Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Conjuntos e contagens

David Lucas Rodrigues dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Reinaldo de Marchi**

Cuiabá - MT

Janeiro de 2022

Conjuntos e contagens

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por David Lucas Rodrigues dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 28 de Janeiro de 2022.

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237c Santos, David Lucas Rodrigues dos.
Conjuntos e contagens [recurso eletrônico] / David Lucas Rodrigues dos Santos. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 72 f., il. color., pdf). -- 2022.

Orientador: Reinaldo de Marchi.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2022.
Modo de acesso: World Wide Web: https://ri.ufmt.br.
Inclui bibliografia.

1. Fatorial. 2. permutações. 3. arranjos. 4. combinações. 5. princípio da inclusão e exclusão. I. Marchi, Reinaldo de, *orientador.* II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título**:** Conjuntos e contagens

Autor: mestrando David Lucas Rodrigues dos Santos

Dissertação defendida e aprovada em 28 de janeiro de 2022.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Reinaldo de Marchi** (Presidente Banca/orientador)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
2. **Doutor Aldi Nestor de Souza** (Membro Interno)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
3. **Doutor Junior Cesar Alves Soares** (Membro Externo)
Instituição: Universidade Estadual de Mato Grosso - campus Barra do Bugres

Cuiabá, 28**/01/2022**.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pelas bênçãos que me foram concedidas ao longo da vida.

À UFMT e a todos os professores do PROFMAT por terem proporcionado um importante momento de aprendizagem e crescimento profissional e pessoal.

Ao professor Dr. Reinaldo de Marchi pela preciosa, clara e enriquecedora orientação. Ao Coordenador Geraldo L. Diniz, pelas ajudas pontuais na pandemia.

A minha avó Maria Pereira da Silva (Dona Cota), a minha mãe Meire Rodrigues da Silva, aos padrinhos Solange Barbosa da Silva e Valdir Santana de Souza Filho e o meu amigo Jeremias Dourado pela parceria, apoio, conselhos, incentivos e compreensão que foram essenciais para a conclusão do Curso.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Existe padrão na distribuição dos números primos?

Dúvida de Séculos.

Resumo

Nos conteúdos ministrados no ensino básico, existe um padrão claro na forma em que estão desenvolvidos em sala de aula: definição, fórmulas e exercícios. Alguns tópicos acabam conversando entre si, principalmente, devido a natureza do exercício que se pretende resolver. Por estes motivos, neste trabalho foram apresentados os conceitos de conjuntos e combinatória, que em suma, na maioria das vezes, são vistos de forma isolada e são deixados de lado pelo fato de que suas fórmulas são completamente dispensáveis, já que as linhas de raciocínio nos garantem as resoluções, sem o uso das expressões. Devido a isto, foi decidido utilizar estas ferramentas para demonstrações de teoremas, a fim de evitar estes distanciamentos.

Palavras chave: Fatorial; permutações; arranjos; combinações; princípio da inclusão e exclusão.

Abstract

In the contents taught in basic education, there is a clear pattern in the way in which are developed in the classroom: definition, formulas and exercises. Some topics end up talking to each other, mainly due to the nature of the exercise that is intended solve. For these reasons, in this work the concepts of sets and combinatorics, which where presented in short are mostly seen in isolation and are left out by the fact that their formulas are completely dispensable since the train of thought already guarantee us the resolutions, without the use of expressions. Due to this, it was decided to use these tools for theorem proofs in order to avoid these distances.

Keywords: Factorial; permutations; arrangements; combinations; principle of inclusion and exclusion.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a habilidade (EM13MAT310) é a que maior apresenta dificuldades para o ensino de matemática. Segundo a própria BNCC, a habilidade possui o enunciado: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

A dificuldade se dá por diversos fatores, sendo o principal deles a ausência dos algoritmos padrões para a resolução dos exercícios que envolvem a combinatória. A melhor estratégia que possuímos até agora é a estratégia popularizada por Morgado, que envolve ter a postura (colocar-se no papel da pessoa que vai realizar a ação), divisão (dividir as decisões a serem tomadas) e não adiar dificuldades (tomar primeiramente as decisões que possuem mais restrições).

Porém, dentro da própria estratégia para a resolução de exercícios, existem críticas principalmente pela forma como o exercício é apresentado. Por exemplo: de quantas formas uma pessoa pode montar um combo de salgado e suco, tendo 3 tipos de salgados e 2 tipos de sucos? A primeira parte para resolver o exercício, segundo a estratégia, é se colocar no lugar da pessoa que vai resolver a ação, portanto, o problema não seria resolvido, já que no lugar da pessoa escolheria comer ao invés de pensar na quantidade de escolhas.

Então, isso gera um distanciamento do conteúdo para com os outros tópicos, dando a impressão que este conteúdo só serve para dificultar o ensino médio. Daí, a motivação do trabalho: mostrar que os métodos de encontrar a cardinalidade de um conjunto finito pode ser utilizada como ferramenta poderosas para a resolução de problemas aritméticos e demonstrar teoremas da teoria dos números.

Tendo em vista as aplicações destes conceitos de ensino básico, nosso trabalho foi dividido em três capítulos, sendo o primeiro deles dedicado a apresentação dos conceitos de conjuntos, contagem e o princípio da inclusão e exclusão, que serão utilizados para desenvolver ideias e demonstrações futuras.

No segundo capítulo, faz-se uma aplicação da contagem, no primeiro momento, para determinar a cardinalidade do conjunto solução não-negativas de equações lineares de coeficientes unitários e identidades no triângulo de Pascal e binômio de Newton.

No último capítulo utilizaremos os conceitos abordados no primeiro capítulo para demonstrar teoremas da teoria dos números, tais como o pequeno teorema de Fermat, teorema de Wilson e um resultado relacionado com a função φ de Euler.

Capítulo 1

Conceitos básicos de contagem

Começamos esse texto com a seguinte questão: Como os povos ao longo do tempo resolveram o problema da necessidade de contagem? A resposta a essa pergunta é com os números naturais:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$$

A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência humana. Os números naturais não formam primeiramente concebidos para depois serem usados nas contagens, pelo contrário, os números naturais foram aos poucos surgindo pela prática cotidiana das contagens. Hoje em dia temos nos livros uma bela apresentação dos números naturais através dos axiomas de Peano, mas sua formalização foi bastante vagarosa.

Um fato que podemos destacar que corroboram essa experiência é a própria maneira como se faz uma contagem. Para pequenas quantidades, é habitual contar usando os dedos, e este fato teve grande influência no aparecimento dos números, bastando observar que o nome dígito, que designa os números naturais de 1 a 9, com o acréscimo do 0, lido como zero (símbolo criado para representar o nada), tem origem do latim digitus e significa dedo. Também é curioso observar que nosso sistema habitual de numeração é base 10, correspondendo ao número de dedos das mãos.

Neste trabalho empregamos a palavra conjunto várias vezes e por essa razão daremos uma descrição a respeito de seu significado. Para exemplificar, imagine todos alunos de uma escola. É claro que esses alunos são, individualmente, entes determinados e possum em comum a propriedade de estarem matriculados nesta escola. Qualquer outro indivíduo que não tenha feito sua matrícula nesta escola não é considerado aluno dela. Portanto, se falarmos no conjunto dos alunos desta escola, nos referimos à algo bem determinado e tal que, dada uma pessoa qualquer, podemos averiguar com rigor se ela pertence ou não ao conjunto dos alunos desta escola.

Dessa forma, vamos apresentar a seguir a noção básica que nos permite considerar os conjuntos como objetos matemáticos.

Definição 1 *Em geral, dizemos que um conjunto de certos elementos está bem definido quando:*

(a) seus elementos são entidades determinadas;

(b) além disso, existe a possibilidade de verificar se um elemento qualquer, dado ao acaso, pertence ou não ao conjunto.

Representamos os conjuntos, usualmente com letras maiúsculas e seus elementos, usualmente com letras minúsculas. Por exemplo, um conjunto A, com elementos a, b e c, pode ser representado na forma $A = \{a, b, c\}$. Esta é a forma explícita de se representar os conjuntos. Além da forma explícita, podemos representar os conjuntos pelas características dos elementos que o compõe, dita forma implícita. Por exemplo, o conjunto formado pelos elementos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, representado na forma explícita, pode ser expresso na forma implícita por $A = \{x \mid 0 \leq x < 10 \text{ } e \text{ } x \text{ } é \text{ } inteiro \}$

Suponhamos que uma pessoa, de posse do conhecimento dos números naturais, queira contar uma coleção de objetos. Qual o procedimento? Aponta para um dos objetos e fala: um; aponta para outro e fala: dois; e continua dessa forma até que chegue no último objeto, e fala: n, para algum número natural n. Dizemos que a coleção possui n elementos.

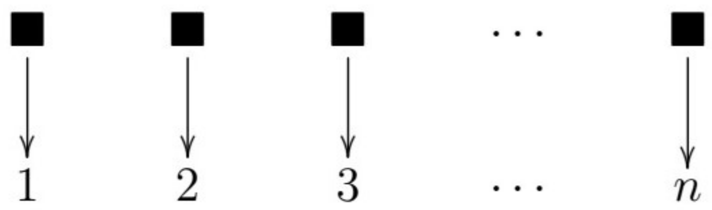

Figura 1.1: Exemplo da função injetora que realiza contagem.

Sendo A o conjunto desses objetos e denotando $I_n = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$, o procedimento de contar acima nos permite obter uma função $f : A \to I_n$ que a cada elemento $a \in A$ associa biunivocamente o elemento $f(a) \in I_n$. Quando existe uma função desse tipo, dizemos que o conjunto X é finito e n é sua cardinalidade. Tendo isso em mente, passamos para a seguinte definição:

Definição 2 *Chamamos de cardinalidade de um conjunto, a quantidade de elementos que este possui. Podemos representar como $|A|$, $n(A)$ ou $\#A$.*

Por exemplo, sendo A os conjunto dos números primos menores que 20, temos que $n(A) = 8$ pois

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

Os problemas de contagem se ocupam de obter a cardinalidade de conjuntos finitos. Destacamos dois tipos de conjuntos especiais, são eles:

1. Conjunto unitário: Conjunto que possui um único elemento. Por exemplo, $A = \{a\}$ e nesse caso $n(A) = 1$.

2. Conjunto vazio: Conjunto que não possui elementos e é denotado por $\emptyset$, podendo ser caracterizado de diversas maneiras, como por exemplo, $\emptyset = \{x : x \neq x\}$. Para esse conjunto temos que $n(\emptyset) = 0$.

Seja $A = \{a, b, c\}$ um conjunto. Dizemos que o elemento a pertence ao conjunto A (da mesma forma os elementos b e c também pertencem ao conjunto A). Utilizamos a notação $a \in A$ (lê-se a pertence ao conjunto A), para indicar que a é um elemento do conjunto A. Existem casos de elementos que não pertencem ao conjunto. De acordo com a forma que o conjunto A foi escrito de forma explícito, sabemos que d não é um elemento do conjunto A. Neste caso utilizamos a notação $d \notin A$ (lê-se d não pertence ao conjunto A).

Definição 3 *Seja A e B dois conjuntos. Dizemos que A é um subconjunto de B, ou que A está contido em B, quando todo elemento do conjunto A também é elemento do conjunto B. Esta relação é denotada por $A \subset B$ (Lê-se A está contido em B). De forma equivalente, podemos denotar por $B \supset A$ (Lê-se B contém A).*

Tomemos, por exemplo, os conjuntos $A = \{a, c, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$. Como todos os elementos de A também é elemento de B, podemos afirmar que $A \subset B$.

Agora se $A = \{a, c, e, f\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$, verificamos que $f \in A$ porém $f \notin B$ assim, concluímos que A não está contido em B, ou que B não contém A. Essas duas últimas afirmações, podem ser denotados, respectivamente por $A \not\subset B$ e $A \not\supset B$.

Dois conjuntos podem ser iguais, por ter os mesmos elementos, mesmo sendo apresentados em ordens distintas. Exemplo: $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, a, b\}$ são conjuntos iguais. Podemos dizer também que A e B são representações do mesmo conjunto. Neste caso, temos a dupla inclusão, ou seja, é correto afirmar que $A \subset B$ e $B \subset A$. Em geral, para provar a validade da igualdade entre dois conjuntos, basta que ocorra essa dupla inclusão.

Para falarmos das próximas definições, tomemos os seguintes conjuntos:

1. $A = \{a, b, c, d, e\}$,
2. $B = \{a, e\}$,
3. $C = \{b, c, d\}$.

Notemos que o conjunto B está contido no conjunto A, pois todos os elementos de B pertencem ao A. E, devido a isso podemos escrever, utilizando a forma implícita $B = \{x \in A \mid x \textit{ é uma vogal }\}$, já que a propriedade de B é "Ser um elemento de A e ser uma vogal". Contudo, o conjunto C também está contido no conjunto A, e não existe elementos de C que obedecem às propriedades de B. Então, a representação da forma implícita de C será $C = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Definição 4 *Conjunto Universo é aquele que contém todos os elementos que estão sendo considerados.*

No exemplo anterior, o conjunto A, seria o conjunto universo. Em algumas situações, o conjunto universo pode ser representado pela letra U.

Definição 5 *Se $A \subset U$, definimos o conjunto complementar de A por*

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Propriedades: 1 *Sejam U o conjunto universo e $A, B \subset U$ subconjuntos quaisquer de U. Então, os conjuntos complementares tem as seguintes propriedades:*

P1: $\overline{\emptyset} = U$

P2: $\overline{U} = \emptyset$

P3: $\overline{\overline{A}} = A$

P4: Se $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A}$ *e se* $x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A$

P5: $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ *(contrapositiva)*

1.1 Operações entre conjuntos

Definição 6 *Consideremos dois conjuntos A e B, subconjuntos de U. Definimos diferença entre os conjuntos A e B (ou simplesmente $A - B$), como*

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Tomemos os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{f, g\}$. Daí,

$$A - B = \{a, b\}, \quad B - A = \{f, g\}, \quad B - C = \{c, d, e\} \text{ e } C - B = \emptyset.$$

Observações:

1. Se A for um subconjunto de B, então $A - B = \emptyset$ e $B - A = \overline{A}$.

2. Se A e B forem dois conjuntos disjuntos, então $A - B = B - A = \emptyset$.

3. Por 1, temos que a diferença entre conjuntos não é uma operação que vale a comutatividade.

Definição 7 *Consideremos dois conjuntos A e B. Definimos união entre os conjuntos A e B como*

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

isto é, o conjunto união, possui os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos envolvidos.

