

UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL

Amarildo Oliveira Da Silva

**Modelos de evolução de epidemias dados por  
equações diferenciais**

Dourados - MS

2022

Amarildo Oliveira Da Silva

## Modelos de evolução de epidemias dados por equações diferenciais

Dissertação apresentada como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador: Rafael Afonso Barbosa.

Dourados - MS

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

S586m Silva, Amarildo Oliveira Da  
Modelos de evolução de epidemias dados por equações diferenciais [recurso eletrônico] /  
Amarildo Oliveira Da Silva. -- 2021.  
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Rafael Afonso Barbosa.

Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2021.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:

<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Equações diferenciais. 2. COVID-19. 3. Epidemiologia. I. Barbosa, Rafael Afonso. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



## Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO(A), para a dissertação intitulada: "**Modelos de evolução de epidemias dados por equações diferenciais**", de autoria de **Amarildo Oliveira da Silva** apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Rafael Afonso Barbosa (Orientador-UFGD)  
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Alexandre Calixto Pitangui  
Membro Examinador (UFGD)

Prof. Dr. Rafael Lucas de Arruda  
Membro Examinador (UFMS)

Dourados/MS, 22 de fevereiro de 2022

# Modelos de evolução de epidemias dados por equações diferenciais

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade de avançar mais esta etapa na minha formação. Agradeço a minha mãe, esposa, filhos e irmãos por terem me apoiado a voltar estudar e me aperfeiçoar, depois de tanto tempo dedicado somente a docência no ensino fundamental.

Vai também meu agradecimento aos professores do Profmat-UFGD Alexandre Pitanguí, Ana Cláudia Mendonça, Irene Magalhães, Lino Sanabria, Robert Jesús, Rogério de Oliveira e Sérgio Rodrigues, pelas excelentes aulas que muito contribuíram para nossa formação e em especial ao Prof. Rafael Barbosa, meu orientador, por ter tido disposição em me orientar e por sempre estar presente para indicar a direção correta que o trabalho deveria tomar. Agradeço também ao Prof. Márcio Demetrius, meu professor na graduação, que me deu todo apoio, inclusive me emprestando livros para estudar durante o desenvolvimento dessa dissertação.

Agradeço aos meus amigos Altivo Moraes dos Santos, Anízio Eduardo Izidório, Heleninha de Oliveira, Joaquim, Nelsi Maciel e Olga, por terem contribuído indiretamente, muitas vezes até me hospedando em suas residências. Aos amigos José Alves dos Santos e Adão, que cuidaram da minha casa quando me ausentava para estudar. Meus colegas de trabalho e colegas de turma, que sempre me incentivavam a seguir em frente, mesmo com as dificuldades que passamos durante essa pandemia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo introdutório da teoria das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Apresentamos alguns modelos matemáticos estudados em epidemiologia, que são utilizados para descrever a curva de contágio de doenças contagiosas e, aplicamos tais modelos aos números da epidemia de COVID-19 no Brasil.

Além disso, fizemos uma comparação entre os números encontrados em cada modelo, com os números oficiais da epidemia. Escolhemos, dentre os modelos estudados, o que mostrou ser o mais adequado e com ele descrevemos a curva de contágio dessa doença no período de um ano e um mês (06/05/2020 a 30/06/2021).

Por fim, apresentamos as tabelas e gráficos com os números encontrados e nossas conclusões.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais, COVID-19, Epidemiologia.

## Abstract

In this work we present an introductory study on the theory of first order ordinary differential equations. We present some mathematical models studied in epidemiology, which are used to describe the contagion curve of contagious diseases, and we apply such models to the numbers of the COVID-19 epidemic in Brazil.

In addition, we made a comparison between the numbers found in each model, with the official numbers of the epidemic. We chose, among the models studied, the one that proved to be the most appropriate and with it we described the contagion curve of this disease over a period of one year and one month (05/06/2020 to 06/30/2021).

Finally, we present the tables and graphs with the numbers found and our conclusions.

**Key words:** Differential equations, COVID-19, Epidemiology.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equações diferenciais</b>	<b>3</b>
1.1 Classificação pelo tipo . . . . .	3
1.1.1 Equações diferenciais ordinárias . . . . .	3
1.1.2 Equações diferenciais parciais . . . . .	4
1.2 Classificação pela ordem . . . . .	4
1.3 Classificação como linear ou não linear . . . . .	4
1.4 Solução de uma equação diferencial ordinária . . . . .	5
1.5 Problema de valor inicial de primeira ordem . . . . .	8
1.6 Equações de variáveis separáveis . . . . .	10
1.7 Equações diferenciais lineares de primeira ordem . . . . .	11
1.8 Sistemas de equações diferenciais . . . . .	12
<b>2 Modelos de evolução de epidemias</b>	<b>17</b>
2.1 Número Reprodutivo Básico $\mathcal{R}_0$ . . . . .	18
2.2 Modelo SI . . . . .	19
2.3 Modelo SIS . . . . .	22
2.4 Modelo SIR . . . . .	25
<b>3 Estudo da propagação da COVID-19 no Brasil através dos modelos SI, SIS e SIR</b>	<b>29</b>
3.1 Modelo <b>SI</b> . . . . .	32
3.2 Modelo <b>SIS</b> . . . . .	34
3.3 Modelo <b>SIR</b> . . . . .	36
3.4 Comparação dos modelos . . . . .	38
<b>4 Considerações finais</b>	<b>43</b>



# Introdução

As equações diferenciais começaram com o estudo do cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Com o passar do tempo, o estudo das equações diferenciais mostrou-se uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes. Naturalmente, chamou a atenção de vários matemáticos renomados, que fizeram suas contribuições. Dentre eles podemos destacar, os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, o matemático mais prolífico de todos os tempos, Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas remonta à década de 1760, quando Daniel Bernoulli fez um trabalho relativo ao estudo da disseminação da varíola. Mais recentemente, vários modelos matemáticos foram propostos e estudados para diversas doenças diferentes.

O primeiro caso de contaminação pelo novo coronavírus, SARS-COV2, foi identificado em Wuhan, na China, no dia 31 de dezembro 2019. Desde então, os casos começaram a se espalhar rapidamente pelo mundo: primeiro pelo continente asiático, e depois por outros países da Europa.

O primeiro caso, no Brasil, foi confirmado em 26 de fevereiro 2020 e aí passamos a viver com a repercussão nos noticiários: o que mais se falavam eram os números da pandemia, curva de contágio, números de mortos, modelos matemáticos. Toda essa invasão de informações sobre esse assunto nos despertou interesse em estudar os modelos matemáticos que podem descrever e prever com certa antecedência o número de pessoas infectadas pela doença.

Que modelos matemáticos são esses capazes de prever esses números com certa antecedência?

Algum desses modelos se aplica para o caso da COVID-19?

É o que pretendemos responder à partir do nosso trabalho. Para isso, faremos um estudo introdutório sobre equações diferenciais ordinárias e apresentaremos alguns modelos

compartimentais epidemiológicos, a saber, os modelos **SI**, **SIS** e **SIR**. Os capítulos estão apresentados como segue:

No capítulo 1, estudamos conceitos básicos sobre a teoria das equações diferenciais. Para ilustrar tais conceitos e como podem ser utilizados, apresentamos alguns exemplos.

No capítulo 2, falamos sobre o número reprodutivo básico,  $\mathcal{R}_0$ , e apresentamos três modelos compartimentais usados em estudos relacionados a epidemiologia, os modelos **SI**, **SIS** e **SIR**. Ilustramos cada um deles através de exemplos.

No capítulo 3, aplicamos os modelos estudados aos números da COVID-19 no Brasil e comparamos os resultados encontrados. Nosso objetivo aqui, é escolher um deles para descrever a curva de contágio dessa doença no período de aproximadamente um ano.

E finalmente, no Capítulo 4 tratamos das considerações finais.

# Capítulo 1

## Equações diferenciais

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre a teoria das equações diferenciais e sistemas de equações lineares de primeira ordem.

**Definição 1.1.** *As equações diferenciais são aquelas que contem as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.*

**Exemplo 1.2.**

1.  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y$  onde:  $x$  e  $y$  são variáveis dependentes e  $t$  é variável independente.
2.  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$  onde:  $u$  é a variável dependente e  $x$  e  $y$  são variáveis independentes

As equações diferenciais são classificadas de acordo, com o tipo, a ordem e a linearidade.

### 1.1 Classificação pelo tipo

#### 1.1.1 Equações diferenciais ordinárias

Uma equação diferenciável ordinária (*EDO*) é uma equação que envolve uma função incógnita, sua variável independente e derivadas da função incógnita e que pode ser escrita na forma:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = y^{(n)}(x), \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$

**Exemplo 1.3.** *Algumas equações diferenciais ordinárias:*

1.  $p'(x) - p(x) = 0$

2.  $y''(x) + y(x) = 0$

3.  $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

4.  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$

### 1.1.2 Equações diferenciais parciais

Uma equação diferencial cuja função desconhecida depende de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (*EDP*).

**Exemplo 1.4.** *Algumas equações diferenciais parciais:*

1.  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y}$

## 1.2 Classificação pela ordem

A ordem de uma equação diferencial, *EDO* ou *EDP*, é a ordem da maior derivada que aparece na equação.

**Exemplo 1.5.**

1.  $\frac{dy}{dx} + 2y = 2e^x$  é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

2.  $\frac{d^3 u}{dx^3} + 2y \frac{d^2 u}{dy^2} + x \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 0$  é uma equação diferencial parcial de terceira ordem.

## 1.3 Classificação como linear ou não linear

Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (1.2)$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- A variável dependente  $y$  e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo  $y$  é 1.

- Cada coeficiente depende apenas da variável independente  $x$ .

**Exemplo 1.6.** São exemplos de equações diferenciais lineares:

1.  $x^3 y''' + xy' + y = x^2$

2.  $y'' + 3y' + 6y = \text{sen}(x)$

Uma equação diferencial que não satisfaz a condição (1.2) é dita não linear.

**Exemplo 1.7.** São exemplos de equações diferenciais não lineares:

1.  $x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0$

É não linear, pois a derivada da variável dependente está na quarta potência.

2.  $yy' + 2y = 1 + x^2$

É não linear porque o coeficiente do primeiro termo depende de  $y$

3.  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = \text{sen } y$

É não linear, note que tem um coeficiente  $\text{sen } y$  ou seja depende de  $y$

## 1.4 Solução de uma equação diferencial ordinária

**Definição 1.8.** Uma função  $y = \varphi(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável em  $I$ , é dita solução de uma equação diferencial ordinária, no intervalo  $I$ , se ao substituírmos  $y$  por  $\varphi(x)$  na equação, esta transforma-se numa identidade.

A família de funções  $y = \varphi(x, c)$ , dependente de uma constante arbitrária  $c$ , que resolvem a equação diferencial ordinária num intervalo, denomina-se por solução geral da equação diferencial ordinária. Chama-se solução particular, a toda função que se obtém da solução geral  $y = \varphi(x, c)$ , quando se atribui um valor fixo a constante  $c$ , isto é, a uma função  $y = \varphi(x, c_0)$ , com  $c_0 = \text{constante}$ .

Vejamos a seguir alguns exemplos de soluções de uma *EDO*.

**Exemplo 1.9.** A função  $y = 2 - e^{-x}$  é uma solução para a equação diferencial

$$y' = 2 - y$$

no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . De fato, substituindo na equação diferencial temos

$$\begin{aligned} (2 - e^{-x})' &= 2 - (2 - e^{-x}) \Rightarrow (2)' - (e^{-x})' = 2 - 2 + e^{-x} \\ &\Rightarrow -(-e^{-x}) = e^{-x} \\ &\Rightarrow e^{-x} = e^{-x}. \end{aligned}$$

Portanto, a função  $y = 2 - e^{-x}$  é uma solução particular de  $y' = 2 - y$ .

**Exemplo 1.10** (Ratos do campo e corujas [1]). Considere uma população de ratos do campo que habitam certa área rural. Vamos supor que, na ausência de predadores, a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população atual. Essa hipótese é uma lei física que não está muito bem estabelecida, mas é uma hipótese inicial usual em um estudo de crescimento populacional.

