiras de permutar elementos de um determinado agrupamento e enumerá-los utilizando estratégias particulares;
  - Interpretar e resolver problemas que abordem conceitos de Permutações;
  - Identificar a utilização dos conteúdos abordados nessa aula em situações do cotidiano.

Encontro 03

- Conteúdos:
  - Arranjos Simples;
  - Combinações Simples;
  - Métodos Básicos de Contagem.
- Duração:
  - 30 minutos.
- Materiais Utilizados:
  - Computador, Celular / *Tablet*;
  - Plataforma *Google Meet*;
  - Arquivo do *PowerPoint*;
  - Aplicativo *Microsoft Whiteboard*;
  - Mesa Digitalizadora;
  - Formulário do *Google* (*Google Form*);
  - Caderno.
- Objetivos:
  - Fazer com que os alunos compreendam conceitos de Arranjos e Combinações;
  - Detectar possíveis maneiras de combinar elementos de um determinado agrupamento e enumerá-los utilizando estratégias particulares;
  - Interpretar e resolver problemas que abordem conceitos Arranjos e Combinações;

- Identificar a utilização dos conteúdos abordados nessa aula em situações do cotidiano;
- Promover uma discussão acerca dos Métodos Básicos de Contagem trabalhados ao longo dos encontros, fazendo com que os alunos criem um problema de Contagem e reflitam a respeito da solução.

As atividades foram desenvolvidas no decorrer do mês de agosto de 2021 de forma remota através do aplicativo *Google Meet*. O processo de desenvolvimento delas ocorreu conforme o cronograma representado no Quadro 10.

Quadro 10 – Cronograma dos encontros

Data	**Encontro**	**Duração**
09/08/21	Encontro 1 – Conjuntos, Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo.	30 min.
11/08/21	Encontro 2 – Permutações.	30 min.
13/08/21	Encontro 3 – Arranjo Simples e Combinação Simples e Discussão dos Métodos de Básicos de Contagem.	30 min.

Fonte: Elaboração Própria

As subseções a seguir trazem de forma detalhada o desenvolvimento destes três encontros.

2.6.2 Encontro 1 – Conjuntos, Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo.

O encontro 1 foi estruturado em cinco momentos e teve como objetivo apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos sobre os conceitos de Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão, Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo.

Num primeiro momento foram apresentados aos alunos duas situações-problemas e, em seguida, o pesquisador mediou as discussões acerca delas, almejando que os alunos:

1. Compreendessem o problema: esperando que os alunos fossem capazes de compreender o que se pede, identificar quais são as variáveis presentes e quais são os dados fornecidos pelo problema;
2. Desenvolvessem um plano de solução: momento em que os alunos projetam caminhos para utilizarem as informações fornecidas no problema, utilizando, se possível, tabelas ou desenhos, buscando responderem a pergunta feita pelo problema;

3. Apliquem o plano desenvolvido no item anterior: instante em que os alunos colocam em prática o que foi estruturado no item anterior, a fim de chegar a conclusões que solucionem o problema proposto;

4. Reflitam sobre a solução encontrada: uma vez respondido o problema, o professor propõe que os alunos defendam seu ponto de vista em relação a solução encontrada por eles e, questione as soluções desenvolvidas pelos colegas de turma.

Problema 1

▷ Quantos múltiplos de 3 ou 7 há entre 10 e 100?

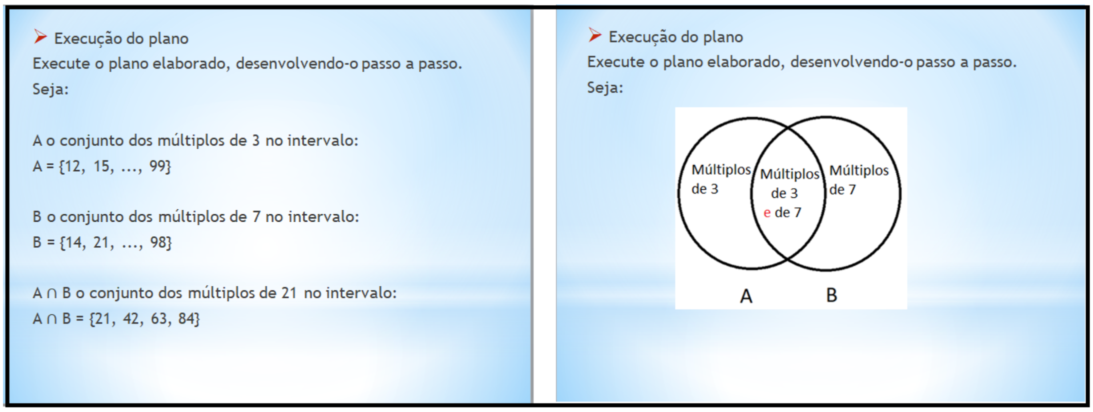
Após a apresentação do problema, o pesquisador deve interrogar aos alunos, visando avaliar a compreensão que eles tiveram sobre a situação proposta. Para tal problema, em específico, o pesquisador, no papel de mediador do processo de ensino e aprendizagem dos alunos participantes, pode realizar os seguintes questionamentos:

- "Há alguma palavra cujo significado é desconhecido?";
- "O que se pede no problema?";
- "Quais são os dados e as condições do problema?";
- "É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?";
- "É possível estimar a resposta?"

Posteriormente a averiguação da compreensão dos alunos sobre o problema proposto, indica-se que, o pesquisador interrogue os alunos a respeito de qual seria um bom plano para a resolução do referido problema. Vale ressaltar que, após os alunos sugerirem um plano de resolução, neste momento, o pesquisador deve propor a seguinte pergunta: "Há alguma outra estratégia?", essa com a finalidade de que os alunos desenvolvam, se possível, outra sugestão acerca do problema proposto.

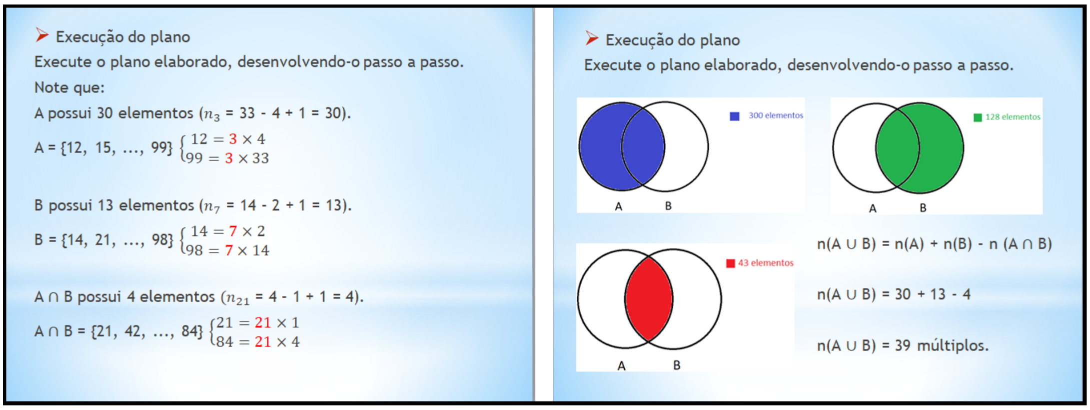
Após o desenvolvimento das sugestões de resolução apresentadas pelos alunos, o pesquisador deverá expor as resoluções desenvolvidas por ele e promover um debate sobre elas (Figura 37, Figura 38, Figura 39 e Figura 40).

Figura 37 – Primeira sugestão do desenvolvimento do plano de resolução apresentado pelo pesquisador (parte 01)



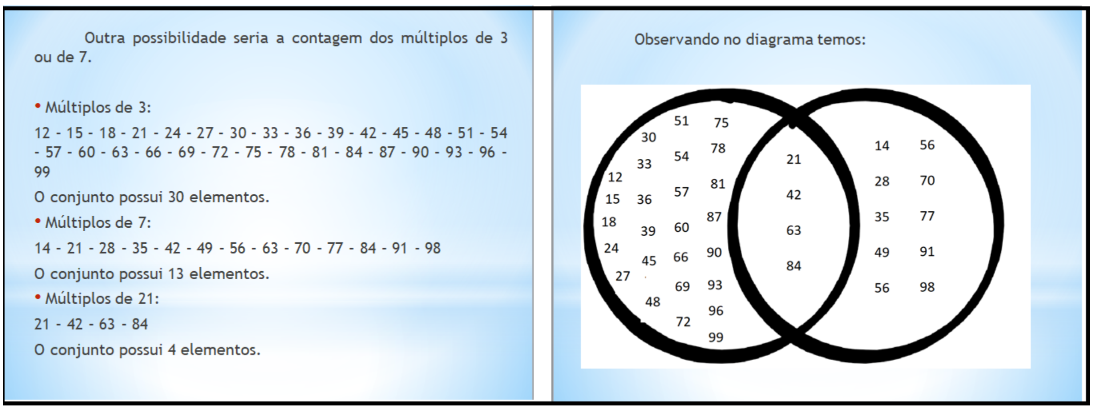
Fonte: Autoria própria.

Figura 38 – Primeira sugestão do desenvolvimento do plano de resolução apresentado pelo pesquisador (parte 02)



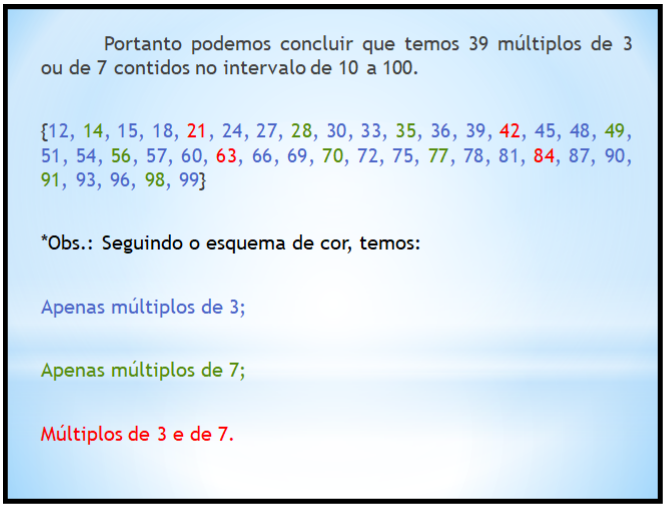
Fonte: Autoria própria.

Figura 39 – Segunda sugestão do desenvolvimento do plano de resolução apresentado pelo pesquisador (parte 01)



Fonte: Autoria própria.

Figura 40 – Segunda sugestão do desenvolvimento do plano de resolução apresentado pelo pesquisador (parte 02)



Fonte: Autoria própria.

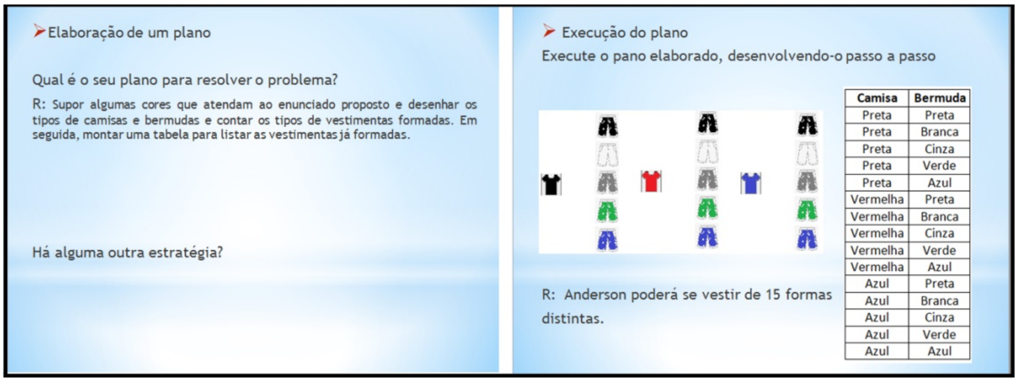
Após tal momento, o pesquisador deverá realizar com os alunos a verificação das soluções propostas, ou seja, soluções desenvolvidas em aula pelos alunos e a solução apresentada pelo professor, questionando as estruturas e interrogando-os se a pergunta inicial do problema foi devidamente resolvida a partir das soluções apresentadas.

Como exemplo, tem-se a segunda situação problema exposta de maneira semelhante a primeira, essa também passando por todos os momentos citados acima: Compreensão do Problema; Desenvolvimento de um plano de solução; Execução do plano de solução e; Retrospecto.

<u>Problema 2</u>

▷ Anderson foi convidado para ir a um churrasco no sábado. Para montar sua vestimenta ele dispõe de cinco bermudas e três camisas distintas. De quantas formas diferentes Anderson poderá se vestir?

Figura 41 – Elaboração e execução do plano de resolução do problema 2 trabalhado no encontro 1



Fonte: Autoria própria.

Após a apresentação, discussão, resolução e análise das soluções encontradas, os conteúdos de Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão; Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo foram formalmente definidos.

Por fim, visando avaliar o modo com que os alunos se comportam diante de um problema envolvendo os conteúdos desenvolvidos na aula, foi enviado um *link* contendo três questões, essas deveriam serem respondidas numa folha e enviada uma foto contendo suas respectivas soluções.

A seguir, no Quadro 11 é apresentada a estrutura do encontro 01, citando os conteúdos trabalhados, o objetivo, os recursos e a duração prevista.

Quadro 11 – Estrutura do Encontro 01

Conteúdo	**Objetivo**	**Recursos**	**Duração**
• Conjuntos – Princípio da Inclusão e Exclusão; • Princípio Fundamenta da Contagem; • Princípio Aditivo	Apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos acerca dos conteúdos propostos.	• Computador, celular / *Tablet*; • Plataforma *Google Meet*; • Arquivo do *PowerPoint*; • Aplicativo *Whiteboard*; • Mesa Digitalizadora; • Formulário do *Google* (*Google Form*); • Caderno.	30 minutos

Fonte: Elaboração Própria

2.6.3 Encontro 2 – Permutações (Simples, com Repetição e Circular)

No encontro 2, a estrutura seguiu o mesmo modelo estruturado no encontro 1, ou seja, também foi composto por cinco momentos. Os problemas propostos neste encontro foram:

<u>Problema 1</u>

▷ Um grupo de amigos deseja formar um grupo do livro, se reunindo semanalmente para discutir suas opiniões a respeito de um livro determinado por eles. Para isso eles escolhem 7 livros, sendo 3 de romance policial, 2 de ficção científica e 2 de suspense. Sabendo que, os livros de mesmo gênero serão lidos em seguida, de quantas formas diferentes esse grupo poderá fazer sua programação de leitura?

Exemplificando tal situação, para este problema sugere-se que os alunos imaginem a situação e façam um desenho (Figura 42).

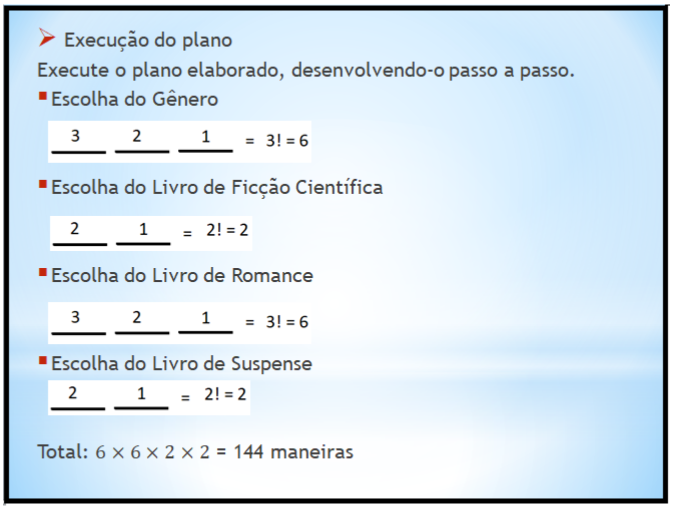
Figura 42 – Representação dos livros citados no exemplo 1 do encontro 2

Fonte: Autoria própria.

No momento elaboração do plano, sugere-se que o problema seja dividido em duas partes: a primeira seria escolher a organização (posição) dos gêneros e a segunda seria determinar o número de formas com que os livros de cada gênero poderiam ser organizados.

Na execução do plano desenvolvido (Figura 43), indica-se que a resolução das duas partes do problema e, posteriormente, tais resultados devem ser multiplicados, pois como a permuta de elementos em alguma dessas partes altera todo o agrupamento.

Figura 43 – Execução do plano de resolução do exemplo 1 do encontro 2



Fonte: Autoria própria.

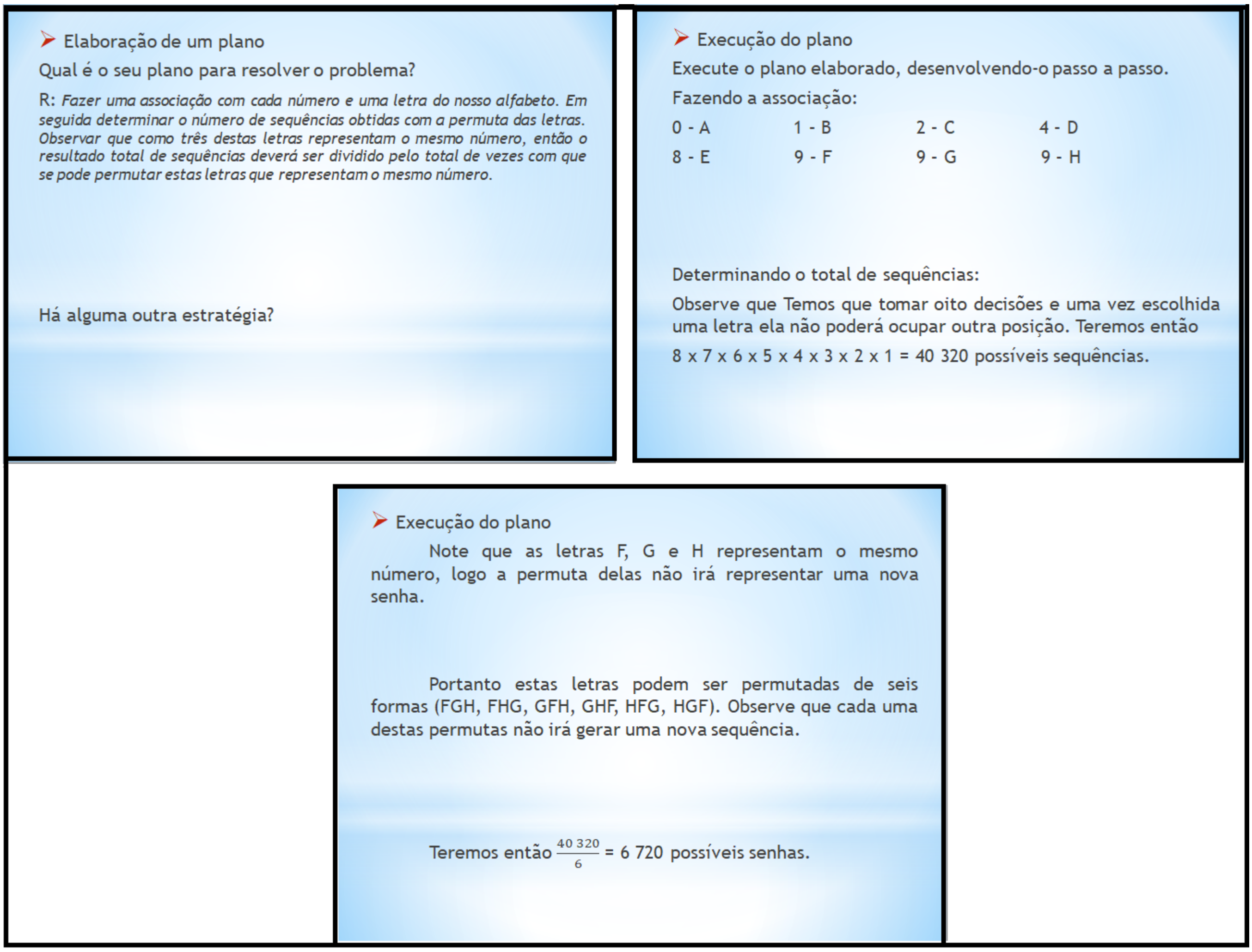
<u>Problema 2</u>

▷ Um rapaz criou uma senha para seu celular, tomando sua data de nascimento, 29/04/1989, e embaralhando-se, ao acaso, seus dígitos, sem as barras. Desse modo, qual o número de possibilidades distintas de senha que ele pode obter?

Este problema configura uma situação muito presente no cotidiano da maioria das pessoas. Quase que, diariamente, em diferentes situações as pessoas se deparam com a necessidade de redefinir senhas para seu aparelho celular e/ou criar senhas quando adquire um novo aparelho.

Sendo assim, numa breve análise do problema 3, é possível identificar que foi pedido para determinar o número de sequências (senhas) envolvendo aqueles algarismos (Figura 44). Pode-se sugerir uma associação de cada algarismo com uma letra do alfabeto. Em seguida, a determinação do número de possibilidades e novas sequências geradas com aquelas letras. Por fim, vale ressaltar que, a percepção de que três daquelas letras representavam o mesmo algarismo, e que, com isso, a permuta delas não geraria uma nova senha. Desta forma, indica-se a divisão do número total de senhas pelo número obtido com a permuta dessas letras que representavam o mesmo algarismo, ou seja, fatorial do número de elementos repetidos.

Figura 44 – Elaboração e Execução do plano de resolução do exemplo 2 trabalhado no encontro 2



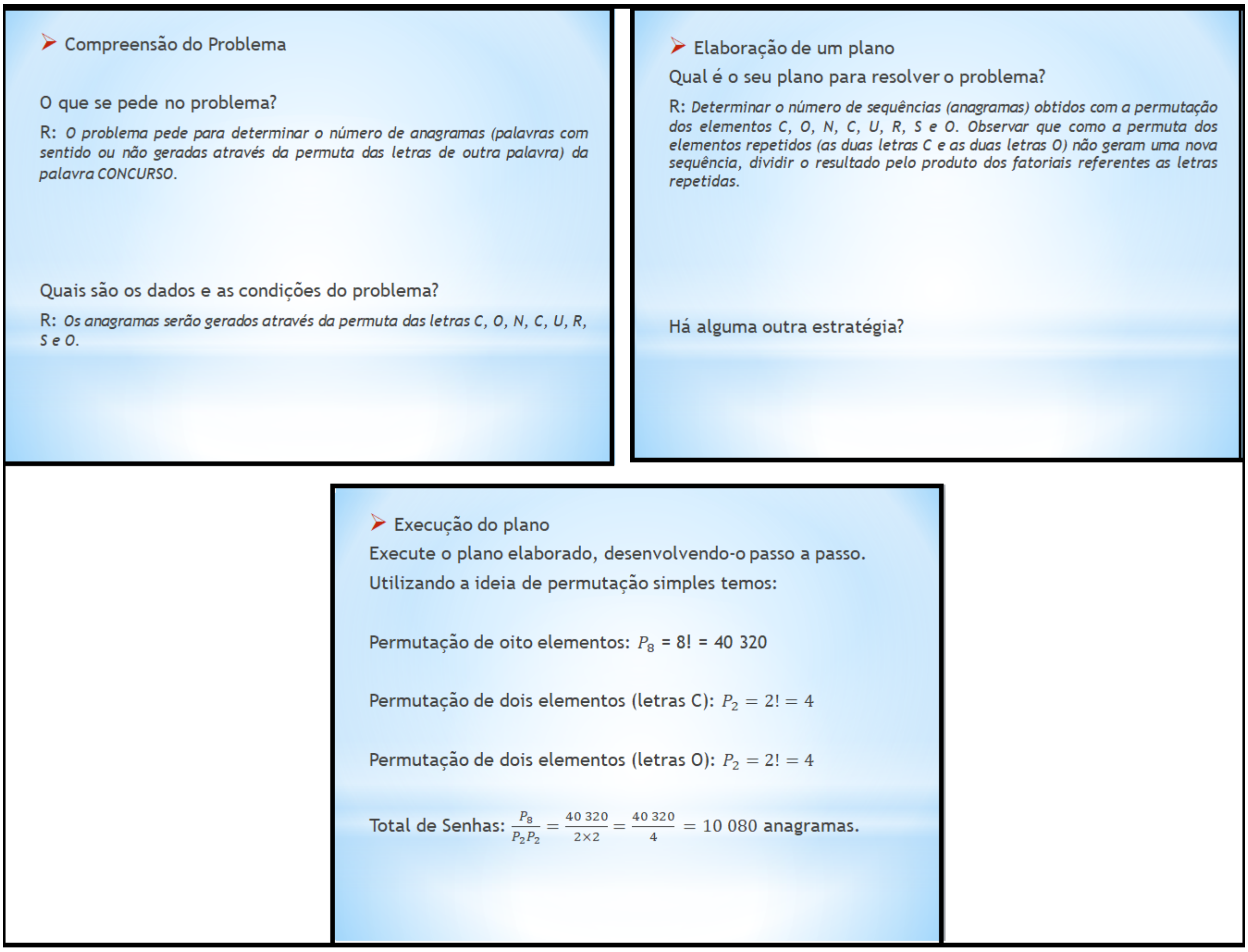
Fonte: Autoria própria.