Tomemos os conjuntos $A = \{b, c, d, f\}$ e $B = \{a, e, f\}$. Então,

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

Em termos gerais, definimos a união dos conjuntos A_1, A_2, A_3 ,$\cdots$,A_n por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \big\{x \in U \mid x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } x \in A_3 \text{ ou } \cdots \text{ ou } x \in A_n\big\}$$

Propriedades: 2 *Sejam U o conjunto universo e $A, B, C \subset U$ subconjuntos quaisquer de U. Então, a união de conjuntos tem as seguintes propriedades:*

P1: $A \cup \emptyset = A$

P2: $A \cup U = U$

P3: $A \cup A = A$ *(idempotente)*

P4: $A \cup B = B \cup A$ *(comutativa)*

P5: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativa)*

Definição 8 *Consideremos dois conjuntos A e B. Definimos como interseção entre os conjuntos A e B como*

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\},$$

isto é, o conjunto interseção possui os elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

Tomemos os conjuntos $A = \{b, c, d, f\}$ e $B = \{a, e, f\}$. $A \cap B = \{f\}$.

Em termos gerais, podemos representar a interseção dos conjuntos A_1, A_2, A_3,$\cdots$, A_n por

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \big\{x \in U \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } x \in A_3 \text{ e } \cdots \text{ e } x \in A_n\big\}$$

Propriedades: 3 *Sejam U o conjunto universo e $A, B, C \subset U$ subconjuntos quaisquer de U. Então, a intersecção de conjuntos tem as seguintes propriedades:*

P1: $A \cap \emptyset = \emptyset$

P2: $A \cap U = A$

P3: $A \cap A = A$ *(idempotente)*

P4: $A \cap B = B \cap A$ *(comutativa)*

P5: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(associativa)*

P6: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *e* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(teorema de Morgan)*

Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se, e somente se, eles não possuem elementos comuns, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

Pode se também combinar as operações de união e intersecção de conjuntos, ou seja, fazer a sua distribuição.

Propriedades: 4 ***(Distributiva)*** *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, temos as seguintes propriedades distributivas:*

P1: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

P2: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Definição 9 *Dados dois conjuntos A e B. Definimos como produto cartesiano $A \times B$, o conjunto dos pares ordenados (a, b), onde a é elemento de A e b é elemento de B. Podemos representar implicitamente por*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Em termos gerais, podemos representar o produto cartesiano dos conjuntos A_1, A_2, $A_3, \cdots$, A_n por

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n = \left\{(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) \in U \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ a_3 \in A_3, \cdots,\ a_n \in A_n\right\}$$

Sendo $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ o conjunto de todas as n-uplas.

Definição 10 *Seja A um conjunto não-vazio. Chamamos de uma partição de A, a família de subconjuntos não vazios A_1, A_2, $A_3, \cdots$, A_n tais que:*

1. *A união de todos os subconjuntos seja o próprio A ($\cup_{i=1}^{n} A_i = A$).*

2. *A interseção entre dois subconjuntos distintos seja vazia.*

1.2 Princípio aditivo e princípio multiplicativo

Nessa seção apresentamos algumas situações que motivam os princípios essenciais da contagem.

Problema 1 *Suponha que José tem as opções de assistir 4 filmes que estão em cartaz e também assistir 2 eventos de apresentações musicais, todos pagos. Quantos são os programas que José pode fazer, sabendo que ele tenha dinheiro para apenas um dos eventos?*

Resolução. Como ele tem dinheiro apenas para assistir um dos eventos, então ele pode assistir ao filme 1 ou ao filme 2 ou ao filme 3 ou ao filme 4 ou ao show 1 ou ao show 2. Dessa forma, ele tem 4+2=6 opções diferentes.

Problema 2 *Uma pessoa vai comprar um carro, e o vendedor verifica que está disponível o modelo A com 3 tipos de cores, sendo amarelo, azul e marrom e o modelo B com 2 tipos de cores, sendo branco e preto. Sabendo que ele vai comprar apenas um carro, quantas opções de escolha ele tem para realizar a sua compra?*

Resolução. Como ele vai comprar apenas um carro, temos as seguintes opções;

1. Modelo A amarelo;
2. Modelo A azul;
3. Modelo A marrom;
4. Modelo B branco;
5. Modelo B preto.

Logo, essa pessoa tem 5 opções de escolha.

Problema 3 *Uma lanchonete oferece um combo na promoção: Na compra de um salgado ganhe uma bebida. O cliente que comprar o combo possui 2 opções de salgado e 4 opções de bebida. Quantas formas de formar o combo esse cliente possui?*

Resolução. Organizando os casos possíveis, temos;

1. Salgado A e bebida A;

2. Salgado A e bebida B;
3. Salgado A e bebida C;
4. Salgado A e bebida D;
5. Salgado B e bebida A;
6. Salgado B e bebida B;
7. Salgado B e bebida C;
8. Salgado B e bebida D;

Então, o cliente tem 8 opções de montar o seu combo.

Problema 4 *Suponha que no exemplo 2, o cliente queira comprar 2 dos carros oferecidos pelo vendedor. Quantas opções de escolha ele possui?*

Resolução. Organizando as opções de escolha temos;

Nota: Realizar por exemplo, a compra modelo A amarelo e modelo A azul, e realizar a compra modelo A azul e modelo A amarelo, gera o mesmo resultado, isto é, são a mesma compra.

1. Modelo A amarelo e Modelo A amarelo;
2. Modelo A amarelo e Modelo A azul;
3. Modelo A amarelo e Modelo A marrom;
4. Modelo A amarelo e Modelo B branco;
5. Modelo A amarelo e Modelo B preto;
6. Modelo A azul e Modelo A azul;
7. Modelo A azul e Modelo A marrom;
8. Modelo A azul e Modelo B branco;
9. Modelo A azul e Modelo B preto;
10. Modelo A marrom e modelo A marrom;

11. Modelo A marrom e modelo B branco;

12. Modelo A marrom e modelo B preto;

13. Modelo B branco e Modelo B branco;

14. Modelo B branco e Modelo B preto;

15. Modelo B preto e Modelo B preto;

Assim, o cliente teria 15 opções de escolhas.

Problema 5 *Suponha que no exemplo 2, o cliente queira comprar 2 dos carros de modelos distintos oferecidos pelo vendedor. Quantas opções de escolha ele possui?*

Resolução. Organizando as opções de escolha temos;

Nota: Realizar por exemplo, a compra modelo A amarelo e modelo B preto, e realizar a compra modelo B preto e modelo A amarelo, gera o mesmo resultado, isto é, são a mesma compra.

1. Modelo A amarelo e Modelo B branco;

2. Modelo A amarelo e Modelo B preto;

3. Modelo A azul e Modelo B branco;

4. Modelo A azul e Modelo B preto;

5. Modelo A marrom e modelo B branco;

6. Modelo A marrom e modelo B preto.

Assim, o cliente teria 6 opções de escolha (12, se contarmos as compras de cores distintas que geram o mesmo resultado).

Os exemplos 1 e 2 obedecem a um mesmo princípio básico, que chamamos de princípio aditivo.

Teorema 1 ***(Princípio Aditivo)*** *Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B \neq \varnothing$), com respectivamente m e n elementos, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos.*

Demonstração: 1 *A demonstração é feita utilizando a cardinalidade de um conjunto gerado da união de pelo menos outros dois conjuntos disjuntos (Ver: Franco, 2020) .*

Voltando ao exemplo 2, vamos identificar os conjuntos:

1. $A = \{x \mid x \text{ é um carro do modelo } A\ \} = \{\ amarelo,\ azul,\ marrom\ \}$.

2. $B = \{y \mid y \text{ é um carro do modelo } B\ \} = \{\ branco,\ preto\ \}$.

Onde $A \cup B = \{z \mid z \text{ é um carro do modelo } A \text{ ou carro do modelo } B\ \}$. Verifique que a quantidade de elementos que o conjunto $A \cup B$ possui é exatamente cinco: três do conjunto A e dois do conjunto B.

Extensão do Princípio Aditivo: Se $A_1,\ A_2,\ A_3, \cdots,\ A_n$ são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\cup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Teorema 2 ***(Princípio multiplicativo)*** *Também chamado de princípio fundamental da contagem, nos diz que se há n_1 modos de tomar a decisão D_1 e n_2 modos de tomar a decisão D_2, então há $n_1 \cdot n_2$ modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2.*

Demonstração: 2 *A diferença da demonstração do Princípio Aditivo, é a utilização do princípio da indução matemática (Ver: Franco, 2020).*

$$\begin{array}{cc} \underline{\quad n_1 \quad} & \underline{\quad n_2 \quad} \\ \downarrow & \downarrow \\ \textit{Decisão 1} & \textit{Decisão 2} \end{array}$$

Voltemos ao exemplo 3, existem 2 modos de tomar a 1ª decisão D_1 (comprar um salgado) e 4 modos de se tomar a 2ª decisão D_2 (escolher uma bebida), resultando em $2 \cdot 4 = 8$ modos de escolha.

O princípio multiplicativo pode também ser visto como a ferramenta para contar a quantidade de elementos de um produto e apresentamos a seguir essa versão.

O princípio multiplicativo pode ser naturalmente estendido para uma quantidade finita de conjuntos: Sejam $A_1,\ A_2, \cdots,\ A_n$ conjuntos quaisquer, e se A_i possui a_i elementos, então

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Com estes dois princípios podemos resolver diversos problemas de análise combinatória, sem fazer uso de qualquer fórmula. Não se deve pensar que Análise Combinatória é uma coleção de fórmulas a serem decoradas. As fórmulas serão usados para resolver problemas que tenham os mesmos padrões de formação, porém, é a partir dos princípios aditivo e multiplicativo que obteremos tais fórmulas.

Problema 6 *Dois conjuntos, A e B, tem respectivamente 4 e 6 elementos distintos.*

1. *Quantas funções $f : A \to B$ existem?*

   Resolução. Vamos denotar $A = a_1, a_2, a_3, a_4$. Para construirmos uma função de A em B, observamos que cada elemento de A deve corresponder a um único elemento de B. Temos 6 escolhas para a imagem de a_1, 6 escolhas para a imagem de a_2, 6 escolhas para a imagem de a_3 e 6 escolhas para a imagem de a_4.

   $$\begin{array}{cccc} \underline{\quad 6 \quad} & \underline{\quad 6 \quad} & \underline{\quad 6 \quad} & \underline{\quad 6 \quad} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{imagem de } a_1 & \text{imagem de } a_2 & \text{imagem de } a_3 & \text{imagem de } a_4 \end{array}$$

   Pelo princípio multiplicativo, temos que existem $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ funções distintas de A para B.

2. *Quantas funções $f : A \to B$ são injetoras?*

   Resolução. Continuando com a mesma notação do item anterior e observando que para que a função ser injetora, os elementos de A devem estar associados a elementos distintos de B. Dessa forma, temos 6 escolhas para a imagem de a_1, 5 escolhas para a imagem de a_2, 4 escolhas para a imagem de a_3 e 3 escolhas para a imagem de a_4.

   $$\begin{array}{cccc} \underline{\quad 6 \quad} & \underline{\quad 5 \quad} & \underline{\quad 4 \quad} & \underline{\quad 3 \quad} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{imagem de } a_1 & \text{imagem de } a_2 & \text{imagem de } a_3 & \text{imagem de } a_4 \end{array}$$

   Pelo princípio multiplicativo, temos que existem $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 6^4 = 360$ funções injetoras de A para B.

Problema 7 *A quantidade de subconjuntos de um conjunto A com n elementos é 2^n.*

Resolução. Antes de verificar o caso geral, vamos considerar alguns casos:

1. Se $A = \emptyset$, então seu único subconjunto é $\emptyset$. Dessa forma, o resultado acima vale se $n = 0$.

2. Se $A = \{a\}$, então seus subconjuntos são: $\emptyset, \{a\} = A$ e o resultado vale para $n = 1$, gerando 2 subconjuntos.

3. Se $A = \{a, b\}$, então seus subconjuntos são $\emptyset, \{a\}, \{b\}.\{a, b\} = A$. Assim, um conjunto com $n = 2$ elementos possui $2^2 = 4$ subconjuntos.

Agora para um conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ com n elementos, observamos que qualquer subconjunto B seu pode ser obtido pelo seguinte procedimento: primeiro decidimos se a_1 vai pertencer ou não à B; em seguida decidimos se a_2 vai pertencer ou não à B e prosseguimos desse modo até chegar no elemento a_n. Veja que para obtenção de B, temos n decisões a serem tomadas e com apenas duas possibilidades: o elemento pertence ou não ao subconjunto B. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, existem

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n \text{ subconjuntos de } A$$

Problema 8 *Quantos números de dois algarismos, distintos ou não, podemos formar utilizando os dígitos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?*

Resolução. Cada número pode ser considerado como um par ordenado (a, b) onde $a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $b \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sendo assim: $7 \cdot 7 = 49$ formações possíveis.

Problema 9 *Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 4, 5, 6, 7 e 8?*

Resolução. Cada número pode ser representado como um par ordenado (a, b), onde $a \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $b \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e $a \neq b$. Assim, podemos formar $5 \cdot 4 = 20$ números.

Problema 10 *Determine quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.*

Resolução. Cada número pode ser representado como uma tripa ordenada $A, b, c)$ tal que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $a \neq b \neq c$. Portanto, podemos formar $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ números.

Problema 11 *Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, quantos números impares, com três algarismos distintos, podem ser formados?*

Resolução. Cada sequência é uma tripla ordenada (a, b, c) tal que $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $b \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ e $c \in \{1, 3\}$. Respeitando $a \neq b \neq c$, temos $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$ possíveis formações.

Problema 12 *Com os algarismos 0, 1, 2, 5 e 6, sem repetição, quantos números compreendidos entre 100 e 1000 podemos formar?*

Resolução. Dividimo este execício em três casos, já que não podemos, em hipótese alguma utilizar o zero como primeiro dígito. Assim, temos o 1º caso, em que nenhum dos elementos que compõe a tripla ordenada (a, b, c) pode ser zero. Assim, $a \in \{1, 2, 5, 6\}$, $b \in \{1, 2, 5, 6\}$ e $c \in \{1, 2, 5, 6\}$ com a, b e c distintos, gera $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números.

O segundo caso coloquemos o $b = 0$, assim $a \in \{1, 2, 5, 6\}$, $b \in \{0\}$ e $c \in \{1, 2, 5, 6\}$ e como a, b e c são distintos, gera $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$ números.

Por fim temos o terceiro caso, no qual colocaremos $c = 0$. Assim, $a \in \{1, 2, 5, 6\}$, $b \in \{1, 2, 5, 6\}$ e $c \in \{0\}$, como a, b e c são distintos, gera 12 números.

Como qualquer um dos três casos resolve nosso problema, temos um total de $24 + 12 + 12 = 48$ números possíveis.