Se denotarmos o tempo por  $t$  e a população de ratos por  $p(t)$ , então a hipótese sobre o crescimento populacional pode ser expressa pela equação

$$\frac{dp}{dt} = rp \quad (1.3)$$

na qual o fator de proporcionalidade  $r$  é chamado de taxa constante ou taxa de crescimento. Especificamente, suponhamos que o tempo é medido em meses e que a taxa constante  $r$  tem o valor de 0,5 por mês. Então, cada uma das expressões na equação (1.3) tem unidades de ratos por mês.

Vamos aumentar o problema supondo que diversas corujas moram na mesma vizinhança e que elas matam 15 ratos do campo por dia. Para incorporar essa informação ao modelo, precisamos acrescentar outro termo à equação (1.3), de modo que ela se transforma em

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450. \quad (1.4)$$

Observe que o termo correspondente à ação do predador é  $-450$  em vez de  $-15$ , já que o tempo está sendo medido em meses e do que precisamos é a taxa predatória mensal. Agora vamos encontrar soluções dessa equação.

Para resolver a equação (1.4), precisamos encontrar funções  $p(t)$  que, ao serem substituídas na equação, transformam-na em uma identidade óbvia. Eis um modo de proceder. Primeiro, coloque tal equação na forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2} \quad (1.5)$$

ou, se  $p \neq 900$ ,

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}.$$

Pela regra da cadeia, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação acima é a derivada de  $\ln |p - 900|$  em relação a  $t$ . Portanto, temos

$$\ln |p - 900| = \int \frac{1}{2} dt.$$

Então, resolvendo a integral, obtemos

$$\ln |p - 900| = \frac{t}{2} + c.$$

Logo, aplicando a exponencial, vemos que

$$|p - 900| = e^{t/2+c} = e^c e^{t/2}$$

ou

$$p - 900 = \pm e^c e^{t/2}$$

e, finalmente,

$$p = 900 + C e^{t/2} \tag{1.6}$$

na qual  $C = \pm e^c$  é, também, uma constante (não nula) arbitrária.

Note que a função constante  $p = 900$  também é solução da Eq. (1.5) e está contida na expressão (1.6) se permitimos que  $C$  tome o valor zero.

Encontramos uma infinidade de soluções da equação diferencial (1.4), correspondendo à infinidade de valores possíveis que a constante arbitrária  $C$  pode assumir na equação (1.6).

Isso é típico do que acontece quando se resolve uma equação diferencial. O processo de solução envolve uma integração, que traz consigo uma constante arbitrária, cujos valores possíveis geram uma família infinita de soluções. Com frequência, queremos focar nossa atenção em um único elemento dessa família infinita de soluções, especificando o valor da constante arbitrária.

Na maior parte das vezes, isso é feito indiretamente, através de um ponto dado que tem que pertencer ao gráfico da solução. Por exemplo, para determinar a constante  $C$  em (1.6), poderíamos dar a quantidade de elementos na população em determinado instante, tal como 850 elementos no instante  $t = 0$ . Em outras palavras, o gráfico da solução tem que conter o ponto  $(0, 850)$ . Simbolicamente, essa condição pode ser expressa como

$$p(0) = 850. \tag{1.7}$$

Substituindo, os valores  $t = 0$  e  $p = 850$  na equação (1.6), obtemos  $850 = 900 + C$ . Logo,  $C = -50$  e, inserindo esse valor em (1.6), obtemos a solução desejada, a saber,

$$p = 900 - 50e^{t/2}.$$

Tal condição adicional (1.7) usada para determinar  $C$  é exemplo de uma condição inicial. A equação diferencial (1.4) junto com a condição inicial (1.7) forma um problema de valor inicial.

O exemplo anterior serve de motivação para a próxima seção.

## 1.5 Problema de valor inicial de primeira ordem

Um problema de valor inicial de primeira ordem (*PVI*), consiste em uma equação diferencial primeira ordem, juntamente com uma condição inicial da função incógnita num determinado ponto.

Uma solução de um *PVI* num intervalo  $I$  contendo  $x_0$  é uma função  $y(x)$  que satisfaz não só a equação diferencial dada, mas também a condição inicial.

Formalmente, definimos um (*PVI*) pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde  $x_0 \in I$  e  $y_0$  é uma constante dada.

Veremos a seguir um resultado que garante a existência e unicidade de solução para um problema de valor inicial de primeira ordem.

**Teorema 1.11.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Se as funções  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas em um retângulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid a < x < b \text{ e } c < y < d\}$  o qual contem o ponto  $(x_0, y_0)$ . Então o *PVI* tem uma única solução em algum intervalo  $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é um número positivo.

*Demonstração.* Ver Teorema 2.4.2 em [1]. □

**Exemplo 1.12.** *Vamos aplicar o Teorema 1.11 ao problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Note que,

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}.$$

Assim, cada uma dessas funções é contínua em toda a parte, exceto na reta  $y = 1$ . Portanto, podemos desenhar um retângulo em torno do ponto inicial  $(0, -1)$  no qual ambas as funções  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas. Logo, o Teorema 1.11 garante que o problema de valor inicial tem uma única solução em algum intervalo em torno de  $x = 0$ . No entanto, embora o retângulo possa ser esticado indefinidamente para  $x$  positivo e negativo, isso não significa, necessariamente, que a solução existe para todo  $x$ .

A equação diferencial (1.8) pode ser escrita

$$2(y - 1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx.$$

Integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a  $y$  e a expressão à direita em relação a  $x$ , obtemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c,$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária. Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial dada, substituímos  $x = 0$  e  $y = -1$  na equação acima, encontrando  $c = 3$ . Portanto, a solução do PVI é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \quad (1.9)$$

Resolvendo a equação (1.9) para  $y$  em função de  $x$ , temos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \quad (1.10)$$

A equação (1.10) nos fornece duas soluções, mas somente uma satisfaz a condição inicial, a saber, a solução  $y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$ . Deste modo, obtemos a solução do PVI:

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Finalmente, para que a expressão dentro da raiz seja positiva devemos ter  $x > -2$ . Logo, a solução só existe para  $x > -2$ .

A seguir vamos estudar alguns métodos para resolver equações diferenciais ordinárias.

## 1.6 Equações de variáveis separáveis

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

é dita separável se podemos escrever  $f(x, y)$  como o produto de uma função  $g(x)$ , que depende apenas de  $x$ , e uma função  $p(y)$ , que depende apenas de  $y$ . Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = p(y)g(x). \quad (1.11)$$

Vamos desenvolver um método para resolver a equação (1.11). Inicialmente, observamos que se  $p(y) = 0$ , tal equação reduz-se a

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.12)$$

e integrando ambos os lados de (1.12), obtemos a solução constante  $y(x) = c$ .

Com o objetivo de encontrar soluções não constantes, vamos pedir que  $p(y) \neq 0$ . Neste caso, multiplicando a equação (1.12) por  $h(y) = \frac{1}{p(y)}$ , podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$h(y)dy = g(x)dx. \quad (1.13)$$

Portanto, separamos as variáveis, pois tudo que depende de  $y$  está de um lado da equação e o que depende de  $x$  está do outro. Agora, podemos integrar ambos os lados de (1.13) e obtemos

$$H(y) = G(x) + c \quad (1.14)$$

onde  $H(y)$  e  $G(x)$  satisfazem de  $H'(y) = h(y)$  e  $G'(x) = g(x)$ . A equação (1.14) é chamada de solução geral da EDO (1.11).

**Exemplo 1.13** (Decaimento ou crescimento exponencial). *O decaimento ou crescimento exponencial é modelado pela equação diferencial  $y' = ky$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Se a constante real  $k > 0$ , teremos crescimento e se  $k < 0$ , teremos decaimento. Vamos resolver tal equação separável. Primeiramente, separamos as variáveis:*

$$\frac{dy}{y} = kdx.$$

*Integrando ambos os lados da equação acima em relação a  $x$ , temos*

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int kdx \Rightarrow \ln|y| = kx + c \\ &\Rightarrow y = e^{kx+c}. \end{aligned}$$

*Portanto,  $y = e^{kx+c}$  é a solução geral.*

## 1.7 Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Uma *EDO* de primeira ordem é linear se pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad (1.15)$$

Se a função  $q(x) = 0$ , dizemos que é uma *EDO* de primeira ordem linear homogênea, caso contrário, linear não-homogênea.

Um fator integrante para uma *EDO* é uma função  $u(x, y)$  tal que a multiplicação da equação por  $u(x, y)$ , fornece uma outra equação em que cada lado pode ser identificado como uma derivada com respeito a  $x$ .

Com a ajuda de um fator integrante apropriado, há uma técnica padrão para resolver as chamadas *EDO's* de primeira ordem lineares.

Precisamos determinar uma função  $u(x)$  tal que, ao multiplicar todos os termos da equação  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  por  $u(x)$  sejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{cases} u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y = u(x)q(x) & e \\ u(x)p(x) = u'. \end{cases}$$

Segue que  $(u(x) \cdot y(x))' = u(x)q(x)$  e portanto, supondo  $u(x) \neq 0$ , obtemos

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \left( \int u(x)q(x)dx + c \right). \quad (1.16)$$

Para determinar a função  $u(x)$  basta notar que

$$\begin{aligned} u(x)p(x) = u' &\Rightarrow \frac{du}{dx} = u(x)p(x) \\ \frac{du}{u} &= p(x)dx \\ \ln u &= \int p(x)dx + c. \end{aligned}$$

Tomando  $c = 0$  e isolando  $u$  temos

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Portanto, substituindo tal fator integrante em (1.16) temos que

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c \right)$$

é solução geral da *EDO* (1.15).

**Exemplo 1.14.** Para resolver a equação diferencial

$$x \frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

primeiro vamos dividi-la por  $x$  a fim de obter a forma padrão. Temos,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -\frac{4}{x}.$$

Prosseguimos fazendo

$$\begin{cases} u(x) \frac{dy}{dx} + u(x) \frac{1}{x}y = \frac{-4u(x)}{x} \\ \frac{u(x)}{x} = u' \end{cases}$$

e pelo que vimos anteriormente, tomando  $p(x) = \frac{1}{x}$  segue que  $u = e^{\int \frac{1}{x} dx}$ . Portanto,

$$u(x) = e^{\ln x} \Rightarrow u(x) = x.$$

Agora, substituindo  $u(x) = x$  e  $q(x) = \frac{-4}{x}$  em  $y(x) = \frac{1}{u(x)} \left( \int u(x)q(x)dx + c \right)$  temos

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x} \left( \int x \cdot \frac{-4}{x} dx + c \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \int -4 dx + c \right) \\ &= \frac{1}{x} (-4x + c) \\ &= -4 + \frac{c}{x}. \end{aligned}$$

Portanto  $y = \frac{c}{x} - 4$  é a solução da equação diferencial

$$x \frac{dy}{dx} + y + 4 = 0.$$

Existem vários métodos para encontrar soluções de equações diferenciais, mas os que utilizaremos neste trabalho são apenas os dois apresentamos. Por este motivo, vamos nos restringir a tais métodos. Na próxima seção vamos estudar um pouco da teoria de sistemas lineares de primeira ordem e relembrar alguns resultados da álgebra linear.

## 1.8 Sistemas de equações diferenciais

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma. Por exemplo, circuitos elétricos têm essa característica, assim como

problemas em mecânica, problemas em epidemiologia e em outros campos. Nesses e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um sistema de duas ou mais equações diferenciais, que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem. Vamos estudar, neste capítulo, sistemas de equações de equações diferenciais, em particular, sistemas de primeira ordem. Apresentaremos as principais noções e alguns exemplos dos vários tipos de sistemas.

Uma razão pela qual os sistemas de equações de primeira ordem são particularmente importantes é que equações de ordem maior sempre podem ser transformadas em tais sistemas.

Vamos começar nosso estudo ilustrando tal processo através de um exemplo.