<u>Problema 3</u>

▷ Quantos são os anagramas da palavra CONCURSO?

O problema três (Figura 45) pode ser resolvido de uma maneira bem parecida com o problema anterior.

Figura 45 – Fases de Compreensão do Problema; Elaboração e Execução do plano de resolução do problema 3 trabalhado no encontro 2



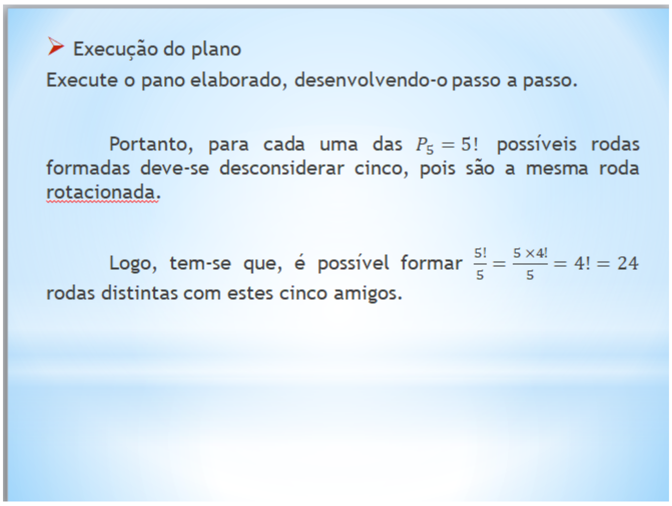
Fonte: Autoria própria.

<u>Problema 4</u>

▷ Cantigas de roda, também conhecidas como cirandas, são músicas folclóricas cantadas em uma roda. Suponha que, cinco crianças estejam cantando e brincando de ciranda. Quantas rodas distintas elas conseguem formar?

No problema quatro, a sugestão inicial é de que fosse desenhada uma roda formada por cinco crianças com a finalidade de proporcionar uma melhor visualização do problema. Assim, ao realizar a análise do desenho é possível perceber que, a cada roda gerada,

Figura 46 – Representação da situação proposta no exemplo 4 trabalhado no encontro

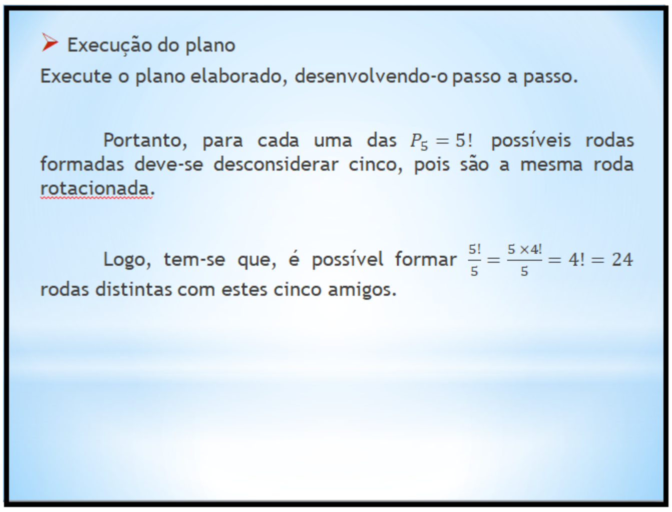


Fonte: Autoria própria.

sequências distintas contendo cinco elementos, pode ser vista de cinco diferentes maneiras, mas ainda sim, é a mesma roda. Observe a Figura 46:

Portanto, é possível determinar o total de modos com que cinco amigos poderiam ser permutados (Figura 47). E, em seguida, tal resultado deve ser dividido por cinco, equivalente ao número de maneiras de se observar uma mesma roda.

Figura 47 – Execução do plano de resolução da situação proposta no problema 4 trabalhado no encontro 2



Fonte: Autoria própria.

Como feito ao final do relato do encontro 01, o Quadro 12 apresenta a estrutura do encontro 02, citando os conteúdos trabalhados, o objetivo, os recursos e a duração prevista.

Quadro 12 – Estrutura do Encontro 02

Conteúdo	Objetivo	Recursos	Duração
• Permutações Simples; • Permutações com Repetições; • Permutações Circulares.	Apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos acerca dos conteúdos propostos.	• Computador, celular / *Tablet*; • Plataforma *Google Meet*; • Arquivo do *PowerPoint*; • Aplicativo *Whiteboard*; • Mesa Digitalizadora; • Formulário do *Google* (*Google Form*); • Caderno.	30 minutos

Fonte: Elaboração Própria

2.6.4 Encontro 3 – Arranjo Simples, Combinação Simples e Discussão dos Métodos Básicos de Contagem

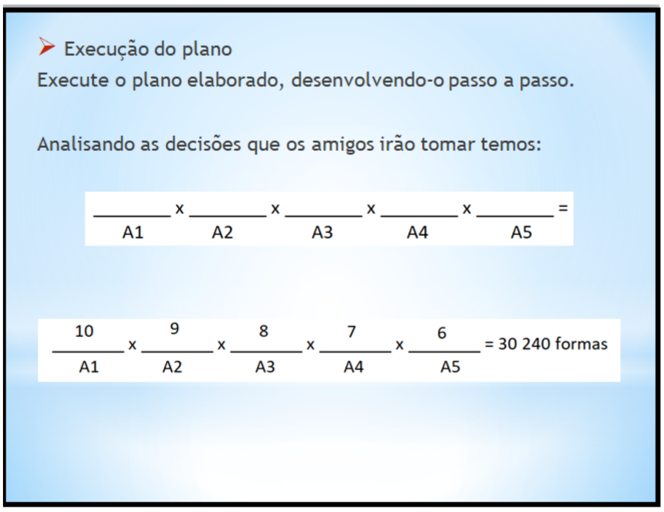
Para o encontro 3, também é possível seguir a mesma estrutura já mencionada e utilizada nos outros dois encontros anteriores. Os problemas propostos neste encontro são:

Problema 1

▷ Cinco amigos foram ao cinema assistir ao filme Vingadores: Guerra infinita. Como escolheram uma sessão no início da tarde, o cinema estava vazio. Com isso, eles tiveram facilidade na hora de escolherem os assentos, uma vez que decidiram que iriam sentar-se numa mesma fileira. Sabendo que a fileira que eles escolheram possuía 10 lugares, de quantas formas distintas os assentos podem ser ocupados por esses amigos?

A solução sugerida foi a utilização do Princípio Fundamental da Contagem, analisando as decisões que os cinco amigos devem tomar (Figura 48).

Figura 48 – Execução do plano de resolução do problema 1 trabalhado no encontro 3



Fonte: Autoria própria.

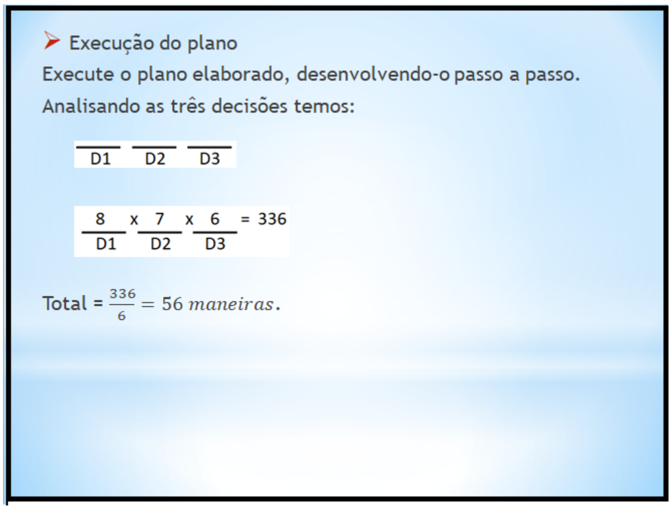
- Amigo 1: Poderá se sentar em qualquer um dos 10 lugares.
- Amigo 2: Poderá se sentar em qualquer um dos 9 lugares restantes, pois um lugar já estaria ocupado.
- Amigo 3: Poderá se sentar em qualquer um dos 8 lugares restantes, pois dois lugares já estariam ocupados.
- Amigo 4: Poderá se sentar em qualquer um dos 7 lugares restantes, pois três lugares já estariam ocupados.
- Amigo 5: Poderá se sentar em qualquer um dos 6 lugares restantes, pois quatro lugares já estariam ocupados.

Problema 2

▷ Um grupo de pesquisadores está testando em humanos uma nova vacina contra um determinado tipo de vírus. Devem-se escolher três pessoas de um grupo de oito voluntários para tomarem a vacina e o restante irá tomar placebo. Nenhum dos voluntários saberá qual tomou vacina e qual tomou placebo. Em seguida, os pesquisadores irão avaliar as consequências da vacina no grupo. De quantas maneiras os pesquisadores podem realizar essa escolha?

A sugestão de solução indicada para este problema é a de utilizar o Princípio Fundamental da Contagem e determinar o número de maneiras de escolher três elementos de um total de oito. Em seguida, analisar cada trio escolhido, pois deve-se ter em mente que não tem prioridade de posição na escolha dos três elementos (voluntários). Por exemplo, uma vez formado um trio, (suponha o trio ABC) tem-se 6 formas distintas de analisar o mesmo trio: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Deve-se então dividir o total de formas de se escolher três pessoas pelo fatorial de decisões, ou seja, três decisões, a escolha de cada voluntário (Figura 49).

Figura 49 – Execução do plano de resolução do problema 2 trabalhado no encontro 3



Fonte: Autoria própria.

Por fim, como feito nos encontros anteriores, o Quadro 13 aborda a indicação da estrutura proposta para o encontro 03.

Quadro 13 – Estrutura do Encontro 03

Conteúdo	Objetivo	Recursos	Duração
• Arranjos Simples; • Combinações Simples;	Apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos acerca dos conteúdos propostos. Analisar como os alunos utilizam a metodologia Resolução de Problemas para criar e resolver problemas relacionados ao conteúdo de Contagem.	• Computador, celular / *Tablet*; • Plataforma *Google Meet*; • Arquivo do *PowerPoint*; • Aplicativo *Whiteboard*; • Mesa Digitalizadora; • Formulário do *Google* (*Google Form*); • Caderno.	30 minutos

Fonte: Elaboração Própria

Esse encontro teve como segundo objetivo analisar como os alunos utilizaram a Metodologia Resolução de Problemas para criar e resolver problemas de Contagem.

Neste momento, sugere-se que a turma fosse dividida em grupos com a tarefa de formularem um problema de Contagem. Tais problemas juntos com a solução deveriam ser enviados para o pesquisador por *e-mail*, e por meio de um sorteio, os problemas deveriam ser redistribuídos entre os grupos de alunos participantes. Em seguida, os grupos teriam a tarefa de resolver os novos problemas propostos e, por fim, as soluções apresentadas serem discutidas com todos os alunos participantes desta pesquisa.

2.7 Etapas da Pesquisa

Visando atingir o objetivo geral desta pesquisa, que é o de Apresentar a Metodologia Resolução de Problemas como uma alternativa viável que propõe melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos alunos sobre os Métodos de Contagem, foram seguidas as seguintes etapas:

1. Revisão Bibliográfica acerca dos temas Métodos de Contagem (Análise Combinatória)

e Metodologia Resolução de Problemas em literaturas especializadas nos assuntos;

2. Pesquisa sobre propostas didáticas que trabalharam com Métodos de Contagem;
3. Elaboração da Proposta Didática e questionários para coleta de dados;
4. Teste Exploratório da Proposta Didática com professores de Matemática;
5. Análise dos dados levantados no Teste Exploratório;
6. Aplicação da Proposta Didática e do questionário dos alunos;
7. Análise dos resultados obtidos na aplicação e no questionário.

Capítulo 3

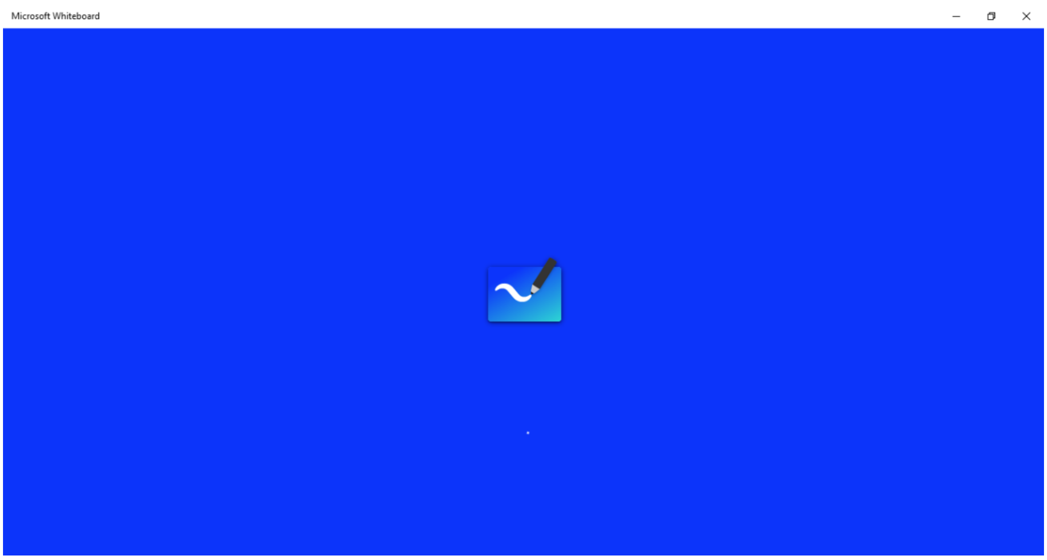
Experimentação e Análise dos Dados

Neste capítulo é relatada a experimentação da Proposta Didática e a Análise dos Dados coletados nesta pesquisa. Entretanto, é importante destacar que, a partir da suspensão das aulas presenciais devido à Pandemia gerada pelo COVID-19, a Proposta Didática precisou ser adaptada, de modo a se encaixar a nova realidade vivida por alunos e professores.

Deste modo, as atividades ocorreram de forma remota, a partir da Ferramenta Digital chamada *Google Meet*, essa que possibilitou que as aulas ocorressem por meio de uma reunião ao vivo com os alunos, ou seja, de forma síncrona.

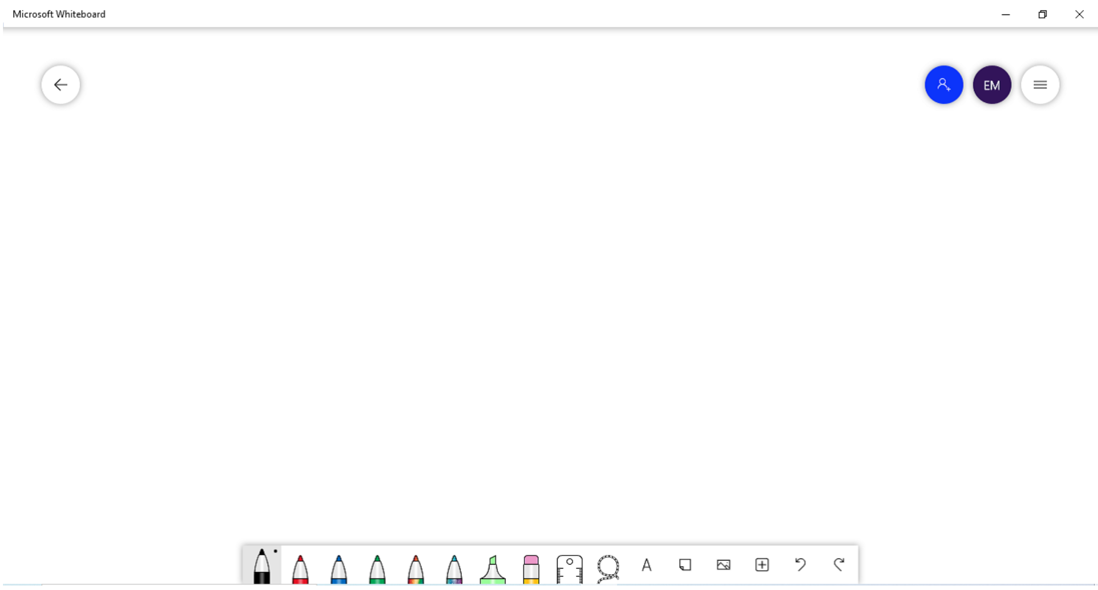
E também, durante as aulas ministradas pelo pesquisador foram utilizados slides estruturados no aplicativo *PowerPoint* criados também pelo pesquisador, já a mesa digitalizadora junto ao aplicativo digital *Microsoft Whiteboard* (Figura 50 e Figura 51) tiveram a função de simular o quadro do professor nas salas de aulas regulares.

Figura 50 – Tela de abertura do aplicativo *Microsoft Whiteboard*



Fonte: Autoria própria.

Figura 51 – Tela inicial do aplicativo *Microsoft Whiteboard*



Fonte: Autoria própria.

Com relação aos alunos participantes desta pesquisa, para esses, buscando preservar suas identidades, foram identificados em ordem alfabética como: A1, A2, A3, A4 e A5. Já com relação aos formulários contendo as atividades referentes aos três encontros vale destacar que, no primeiro e no segundo encontro, todas as atividades foram realizadas individualmente, já no terceiro encontro, parte das atividades ocorreu de maneira individual e parte em grupo, isso ocorreu devido ao quantitativo de alunos participantes da pesquisa, a turma foi dividida em uma dupla e um trio.

Vale ressaltar também que, os encontros ocorreram em três dias, sendo esses 09, 11 e 13 de agosto de 2021, todos com duração de 30 minutos cada, totalizando 1h 30 min de experimentação da Proposta Didática.

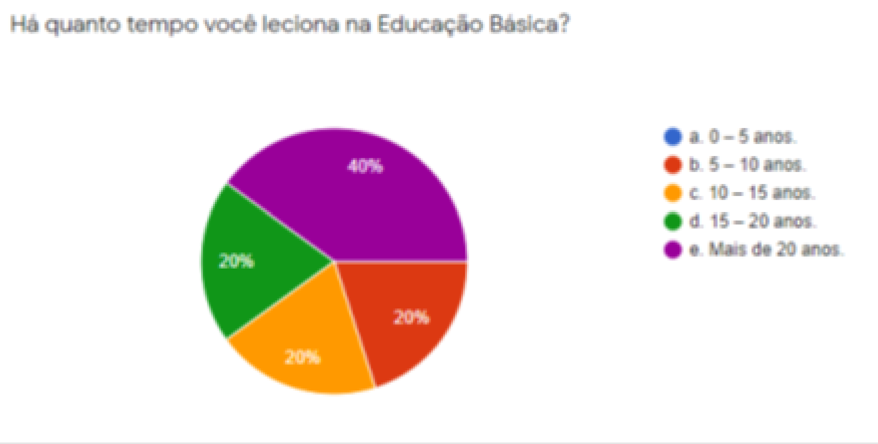
3.1 Análise dos Questionários Finais

O pesquisador, após elaborar as questões que compunham os questionários a serem aplicados ao final de cada encontro desta pesquisa, enviou eles para cinco professores de Matemática atuantes na 3ª série do Ensino Médio, com a finalidade de que, pudessem avaliar as atividades que compunham a Proposta Didática e propusessem sugestões, ambos visando o sucesso da aplicação da referida Proposta Didática.

- Em relação às respostas fornecidas pelos professores ao Questionário proposto, seguem os resultados:

Pode-se apontar que, os professores pesquisados tinham diferentes experiências com relação a atuação na Educação Básica (Figura 52).

Figura 52 – Resposta dos professores em relação ao tempo de atuação na Educação Básica



Fonte: Dados da pesquisa.

- Em relação ao primeiro questionário elaborado pelo pesquisador:

A maioria dos professores, 60%, classificaram as atividades desenvolvidas nesse encontro como extremamente relevantes para o estudo do tema Contagem. Enquanto que, os outros, 40%, apontaram como sendo apenas relevante (Figura 53).

Figura 53 – Gráfico indicando as respostas dos professores em relação a relevância das atividades desenvolvidas no encontro 1 em relação ao estudo do tema

Fonte: Dados da pesquisa.

No que diz respeito ao nível de dificuldade dos problemas propostos para o encontro 1 (Figura 54), numa classificação de 1 a 5, 40% dos professores responderam 5, 20% responderam 4, 20% responderam 3 e os outros 20%, responderam 2. Cabe ressaltar que, nenhum professor participante desta pesquisa indicou o menor grau de relevância.

Figura 54 – Gráfico com as respostas dos professores em relação ao nível de dificuldade das atividades desenvolvidas no encontro 1 em relação ao estudo do tema

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à clareza dos problemas, 80% dos professores indicaram com o maior nível de classificação, ou seja, o nível 5. Enquanto que, os outros 20% a julgaram com um nível intermediário de relevância, nível 3 (Figura 55).

Figura 55 – Gráfico com as respostas dos professores em relação a clareza do que estava sendo proposto nas atividades do encontro 1

Fonte: Dados da pesquisa.

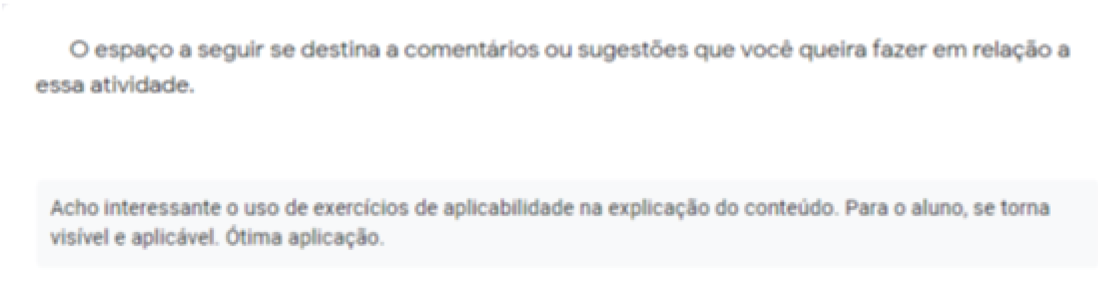
Quando perguntados o quanto os problemas propostos atendiam ao objetivo planejado para o encontro 1, 80% dos professores indicaram com a nota 5. Enquanto que, os outros 20% indicaram com a nota 3 (Figura 56).

Figura 56 – Gráfico com as respostas dos professores a respeito do quanto as atividades atendiam ao objetivo proposto no encontro 1

Fonte: Dados da pesquisa.

No espaço destinado há sugestões ou comentários com relação a Proposta Didática desenvolvida para o primeiro encontro, um professor, aqui denominado por P5, fez um comentário conforme registrado a seguir (Figura 57).

Figura 57 – Sugestão do professor P5 em relação a Proposta Didática desenvolvida no primeiro encontro


O espaço a seguir se destina a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

Acho interessante o uso de exercícios de aplicabilidade na explicação do conteúdo. Para o aluno, se torna visível e aplicável. Ótima aplicação.

Fonte: Dados da pesquisa.

- Em relação ao segundo questionário elaborado pelo pesquisador:

A respeito da relevância dos problemas propostos para o segundo encontro desta pesquisa, 80% dos professores indicaram ser de extrema relevância para o estudo do tema Contagem. Enquanto que, 20% indicaram apenas como sendo relevante (Figura 58).

Figura 58 – Gráfico com as respostas dos professores em relação a relevância das atividades desenvolvidas no encontro 2 em relação ao estudo do tema

Fonte: Dados da pesquisa.

A respeito do nível de dificuldade dos problemas propostos para o segundo encontro, as respostas foram bem variadas. Pois, numa classificação de 1 a 5, 40% dos professores indicaram a nota 5, 20% a nota 4, 20% a nota 3 e os outros 20% a nota 1 (Figura 59).

Figura 59 – Gráfico com as respostas dos professores em relação ao nível de dificuldade do que estava sendo proposto nas atividades do encontro 2

Fonte: Dados da pesquisa.

Classificando numa escala de 1 a 5 a clareza dos exercícios trabalhados para o segundo encontro, 80% dos professores indicaram a nota 5. Enquanto que, os outros 20% indicaram a nota 3 (Figura 60).

Figura 60 – Gráfico com as respostas dos professores em relação a clareza do que estava sendo proposto nas atividades do encontro 2

Fonte: Dados da pesquisa.

Quando perguntados sobre o quanto os problemas do encontro 2 atendiam ao objetivo proposto, 80% dos professores pesquisados indicaram com a nota máxima (nota 5). Enquanto que, os outros 20% indicaram com a nota média (nota 3) (Figura 61).