Problema 13 ***(Os sistema de emplacamento de automóveis)*** *No Brasil, o DENATRAN (Departamento Nacional de Trânsito), decretou que a partir do dia 1º de setembro de 2018, o sistema de emplacamento de automóveis, iria ser mudado para o sistema utilizado nos paises que integram o bloco econômico MERCOSUL. Porém, este sistema é o quinto adotado em nosso país, sendo em que a cada modelo, facilitava mais a fiscalização e ainda aumentava a quantidade de placas que poderiam ser emitidos.*

No início, as placas eram todas emitidas pelo município, cabendo exclusivamente a eles a fiscalização e a emissão. O primeiro sistema de placas (também denominado as placas pretas) foi inaugurado em 1901 e foi utilizado até 1941, e possuía as seguintes regras:

1. *O primeiro dígito era sempre uma das duas letras A (para carros alugados) e P (para carros particulares).*

2. *Os dígitos seguintes, dependiam da ordem que as placas eram emitidas, isto é, a primeira placa recebia o número 1, a segunda placa recebia o digito 2 e assim por diante, até no máximo a numeração 99.999.*

Resolução. Pelo princípio multiplicativo, temos 2 opções para o 1º dígito e até 99.999 opções para a numeração, resultando em 199.998 possíveis placas emitidas por município.

Figura 1.2: Placa do sistema de placas pretas.
(Fonte:
https://site.vistoriapro.com.br/blog/historia-e-evolucao-das-placas-de-carro-do-brasil/)

Já o segundo modelo de emplacamento teve início em 1941, as placas continuaram sendo emitidas e fiscalizadas por municípios até o seu fim em 1969. As mudanças de regras incluíam:

1. As categorias eram indicadas agora por cores: placas laranjas com letras pretas indicavam veículos particulares e pacas vermelhas com números brancos indicavam os veículos que eram alugados.

2. Os dígitos eram apenas algarismos, respeitando a regra anterior: a primeira placa emitida recebia o número 1, a segunda placa recebia o número 2, e assim por diante, até no máximo a numeração 9.999.999.

3. Não importavam a categoria, os dígitos não poderiam se repetir. Assim, se um carro alugado recebesse a numeração 987, um carro particular não poderia receber a numeração 987.

Portanto, o segundo modelo de emplacamento conseguia registrar até 9.999.999 veículos.

Figura 1.3: Placas do segundo sistema.
(Fonte:
https://site.vistoriapro.com.br/blog/historia-e-evolucao-das-placas-de-carro-do-brasil/)

Ainda nesse segundo sistema, o estado de São Paulo, decidiu utilizar um sistema próprio de registro, para que não houvesse confusão entre os municípios, utilizou ainda duas letras iniciais nas placas para indicar a região do estado, no qual o veículo foi registrado: Elas começavam com a letra S combinada ou não a outra letra para identificar a região administrativa em que o carro era registrado. Assim,

1. A letra S sozinha indicava os carros da capital;
2. SG identificava os carros da Grande São Paulo;
3. SC os carros da região de Campinas;
4. SJ os carros da região de São José dos Campos;
5. SO para a região de Sorocaba;
6. SP para Presidente Prudente e região;
7. SR para Ribeirão Preto e região;
8. SS para Santos e Baixada;
9. SB para Bauru e região;
10. SA para Araçatuba e região.

Então, pelo princípio multiplicativo, temos 9.999.999 opções para a numeração das placas e 10 regiões possíveis para o registro, totalizando 99.999.990 placas distintas.

Já no terceiro sistema te emplacamento (1969-1999), também chamado de sistema alfa-numérico, mudou as regras normais, se inspirando no sistema paulista, fez dois modelos distintos dependendo do veículo que fosse aplicado.

Nos veículos de 2 ou 3 rodas, as regras eram:

1. Os dois dígitos iniciais eram necessariamente letras.

2. Os três dígitos finais eram necessariamente algarismos.

Assim, pelo princípio multiplicativo, eram 26 opções para cada um dos dígitos iniciais, e 10 opções para cada um dos 3 dígitos finais: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676.000$ combinações iniciais para o emplacamento das motocicletas/triciclos.

Nos veículos de 4 ou mais rodas, as regras eram:

1. Os dois dígitos iniciais eram necessariamente letras.

2. Os quatro dígitos finais eram necessariamente algarismos.

Assim, pelo princípio multiplicativo, eram 26 opções para cada um dos dígitos iniciais, e 10 opções para cada um dos 3 dígitos finais: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.760.000$ combinações iniciais para o emplacamento das motocicletas/triciclos.

Figura 1.4: Placas do modelo alfa numérico.
(Fonte:
https://site.vistoriapro.com.br/blog/historia-e-evolucao-das-placas-de-carro-do-brasil/)

Porém, as combinações das eram distribuídas por regiões administrativas, afim de evitar placas repetidas no mesmo estado, permitindo o registro de 675.324 motos e triciclos e 6.759.324 automóveis e afins por estado. Note que houve uma diminuição do número de placas possíveis, de 9.999.999 para $675324 + 6759324 = 7.434.648$ placas nacionais, contudo, facilitava mais a fiscalização dos veículos.

No período de 1990 á 2020, começou a ser utilizado o nosso quarto sistema: o registro nacional. Sendo implementado inicialmente no Paraná, e completamente utilizado no Brasil em 1999, as regras envolviam:

1. Os três primeiros dígitos são letras do alfabeto.

2. Os quatro últimos dígitos eram algarismos.

Portanto, existem $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$ combinações de placas para esse quarto tipo.

Figura 1.5: Placas do sistema registro nacional.
(Fonte:
https://site.vistoriapro.com.br/blog/historia-e-evolucao-das-placas-de-carro-do-brasil/)

Por fim, chegamos no sistema de emplacamentos da MERCOSUL, que se difere do quarto sistema apenas no quinto dígito, que deve ser uma letra.

Figura 1.6: Placas do sistema Mercosul.
(Fonte:
https://site.vistoriapro.com.br/blog/historia-e-evolucao-das-placas-de-carro-do-brasil/)

Logo, o sistema MERCOSUL, permite um total de $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 =$ 456.976.000 combinações de placas.

Para fins de comparação, verifique na tabela 1.1 a quantidade de possíveis emissões de um sistema de emplacamento para outro.

Tabela 1.1: Comparação entre os sistemas de emplacamentos.

Sistema de Emplacamento	Qtde Possíveis Emissões	Acréscimo na Qtde de Placas
As Placas Pretas	199.998	-
As Placas Numéricas	9.999.999	9800001
As Placas Alfanuméricas	7.434.648	-2565351
O Registro Nacional	175.760.000	168325352
As Placas do Mercosul	456.976.000	281216000

Problema 14 ***(O acréscimo do dígito aos números de telefone)*** *Atualmente, os números telefônicos de celular que estão em território nacional possuem a seguinte característica:*

1. *Os dois primeiros dígitos são reservados ao DDD (Discagem Direta à Distância), que faz referência a macrorregião na qual o número do telefone foi cadastrado.*
2. *O terceiro dígito, deve ser o número 9.*
3. *O quarto dígito deve ser um número de 6 a 9 (a combinação do terceiro e o quarto dígito referencia a operadora que presta o serviço telefônico para o número cadastrado).*
4. *Os sete próximos dígitos podem ser quaisquer algarismos.*

Resolução. Hoje, o Brasil possui 67 macrorregiões. Então, pelo princípio multiplicativo podemos afirmar que existem $1 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 40.000.000$ de números que podem ser cadastrados por macrorregião, e como existem 67 macrorregiões, o Brasil têm, atualmente 2.680.000.000 números para serem efetuados o cadastramento de linhas telefônicas, mas nem sempre foi assim. Antes do acesso de aparelhos celulares, os telefones fixos eram os responsáveis pela comunicação.

Em Cuiabá-MT, até no início dos anos 2000 os telefones fixos eram compostos por:

1. Os dois primeiros dígitos indicam a estação na qual o seu telefone está cadastrado (No caso de Cuiabá,MT eram os dígitos 65 e o 66).

2. Os cinco próximos dígitos eram quaisquer números. Então, na região de Cuiabá, pelo princípio multiplicativo podemos concluir podia ter registrado até 200.000 números de telefones fixos.

Porém, em diversos estados do Brasil, houve-se necessidade de mudar essas regras, pois principalmente na região de São Paulo estava tendo uma falta muito grande de opções de números de telefones para cadastrar, então houve-se necessidade de mudar a forma que os números eram gerados. As novas regras, o estado de Mato Grosso são as seguintes:

1. O primeiro dígito deve ser o 0 (zero);

2. Os dois próximos dígitos devem ser o código da operadora de telefone (atualmente temos 6);

3. Os dois próximos dígitos devem ser o DDD da região, que são os números 65 e 66.

4. O sexto dígito deve ser ou o algarismo 2 ou o algarismo 3.

5. Os sete próximos dígitos podem ser quaisquer algarismos.

Então, pelo princípio multiplicativo, pode-se concluir que temos $1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 240.000.000$ números de telefones distintos no estado Mato-Grossense, havendo um acréscimo significativo de 239.800.000 novas opções, só nesta Unidade Federativa.

Contudo, paralelo a essa mudança nas regras de telefone fixo, houve também a modernização dos telefones celulares, que passaram a incluir algumas funções como mensagens de textos, músicas e jogos. E junto com essa modernização, veio algumas regras para gerar os números dos telefones celulares:

1. Os dois primeiros dígitos devem ser referentes ao DDD, e como vimos anteriormente, no estado de Mato-Grosso, possui 2: 65 e 66.

2. O terceiro e o quarto dígito devem indicar o número da operadora na qual a linha telefônica estaria cadastrada. Na época iniciou com 4 operadoras.

3. Os seis últimos dígitos poderiam ser quaisquer dos algarismos.

E, de acordo com o princípio multiplicativo, tínhamos $2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ 8.000.000 números de linhas distintos.

"A análise combinatória visa métodos que permitam contar o número de elementos de um determinado conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados por certas condições" (Hazzan, 1977, p.1-E).

No geral, os problemas de contagem estão relacionados com duas ações: ordenar e escolher. Porém, antes de apresentar essas técnicas, falaremos brevemente sobre fatorial, a operação fundamental para o desenvolvimento dessas técnicas. Christian Kramp foi um matemático francês e o primeiro a utilizar a notação $n!$, conforme consta em seu trabalho intitulado *Elements d'arithmétique universelle* de 1808.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Definamos como $n!$ (n-fatorial) como o produto de n por todos os números naturais que são menores que n.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

E definimos $0! = 1$ e $1! = 1$.

Daí,

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Como $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, podemos obter recursivamente $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$ e assim por diante.

Problema 15 *Mostre que a seguinte expressão é um quadrado perfeito.*

$$\frac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!}$$

Resolução.

$$\begin{aligned}
\frac{(n+2)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!} &= \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot (n-1)!} \\
&= (n+2) \cdot n + 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

Que é um quadrado perfeito.

1.2.1 Permutações

"[...]Uma parte das questões de análise combinatória frequentemente consiste em interpretação do enunciado, em deduzir o que se pede através do bom senso" (Franco, 2020, p.50).

Em geral, os problemas de permutações envolvem ordenamento de objetos distintos em fila. Dessa forma, cada permutação é uma reordenação dos elementos do conjunto dos n objetos, ou, mais simplesmente, uma ordenação do conjunto dos n objetos.

Usando notação matemática, podemos pensar em uma *permutação* em um conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ como qualquer bijeção $f : X \longrightarrow X$. Dizemos que um elemento x_i foi permutado com o elemento x_j através de uma permutação f se $f(x_i) = x_j$. Neste caso, escrevemos $x_i \overset{f}{\leftrightarrow} x_j$, ou simplismente $x_i \leftrightarrow x_j$

Problema 16 *Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Podemos considerar as seguintes permutações:*

1. *A identidade: $x_1 \leftrightarrow x_1$, $x_2 \leftrightarrow x_2$ e $x_3 \leftrightarrow x_3$.*

2. *$x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_2 \leftrightarrow x_1$ e $x_3 \leftrightarrow x_3$.*

3. *$x_1 \leftrightarrow x_3$, $x_2 \leftrightarrow x_2$ e $x_3 \leftrightarrow x_1$.*

4. $x_1 \leftrightarrow x_1,\ x_2 \leftrightarrow x_3$ *e* $x_3 \leftrightarrow x_2$.

5. $x_1 \leftrightarrow x_2,\ x_2 \leftrightarrow x_3$ *e* $x_3 \leftrightarrow x_1$.

6. $x_1 \leftrightarrow x_3,\ x_2 \leftrightarrow x_1$ *e* $x_3 \leftrightarrow x_2$.

Note que podemos abreviar a notação dessas 6 permutações escrevendo apenas as imagens dessas funções:

$$x_1x_2x_3, \quad x_1x_3x_2, \quad x_2x_1x_3, \quad x_2x_3x_1, \quad x_3x_1x_2, \text{ e } x_3x_2x_1.$$

Teorema 3 *O número de permutações P_n de um conjunto com n elementos é $n!$.*

Demonstração: 3 *Pelo princípio multiplicativo, o problema equivale a tomar n decisões, sendo:*

- n *opções para a 1ª decisão.*
- $n-1$ *opções para a 2ª decisão.*

  $\vdots$

- 2 *opções para a $(n-1)^{\underline{a}}$ decisão.*
- 1 *opções para a $n^{\underline{a}}$ decisão.*

Portanto,

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Problema 17 *Quantos são os anagramas da palavra LIVRO?*

Resolução.

> Por anagrama de uma certa palavra, entendemos como uma permutação qualquer das letras desta palavra, ainda que esta permutação não tenha sentido algum. Por exemplo, LIVRES é um anagrama de SERVIL, bem como EILSVR, sem do que este último não é uma palavra encontrada no dicionário (Franco, 2020, p.45).

Como LIVRO possui 5 letras, basta fazer a permutação de 5 termos.

$$\begin{aligned} P_5 &= 5! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Problema 18 *De quantos modos podemos dividir 6 objetos em um grupo de 2 objetos e um de 4 objetos?*

Resolução. Note que temos $6! = 720$ disposições para esses objetos em fila. Agora, veja que as disposições $ab - cdef$ e $ba - fedc$ são filas diferentes que geral as mesmas disposições de grupos. Então, cada divisão de grupos foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada grupo. Há $2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$ modos de arrumar os objetos em cada grupo. Portanto, $\dfrac{720}{48} = 105$ modos.

Problema 19 *Quantos são os divisores do número 125000?*

Resolução. Note, que pelo teorema fundamental da aritmética, podemos representar o número 125000 como o produto $2^3 \cdot 5^6$. Daí, conseguimos alguns divisores de 125000, como por exemplo:

- $40 = 2^3 \cdot 5^1$
- $50 = 2^1 \cdot 5^2$
- $4 = 2^2 \cdot 5^0$
- $125 = 2^0 \cdot 5^3$

Vendo os fatores da decomposição de 125000 verificamos facilmente que

1. O expoente do número 2 pode variar de 0 a 3: 2^0, 2^1, 2^2 ou 2^3.
2. O expoente do número 5 pode variar de 0 a 6: 5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5 ou 5^6.
3. Os divisores de 125000 são da forma $2^x \cdot 5^y$ em que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, resultando em 4 valores possíveis para o x e 7 para o y. Pelo princípio multiplicativo, $4 \cdot 7 = 28$.