**Exemplo 1.15.** *O movimento de um determinado sistema massa-mola é descrito pela seguinte equação de segunda ordem*

$$u'' + 0,125u' + u = 0$$

*Inicialmente vamos escrever esta equação como um sistema de equações de primeira ordem. Consideremos  $x_1 = u, x_2 = u'$  então  $x_1' = x_2$ . Além disso, como  $u'' = x_2'$  vamos substituir  $u, u'$  e  $u''$  na equação e obtemos:*

$$x_2' + 0,125x_2 + x_1 = 0.$$

*Sendo assim,  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem o seguinte sistema de equações de primeira ordem:*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 0,125x_2 \end{cases} .$$

*Desta forma, reduzimos a ordem da equação e a transformamos num sistema de equações de primeira ordem.*

Para transformar uma equação arbitrária de ordem  $n$

$$y^{(n)} = F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

em um sistema de equações de primeira ordem, basta apenas estendermos o exemplo inicial e definirmos as variáveis  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  por  $x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\x_3' &= x_4 \\&\vdots \\x_{n-1}' &= x_n\end{aligned}$$

e da equação

$$y^{(n)} = F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

resulta

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tais equações são casos especiais de sistemas mais gerais do tipo

$$\begin{cases}x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).\end{cases} \quad (1.17)$$

Dizemos que um sistema como este, contendo  $n$  equações de primeira ordem, é um sistema de primeira ordem.

O sistema (1.17) terá uma solução no intervalo  $I : \alpha < t < \beta$  se existir um conjunto de  $n$  funções

$$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_n = \phi_n(t) \quad (1.18)$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo  $I$ , de modo que satisfaçam o sistema de equações em todos os pontos do intervalo.

Além dos sistemas de equações diferenciais, podemos ter condições iniciais da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \quad (1.19)$$

sendo  $t_0$  um valor especificado de  $t$  no intervalo  $I$  e  $x_1^0, \dots, x_n^0$  são números dados. A junção das equações diferenciáveis do sistema 1.17 e as condições iniciais em (1.19) formam um problema de valor inicial.

Consideremos novamente o sistema de equações 1.17, se cada uma das funções  $F_1, \dots, F_n$  forem funções lineares das variáveis dependentes  $x_1, \dots, x_n$  então o sistema de equações é denominado por sistema linear. Caso contrário, será não-linear.

Uma solução (1.18) pode ser vista como um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimensão  $n$ . Para um valor de  $t$  dado, as Equações (1.18) fornecem valores para as coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  de um ponto no espaço. À medida que  $t$  varia, as coordenadas, em geral, também mudam. A coleção de pontos correspondentes para  $\alpha < t < \beta$  forma uma curva no espaço. Muitas vezes, é útil pensar na curva como a trajetória ou o caminho percorrido por uma partícula movendo-se de acordo com o sistema de equações diferenciais (1.17). As condições iniciais (1.19) determinam o ponto inicial da partícula em movimento.

As condições a seguir sobre  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , facilmente verificadas em problemas específicos, são suficientes para garantir que o problema de valor inicial (1.17), (1.19) tenha uma solução única. Temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.16.** *Se as funções  $F_1, F_2, \dots, F_n$  e suas derivadas parciais  $\frac{dF_1}{dx_1}, \dots, \frac{dF_1}{dx_n}, \dots, \frac{dF_n}{dx_1}, \dots, \frac{dF_n}{dx_n}$  são contínuas numa região  $R$  do espaço  $tx_1x_2 \cdots x_n$ , definida por  $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$ , e suponha que o ponto  $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$  está em  $R$ . Então, existe um intervalo  $|t - t_0| < h$  no qual existe uma única solução  $x_1 = \phi(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$  do sistema (1.17) que também satisfaz as condições iniciais (1.19).*

*Demonstração.* Ver Teorema 7.1.1 em [1]. □

**Exemplo 1.17.** *Considere o sistema de equações diferenciais lineares homogêneo*

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y. \end{cases}$$

*Temos que sua solução geral é dada por:*

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \\ y &= C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} \end{aligned}$$

*com  $C_1, C_2$  constantes reais arbitrárias. De fato, substituindo as expressões no sistema obtemos*

$$\begin{aligned} x' &= (C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t})' \\ &= 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \\ &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} \\ &= x + y \end{aligned}$$

$e$

$$\begin{aligned}y' &= (C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t})' \\ &= 2C_1e^{2t} + 6C_2e^{-2t} \\ &= 3(C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}) - (C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t}) \\ &= 3x - y.\end{aligned}$$

No próximo capítulo apresentaremos alguns modelos matemáticos compartimentais usados em epidemiologia para estudar o comportamento da disseminação de doenças contagiosas.

# Capítulo 2

## Modelos de evolução de epidemias

Muitos modelos matemáticos estão sendo propostos e estudados para diversas doenças diferentes, os chamados modelos compartimentais. Recebem esse nome devido ao fato da população ser dividida em compartimentos, que indicam em qual estado se encontra o indivíduo.

Neste capítulo, iremos estudar alguns modelos matemáticos usados em Epidemiologia. Nosso objetivo é verificar se algum destes modelos pode ser usado para descrever a curva de contágio da covid19 no Brasil.

Antes de começar nosso estudo, temos as seguintes hipóteses:

1. Vamos supor que a população divide-se em três subpopulações.
  - (a) Indivíduos Infectados -  $I(t)$ : são portadores da doença e podem transmiti-la de forma direta ou indiretamente
  - (b) Indivíduos Suscetíveis -  $S(t)$ : são aqueles que podem adquirir a doença quando entram em contato com os indivíduos infectados.
  - (c) Indivíduos Removidos -  $R(t)$ : são aqueles que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, por motivo de isolamento, cura (adquirindo ou não imunidade) ou morte.
2. Vamos supor que no momento que contrair a doença, o indivíduo suscetível se torne transmissor. Esta hipótese não leva em consideração o período de incubação do indivíduo.
3. Não vamos considerar variações na população, nem por nascimentos, nem por óbitos decorrentes de outras causas.

## 2.1 Número Reprodutivo Básico $\mathcal{R}_0$

Um parâmetro importante na epidemiologia é o número reprodutivo básico  $\mathcal{R}_0$ , ele caracteriza o número de indivíduos infectados por um único indivíduo durante todo o seu período infeccioso, em uma população totalmente suscetível. Em se tratando da dinâmica corpórea interna do hospedeiro,  $\mathcal{R}_0$  indica a quantidade de células recém contaminadas produzidas por células infectadas durante sua vida útil, assumindo que as outras células são todas suscetíveis [8].

Originalmente, tal conceito foi desenvolvido para estudos demográficos, sendo definido como o número esperado de indivíduos secundários produzidos por um indivíduo ao longo de sua vida, ou seja, caracteriza o sucesso reprodutivo de um membro de determinada espécie [9]. Agora é amplamente utilizado no estudo de doenças infecciosas e, mais recentemente, em modelos de dinâmica de população hospedeira. O número reprodutivo básico é considerado por Heesterbeek e Dietz uma das mais importantes e valiosas ideias trazida pelo pensamento matemático à teoria epidêmica [12].

Com base na definição, fica evidente que quando  $R_0 < 1$ , cada indivíduo infectado produz, em média, menos de um novo indivíduo infectado e, portanto, prevemos que a infecção será eliminada da população. Se  $R_0 > 1$ , então cada indivíduo infectado contamina, em média, mais de um indivíduo suscetível. O que causa um alastramento da doença na população de hospedeiros e, dependendo do valor, pode tornar-se epidêmica e, eventualmente, pandêmica. Caso  $\mathcal{R}_0 = 1$ , a doença persiste endemicamente, porém de forma instável na população, podendo causar epidemias, persistir ou se extinguir.

Este comportamento de limite é o aspecto mais importante e útil do conceito  $\mathcal{R}_0$ . Em uma infecção endêmica, podemos determinar quais medidas de controle, e em que magnitude, seriam mais eficazes para reduzir  $\mathcal{R}_0$  abaixo de um, fornecendo orientações importantes para iniciativas de saúde pública. Vale destacar que, em programas de vacinação, não é necessário vacinar 100% da população para se erradicar uma doença, basta uma quantidade suficiente de pessoas, de modo a manter o  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

Neste trabalho, consideraremos o parâmetro  $\mathcal{R}_0$  dado pela razão  $\frac{\alpha}{\beta}$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes chamadas, taxa de infecção e taxa de remoção, respectivamente. Os significados de tais constantes apresentaremos a frente.

## 2.2 Modelo SI

O modelo **SI** (Suscetível - Infectado) é considerado o mais simples dos modelos compartimentais. Neste modelo a população é dividida em apenas duas subpopulações, suscetíveis e infectados. Considera-se os indivíduos nascidos sem imunidade e, uma vez infectados, permanecem assim ao longo da vida, portanto, serão portadores e transmissores eternos da enfermidade.

Tal modelo é adequado para descrever o comportamento de doenças virais como a AIDS e a Herpes [4].

Suporemos aqui que a transmissão da doença acontece pelo contato entre os indivíduos infectados e os suscetíveis, e o número de contatos é proporcional ao produto  $S$  por  $I$ .

Para descrever a variação de indivíduos infectados temos o seguinte **PVI**

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha SI \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

no qual consideramos que no instante  $t = 0$ , existe uma quantidade  $I_0$  de membros infectados e pedimos  $\alpha > 0$ . Tal constante  $\alpha$  será chamada taxa de transmissão da doença, definida pelo número médio diário de novos infectados por cada pessoa já infectada.

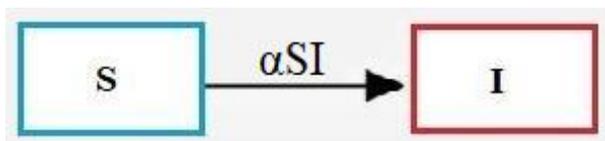


Diagrama do modelo **SI**.

Como não estamos considerando variações populacionais, a população  $N$  permanece constante e  $N = I + S$ . Substituindo  $S = N - I$  em (2.1), obtemos

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha I(N - I) \\ I(0) = I_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que, a equação diferencial em (2.2) é separável. Para resolvê-la procedemos como estudado na seção 1.6, temos

$$\int \frac{dI}{I(N - I)} = \alpha \int dt \quad (2.3)$$

Vamos resolver a integral do lado esquerdo da equação pelo método das frações parciais, escrevendo

$$\int \frac{dI}{I(N-I)} = \int \frac{A}{I} dI + \int \frac{B}{N-I} dI$$

temos que,

$$\frac{1}{I(N-I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{N-I}.$$

Colocando todas as frações acima num mesmo denominador fica

$$\frac{1}{I(N-I)} = \frac{(N-I)A + BI}{I(N-I)}$$

e assim, para termos a igualdade basta que

$$\begin{cases} NA = 1 \\ B - A = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos que  $A = B = \frac{1}{N}$ . Logo,

$$\int \frac{dI}{I(N-I)} = \frac{1}{N} \int \frac{1}{I} dI + \frac{1}{N} \int \frac{1}{N-I} dI = \frac{1}{N} \ln I - \frac{1}{N} \ln(N-I) + c$$

Então, da equação (2.3) segue que

$$\ln I + \ln(N-I) + cN = Nat + c'N,$$

renomeando as constantes e usando as propriedades do logaritmo, obtemos

$$\ln \left( \frac{I}{(N-I)} \right) = Nat + c_1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{I}{(N-I)} &= e^{Nat+c_1} \\ \frac{I}{(N-I)} &= Ce^{Nat} \\ I &= (N-I)Ce^{Nat} \\ I + ICe^{Nat} &= NCe^{Nat} \\ I(1 + Ce^{Nat}) &= NCe^{Nat} \end{aligned}$$

onde  $C = e^{c_1}$ .