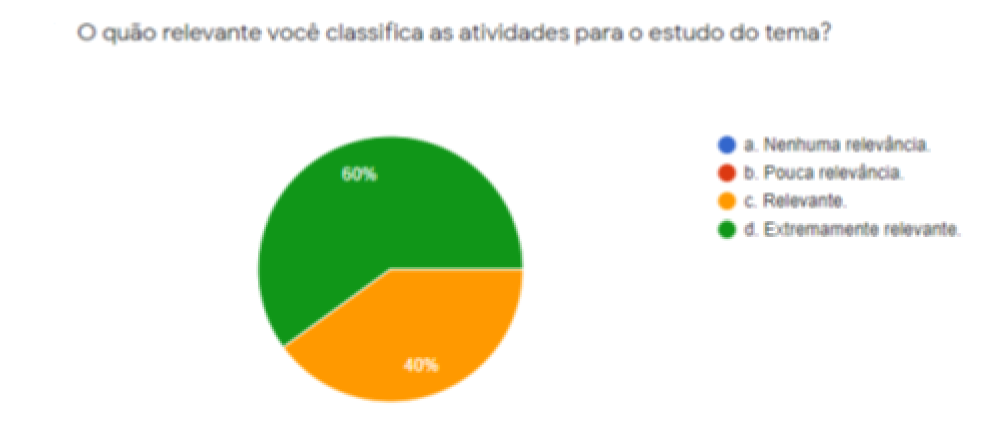
Figura 61 – Gráfico com as respostas dos professores a respeito do quanto as atividades atendiam ao objetivo proposto no encontro 2

Fonte: Dados da pesquisa.

- Em relação ao terceiro questionário elaborado pelo pesquisador:

Dos professores pesquisados, 60% indicaram que as atividades desenvolvidas no encontro 3 foram extremamente relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa. Enquanto que, os outros, 40%, indicaram que eram apenas relevantes para o tema Contagem (Figura 62).

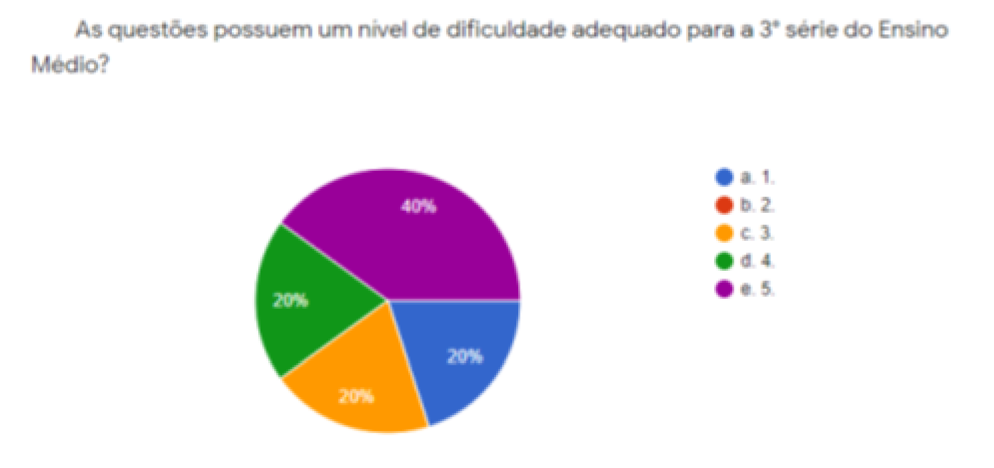
Figura 62 – Gráfico com as respostas dos professores em relação a relevância das atividades desenvolvidas no encontro 3 em relação ao estudo do tema



Fonte: Dados da pesquisa.

A respeito do nível de dificuldade, as questões trabalhadas no encontro 3, em relação a 3ª série do Ensino Médio, 40% dos professores indicaram com a nota máxima (nota 5). Enquanto que, 20% indicaram com a nota 4, 20% com a nota 3 e 20% com a nota mínima (nota 1) (Figura 63).

Figura 63 – Gráfico com as respostas dos professores em relação ao nível de dificuldade do que estava sendo proposto nas atividades do encontro 3



Fonte: Dados da pesquisa.

Dos professores pesquisados, 80% indicaram com a nota máxima a clareza dos problemas propostos no encontro 3. Enquanto que, 20% indicaram com a nota mínima (Figura 64).

Figura 64 – Gráfico com as respostas dos professores em relação a clareza do que estava sendo proposto nas atividades do encontro 3

Fonte: Dados da pesquisa.

Quando perguntados o quanto que os problemas propostos no encontro 3 atendiam ao objetivo proposto para o referido encontro, 80% dos professores indicaram com a nota máxima. Enquanto que, 20% indicaram com a nota mínima (Figura 65).

Figura 65 – Gráfico com as respostas dos professores a respeito do quanto as atividades atendiam ao objetivo proposto no encontro 3

Fonte: Dados da pesquisa.

- Em relação ao quarto momento, relativo ao desenvolvimento da atividade em grupo, contemplada no terceiro encontro:

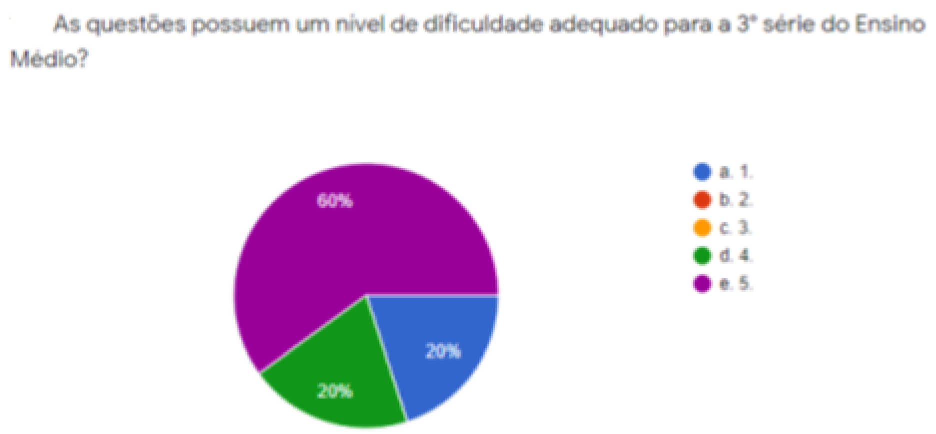
Tem-se que, 80% dos professores indicaram como sendo algo de extrema relevância para o estudo do tema. Enquanto que, 20% indicaram com sendo apenas relevante (Figura 66).

Figura 66 – Gráfico com as respostas dos professores em relação à relevância da atividade em grupo em relação ao estudo do tema

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação ao nível de dificuldade da atividade proposta, 60% dos professores pesquisados indicaram como sendo algo de extrema relevância, pois deram a nota 5. Enquanto que, 20% dos pesquisados deram a nota 4 e os outros 20% indicaram como algo de pouca relevância, pois deram a nota 1 (Figura 67).

Figura 67 – Gráfico com as respostas dos professores em relação à relevância da atividade em grupo proposta



Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à clareza da atividade em grupo, 60% dos professores pesquisados indicaram com a nota máxima (nota 5), 20% indicaram com a nota 4 e os outros, 20%, indicaram com a nota mínima (nota 1) (Figura 68).

Figura 68 – Gráfico com as respostas dos professores em relação a clareza da atividade em grupo proposta

Fonte: Dados da pesquisa.

A respeito de quanto a atividade em grupo proposta atendia ao objetivo planejado, 80% dos professores indicaram com a nota máxima (nota 5). Enquanto que, os outros, 20%, indicaram com a nota 2 (Figura 69).

Figura 69 – Gráfico com as respostas dos professores a respeito do quanto a atividade em grupo proposta atividades atendia ao objetivo

Fonte: Dados da pesquisa.

No espaço destinado há sugestões ou comentários a respeito da atividade em grupo desenvolvida para o final da Proposta Didática, um professor, aqui denominado por P3, fez um comentário conforme registrado a seguir (Figura 70).

Figura 70 – Sugestão do professor P3 em relação à proposta didática desenvolvida no terceiro momento

O espaço a seguir se destina a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

De todas as propostas nos encontros, esta é a mais relevante ao meu ponto de vista, visto que podem ser feitas várias aplicabilidades com questões do cotidiano dos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa.

3.2 Encontro 01

O primeiro encontro ocorreu no dia 09 de agosto de 2021 no contra turno das aulas regulares dos alunos participantes desta pesquisa. Como a turma tinha aulas regulares no turno da manhã, foi sugerido, pelos próprios alunos participantes, o turno da noite para o desenvolvimento das atividades desta pesquisa. Pois, eles alegaram que, desta forma, iriam conseguir participar das reuniões síncronas. Como já mencionado anteriormente, tal encontro teve duração de 30 minutos e o pesquisador teve a presença de cinco alunos participantes.

A turma foi convidada a participar da reunião, por meio do *Google Meet*, por meio de um *link* criado pelo pesquisador e enviado para a professora regular de Matemática da turma que, em seguida, disponibilizava o *link* no grupo de *WhatsApp* da turma.

Ao ser apresentada a Proposta Didática para a professora da turma, ela pediu para o pesquisador que fosse feita uma revisão sobre o conteúdo de Conjuntos. Uma vez que, ela notou que a turma apresentava dificuldades em relação a conteúdos estudados em séries anteriores.

Seguindo o pedido da professora regente da turma, a aula foi iniciada pelo pesquisador relembrando o conteúdo de Conjuntos, conteúdo estudado a eles na 1ª série do Ensino Médio. Como era uma turma da 3ª série do Ensino Médio, vinda de um ano anterior de suspensão das aulas presenciais e, o ano de 2021 enfrentando o segundo ano letivo de apenas aulas em formato remoto, a realização de tal revisão foi visto como algo de grande importância por grande parte dos alunos, esses que se mostraram animados com a proposta e atividades planejadas.

Na revisão, foram abordados conceitos iniciais como representação de Conjuntos, Conjuntos Finitos, Infinitos, Unitário, Vazio, Universo, Igualdade de Conjuntos, Subconjuntos, Operações com Conjuntos e a determinação do número de elementos da União de Conjuntos. Conceitos esses que são importantes ferramentas para realização de uma boa contagem em diferentes situações.

Durante a revisão de Conjuntos, foi possível observar pelo pesquisador uma grande defasagem referente a tal conteúdo, possivelmente gerada pela combinação de dois fatores:

(i) o fato de que esse conteúdo foi visto por eles apenas na 1ª série do Ensino Médio;

(ii) a suspensão das aulas presenciais devido à Pandemia do COVID-19, fato que pode ter atrapalhado o ritmo de estudo dos alunos, fazendo com que eles tivessem que se adaptar as novas formas que eram oferecidas as aulas, isto é, por meio de conteúdos enviados pela plataforma *Google Classroom*.

Dos alunos presentes, apenas dois alunos mostraram lembrar, mesmo que, inicialmente, o conteúdo trabalhado. Ao final desse primeiro encontro, todos os alunos estavam bem participativos, demonstrando terem relembrado de tais conceitos.

Posteriormente, os alunos foram apresentados a Metodologia Resolução de Problemas e, foram apresentados aos exemplos de problemas de Contagem, resolvidos com o uso de tal metodologia de ensino.

O pesquisador acredita ter sido um encontro bastante produtivo, pois contou com participação efetiva dos alunos, sugerindo diferentes possibilidades de soluções para os problemas propostos, questionaram as soluções desenvolvidas pelo pesquisador, aspectos que, enriqueceram a aula referente ao Encontro 01.

Os problemas apresentados a seguir, foram os selecionados para serem trabalhados com os alunos durante o encontro, esses foram criados como problemas correlatos a problemas apresentados nos livros pesquisados e analisados pelo pesquisador desta pesquisa, esses já mencionados anteriormente. Buscando atender as finalidades propostas para este encontro, foram criados dois problemas. Conforme descrito nos próximos parágrafos.

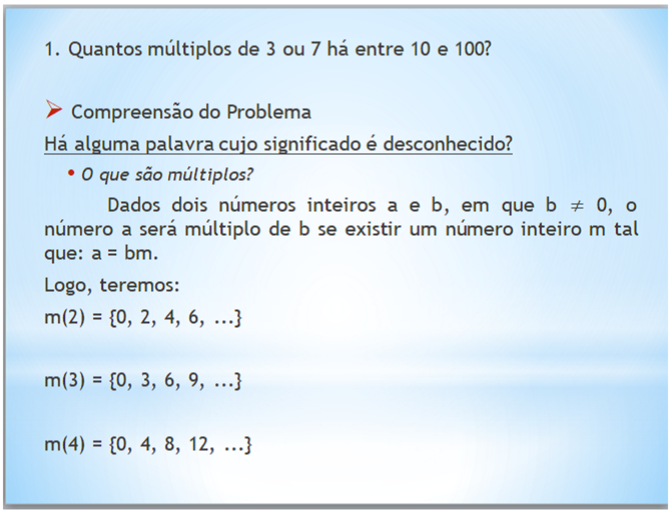
- (i) O primeiro envolvendo a contagem do número de elementos da união de dois conjuntos: Problema para a determinação de múltiplos de 3 ou 7 contidos no intervalo entre 10 e 100;

Problema 01

Quantos múltiplos de 3 ou 7 há entre 10 e 100?

Para a resolução desse problema, inicialmente, foi necessário relembrar o conceito de múltiplo, pois durante o encontro síncrono os alunos participantes indagaram, oralmente, ao pesquisador justificando não lembrarem o conceito de múltiplos.

Figura 71 – Fase de compreensão do problema do exemplo 1 trabalhado no encontro 1



Fonte: Autoria própria.

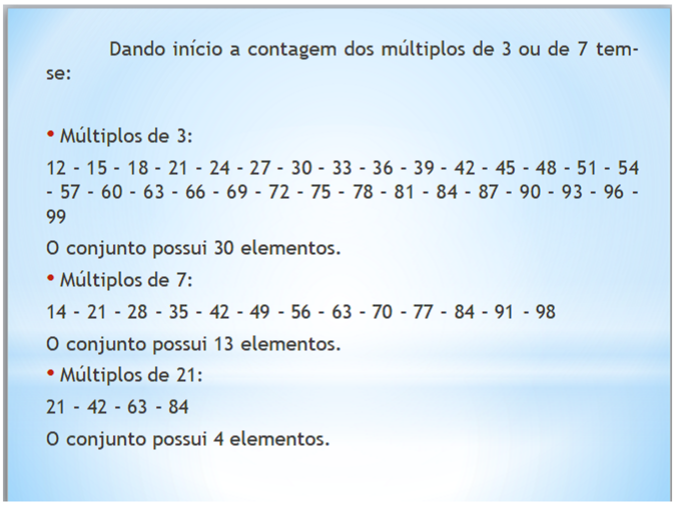
Em seguida, os alunos foram interrogados, oralmente, pelo pesquisador a respeito do que eles compreenderam sobre o problema proposto. Neste momento, apenas um aluno participante (A3) alegou que o problema pedia para determinar o número de múltiplos de 3 ou de 7 presentes no intervalo dado.

Logo após, o pesquisador inicia indagações genéricas ao aluno A3 buscando desenvolver com ele e, com os demais alunos participantes desta pesquisa, um plano de resolução que propunha agrupar os múltiplos de 3 e de 7, representando-os por meio de um diagrama. Em seguida, ao perceberem que existem múltiplos comuns entre 3 e 7 (múltiplos de 21), fato este percebido pelo aluno A2, tais múltiplos também foram listados.

Buscando finalizar a solução do problema proposto, o pesquisador desenvolve indagações orais para que os alunos participantes percebessem que somadas as quantidades dos múltiplos de 3 e 7 e, desse valor deve ser subtraída a quantidade de múltiplos de 21, buscando evitar um erro de contagem. Durante tal momento, o professor, mediador do processo de ensino e aprendizagem dos alunos, desenvolveu, oralmente, indagações genéricas visando, além de encontrar a solução do problema, tornar os alunos ativos em tal processo.

Em seguida, o plano de resolução desenvolvido por meio de colaboração entre os alunos participantes desta pesquisa e, mediado pelo pesquisador, foi escrito e apresentado a todos os participantes da pesquisa pelo pesquisador, utilizando uma Ferramenta Digital (Figura 72):

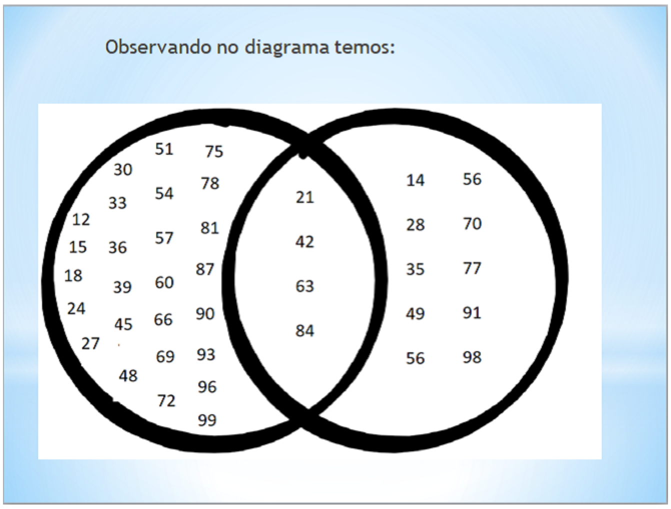
Figura 72 – Contagem dos elementos do exemplo 1 trabalhado no encontro 1



Fonte: Autoria própria.

Desta forma, o diagrama (Figura 73) apresenta dois conjuntos e a intersecção entre eles. Expondo os múltiplos de 3, os múltiplos de 7, como também, os múltiplos de 21 conforme solicitado no problema proposto.

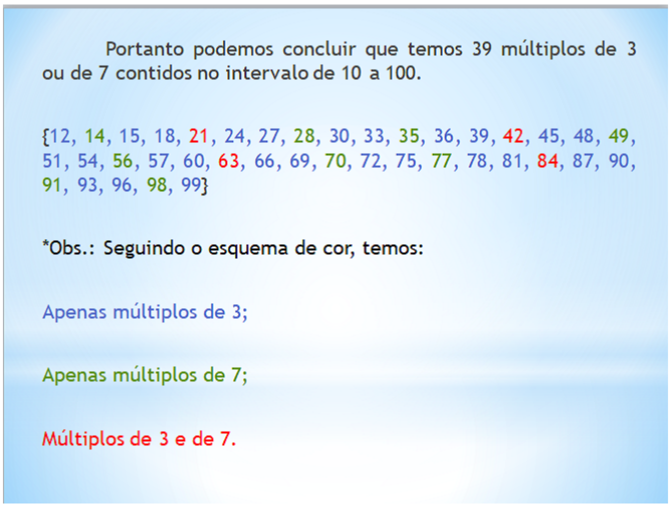
Figura 73 – Contagem dos elementos do exemplo 1 trabalhado no encontro 1 representados por meio do Diagrama de Venn



Fonte: Autoria própria.

O pesquisador, buscando apresentar aos alunos participantes diferentes formas de solução do mesmo problema, utilizando uma Ferramenta Digital, apresentou aos alunos uma nova configuração para a solução do problema proposto (Figura 74)

Figura 74 – Organização dos elementos do exemplo 1 trabalhado no encontro 1 representados por meio da escrita de conjuntos



Fonte: Autoria própria.

Buscando finalizar a análise sobre o problema proposto, os alunos foram interrogados pelo pesquisador sobre a veracidade da solução apresentada por ele. Sendo assim, não houve questionamentos dos alunos participantes sobre erro na solução. Assim, quando interrogados oralmente pelo pesquisador sobre a possibilidade de outra solução, os alunos elaboraram, em conjunto, a seguinte sugestão:

1. Pegar o primeiro múltiplo de 3 presente no intervalo (o número 12);
2. Pegar o último múltiplo de 3 presente no intervalo (o número 99);
3. Descobrir quantos múltiplos de 3 presentes no intervalo (30 elementos);
4. Fazer o mesmo procedimento com os múltiplos de 7 e de 21 (encontrando 13 múltiplos de 7 e 4 múltiplos de 21);
5. Somar a quantidade de múltiplos de 3 com a quantidade de múltiplos de 7 e em seguida, do resultado subtrair a quantidade de múltiplos de 21.

Perceba que, neste problema, os alunos viram um exemplo da aplicação da Metodologia Resolução de Problemas, pois:

- Compreensão do Problema: O problema solicitava a quantidade de múltiplos de 3 ou 7 presentes no intervalo de 10 até 100 e, indica (mesmo que de forma implícita) o uso de múltiplos de 3 e 7;
- Elaboração de um Plano: Formar conjuntos para agrupar os múltiplos de 3 e 7 e, em seguida, representá-los por meio de um diagrama. Ao perceber que existem múltiplos comuns entre 3 e 7 (múltiplos de 21) listá-los. Em seguida, somar a quantidade de

múltiplos de 3 com quantidade de múltiplos de 7 e, para evitar um erro de contagem (contar duas vezes os múltiplos comuns de 3 e 7) subtrair do resultado os múltiplos de 21;

- Execução do Plano: Aplicou-se o plano de resolução desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento promoveu-se um debate mediado pelo pesquisador acerca das soluções encontradas pelos alunos participantes do problema proposto.

- (ii) O segundo envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem: Problema para a determinação do modo que uma pessoa tem de se vestir uma vez dada uma quantidade de camisa e bermudas;

Problema 02

Anderson foi convidado para ir a um churrasco no sábado. Para montar sua vestimenta ele dispõe de cinco bermudas e três camisas distintas. De quantas formas diferentes Anderson poderá se vestir?

Em relação a este problema, os alunos participantes não apresentaram dificuldades na fase de compreensão do problema. Com isso, todos conseguiram perceber o que era solicitado no problema e os dados fornecidos por ele.

Já na parte da elaboração do plano de solução, foi sugerido pelo pesquisador que, inicialmente, fossem consideradas algumas cores que atendessem ao enunciado proposto. Em seguida, também sugerido pelo pesquisador que, os alunos fizessem um desenho com tipos de camisas e bermudas para que se realizassem a contagem dos tipos de vestimentas formadas. Por fim, para facilitar a listagem das vestimentas encontradas pelos alunos, o pesquisador sugeriu a criação de uma tabela (Figura 75).

Figura 75 – Execução do plano de resolução do problema 02 trabalhado no encontro 2

Fonte: Autoria própria.

Ao concluir tal etapa, os alunos foram novamente interrogados pelo pesquisador acerca da solução apresentada no problema. Como no problema anterior, não houve questionamentos, apenas outra proposta de solução. Ou seja, o plano para a resolução sugerido foi multiplicar o número de camisas pelo número de bermudas.

Cabe ressaltar que, o Princípio Fundamental da Contagem utilizado no cálculo $(3 \times 5 = 15)$ apresenta uma solução que complementa o uso da Metodologia Resolução de Problema.

- Compreensão do Problema: O problema pede a determinação do número de maneiras com que Anderson pode se vestir para ir ao churrasco;
- Elaboração de um Plano: Considerar algumas cores que atendam ao enunciado proposto. Fazer um desenho com os tipos de camisas e bermudas para facilitar a contagem dos tipos de vestimentas formadas. Por fim, formar uma tabela e realizar a contagem das vestimentas formadas.
- Execução do Plano: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento, promoveu-se um debate acerca da primeira solução encontrada.

- (iii) O terceiro envolvendo o Princípio Aditivo: Problema para a determinação da quantidade de números pares que podem ser formados com três algarismos.

Problema 03

Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

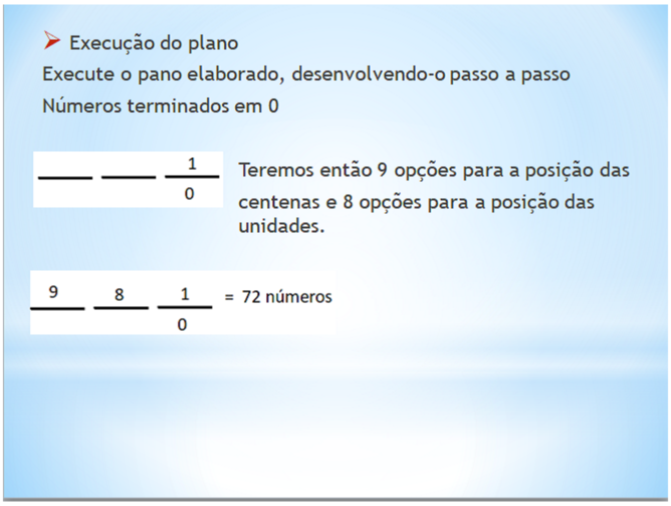
Em relação ao último problema trabalhado neste encontro, os alunos também não apresentaram dificuldades na fase de compreensão do problema proposto. Como no problema anterior, todos conseguiram perceber o que era solicitado no problema, assim como os dados fornecidos por ele.