Portanto, existem 28 divisores de 125000.

Existem ainda algumas outras formas de permutações (enfileiramento de objetos), que são:

1. Permutações com repetição.
2. Permutações circulares.

Permutações com repetição

Quando trabalhamos com permutações com repetição, estamos partindo da premissa de que no conjunto de objetos para enfileirar, existem objetos do mesmo valor, ou seja, haverá filas iguais contadas mais de uma vez. Por exemplo, para a palavra BABA, podemos contar erroneamente 24 anagramas, já que possui 4 letras e $4! = 24$. Porem alguns desses anagramas são iguais, e só é passível de distinção se indexarmos as letras. Usaremos B_1 para o primeiro B e B_2 para o segundo B de BABA, analogamente faremos o mesmo com A_1 e A_2. Portanto, fica:

- $B_1A_1B_2A_2$, a palavra original
- $B_1A_2B_2A_1$, trocando apenas os A's de posição.
- $B_2A_1B_1A_2$, trocando apenas os B's de posição.
- $B_2A_2B_1A_1$, trocando os A's e os B's de posição entre si.

Então, dos 24 anagramas, 4 formam a palavra BABA, ou seja, 4 repetidos. Assim, para eliminar da contagem os anagramas repetidas, verifiquemos que:

1. Existem 2 letras B que podem ser ordenadas de $P_2 = 2! = 2$ formas.
2. Existem 2 letras A que podem ser ordenadas de $P_2 = 2! = 2$ maneiras.

Portanto, o número de anagramas distintos da palavra BABA é $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$. São elas BABA - BAAB - ABBA - ABAB - AABB - BBAA.

Generalizando esse raciocínio: o número de permutações de n elementos, tais que um ou mais deles são repetidos é indicado por $P_n^{n_1,\ldots,n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$$

Em que $n_1, \ldots, n_k$ são representações da quantidade de vezes que os elementos que se repetem aparecem.

Problema 20 *Qual é o número de soluções da equação $x+y+z = 6$, em que, $x, y, z \in \mathbb{N}$.*

Resolução. A soma dos três números naturais é 6. Inicialmente, escrevemos as possibilidades disso acontecer, sem considerar a ordem. São elas:

$$0 + 0 + 6 = 6$$
$$0 + 1 + 5 = 6$$
$$0 + 2 + 4 = 6$$
$$0 + 3 + 3 = 6$$
$$1 + 1 + 4 = 6$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$2 + 2 + 2 = 6$$

Analisemos a solução quando $x = 0$, $y = 0$ e $z = 6$: Existem outras soluções com esses mesmos valores:

1. $x = 0$, $y = 6$ e $z = 0$,

2. $x = 6$, $y = 0$ e $z = 0$.

Assim, são 3 soluções obtidas permutando os números 0, 0 e 6. $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$. Da mesma forma, podemos permutar as outras soluções:

1. $x = 0$, $y = 1$ e $z = 5$: $P_3 = 6$.

2. $x = 0$, $y = 2$ e $z = 4$: $P_3 = 6$.

3. $x = 0$, $y = 3$ e $z = 3$: $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$.

4. $x = 1$, $y = 1$ e $z = 4$: $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$.

5. $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$: $P_3 = 6$.

6. $x = 2$, $y = 2$ e $z = 2$: $P_3^3 = \dfrac{3!}{3!} = 1$.

Portanto, a quantidade de soluções será $3 + 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 28$

Permutações circulares

Assim, como nas permutações simples, nesta estaremos ordenando objetos, com a particularidade de estarem sendo dispostos em círculo. Por exemplo:

Problema 21 *De quantas maneiras podemos distribuir 4 pessoas 4 cadeiras dispostas em círculo?*

Resolução. Denotemos essas pessoas como sendo A, B, C e D. Podemos distribuí-las da seguinte forma:

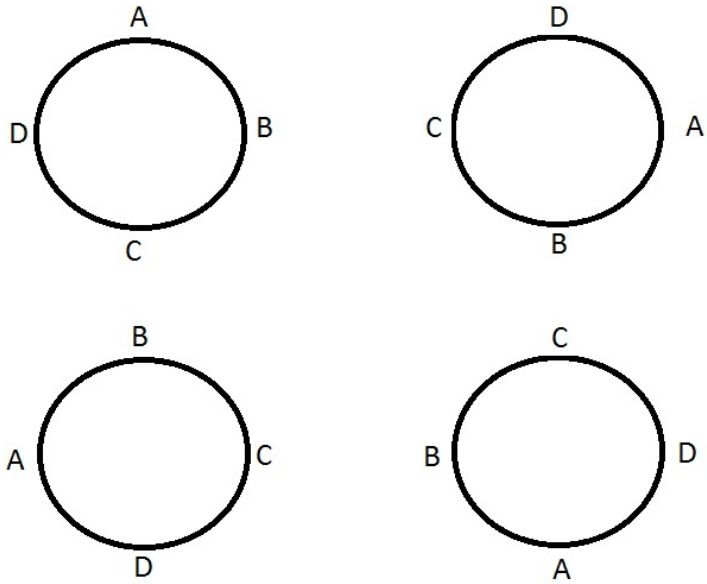

Figura 1.7: Quatro permutações simples.

Qualquer uma dessas disposições pode ser obtida da outra por meio da rotação, ou seja, apesar de ser 4 disposições diferentes em permutação simples, elas são apenas uma única permutação circular.

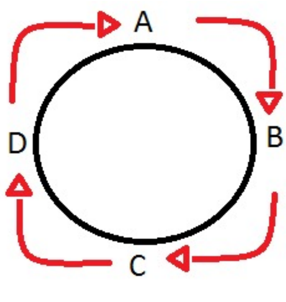

Figura 1.8: Uma permutação circular.

Logo, o numero de permutações circulares (denotaremos por PC_n) das 4 pessoas pode ser obtidas dividindo-se o número de permutações simples por 4.

$$PC_4 = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 6$$

Portando as pessoas podem dispor-se ao redor da mesa de 6 formas diferentes.

Generalizando o raciocínio para n pessoas:

1. O número de maneiras para ordenar os n elementos em fila é $P_n = n!$.

2. Existem n permutações simples que geram a mesma permutação circular, já que todas podem ser obtidas de uma permutação.

3. Portanto, para se obter o número de permutações circulares dos n elementos PC_n dividimos o número de permutações simples por n.

$$\begin{aligned} PC_n &= \frac{P_n}{n} \\ &= \frac{n(n-1)!}{n} \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

Portanto,

$$PC_n = (n-1)!$$

1.2.2 Arranjo simples

"Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a r $\{1 \leq r \leq m\}$ e qualquer r'upla (sequência de r elementos) formadas com elementos de M todos distintos" (Hazzan, 1977, p.13).

Problema 22 *Quantas palavras de 3 letras podemos formar utilizando apenas vogais distintas?*

Resolução. Existem 5 vogais distintas e tomaremos 3 decisões:

1. D_1: 5 opções.

2. D_2: 4 opções.

3. D_3: 3 opções.

Pelo princípio multiplicativo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Portanto, podemos formar 60 palavras.

Nesse exercício, escolhemos 3 elementos em um conjunto de 5 objetos. Agora generalizemos, isto é, escolher p elementos escolhidos de um grupo de n objetos.

Temos n elementos dos quais queremos tomar p. É um problema equivalente a termos n objetos com os quais queremos preencher p espaços. O primeiro lugar L_1 pode ser preenchido por qualquer um dos n elementos iniciais. Tendo preenchido o primeiro lugar, restam $n-1$ opções de escolha para preencher o segundo lugar L_2. Depois de preencher o segundo lugar L_2, restam $n-2$ opções de escolhas para preencher o terceiro lugar L_3. Seguindo esse raciocínio vamos preencher todos os p lugares e na p-ésima decisão teremos $n-(p-1)$ opções de escolha. Portanto,

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \big(n-(p-1)\big)$$

Como o resultado não se altera em caso de multiplicar e dividir pelo mesmo valor:

$$\begin{aligned} A_n^p &= \frac{\Big[n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \big(n-(p-1)\big)\Big] \cdot \Big[(n-p) \cdot (n-p-1) \cdots 2 \cdot 1\Big]}{\Big[(n-p) \cdot (n-p-1) \cdots 2 \cdot 1\Big]} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Problema 23 *Quantos números compreendidos entre 100 e 1000 são formados por algarismos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5?*

Resolução. Números entre 100 e 1000 tem 3 algarismos.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Portanto, existem 60 números.

Problema 24 *Um partido decide formar uma chapa para concorrer a uma das vagas do senado da república. Sabendo que 8 pessoas querem fazer parte dessa chapa e que a chapa deve ter um candidato ao senado, um representante para a 1ª suplência e outro representante para a 2ª suplência, quantas chapas podem ser formadas?*

Resolução. Como a ordem dos elementos importa, é um exercício de arranjo simples:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

Portanto, podem ser formadas 336 chapas.

1.2.3 Combinações simples

"Combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é o número natural onde $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas desses p elementos" (Santos et al., 2017, p.62).

O que torna a combinação simples diferente do arranjo simples é que enquanto no arranjo, a ordem em que os elementos aparecem importa, na combinação simples a ordem de escolha dos elementos não interessa. Por exemplo, se vamos escolher três pessoas para formar uma comissão na qual cada membro desempenhará uma função distinta, então teremos um problema de arranjo simples, enquanto que se a comissão for formada por 3 pessoas sem nenhuma distinção de suas funções, então teremos um problema de combinação simples.

Cada seleção de p objetos é chamada de combinação simples de p objetos escolhidos de n deles e representamos a quantidade de todas as combinações simples por C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Problema 25 *As combinações simples de 3 objetos escolhidos de $\{a, b, c, d\}$ são?*

Resolução. $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ e $\{b, c, d\}$. Portanto, $C_4^3 = 4$.

Para encontrar a fórmula para a resolução desses problemas, basta verificar que cada subconjunto de p elementos será contado $p!$ vezes. Por exemplo, para $p = 3$, temos que

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\},$$

e dessa forma, 3 elementos de um conjuntos formam $6 = 3!$ subconjuntos idênticos. Logo, para corrigir a contagem excedida pelo arranjo devido a essas permutações, devemos dividir A_n^p por $p!$ para obter C_n^p. Desse modo:

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{A_n^p}{p!} \\ &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \end{aligned}$$

Problema 26 *Quantos times de futebol de salão podemos formar utilizando 8 pessoas?*

Resolução. Como um time de futsal precisa de 5 integrantes, temos que escolher 5 pessoas das 8 pessoas. Assim,

$$C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

Portanto, podemos formar 56 times de futsal.

Problema 27 *Com 6 homens e 3 mulheres, quantas comissões com 4 pessoas com exatamente dois homens podemos formar?*

Resolução.

1. Devemos escolher dois dos seis homens:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

2. Como devemos ter 4 pessoas nessa comissão, e dois devem ser homens, as outras duas pessoas devem ser mulheres. Logo, devemos escolher 2 das 3 mulheres.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

3. Como tem 15 subcomissões formadas por homens e 3 formadas por mulheres, podemos formar $15 \cdots 3$ comissões com essas condições.

Problema 28 *Quantas diagonais tem um polígono regular?*

Resolução. Um polígono regular tem n vértices $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$. Cada segmento é determinado por um par não ordenado de vértices ($\overline{A_1A_4} \equiv \overline{A_4A_1}$). Combinando esses segmentos dois a dois, formaremos todos os segmentos possíveis, totalizando os lados e as diagonais. Esse total será C_n^2 menos a quantidade de segmentos que representam os lados do polígono, quando são escolhidos vértices adjacentes.

Como existem n lados o total de diagonais será:

$$\begin{aligned} d_n &= C_n^2 - n \\ &= \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - n \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} - n \\ &= \frac{n \cdot (n-1) - 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n-3)}{2} \end{aligned}$$

Para ilustar essa fórmula, temos que o número de diagonais dos seguintes polígonos regulares:

- Triângulo: $d_3 = \dfrac{3 \cdot (3-3)}{2} = 0$
- Quadrado: $d_4 = \dfrac{4 \cdot (4-3)}{2} = 2$
- Pentágono : $d_5 = \dfrac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$
- Hexágono: $d_6 = \dfrac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$

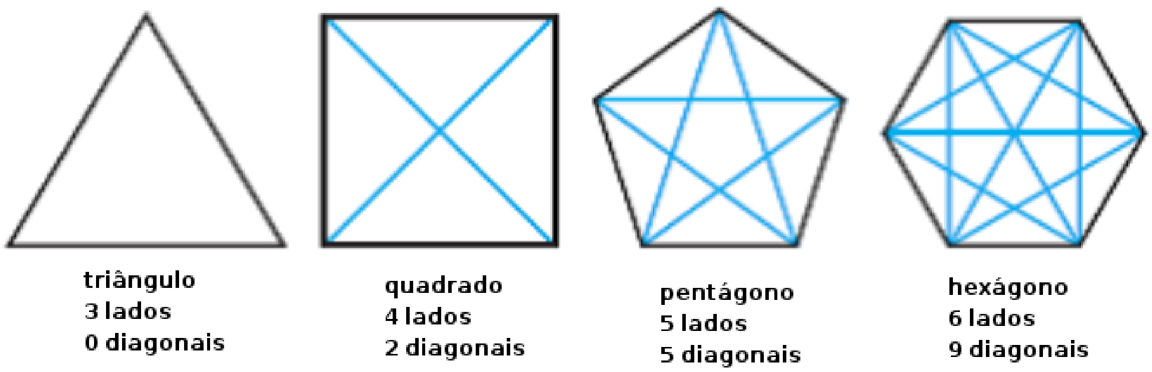

Figura 1.9: Diagonais de um polígono

Algumas propriedades de combinações

1. $C_n^0 = \dfrac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$

2. $C_n^n = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = \dfrac{n!}{n! \cdot 1} = 1.$

3. $C_n^1 = \dfrac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n.$

4. $C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)! \cdot (n+1-n)!} = \dfrac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1} = n.$

Combinações complementares

"Consideremos n objetos distintos. O número de maneiras de escolhermos p objetos é idêntico ao número de maneiras de escolhermos $(n-p)$ objetos" (Santos et al., 2017, p.65).

$$
\begin{aligned}
C_n^{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)! \cdot (n+p-n)!} \\
&= \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \\
&= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \\
&= C_n^p
\end{aligned}
$$

Problema 29 *De quantas formas pode-se escolher 3 números distintos do conjunto* $A = \{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ *de modo que a sua soma seja um múltiplo de 3?*

Resolução. Primeiramente, separemos o conjunto A em

- A_0 - deixam resto zero na divisão por 3, ou seja, $A_0 = \{x \in A \mid x = 3k,\ k = 1, 2, \cdots\} = \{3, 6, 9, \cdots, 48\}$.
- A_1 - deixam resto 1 na divisão por 3, ou seja, $A_1 = \{x \in A \mid x = 3k+1,\ k = 1, 2, \cdots\} = \{1, 4, 7, \cdots, 49\}$.
- A_2 - deixam resto 2 na divisão por 3, ou seja, $A_2 = \{x \in A \mid x = 3k+2,\ k = 1, 2, \cdots\} = \{2, 5, 8, \cdots, 50\}$.