Portanto, a solução geral da equação é dada por

$$I(t) = \frac{NC}{C + e^{-N\alpha t}}. \quad (2.4)$$

Aplicando a condição inicial  $I(0) = I_0$  na solução geral, temos

$$I(0) = \frac{NC}{C + e^{-N\alpha \cdot 0}} \Rightarrow I_0 = \frac{NC}{C + 1}$$

a assim, encontramos

$$C = \frac{I_0}{N - I_0}.$$

Substituindo o valor de  $C$  dado acima em (2.4), fica

$$I(t) = \frac{N(I_0/(N - I_0))}{(I_0/(N - I_0)) + e^{-N\alpha t}}.$$

Equivalentemente,

$$I(t) = \frac{NI_0}{I_0 + (N - I_0)e^{-N\alpha t}}. \quad (2.5)$$

que é a solução da equação que descreve a variação da população de membros infectados.

Vale destacar que quando  $t \rightarrow +\infty$ , o termo  $e^{-N\alpha t} \rightarrow 0$ . Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = N.$$

Podemos concluir então, que a população ficará completamente infectada, independente da quantidade de infectados no início epidêmico ( $I_0$ ).

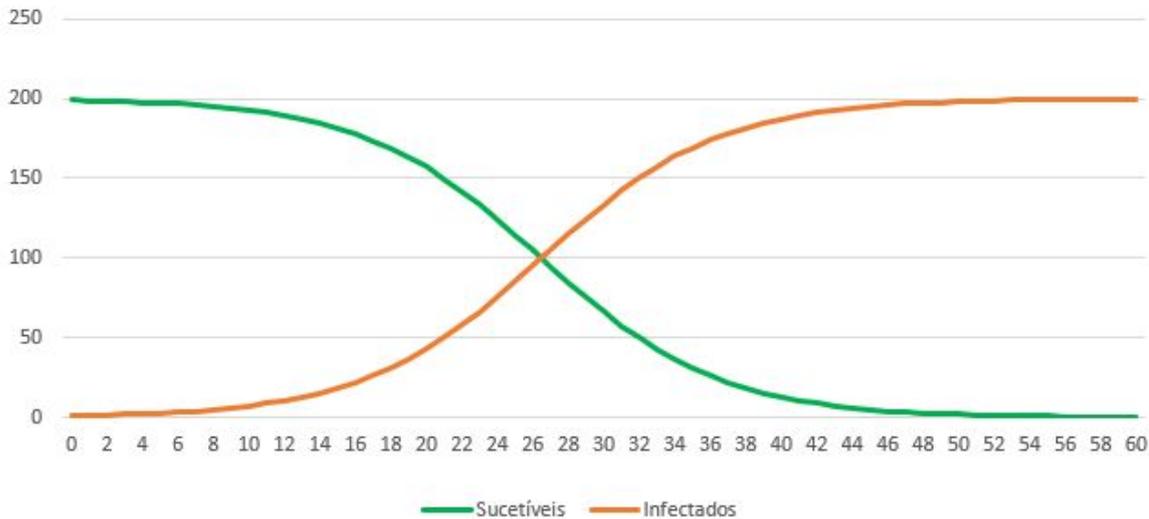
**Exemplo 2.1.** *Considerando uma população de  $N = 200$  pessoas, com  $I_0 = 1$  indivíduo infectado por uma doença com taxa de transmissão  $\alpha = 0,001$ . Vamos aplicar o modelo **SI** e observar seu comportamento.*

*Substituindo  $N$ ,  $I_0$  e  $\alpha$  na Equação (2.5), temos:*

$$I(t) = \frac{200}{1 + 199 \cdot e^{-0,2t}}.$$

*Podemos esboçar o gráfico para analisar o comportamento da curva.*

Gráfico 1



*Neste exemplo, consideramos uma taxa de infecção muito pequena e mesmo assim a doença atingiu toda a população suscetível.*

## 2.3 Modelo SIS

O modelo **SIS** (Suscetível - Infectado - Suscetível) é utilizado para descrever doenças nas quais os indivíduos suscetíveis a adquirem, ficam infectados, e, após a recuperação, não adquirem imunidade, voltando para o grupo dos suscetíveis novamente. Portanto, tal modelo é apropriado para estudar enfermidades nas quais ocorrem infecções recorrentes, por exemplo, o resfriado comum e a dengue.

Dividiremos a população em três subpopulações, suscetíveis, infectados e suscetíveis. O indivíduo suscetível torna-se infectado, uma vez infectado este não adquire imunidade e volta novamente a subpopulação dos suscetíveis.

De modo análogo ao que fizemos no modelo **SI**, vamos supor que a infecção se dá pelo encontro entre pessoas suscetíveis e infectadas, e o número de contatos é proporcional ao produto  $S$  por  $I$ . Assim, a variação de indivíduos suscetíveis em relação ao tempo pode ser modelada por  $\alpha SI$ .

Vamos supor também que o número total de indivíduos contaminados que se recuperam é proporcional à população infectada, portanto, temos que o retorno à classe de suscetíveis será modelado por  $\beta I$ . O parâmetro  $\beta$  é denominado taxa de recuperação, e se refere à movimentação de indivíduos do grupo de infectados  $I$  novamente para o grupo de

suscetíveis  $S$ . Podemos considerar  $\beta = \frac{1}{r}$ , em que  $r$  é o tempo que o indivíduo permanece infectado, antes de se recuperar e passar novamente para a classe de suscetíveis [3].

Portanto, é razoável supor que a equação diferencial que representa no número de infectados será:

$$I' = \alpha SI - \beta I.$$

Como a população  $N$  é constante com  $N = S + I$ , temos que

$$N' = (S + I)' = 0.$$

Segue que, equação diferencial que governa a variação do número de indivíduos suscetíveis é dada por:

$$S' = -\alpha SI + \beta I.$$

Logo, o modelo **SIS** pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\alpha, \beta > 0$ .

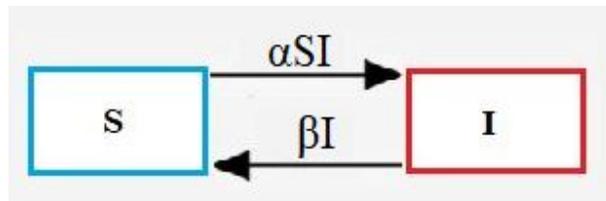


Diagrama do modelo **SIS**.

A solução analítica da equação diferencial ordinária em 2.6 é apresentada em [7], dada por:

$$I(t) = \frac{N \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{1 + \left(\frac{N}{I_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) - 1\right) e^{-(\mathcal{R}_0 - 1)\beta t}}. \quad (2.7)$$

Logo, como  $S(t) = N - I(t)$ , obtemos

$$S(t) = N - \frac{N \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{1 + \left(\frac{N}{I_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) - 1\right) e^{-(\mathcal{R}_0 - 1)\beta t}}.$$

Analisando a equação (2.7), podemos observar que, quando  $t \rightarrow 0$ ,  $I(t) \rightarrow I_0$  e  $S(t) \rightarrow N - I_0$ . Fazendo  $t \rightarrow +\infty$ , temos  $I(t) \rightarrow N \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$ , portanto, temos as seguintes conclusões:

Se  $\mathcal{R}_0 > 1$  a curva de contágio tende crescer portanto, estado epidêmico.

Se  $\mathcal{R}_0 < 1$  a curva de contágio tende descer portanto, estado não epidêmico.

Se  $\mathcal{R}_0 = 1$  a curva de contágio tende a manter estável portanto, estado endêmico.

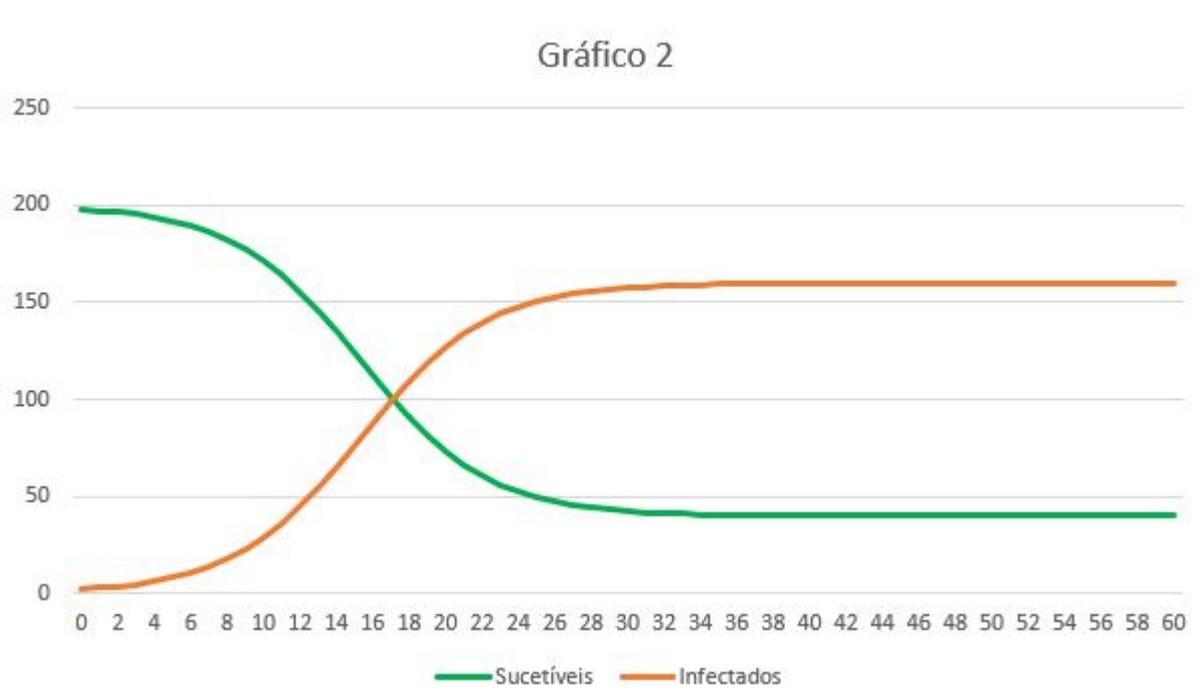
Para ilustrar nossa conclusão vamos tomar alguns exemplos:

**Exemplo 2.2.** Vamos considerar uma comunidade de  $N = 200$  pessoas, com  $I_0 = 1$  indivíduo infectado por uma doença com taxa de transmissão  $\alpha = 0,35$  e taxa de recuperação  $\beta = 0,07$ . Sendo assim, temos  $\mathcal{R}_0 = \frac{0,35}{0,07} = 5$ . Vamos aplicar o modelo **SIS** e observar o comportamento da curva de contágio.

Substituindo  $N$ ,  $I_0$  e  $\mathcal{R}_0$  na equação (2.7), temos:

$$I(t) = \frac{160}{1 + 159e^{-0,28t}}.$$

Esboçando o gráfico da função, observamos que a curva do número de infectados cresce. O que já era esperado pois  $\mathcal{R}_0 > 1$ .