Na parte da elaboração do plano de resolução, foi sugerido que o problema fosse dividido em duas etapas. A primeira parte consistindo em determinar quantos são os números pares de três algarismos distintos que terminassem com o algarismo zero e a segunda parte buscando determinar quantos são os números pares de três algarismos distintos que não terminam com o algarismo zero.

Neste momento, o pesquisador reforçou o fato de que estas situações seriam excludentes, ou seja, poderiam ser representadas como conjuntos disjuntos e, portanto, não existiria um ponto comum entre as duas situações, pois ou o número terminaria com o algarismo zero ou não terminaria.

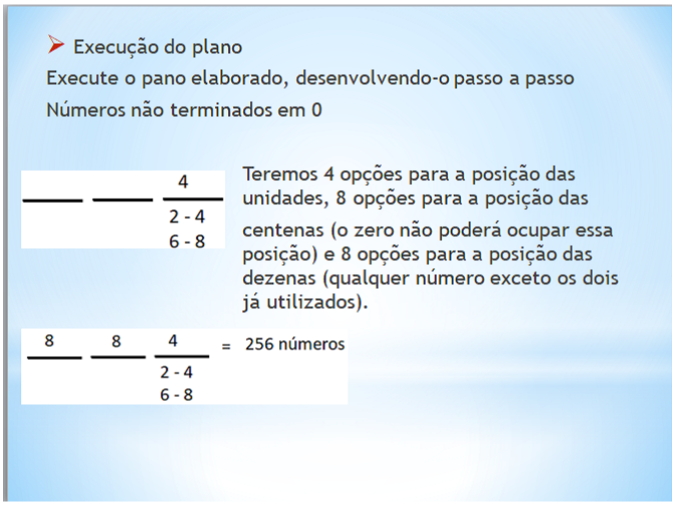
Após a apresentação do plano de resolução sugerido, o mesmo foi posto em prática pelo pesquisador, por meio de indagações genéricas desenvolvidas com os alunos participantes desta pesquisa (Figura 76 e Figura 77):

Figura 76 – Resolução do problema 3 do encontro 01 (parte 01)



Fonte: Autoria própria.

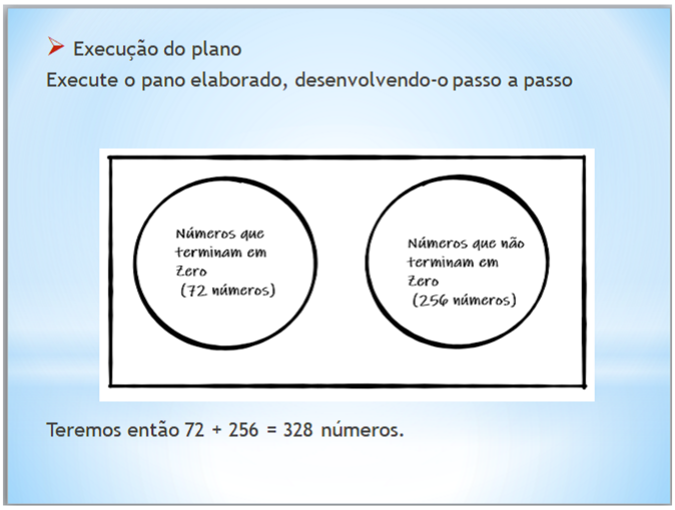
Figura 77 – Resolução do problema 3 do encontro 01 (parte 02)



Fonte: Autoria própria.

Após esse momento, os alunos conseguiram perceber que mesmo que excludentes, essas duas situações contemplavam as condições propostas no enunciado e, portanto, os resultados deveriam ser somados para que se pudesse obter o resultado final para o problema proposto (Figura 78).

Figura 78 – Execução do plano de resolução do problema 3 do encontro 01



Fonte: Autoria própria.

Ao final desta etapa, os alunos foram orientados pelo pesquisador e concordaram com a solução encontrada. Desta vez, não apresentaram outra proposta de solução para o problema proposto.

Em relação ao uso da Metodologia Resolução de Problema tem-se que:

- Compreensão do Problema: O problema solicitava a determinação da quantidade de números pares formados por três algarismos distintos existentes;

- Elaboração de um Plano: Dividir o problema em duas partes: (i) determinar quantos seriam os números pares de três algarismos distintos que terminam com o algarismo zero ou; (ii) determinar quantos seriam os números pares de três algarismos distintos que não terminam com o algarismo zero;

- Execução do Plano de Resolução: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;

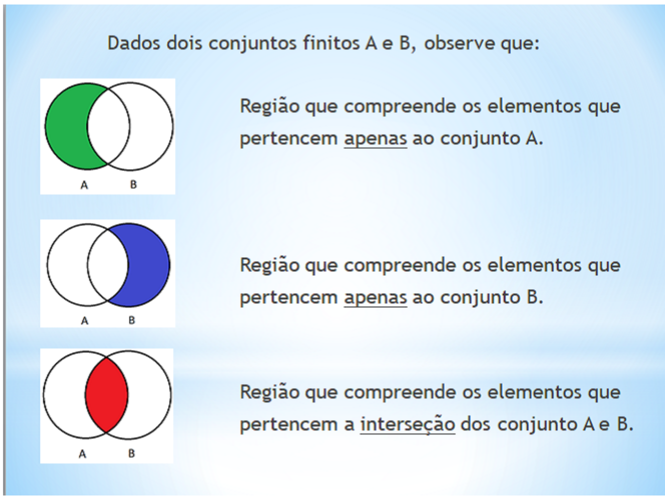
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento promoveu-se um debate acerca da solução apresentada.

Posteriormente, após desenvolvimento de cada exemplo utilizando uma sugestão de resolução, evidenciando a aplicação da Metodologia Resolução de Problemas e, questionado, oralmente, os alunos pelo pesquisador sobre possibilidade de soluções alternativas, foram deduzidos os conceitos matemáticos empregados em cada exemplo e mostrando uma resolução a partir da aplicação destes conceitos.

- Princípio da Inclusão e Exclusão

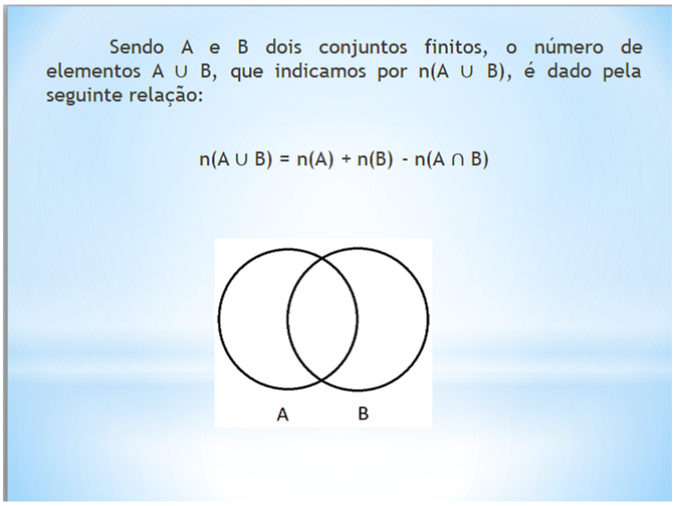
O Princípio da Inclusão e Exclusão, conceito matemático abordado nesta pesquisa, também foi apresentado conceitualmente aos alunos (Figura 79, Figura 80, Figura 81 e Figura 82).

Figura 79 – Principio da Inclusão e Exclusão (parte 01)



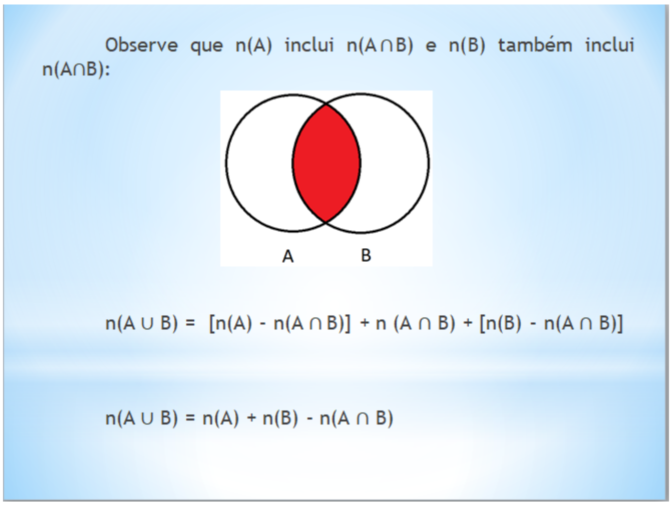
Fonte: Autoria própria.

Figura 80 – Principio da Inclusão e Exclusão (parte 02)



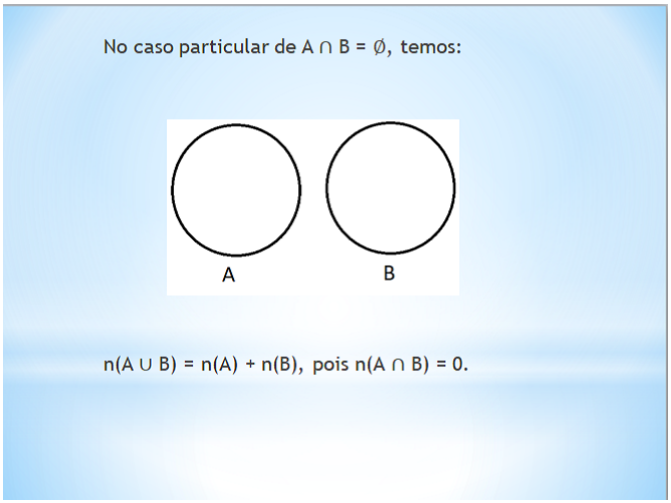
Fonte: Autoria própria.

Figura 81 – Princípio da Inclusão e Exclusão (parte 03)



Fonte: Autoria própria.

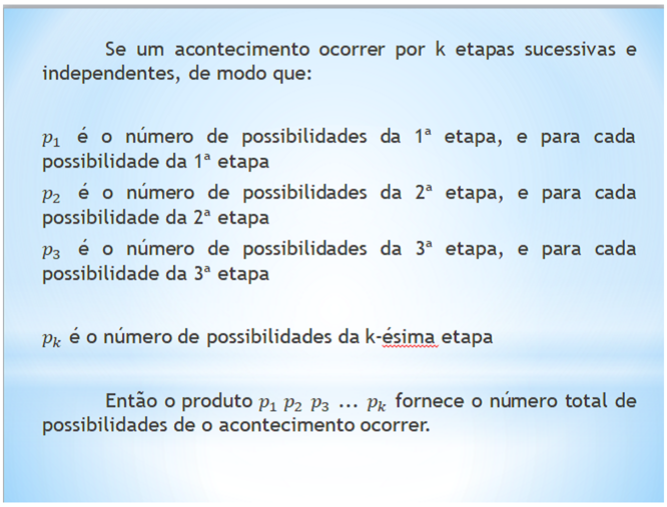
Figura 82 – Princípio da Inclusão e Exclusão (parte 04)



Fonte: Autoria própria.

- Princípio Fundamental da Contagem

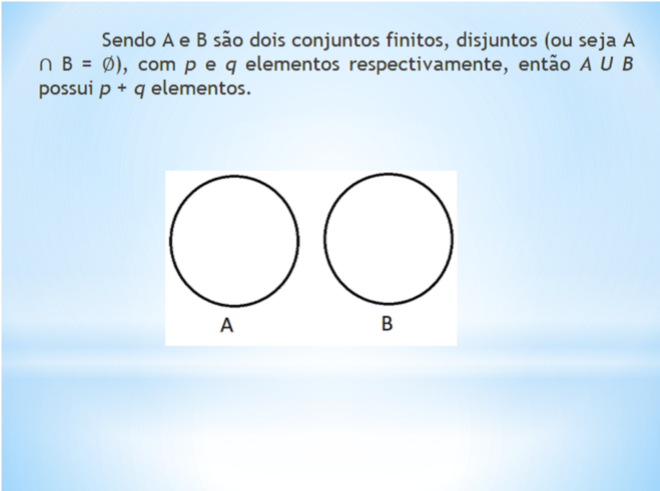
Figura 83 – Princípio Fundamental da Contagem



Fonte: Autoria própria.

- Princípio Aditivo

Figura 84 – Princípio Aditivo



Fonte: Autoria própria.

Então, após o desenvolvimento dos problemas e estudo dos conceitos matemáticos utilizados no encontro 01, esse é finalizado pelo pesquisador, que conclui tal encontro classificando o mesmo como bom aproveitamento para esta pesquisa. E, independentemente das dificuldades apresentadas pelos alunos participantes ao longo do encontro, esse atendeu satisfatoriamente o cronograma elaborado pelo pesquisador.

3.3 Encontro 02

O segundo encontro ocorreu no dia 11 de agosto de 2021, também no contra turno das aulas regulares devido ao mesmo motivo citado anteriormente, no tópico referente ao encontro 01. Como também já mencionado, esse encontro teve duração de 30 minutos e o pesquisador contou, novamente, com a presença de cinco alunos, os mesmos presentes no encontro 01.

Para o início deste encontro, adotou-se pelo mesmo procedimento do encontro anterior, ou seja, o pesquisador criou um *link* no *Google Meet* e enviou para a professora de Matemática regente da turma, que por sua vez, enviou para os alunos por meio do grupo de *WhatsApp*.

Assim como no encontro 01, os problemas a seguir foram criados pelo próprio pesquisador para serem trabalhados com os alunos durante a aula:

- (i) O primeiro envolvendo o Princípio Aditivo: Problema para a determinação da quantidade de números pares que podem ser formados com três algarismos.

Problema 01

Um grupo de amigos deseja formar um grupo do livro, se reunindo semanalmente para discutir suas opiniões a respeito de um livro determinado por eles. Para isso eles escolhem 7 livros, sendo 3 de romance policial, 2 de ficção científica e 2 de suspense. Sabendo que, os livros de mesmo gênero serão lidos em seguida, de quantas formas diferentes esse grupo poderá fazer sua programação de leitura?

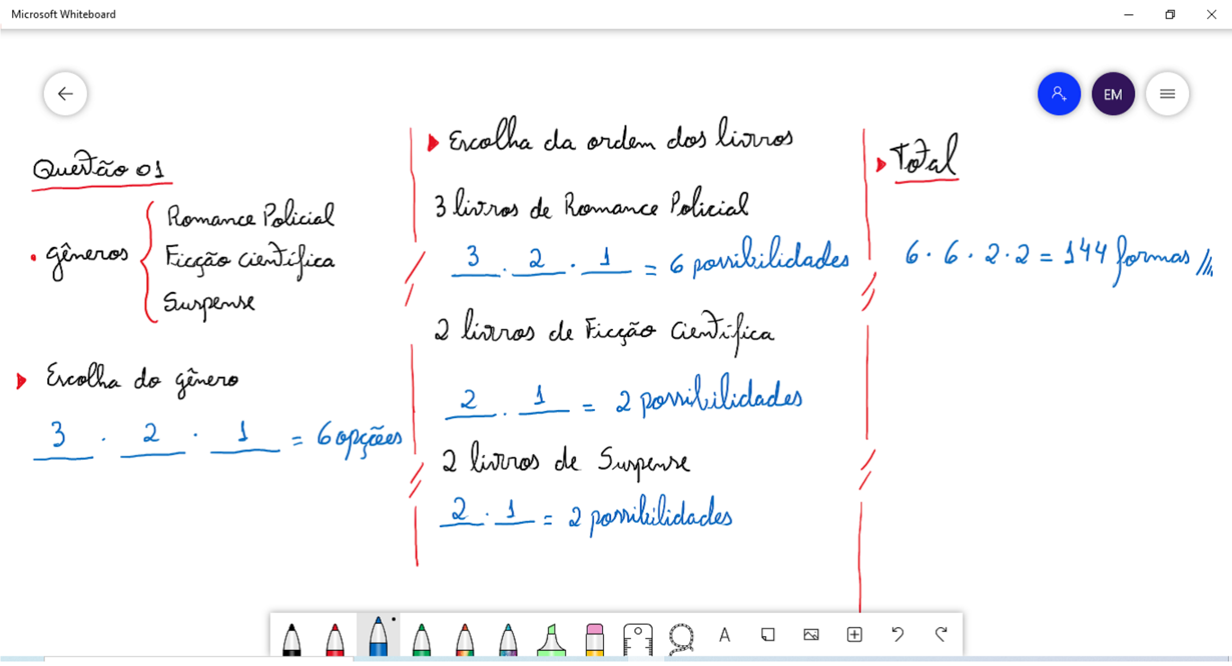
Os alunos participantes desta pesquisa não apresentaram dificuldades na fase de compreensão do problema. Dois alunos (A1 e A2), durante a leitura do referido problema, começaram a elaborar uma possibilidade de solução, essa que coincidia com a solução também pensada pelo pesquisador.

O pesquisador, nesse momento, fez uma pausa na utilização de *slides* e, optou por utilizar o programa *Microsoft Whiteboard* com o auxílio da mesa digitalizadora, para desenvolver o plano de resolução proposto pelos alunos A1 e A2.

Desta maneira, os alunos A1 e A2 sugeriram que, inicialmente, fosse escolhida a ordem dos gêneros literários. Em seguida, que fosse determinada a ordem com que cada grupo de livros poderia ser organizado de acordo com seu respectivo gênero literário. Por fim, para encontrar as formas com que a programação de leitura pudesse ser feita, bastaria multiplicar tais resultados.

A imagem a seguir (Figura 85) ilustra a resolução do problema proposto.

Figura 85 – Resolução do problema 01 do encontro 02 utilizando o aplicativo *Whiteboard*



Fonte: Autoria própria.

Ao serem interrogados oralmente pelo pesquisador sobre a resolução elaborada, os outros três alunos concordaram e não sugeriram outra possibilidade para resolução do problema proposto.

Em relação ao uso da Metodologia Resolução de Problema tem-se que:

- Compreensão do Problema: O problema solicitou a determinação de quantas formas o grupo de leitura poderia montar a programação de leitura dispondo de 3 livros de Romance Policial, 2 livros de Ficção Científica e 2 livros de Suspense, atendendo a condição de que os livros de mesmo gênero literário deveriam ficar sempre juntos;
- Elaboração de um Plano: Escolher, inicialmente, a ordem dos gêneros literários. Em seguida, determinar a ordem com que cada grupo de livros poderia ser organizado de acordo com seu respectivo gênero literário. Por fim, multiplicar esses resultados;
- Execução do Plano de Resolução: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento promoveu-se um debate acerca da solução apresentada.

- (ii) O segundo problema proposto envolveu a ideia de permutar elementos repetidos (algarismos) e formar sequências distintas (senhas).

Problema 02

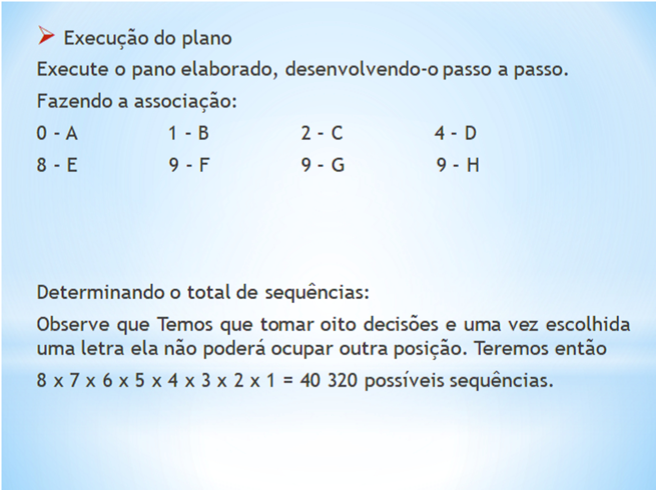
Um rapaz criou uma senha para seu celular, tomando sua data de nascimento, 29/04/1989 e, embaralhando-se, ao acaso, seus dígitos, sem uso das barras. Desse modo, qual o número de possibilidades distintas de senha que ele pode obter?

O aluno chamado A1, que também participou ativamente na construção da solução do problema anterior, neste momento, se pronunciou e afirmou que esse problema seria bem parecido com o anterior, porém esse teria números repetidos.

Também afirmou que, em tal problema poderia ser aplicada a fórmula da Permutação com Repetição. Porém, esse mesmo aluno, A1, alegou que não conseguiria resolver o problema, pois ele não se lembrava da fórmula para Permutação com Repetição.

Neste momento, por meio de indagações genéricas orais, o pesquisador interrogou o aluno A1 e os demais participantes da pesquisa sobre a real necessidade da aplicação de fórmulas, uma vez que, o problema proposto poderia ser solucionado por meio de um raciocínio matemático lógico (Figura 86).

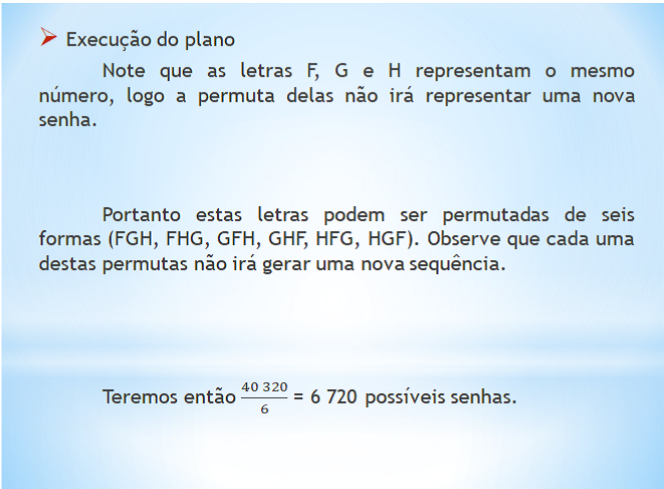
Figura 86 – Execução do plano de resolução do problema 02 do encontro 02 (parte 01)



Fonte: Autoria própria.

Com isso, o pesquisador retornou para os *slides* elaborados previamente e, utilizando a Metodologia Resolução de Problemas, apresentou a seguinte sugestão de resolução: Fazer uma associação de cada número a uma letra do nosso alfabeto. Em seguida, determinar o número de sequências obtidas com a permuta das letras. Observar que, como três dessas letras representam o mesmo número. Então, o resultado total de sequências deverá ser dividido pelo total de vezes com que se podem permutar as letras que representam o mesmo número (Figura 87).

Figura 87 – Execução do plano de resolução do problema 02 do encontro 02 (parte 02)



Fonte: Autoria própria.

Após tal momento, os alunos indicaram terem compreendido essa resolução para o problema proposto e disseram preferir pensar dessa forma a utilizar a fórmula para Permutação com Repetição, pois poderia acontecer de, no momento que precisassem utilizá-la, não se lembrarem da mesma.

Em relação ao uso da Metodologia Resolução de Problema tem-se que:

- Compreensão do Problema: O problema pede para determinar o número de possibilidades de permutar os dígitos referentes a data de aniversário 29/04/1989 com intuído de gerar novas senhas;
- Elaboração de um Plano: Fazer uma associação com cada número e uma letra do nosso alfabeto. Em seguida, determinar o número de sequências obtidas com a permuta das letras. Observar que, como três destas letras representam o mesmo número, então o resultado total de sequências deverá ser dividido pelo total de vezes com que se podem permutar essas letras que representam o mesmo número;
- Execução do Plano de Resolução: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento, promoveu-se um debate acerca da solução apresentada.

- (iii) O terceiro problema elaborado pelo pesquisador envolveu a ideia de permutar elementos repetidos (letras) e formar sequências distintas (anagramas).

<u>Problema 03</u>

Quantos são os anagramas da palavra CONCURSO?

Neste problema, todos os alunos alegaram conhecer o que é um anagrama e indicaram que tal solução seguiria o mesmo modelo do problema anterior, pois os problemas eram parecidos, o que os diferenciava é o fato de que, um problema utiliza números e o outro, letras.

Como foi no exemplo anterior, os alunos começaram a planejar a solução dele. Neste momento, o pesquisador, novamente, abandonou a projeção dos *slides* elaborados previamente e, pediu para que algum aluno discursasse a respeito da proposta de solução. O aluno chamado A3 se prontificou para apontar um plano de resolução para tal problema.

Uma vez determinado o plano de resolução, o pesquisador pediu para que o aluno A3 aplicasse tal plano e enviasse a foto para que os colegas pudessem analisar a resolução encontrada. Porém, o aluno indicou problemas na câmera e, apenas, apontou a câmera do celular para a resolução encontrada por ele.

O plano de resolução sugerido pelo aluno A3 era de, inicialmente, determinar de quantas formas era possível permutar as oito letras da palavra concurso. Em seguida, determinar de quantas maneiras seria possível permutar dois elementos referentes as letras C e determinar de quantas maneiras seria possível permutar dois elementos referentes as letras O. Por fim, dividir número total de permutações de oito elementos pelas permutações de dois elementos, essas referentes as letras repetidas.