Agora denominaremos $n(A)$ como a cardinalidade de A. Então, $n(A_0) = 16$, $n(A_1) = 17$ e $n(A_2) = 17$.

Se somarmos 3 números quaisquer de A_0, teremos um múltiplo de 3.

$$3k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3)$$

Essas escolhas podem ser feitas de $C_{16}^3 = 560$ maneiras.

O mesmo vale para os elementos de A_1 e A_2. Para A_1:

$$(3k_1 + 1) + (3k_2 + 1) + (3k_3 + 1) = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1)$$

Para A_2:

$$(3k_1 + 2) + (3k_2 + 2) + (3k_3 + 2) = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 2)$$

E ambos podem ser escolhidos $C_{17}^3 = 680$ maneiras.

E por fim, podemos somar um elemento de cada A_i:

$$\underbrace{3k_1}_{A_0} + \underbrace{(3k_2 + 1)}_{A_1} + \underbrace{(3k_3 + 2)}_{A_2} = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 1)$$

Cada escolha pode ser feita da forma: C_{16}^1 (escolhendo elementos de A_0), C_{17}^1 (escolhendo elementos de A_1) e C_{17}^1 (escolhendo elementos de A_2). Então, para realizar esse tipo de soma temos $16 \cdot 17 \cdot 17 = 5624$ maneiras.

Em vista disso, podemos escolher 3 números distintos de A, de modo a obter um número múltiplo de 3, de $C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3 + C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{17}^1 = 6544$

1.3 Princípio da inclusão e exclusão

Nesta parte vamos apresentar uma fórmula para calcular a quantidade total de elementos de um conjunto, que foi obtido através da união de conjuntos.

Problema 30 *Numa sala de aula que possui 25 alunos, 12 alunos se declararam simpatizantes do time Celtic F.C., 11 alunos se declararam simpatizantes do time Hearts e 6 se declararam simpatizantes de ambos os times citados. Quantos alunos se declararam simpatizantes de pelo menos um dos times?*

Resolução. Note que:

1. Caso somássemos 12 (Celtic), 11 (Hearts) e 6 (ambos) ultrapassaria a quantidade total de alunos da sala: $12 + 11 + 6 = 29 > 25$.

2. Por 1, indica que contamos alguns alunos 2 vezes. Portanto, precisamos de uma forma de excluir os alunos que foram contados duas vezes.

3. Ao somar 12 (Celtic) com 6 (ambos) estamos contando alguns alunos (6, para ser mais preciso) duas vezes, pois dos 12 que se declararam aos Celtic, 6 se declararam também ser simpatizantes dos Hearts. Ou seja, dos 12 que se declararam ao Celtic, 6 se declararam somente ao Celtic.

4. Ao somar 11 (Hearts) com 6 (ambos) estamos contando alguns alunos (6, para ser mais preciso) duas vezes, pois dos 11 que se declararam aos Hearts, 6 se declararam também ser simpatizantes dos Celtic. Ou seja, dos 11 que se declararam ao Hearts, 5 se declararam somente ao Hearts.

Para fazer a soma adequada, devemos utilizar o que foi descrito em 3 e 4, ou seja, devemos retirar os 6 alunos que se declararam aos dois times por serem os objetos que foram contados duas vezes. Assim, 12 (Celtic)+11(Hearts)-6(ambos)=17 alunos que se declararam simpatizantes de pelo menos um dos times (Celtic ou Hearts).

Lembrando que $n(A)$ para denota a cardinalidade de um determinado conjunto A. Iremos escrever $n(C)$, para a cardinalidade do conjunto "Celtic", $n(H)$ para a cardinalidade do conjunto "Hearts" e $n(C \cap H)$ para a cardinalidade do conjunto intersecção do conjunto Celtic e o conjunto Hearts.

Problema 31 *Numa sala de aula que possui 30 alunos, 12 alunos praticam basquete, 12 alunos praticam vôlei, 10 alunos praticam handball, 6 alunos praticam Basquete e vôlei, 5 praticam basquete e handball, 4 praticam vôlei e handball e, por fim, 3 alunos praticam basquete, vôlei e handball. Quantos alunos não praticam nenhum dos 3 esportes citados?*

Resolução. Utilizando a notação de cardinalidade temos:

1. $n(B) = 12$

2. $n(V) = 12$

3. $n(H) = 10$

4. $n(B \cap V) = 6$

5. $n(B \cap H) = 5$

6. $n(V \cap H) = 4$

7. $n(B \cap V \cap H) = 3$

Podemos representar, utilizando o diagrama de Venn a quantidade de elementos em cada um dos conjuntos, sendo o aro preto para o conjunto basquete, o aro verde para o conjunto vôlei e o aro laranja para o conjunto handball.

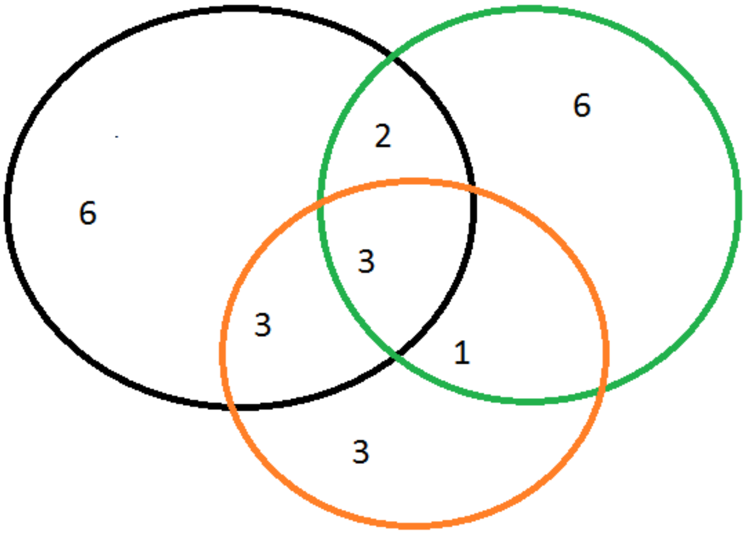

Figura 1.10: Diagrama de Venn para o exemplo 1.31.

Somando todos os termos temos:

$$12 + 12 + 10 - 6 - 5 - 4 + 3 = 22$$

Se 22 alunos praticam pelo menos um dos 3 esportes citados, e como a sala possui 30 alunos, logo 8 alunos não praticam nenhum dos 3 esportes citados.

1.3.1 Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos

Proposição 4 *(Princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos) Sejam dois conjuntos A e B quaisquer, a cardinalidade do conjunto $A \cup B$ é*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Demonstração: 4 *Sejam dois conjuntos A e B quaisquer. Os conjuntos $A-B$ e B são distintos, já que $A-B=\{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Portanto, $A \cup B$ pode ser escrito como a a união de dois conjuntos disjuntos $A \cup B = (A-B) \cup B$. Então, pelo princípio aditivo, a cardinalidade de $A \cup B$ é dada por*

$$n(A \cup B) = n(A-B) + n(B) \tag{1.1}$$

Verificamos também que o conjunto A pode ser obtido através da união de dois conjuntos disjuntos $A = (A-B) \cup (A \cap B)$. Então, a cardinalidade de A pode ser obtida por

$$n(A) = n(A-B) + n(A \cap B) \;\Leftrightarrow\; n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) \tag{1.2}$$

Substituindo a equação 1.1 na equação 1.2, temos

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A-B) + n(B) \\ &= n(A) - n(A \cap B) + n(B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Voltando ao caso do exemplo 30, pelo enunciado da questão temos que $n(C) = 12$ (quantidade de pessoas simpatizantes com o time Celtic), $n(H) = 11$ (quantidade de pessoas simpatizantes do time Hearts) e $n(C \cap H) = 6$ (quantidade de pessoas simpatizantes tanto com os Celtic quanto com o Hearts). Utilizando a Proposição 4 (princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos), temos

$$\begin{aligned} n(C \cup H) &= n(C) + n(H) - n(C \cap H) \\ &= 12 + 11 - 6 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Portanto, 17 alunos simpatizam com pelo menos um dos times. Como nesta sala possui 25 alunos, concluímos que 8 alunos não simpatizam com nenhum dos times citados.

1.3.2 Princípio da inclusão e exclusão para três conjuntos

Proposição 5 *(Princípio da inclusão e exclusão para três conjuntos) Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer, a cardinalidade do conjunto $A \cup B \cup C$ é*

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Demonstração: 5 *Pela propriedade associativa da união de conjuntos vale $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$. Então, suas cardinalidades também são iguais*

$$n(A \cup B \cup C) = n\big(A \cup (B \cup C)\big) \tag{1.3}$$

Podemos aplicar a Proposição 4 (princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos) no segundo membro da equação 1.3,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup (B \cup C)) \\ &= n(A) + n(B \cup C) - n\big(A \cap (B \cup C)\big) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Note que podemos usar a Proposição 4 (princípio da inclusão e exclusão para dois conjuntos) no termo $n(B \cup C)$ da equação 1.4

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \tag{1.5}$$

Substituindo a equação 1.5 na equação 1.4, temos

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B \cup C) - n\big(A \cap (B \cup C)\big) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n\big(A \cap (B \cup C)\big) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pela propriedade distributiva da intersecção de conjuntos, vale $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e, portanto, suas cardinalidades são iguais. Logo,

$$n\big(A \cap (B \cup C)\big) = n\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big) \tag{1.7}$$

Novamente podemos aplicar a Proposição 4 (princípio da inclusão e exclusão para *dois conjuntos) no segundo membro da equação 1.7,*

$$\begin{aligned} n\big(A \cap (B \cup C)\big) &= n\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big) \\ &= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n\big((A \cap B) \cap (A \cap C)\big) \\ &= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Substituindo a equação 1.8 na equação 1.6, temos

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n\big(A \cap (B \cup C)\big) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - \Big(n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)\Big) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

□

Problema 32 *Considere os conjuntos*

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 2 e } x \leq 100\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 3 e } x \leq 100\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 5 e } x \leq 100\}$$

Quantos elementos possui o conjunto $A \cup B \cup C$?

Resolução. A quantidade de múltiplos de um divisor d até um determinado número n é o maior número inteiro que não excede n/d. Assim, temos que o número de múltiplos de 2, 3 e 5 menores ou iguais a 100 são, respectivamente 50, 33 e 20 e portanto $n(A) = 50$, $n(B) = 33$ e $n(C) = 20$. Para usar a Proposição 5, precisamos determinar o número de elementos de todas as interseções desses conjuntos. O conjunto $A \cap B$ consiste nos múltiplos de 6 menores ou iguais a 100, logo $n(A \cap B) = 16$, $A \cap C$ são os múltiplos de 10 menores ou iguais a 100, que dá $n(A \cap C) = 10$ e $B \cap C$ é formado pelos múltiplos de 15 menores ou iguais a 100, donde $n(B \cap C) = 6$. O conjunto $A \cap B \cap C$ é formado pelos múltiplos de 30 menores que 100, que são apenas 3 e portanto $n(A \cap B \cap C) = 3$. Feito os cálculos, aplicamos a fórmula do princípio da inclusão e exclusão e obtemos

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 \\ &= 74 \end{aligned}$$

1.3.3 Caso geral

Teorema 6 *(Princípio da inclusão e exclusão) A cardinalidade do conjunto formado pela união de n conjuntos é dada pela expressão*

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\, n\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Demonstração: 6 *Precisamos mostrar, que de acordo com essa fórmula, cada elemento do conjunto $\cup_{i=1}^{n} A_i$ foi contado exatamente uma única vez.*

Sendo assim, considere um elemento qualquer que pertence a exatamente p conjuntos, digamos A_{i_1}, $A_{i_2}, \cdots$, A_{i_p}. Este elemento será contado p vezes em $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n(A_i)$. Em $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j}^{n} n(A_i \cap A_j)$ será contado C_p^2, em $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j < k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$ será contado C_p^3 e assim sucessivamente até o termo $n\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$ que nos dará contribuição igual a 1. Qualquer contagem acima de p conjuntos, não dará nenhuma contribuição. Somando cada uma das contribuições teremos:

$$C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 - C_p^4 + \cdots + (-1)^{p-1} C_p^p$$

Observação 1 *No Capítulo 2 iremos estudar a fórmula do binômio de Newton*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}.$$

Considerando $a = 1$ e $b = -1$ nessa fórmula, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^{n-i} C_n^n = 0.$$

Pela Observação 1,

$$\begin{aligned}
C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 - C_p^4 + \cdots + (-1)^{p-1}C_p^p &= C_p^0 - C_p^0 + C_p^1 - C_p^2 - \cdots + (-1)^{p-i}C_p^p \\
&= C_n^0 - \sum_{i=1}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \\
&= C_n^0 - 0 \\
&= C_n^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 7 *Sendo A um conjunto com n elementos e B um conjunto com k elementos, o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ é :*

$$\begin{aligned}
T(n,k) &= k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n + (-1)^k\binom{k}{k}0^n \\
&= k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}k
\end{aligned}$$

Relembrando que uma função $f : A \to B$ sobrejetora é tal que, para todo $b \in B$, existe pelo menos um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Pelo princípio fundamental da contagem, sabemos que existem k^n funções de A em B e para contar apenas aquelas que são sobrejetoras, devemos subtrair desse total aquelas funções que não são sobrejetoras. Para fixar notação, escrevemos $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ e denotamos X_i o conjunto das funções $f : A \to B$, tais que b_i, não está na imagem de f, ou seja,

$$X_i = \{f : A \to B \mid b_i \notin f(A)\}.$$

Dessa forma, uma função deixa de ser sobrejetora quando pertence a pelo menos em um dos conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$ e o conjunto de todas as funções que não são sobrejetoras consiste na união

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k.$$

Aplicando o princípio da inclusão e exclusão, temos que

$$n(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < l} n(A_i \cap A_j \cap A_l) - \cdots$$

Como $n(A_i) = (k-1)^n$ é o número de funções que não tem b_i na imagem, $n(A_i \cap A_j) = (k-2)^n$ é i número de funções que não tem b_i e nem b_j na imagem, e assim por diante, temos que

$$\begin{aligned} n(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k) &= \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n \ldots \\ &\quad +(-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n \end{aligned}$$

Subtraindo esse número do total k^n, segue que

$$T(n,k) = k^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}(k-i)^n,$$

concluindo a demonstração.