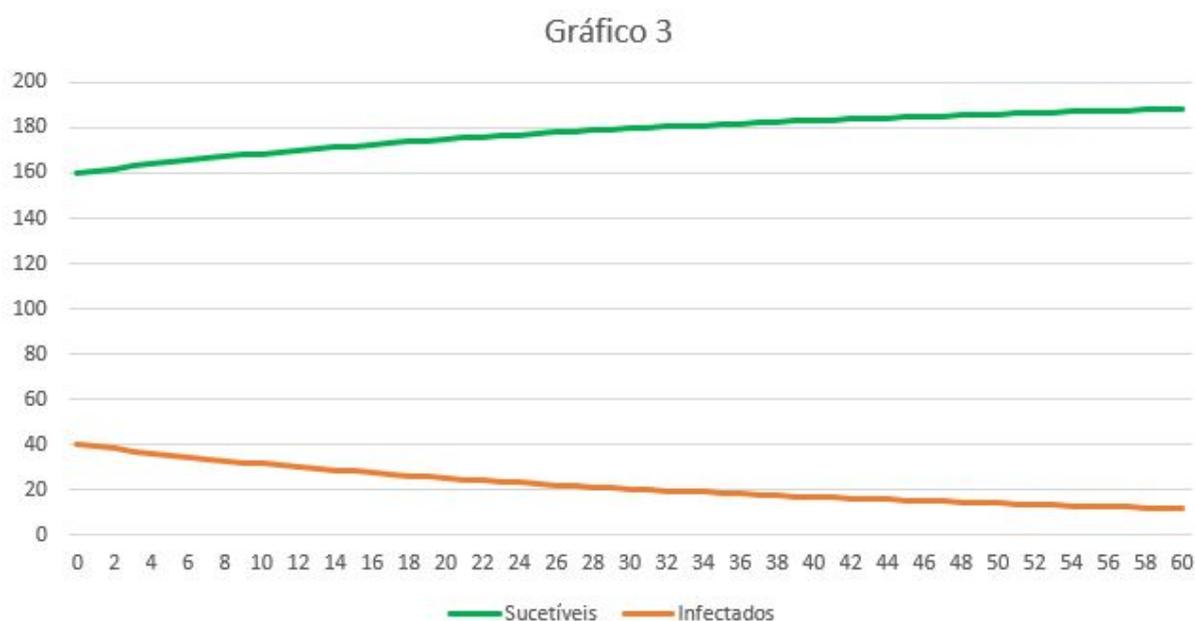
**Exemplo 2.3.** Vamos considerar agora uma comunidade de  $N = 200$  pessoas, com  $I_0 = 40$  indivíduos infectados por uma doença com taxa de transmissão  $\alpha = 0,056$  e taxa de

recuperação  $\beta = 0,07$ . Portanto, temos  $\mathcal{R}_0 = 0,8 < 1$ . Novamente, vamos aplicar o modelo **SIS**.

Substituindo  $N$ ,  $I_0$  e  $\mathcal{R}_0$  na equação (2.7), temos:

$$I(t) = \frac{-50}{1 - 2e^{0,014t}}.$$

Neste caso, o gráfico da função mostra que a curva do número de infectados decresce.



## 2.4 Modelo SIR

O modelo **SIR** (Suscetível - Infectado - Removido) foi proposto em 1927 por Kermack e McKendrick em um conjunto de três artigos (de 1927, 1932 e 1933). Este representou um marco inicial no desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevem a propagação de doenças em situações epidêmicas. Tal modelo é indicado para o estudo de infecções que, após a recuperação, conferem imunidade completa ou, no caso de doenças letais, morte.

A dinâmica da população será dividida em três subpopulações, suscetíveis, infectados e removidos. Sendo  $N$  o tamanho da população, temos que

$$N = S + I + R.$$

Além disso, existem casos de transição entre as subpopulações citadas acima. Definimos a seguir:

- $\frac{dS}{dt}$  a taxa de mudança de suscetíveis;
- $\frac{dI}{dt}$  a taxa de mudança de infectados;
- $\frac{dR}{dt}$  a taxa de mudança de removidos.

A remoção de membros do grupo de infectados acontecerá quando este se recuperar da doença, tornando-se imune permanentemente, ou vindo a óbito.

Temos as seguintes hipóteses:

1. De modo análogo ao modelo **SIS**, a razão de variação da população removida é proporcional à população infectada, portanto, representada por  $\beta I$ . Logo,

$$R' = \beta I.$$

O parâmetro  $\beta$  é denominado taxa de recuperação, e se refere à movimentação de indivíduos do grupo de infectados  $I$  para o grupo de removidos  $R$ . Podemos considerar  $\beta = \frac{1}{r}$ , em que  $r$  é o tempo que o indivíduo permanece infectado antes de passar para a classe de removidos, seja por recuperação ou morte [3].

2. Como nos dois modelos anteriores, a razão de variação da população suscetível é proporcional ao número de encontros entre as populações suscetível e infectada. Tal constante de proporcionalidade será a taxa de transmissão  $\alpha$ . Portanto, a equação que governa a variação do número de infectados é dada por

$$I' = \alpha SI - \beta I$$

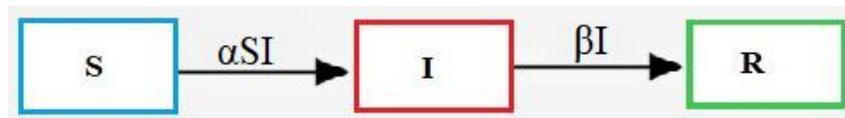


Diagrama do modelo **SIR**.

Como a população  $N$  é constante, temos que

$$N' = (S + I + R)' = 0.$$

Substituindo na equação acima  $I'$  e  $R'$ , podemos encontrar  $S'$ :

$$S' = -\alpha SI.$$

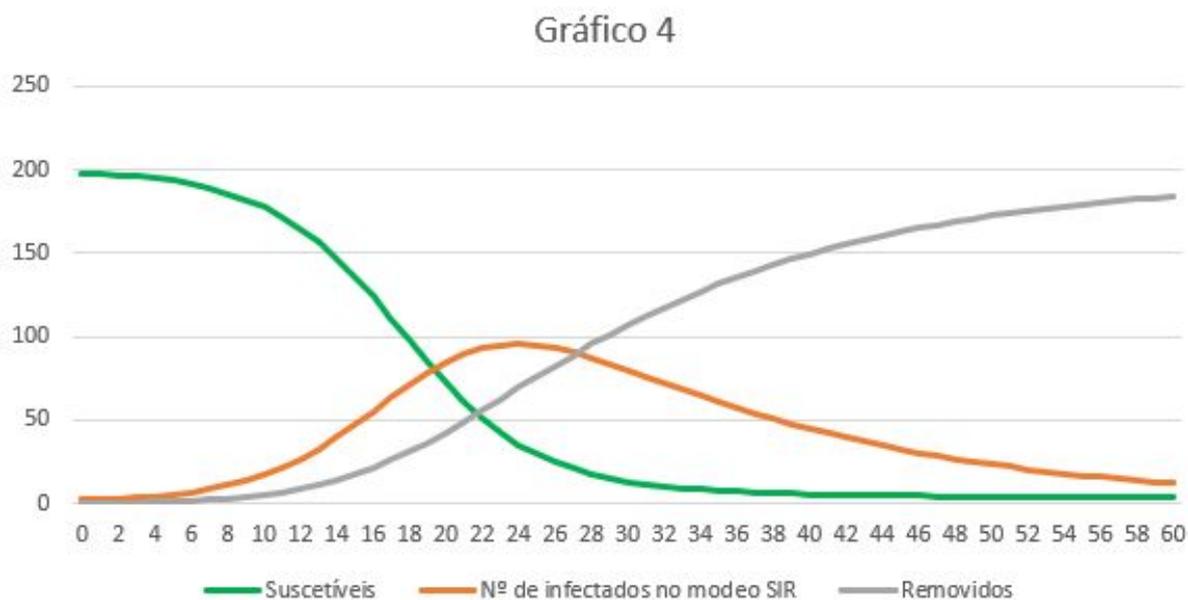
Logo, obtemos o sistema de equações diferenciais que representa o modelo **SIR**:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{cases} \quad (2.8)$$

A solução do sistema das equações diferenciais acima na forma analítica é de obtenção bastante trabalhosa e foge ao escopo deste trabalho. Por isso, ao trabalharmos com tal modelo faremos uso do Excel para encontrar soluções numéricas particulares. Substituímos  $N$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  nas equação do sistemas e colocamos cada uma delas em células distintas no programa. Fazendo iterações sucessivas a partir de  $I_0$  conseguimos obter uma tabela com os valores de  $I$ ,  $S$  e  $R$ . Utilizando tais valores conseguimos esboçar os gráficos.

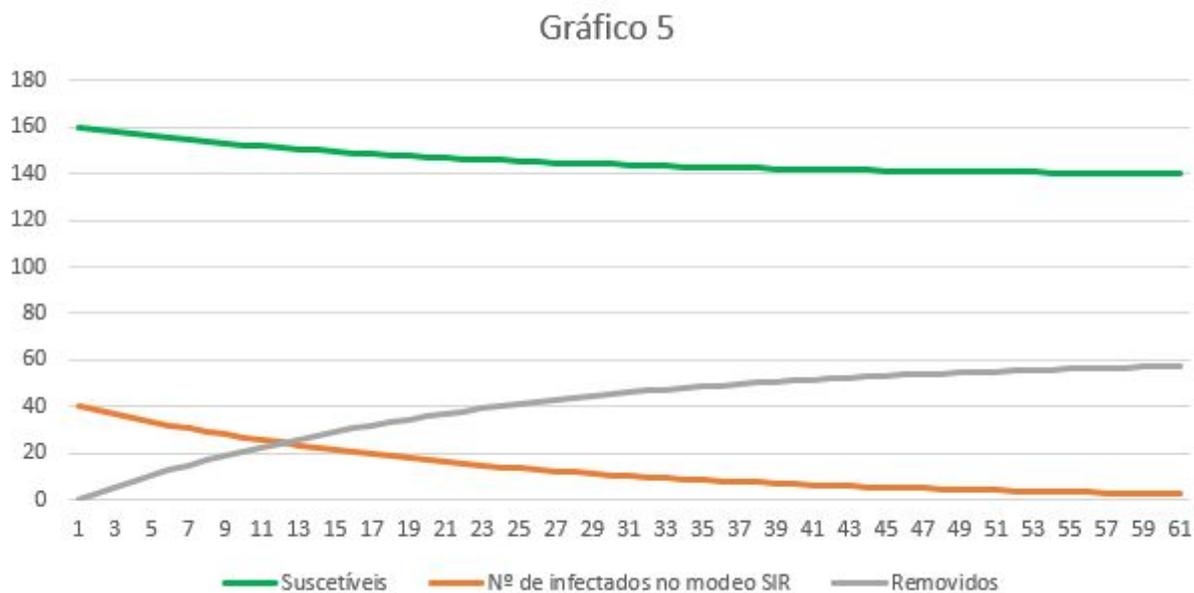
Para ilustrar tal processo vamos apresentar dois exemplos:

**Exemplo 2.4.** Considerando  $N = 200$ ,  $I_0 = 1$ ,  $\alpha = 0,35$ ,  $\beta = 0,07$ , e assim,  $\mathcal{R}_0 = 5$ . Utilizando o Excel para aplicar o modelo **SIR** obtemos:



Pelo gráfico podemos observar que quando  $\mathcal{R}_0 > 1$ , a curva cresce atingindo um valor máximo, depois começa a cair à medida a população vai sendo removida.

**Exemplo 2.5.** Tomando  $N = 200$ ,  $I_0 = 40$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $\beta = 0,4$ , e sendo assim,  $\mathcal{R}_0 = 0,5$ . Novamente, aplicando o modelo **SIR** através do Excel, temos:



Note que, como  $\mathcal{R}_0 < 1$ , a curva de infectados é decrescente.

## Capítulo 3

# Estudo da propagação da COVID-19 no Brasil através dos modelos SI, SIS e SIR

Neste capítulo vamos usar os dados reais da epidemia do coronavírus no Brasil, obtidos em [2], para verificar qual dos modelos dentre os estudados no Capítulo 2, melhor descrever a curva de contágio dessa doença.

A tabela à seguir contém os números da epidemia no Brasil, dados semanalmente, desde o primeiro caso confirmado da doença. Na primeira coluna temos o dia em que foram coletados os dados que aparecem na mesma linha, na segunda coluna estão os valores da variável  $t$  que utilizaremos nas funções, na terceira o número acumulado de infectados, na quarta o número acumulado de mortes, na quinta o número acumulado de recuperados e na sexta coluna o número de casos ativos da doença.