Neste momento, o pesquisador adotou a mesma postura do exemplo anterior, pausou a projeção dos *slides* e pediu para que o aluno A3 conduzisse a resolução deste problema, explicando sua solução para os demais colegas presentes no encontro síncrono.

É valido ressaltar que, o aluno A1 sugeriu outra solução que contemplaria a aplicação direta da fórmula da Permutação com Repetição, a fim de ganhar mais tempo na resolução e economizar mais espaço da folha do caderno. Neste momento, o pesquisador pediu para que o aluno, A1, mostrasse sua resolução para os demais colegas de turma. Seguindo o passo do aluno A3 no exemplo anterior, esse também apontou a câmera do celular mostrando sua resolução.

Desta forma, o pesquisador concluiu que, ambas resoluções para tal problema estavam corretas.

Em relação ao uso da Metodologia Resolução de Problema tem-se que:

- Compreensão do Problema: O problema pede para determinar o número de anagramas da palavra CONCURSO;
- Elaboração de um Plano: Determinar de quantas formas era possível permutar as oito letras da palavra concurso. Em seguida, determinar de quantas maneiras seria possível permutar dois elementos referentes as letras C e determinar de quantas maneiras seria possível permutar dois elementos referentes as letras O. Por fim, dividir número total de permutações de oito elementos pelas permutações de dois elementos, referentes as letras repetidas;
- Execução do Plano: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento, promoveu-se um debate acerca da solução apresentada.

- (iv) O quarto problema envolveu a ideia de permutar elementos em círculo formando sequências distintas (possibilidades de círculos distintos).

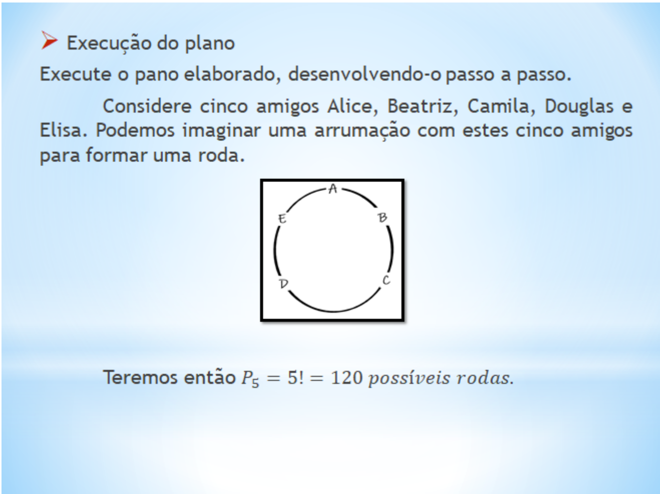
Problema 04

Cantigas de roda, também conhecidas como ciranda, são músicas folclóricas cantadas em uma roda. Suponha que, cinco crianças estejam cantando e brincando de ciranda. Quantas rodas distintas são possíveis formar?

Após a leitura deste problema, o aluno A1 sugeriu que o problema poderia ser resolvido a partir da permutação simples de cinco elementos. Neste momento, o pesquisador desenvolveu com ele a resolução do problema.

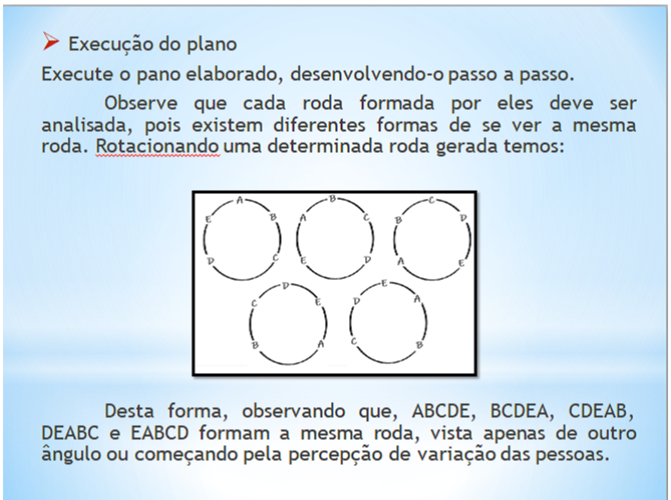
Assim, ao determinar o número de possibilidades para permutar cinco elementos seguindo o modelo proposto pelo aluno A1, o pesquisador sugeriu que fossem consideradas cinco pessoas: Alice, Beatriz, Camila, Douglas e Elisa. Em seguida, por meio de indagações genéricas feitas oralmente pelo pesquisador foi determinada a quantidade de formas com que esses amigos poderiam ser organizados em fila, obtendo-se assim 120 possibilidades. Supondo que, ao serem organizadas em filas, tais pessoas dessem as mãos formando uma roda, seriam possíveis 120 rodas. Considerando uma pessoa de fora da roda, ao analisar as possíveis rodas, esta pessoa ao ver que as rodas: $ABCDE$, $BCDEA$, $CDEAB$, $DEABC$ e $EABCD$, poderia até pensar que fossem rodas distintas, mas, logo iria perceber que elas, na verdade, constituem a mesma roda, porém, vista de cinco maneiras diferentes, ou seja, rotacionada. Portanto, ao formar uma roda devem-se desconsiderar cinco possibilidades (Figura 88, Figura 89 e Figura 90).

Figura 88 – Execução do plano de resolução do problema 04 do encontro 02 (parte 01)



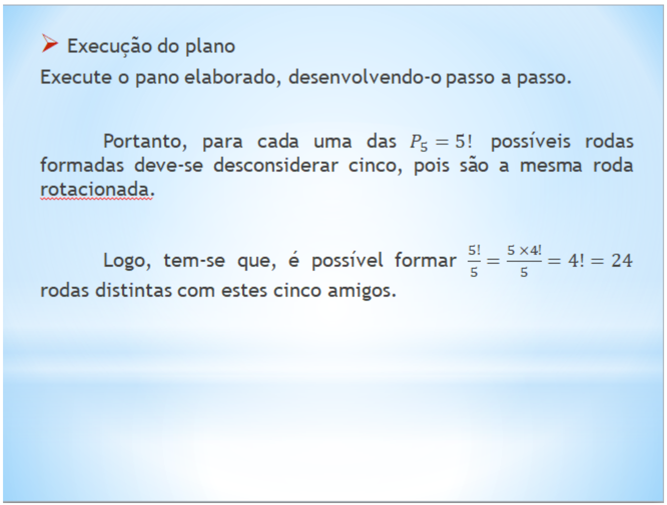
Fonte: Autoria própria.

Figura 89 – Execução do plano de resolução do problema 04 do encontro 02 (parte 02)



Fonte: Autoria própria.

Figura 90 – Execução do plano de resolução do problema 04 do encontro 02 (parte 03)



Fonte: Autoria própria.

Em relação ao uso da Metodologia Resolução de Problema tem-se que:

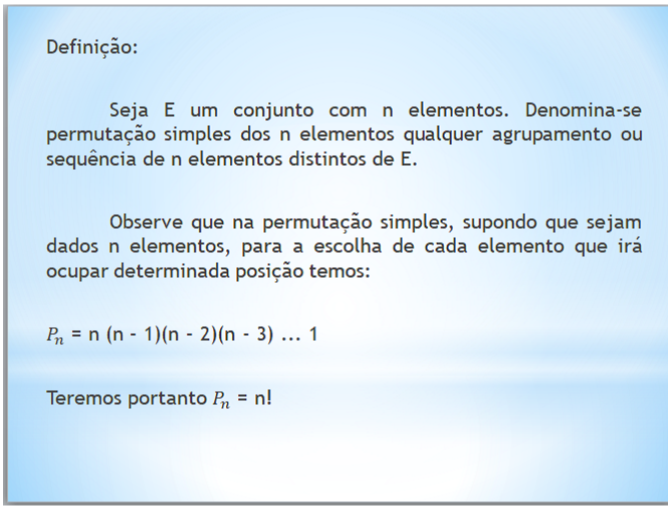
- Compreensão do Problema: O problema pede para determinar o número de diferentes rodas formadas com cinco amigos;
- Elaboração de um Plano: Pensando, inicialmente, em formar uma sequência com os amigos para montar uma roda, determinar de quantas formas pode-se permutar cinco elementos. Em seguida, analisar que cada roda gerada com uma sequência pode ser rotacionada induzindo o erro de contagem, pois essa mesma roda seria vista de cinco formas diferentes. Por fim, dividir o total de sequências geradas pelos cinco amigos pelo número de possíveis rotações de cada roda;
- Execução do Plano de Resolução: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento, promoveu-se um debate acerca da solução apresentada.

Por fim, como feito no encontro anterior, após a conclusão da solução de cada problema proposto, foram deduzidos com os alunos participantes desta pesquisa os conceitos matemáticos empregados em cada exemplo.

- Permutações Simples

Buscando finalizar o encontro 02 desta pesquisa, conforme feito no encontro 01, o pesquisador também finaliza tal encontro apresentando conceitos e definições matemáticas utilizados no mesmo (Figura 91, Figura 92 e Figura 93).

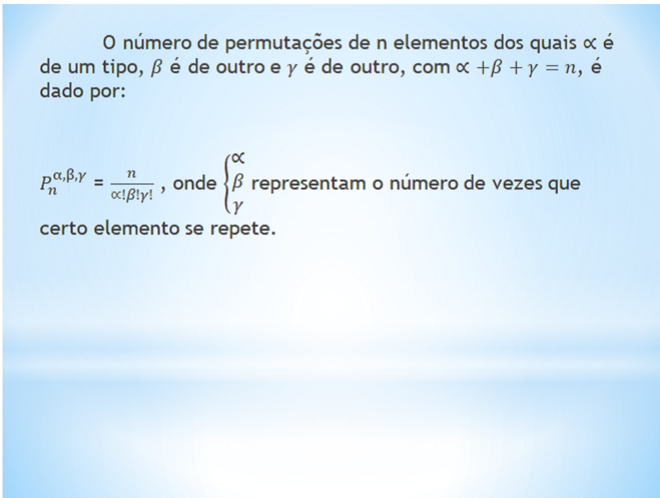
Figura 91 – Permutação Simples



Fonte: Autoria própria.

- Permutações com Repetições

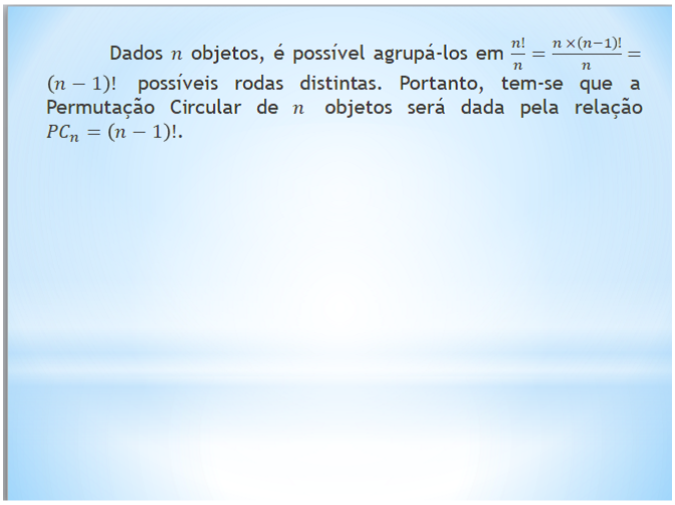
Figura 92 – Permutação com Repetição



Fonte: Autoria própria.

- Permutações Circulares

Figura 93 – Permutação Circular



Fonte: Autoria própria.

Cabe ressaltar que, logo após a dedução da relação de Permutação com Repetição (momento anterior à apresentação da resolução do problema utilizando a relação matemática), o aluno A1, o que sugeriu o uso da fórmula para a resolução do problema 02 concluiu que, sua sugestão para a resolução nada mais era do a própria fórmula utilizada para resolver a Permutação com Repetição.

3.4 Encontro 03

O terceiro encontro ocorreu no dia 13 de agosto de 2021, também no contra turno devido ao mesmo motivo supracitado anteriormente. Como já mencionado, tal encontro teve duração de 30 minutos e o pesquisador contou, novamente, com a presença de cinco alunos, os mesmos presentes nos dois encontros anteriores.

Como nos encontros anteriores, o pesquisador criou um *link* no *Google Meet* e enviou para a professora que, por sua vez, enviou para os alunos por meio do grupo de *WhatsApp*.

A aula do encontro 03 foi conduzida seguindo os mesmos parâmetros das aulas anteriores, sendo apresentados dois problemas, um referente ao conteúdo de Arranjo Simples e outro referente a Combinação Simples. Esses problemas foram solucionados utilizando-se a Metodologia Resolução de Problemas e, posterior a cada solução, foram definidos os conceitos Matemáticos propostos neste encontro.

Os problemas a seguir foram os escolhidos para serem trabalhados com os alunos durante o encontro 03:

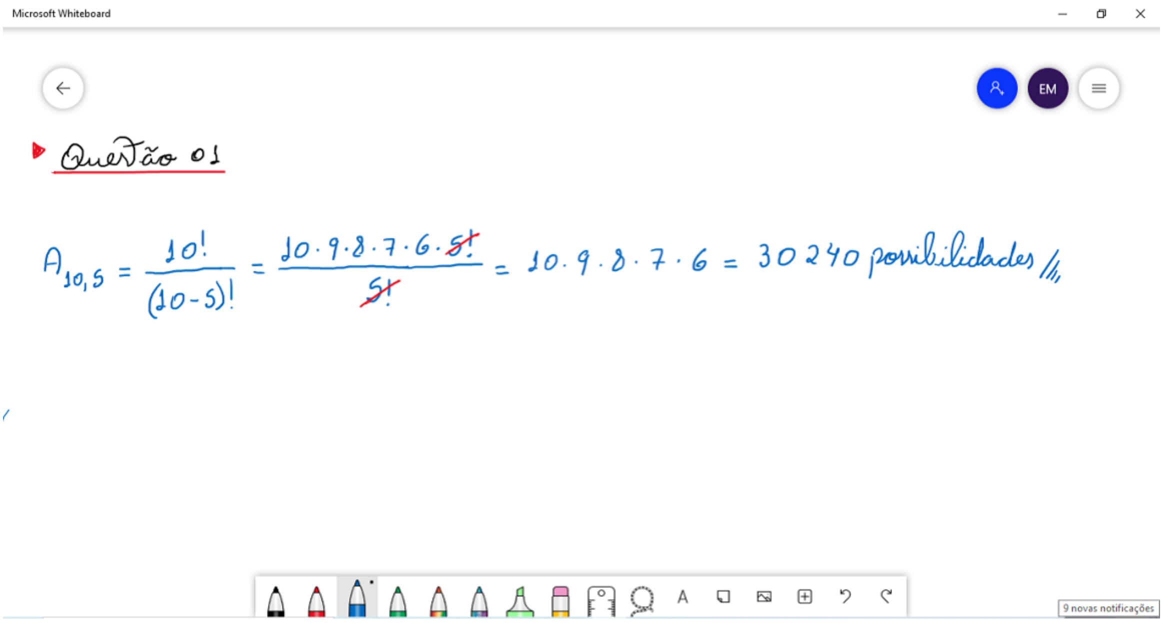
- (i) O primeiro problema envolvendo a ideia de formar diferentes sequência para alocar cinco elementos em dez possíveis lugares.

Problema 01

Cinco amigos foram ao cinema assistir ao filme Vingadores: Guerra infinita. Como escolheram uma sessão no início da tarde, o cinema estava vazio. Com isso, eles tiveram facilidade na hora de escolherem os assentos, uma vez que, decidiram que iriam se sentar numa mesma fileira. Sabendo que, a fileira que eles escolheram possuía 10 lugares, de quantas formas distintas os assentos podem ser ocupados por estes amigos?

Após a leitura do problema, os alunos participantes apontaram que ele seria um problema de Arranjo Simples e, como plano para resolução do problema proposto, utilizaram a aplicação da fórmula. Ao serem questionados oralmente pelo pesquisador a respeito do plano de resolução, o aluno A1 justificou dizendo que "É uma escolha de cinco posições, dispondo de dez possibilidades, sendo que a ordem importa". (Figura 94)

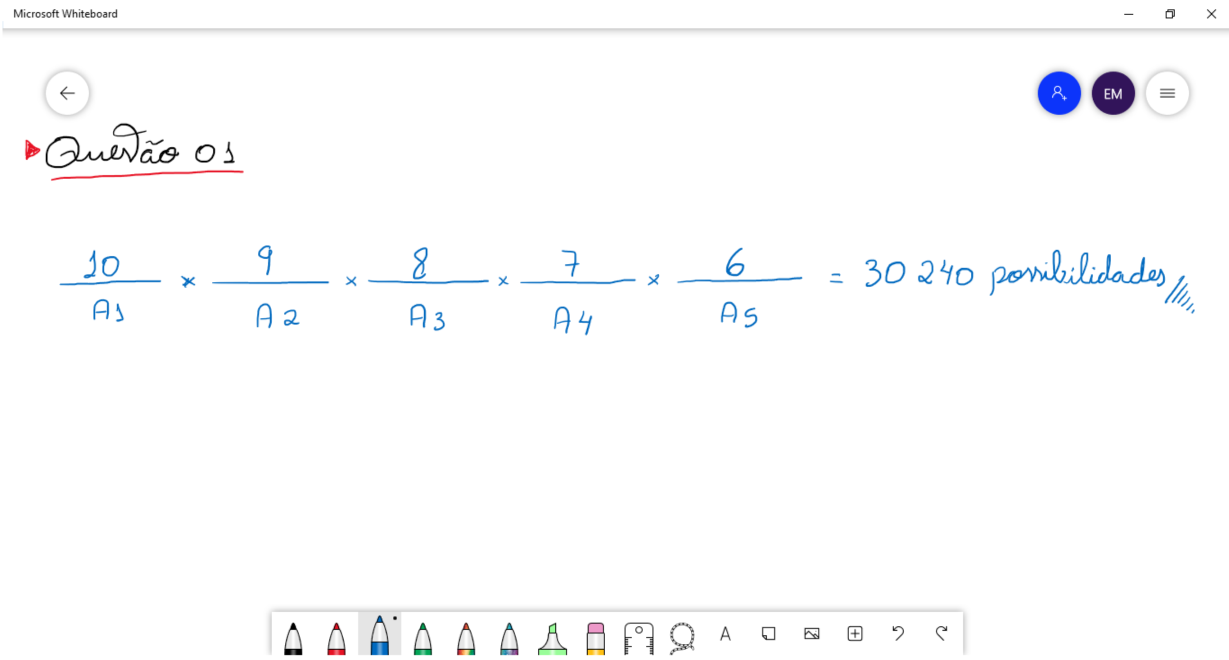
Figura 94 – Primeira resolução do problema 01 do encontro 03 com o aplicativo *Whiteboard*



Fonte: Autoria própria.

Após o desenvolvimento da resolução proposta pelo aluno A1, o pesquisador sugeriu outra forma de se pensar em tal problema. O novo plano de resolução proposto seria utilizar o Princípio Fundamental da Contagem e analisar as decisões tomadas por cada um dos cinco amigos (Figura 95).

Figura 95 – Segunda resolução do problema 01 do encontro 03 com o aplicativo *Whiteboard*



Fonte: Autoria própria.

Após o desenvolvimento da desta resolução, os alunos conseguiram identificar a semelhança com a resolução proposta pelo aluno A1. Eles apontaram que, após a simplificação do 5!, ou seja, o produto 10×9×8×7×6 indicaria o uso do Princípio Fundamental da Contagem aplicado o número de decisões que os amigos teriam que determinar.

O pesquisador então interrogou a turma sobre qual método seria mais indicado no problema proposto. A turma apresentou as seguintes respostas:

- A1: “Eu utilizaria a fórmula de Arranjo Simples”;
- A2: “Eu acredito que seria o uso do P.F.C.”;
- A3: “Tanto faz”;
- A4: “Não sei, o que lembrasse primeiro”;
- A5: “Eu utilizaria o P.F.C., pois acredito que teria dificuldade de lembrar a fórmula na hora”.

Em relação ao uso da Metodologia Resolução de Problema tem-se que:

- Compreensão do Problema: O problema pede para determinar o número de possibilidades que cinco amigos podem se sentar numa fileira com dez lugares;
- Elaboração de um Plano: Utilizar o Princípio Fundamental da Contagem e analisar as decisões que os cinco amigos irão tomar;
- Execução do Plano de resolução: Aplicou-se o plano desenvolvido na etapa anterior;
- Retrospecto ou Verificação: Nesse momento, promoveu-se um debate acerca da solução apresentada.

- (ii) O segundo problema proposto envolveu a ideia para escolher um grupo de três elementos dispondo de oito elementos.

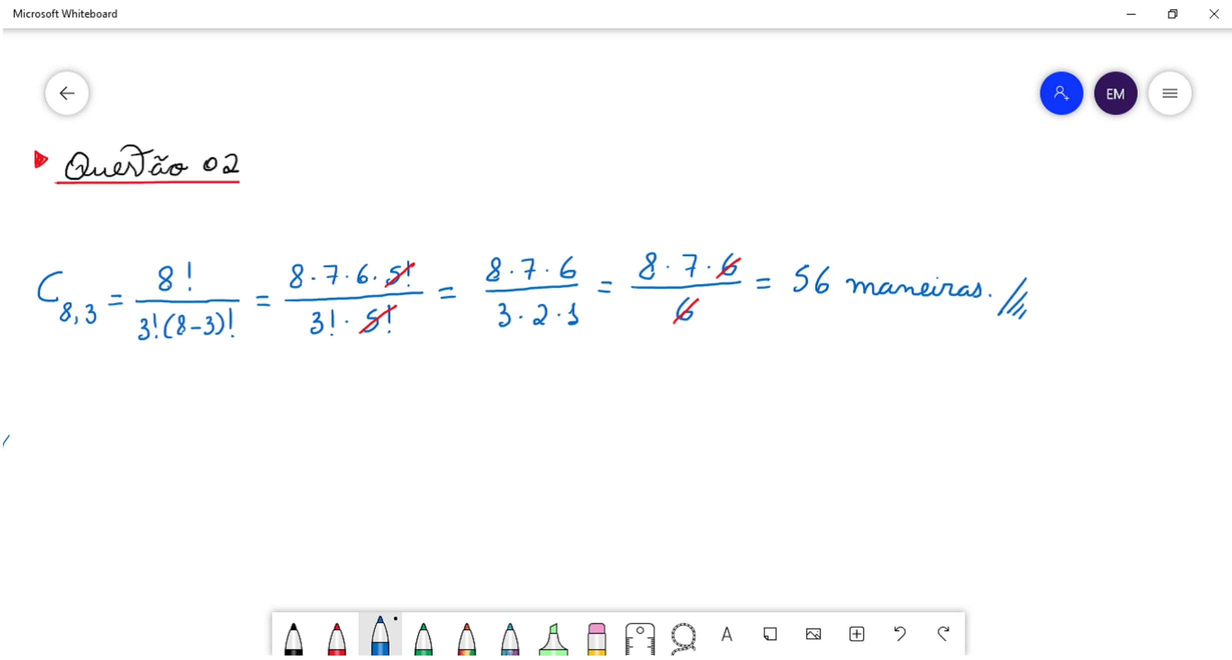
Problema 02

Um grupo de pesquisadores está testando em humanos uma nova vacina contra um determinado tipo de vírus. Devem-se escolher três pessoas de um grupo com total de oito voluntários para tomarem a vacina e o restante tomar placebo. Nenhum dos voluntários saberá qual tomou vacina e qual tomou placebo. Em seguida, os pesquisadores irão avaliar as consequências da vacina no grupo. De quantas maneiras os pesquisadores podem realizar essa escolha?

Durante a leitura deste problema, o aluno A1 apontou que ele consistia em um problema de Combinação Simples e ao ser interrogado sobre a afirmação, ele alegou que como os pesquisadores iriam escolher três pessoas para tomar a vacina, a ordem não seria importante, uma vez que, os três seriam vacinados.

No decorrer do planejamento da resolução, o aluno A1 sugeriu o uso da fórmula de Combinação Simples conforme apresentado (Figura 96).

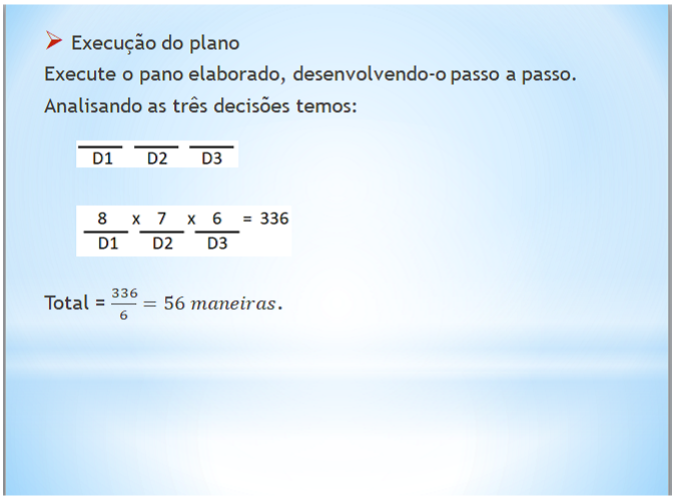
Figura 96 – Resolução do problema 02 do encontro 03 com o aplicativo *Microsoft Whiteboard*



Fonte: Autoria própria.

Posterior ao desenvolvimento da resolução proposta pelo aluno A1, o pesquisador sugeriu outra forma de se pensar no mesmo problema. O novo plano de resolução proposto seria utilizar o Princípio Fundamental da Contagem e determinar o número de maneiras para escolher três elementos em um total de oito elementos. Em seguida, analisar cada trio escolhido, pois deve-se ter em mente que, não existe prioridade de posição na escolha dos três elementos (voluntários). Por exemplo, uma vez formado um trio, suponha o trio ABC, tem-se 6 formas distintas de analisar o mesmo trio: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Deve-se então, dividir o total de formas de efetuar a escolha de três pessoas pelo fatorial de decisões (Três decisões, a escolha de cada voluntário) (Figura 97)

Figura 97 – Execução do plano de resolução do problema 02 do encontro 03

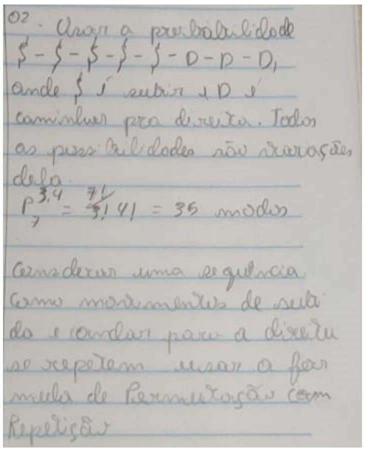


Fonte: Autoria própria.

Como feito nos encontros anteriores, após a conclusão da resolução de cada problema proposto, foram conjecturados os conceitos matemáticos empregados nos exemplos utilizados (Figura 98 e Figura 99).

- Arranjo Simples

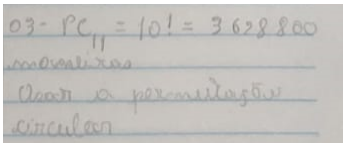
Figura 98 – Arranjo Simples



Fonte: Autoria própria.

- Combinação Simples

Figura 99 – Combinação Simples

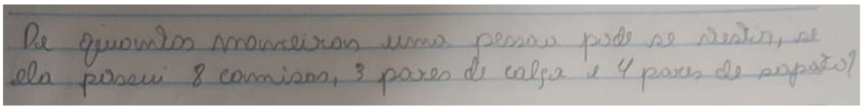


Fonte: Autoria própria.

Após a formalização da relação de Combinação Simples, o pesquisador propôs aos participantes desta pesquisa seguinte atividade: Os cinco alunos presentes deveriam formar uma dupla e um trio, e cada grupo iria criar um problema de Contagem para que o outro grupo pudesse resolver, de acordo com a Metodologia Resolução de Problemas.

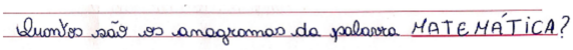
Desta forma, esta pesquisa apresenta os dois problemas criados por seus alunos participantes. Assim, os problemas criados foram (Figura 100 e Figura 101):

Figura 100 – Problema proposto pela dupla



Fonte: Autoria própria.

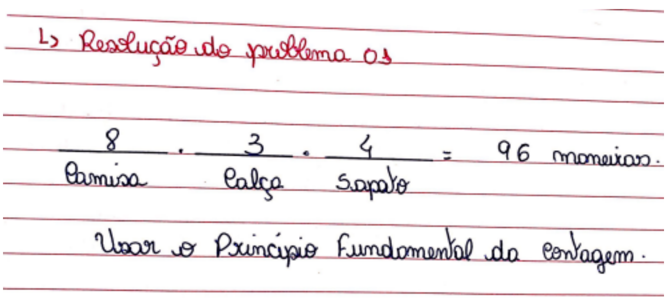
Figura 101 – Problema proposto pelo trio



Fonte: Autoria própria.

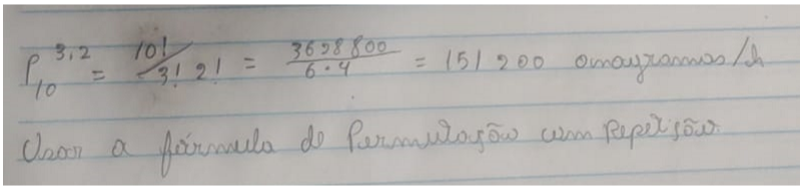
Em seguida, o outro grupo participante desta pesquisa deveria resolvê-lo, utilizando as etapas da Metodologia Resolução de Problemas. Seguem as fotos das resoluções dos respectivos problemas trocados entre os participantes da pesquisa (Figura 102 e Figura 103):

Figura 102 – Resolução do trio para o problema proposto pela dupla



Fonte: Autoria própria.

Figura 103 – Resolução da dupla para o problema proposto pelo trio



Fonte: Autoria própria.

E assim, o terceiro e último encontro desta pesquisa é finalizado.

3.5 Avaliação da Aprendizagem

De acordo com o Cronograma apresentado no Quadro 10, ao final de cada encontro foi enviado pelo pesquisador um *link* do *Google Forms* que continha uma Lista de Problemas que visava avaliar o que foi aprendido acerca do uso da Metodologia Resolução de Problemas em questões de Contagem. A primeira lista foi composta por duas questões; a segunda lista por três questões e a terceira e última lista possuía duas questões. Ao final dos três encontros foi pedido para que os alunos divididos em grupos, um trio e uma dupla, desenvolvessem uma questão utilizando o conteúdo Métodos de Contagem para que o outro grupo pudesse responder a mesma.

Tais avaliações tiveram como proposito complementar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos participantes desta pesquisa, ocorrendo durante todo o processo de experimentação da Proposta Didática em relação ao conteúdo pesquisado.

Conformo dito anteriormente, os encontros aconteceram por meio do *Google Meet*, a partir de um *link* criado pelo pesquisador e, disponibilizado com o auxílio da professora de Matemática regente da turma, por meio de um grupo de *WhatsApp*.

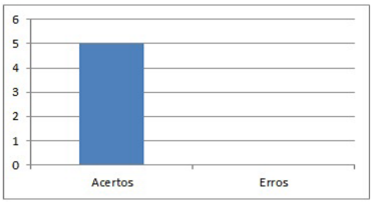
Sendo assim, ao final de cada encontro foi enviado um *link* do *Google Form* que direcionava os alunos para um formulário que continha os problemas avaliativos referentes a cada um dos encontros. Esses problemas deveriam ser respondidos por meio do envio das fotos referentes as respectivas resoluções e, em seguida, o plano de resolução deveria ser descrito e enviado também.

Os resultados obtidos nessas atividades avaliativas são analisados a seguir:

- Indicação de acertos na primeira lista

Questão 01: Em uma universidade, no curso de Engenharia, 70 alunos se inscreveram para cursar as disciplinas de Cálculo I e Álgebra Linear. Desses alunos, 40 matricularam-se na disciplina de Cálculo I e, 33 na disciplina de Álgebra Linear. Qual é o número de alunos matriculados, simultaneamente nas duas disciplinas?

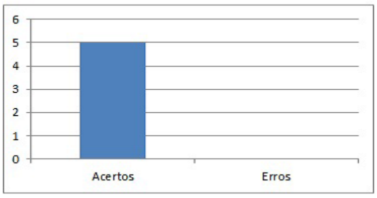
Figura 104 – Indicação de acertos referente a primeira questão do formulário 01



Fonte: Autoria própria.

Questão 02: Uma lanchonete vende um hambúrguer a escolha do cliente, oferecendo sete tipos de pães: pão americano, pão italiano, brioche, pão australiano, pão de azeite, pão de cebola e ciabatta, quatro opções de carne, os blends de acém, costela, fraldinha e peito de frango e seis tipos diferentes de molho, barbecue, maionese caseira, molho de alho, mostarda e mel, rosé especial e tártaro. Para montar um hambúrguer, o cliente deve escolher um tipo de pão, um tipo de carne (blend) e um tipo de molho. Qual é o número de possibilidades de compor um hambúrguer?

Figura 105 – Indicação de acertos referente a segunda questão do formulário 01

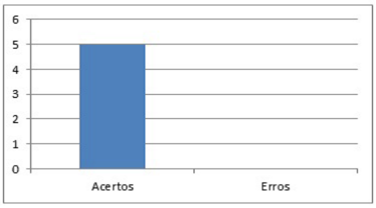


Fonte: Autoria própria.

- Indicação de acertos na segunda lista

Questão 01: Marcela deseja passar para o curso de Medicina numa universidade pública. Para isso ela montou um cronograma de estudos que pretende seguir de segunda a sexta. I. Estudar Física das 7h às 8h; II. Estudar Química das 8h às 9h; III. Estudar Biologia das 9h às 10h; IV. Estudar Matemática 10h às 11h; V. Estudar História das 11h às 12h; VI. Estudar Geografia das 14h às 15h;VII. Estudar Português das 15h às 16h;VIII. Estudar Redação das 16h às 17h. Cansada de estudar sempre nessa mesma ordem, ela resolveu que, a cada dia, vai utilizar uma ordem diferente para organizar as disciplinas. Qual é o número de maneiras possíveis dela realizar essas atividades em ordem diferente?

Figura 106 – Indicação de acertos referente a primeira questão do formulário 02



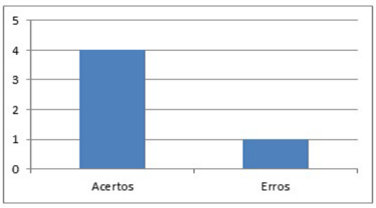
Fonte: Autoria própria.

Questão 02: Uma plataforma desenvolvida para motoristas de aplicativo oferece a visualização de um mapa com ruas verticais e horizontais que visam facilitar o deslocamento do veículo. Analisando o mapa abaixo, quantos são os possíveis caminhos que um motorista pode tomar para chegar ao ponto em que o passageiro se encontra?

Figura 107 – Mapa referente à questão 02 da segunda lista

Fonte: Autoria própria.

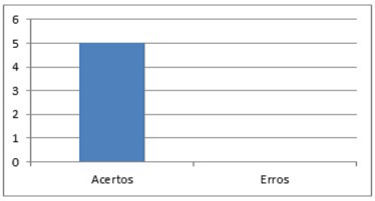
Figura 108 – Indicação de acertos referente à segunda questão do formulário 02



Fonte: Autoria própria.

Questão 03: O livro O Rei Arthur e os Cavaleiros da Távola Redonda narra à história de homens premiados com a mais alta ordem da cavalaria, na corte do Rei Arthur. A Távola era uma mesa na qual eles se reuniam, e ela seria redonda para que não houvesse cabeceira, representando assim a igualdade de todos os seus membros. A história contada por esse livro é uma lenda bem conhecida, e em suas diferentes versões o número de cavaleiros costuma variar. De quantas maneiras distintas, 11 cavalheiros poderiam se sentar ao redor desta mesa?

Figura 109 – Indicação de acertos referente à terceira questão do formulário 02

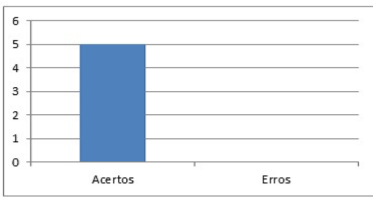


Fonte: Autoria própria.

- Indicação de acertos na terceira lista

Questão 01: A Fórmula 1 é a modalidade do automobilismo (competição de automóveis) mais popular no mundo. Cada grande prêmio é disputado por vinte pilotos e o pódio é formado pelos três primeiros pilotos a terminarem a corrida. Suponha que todos os pilotos tenham conseguido terminar um grande prêmio, de quantas formas podemos formar o pódio?

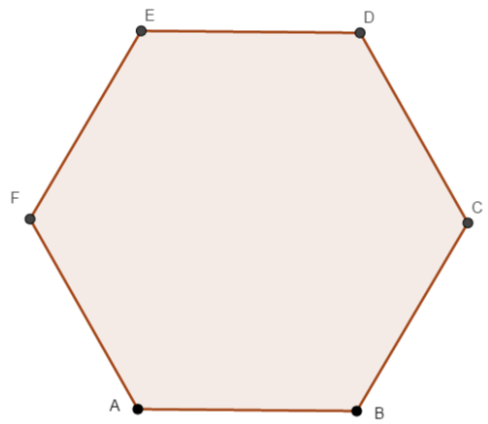
Figura 110 – Indicação de acertos referente a primeira questão do formulário 03



Fonte: Autoria própria.

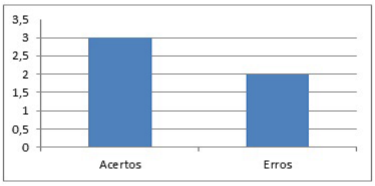
Questão 02: Considere o hexágono regular abaixo. Quantos triângulos podemos formar a partir de seus vértices?

Figura 111 – Hexágono regular referente à questão 02 da terceira lista



Fonte: Autoria própria.

Figura 112 – Indicação de acertos referente à terceira questão do formulário 03

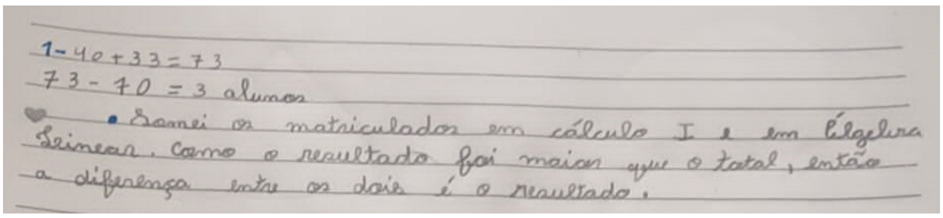


Fonte: Autoria própria.

Resolução do Formulário 01

A1

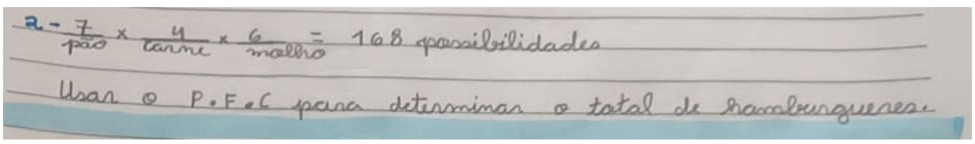
Figura 113 – Resolução do aluno A1 para a questão 01 do formulário 1



1- 40+33=73
73-70=3 alunos
• Somei os matriculados em cálculo I e em Álgebra Linear. Como o resultado foi maior que o total, então a diferença entre os dois é o resultado.

Fonte: Autoria própria.

Figura 114 – Resolução do aluno A1 para a questão 02 do formulário 1

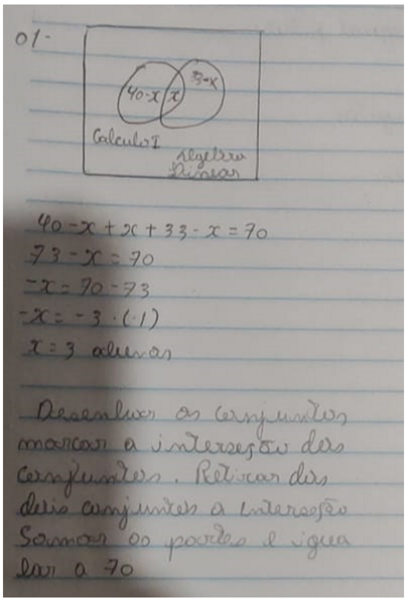


2- $\frac{7}{\text{pão}} \times \frac{4}{\text{carne}} \times \frac{6}{\text{molho}} =$ 168 possibilidades
Usar o P.F.C para determinar o total de hamburgueres.

Fonte: Autoria própria.

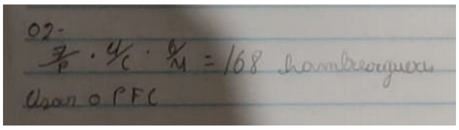
A2

Figura 115 – Resolução do aluno A2 para a questão 01 do formulário 1



Fonte: Autoria própria.

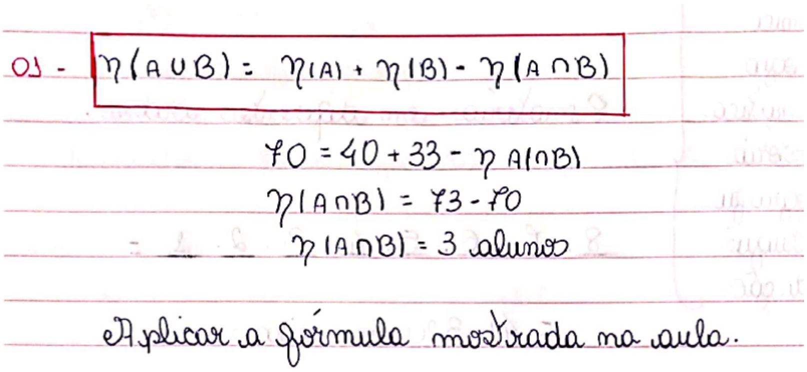
Figura 116 – Resolução do aluno A2 para a questão 02 do formulário 1



Fonte: Autoria própria.

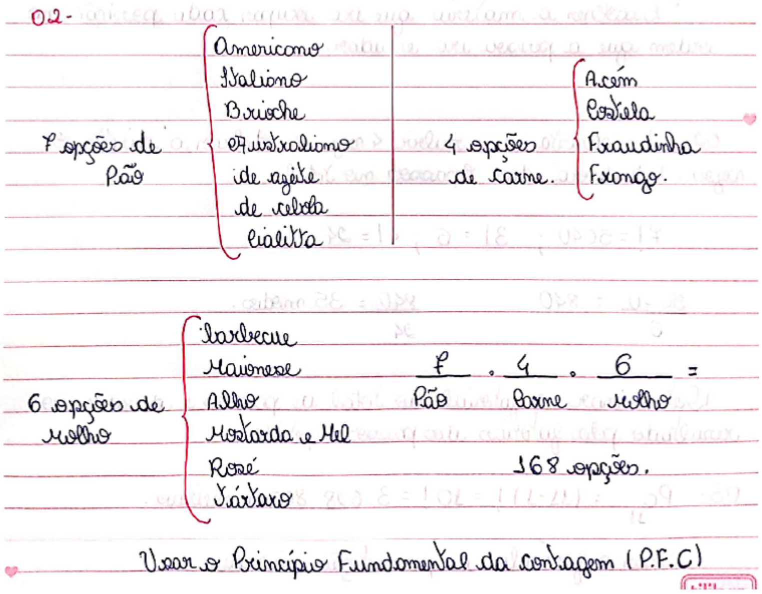
A3

Figura 117 – Resolução do aluno A3 para a questão 01 do formulário 1



Fonte: Autoria própria.

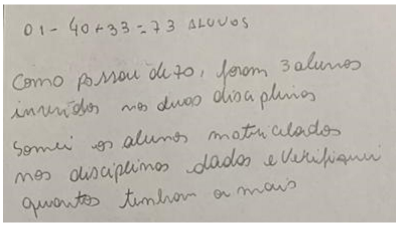
Figura 118 – Resolução do aluno A3 para a questão 02 do formulário 1


02-
7 opções de Pão: Americano, Italiano, Brioche, Australiano, de azeite, de cebola, Ciabatta
4 opções de carne: Acém, Costela, Fraudinha, Frango.
6 opções de molho: Barbecue, Maionese, Alho, Mostarda e Mel, Rosé, Tártaro
7 . 4 . 6 =
Pão Carne Molho
168 opções.
Usar o Princípio Fundamental da contagem (P.F.C)

Fonte: Autoria própria.

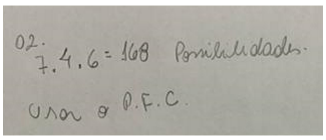
A4

Figura 119 – Resolução do aluno A4 para a questão 01 do formulário 1


01 - 40+33=73 ALUNOS
Como possui de 70, foram 3 alunos inseridos nas duas disciplinas
Somei os alunos matriculados nas disciplinas dados e verifiquei quantos tinham a mais

Fonte: Autoria própria.

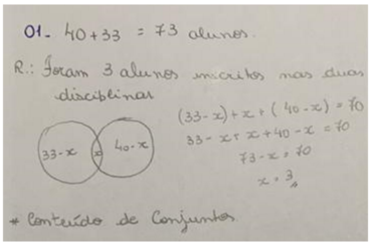
Figura 120 – Resolução do aluno A4 para a questão 02 do formulário 1


02. 7.4.6=168 Possibilidades.
Usar o P.F.C.

Fonte: Autoria própria.

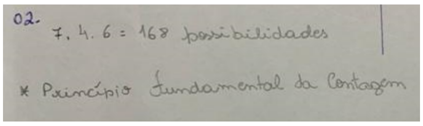
A5

Figura 121 – Resolução do aluno A5 para a questão 01 do formulário 1


01. 40+33 = 73 alunos.
R.: Foram 3 alunos inscritos nas duas disciplinas
(33-x)+x+(40-x) = 70
33-x+x+40-x = 70
73-x = 70
x = 3
33-x
x
40-x
* Conteúdo de Conjuntos

Fonte: Autoria própria.

Figura 122 – Resolução do aluno A5 para a questão 02 do formulário 1

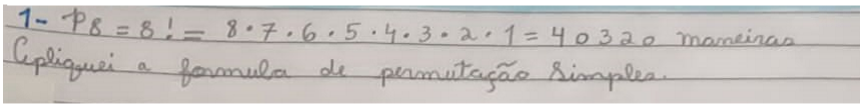

02. 7. 4. 6 = 168 possibilidades
* Princípio Fundamental da Contagem

Fonte: Autoria própria.

Resolução do Formulário 02

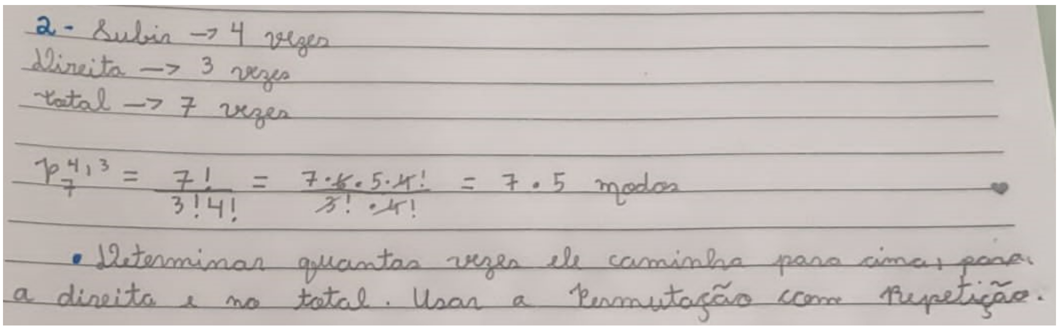
A1

Figura 123 – Resolução do aluno A1 para a questão 01 do formulário 2


1- $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ maneiras
Cpliquei a formula de permutação Simples.

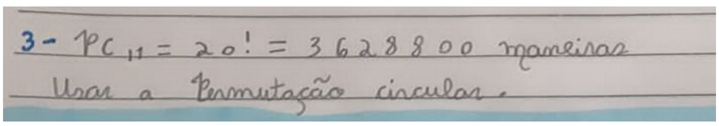
Fonte: Autoria própria.

Figura 124 – Resolução do aluno A1 para a questão 02 do formulário 2


2- Subir → 4 vezes
direita → 3 vezes
total → 7 vezes
$P_7^{4,3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{4!}} = 7 \cdot 5$ modos
• Determinar quantas vezes ele caminha para cima, para a direita e no total. Usar a Permutação com Repetição.

Fonte: Autoria própria.

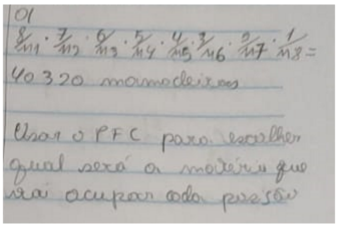
Figura 125 – Resolução do aluno A1 para a questão 03 do formulário 2


3- $PC_{11} = 10! = 3628800$ maneiras
Usar a Permutação circular.

Fonte: Autoria própria.

A2

Figura 126 – Resolução do aluno A2 para a questão 01 do formulário 2

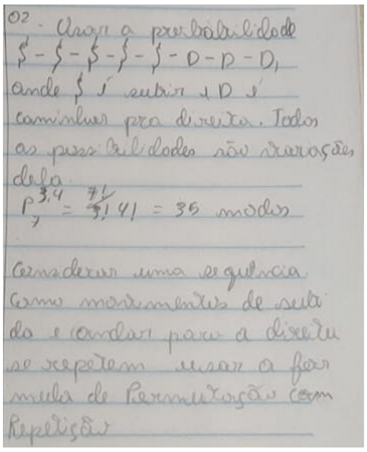


01
$\frac{8}{11} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{18} =$
40 320 maneiras

Usar o PFC para escolher
qual será a cadeira que
vai ocupar cada pessoa

Fonte: Autoria própria.

Figura 127 – Resolução do aluno A2 para a questão 02 do formulário 2

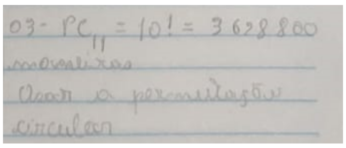


02 - Usar a probabilidade
S - S - S - S - S - D - D - D,
onde S é subir e D é
caminhar pra direita. Todas
as possibilidades são variações
dela.
$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$ modos

Considerar uma sequência
como movimentos de subida
e andar para a direita
se repetem usar a fórmula de Permutação com
Repetição

Fonte: Autoria própria.

Figura 128 – Resolução do aluno A2 para a questão 03 do formulário 2

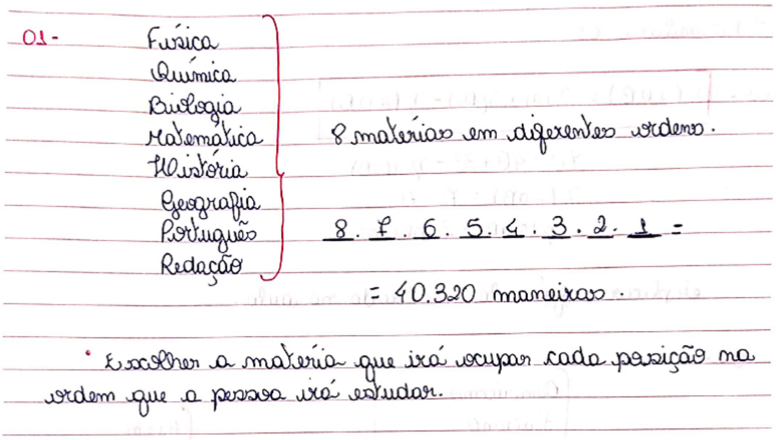


03 - $PC_{11} = 10! = 3\,628\,800$
maneiras
Usar a permutação
circular

Fonte: Autoria própria.

A3

Figura 129 – Resolução do aluno A3 para a questão 01 do formulário 2



01- Física
Química
Biologia
Matemática
História
Geografia
Português
Redação

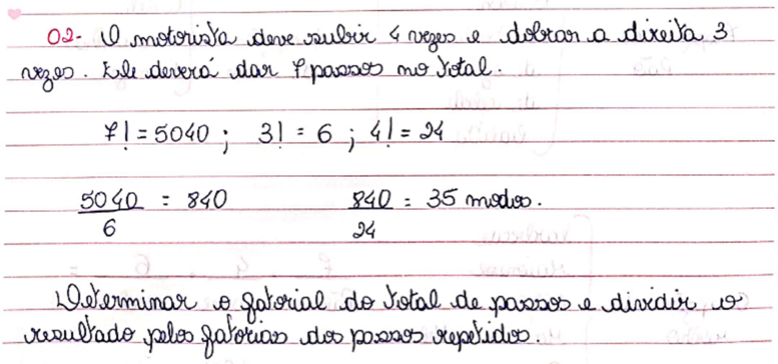
8 matérias em diferentes ordens.

8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 =
= 40.320 maneiras.

• Escolher a matéria que irá ocupar cada posição na ordem que a pessoa irá estudar.

Fonte: Autoria própria.

Figura 130 – Resolução do aluno A3 para a questão 02 do formulário 2



02- O motorista deve subir 4 vezes e dobrar a direita 3 vezes. Ele deverá dar 7 passos no total.

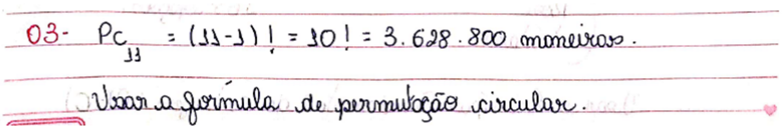
7! = 5040 ; 3! = 6 ; 4! = 24

$\frac{5040}{6} = 840$ $\frac{840}{24} = 35$ modos.

Determinar o fatorial do total de passos e dividir o resultado pelos fatoriais dos passos repetidos.

Fonte: Autoria própria.

Figura 131 – Resolução do aluno A3 para a questão 03 do formulário 2



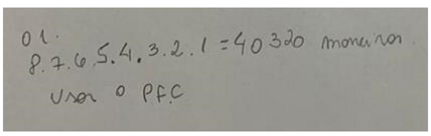
03- $Pc_{11} = (11-1)! = 10! = 3.628.800$ maneiras.

Usar a fórmula de permutação circular.

Fonte: Autoria própria.

A4

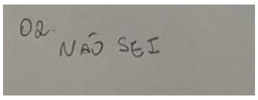
Figura 132 – Resolução do aluno A4 para a questão 01 do formulário 2



01.
8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320 maneiras
Usar o PFC

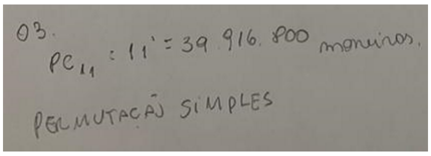
Fonte: Autoria própria.

Figura 133 – Resolução do aluno A4 para a questão 02 do formulário 2



Fonte: Autoria própria.

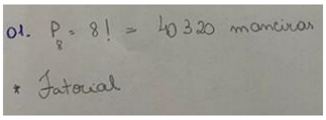
Figura 134 – Resolução do aluno A4 para a questão 03 do formulário 2



Fonte: Autoria própria.

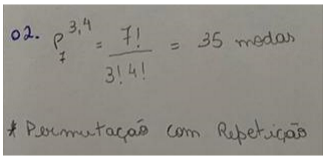
A5

Figura 135 – Resolução do aluno A5 para a questão 01 do formulário 2



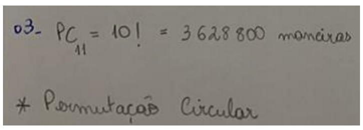
Fonte: Autoria própria.

Figura 136 – Resolução do aluno A5 para a questão 02 do formulário 2



Fonte: Autoria própria.

Figura 137 – Resolução do aluno A5 para a questão 03 do formulário 2

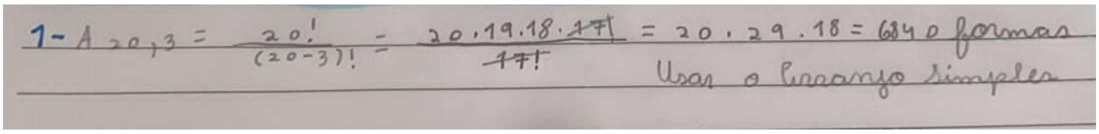


Fonte: Autoria própria.

Resolução do Formulário 03

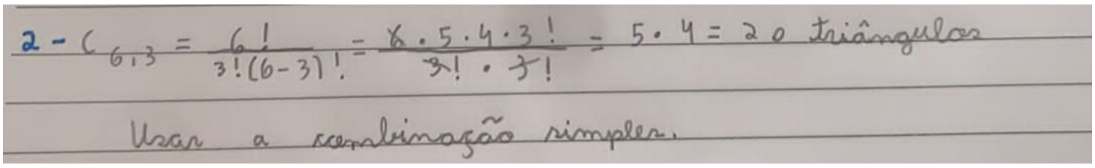
A1

Figura 138 – Resolução do aluno A1 para a questão 01 do formulário 3



Fonte: Autoria própria.

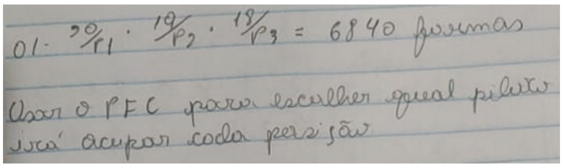
Figura 139 – Resolução do aluno A1 para a questão 02 do formulário 3



Fonte: Autoria própria.

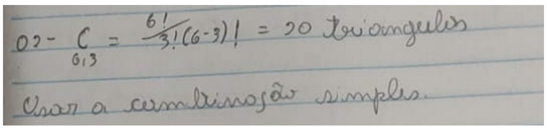
A2

Figura 140 – Resolução do aluno A2 para a questão 01 do formulário 3



Fonte: Autoria própria.

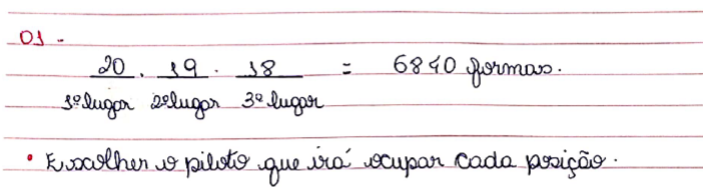
Figura 141 – Resolução do aluno A2 para a questão 02 do formulário 3



Fonte: Autoria própria.

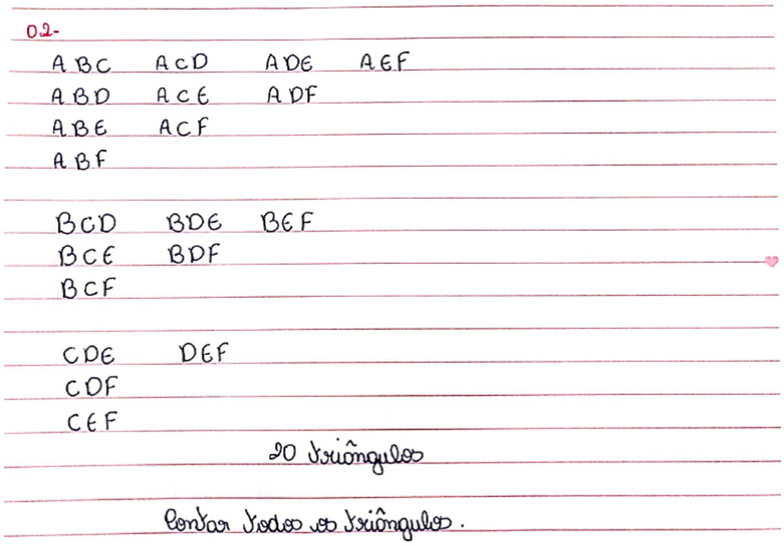
A3

Figura 142 – Resolução do aluno A3 para a questão 01 do formulário 3



Fonte: Autoria própria.

Figura 143 – Resolução do aluno A3 para a questão 02 do formulário 3


02-
ABC ACD ADE AEF
ABD ACE ADF
ABE ACF
ABF

BCD BDE BEF
BCE BDF
BCF

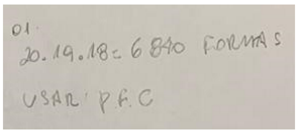
CDE DEF
CDF
CEF
20 triângulos

Contar todos os triângulos.

Fonte: Autoria própria.

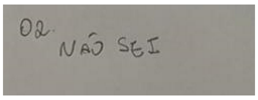
A4

Figura 144 – Resolução do aluno A4 para a questão 01 do formulário 3


01.
20.19.18 = 6 840 FORMAS
USAR P.F.C

Fonte: Autoria própria.

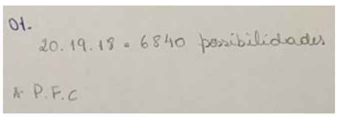
Figura 145 – Resolução do aluno A4 para a questão 02 do formulário 3


02.
NÃO SEI

Fonte: Autoria própria.

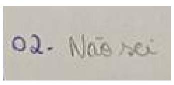
A5

Figura 146 – Resolução do aluno A5 para a questão 01 do formulário 3


01.
20.19.18 = 6840 possibilidades
* P.F.C

Fonte: Autoria própria.

Figura 147 – Resolução do aluno A5 para a questão 02 do formulário 3


02- Não sei

Fonte: Autoria própria.

3.6 Análise Geral da Experimentação

A respeito da experimentação da Proposta Didática, pode-se afirmar que, os alunos participantes ofereceram importantes contribuições para o desenvolvimento desta pesquisa. Pois, durante os encontros, o pesquisador percebeu que eles tiveram boa interação e realizaram as atividades propostas de forma ativa e com êxito. É válido ressaltar que, alguns alunos apresentaram dúvidas em relação ao conteúdo de Conjuntos, trabalhado na revisão que aconteceu no primeiro encontro e foram sanadas, oralmente, pelo pesquisador.

Durante tal experimentação, o pesquisador observador desta pesquisa, ao longo das atividades desenvolvidas pelos alunos participantes, em sua maioria, apresentaram uma postura ativa, questionando constantemente o pesquisador em alguns momentos e, muitas vezes, propondo suas próprias soluções para os problemas propostos. Notou-se que, alguns alunos participantes estavam pouco interessados as atividades propostas e, acabaram não tendo tanta participação, A4 e A5.

Segundo Piovesan e Zanardini (2020),

> [...] é perceptível que o aluno deva participar ativamente de sua aprendizagem, observando, refletindo e tirando conclusões, ou ainda, que ele vivencie dinamicamente a apreensão dos conteúdos matemáticos, e o professor seja o condutor desse processo, conscientizando-se que a prioridade é a aprendizagem significativa do aluno e não apenas a simples transmissão do conteúdo, como se percebe na maioria das escolas (PIOVESAN; ZANARDINI, 2020, p. 4).

A interação do pesquisador com os alunos participantes da pesquisa ocorreu a partir de discussões a respeito das questões propostas, interrogando os alunos oralmente a respeitos das resoluções propostas por eles e visando desenvolver neles a capacidade de oferecer argumentos que pudessem sustentar as resoluções propostas.

Cabe destacar que, em alguns momentos o pesquisador tentou buscar interação dos alunos menos participativos, A4 e A5, tentando instigá-los com perguntas genéricas feitas oralmente a respeito com relação aos problemas propostos. Porém, eles não estavam com a câmera e nem com o microfone ligados, justificando que não possuíam câmera e que o local de estudo estava com muito barulho e, por esse motivo, não poderiam como liberar o microfone para falar. A comunicação, quando ocorria, era feita por meio do *chat* do *Google Meet*.

Assim, foi proposto aos alunos que eles teriam uma semana para que pudessem concluir e enviar as atividades avaliativas propostas. Eles, por sua vez, acharam que o tempo determinado era bem confortável e que assim eles teriam tempo suficiente para que pudessem fazer, justificando que não iria atrapalhar as atividades que tinham do Ensino Regular Remoto.

Ao realizar a análise das soluções enviadas no final do terceiro encontro, ou seja, no final da experimentação da Proposta Didática, ficou clara a preocupação dos alunos em pensar na estrutura de resolução que iriam empregar nas respectivas questões. Em algumas resoluções estavam indicados os dados fornecidos pelo problema, algumas continham desenhos (representado os conjuntos trabalhados na questão) e um aluno realizou a contagem do número de possibilidades que o problema propunha.

A partir da análise dos dados enviados, foi possível perceber a dificuldade que alguns possuíam em descrever os passos adotados para a resolução das questões propostas. Várias vezes foram analisadas pelo pesquisador respostas indicando apenas a aplicação de uma determinada fórmula, sem uma descrição detalhada do plano de resolução. Porém, é válido ressaltar que, foi possível perceber que alguns alunos conseguiram descrever com detalhes a proposta de solução.

Conforme aponta (SILVA, 2018, p. 55) "percebemos que as experiências destes alunos em relação à Análise Combinatória, são baseadas no ensino tradicional, ou seja, ensino repetitivo".

Desta forma, espera-se que, esta pesquisa tenha contribuído para que professores atuantes na Educação Básica e futuros professores, para que possam refletir acerca do uso da Metodologia Resolução de Problemas em suas aulas e consigam empregá-la na elaboração e aplicação de Propostas Didáticas.

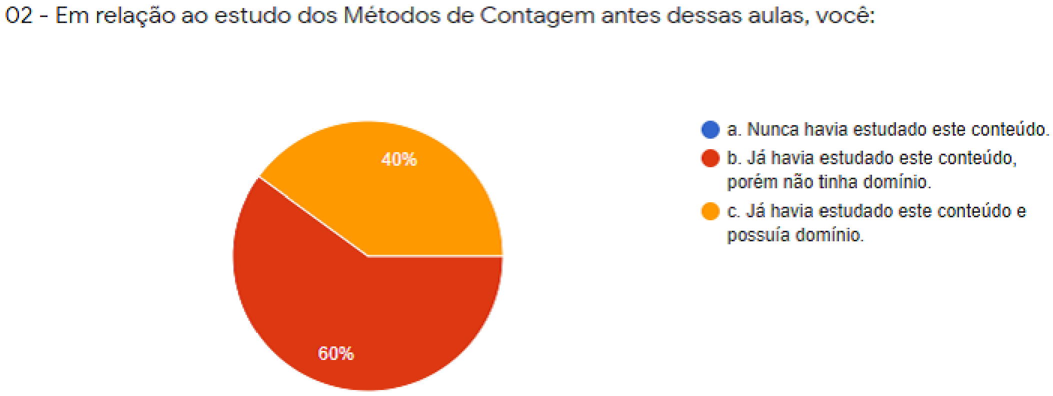
3.7 Análise dos Questionários dos Alunos

O questionário desenvolvido pelo pesquisador e respondido pelos alunos participantes da pesquisa Apêndice G teve como objetivo avaliar como os alunos utilizariam a Metodologia Resolução de Problemas na resolução de questões sobre Métodos de Contagem.

Este questionário foi preparado por meio do *Google Form* e o *link* para acesso foi disponibilizado ao final de cada encontro pelo pesquisador no *chat* do *Google Meet* e, também, pelo *WhattsApp*. Buscando obter as respostas mais sinceras possíveis, não foi necessária a identificação dos alunos participantes.

Em relação ao estudo dos Métodos de Contagem antes dos encontros, 60% dos participantes indicaram que já haviam estudado antes e possuíam domínio, enquanto que 40% indicaram que, apesar de terem estudando anteriormente, não tinham domínio sobre o tema. É valido ressaltar que, nenhum dos alunos que participou desta pesquisa alegou que não havia estudado o conteúdo (Figura 148).

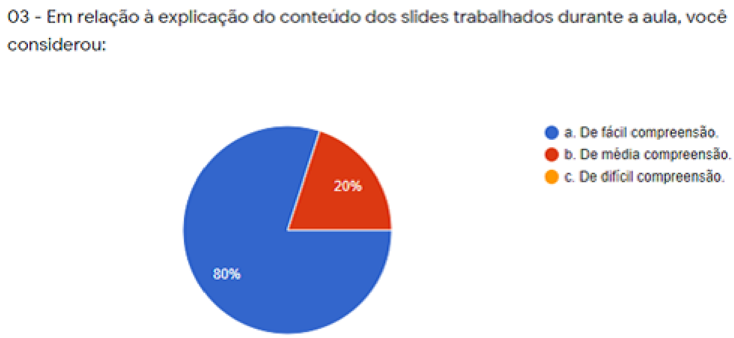
Figura 148 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação ao estudo dos Métodos de Contagem antes dos encontros



Fonte: Autoria própria.

Dos alunos pesquisados, 80% indicaram que a explicação do conteúdo pelos *slides* trabalhados conteúdo foi de fácil acesso enquanto que, 20% indicaram ser de média compreensão (Figura 149).

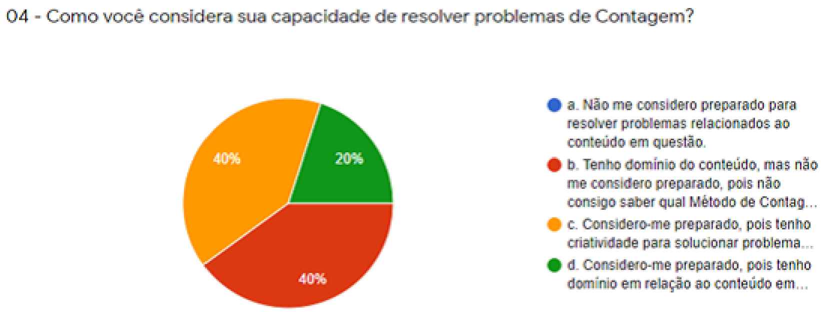
Figura 149 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação a explicação dos slides trabalhados durante a aula



Fonte: Autoria própria.

Em uma autoavaliação sobre questões de Contagem, 40% dos alunos responderam que se sentem preparados para trabalhar com questões deste conteúdo, pois alegam terem criatividade para solucionar problemas desta natureza, 20% dos alunos alegaram estarem preparados, pois tem domínio em relação ao conteúdo e os outros 40% indicaram ter domínio em relação ao conteúdo, porém não conseguem saber qual Método de Contagem utilizar em cada problema (Figura 150).

Figura 150 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação à própria capacidade de resolver problemas de Contagem



Fonte: Autoria própria.

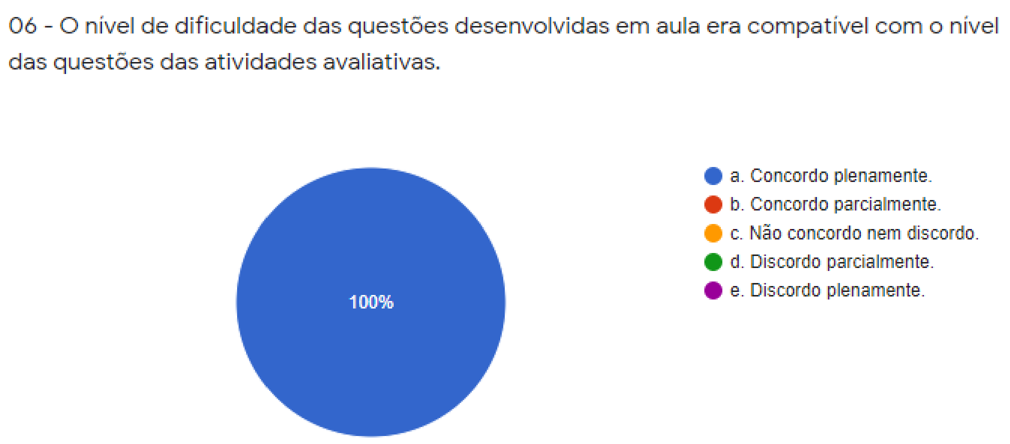
Em relação aos exercícios desenvolvidos na aula, 80% dos alunos concordaram plenamente que ajudaram para o entendimento dos Métodos de Contagem enquanto que, 20% concordaram parcialmente (Figura 151).

Figura 151 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação a explicação dos *slides* trabalhados durante a aula

Fonte: Autoria própria.

Todos os alunos que participaram desta pesquisa concordaram plenamente que o nível das questões desenvolvidas em aula, classificando que elas eram compatíveis com o nível das questões das atividades avaliativas (Figura 152).

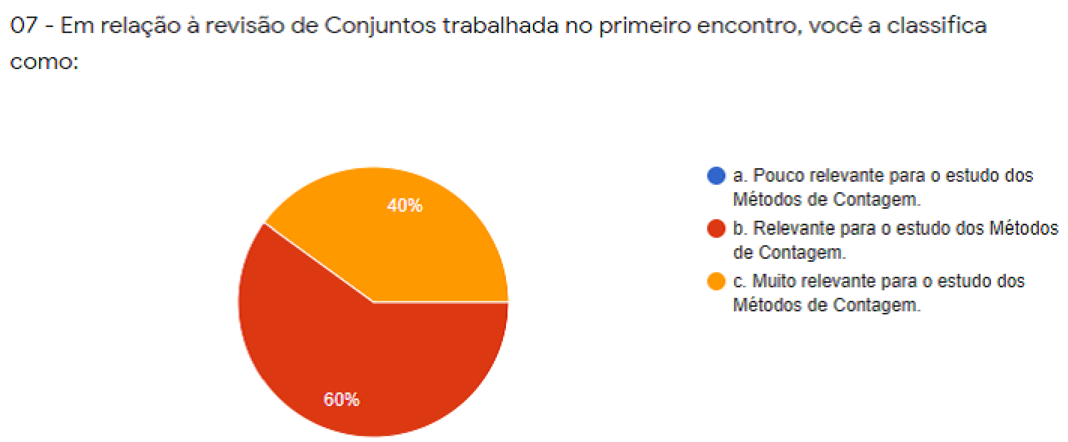
Figura 152 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação a dificuldade das questões desenvolvidas em aula



Fonte: Autoria própria.