Observação: Podemos interpretar o número $T(n,k)$ como o número de maneiras de se distribuir n bolas distintas em k caixas distintas de modo que nenhuma das caixas fique vazia.

Problema 33 *Suponha que cada pacote do cereal CROK contenha um cupom com uma das letras da palavra CROK. Um consumidor que tenha todas as letras desse cereal ganha um pacote. Considere que lodas as letras tenham a mesma probabilidade de aparecer no pacote. Determine a probabilidade de que um consumidor que comprou 10 pacoles desse cereal ganhe pelo menos um pacote.*

Resolução. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ correspondendo aos pacotes de cereal, $B = \{C,R,O,K\}$ o conjunto das letras da palavra CROK e a função $f : A \to B$. Vemos que essa função modela a situação desse exemplo, tendo em vista que cada pacote não pode ficar vazio. Pelo princípio multiplicativo, sabemos que existem 4^{10} funções que representam todas as possibilidade que podem ocorrer. Por exemplo, pode ocorrer $f(x) = C$ para todo $x \in A$, que significa que todos os pacotes possuem cupons com a letra C. Para formar a palavra CROK, a função f associada à compra do comsumidor deve ser sobrejetora. Usando a Proposição 7 com $n = 10$ e $k = 4$, temos que o número de funções sobrejetoras é

$$T(10,4) = 4^{10} - \binom{4}{1}(4-1)^{10} + \binom{4}{2}(4-2)^{10} - \binom{4}{3}(4-3)^{10} = 818520$$

Para o cálculo de probalilidade, devemos considerar o quociente entre os casos favoráveis e os possíveis. Como calculamos, os casos favoráveis somam 818520 para se ganhar o brinde e o total é 4^{10}:

$$\text{Probabilidade} = \frac{818520}{4^{10}} = \frac{818520}{1048576} \approx 0,78$$

Portanto, a probabilidade do consumidor que comprou 10 pacotes ganhar um outro é de aproximadamente 78%.

Capítulo 2

Contagem em equações e identidades

Neste capítulo estudamos a quantidade de soluções inteiras de equações lineares e a fórmula do binômio de Newton. Faremos uso das ferramentas anteriormente apresentadas no capítulo anterior.

2.1 Equações lineares de coeficientes unitários

Problema 34 *Considere a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Quantas soluções inteiras positivas ela possui?*

Resolução. As soluções inteiras dessa equação, são as ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3) de inteiros positivos de soma 9. Algumas soluções são $(1, 1, 7)$, $(3, 3, 3)$ e $(2, 3, 4)$.

Caso queiramos contar todas as soluções de inteiros positivos para esta equação, podemos escrever primeiro o número 9 como soma de nove números 1, isto é:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

Agora, devemos separar essa soma em 3 parcelas, sendo cada uma delas um número positivo. A solução $(1, 1, 7)$ pode, através da soma, ser representado como

$$1| + 1| + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

Já a solução $(3, 3, 3)$ é representada como,

$$1 + 1 + 1| + 1 + 1 + 1| + 1 + 1 + 1 = 9$$

Por fim, a solução $(2,3,4)$ é representada como,

$$1+1|+1+1+1|+1+1+1+1=9$$

Cada maneira de escolhermos dois lugares entre os oito sinais "+" que separa os números 1, irá nos oferecer uma solução para a equação $x_1+x_2+x_3=9$.

Verifique que a solução depende diretamente de cada escolha, que neste exemplo pode ser feitas de $C_8^2=28$ maneiras diferentes.

Teorema 8 *O número de soluções inteiras positivas para a equação $x_1+x_2+\cdots+x_r=m$ é C_{m-1}^{r-1}.*

Demonstração: 7 *Como estamos interessados em expressar essa soma de r inteiros positivos, utilizando m números 1, separaremos utilizando $r-1$ barras. Assim,*

$$1+1+|1+\cdots+1|+1+|\cdots+|1+\cdots+1=m$$

O valor de x_1 será a quantidade de números 1 que antecedem a primeira barra, o valor de x_2 será a quantidade de números 1 que sucedem a primeira barra e antecedem a segunda barra, e assim por diante até obtermos o valor de x_r como sendo a quantidade de números 1 à direita da barra de posição $m-1$.

Cada possível solução positiva desta equação é representada por uma única distribuição das barras da soma dos m números 1 basta contar a quantidade de formas em que as barras podem ser distribuídas. Então, devemos selecionar $r-1$ dos $m-1$ possíveis locais entre os números 1 e o sinal "+", que podemos fazer de C_{m-1}^{r-1} formas diferentes. $\square$

Problema 35 *Encontrar o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1+x_2=7$.*

Resolução. Como temos que $r=2$ e $m=7$, basta utilizar o teorema 1. Portanto, teremos $C_6^1=6$ soluções.

Problema 36 *Encontrar o número de soluções inteiras positivas para a equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$.*

Resolução. Como temos que $r=5$ e $m=8$, basta utilizar o teorema 1. Assim,

$$C_7^4=\frac{7!}{4!\ 3!}=35$$

Logo, teremos 35 soluções inteiras positivas.

Quando mudamos a natureza das soluções para soluções inteiras não negativas, aumentamos a quantidade de soluções que serão aceitas na resolução da equação. No exemplo 34, caso mudássemos a natureza das soluções, o par $(0,7)$ seria aceito.

Voltemos ao exemplo 36. Da mesma forma, se mudássemos a natureza das soluções para inteiros não negativos, as soluções $(0,0,0,0,8)$, $(1,1,2,0,4)$ e $(0,1,2,3,2)$ serão aceitas. Mas para calcular a quantidade totais de soluções que essa equação admitirá seguiremos a base da linha de raciocínio da demonstração do teorema 1, isto é, vamos escrever uma sequência formada por oito números 1 (Já que a soma deve ser igual a 8) e quatro letras b (agora a letra b está indicando a barra). Assim,

1. A solução $(1,1,2,0,4)$ poderá ser indicada como $1b1b11bb1111$;
2. A solução $(0,0,0,0,8)$ poderá ser indicada como $bbbb11111111$;
3. A solução $(0,1,2,3,2)$ poderá ser indicada como $b1b11b111b11$;

Para a solução, teremos que o valor de x_1 será a quantidade de números 1 antes do primeiro b, o valor de x_2 será a quantidade de números 1 depois do primeiro b e antes do segundo b, e assim por diante, até o valor de x_5 será a quantidade de números 1 depois do quarto b.

Como a quantidade de sequências desse tipo é $C_{12}^{4} = \dfrac{12!}{8!\ 4!} = 24$, teremos 24 soluções.

Teorema 9 *A quantidade de soluções inteiras não negativas de uma equação linear de coeficientes unitários é igual a* C_{m+r-1}^{r-1}.

Demonstração: 8 *Como estamos interessados em expressar essa soma de r inteiros positivos, utilizando m números 1, separaremos utilizando $r-1$ letras b. Porém, ao contrário do que foi feito no teorema 1, apenas iremos enfileirar todos om m números 1 e separaremos pela letra b. Portanto,*

$$1111b111bbb111bb1b1b11b1bb1111\cdots 11b1b1b11$$

Verifique, que desta vez, teremos uma fila formada por $m+r-1$ termos, sendo m números 1 e $r-1$ letras b.

O valor de x_1 será a quantidade de números 1 que antecedem a primeira letra b, o valor de x_2 será a quantidade de números 1 que sucedem a primeira letra b e antecedem a segunda letra b, e assim por diante até obtermos o valor de x_r como sendo a quantidade de números 1 à direita da letra b de posição $m - 1$.

Como iremos dispor $r - 1$ letras b em $m + r - 1$ posições, conclui-se que a quantidade de formações que temos é de C_{m+r-1}^{r-1}. $\square$

Existe uma outra forma de contar a quantidade de soluções inteiras não negativas de uma equação linear de coeficientes unitários, fazendo a relação entre as soluções inteiras não negativas da equação original e as soluções inteiras positivas de uma outra equação.

Pegamos então a equação do exemplo 36,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8, \text{ com } x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{2.1}$$

Faremos a mudança de variável $y_i = x_1 + 1$, e dessa forma teremos $y_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Portanto, se na equação anterior realizarmos a substituição $x_i = y_i - 1$ teremos $y_1 - 1 + y_2 - 1 + y_3 - 1 + y_4 - 1 + y_5 - 1 = 8$. Daí,

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 13, \text{com } y_i \geq 1 \text{ e } i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{2.2}$$

Após essa mudança de variáveis, as soluções inteiras não negativas da equação 2.1 serão transformadas após a mudança de variáveis e também será soluções da equação 2.2, como mostra a tabela 2.1.

Tabela 2.1: Comparação das soluções de duas equações.

Soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$	Soluções da equação $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 13$
$(0, 0, 0, 0, 8)$	$(1, 1, 1, 1, 9)$
$(0, 1, 2, 3, 2)$	$(1, 2, 3, 4, 3)$
$(1, 1, 2, 0, 4)$	$(2, 2, 3, 1, 5)$

Esta mudança nos diz que cada solução inteira não negativa da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ equivale a uma solução inteira positiva da equação $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 13$. De maneira análoga, se subtrairmos uma unidade de cada solução da equação 2.2 encontraremos a solução equivalente da equação 2.1. Assim, a quantidade de soluções da equação 2.1 é igual a quantidade de soluções da equação 2.2 que já sabemos ser $C_{12}^{4} = \dfrac{12!}{8!\ 4!} = 24$ soluções.

Corolário 10 *A quantidade de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$ é igual a quantidade de soluções inteiras positivas da equação $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = m + r$ com $y_i = x_1 + 1$ e $i = 1, 2, 3, \cdots, r$. E essa quantidade é $C_{m+r-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^{m}$.*

Demonstração: 9 *Pelo propriedade das combinações complementares, temos que $C_m^p = C_m^q$ se $p + q = m$. Fazendo $p = r - 1$ e $q = m$ segue-se que $p + q = m + n - 1$.* $\square$

2.2 O binômio de Newton e triângulo de Pascal

Teorema 11 *(binômio de Newton) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, então:*

$$\begin{aligned}(a+b)^m &= C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \cdots + C_m^m a^0 b^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k\end{aligned}$$

Demonstração: 10 *Pela definição de potenciação é claro que*

$$(a+b)^m = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{m\text{-vezes}}$$

Ao aplicarmos a propriedade distributiva da multiplicação cada a e cada b em cada parêntesis, será multiplicado com todos os outros. Então, nos resta encontrar os coeficientes numéricos que acompanham o monômio $a^{m-k}b^k$. Assim,

1. *Para obter a parte numérica de $a^m b^0$ existe apenas uma única maneira possível, que é multiplicar cada a dentro de cada par de parênteses. Em outras palavras, devemos escolher todos os m a's ou nenhum dos m b's. Assim, o coeficiente numérico de $a^m b^0$ é igual a 1, e 1=C_m^0.*

2. *De maneira similar, para obtermos a parte numérica de $a^{m-1}b^1$, devemos multiplicar o a em $m-1$ parênteses e b em apenas 1 parênteses. Em termos de combinatória, devemos escolher $m-1$ a's e apenas um único b, que pode ser de C_m^1 formas distintas.*

3. *Portanto, de modo geral, para descobrir o coeficiente do termo $a^{m-k}b^k$, devemos escolher exatamente $m-k$ a's e k b's, que por combinatória, é realizada de C_m^k formas distintas.*

Portanto,

$$\begin{aligned}(a+b)^m &= (a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)\\ &= C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \cdots + C_m^m a^0 b^m\\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k\end{aligned}$$

$\square$

Definição 11 *O triângulo de Pascal é uma tabela formada por todas combinações possíveis, em que cada linha representa todas as combinações de m objetos escolhendo apenas k deles.*

Assim,

$$\begin{array}{llllll} C_0^0 & & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ C_m^0 & C_m^1 & C_m^2 & \cdots & C_m^{m-1} & C_m^m \end{array}$$

Proposição 12 *(**Relação de Stifel**) Seja m e k dois números inteiros. Então,*

$$C_m^k + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1}$$

Demonstração: 11

$$\begin{aligned}C_m^k + C_m^{k+1} &= \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}\\ &= \frac{m!(k+1)}{k!(m-k)!(k+1)} + \frac{m!(m-k)}{(k+1)!(m-k-1)!(m-k)}\\ &= \frac{m!k + m!m - m!k + m!}{(k+1)!(m-k+1)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m^k + C_m^{k+1} &= \frac{m!m + m!}{(k+1)!(m+1-k)!} \\ &= \frac{m!(m+1)}{(k+1)!(m+1-k)!} \\ &= \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m+1-k)!} \\ &= C_{m+1}^{k+1} \end{aligned}$$

□

> [...]Se dispormos os coeficientes em uma tábua triangular, como se indica a continuação, então cada um deles é igual a soma dos que estão na fila imediatamente superior, a sua direita e a sua esquerda. Esta tábua se conhece também pelo nome de "triângulo aritmético" ou "triângulo de Pascal", e possui muitas propriedades interessantes (Said, 1996, p.29).

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Figura 2.1: Triângulo de Pascal construído através do teorema de Stifel.
(Fonte: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/triangulo-de-pascal)

No triângulo de Pascal podemos tirar algumas relações interessantes.

Teorema 13 *(**Teorema das linhas**) A soma de todos os elementos que compõe a m-ésima linha do triângulo de Pascal é igual a 2^m. Em suma,*

$$\sum_{k=0}^{m} C_k^m = 2^m$$

Demonstração: 12 *Pelo teorema 11 (binômio de Newton),*

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m b^0 + C_m^1 a^{m-1} b^1 + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \cdots + C_m^m a^0 b^m$$

Se $a = b = 1$, *temos*

$$\begin{aligned}
(1+1)^m &= C_m^0 1^m 1^0 + C_m^1 1^{m-1} 1^1 + C_m^2 1^{m-2} 1^2 + \cdots + C_m^m 1^0 1^m \\
2^m &= \underbrace{C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^m}_{\text{Soma de todos os elementos da n-ésima linha.}} = \sum_{k=0}^{m} C_k^m
\end{aligned}$$

□

Problema 37 *Se A é um conjunto com 3 elementos distintos, podemos denotar o conjunto A como* $A = \{a, b, c\}$*. Portanto, podemos formar:*

Resolução.

1. Um subconjunto de A sem elementos (o conjunto vazio é um subconjunto de A). E, de fato, $C_3^0 = 1$.

2. Três subconjuntos distintos, que estão contidos no conjunto A (os conjuntos $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c\}$ são subconjuntos de A). Note que $C_3^1 = 3$.

3. Três subconjuntos distintos, que estão contidos no conjunto A (os conjuntos $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$ são subconjuntos de A). Verifique que $C_2^3 = 3$.

4. Um subconjunto de A formado pelo seus três elementos (o conjunto $\{a, b, c\}$ é um subconjunto de A). Com efeito, $C_3^3 = 1$.