<b>Data</b>	<b>t</b>	<b>Número de infectados</b>	<b>Número Mortes</b>	<b>Número de Recuperados</b>	<b>Casos Ativos</b>
26/02/2020	-10	1	0	0	1
04/03/2020	-9	3	0	0	3
11/03/2020	-8	53	0	0	53
18/03/2020	-7	514	4	0	510
25/03/2020	-6	2.566	59	27	2.480
01/04/2020	-5	6.931	244	78	6.609
08/04/2020	-4	16.258	826	796	14.636

15/04/2020	-3	29.019	1.760	4.273	22.986
22/04/2020	-2	46.423	2.941	8.594	34.888
29/04/2020	-1	79.799	5.537	16.206	58.056
06/05/2020	0	126.957	8.597	29.175	89.185
13/05/2020	1	191.040	13.281	62.543	115.216
20/05/2020	2	294.624	19.059	112.074	163.491
27/05/2020	3	415.366	25.705	190.847	198.814
03/06/2020	4	589.048	32.667	306.346	250.035
10/06/2020	5	777.707	39.824	415.545	322.338
17/06/2020	6	961.230	46.707	523.450	391.073
24/06/2020	7	1.195.288	53.955	663.155	478.178
01/07/2020	8	1.459.494	60.878	930.362	468.254
08/07/2020	9	1.722.098	68.126	1.146.728	507.244
15/07/2020	10	1.973.933	75.604	1.367.648	530.681
22/07/2020	11	2.237.229	82.959	1.620.313	533.957
29/07/2020	12	2.559.132	90.259	1.930.579	538.294
05/08/2020	13	2.868.616	97.519	2.193.786	577.311
12/08/2020	14	3.173.107	104.393	2.506.448	562.266
19/08/2020	15	3.465.378	111.263	2.801.931	552.184
26/08/2020	16	3.726.431	117.839	3.082.447	526.145
02/09/2020	17	4.005.611	123.972	3.393.078	488.561
09/09/2020	18	4.205.877	128.752	3.611.632	465.493
16/09/2020	19	4.475.541	134.248	3.853.829	487.464
23/09/2020	20	4.631.915	139.169	4.070.983	421.763
30/09/2020	21	4.751.616	142.238	4.197.372	412.006
07/10/2020	22	5.006.206	148.379	4.458.274	399.553
14/10/2020	23	5.146.543	151.884	4.626.943	367.716
21/10/2020	24	5.304.593	155.536	4.785.118	363.939
28/10/2020	25	5.473.540	158.556	4.947.777	367.207
04/11/2020	26	5.594.058	161.246	5.078.162	354.650
11/11/2020	27	5.752.474	163.496	5.222.937	366.041
18/11/2020	28	5.951.281	167.568	5.383.385	400.328
25/11/2020	29	6.171.380	170.871	5.534.010	466.499
02/12/2020	30	6.442.425	174.632	5.759.294	508.499

09/12/2020	31	6.736.358	179.134	5.970.320	586.904
16/12/2020	32	7.048.347	183.954	6.239.192	625.201
23/12/2020	33	7.372.614	189.375	6.518.805	664.434
30/12/2020	34	7.626.563	194.056	6.814.092	618.415
06/01/2021	35	7.882.143	199.161	7.033.286	649.696
13/01/2021	36	8.265.116	206.139	7.348.189	710.788
20/01/2021	37	8.647.962	213.024	7.624.849	810.089
27/01/2021	38	9.007.244	220.363	7.964.176	822.705
03/02/2021	39	9.347.703	227.731	8.313.044	806.928
10/02/2021	40	9.669.883	235.081	8.616.282	818.520
17/02/2021	41	9.986.325	242.313	8.942.046	801.966
24/02/2021	42	10.334.634	250.236	9.214.337	870.061
03/03/2021	43	10.731.070	259.576	9.548.315	923.179
10/03/2021	44	11.217.531	271.140	9.921.994	1.024.397
17/03/2021	45	11.709.475	285.328	10.327.440	1.096.707
24/03/2021	46	12.238.343	301.390	10.750.131	1.186.822
31/03/2021	47	12.763.392	322.138	11.181.371	1.259.883
07/04/2021	48	13.208.715	341.396	11.610.627	1.256.692
14/04/2021	49	13.688.024	362.444	12.052.283	1.273.297
21/04/2021	50	14.134.150	381.971	12.436.210	1.315.969
28/04/2021	51	14.534.482	398.637	12.854.947	1.280.898
05/05/2021	52	14.947.580	414.911	13.254.660	1.278.009
12/05/2021	53	15.373.850	428.574	13.627.986	1.317.290
19/05/2021	54	15.827.375	442.136	14.045.321	1.339.918
26/05/2021	55	16.285.550	454.897	14.310.683	1.519.970
02/06/2021	56	16.733.079	468.086	14.765.156	1.499.837
09/06/2021	57	17.134.623	479.930	15.154.101	1.500.592
16/06/2021	58	17.639.297	494.113	15.587.562	1.557.622
23/06/2021	59	18.180.808	507.488	16.009.391	1.663.929
30/06/2021	60	18.570.296	518.488	16.306.372	1.745.436

Figura 3.1: Tabela de dados semanais da COVID-19 no Brasil.

Nas análises que faremos a seguir, consideramos a população do Brasil igual a 200 milhões de habitantes, isto é,  $N = 200$  milhões.

### 3.1 Modelo SI

Vamos começar com o modelo mais simples, o modelo **SI**. Neste caso, para descrever a variação de indivíduos infectados propõe-se o seguinte PVI, o qual considera que no instante  $t = 0$ , existe uma quantidade  $I_0$  de membros infectados.

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \alpha SI \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\alpha > 0$  é a taxa de transmissão da doença.

Em (2.4) temos que a solução geral da equação diferencial acima é dada por

$$I(t) = \frac{NC}{C + e^{-N\alpha t}}. \quad (3.2)$$

Usando os dados da Tabela 3.1, podemos calcular o parâmetros  $C$  e  $\alpha$ . Tomando  $I(0) = 89.185$ , o número de infectados ativos no dia 6 de Maio de 2020, temos:

$$\begin{aligned} \frac{200.000.000C}{C + e^{-N\alpha \cdot 0}} &= 89.185 \\ \frac{200.000.000C}{C + 1} &= 89.185 \\ 200000000C &= (C + 1)89.185 \\ C &= \frac{89.185}{199.910.815} \\ C &= 0,00446124. \end{aligned}$$

Agora, considerando  $I(1) = 115.216$ , o número de infectados até o dia 13 de Maio de 2020, encontramos o valor de  $\alpha' = N\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{200.000.000 \times 0,00446124}{0,00446124 + e^{-\alpha' \cdot 1}} &= 115.216 \\ e^{-\alpha'} &= 0,773967044 \\ e^{\alpha'} &= 1,292044678 \\ \alpha' &= 0,256225985. \end{aligned}$$

Portanto, chegamos a função

$$I(t) = \frac{892248}{0,00446124 + e^{-0,256225985t}} \quad (3.3)$$

que fornece o número de infectados no tempo  $t$ .

Utilizando (3.3) vamos calcular o número aproximado de infectados para  $t = 2$ ,  $t = 3$ ,  $t = 4$ , etc. e comparar com os números oficiais da Tabela 3.1, temos:

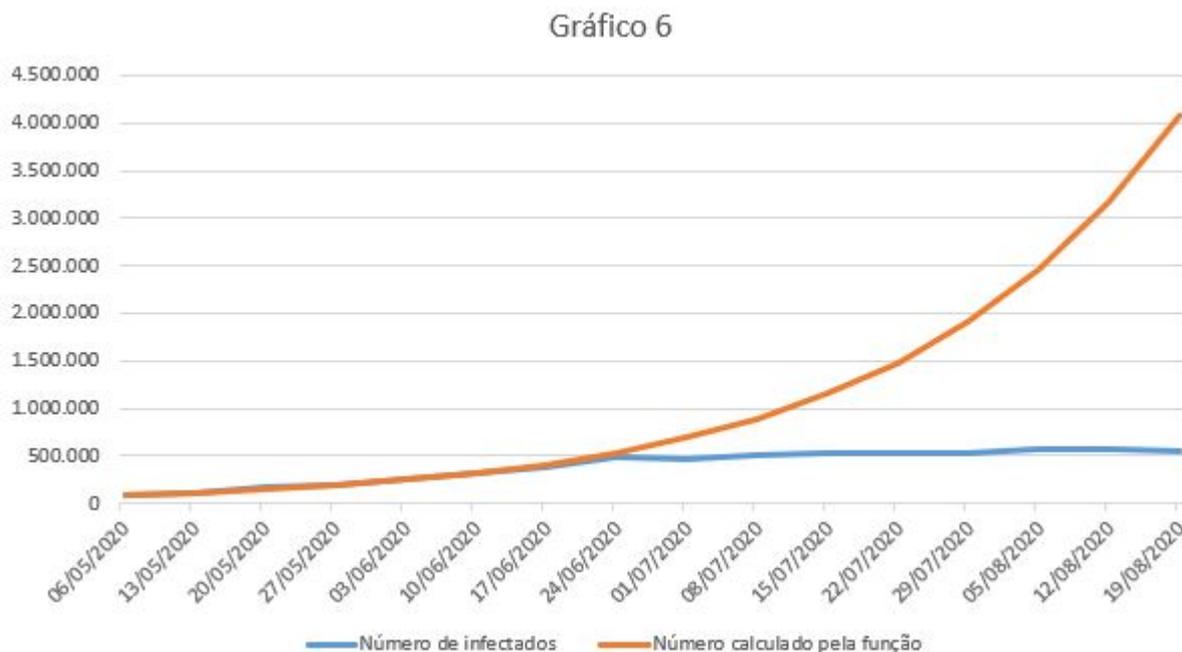
<b>Data</b>	<b>Número de infectados</b>	<b>Número calculado pela função</b>
06/05/2020	89.185	89.185
13/05/2020	115.216	115.216
20/05/2020	163.491	148.839
27/05/2020	198.814	192.265
03/06/2020	250.035	248.345
10/06/2020	322.338	320.757
17/06/2020	391.073	414.238
24/06/2020	478.178	534.891
01/07/2020	468.254	690.564
08/07/2020	507.244	891.340
15/07/2020	530.681	1.150.154
22/07/2020	533.957	1.483.559
29/07/2020	538.294	1.912.681
05/08/2020	577.311	2.464.387
12/08/2020	562.266	3.172.681
19/08/2020	552.184	4.080.342

Figura 3.2: Tabela do Modelo SI

Representando graficamente os dados acima. Fica evidente que, a medida que o valor de  $t$  vai aumentando, temos uma divergência muito grande entre o número real de infectados e o número calculado pela função dada pelo modelo SI. O que mostra que tal modelo não é muito adequado para descrever a curva de contágio da doença. Isso já era esperado pois, o modelo considera que uma vez infectado, o indivíduo permanecerá infectado e infectando outros, o que não ocorre no caso da COVID-19.

O modelo matemático descrito acima é irrealista em alguns aspectos. Se a doença é bastante séria, uma quarentena parcial vai ocorrer naturalmente pelo fato de indivíduos doentes terão suas atividades restringidas. Uma quarentena adicional pode ser imposta por autoridades de saúde para restringir ainda mais a possibilidade de contato entre indivíduos saudáveis e doentes. Mais ainda, qualquer doença é contagiosa somente por

um período limitado de tempo, enquanto que o modelo aqui usado supõe que indivíduos doentes assim permanecem indefinidamente. Todos esses fatores tenderiam a tornar lenta a propagação da doença se comparada com o Modelo **SI**.



## 3.2 Modelo SIS

Agora vamos analisar usando o modelo **SIS**. Sendo  $\alpha$  a taxa de infecção e  $\beta$  a taxa de recuperação, sabemos que tal modelo é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais dado em (2.6) e que sua solução analítica é dada em (2.7) por:

$$I(t) = \frac{N \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)}{1 + \left(\frac{N}{I_0} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right) - 1\right) e^{-(\mathcal{R}_0 - 1)\beta t}}.$$

Considerando que, segundo OMS (organização mundial da Saúde) o tempo de recuperação da COVID-19 está em torno de 14 dias, podemos tomar  $\beta = \frac{1}{14}$ .

Assim, usando os dados da Tabela 3.1 para os valores  $I(0) = 89.185$  e  $I(1) = 115.216$ , o número de infectados ativos o dia 06 de Maio de 2020 e 13 de maio de 2020, respectivamente. Podemos isolar  $\mathcal{R}_0$  na solução analítica e encontramos  $\mathcal{R}_0 = 4,59$ .

Portanto, substituindo tais valores na equação acima encontramos a função que fornece o número de infectados no tempo  $t$ :

$$I(t) = \frac{156.427.015,25}{1 + 122.347.054,5e^{-0,26t}}. \quad (3.4)$$

Como fizemos para o modelo **SI**, abaixo temos uma tabela comparando o número de infectados oficiais e o calculado pela função (3.4).

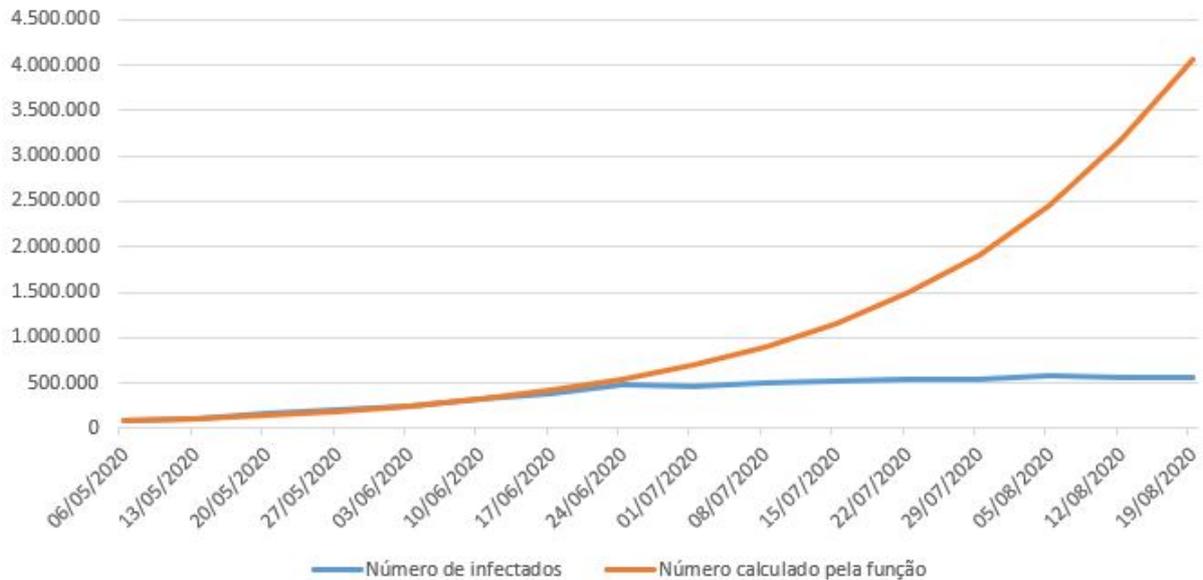
<b>Data</b>	<b>Número de infectados</b>	<b>Número calculado pela função</b>
06/05/2020	89.185	89.185
13/05/2020	115.216	115.235
20/05/2020	163.491	148.887
27/05/2020	198.814	192.354
03/06/2020	250.035	248.491
10/06/2020	322.338	320.978
17/06/2020	391.073	414.553
24/06/2020	478.178	535.315
01/07/2020	468.254	691.100
08/07/2020	507.244	891.961
15/07/2020	530.681	1.150.768
22/07/2020	533.957	1.483.954
29/07/2020	538.294	1.912.421
05/08/2020	577.311	2.462.633
12/08/2020	562.266	3.167.898
19/08/2020	552.184	4.069.804

Figura 3.3: Tabela do Modelo **SIS**

Ao comparar os valores da Tabela Figura 3.3, observamos que os números fornecidos pelo modelo **SIS** estão um pouco mais próximos dos reais, apesar de ainda divergirem bastante. Portanto, para o problema de descrever a curva de contágio da doença, tal modelo já apresenta alguma melhora em relação ao **SI**.

No gráfico 7 apresentamos os dados acima. Observando o gráfico podemos notar que a curva traçada pela função se aproxima um pouco mais da curva onde estão representados os dados oficiais, porém a medida em que cresce o valor de  $t$  vemos uma divergência muito grande entre esses valores.

Gráfico 7



### 3.3 Modelo SIR

O modelo **SIR** é caracterizado pelo sistema de equações diferenciais dado em (2.8). Conforme já comentamos anteriormente, a solução de tal sistema na forma analítica é de obtenção bastante trabalhosa. No entanto, implementando suas equações no Excel, conseguimos elaborar uma planilha para calcular o número de infectados no tempo  $t$ . Através de tal planilha obtemos uma tabela com o número de infectados e esboçamos o gráfico da curva de contágio dado pelo modelo **SIR**.

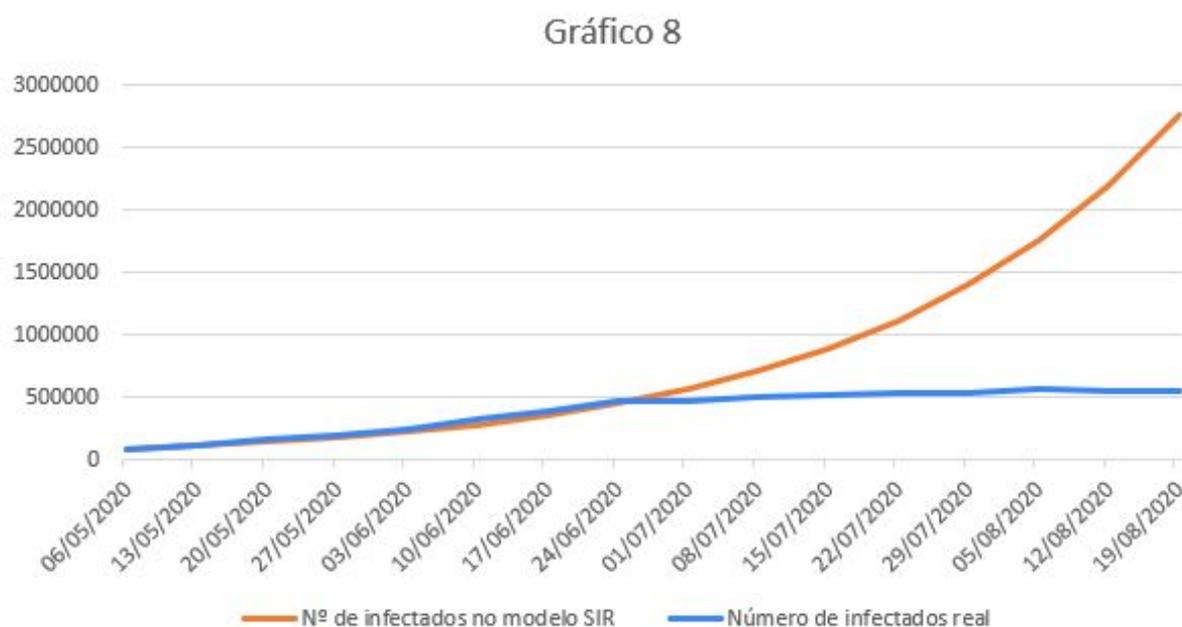
Na tabela da figura 3.4 apresentamos os números de infectados oficiais e os números calculados usando o Excel para o modelo **SIR**.

Data	Número de infectados real	Nº de infectados no modelo SIR
06/05/2020	89.185	89.185
13/05/2020	115.216	115.216
20/05/2020	163.491	144.718
27/05/2020	198.814	181.766
03/06/2020	250.035	228.282
10/06/2020	322.338	286.680
17/06/2020	391.073	359.979

24/06/2020	478.178	451.960
01/07/2020	468.254	567.353
08/07/2020	507.244	712.063
15/07/2020	530.681	893.455
22/07/2020	533.957	1.120.695
29/07/2020	538.294	1.405.167
05/08/2020	577.311	1.760.962
12/08/2020	562.266	2.205.457
19/08/2020	552.184	2.759.974

Figura 3.4: Tabela do modelo SIR

Representando graficamente os dados da tabela figura 3.4, temos:



No gráfico 8, podemos observar que nas oito primeiras semanas os números calculados pelo modelo ficam bem próximos dos números oficiais. Portanto, dentre os que estudamos, o modelo **SIR** é o que consegue prever por mais tempo o número de infectados com maior precisão.

Na próxima seção discutiremos os resultados encontrados para cada modelo compartimental e, depois de decidir o mais adequado, vamos utilizá-lo para analisar a curva de contágio da COVID-19 no Brasil num período de um ano e um mês (06/05/2020 a 30/06/2021).

### 3.4 Comparação dos modelos

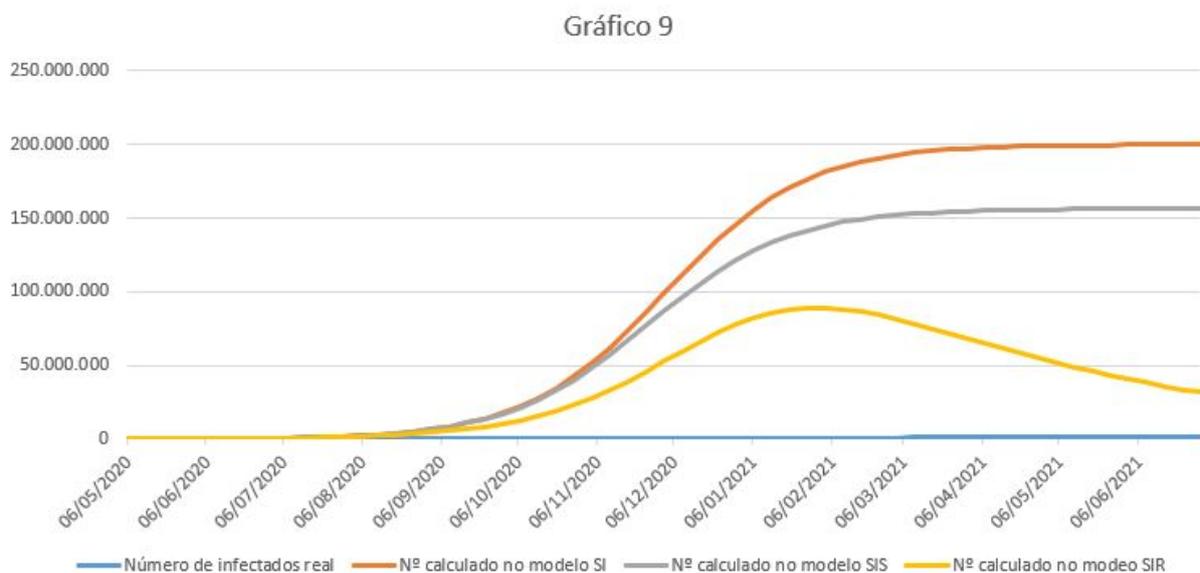
Apresentamos na tabela abaixo o número de infectados encontrados nas primeiras quatorze semanas, em cada um dos três modelos e também o número de infectados oficiais.

Data	Número de infectados real	Nº calculado no modelo SI	Nº calculado no modelo SIS	Nº calculado no modeo SIR
06/05/2020	89.185	89.185	89.185	89.185
13/05/2020	115.216	115.216	115.235	115.216
20/05/2020	163.491	148.839	148.887	144.718
27/05/2020	198.814	192.265	192.354	181.766
03/06/2020	250.035	248.345	248.491	228.282
10/06/2020	322.338	320.757	320.978	286.680
17/06/2020	391.073	414.238	414.553	359.979
24/06/2020	478.178	534.891	535.315	451.960
01/07/2020	468.254	690.564	691.100	567.353
08/07/2020	507.244	891.340	891.961	712.063
15/07/2020	530.681	1.150.154	1.150.768	893.455
22/07/2020	533.957	1.483.559	1.483.954	1.120.695
29/07/2020	538.294	1.912.681	1.912.421	1.405.167
05/08/2020	577.311	2.464.387	2.462.633	1.760.962

Figura 3.5: Tabela comparativa dos modelos

Analisando as colunas da tabela, vemos que até o dia 17/06/2020 os três modelos fornecem números relativamente próximos dos números reais. No entanto, à partir daí, a última coluna, do número de infectados dados pelo modelo **SIR**, apresenta valores consideravelmente mais próximos dos reais, quando comparada com as duas colunas anteriores.

Temos abaixo um gráfico contendo as curvas do número de infectados fornecidas por cada modelo e a curva do número de infectados oficiais:



Pelo gráfico, também podemos perceber que o modelo **SIR** é o que fornece dados mais próximos aos dados oficiais em relação aos outros dois modelos. Portanto, é natural escolher tal modelo para tentar descrever a curva de contágio da COVID-19 por um período maior de tempo.

No entanto, para um período maior de tempo, quando comparamos diretamente os números do modelo **SIR** com os oficiais, temos ainda uma grande divergência. Isto se dá pelo fato de que, no modelo considera-se uma taxa de infecção constante e, conseqüentemente, um  $\mathcal{R}_0$  constante. O que não acontece na prática, pois as ações tomadas pelas autoridades de saúde visam diminuir essa taxa. Sendo assim, para conseguir fazer tal estudo precisamos realizar um ajuste da taxa de infecção, equivalentemente, no  $\mathcal{R}_0$ , em certos momentos. Pelo que vimos na Tabela 3.4, o modelo **SIR** apresenta um bom resultado por cerca de oito semanas. Então, este seria um período razoável para calcular uma nova taxa de infecção e fazer o ajuste.

Iniciamos com  $\mathcal{R}_0 = 4,59$ , que foi usado até dia 24 de junho 2020. Quando ajustamos para  $\mathcal{R}_0 = 1,5$ , que foi usado até o dia 5 de Agosto 2020. Quando ajustamos para  $\mathcal{R}_0 = 0,5$ , que foi usado até o dia 04 de novembro 2020. Até aqui notamos um decréscimo do  $\mathcal{R}_0$  e portanto da curva contágio. O que mostra que as medidas de contenção da disseminação do vírus estavam sendo eficazes.

No dia 04 de novembro precisamos ajustar  $\mathcal{R}_0 = 2,25$ , pois a curva começou a crescer novamente, que foi usado até dia 6 de janeiro de 2021. Quando ajustamos para  $\mathcal{R}_0 = 1,5$  valor considerado até o último dia do período observado.

Os resultados obtidos utilizando o modelo **SIR** com tais ajustes, apresentamos na Tabela 9 Figura 3.6 e no Gráfico 10.

<b>Data</b>	<b>Número de infectados real</b>	<b>Nº de infectados no modelo SIR</b>
<b>06/05/2020</b>	<b>89.185</b>	<b>89.185</b>
13/05/2020	115.216	115.216
20/05/2020	163.491	144.718
27/05/2020	198.814	181.766
03/06/2020	250.035	228.282
10/06/2020	322.338	286.680
17/06/2020	391.073	359.979
<b>24/06/2020</b>	<b>478.178</b>	<b>451.960</b>

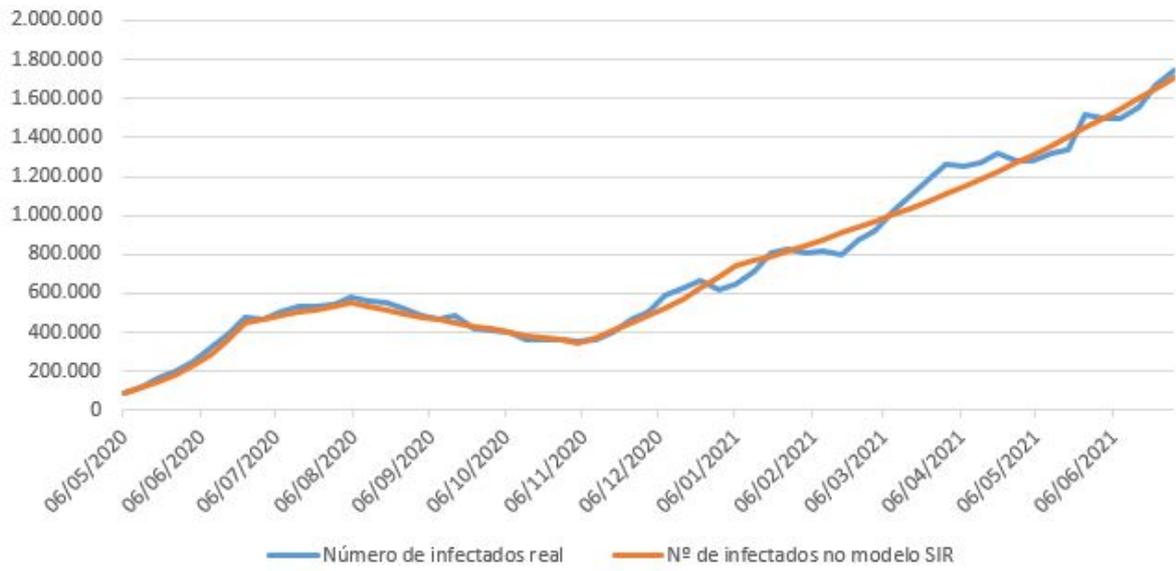
01/07/2020	468.254	467.946
08/07/2020	507.244	484.485
15/07/2020	530.681	501.595
22/07/2020	533.957	519.296
29/07/2020	538.294	537.605
<b>05/08/2020</b>	<b>577.311</b>	<b>556.544</b>
12/08/2020	562.266	536.582
19/08/2020	552.184	517.335
26/08/2020	526.145	498.776
02/09/2020	488.561	480.881
09/09/2020	465.493	463.627
16/09/2020	487.464	446.991
23/09/2020	421.763	430.950
30/09/2020	412.006	415.484
07/10/2020	399.553	400.572
14/10/2020	367.716	385.194
21/10/2020	363.939	372.331
28/10/2020	367.207	358.965
<b>04/11/2020</b>	<b>354.650</b>	<b>346.079</b>
11/11/2020	366.041	376.651
18/11/2020	400.328	409.907
25/11/2020	466.499	446.079
02/12/2020	508.499	485.418
09/12/2020	586.904	528.198
16/12/2020	625.201	574.713
23/12/2020	664.434	625.285
30/12/2020	618.415	680.259
<b>06/01/2021</b>	<b>649.696</b>	<b>740.009</b>
13/01/2021	710.788	765.685
20/01/2021	810.089	792.218
27/01/2021	822.705	819.636

03/02/2021	806.928	847.965
10/02/2021	818.520	877.233
17/02/2021	801.966	907.467
<b>24/02/2021</b>	<b>870.061</b>	<b>938.698</b>
03/03/2021	923.179	970.954
10/03/2021	1.024.397	1.004.265
17/03/2021	1.096.707	1.038.663
24/03/2021	1.186.822	1.074.179
<b>31/03/2021</b>	<b>1.259.883</b>	<b>1.110.845</b>
07/04/2021	1.256.692	1.148.693
14/04/2021	1.273.297	1.187.757
21/04/2021	1.315.969	1.228.070
28/04/2021	1.280.898	1.269.668
05/05/2021	1.278.009	1.312.585
12/05/2021	1.317.290	1.356.856
<b>19/05/2021</b>	<b>1.339.918</b>	<b>1.402.519</b>
26/05/2021	1.519.970	1.449.608
02/06/2021	1.499.837	1.498.161
09/06/2021	1.500.592	1.548.216
16/06/2021	1.557.622	1.599.810
23/06/2021	1.663.929	1.652.981
30/06/2021	1.745.436	1.707.769

Figura 3.6: Tabela 9

Com os dados da tabela acima, esboçamos o gráfico da curva de contágio da COVID-19 no Brasil, dado pelo modelo **SIR**, no período de 06/05/2020 a 30/06/2021.

Gráfico 10



# Capítulo 4

## Considerações finais

Nesta dissertação, foram apresentados, inicialmente, alguns conceitos básicos sobre equações diferenciais. Tal revisão possibilitou o estudo de três modelos clássicos em epidemiologia: **SI**, **SIS** e **SIR**. A modelagem matemática epidemiológica da propagação da COVID-19 durante o primeiro ano da epidemia no Brasil, foi realizada com o uso do modelo **SIR**. Dessa forma, analisando os dados oficiais e os números calculados pelo modelo, buscaremos relacionar no próximo parágrafo a mudança no valor do  $\mathcal{R}_0$ , que fornece um parâmetro do estado momentâneo da epidemia, com as medidas de contenção da disseminação do vírus impostas pelas autoridades sanitárias.

No início de nossas análises, em maio de 2020, verificamos que o  $\mathcal{R}_0$  tem um valor bem elevado,  $\mathcal{R}_0 = 4,59$ , o que indica alto índice de contaminação e a necessidade de medidas restritivas mais severas. Isso foi feito, como por exemplo, tivemos implementação de quarentena em várias cidades do Brasil e uma lei nacional que tornou obrigatório o uso de máscara, sancionada em 03 de julho de 2020. Diante de tais medidas observamos uma redução considerável no  $\mathcal{R}_0$ , que em agosto ajustamos para  $\mathcal{R}_0 = 0,5$ , e tal valor foi utilizado no modelo até novembro de 2020.

Por outro lado, notamos um crescimento do  $\mathcal{R}_0$  no final do ano, em novembro ajustamos  $\mathcal{R}_0 = 2,25$ . O que pode estar relacionado com alguns afrouxamentos nas medidas de contenção, por exemplo, o retorno das aulas presenciais e a volta da torcida aos estádios de futebol ocorreram à partir de outubro. Tal valor para  $\mathcal{R}_0$  foi utilizado até depois das festas do final de ano. Quando voltamos a perceber uma nova diminuição no parâmetro, período onde começaram as campanhas de vacinação.

Podemos perceber que o nosso estudo reflete com certa precisão o que está acontecendo na pandemia, no diz respeito as ações que aumentam ou diminuem a propagação do vírus. Dessa forma, fica evidente a importância da existência dos modelos epidemiológicos. Eles

ajudam a entender a propagação da doença e que medidas podem ser adotadas para conter sua disseminação.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C.; *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. - 10. ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2015.
- [2] <https://covid19br.wcota.me/#gmunicipios>
- [3] COLLINS, B. Dynamic modeling of covid-19. 2020. Disponível em: [t.ly/wM4l](https://t.ly/wM4l).
- [4] COLLINS, J.; ABDELAL, N. Spread of Disease. 2018. Disponível em: [t.ly/DFZM](https://t.ly/DFZM).
- [5] DE OLIVEIRA JUNIOR, V.; *Modelagem Matemática de Epidemias : uma abordagem com modelos compartimentais*, Dissertação de mestrado - UFMA - MA, 2021.
- [6] LIMA, J. I.; *Um estudo sobre equações diferenciais ordinárias aplicado à epidemiologia*, Trabalho de conclusão de curso - UFCG – PB, 2018.
- [7] CHITNIS, N. Introduction to mathematical epidemiology: Deterministic compartmental models. Lecture Notes, University of Basel, 2011. Disponível em: [t.ly/du1i](https://t.ly/du1i).
- [8] HEESTERBEEK, J.; DIETZ, K. The concept of  $R_0$  in epidemic theory. *Statistica neerlandica*, Wiley Online Library, v. 50, n. 1, p. 89–110, 1996. Disponível em: [t.ly/xXgE](https://t.ly/xXgE).
- [9] HEFFERNAN, J. M.; SMITH, R. J.; WAHL, L. M. Perspectives on the basic reproductive ratio. *Journal of the Royal Society Interface*, The Royal Society London, v. 2, n. 4, p. 281–293, 2005.
- [10] The analysis of equilibrium in malaria. MACDONALD G. *Trop Dis Bull*. 1952 Sep; 49(9):813-29.
- [11] Kermack W.O, McKendrick A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc.* 1927;115:700–721.

- [12] The concept of  $R_0$  in epidemic theory. *Statistica neerlandica*, Wiley Online Library, v. 50, n. 1, p. 89–110, 1996. Disponível em: [t.ly/xXgE](https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1996.tb00011.x).