Dos participantes da pesquisa, 60% indicaram que a revisão de Conjuntos, trabalhada no primeiro encontro, foi relevante para o estudo dos Métodos de Contagem enquanto que, 40% classificaram como muito relevante (Figura 153).

Figura 153 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação a revisão de Conjuntos trabalhada no primeiro encontro



Fonte: Autoria própria.

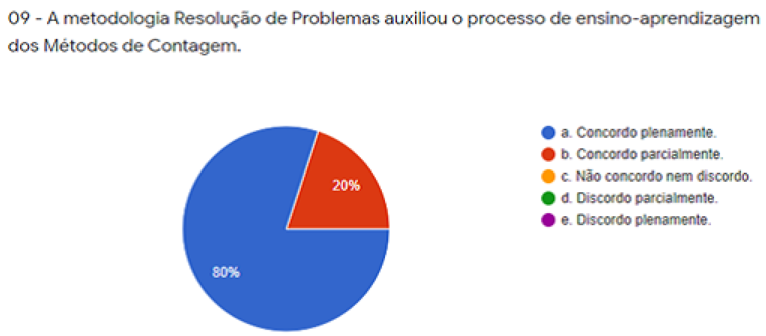
A respeito da última atividade que ocorreu um grupo (uma dupla e um trio), 60% julgaram muito importante trabalhar em equipe, 20% julgou importante e os outros 20% julgaram pouco importante (Figura 154).

Figura 154 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação a atividade em grupo desenvolvida no ultimo encontro

Fonte: Autoria própria.

Em relação à Metodologia Resolução de Problemas, 80% dos participantes da pesquisa concordaram plenamente que auxiliou no processo de ensino e aprendizagem do referido conteúdo. Enquanto que, os outros 20% concordaram parcialmente (Figura 155).

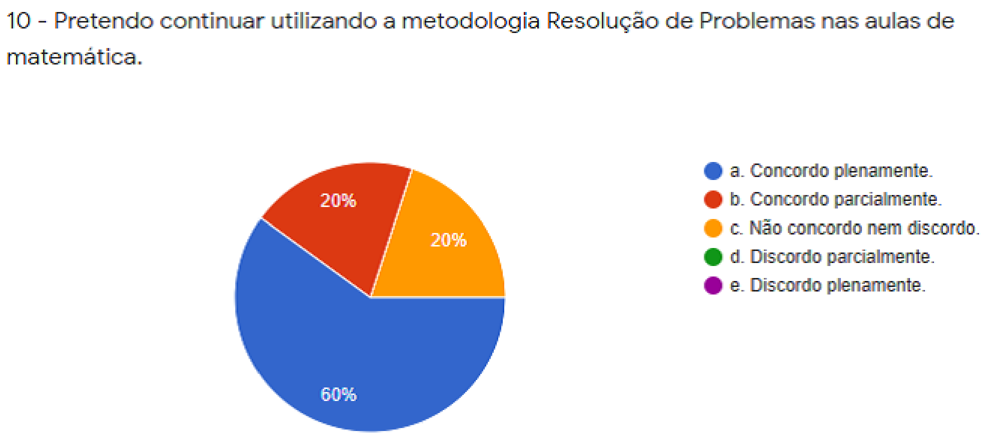
Figura 155 – Gráfico com as respostas dos alunos em relação ao auxilio da Metodologia Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem dos Métodos de Contagem



Fonte: Autoria própria.

Quando perguntados se eles pretendem continuar usando a Metodologia Resolução de Problemas nas aulas de Matemática, 60% concordaram plenamente, 20% concordaram parcialmente e 20% não discordaram nem concordaram (Figura 156).

Figura 156 – Gráfico com as respostas dos alunos a respeito se pretendem continuar utilizando a Metodologia Resolução de Problemas nas aulas de Matemática



Fonte: Autoria própria.

Considerando a análise dos dados obtidos com a aplicação do questionário, assim como a Proposta Didática, foi possível observar os benefícios oferecidos pela Metodologia Resolução de Problemas ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. De acordo com Paz (2017)

> [...] Essa prática proporciona um ambiente favorável para a aprendizagem dos alunos, uma vez que ao lidar com situações contextualizadas, traz questões da realidade e parte do real para o teórico, levando o aluno a fazer reflexões e questionamentos sobre os problemas, através de circunstâncias desafiadoras que estimulam os alunos a buscar soluções, desenvolvendo a autonomia e, inclusive, fazendo com que percebam que uma mesma metodologia e raciocínio são aplicáveis em questões semelhantes, transformando-os, dessa forma, nos agentes responsáveis pela construção dos seus conhecimentos (PAZ, 2017, p. 98).

Capítulo 4

Considerações Finais

Ao longo dos encontros foi possível perceber que os alunos conseguiram se colocarem no papel de protagonistas do processo de ensino e aprendizagem, identificando e analisando as decisões que eles iam tomando, conseguindo sustentar suas convicções sobre elas quando interrogados pelo pesquisador durante os três encontros síncronos. Assim, foi notório o envolvimento dos alunos, alguns mais participativos e outros menos, mas ao realizarem a última atividade proposta, o trabalho em grupo, pode-se perceber que, a participação de todos discutindo as ideias propostas.

Um ponto que merece destaque nesta pesquisa foi que, durante a resolução de um problema avaliativo proposto, um aluno adotou a opção de realizar a contagem de todos os resultados possíveis ao se deparar com um problema de formação de triângulos utilizando-se os vértices de um hexágono regular. Pode-se destacar que nessa resolução, a criatividade deste aluno foi posta em prática, uma vez que, frente a uma situação, um problema, ele desenvolveu o próprio método para obter o resultado pedido no enunciado do problema proposto.

Após a análise dos dados obtidos, pode-se concluir que, o uso da Metodologia Resolução de Problemas mostrou-se como grande ferramenta para o ensino dos Métodos de Contagem, devido ao papel ativo que os alunos acabaram desenvolvendo, mantendo-se motivados a enfrentarem as mais diversas situações e, pondo em prática, sua criatividade aliada como conceitos matemáticos.

É necessário que, ao adotar tal metodologia de ensino, o professor tenha em mente que, o papel de protagonista do processo de ensino e aprendizagem é dos alunos. Desta forma, o professor deve adotar uma postura que valorize a criatividade deles, mantendo-os sempre dispostos a enfrentarem situações novas, sabendo utilizar os diferentes conceitos matemáticos como ferramentas, conseguindo associar a problemas correlatos, resoluções similares e, a partir daí, criar seus próprios planos de resoluções para as situações vivenciadas. Desta forma, o professor irá conseguir enriquecer suas aulas desenvolvendo uma nova prática docente.

Acredita-se que, essa metodologia de ensino pode ser uma alternativa interessante para se trabalhar conhecimentos de diversas áreas da Matemáticas e de outras ciências, uma vez que, com seu uso é possível edificar conceitos, tendo como ponto de partida, o problema.

Assim, espera-se que, essa pesquisa possa contribuir para que professores e futuros professores da Educação Básica reflitam a respeito do: (i) uso da Metodologia Resolução de Problemas em suas aulas; (ii) da elaboração de atividades matemáticas que valorizem a criatividade do aluno e possibilitem autonomia frente as mais diversas situações, propiciando assim, a construção do conhecimento matemático de forma mais concisa e dinâmica.

Referências

ANDRINI, Á.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado na página 30.

BONJORNO, J. R.; JR., G.; SOUZA, P. R. *Matemática Completa*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 7 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 34, 37 e 50.

BOTELHO, D. A. Sala de aula invertida em temos de pandemia: Uma proposta para o ensino dos princípios multiplicativo e aditivo. 2020. Citado 4 vezes nas páginas 71, 73, 74 e 76.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, pcn. 1997. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 61.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, pcn. 2000. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 56.

BRASIL. Base nacional comum curricular: Matemática. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, v. 16, n. 2, p. 81–118, 2007. Citado na página 63.

CARVALHO, P. C. P. Métodos de contagem e probabilidade. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2006. Citado na página 21.

DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de educação*, n. 45, p. 57–67, 2013. Citado na página 78.

DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de Matemática: teoria e prática*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado 9 vezes nas páginas 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63 e 64.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 6 vezes nas páginas 33, 35, 49, 51, 55 e 56.

FERNANDEZ, C. W. B. O ensino da análise combinatória através da resolução de problemas. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 74.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. [S.l.]: Plageder, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 79.

GIL, A. C. et al. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: Atlas, São Paulo, 2002. v. 4. Citado 3 vezes nas páginas 78, 79 e 81.

GOOGLE, S. *Centro de Aprendizagem do Google Workspace*. 2021. Disponível em: https://support.google.com/a/users/answer/10519038?hl=pt-BR/. Citado na página 64.

LESTER, F. You can teach problem solving. *Arithmetic Teacher*, 1982. Citado na página 58.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 21, 29, 30, 48 e 53.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página 44.

LUPINACCI M. L. V.; BOTIN, M. L. V. Resolução de problemas no ensino de matemática. *Anais do VIII. Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2004. Citado na página 59.

MARCONI, M. d. A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de Metodologia Científica*. [S.l.: s.n.], 2003. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 82.

MELLO, H. P. d. M. d. Desmistificando o ensino de análise combinatória. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

MICROSOFT. *Microsoft Whiteboard*. 2021. Disponível em: https://app.whiteboard.microsoft.com//. Citado na página 66.

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *Metodologias Ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso*, p. 02–25, 2018. Citado na página 84.

MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise combinatoória e probabilidade*. [S.l.: s.n.], 1991. Citado na página 22.

MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. [S.l.: s.n.], 2006. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 27 e 45.

PAZ, V. P. B. d. O princípio fundamental da contagem através da metodologia resolução de problemas, com foco nas questões da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas. 2017. Citado 3 vezes nas páginas 69, 75 e 161.

PEREIRA, A. S. et al. Metodologia da pesquisa científica. 2018. Citado na página 78.

PIOVESAN, S. B.; ZANARDINI, J. B. O ensino e aprendizagem da matemática por meio da metodologia de resolução de problemas: Algumas considerações. *Programa de Desenvolvimento Educacional - PDE, 2008, da Secretaria de Estado de Educação*, 2020. Citado na página 155.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. 1977. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas: Um novo Aspecto do Método Matemático*. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. [S.l.: s.n.], 2006. Citado 5 vezes nas páginas 57, 60, 62, 63 e 69.

SILVA, A. d. Resolução de situações-problemas da obmep por alunos da 3° série do ensino médio da cidade de união-pi: uma investigação acerca da análise combinatória. 2018. Citado 4 vezes nas páginas 70, 71, 75 e 156.

SILVA, D. d. S.; ANDRADE, L. A. P.; SANTOS, S. M. P. d. Alternativas de ensino em tempo de pandemia. *Reseach, Society and Development*, v. 9, n. 9, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 64, 65 e 66.

SILVEIRA ÊNIO ANO MARQUES, C. *Matemática, Compreensão e Prática, 6 ano*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 30.

SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática:1*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página 29.

TEIXEIRA, E. As três metodologias: acadêmica, da ciência e da pesquisa, 2 edição. 2006. Citado na página 78.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. *Recife: VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, p. 22, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 28.

ZANELLA, L. C. H. *Metodologia da pesquisa*. [S.l.]: SEAD/UFSC, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 81.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. O ensino-aprendizagem de matemática através da resoluçã de problemas e os processos cognitivos superiores. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 11, p. 79–97, 2007. Citado na página 58.

Apêndices

APÊNDICE A

Termo de autorização da escola Liceu de Humanidades de Campos

Trabalho de Pesquisa Científica

Autorização

Prezado (a) Diretor (a),

Os Alunos da turma 3003, da escola Liceu de Humanidades de Campos, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Estadual Darcy Ribeiro – UENF, realizado pelo mestrando e professor de matemática da referida instituição, Ewerton Terra Montezuma Martins. A pesquisa será realizada no segundo semestre, durante algumas aulas de Matemática ao longo do Ensino Remoto, marcadas no contra turno, com o seguinte tema: *METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PERSPECTIVA DE SUA UTILIZAÇÃO COM MÉTODOS DE CONTAGEM*. A metodologia Resolução de Problemas é apontada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) como sendo o ponto de partida para se ensinar matemática. O presente trabalho visa colaborar para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, a partir do uso da metodologia Resolução de problemas que será trabalhada como forma de auxiliar os alunos a desenvolverem suas próprias soluções ao se depararem com um problema relacionado à Contagem.

Dessa forma, gostaria de pedir sua autorização para que a Escola e a referida turma possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e se estiver de acordo, peço que destaque e preencha o formulário a seguir:

Eu, ___________________________________, diretor (a) da Escola Liceu de Humanidades de Campos, autorizo a participação da turma 3003 na pesquisa sobre *METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PERSPECTIVA DE SUA UTILIZAÇÃO COM MÉTODOS DE CONTAGEM*, desenvolvida pelo professor Ewerton Terra Montezuma Martins.

____

Assinatura

Campos dos Goytacazes – RJ, 04/08/2021.

APÊNDICE B

Termo de autorização dos responsáveis

Trabalho de Pesquisa Científica

Autorização

Prezados Pais/Responsáveis,

Os alunos da turma 30003, do Liceu de Humanidades de Campos estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF, realizado pelo mestrando Ewerton Terra Montezuma Martins que também atua como professor nessa unidade de ensino. A pesquisa será realizada através do ensino remoto, durante o contra turno e tem por objetivo colaborar para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, a partir do uso da metodologia intitulada Resolução de Problemas, que será trabalhada como forma de auxiliar os alunos a desenvolverem suas próprias soluções ao se depararem com um problema relacionado à Contagem. Pedimos sua autorização para que ele (a) possa participar das atividades, e que os registros destas atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e peço que aprovando a participação do seu filho (a), destaque e preencha o formulário a seguir:

Eu, ___________________________________, autorizo a participação do meu filho (a) na pesquisa desenvolvida pelo professor me matemática Ewerton Terra Montezuma Martins.

Nome do Aluno: ____

____

Assinatura

Campos dos Goytacazes – RJ, 04/08/2021.

APÊNDICE C

Avaliação Diagnóstica Referente ao Primeiro Encontro (Princípio da Inclusão e Exclusão, Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo)

Formulário - Aula 01

Princípio da Inclusão e Exclusão, Princípio Fundamental da Contagem e Princípio Aditivo

*Obrigatório

1. E-mail *

2. Nome Completo *

3. Em uma universidade, no curso de Engenharia, 70 alunos se inscreveram para cursar as disciplinas de Cálculo I e Álgebra Linear. Desses alunos, 40 matricularam-se na disciplina de Cálculo I e, 33 na disciplina de Álgebra Linear. Qual é o número de alunos matriculados, simultaneamente nas duas disciplinas? *

   Arquivos enviados:

4. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

5. Uma lanchonete vende um hambúrguer a escolha do cliente, oferecendo sete tipos de pães: pão americano, pão italiano, brioche, pão australiano, pão de azeite, pão de cebola e ciabatta, quatro opções de carne, os blends de acém, costela, fraldinha e peito de frango e seis tipos diferentes de molho, barbecue, maionese caseira, molho de alho, mostarda e mel, rosé especial e tártaro. Para montar um hambúrguer, o cliente deve escolher um tipo de pão, um tipo de carne (blend) e um tipo de molho. Qual é o número de possibilidades de compor um hambúrguer? *

   Arquivos enviados:

6. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

APÊNDICE D

Avaliação Diagnóstica Referente ao Segundo Encontro – Permutações (Simples, com Repetições e Circulares)

Formulário - Aula 02

Permutações

*Obrigatório

1. E-mail *

2. Nome Completo *

3. Marcela deseja passar para o curso de Medicina numa universidade pública. Para isso ela montou um cronograma de estudos que pretende seguir de segunda a sexta. I. Estudar Física das 7h às 8h; II. Estudar Química das 8h às 9h; III. Estudar Biologia das 9h às 10h; IV. Estudar Matemática 10h às 11h; V. Estudar História das 11h às 12h; VI. Estudar Geografia das 14h às 15h;VII. Estudar Português das 15h às 16h;VIII. Estudar Redação das 16h às 17h. Cansada de estudar sempre nessa mesma ordem, ela resolveu que, a cada dia, vai utilizar uma ordem diferente para organizar as disciplinas. Qual é o número de maneiras possíveis dela realizar essas atividades em ordem diferente? *

   Arquivos enviados:

4. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

5. Uma plataforma desenvolvida para motoristas de aplicativo oferece a visualização de um mapa com ruas verticais e horizontais que visam facilitar o deslocamento do veiculo. Analisando o mapa abaixo, quantos são os possíveis caminhos que um motorista pode tomar para chegar ao ponto em que o passageiro se encontra? *

Arquivos enviados:

6. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

7. O livro O Rei Arthur e os Cavaleiros da Távola Redonda narra à história de homens premiados com a mais alta ordem da cavalaria, na corte do Rei Arthur. A Távola era uma mesa na qual eles se reuniam, e ela seria redonda para que não houvesse cabeceira, representando assim a igualdade de todos os seus membros. A história contada por esse livro é uma lenda bem conhecida, e em suas diferentes versões o número de cavaleiros costuma variar. De quantas maneiras distintas, 11 cavalheiros poderiam se sentar ao redor desta mesa? *

Arquivos enviados:

8. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE E

Avaliação Diagnóstica Referente ao Terceiro Encontro – Arranjo Simples e Combinação Simples

Formulário - Aula 03

*Obrigatório

1. E-mail *

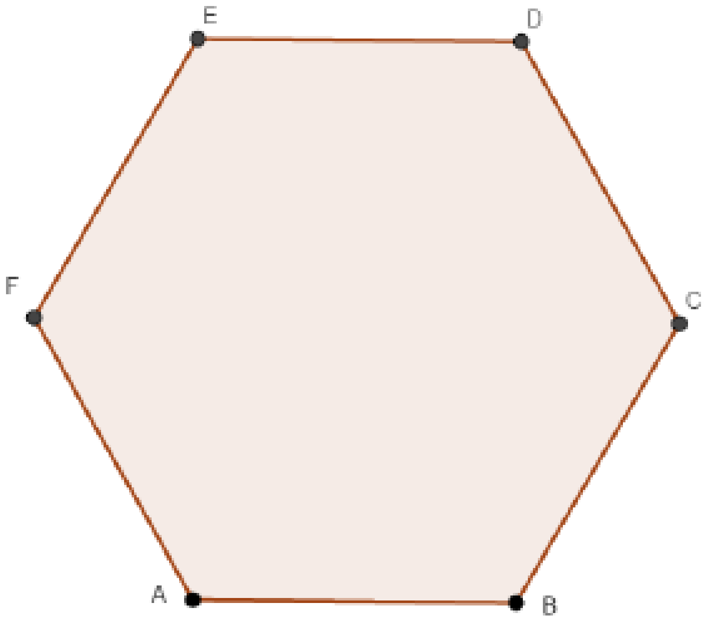
2. Nome Completo *

3. A Fórmula 1 é a modalidade do automobilismo (competição de automóveis) mais popular no mundo. Cada grande prêmio é disputado por vinte pilotos e o pódio é formado pelos três primeiros pilotos a terminarem a corrida. Suponha que todos os pilotos tenham conseguido terminar um grande prêmio, de quantas formas podemos formar o pódio? *

   Arquivos enviados:

4. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

5. Considere o hexágono regular abaixo. Quantos triângulos podemos formar a partir de seus vértices? *



Arquivos enviados:

6. Descreva um plano de solução para a questão acima. *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE F

Questionário Para os Professores

Questionário para os Professores

Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

1 – Nome Completo:

____

2 – Há quanto tempo você leciona na Educação Básica?

a. 0 – 5 anos
b. 5 – 10 anos
c. 10 – 15 anos
d. 15 – 20 anos
e. Mais de 20 anos

Em relação à atividade do encontro 01:

3 – O quanto você classifica relevante às atividades para o estudo do tema?

a. Nenhuma relevância.
b. Pouca relevância.
c. Relevante.
d. Extremamente relevante

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT

SBM

Questionário para os Professores

4 – As questões possuem um nível de dificuldade adequado para a 3° série do Ensino Médio?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

5 – A atividade está clara em relação ao que deve ser feito?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

6 – O quanto a atividade atende ao objetivo proposto?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

7 – O espaço a seguir se destina a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

Questionário para os Professores

Em relação à atividade do encontro 02:

8 – O quanto você classifica relevante às atividades para o estudo do tema?

a. Nenhuma relevância.
b. Pouca relevância.
c. Relevante.
d. Extremamente relevante

9 – As questões possuem um nível de dificuldade adequado para a 3° série do Ensino Médio?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

10 – A atividade está clara em relação ao que deve ser feito?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

Questionário para os Professores

11 – O quanto a atividade atende ao objetivo proposto?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

12 – O espaço a seguir se destina a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

____

____

____

Em relação à atividade do encontro 03:

13 – O quanto você classifica relevante às atividades para o estudo do tema?

a. Nenhuma relevância.
b. Pouca relevância.
c. Relevante.
d. Extremamente relevante

Questionário para os Professores

14 – As questões possuem um nível de dificuldade adequado para a 3° série do Ensino Médio?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

15 – A atividade está clara em relação ao que deve ser feito?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

16 – O quanto a atividade atende ao objetivo proposto?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

17 – O espaço a seguir se destina a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

____

____

____

Questionário para os Professores

Em relação à atividade 04:

18 – O quanto você classifica relevante às atividades para o estudo do tema?

a. Nenhuma relevância.
b. Pouca relevância.
c. Relevante.
d. Extremamente relevante

19 – As questões possuem um nível de dificuldade adequado para a 3° série do Ensino Médio?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

20 – A atividade está clara em relação ao que deve ser feito?
a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

Questionário para os Professores

21 – O quanto a atividade atende ao objetivo proposto?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.
e. 5.

22 – O espaço a seguir se destina a comentários ou sugestões que você queira fazer em relação a essa atividade.

____

____

____

APÊNDICE G

Questionário para os Alunos

Questionário para os Alunos

Este questionário tem por objetivo verificar a opinião dos alunos em relação à metodologia Resolução de Problemas.

1 – Nome Completo:

____

2 – Em relação ao estudo dos Métodos de Contagem antes dessas aulas, você:

a. Nunca havia estudado este conteúdo.
b. Já havia estudado este conteúdo, porém não tinha domínio.
c. Já havia estudado este conteúdo e possuía domínio.

3 – Em relação à explicação do conteúdo dos slides trabalhados durante a aula, você considerou:

a. De fácil compreensão.
b. De média compreensão.
c. De difícil compreensão.

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT

SBM

Questionário para os Alunos

4 – Como você considera sua capacidade de resolver problemas de Contagem?

a. Não me considero preparado para resolver problemas relacionados ao conteúdo em questão.
b. Tenho domínio do conteúdo, mas não me considero preparado, pois não consigo saber qual Método de Contagem utilizar em cada problema.
c. Considero-me preparado, pois tenho criatividade para solucionar problemas de Contagem.
d. Considero-me preparado, pois tenho domínio em relação ao conteúdo em questão.

5 – Os exercícios desenvolvidos nas aulas ajudaram para o entendimento dos Métodos de Contagem?

a. Concordo plenamente.
b. Concordo parcialmente.
c. Não concordo nem discordo.
d. Discordo parcialmente.
e. Discordo plenamente.

6 – O nível de dificuldade das questões desenvolvidas em aula era compatível com o nível das questões das atividades avaliativas.

a. Concordo plenamente.
b. Concordo parcialmente.
c. Não concordo nem discordo.
d. Discordo parcialmente.
e. Discordo plenamente.

Questionário para os Alunos

7 – Em relação à revisão de Conjuntos trabalhada no primeiro encontro, você a clássica como:

a. Pouco relevante para o estudo dos Métodos de Contagem.
b. Relevante para o estudo dos Métodos de Contagem.
c. Muito relevante para o estudo dos Métodos de Contagem.

8 – Em relação à atividade em grupo desenvolvida no último encontro, você a classifica como:

a. Pouco importante.
b. Importante.
c. Muito importante.

9 – A metodologia Resolução de Problemas auxiliou o processo de ensino-aprendizagem dos Métodos de Contagem.

a. Concordo plenamente.
b. Concordo parcialmente.
c. Não concordo nem discordo.
d. Discordo parcialmente.
e. Discordo plenamente.

10 – Pretendo continuar utilizando a metodologia Resolução de Problemas nas aulas de matemática.

a. Concordo plenamente.
b. Concordo parcialmente.
c. Não concordo nem discordo.
d. Discordo parcialmente.
e. Discordo plenamente.

Questionário para os Alunos

11 – Cite os pontos positivos da metodologia experimentada

____

12 – Cite os pontos negativos da metodologia experimentada.

____

Agradeço sua contribuição para essa pesquisa.