Então, conseguimos concluir que a quantidade de subconjuntos distintos que podemos usar, utilizando somente os elementos de A é $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

O triângulo de Pascal também possui propriedades envolvendo suas colunas. Ilustremos.

Problema 38 *Ao somar os sete primeiros elementos que se encontram na segunda coluna do triângulo de Pascal, resulta no terceiro elemento da oitava linha (ou o sétimo elemento da terceira coluna.*

Resolução.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Figura 2.2: Soma dos sete primeiros elementos da segunda coluna.

Assim,

$$\begin{aligned}
1+2+3+4+5+6+7 &= C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_5^1 + C_6^1 + C_7^1 \\
&= \sum_{i=0}^{6} C_{1+i}^1 \\
&= C_{1+6+1}^{1+1} \\
&= C_8^2 \\
&= \frac{8!}{2!6!} \\
&+ \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 6!} \\
&= \frac{56}{2} \\
&= 28
\end{aligned}$$

Teorema 14 *(**Teorema das colunas**): A soma das combinações dos elementos que se encontram em uma mesma coluna, começando do primeiro até um qualquer, é igual ao elemento que fica imediatamente na próxima linha, situado a direita da coluna que somamos os elementos. Algebricamente,*

$$\sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^m = C_{m+k+1}^{m+1}$$

Demonstração: 13 *Os i primeiros elementos que pertencem a m-ésima coluna podem ser escritos na forma C_{m+i}^m. E pela relação de Stifel (Proposição 12), $C_{m+i+1}^{m+1} = C_{m+i}^m + C_{m+i+1}^m$.*

Assim,

$$\begin{aligned}
C_{m+1}^{m+1} &= C_m^m \\
C_{m+2}^{m+1} &= C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1} \\
C_{m+3}^{m+1} &= C_{m+2}^m + C_{m+2}^{m+1} \\
C_{m+4}^{m+1} &= C_{m+3}^m + C_{m+3}^{m+1} \\
&\vdots \\
C_{m+i+1}^{m+1} &= C_{m+i}^m + C_{m+i}^{m+1}
\end{aligned}$$

Ao realizar, a soma dessas igualdades, verifique que podemos simplificar alguns de seus termos, os que estão entre parenteses, pela lei do cancelamento.

$$\begin{aligned}
&\left(C_{m+1}^{m+1}\right) + \left(C_{m+2}^{m+1}\right) + \left(C_{m+3}^{m+1}\right) + \left(C_{m+4}^{m+1}\right) + \cdots + C_{m+i+1}^{m+1} = \\
= \ & C_m^m + C_{m+1}^m + \left(C_{m+1}^{m+1}\right) + C_{m+2}^m + \left(C_{m+2}^{m+1}\right) + C_{m+3}^m + \left(C_{m+3}^{m+1}\right) + \cdots + C_{m+i}^m + \left(C_{m+i}^{m+1}\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C_{m+i+1}^{m+1} &= C_m^m + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + C_{m+3}^m + \cdots + C_{m+i}^m \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^m \\
&= C_{m+k+1}^{m+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 15 *(**Teorema das diagonais**) Para cada $m, k \in \mathbb{N}$, vale:*

$$C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + C_{m+3}^3 + \cdots + C_{m+k}^k = \sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^i = C_{m+k+1}^k$$

Antes de demonstrar, ilustremos.

Problema 39 *Veja a ilustração do teorema das diagonais em que somaremos os 5 primeiros termos da terceira diagonal resulta no quinto termo da sétima linha.*

Resolução.

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Figura 2.3: Soma dos cinco primeiros elementos da terceira diagonal.

$$
\begin{aligned}
C_2^0 + C_{2+1}^1 + C_{2+2}^2 + C_{2+3}^3 + C_{2+4}^4 &= \sum_{k=0}^{4} C_{2+k}^k \\
&= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 \\
&= 35 \\
&= C_{2+4+1}^4 \\
&= C_7^4
\end{aligned}
$$

Demonstração: 14 *Utilizando a relação de Stifel (Proposição 12), temos:*

$$
\begin{aligned}
C_{m+1}^0 &= C_m^0 \\
C_{m+2}^1 &= C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 \\
C_{m+3}^2 &= C_{m+2}^1 + C_{m+2}^2 \\
C_{m+4}^4 &= C_{m+3}^3 + C_{m+3}^4 \\
&\vdots \\
C_{m+k+1}^k &= C_{m+i}^{k-1} + C_{m+i}^k
\end{aligned}
$$

Ao somarmos as equações e simplificarmos alguns termos, que estão entre parenteses, temos:

$$
\begin{aligned}
&\left(C_{m+1}^0\right) + \left(C_{m+2}^1\right) + \left(C_{m+3}^2\right) + \left(C_{m+4}^4\right) + \vdots + C_{m+k+1}^k = \\
= \;& C_m^0 + \left(C_{m+1}^0\right) + C_{m+1}^1 + \left(C_{m+2}^1\right) + C_{m+2}^2 + \left(C_{m+3}^3\right) + C_{m+3}^4 + \cdots + \left(C_{m+i}^{k-1}\right) + C_{m+i}^k
\end{aligned}
$$

Então,

$$\begin{aligned} C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + C_{m+3}^3 + \cdots + C_{m+k}^k &= \sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^i \\ &= C_{m+k+1}^k \end{aligned}$$

□

A seguir mostraremos uma demonstração alternativa do teorema das diagonais 15.

Demonstração: 15 *Pelo teorema das colunas 14 temos:*

$$\sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^m = C_{m+k+1}^{m+1}$$

Mas, $C_{m+i}^m = C_{m+i}^i$ *e* $C_{m+k+1}^{m+1} = C_{m+k+1}^k$, *já que são combinações complementares. Se substituirmos esses termos no teorema das colunas:*

$$\sum_{i=0}^{k} C_{m+i}^i = C_{m+k+1}^k$$

□

2.3 Crivo de Eratóstenes

O crivo de Eratóstenes, é um algoritmo simples para se encontrar números primos até um certo valor limite.

Criado pelo matemático grego e terceiro bibliotecário chefe da Biblioteca de Alexandria, o método consistia em montar uma tabela com todos os números naturais que antecede um certo valo limite, e ao escolher um número primo, devemos remover da lista todos os seu múltiplos, repetindo esse processo para cada número primo escolhido, removendo todos os números compostos.

Ao fim deste processo, restará na tabela apenas os números primos, os quais podemos formar um conjunto. E, podemos utilizar o princípio da inclusão e exclusão para determinar a cardinalidade desse conjunto.

Antes de determinar essa cardinalidade, construiremos o crivo para o limite igual a 75.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75

Figura 2.4: Crivo de Eratóstenes para o limite igual a 75.

Agora vamos determinar a cardinalidade do conjunto $X = \{x \text{ é primo } | x < 75\}$. Mas antes, devemos lembrar que um número composto menor que 75 é divisível por números primos que não excedam a sua raiz quadrada. Como $\sqrt{75} \approx 8,66$, os números compostos menores que 75 são divisíveis por 2, 3, 5 ou 7. Para aplicar o princípio da inclusão e exclusão, considere os conjuntos:

- M_2 (múltiplo de 2)
- M_3 (múltiplo de 3)
- M_5 (múltiplo de 5)
- M_7 (múltiplo de 7)

Assim,

$$n(X) = 4 + n(M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7)$$

Como existe 75 números positivos maiores que 1 e menores que 75, o princípio da inclusão e exclusão nos indica que

$$\begin{aligned} n(M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7) \quad = \quad & 74 - n(M_2) - n(M_3) - n(M_5) - n(M_7) + n(M_2 \cap M_3) + \\ & + n(M_2 \cap M_5) + n(M_2 \cap M_7) + n(M_3 \cap M_5) + n(M_3 \cap M_7) + \\ & + n(M_5 \cap M_7) - n(M_2 \cap M_3 \cap M_5) - n(M_2 \cap M_3 \cap M_7) - \\ & - n(M_2 \cap M_5 \cap M_7) - n(M_3 \cap M_5 \cap M_7) + \\ & + n(M_2 \cap M_3 \cap M_5 \cap M_7) \end{aligned}$$

O número de inteiro não excedente a 75 e maiores que 1 que são divisíveis por todos os primos em um subconjunto de $\{2,3,5,7\}$ é y, tal que $y \in \mathbb{Z}$ e y seja maior inteiro menor que a divisão $\dfrac{75}{N}$, tal que N é o produto dos números primos nesse conjunto. Assim,

$$n(M_2) = \left\lfloor \frac{75}{2} \right\rfloor = 37$$
$$n(M_3) = \left\lfloor \frac{75}{3} \right\rfloor = 25$$
$$n(M_5) = \left\lfloor \frac{75}{5} \right\rfloor = 15$$
$$n(M_7) = \left\lfloor \frac{75}{7} \right\rfloor = 10$$
$$n(M_2 \cap M_3) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 3} \right\rfloor = 12$$
$$n(M_2 \cap M_5) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 5} \right\rfloor = 7$$
$$n(M_2 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 7} \right\rfloor = 5$$
$$n(M_3 \cap M_5) = \left\lfloor \frac{75}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 5$$
$$n(M_3 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{3 \cdot 7} \right\rfloor = 3$$
$$n(M_5 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{5 \cdot 7} \right\rfloor = 2$$
$$n(M_2 \cap M_3 \cap M_5) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor = 2$$
$$n(M_2 \cap M_3 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 1$$
$$n(M_2 \cap M_5 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 1$$
$$n(M_3 \cap M_5 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 0$$
$$n(M_2 \cap M_3 \cap M_5 \cap M_7) = \left\lfloor \frac{75}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} n(M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7) &= 74 - 37 - 25 - 15 - 10 + 12 + 7 + \\ &\quad +5 + 5 + 3 + 2 - 2 - 1 - 0 + 0 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} n(X) &= 4 + n(M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7) \\ &= 4 + 17 \\ &= 21 \end{aligned}$$

De fato, $X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73\}$ e portanto $n(X) = 21$, como mostrado anteriormente.

Capítulo 3

Contagem em teoria dos números

3.1 A função φ de Euler

Definição 12 *Chamamos de função φ de Euler, a função que associa cada número inteiro n a um número de inteiros positivos menores ou iguais a n e primos com n.*

$$\varphi(n) = \#\{m \in \mathbb{N} \mid mdc(n, m) = 1 \text{ e } m \leq n\}$$

Problema 40 *Mostre que $\varphi(6) = 2$.*

Resolução.

$$\begin{aligned} mdc(1,6) &= 1 \\ mdc(2,6) &= 2 \\ mdc(3,6) &= 3 \\ mdc(4,6) &= 2 \\ mdc(5,6) &= 1 \\ mdc(6,6) &= 6 \end{aligned}$$

Portanto, somente os números 1 e 5 são primos com 6, o que comprova a veracidade da afirmação do exemplo.

Proposição 16 *O valor de $\varphi(m)$ é dado por:*

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \tag{3.1}$$

em que cada p_i é um número primo divisor de m.

Demonstração: 16 *Considere os seguintes conjuntos:*

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, \cdots, m\} \\
A_1 &= \big\{x \in A \mid x = t \times p_1,\ t \in \mathbb{Z}\big\} \\
A_2 &= \big\{x \in A \mid x = t \times p_2,\ t \in \mathbb{Z}\big\} \\
A_3 &= \big\{x \in A \mid x = t \times p_3,\ t \in \mathbb{Z}\big\} \\
&\vdots \\
A_n &= \big\{x \in A \mid x = t \times p_n,\ t \in \mathbb{Z}\big\}
\end{aligned}$$

Note que todo elemento que pertence a algum A_i necessariamente não será primo com o m já que terá algum fator divisor comum em sua fatoração. Então, a função $\varphi(m)$ é a quantidade de elementos que está no complementar da união dos A_i's em A. Portanto,

$$\varphi(m) = n(A) - \big[n(A_1) \cup n(A_2) \cup \cdots \cup n(A_n)\big]$$

Pelo princípio da inclusão e exclusão,

$$\begin{aligned}
\varphi(m) \quad = \quad & n(A) - \sum_{i=1}^{n} n(A_i) + \sum_{1 \leq i < j}^{n} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leq i < j < k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\
& \cdots - (-1^{n-1}) n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
n(A) &= m \\
n(A_i) &= \frac{m}{p_i} \\
n(A_i \cap A_j) &= \frac{m}{p_i p_j} \\
n(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{m}{p_i p_j p_k} \\
&\vdots \\
n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) &= \frac{m}{p_i p_j p_k \cdots p_n}
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(m) &= n(A) - \sum_{i=1}^{n} n(A_i) + \sum_{1 \le i < j}^{n} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \le i < j < k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\
&\quad \cdots - (-1^{n-1}) n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= m - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{p_i} - \sum_{1 \le i < j}^{n} \frac{m}{p_i p_j} + \sum_{1 \le i < j < k}^{n} \frac{m}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1^{n-1}) \frac{m}{p_i p_j p_k \cdots p_n} \\
&= m \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} - \sum_{1 \le i < j}^{n} \frac{1}{p_i p_j} + \sum_{1 \le i < j < k}^{n} \frac{1}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1^{n-1}) \frac{1}{p_i p_j p_k \cdots p_n} \right) \\
&= m \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)
\end{aligned}$$

O que conclui a nossa demonstração. □

Problema 41 *Calcular a função $\varphi(100)$.*

Resolução. Como $m = 100 = 2^2 \times 5^2$, conclui-se que $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(100) &= 100 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\
&= 100 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \\
&= 40
\end{aligned}$$

Problema 42 *Voltemos ao exemplo 40.*

Resolução. Neste caso $m = 6 = 2 \times 3$, conclui-se que $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(6) &= 6\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &= 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

3.2 Teorema de Wilson

Teorema 17 *Se p é um número primo, então $p|[(p-1)!+1]$.*

Demonstração: 17 *Para o caso de $p = 2$ é válido, haja visto que $(2-1)!+1 = 1!+1 = 2$ e $2 \times 1 = 2$, portanto $2|[(2-1!)+1]$.*

Agora, consideremos uma circunferência com p pontos distribuídos de tal forma que esses pontos formam p arcos de mesma medida. Quantas linhas poligonais fechadas e não simples (polígonos que admitem cruzamento entre arestas) e polígonos podemos formar utilizando esses pontos? Os polígonos que aceitam o cruzamento entre arestas, também são chamados de polígonos estrelados (p-ágonos, por ser um polígono formado por p vértices) pelo fato seus vértices, serem os mesmos vértices de um polígono regular convexo de p lados. O total de polígonos que podemos formar nessas condições é de $p!$, já que temos p escolhas para o primeiro ponto, $p-1$ escolhas para o segundo ponto e assim sucessivamente até ter apenas uma única escolha para o p-ésimo ponto.

Contudo, podemos escrever esse cada um desses polígonos de $2p$ formas diferentes, e escolhendo um ponto inicial qualquer e um dos dois vértices conectados pela aresta ao nosso primeiro ponto escolhido. Assim, temos $\frac{p!}{2p}$ p-ágonos distintos.

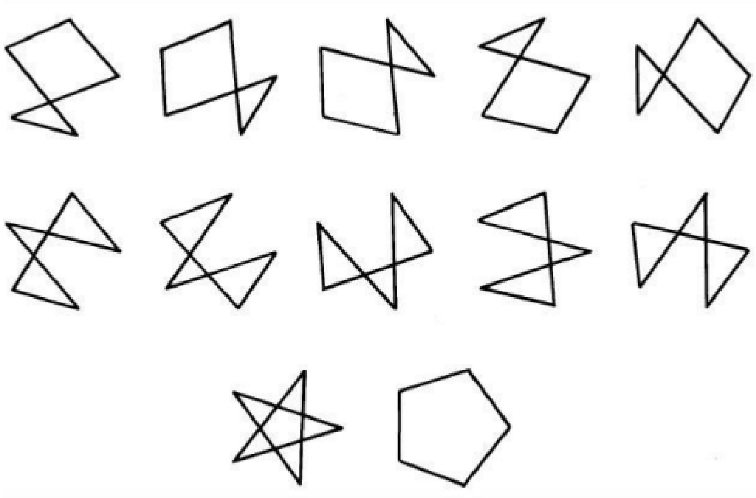

Figura 3.1: Os cinco pentágonos estrelados

Além disso, dos $\frac{p!}{2p}$ *p-ágonos, exatamente* $\frac{(p-1)}{2}$ *permanecem inalterados quando sofrem uma rotação de* $\frac{2\pi}{p}$ *radianos (note, que na figura acima temos* $p = 5$*, todos polígonos das linha 3 que se permanecem inalterados com a rotação). Estes chamam-se p-ágonos estrelados regulares, uma vez que são "estrelas" com p pontos onde cada ponto é um vértice de um ângulo de* $\frac{(2k+1)\pi}{p}$ *radianos, onde* $0 \leq k < \frac{(p-1)}{2}$.

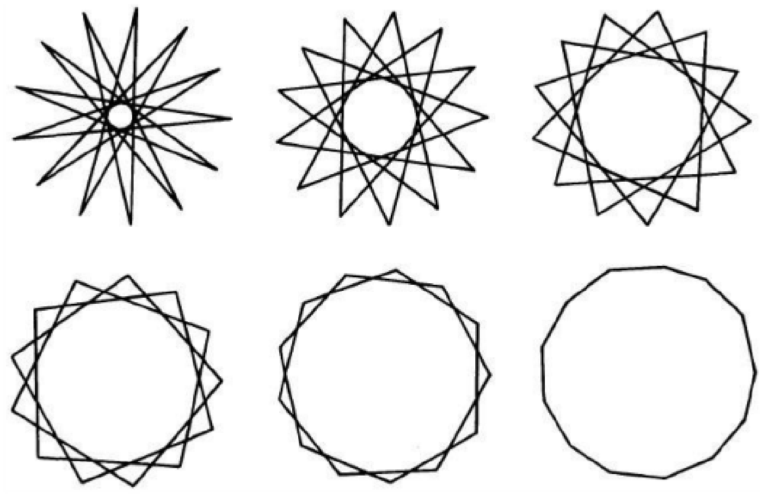

Figura 3.2: Os seis polígonos estrelados para $n = 13$.

Na figura 3.2, temos os seis polígonos estralados (polígonos que não mudam após a rotação de $\frac{2\pi}{p}$ *radianos) para* $p = 13$.

Os restantes $\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}$ *p-ágonos restantes pertencem, a conjunto de p elementos, em que os objetos de cada conjunto podem ser obtidos um único elemento formado por* *rotações sucessivas de* $\frac{2\pi}{p}$ *radianos. A observação de que existem p objetos em cada conjuntos, pode ser verificada na demonstração feita sobre o pequeno teorema de Fermat, sendo que cada bracelete era gerado por um único grupo de p correntes. Então, o número total de conjuntos é:*

$$\begin{aligned} \frac{\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}}{p} &= \frac{\frac{(p-1)!}{2} - \frac{p-1}{2}}{p} \\ &= \frac{(p-1)! - p + 1}{2p} \end{aligned}$$

Como $2p|[(p-1)!-p+1]$, *em que* $(p-1)!-p+1$ *é impar, então* $p|[(p-1)!-p+1]$. *Já que* $p|p$ *concluímos que* $p|[(p-1)!+1]$. $\square$

3.3 Pequeno teorema de Fermat

Teorema 18 *Se p é um número primo e n um número natural, então* $p|(n^p - n)$.

Demonstração: 18 *Para demonstrar este teorema da teoria dos números, utilizando a combinatória, partiremos de a suposição formar uma pizza metro com as seguintes condições:*

1. *A pizza terá que ter uma parte proporcional ao sabor escolhido por cada pessoa que escolheu. Ou seja, se em um grupo de três pessoas duas escolher o sabor de queijo e uma escolheu o sabor de calabresa,* $\frac{2}{3}$ *da pizza terá que ser de queijo e* $\frac{1}{3}$ *da pizza terá que ser de calabresa.*

2. *O grupo de pessoas será formado por p pessoas e teremos n opções de sabores.*

Pelo fato de serem tomadas p decisões, uma de cada pessoa, e para cada decisão temos n opções, uma para cada sabor de pizza, o princípio fundamental da contagem nos garante que a quantidade de pizza metro que podemos formar, nessas condições, é n^p.

Figura 3.3: Pizza metro
(Fonte: https://www.tripadvisor.com.br/LocationPhotoDirectLink-g1932196-d7675196--i130129661-Pizza_Al_Metro-Lauro_de_Freitas_State_of_Bahia.html)

Verifique, na tabela 3.1 a seguir, todas as possibilidades de se formar uma pizza metro formada por decisões de 3 pessoas, possuindo apenas 3 opções de sabores (em outras palavras $n = 3$ e $p = 3$). Denotamos os sabores como Q - "queijo", F - "frango com catupiry" e C - "Calabresa".

Tabela 3.1: Todas as possíveis formações de pizza metro

Possibilidades
QFC - FCQ - CQF - QCF - CFQ - FQC - QQC - QCQ - CQQ
QQF - QFQ - FQQ - CCQ - CQC - QCC - CCF - CFC - FCC
FFC - FCF - CFF - FFQ - FQF - QFF - QQQ - FFF - CCC

Verifique também que:

1. *Como podemos formar pizzas metro utilizando um único sabor, teremos n pizzas metro formadas por um único sabor. Sendo assim, teremos $n^p - n$ pizzas metro que são formados por pelo menos dois sabores.*

2. *Se ao invés de formarmos pizza metro, essas decisões fossem tomadas para fazer uma pizza redonda teremos muitas repetições. E, dessa forma, não existe muita importância para as ordens das decisões dos sabores de pizza:*

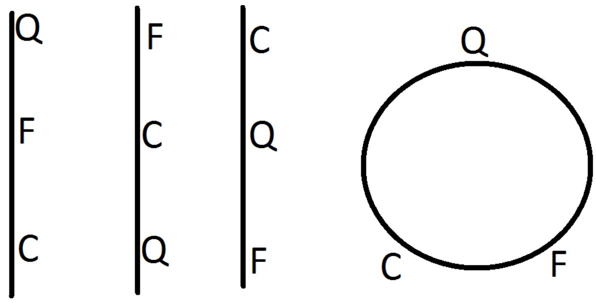

Figura 3.4: Pizzas metro que geram a mesma pizza redonda.

Desse modo, não importa a ordem das escolhas que geraram a pizza metro, sempre vão gerar a mesma pizza redonda. Na tabela, as pizzas metro que formam a mesma pizza redonda, já estão agrupados.

Então, pelo exemplo dado inicialmente temos $n = 3$ *e* $p = 3$*, ou seja, formar pizza metros com 3 decisões, dispondo de 3 sabores, totalizando 27 pizzas metro. Ao retirarmos as 3 pizzas metros que possuem um único sabor, temos 24 tipos de pizza metro que possuem ao menos um sabor (que se enquadra nas correntes do grupo* $n^p - n$*). E pela tabela 4, notamos que existem 8 agrupamentos de pizza metro em que cada grupo (que se encontra em cada cédula) gera um único tipo de pizza redonda (note que* $\frac{24}{3} = 8$*, caracterizando* $\frac{n^p - n}{p}$*).*

Segue abaixo todos as pizza redondas que podem ser formados de acordo com esse exemplo (que não possuem um único sabor):

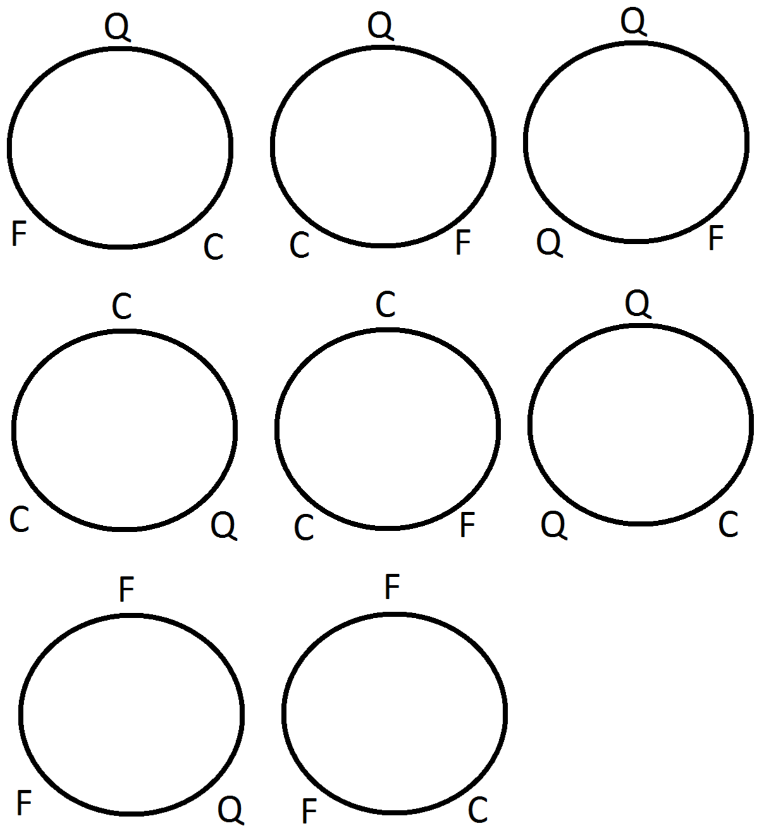

Figura 3.5: Todos os tipos de pizza redonda.

Agora, chamemos de t o menor número de vezes que podemos repetir o processo ilustrado na figura 3.4 para se obter pizzas metro distintas que gerem a mesma pizza redonda até que tenhamos a pizza metro original. Por ter separado as pizzas metros que possuem um único sabor, $t > 1$. Dessa forma, se escolhermos uma pizza metro e repetirmos o processo q vezes, obteremos a pizza metro original, se fizermos o mesmo processo mais t vezes, ou seja, $2t$ vezes, obteremos a pizza metro original e de maneira similar, o mesmo vale para $3t$, $4t$, $5t$ e etc.

Pelo algoritmo de Euclides, existem q e q tais que $p = qt + r$ com $0 \leq r < t$. Como uma pizza metro é reproduzida a cada qt processos, e também é reproduzidas após p passos (quantidade original de sabores na pizza metro), serão necessários mais r passos para voltar a configuração inicial. Como $r < t$ e t é o menor número natural de passos necessários para a obtenção de uma configuração, tem-se que $r = 0$. Assim, $p = qt$, e como p é primo, $t = p$ já que $t > 1$. Observe que no exemplo descrito $n = 3$ e $p = 3$ precisamos de no mínimo 3 repetições para se obter a pizza metro original.

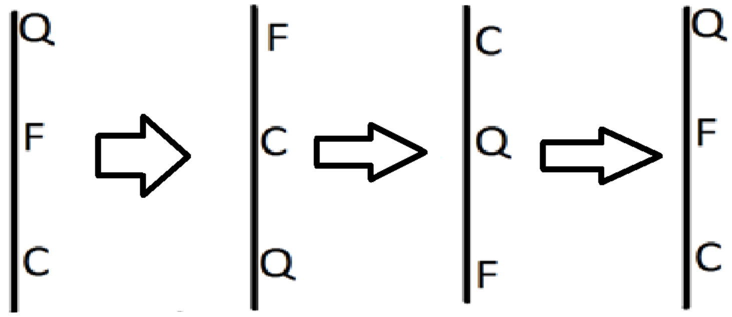

Figura 3.6: Formas de se obter a mesma pizza metro após realizar o processo.

Portanto, como $np - n$ pizza metro podem ser agrupadas em grupos de p pizza metro (como foi feito na tabela 3.1 do exemplo que ilustramos), e como foi mostrado, cada grupo gera uma única pizza redonda. Chamando o número de pizzas redondas de B podemos concluir com segurança que ao multiplicarmos B por p encontramos a quantidade de pizzas metro que não são formadas por um único sabor. Como a quantidade de pizza metro que não são formados por um único sabor é de $np - n$ segue-se que $pB = np - n$. Logo, $p|(np - n)$.

$\square$

Considerações finais

Este trabalho apresentou os conceitos de conjuntos e combinatória como ferramentas de demonstrações, a partir das definições e alguns exercícios resolvidos. Para se atingir o objetivo, primeiramente mostramos as aplicações dos problemas de contagem que influenciam diretamente na vida das pessoas, como por exemplo o acréscimo do nono dígito do telefone.

Também, mostramos as resoluções de algumas identidades e métodos de contar cardinalidades para resolver exercícios mais abrangentes como o crivo de Erastóstenes, e o triângulo de Pascal.

Por fim, utilizamos as combinações simples e o princípio da inclusão e exclusão, para demostrar as principais congruências especiais: O teorema de Wilson e o pequeno teorema de Fermat. Além disso, também utilizamos para mostrar um resultado relacionado a principal função aritmética conhecida: a função φ de Euler.

Sendo assim, foi mostrado que a combinatória e os conjuntos finitos, são conteúdos que além de conversarem entre si, conversam com todas as outras áreas da matemática.

Referências Bibliográficas

Franco, T. (2020). *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. IMPA, Rio de Janeiro.

Hazzan, S. (1977). *Fundamentos da Matemática Elementar 5: Combinatória e Probabilidade*. Atual Editora, São Paulo.

Said, J. H. N. (1996). *Teoría Combinatoria*. Departamento de Matematica y Computacion Facultad Experimental de Ciencias La Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Santos, J. P., Mello, M. P., e Murari, I. T. C. (2017). *Introdução a Análise Combinatória*. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro.