

DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Sérgio Costa de Souza

Fórmula de Euler e Aplicações

Ouro Preto - MG, Brasil

Dezembro 2021

Sérgio Costa de Souza

Fórmula de Euler e Aplicações

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza

Ouro Preto - MG, Brasil

Dezembro 2021

Aos meus filhos Pedro Augusto e Ana Luiza, para que lhes inspire a sempre buscar o conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado força, coragem e proteção para a realização do meu mestrado no PROFMAT.

Meus agradecimentos a todos os professores da UFOP que contribuíram para minha formação. Em especial, agradeço a meu orientador, Geraldo César, por todo conhecimento compartilhado durante a realização deste trabalho.

Agradeço à minha esposa, Tharcila Oliveira, por todo apoio, incentivo e compreensão. À minha família, colegas e amigos que me incentivaram e torceram por minha vitória.

Aos meus colegas de curso pelos bons momentos que passamos juntos e por todo apoio nos momentos de dificuldades. Em especial à Mônica Alves, pela agradável companhia nas viagens à Ouro Preto.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a Fórmula de Euler sob a luz da Teoria dos Grafos e apresentaremos algumas de suas aplicações. A teoria de grafos simplifica os cálculos e, aliada a conceitos básicos de aritmética nos permite obter resultados interessantes como consequência da fórmula de Euler, dentre eles estão: O Teorema de Sylvester-Gallai, a existência de linhas monocromáticas e o Teorema de Pick.

Palavras-chave: Grafos; Teorema de Sylvester-Gallai; Teorema de Pick.

Abstract

In this work, we will study Euler's formula under the scope of Graph Theory and shall present some of its applications. Graph Theory simplifies the calculations and, mixed with basic arithmetic concepts, allows the gathering of interesting results as consequence of Euler's formula, among which are: The Sylvester-Gallai's theorem, the existence of monochromatic lines and Pick's theorem.

keywords: Graphs; Sylvester-Gallai's theorem; Pick's Theorem.

Sumário

Introdução	15
1 UM POUCO SOBRE GRAFOS	17
2 A FÓRMULA DE EULER	33
3 CONSEQUÊNCIAS DA FÓRMULA DE EULER	37
3.1 Grafos Platônicos e Poliedros convexos regulares	42
3.2 Coloração de Mapas	47
4 SYLVESTER-GALLAI E AS LINHAS MONOCROMÁTICAS	55
4.1 Projeção Estereográfica	55
4.2 O Teorema de Sylvester-Gallai	58
5 TEOREMA DE PICK	71
Conclusão	81
Referências	83

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pontes de Konigsberg	17
Figura 2 – Diagrama	18
Figura 3 – Grafos	19
Figura 4 – Grafo do Facebook	19
Figura 5 – Caminho	20
Figura 6 – Ciclo	20
Figura 7 – H é um subgrafo de G	21
Figura 8 – Grafos Isomorfos	22
Figura 9 – (a) Grafo conexo; (b) Grafo desconexo	22
Figura 10 – Grafo 3-regular	23
Figura 11 – Grafo completo K_5	23
Figura 12 – Grafo G e seu complemento \bar{G}	24
Figura 13 – (a) Grafo Bipartido $K_{2,4}$, (b) Grafo Bipartido Completo $K_{2,3}$	24
Figura 14 – Grafo Ciclo	25
Figura 15 – Árvore	25
Figura 16 – H é árvore geradora de G	26
Figura 17 – Número Cromático	27
Figura 18 – Grafo planar	28
Figura 19 – Faces	28
Figura 20 – Grau da face f_i	29
Figura 21 – Grafo dual	29
Figura 22 – Faces de G equivalem a vértices de G^*	30
Figura 23 – Arestas de G equivalem à arestas de G^*	31
Figura 24 – Ciclo em G equivalem à componentes de G^*	31
Figura 25 – Ilustração de um grafo planar G	33

Figura 26 – H - árvore geradora de G	34
Figura 27 – Grafo dual de G	35
Figura 28 – Conjunto de arestas K	35
Figura 29 – Grafo desconexo	36
Figura 30 – Grafo completo K_5	39
Figura 31 – Cantos	41
Figura 32 – Cantos nas faces	41
Figura 33 – O cubo e seu grafo platônico	46
Figura 34 – Os poliedros e seus respectivos grafos	47
Figura 35 – Grafo de um mapa	48
Figura 36 – Mapa do Brasil e seu grafo dual	49
Figura 37 – Vértice v de grau 5	51
Figura 38 – Mudança da cor de u_1	52
Figura 39 – Subgrafo $H_{1,3}$	52
Figura 40 – Caminho P	53
Figura 41 – Caminhos P e Q	54
Figura 42 – Função projeção estereográfica	56
Figura 43 – Pontos Antipodais	59
Figura 44 – Ponto em $\pi^2 \rightarrow$ par de pontos antipodais em S^2	59
Figura 45 – Retas em $\pi^2 \rightarrow$ grandes círculos em S^2	60
Figura 46 – Pares de pontos antipodais \leftrightarrow grandes círculos	61
Figura 47 – K pares de pontos em um grande círculo $\rightarrow K$ grandes círculos em um par de pontos antipodais	62
Figura 48 – K grandes círculos passando por um par de pontos antipodais $\rightarrow K$ pares de pontos antipodais em um grande círculo.	63
Figura 49 – Pontos e retas no plano	64
Figura 50 – De π^2 para S^2	65
Figura 51 – Pontos antipodais e grandes círculos em S^2	65
Figura 52 – Grafo planar simples em S^2	66
Figura 53 – Do plano para a esfera unitária S^2	68
Figura 54 – Grandes círculos pretos e grandes círculos brancos na esfera unitária S^2	69
Figura 55 – Rede no plano	72
Figura 56 – Triangulação de um polígono	72
Figura 57 – Triangulação de P	73
Figura 58 – Processo de decomposição em triângulos fundamentais	74
Figura 59 – Paralelogramo fundamental	75
Figura 60 – Paralelogramos fundamentais entre duas retas paralelas	76

Figura 61 – Paralelogramo $EFGH$ obtido do paralelogramo $ABCD$	77
Figura 62 – Decomposição do polígono P	79

Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar a fórmula de Euler $V + F - A = 2$ e apresentar alguns resultados que podem ser obtidos a partir de sua aplicação.

Para desenvolver o assunto proposto, no Capítulo 1 realizou-se uma breve introdução de teoria de grafos, começando pelo problema das pontes de Königsberg, que segundo John A (veja [4]) marca o início do estudo desta teoria, e chegando a conceitos um pouco mais avançados, tais como: Grafos planares, grafo dual e árvore geradora.

No Capítulo 2 apresentou-se de maneira pertinente a demonstração da fórmula de Euler utilizando a teoria de grafos. A demonstração consiste, basicamente, nas relações existentes entre um grafo planar e seu dual e, no conceito e propriedade de árvore geradora.

O Capítulo 3 destinou-se a apresentar algumas consequências do teorema, por exemplo: utilizamos a fórmula de Euler para mostrar que o grafo completo K_5 e o grafo bipartido $K_{3,3}$ não são planares e, também a aplicamos para classificar os poliedros convexos regulares.

No Capítulo 4, após um conciso estudo da função projeção estereográfica, redefinimos grafo planar, o que nos possibilitou provar o teorema de Sylvester-Gallai, que diz: *Dado qualquer conjunto de $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares, sempre existe uma reta que contém exatamente dois desses pontos.*

Ainda no Capítulo 4, mostrou-se que se tais pontos são de duas cores sempre existirá uma linha monocromática, ou seja, há uma reta que passa apenas por pontos de uma mesma cor.

O Capítulo 5 redesenhou uma maneira diferente de calcular a área de um polígono simples desenhado em uma rede de pontos no plano. Tratando-se do teorema de Pick que é uma fórmula que fornece a área através de uma mera contagem de pontos e que pode ser demonstrada utilizando a fórmula de Euler.

Um pouco sobre Grafos

O estudo de grafos teve início no século XVIII por Leonhard Euler (1707-1783). A Euler foi apresentada uma situação que intrigava os moradores da cidade de Königsberg, atual Kaliningrado. A cidade é constituída por quatro áreas de terra separadas pelo rio Pregel, sobre o qual haviam sete pontes, tal como ilustrado na Figura 1.

A situação que intrigava os moradores ficou conhecida como “O problema das pontes de Königsberg” e diz o seguinte:

É possível passear por Königsberg atravessando cada ponte uma única vez terminando o passeio no ponto de partida?

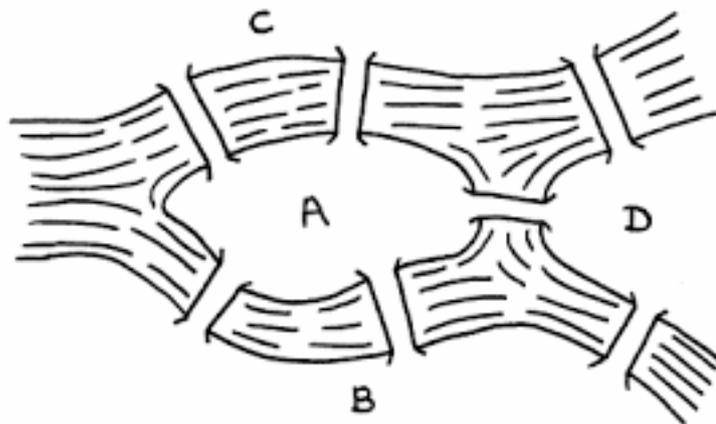


Figura 1 – Pontes de Königsberg.

Fonte: <https://images.app.goo.gl/GMMWrXJs97gATytY8>

Euler mostrou, com simplicidade, que era impossível realizar tal percurso e para tal, conforme mostra a Figura 2, utilizou pontos para representar as regiões determinadas pelo rio e estabeleceu uma ligação entre esses pontos por linhas representando as pontes que conectam as

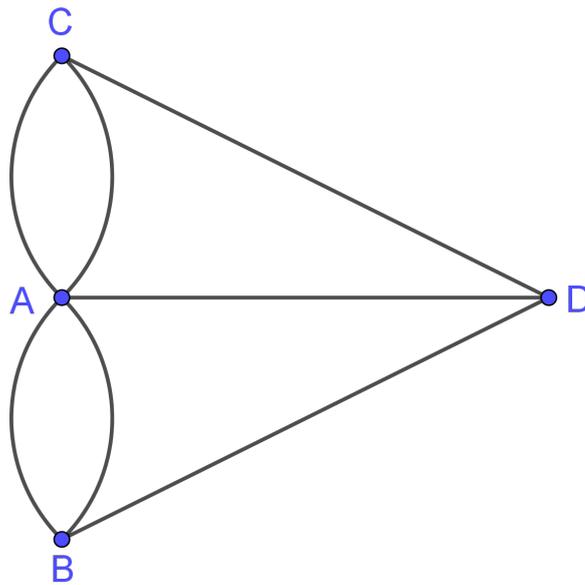


Figura 2 – Diagrama

Fonte: Construção do autor

regiões.

Euler observou que para atravessar um ponto eram necessárias duas linhas, uma para chegar e outra para sair dele e assim concluiu que seria necessário que à cada ponto chegasse um número par de linhas.

A partir dos resultados apresentados por Euler deu-se início à um novo ramo da Matemática chamado de Teoria dos Grafos cujos pontos passaram a ser tratados como vértices e as linhas como arestas. A teoria dos grafos tem aplicações em diversas áreas, tais como: Topologia, Física, Química, Biologia, Engenharia, Pesquisa Operacional, Psicologia e Teoria da Computação.

Iniciaremos aqui um breve estudo da teoria de grafos, definindo conceitos e estudando alguns resultados fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

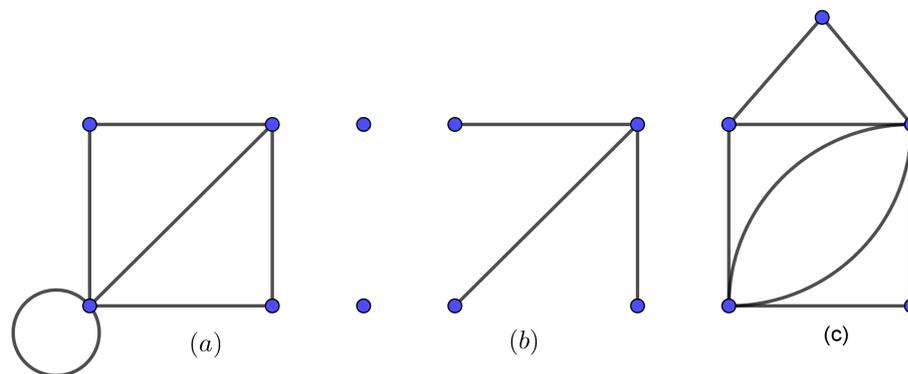


Figura 3 – Grafos

Fonte: Construção do autor



Figura 4 – Grafo do Facebook

Fonte: <https://img.olhardigital.com.br/wp-content/uploads/2019/01/20190109115815.jpg>

Definição 1.1 (Grafos). *Um grafo é uma estrutura $G = (V, A)$, onde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $V \neq \emptyset$, cujos elementos são chamados de vértices de G e $A = \{a_{ij} = (v_i, v_j) | v_i, v_j \in V\}$ é o conjunto de arestas de G .*

Exemplo 1.1. *O facebook armazena um enorme grafo, no qual, as contas representam os vértices e as relações de amizades representam as arestas. Veja a figura 4.*

Definição 1.2 (Laço). *Um Laço é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo.*

Exemplo 1.2. *A Figura 3 (a) representa um grafo que contém um laço.*

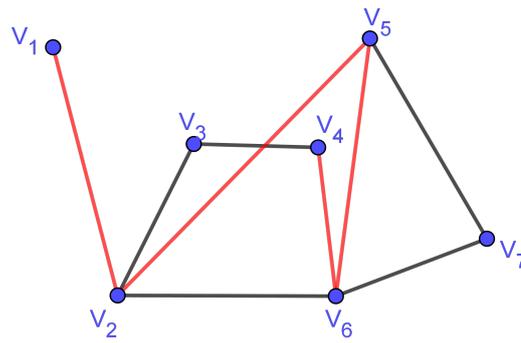


Figura 5 – Caminho

Fonte: Construção do autor

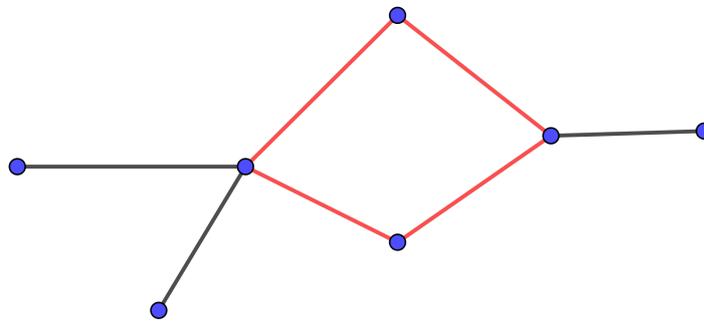


Figura 6 – Ciclo

Fonte: Construção do autor

Definição 1.3 (Grafo Simples e Multigrafo). *Um grafo G é simples se não possui laços e cada par de vértices está relacionado à no máximo uma aresta. Caso contrario dizemos G é um multigrafo.*

Exemplo 1.3. *Na Figura 3, (b) representa um grafo simples e (a) e (c) representam multigrafos.*

Definição 1.4 (Grafo Nulo). *Um grafo será dito nulo se seu conjunto de arestas for vazio.*

Definição 1.5 (Caminho). *Um caminho é uma sequência de arestas em que o ponto final de uma aresta é o ponto inicial de outra. A figura 5 destaca um caminho $(V_1, V_2), (V_2, V_5), (V_5, V_6), (V_6, V_4)$ que liga o vértice V_1 ao vértice V_4 .*

Definição 1.6 (Ciclo). *Ciclo é um caminho no qual o vértice inicial coincide com o vértice final. Podemos dizer que um ciclo é um caminho fechado de comprimento $k \geq 3$. A Figura 6 ilustra esta definição.*

Definição 1.7 (Subgrafo). *Um grafo H será dito subgrafo de um grafo G se o conjunto de vértices de H estiver contido no conjunto de vértices de G e o conjunto de arestas de H também*

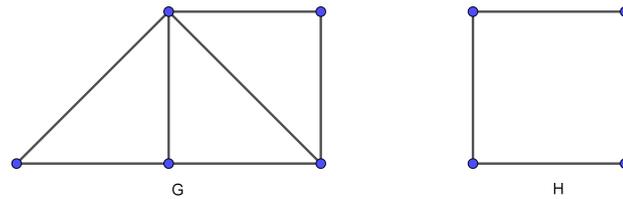


Figura 7 – H é um subgrafo de G

Fonte: Construção do autor

estiver contido no conjunto de arestas de G . Um subgrafo que não possui ciclos será dito subgrafo mínimo. Na Figura 7, H representa um subgrafo mínimo.

Definição 1.8 (Grau de um vértice). *O grau de um vértice é dado pelo número de arestas que partem desse vértice e será indicado por g , assim $g(k)$ significa o grau do vértice k .*

Teorema 1.1. *A soma dos graus dos vértices de um grafo qualquer é igual ao dobro de arestas desse grafo.*

Demonstração. A prova é bastante simples, basta observar que ao contar as arestas em cada vértice para identificar o grau de cada um deles, cada aresta é contada duas vezes. (veja [5]). \square

Corolário 1.1. *Em todo grafo, a quantidade de vértice que possui grau ímpar é par.*

Demonstração. Considere $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices e a , o número de arestas do grafo G . Sabemos, pelo Teorema 1.1, que $2a = g(v_1) + g(v_2) + \dots + g(v_n)$. Suponha que existam k parcelas pares e l parcelas ímpares. A soma das k parcelas pares é um número par, então a soma das l parcelas ímpares também tem que ser par e isso ocorre se, e somente se, l é par. \square

Definição 1.9 (Grafos isomorfos). *Dois grafos serão ditos isomorfos quando existir uma bijeção f entre seus vértices de forma que existe uma aresta ligando os vértices a e b se, e somente se, existe uma aresta ligando os vértices $f(a)$ e $f(b)$.*

Dois grafos são isomorfos então possuem o mesmo número de vértices e quaisquer dois vértices que são conectados por uma aresta em um dos grafos também serão no outro, apesar de serem “desenhados” de maneira diferente. O termo isomorfo é derivado do Grego iso, que significa “o mesmo” e morfo, que significa “forma”. Na Figura 8 estão representados dois grafos isomorfos, pois quaisquer dois vértices conectados em G também serão em H .

Definição 1.10 (Grafo Conexo). *Um grafo será dito conexo se sempre existir um caminho que liga dois vértices quaisquer. O grafo que não é conexo será dito desconexo.*

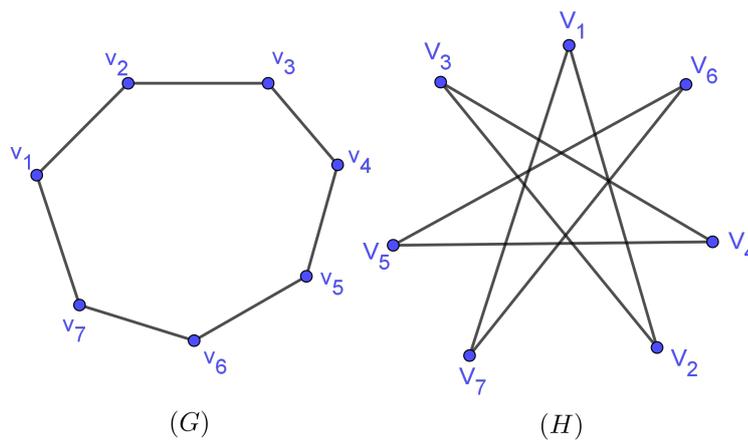


Figura 8 – Grafos Isomorfos

Fonte: Construção do autor

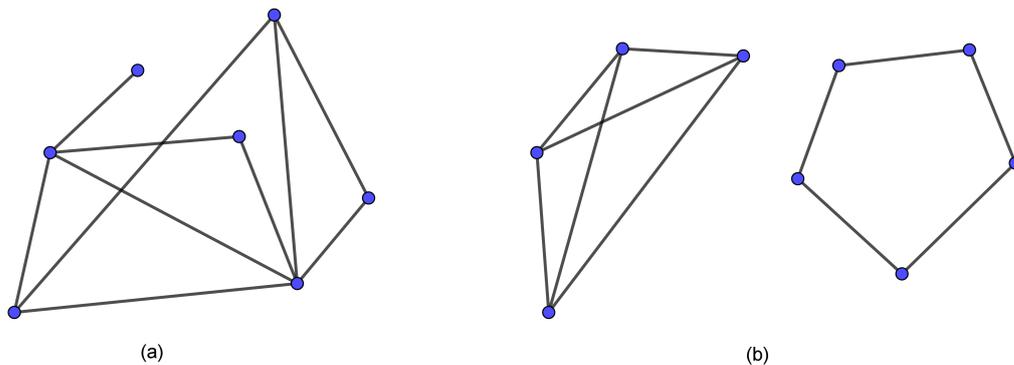


Figura 9 – (a) Grafo conexo; (b) Grafo desconexo

Fonte: Construção do autor

Observação 1.1. Um grafo desconexo é formado por pelo menos dois subgrafos conexos, chamados de componentes conexas.

Na Figura 9, (a) é um grafo conexo e (b) é um grafo desconexo formado por duas componentes conexas.

Definição 1.11 (Grafo Regular). É o grafo que possui o mesmo grau em todos os vértices. O grafo em que todos os vértices possui grau K será dito K -regular.

Veja, na Figura 10, a representação de um grafo 3 - regular.

Definição 1.12 (Grafo Completo). Um grafo será dito completo se cada vértice estiver ligado a todos os demais vértices, ou seja, se o grafo tiver n vértices e o grau em cada vértice for igual a $n - 1$. Um grafo completo com n vértices será denotado por K_n .

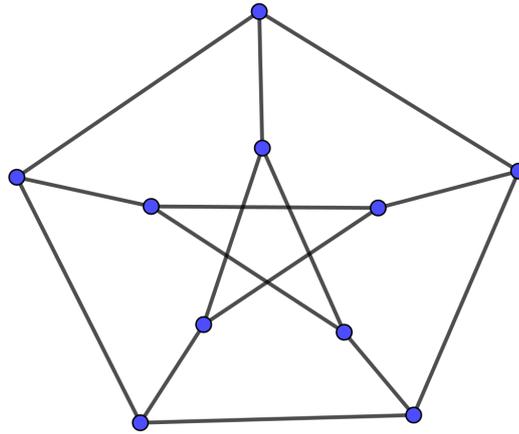
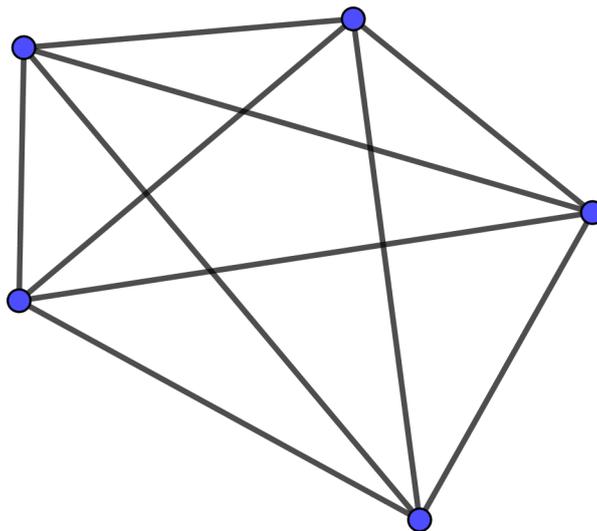


Figura 10 – Grafo 3-regular

Fonte: Construção do autor

Figura 11 – Grafo completo K_5

Fonte: Construção do autor

A Figura 30 ilustra o Grafo Completo K_5 .

Definição 1.13 (Complemento de um grafo). *O complemento de um grafo G , representado por \bar{G} , é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G tal que r é uma aresta de \bar{G} se, e somente se, não o é de G .*

Na Figura 12, o grafo \bar{G} representa o complemento do grafo G .

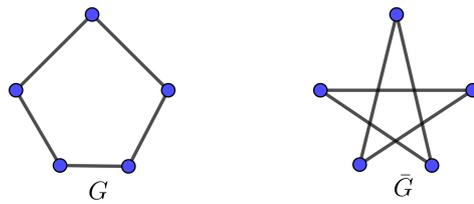


Figura 12 – Grafo G e seu complemento \bar{G}

Fonte: Construção do autor

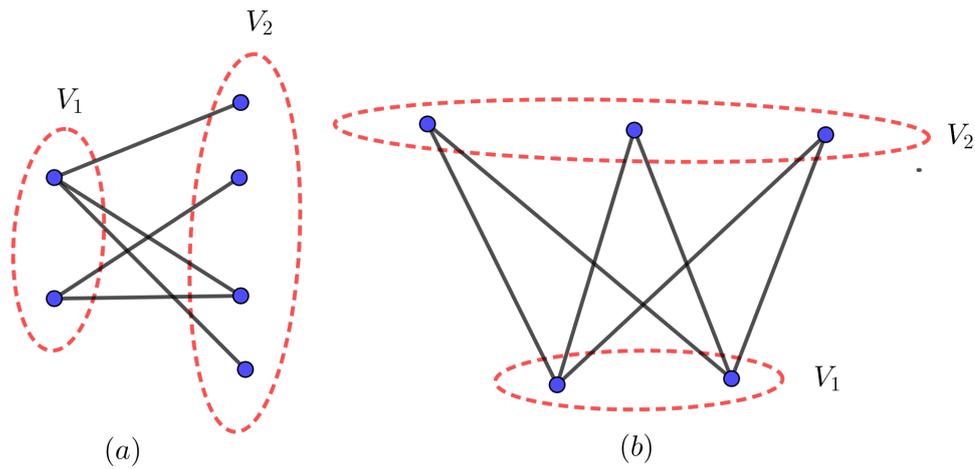


Figura 13 – (a) Grafo Bipartido $K_{2,4}$, (b) Grafo Bipartido Completo $K_{2,3}$

Fonte: Construção do autor

Definição 1.14 (Grafo Bipartido). *Um grafo G será dito bipartido se seu conjunto de vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2 de tal forma que toda aresta de G tenha um vértice em V_1 e outro em V_2 . Se todos os vértices de V_1 estiverem ligados a todos os vértices de V_2 o grafo G será bipartido completo.*

A Figura 13 apresenta dois exemplos de grafos bipartidos, em destaque, pode-se observar a divisão do conjunto de vértices de cada grafo.

Definição 1.15 (Grafo Ciclo ou Cíclico). *É um grafo formado por um único ciclo que passa por todos os seus vértices.*

Veja, na Figura 14, um exemplo de grafo ciclo.

Definição 1.16 (Árvore). *Árvore é um grafo conexo que não possui ciclos.*

A Figura 15 ilustra o conceito de árvore.

Teorema 1.2. *Em toda árvore, o número de vértices é igual ao número de arestas acrescido de uma unidade.*

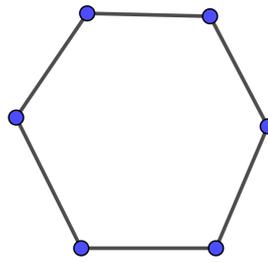


Figura 14 – Grafo Ciclo

Fonte: Construção do autor

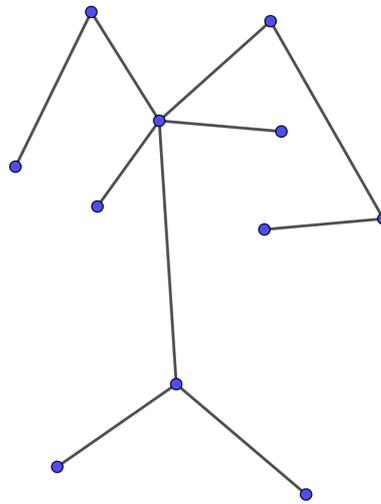


Figura 15 – Árvore

Fonte: Construção do autor

Demonstração. A prova segue por indução sobre o número de vértices. Queremos mostrar que uma árvore com n vértices possui $n - 1$ arestas. Para $n = 1$ a árvore tem zero aresta, portanto, a propriedade é verdadeira. Suponha que a propriedade seja válida para todas as árvores com o número de vértices variando de 1 a $n - 1$.

Considere agora uma árvore com n vértices. Retirando uma de suas arestas, a mesma se desconecta formando duas árvores menores com n_i e n_j vértices. Observe que $n_i < n$ e $n_j < n$ e que $n_i + n_j = n$. Pela hipótese de indução o número de arestas da árvore de n_i vértices é $n_i - 1$ e o número de arestas da árvore com n_j vértices é $n_j - 1$. Voltemos com a aresta retirada anteriormente e contemos o total de arestas. $(n_i - 1) + (n_j - 1) + 1 = (n_i + n_j) - 1 = n - 1$. \square

Definição 1.17 (Árvore geradora). *Uma árvore geradora de um grafo conexo G é uma árvore que contém todos os vértices de G e um subconjunto de arestas de G .*

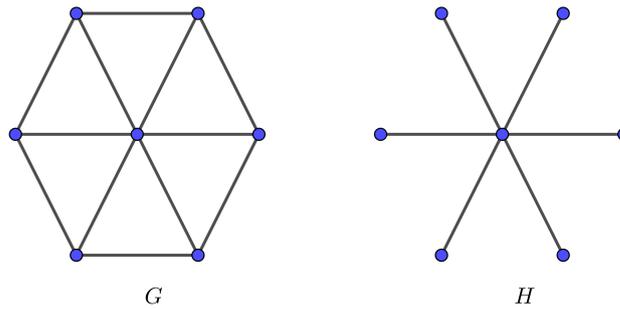


Figura 16 – H é árvore geradora de G

Fonte: Construção do autor

Definição 1.18 (Coloração de grafos). *Colorir um grafo é atribuir rótulos a seus elementos seguindo certas restrições como, por exemplo, dois vértices ou arestas adjacentes não poderão ter o mesmo rótulo e esses rótulos podem ser símbolos, números ou cores.*

Algumas colorações especiais serão descritas a seguir:

Definição 1.19 (Coloração de vértices). *Colorir os vértices de um grafo é atribuir cores aos mesmos de forma que vértices adjacentes recebam cores diferentes.*

Definição 1.20 (Coloração de arestas). *Colorir as arestas de um grafo é atribuir cores às mesmas, utilizando o menor número de cores possíveis e sem que duas ou mais arestas que partem do mesmo vértice recebam a mesma cor.*

Definição 1.21 (Número cromático). *O número cromático de um grafo G é o menor número de cores necessárias para colorir seus vértices e será denotado por $\chi(G)$.*

Determinar o número cromático de um grafo qualquer é um problema difícil mas podemos determiná-lo com facilidade em alguns grafos e definir limites superiores e inferiores para outros casos.

Exemplo 1.4. (i) *O número cromático do grafo nulo é igual a 1. Como não há arestas podemos colorir todos os vértices com a mesma cor.*

(ii) *O número cromático do grafo completo K_n é igual a n . Como um vértice é adjacente a todos os outros não podemos colorir dois ou mais vértices com a mesma cor.*

(iii) *O número cromático de um grafo bipartido é igual a 2. Os vértices de um grafo bipartido estão divididos em dois subconjuntos e os vértices em cada subconjunto não são adjacentes, então podemos colorir cada subconjunto com a mesma cor.*

(iv) *O número cromático das árvores é igual a 2. Para verificar isso basta separar os vértices por níveis e observar que os vértices em níveis de mesma paridade não são adjacentes,*

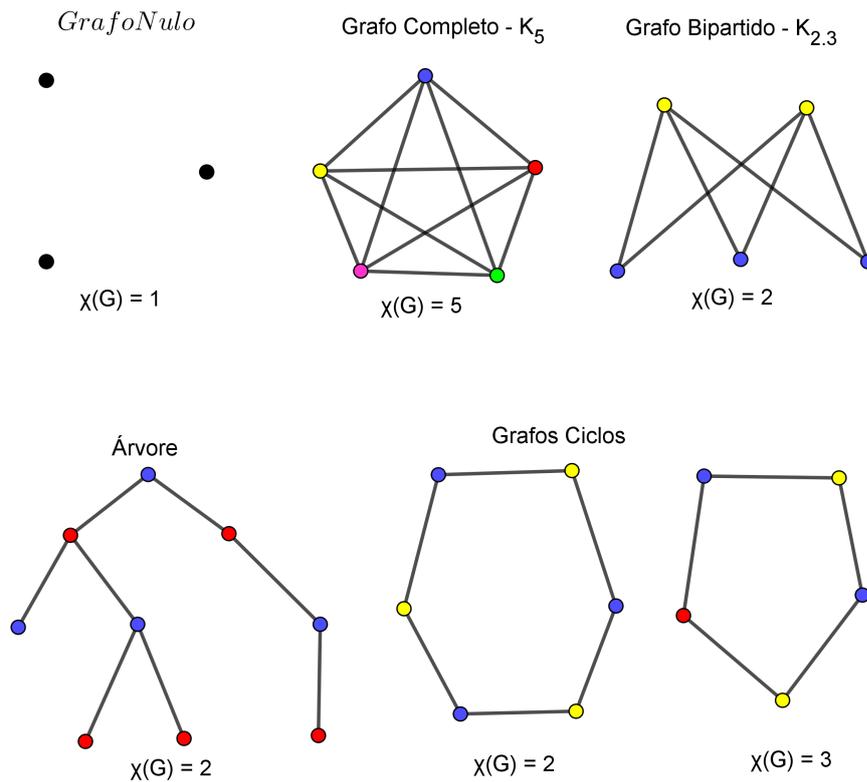


Figura 17 – Número Cromático

Fonte: Construção do autor

assim podemos colorir os vértices em níveis ímpares de uma cor e os de níveis pares de outra cor.

(v) O número cromático de um grafo ciclo é igual a 2 se o número de vértices for par e igual a 3 se o número de vértices for ímpar. Para verificar isso observe que se o número de vértices for par você conseguirá pintar os vértices alternando duas cores e no caso do número de vértices ser ímpar o último vértice a ser pintado é adjacente à dois vértices de cores diferentes então será necessária uma terceira cor para pintá-lo.

A Figura 17 ilustra cada item do exemplo 1.4.

Definição 1.22 (Grafo planar). *Um grafo será dito planar se puder ser desenhado no plano de modo que suas arestas não cruzem fora de suas extremidades.*

Na Figura 18 podemos observar um grafo que possui cruzamento de arestas fora de seus vértices, porém, este grafo pode ser redesenhado de forma que isso não ocorra, logo, este grafo é planar.

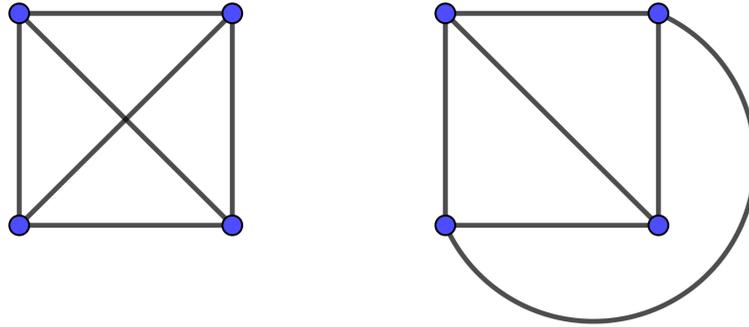


Figura 18 – Grafo planar

Fonte: Construção do autor

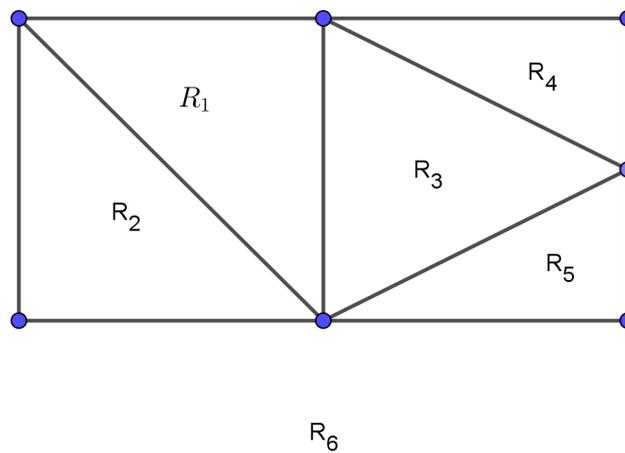


Figura 19 – Faces

Fonte: Construção do autor

Observação 1.2. A representação planar de um grafo divide o plano R^2 em regiões chamadas faces, sendo a região externa ilimitada. No grafo representado na Figura 19 apresentamos a divisão do plano R^2 em 6 regiões denotadas por R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 .

Definição 1.23 (Grau de uma face). O grau de uma face f de um grafo planar G é dado pela quantidade de arestas que delimitam tal face. As arestas que fazem fronteira com apenas uma face deve ser contada duas vezes.

A Figura 20 apresenta o grau de cada face, podemos observar que o grau da face f_1 é igual a 6 pois a f_1 possui uma aresta que não faz fronteira com outra face.

Teorema 1.3. A soma dos graus das faces de um grafo planar G é igual ao dobro de arestas desse grafo.

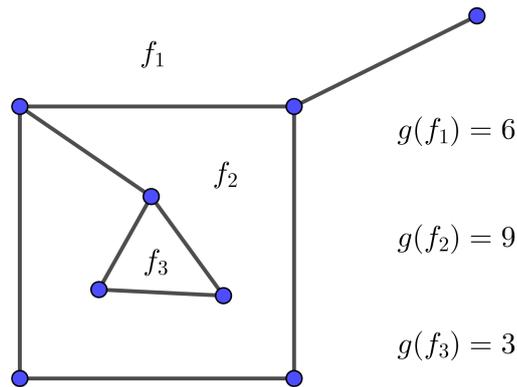


Figura 20 – Grau da face f_i

Fonte: Construção do autor

Demonstração. Basta observar que ao contar os graus das faces cada aresta é contada duas vezes. □

Definição 1.24 (Grafo dual). *O grafo dual G^* de um grafo planar G é o grafo obtido após os seguintes procedimentos:*

- (i) *A cada face de G fazemos corresponder um vértice de G^* .*
- (ii) *A cada aresta de G que separa duas faces fazemos corresponder uma aresta de G^* que conecta os vértices de G^* contidos nessas faces.*

Observação 1.3. *Assim, se V , F e A são, respectivamente, os conjuntos de vértices, faces e arestas de um grafo, temos: $|F(G)| = |V(G^*)|$ e $|A(G^*)| = |A(G)|$.*

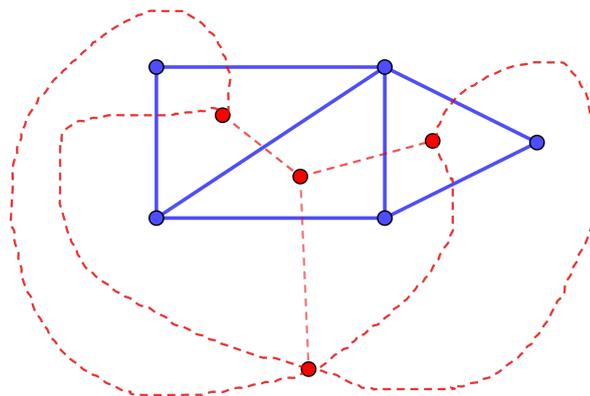


Figura 21 – Grafo dual

Fonte: Construção do autor

Teorema 1.4. *Se G é um grafo planar então G^* é conexo.*

Demonstração. Temos dois casos a considerar:

(i) Todas as faces internas de G são adjacentes à face externa.

Neste caso, G^* conecta todas as faces internas de G à face externa, como as faces de G são os vértices de G^* temos que existe um caminho que liga quaisquer dois vértices de G^* , logo, G^* é conexo.

(ii) G possui faces não adjacentes à face externa.

Trace as arestas de G^* conectando todas as faces internas de G e depois conecte a face externa à todas as faces de G adjacentes a ela. Assim, as arestas de G^* conectam todas as faces de G , ou seja, todos os vértices de G^* , então G^* é conexo. \square

O grafo dual se relaciona com o grafo original de tal forma que podemos destacar algumas propriedades.

Proposição 1.1. *Se G é um grafo conexo e planar e G^* é seu grafo dual, então valem as seguintes relações:*

- (i) *Regiões delimitadas pelo grafo G equivalem a Vértices de G^* .*
- (ii) *Arestas de G equivalem à arestas de G^**
- (iii) *Ciclos de G equivalem à componentes conectados de G^* .*

Demonstração. (i) Este fato segue da definição 1.24 (i), por construção, em cada face de G marca-se um ponto que será vértice de G^* .

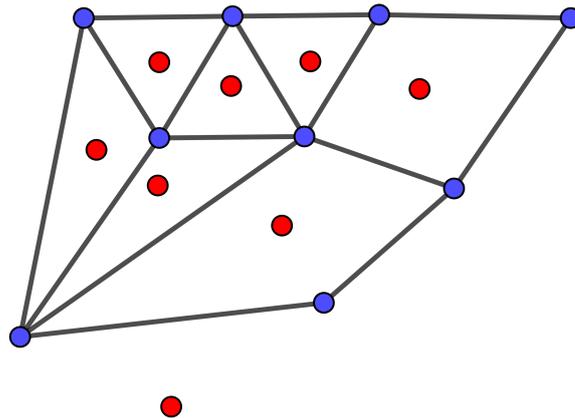


Figura 22 – Faces de G equivalem a vértices de G^*

Fonte: Construção do autor

(ii) Este fato segue da definição 1.24 (ii), observe que cada aresta de G que separa duas regiões é intersectada por uma aresta de G^* que liga essas duas regiões.

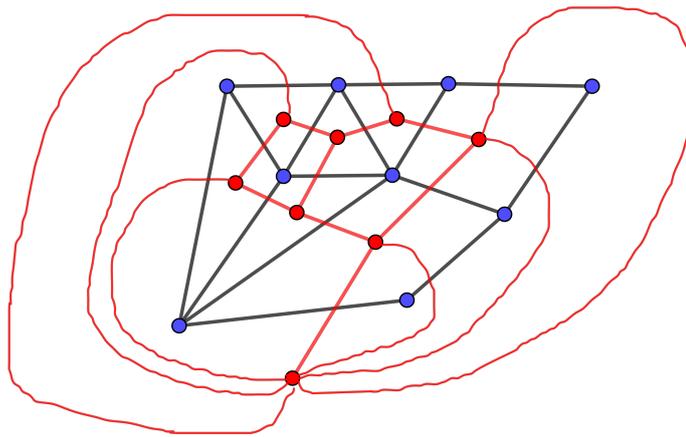


Figura 23 – Arestas de G equivalem à arestas de G^*

Fonte: Construção do autor

(iii) Sabemos que um ciclo em G cerca um conjunto de faces e que a cada face de G corresponde um vértice de G^* . Então, um ciclo em G cerca alguns vértices de G^* , que estão conectados uma vez que, G^* é conexo.. Logo, ciclos em G correspondem a componentes conectados em G^* .

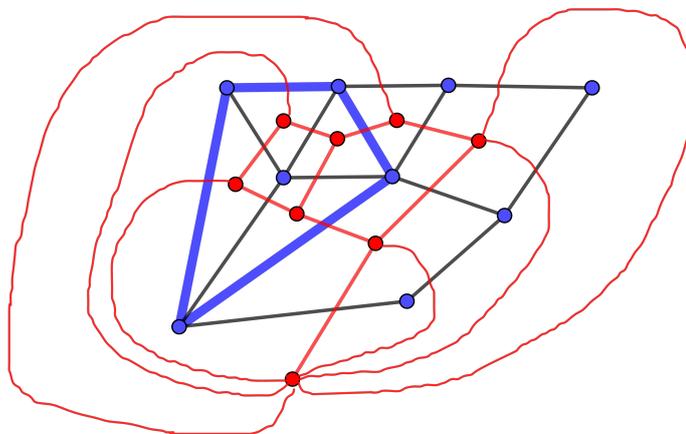


Figura 24 – Ciclo em G equivalem à componentes de G^*

Fonte: Construção do autor

□

A Fórmula de Euler

Descoberta em 1758 para o estudo de poliedros, a fórmula de Euler tem lugar de destaque na teoria de grafos, possibilitando a obtenção de resultados relevantes conforme mostraremos nos capítulos seguintes. A demonstração da fórmula de Euler que será apresentada a seguir se encontra em [3].

Teorema 2.1 (Fórmula de Euler). *Se G é um grafo planar conexo em que V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas então*

$$V + F - A = 2.$$

Demonstração. Considere um grafo planar conexo G conforme ilustrado na Figura 25. Temos que mostrar que

$$V(G) + F(G) - A(G) = 2.$$

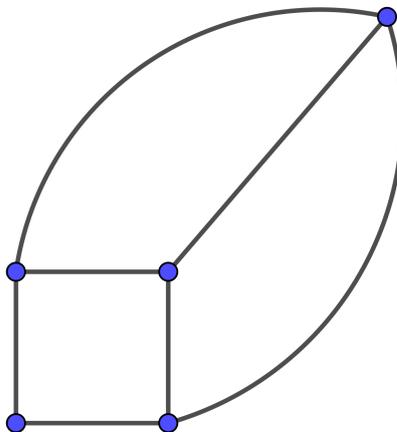


Figura 25 – Ilustração de um grafo planar G

Fonte: Construção do autor

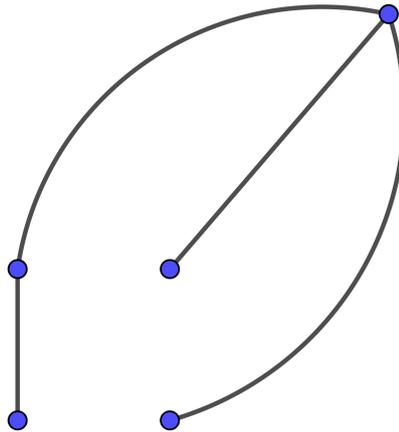


Figura 26 – H - árvore geradora de G

Fonte: Construção do autor

Seja H um conjunto mínimo de arestas, contido no conjunto de arestas de G , tal que H conecta todos os seus vértices. H está ilustrado na Figura 26. Pela definição 1.17 H é uma árvore geradora de G uma vez que H conecta todos os seus vértices, não possui ciclos devido à suposição de minimalidade, e seu conjunto de arestas está contido no conjunto de arestas de G . Pelo Teorema 1.2 $V(H) = A(H) + 1$ mas como $V(G) = V(H)$ temos:

$$V(G) = A(H) + 1 \quad (2.1)$$

Construiremos agora o grafo dual de G . Marque um ponto no interior de cada face de G para representar um vértice do grafo dual. Conecte, dois a dois, os vértices do grafo dual de tal forma que a cada aresta de G que separara duas regiões corresponda uma aresta do grafo dual. A Figura 27 apresenta o dual do grafo G .

Considere agora o conjunto de arestas K , contido no conjunto de arestas do grafo dual, tal que as arestas de K sejam as arestas do grafo dual que não interceptam as arestas da árvore geradora de G . Veja o conjunto de arestas K em destaque na Figura 28.

As arestas de K conectam todas as faces de G (o que corresponde a vértices do grafo dual) pois, pela proposição 1.1 (iii) isso só não aconteceria se H tivesse ciclos, mas H é árvore e árvores não possuem ciclos. K também não possui ciclos pois, caso contrário, cercaria componentes de H e, portanto, H não poderia ser árvore geradora de G por não conectar todos os seus vértices.

Ora, K não possui ciclos, conecta todos os vértices do grafo dual e seu conjunto de arestas está contido no conjunto de arestas do grafo dual, então, pela definição 1.17 temos que K é árvore geradora do grafo dual. Logo, pelo Teorema 1.2 temos que

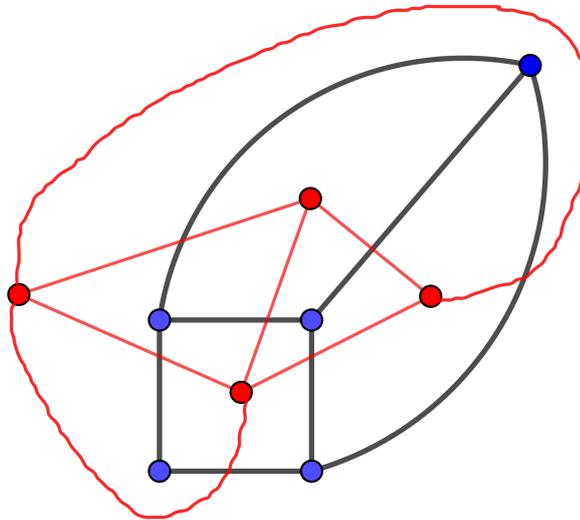


Figura 27 – Grafo dual de G
Fonte: Construção do autor

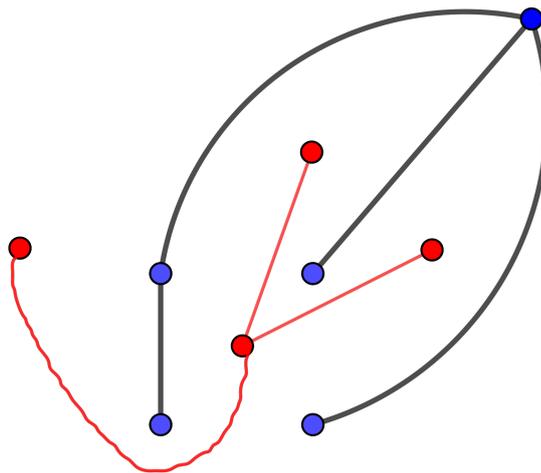


Figura 28 – Conjunto de arestas K
Fonte: Construção do autor

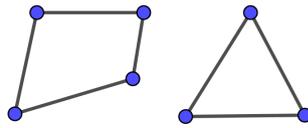


Figura 29 – Grafo desconexo

Fonte: Construção do autor

$$V(K) = A(K) + 1$$

porém, $V(K) = F(G)$, então

$$F(G) = A(K) + 1 \tag{2.2}$$

Somando as equações (2.1) e (2.2) temos:

$$V(G) + F(G) = A(H) + 1 + A(K) + 1 = (A(H) + A(K)) + 2$$

Por construção, como as arestas de K correspondem as arestas de $G - H$ temos que $A(H) + A(K) = A(G)$ logo

$$V(G) + F(G) = A(G) + 2 \text{ ou seja}$$

$$V(G) + F(G) - A(G) = 2$$

□

Exemplo 2.1. A fórmula de Euler não se aplica a grafos desconexos.

No grafo apresentado na figura 29 temos: $V = 7$, $F = 3$ e $A = 7$ logo

$$V + F - A = 7 + 3 - 7 = 3$$

Consequências da Fórmula de Euler

A fórmula de Euler produz um resultado forte na geometria, garantindo que o número de vértices, arestas e faces de um grafo planar conexo G satisfaz a equação

$$V + F - A = 2. \quad (3.1)$$

Muitas consequências clássicas e bem conhecidas podem ser derivadas da fórmula de Euler fazendo uma combinação da mesma com outras relações aritméticas e parâmetro de grafos. Olhando para tais parâmetros temos:

Denotando por v_i o número de vértices de grau i em G e contando seus vértices por seus graus temos:

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (3.2)$$

Pelo Teorema 1.1 a soma dos graus dos vértices de um grafo qualquer é igual ao dobro de arestas desse grafo, então:

$$2A = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 \dots \quad (3.3)$$

Se chamarmos de \bar{m} o grau médio dos vértices temos que

$$\bar{m} = \frac{2A}{V} \quad (3.4)$$

Analogamente, seja f_i o número de faces de grau i . Contando as faces de um grafo qualquer por seus graus temos que o total de faces será:

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots \quad (3.5)$$

Pelo teorema 1.3 a soma dos graus das faces de um grafo planar G é igual ao dobro do número de arestas desse grafo, então:

$$2A = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 \dots \quad (3.6)$$

Se pensarmos no grau médio das faces de G teremos:

$$\bar{f} = \frac{2A}{F} \quad (3.7)$$

De posse desses parâmetros e da fórmula de Euler podemos utilizá-los em uma combinação com um resultado bastante conhecido sobre média aritmética provar algumas proposições sobre grafos. Tal resultado será provado a seguir.

Lema 3.1. *Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é igual a \bar{x} pelo menos um dos valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é menor que ou igual a \bar{x} .*

Demonstração. Se fosse $x_1 > \bar{x}, x_2 > \bar{x}, x_3 > \bar{x}, \dots, x_n > \bar{x}$, teríamos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n > n\bar{x} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} > \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} > \bar{x} \quad (3.8)$$

o que é absurdo. □

Proposição 3.1. *O grafo completo K_5 não é planar.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que K_5 seja planar e considere seu plano hipotético representado na figura 30. Temos que $V = 5$ e $A = \binom{5}{2} = 10$.

Substituindo na fórmula de Euler temos:

$$V + F - A = 2 \Leftrightarrow 5 + F - 10 = 2 \Leftrightarrow F = 7 \quad (3.9)$$

Substituindo A e F na equação 3.7 temos que

$$\bar{f} = \frac{2A}{F} = \frac{20}{7} < 3 \quad (3.10)$$

Se o grau médio das faces é menor que 3 então, pelo lema 3.1 existe pelo menos uma face delimitada por no máximo duas arestas, o que é absurdo pois, são necessárias pelo menos três arestas para delimitar uma face em K_5 . Logo K_5 não é planar. □

Proposição 3.2. *O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ não é planar.*

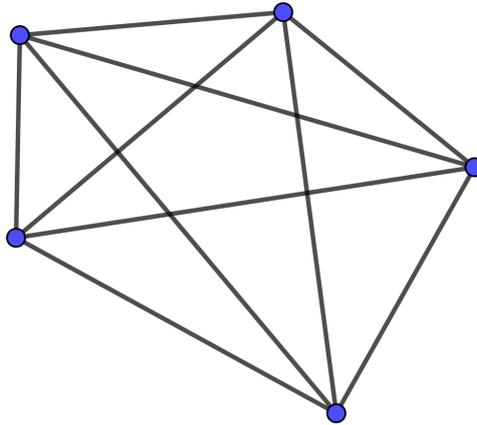


Figura 30 – Grafo completo K_5
Fonte: Construção do autor

Demonstração. Suponha por absurdo que $K_{3,3}$ seja planar. Temos que $V = 6$ e $A = 9$. Então, pela fórmula de Euler temos:

$$6 + F - 9 = 2 \Leftrightarrow F = 5 \quad (3.11)$$

Substituindo A e F na equação 3.7 temos que

$$\bar{f} = \frac{2A}{F} = \frac{18}{5} < 4 \quad (3.12)$$

Como o grau médio das faces é menor que 4, pelo lema 3.1 existe pelo menos um valor menor que 4, ou seja, existe pelo menos uma face delimitada por menos que 4 arestas, o que é absurdo pois em grafos bipartidos cada face é delimitada por no mínimo 4 arestas. Para verificar este fato basta observar que se existisse uma face formada por três arestas uma delas teria que ligar dois vértices do mesmo subconjunto e isso contradiz a definição 1.14 de grafo bipartido. Logo, o grafo completo bipartido $K_{3,3}$ não é planar. \square

Proposição 3.3. *Se G é um grafo planar simples e conexo com $V > 2$ vértices, então:*

- (i) *G tem no máximo $3V - 6$ arestas.*
- (ii) *G tem um vértice de grau menor ou igual 5.*
- (iii) *Se as arestas de G são de duas cores, então há um vértice de G com, no máximo, duas mudanças de cor na ordem cíclica das arestas ao redor desse vértice.*

Demonstração. (i) Toda face tem pelo menos três arestas, então as equações 3.5 e 3.6 se resumem a

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + \dots \Leftrightarrow 3F = 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \dots \quad (3.13)$$

e

$$2A = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \quad (3.14)$$

Subtraindo da equação 3.14 a equação 3.13 obtemos:

$$2A - 3F = f_4 + 2f_5 + \dots \geq 0 \quad (3.15)$$

o que equivale a $3F \leq 2A$. Pela fórmula de Euler temos que $V + F - A = 2$, então:

$$V + F - A = 2 \Leftrightarrow 2 + A - V = F \Leftrightarrow$$

$$6 + 3A - 3V = 3F \Rightarrow 6 + 3A - 3V \leq 2A \Leftrightarrow$$

$$A \leq 3V - 6 \quad (3.16)$$

(ii) Sabemos que o grau médio dos vértices é dado pela equação 3.4 e que pelo item (i) $A \leq 3V - 6$, então:

$$\bar{m} = \frac{2A}{V} \leq \frac{6V - 12}{V} = 6 \left(\frac{V - 2}{V} \right) < 6 \quad (3.17)$$

Então o grau médio dos vértices é menor que 6, pelo lema 3.1 existe pelo menos um valor menor que 6, isso prova que G possui um vértice de grau menor que ou igual a 5.

(iii) Seja c o número de cantos onde as mudanças de cores acontecem. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, todo vértice de G tem mais que duas mudanças de cor. Supor que todo vértice de G tem mais que duas mudanças de cor implica em dizer que todo vértice tem grau no mínimo 4.

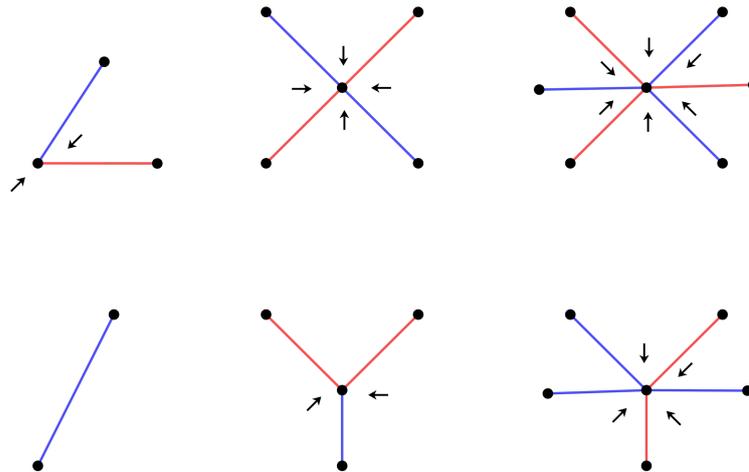


Figura 31 – Cantos
Fonte: Construção do autor

Concluimos que em cada vértice há pelo menos 4 cantos, os quais ocorrem trocas de cor. Então, contando esses cantos em todos os vértices do grafo G concluiremos que o total de cantos será no mínimo quatro vezes o número de vértices de G , ou seja, $c \geq 4V$.

Podemos contar esses cantos através dos graus das faces também. Basta notar que uma face que tem grau par tem o número de cantos igual ao seu grau e se o grau dessa face for ímpar, o número de cantos onde ocorrem as trocas será uma unidade a menos que o seu grau. Isso significa que faces de grau $2n$ e faces de grau $2n + 1$ possuem $2n$ cantos onde as trocas de cores ocorrem. Assim, o número máximo de cantos onde ocorrem mudanças de cores será $2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + 8f_9 + \dots$, ou seja, $c \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \dots$.

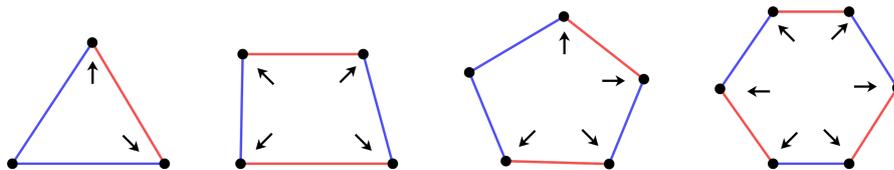


Figura 32 – Cantos nas faces
Fonte: Construção do autor

$$\text{Então: } 4V \leq c \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \dots$$

$$\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + \dots$$

$$= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \dots) - 4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \dots)$$

Como $3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \dots = 2A$ e $f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \dots = F$ temos $4V \leq 4A - 4F \Leftrightarrow V \leq A - F \Leftrightarrow V + F - A \leq 0$ contradizendo assim a fórmula de

Euler. Logo, supor que a afirmação é falsa é absurdo. \square

3.1 Grafos Platônicos e Poliedros convexos regulares

Outra consequência interessante, derivada da fórmula de Euler, é a classificação dos poliedros convexos regulares, os sólidos de Platão.

Definição 3.1 (Grafos Platônicos). *Um grafo será dito platônico se possuir um único vértice ou se for um grafo com mais do que uma aresta, conexo, planar, regular, no qual todas as faces possuem o mesmo grau.*

Exemplo 3.1. *São exemplos de grafos platônicos: O grafo formado por apenas um vértice, os grafos cíclicos correspondentes aos polígonos regulares e os grafos formados pelas arestas dos poliedros convexos regulares como podemos ver em [1].*

Teorema 3.1. *Existem 5, e somente 5, grafos platônicos distintos do grafo de um único vértice e dos grafos cíclicos.*

Demonstração. Seja G um grafo platônico diferente do grafo de vértice único e dos grafos cíclicos. Pela definição 3.1 G é regular e todas as suas faces têm o mesmo grau. Considere m o grau de cada vértice e f o grau de cada face de G . A soma dos graus dos vértices de G é dado por $m \cdot V(G)$, mas pelo teorema 1.1 a soma dos graus dos vértices de um grafo qualquer é igual ao dobro do número de arestas desse grafo. Assim:

$$m \cdot V(G) = 2 \cdot A(G) \quad (3.18)$$

A soma dos graus das faces de G é dada por $f \cdot F(G)$ o que pelo teorema 1.3 também é igual a $2 \cdot A(G)$. Assim:

$$f \cdot F(G) = 2 \cdot A(G) \quad (3.19)$$

Das equações (3.18) e (3.19) decorre que:

$$m \cdot V(G) = 2 \cdot A(G) = f \cdot F(G) \Rightarrow$$

$$A(G) = m \cdot \frac{V(G)}{2} \quad (3.20)$$

e

$$F(G) = 2 \cdot \frac{A(G)}{f} \quad (3.21)$$

Substituindo essas afirmações na fórmula de Euler, temos:

$$V + F - A = 2 \Leftrightarrow V(G) + 2 \cdot \frac{A(G)}{f} - m \cdot \frac{V(G)}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$V(G) + m \cdot \frac{V(G)}{f} - m \cdot \frac{V(G)}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$V(G) \cdot \left(1 + \frac{m}{f} - \frac{m}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$V(G) \cdot \left(\frac{2f + 2m - mf}{2f}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$V(G) \cdot (2f + 2m - mf) = 4f \tag{3.22}$$

como $4f > 0$ e $V(G) > 0$ temos que

$$2f + 2m - mf > 0 \tag{3.23}$$

Resolvendo essa inequação temos:

$$2f + 2m - mf > 0 \Leftrightarrow 2f + 2m - mf - 4 > -4 \Leftrightarrow$$

$$mf - 2f - 2m + 4 < 4 \Leftrightarrow f(m - 2) - 2(m - 2) < 4 \Leftrightarrow$$

$$(m - 2)(f - 2) < 4 \Leftrightarrow m < \frac{4}{f - 2} + 2 \tag{3.24}$$

Como G é platônico, diferente do grafo nulo e dos grafos cíclicos, temos que $m > 2$ e $f > 2$.

Analisando a inequação $(m - 2)(f - 2) < 4$ temos que

$$m > 2 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow f - 2 < 4 \Leftrightarrow f < 6 \tag{3.25}$$

Então $2 < f < 6$, ou seja $f \in \{3, 4, 5\}$ Substituindo esses valores na inequação (3.24) obtemos:

Para $f = 3$ temos $m < 6$ mas como $m > 2$ temos que $m \in \{3, 4, 5\}$. Assim temos como solução os pares (m, f) ; $(3, 3)$; $(4, 3)$; $(5, 3)$.

Para $f = 4$ temos $m < 4$ mas como $m > 2$ temos que $m = 3$. Assim, temos como solução o par $(3, 4)$.

Para $f = 5$ temos $m < 3, 3$ mas como $m > 2$ temos que $m = 3$. Assim, temos como solução o par $(3, 5)$.

Como encontramos apenas 5 soluções concluímos que existem apenas 5 grafos platônicos distintos do grafo de vértice único e dos grafos cíclicos. \square

Nas soluções encontradas no teorema anterior, cada par (m, f) representa, respectivamente, os graus dos vértices e das faces de um dos cinco grafos platônicos diferentes dos grafos cíclicos e do grafo de vértice único. Mostraremos agora a relação entre tais grafos e os poliedros convexos regulares, também conhecidos como Poliedros de Platão.

A definição de Poliedros pode atingir diferentes níveis de generalidade, como estamos interessados nos poliedros convexos regulares, iniciaremos com a definição de poliedros convexos.

Definição 3.2 (Poliedros convexos). *Um poliedro convexo é uma reunião de um número finito de polígonos planos de modo que:*

- (a) *Cada lado de um polígono é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*
- (b) *O plano que contém um desses polígonos deixa todos os outros em um mesmo lado do espaço.*

Cada polígono é denominado face do poliedro, cada lado comum a dois desses polígonos é uma aresta do poliedro e cada vértice de um desses polígonos é também vértice do poliedro.

Definição 3.3 (Poliedros Convexos Regulares). *De acordo com [7] um poliedro convexo é dito regular se as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

- (a) *Todas as suas faces forem polígonos regulares com um mesmo número de arestas.*
- (b) *Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas.*

Considerando o par $(m, f) = (3, 3)$, uma das soluções da inequação (3.23), podemos utilizar as equações (3.20), (3.22) e a fórmula de Euler para determinar a quantidade de vértices, faces e arestas do grafo platônico G .

Da equação (3.22) tiramos que $V(G) = \frac{4f}{2f + 2m - mf}$. Então, para (3, 3) temos que $V(G) = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3} = 4$. Substituindo este valor na equação (3.20) temos que $A(G) = 3 \cdot \frac{4}{2} = 6$. Utilizando a fórmula de Euler concluímos que $F(G) = 6 - 4 + 2 = 4$.

De posse destes resultados, precisamos descobrir se existe um poliedro convexo com quatro vértices, seis arestas e quatro faces. Caso exista, o poliedro é notadamente regular pois, sendo G um grafo platônico as condições impostas pela definição 3.3 estarão asseguradas.

O teorema a seguir apresenta as condições necessárias para a existência de um poliedro convexo dados três números naturais correspondentes à vértices, faces e arestas. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9].

Teorema 3.2. *Existe um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces se, e somente se:*

- (i) $A \geq 6$
- (ii) $V - A + F = 2$
- (iii) $A + 6 \leq 3F \leq 2A$
- (iv) $A + 6 \leq 3V \leq 2A$

Assim, podemos constatar que existe um poliedro convexo com quatro vértices, seis arestas e quatro faces pois, $V = 4$, $A = 6$ e $F = 4$ satisfazem ao teorema 3.2. Este poliedro é denominado tetraedro.

Os dados obtidos com as outras soluções da inequação (3.23) e a classificação dos poliedros estão representados na tabela a seguir.

(m, f)	$V(G)$	$A(G)$	$F(G)$	Classificação
(3, 3)	4	6	4	Tetraedro
(3, 4)	8	12	6	Hexaedro
(3, 5)	20	30	12	Dodecaedro
(4, 3)	6	12	8	Octaedro
(5, 3)	12	30	20	Icosaedro

Tabela 1 – Classificação dos Poliedros

Se analisarmos a relação entre grafos platônicos e poliedros convexos regulares, com exceção do grafo de um único vértice e dos grafos cíclicos, constataremos que esta relação é injetiva, pois de acordo com a tabela 1, grafos platônicos distintos geraram poliedros também distintos.

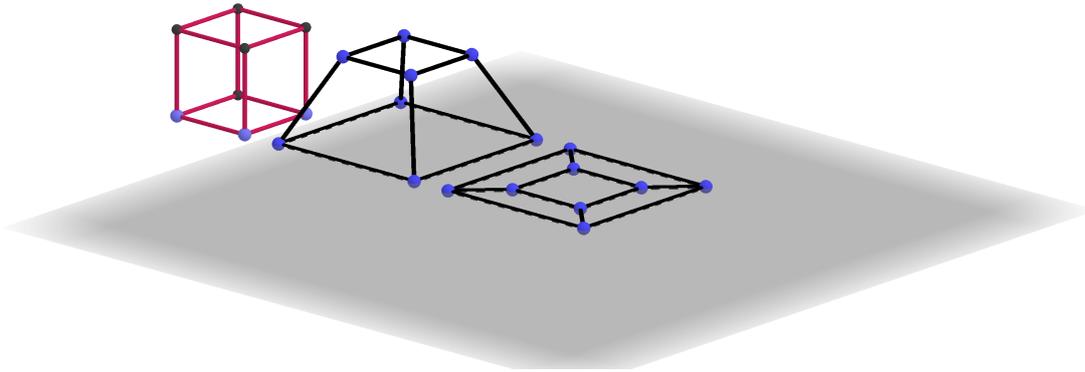


Figura 33 – O cubo e seu grafo platônico

Fonte: Construção do autor

Podemos ver em [7], que os únicos poliedros convexos regulares são: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Este fato nos permite concluir que a relação entre grafos platônicos e poliedros convexos regulares é, também, sobrejetiva. Assim sendo, existe uma bijeção entre poliedros convexos regulares e grafos platônicos, o que nos permite construir um grafo platônico a partir de um poliedro convexo regular. A seguir, temos um passo a passo desta construção que pode ser encontrado em [6].

1. Considere um poliedro convexo regular e o plano que contém uma de suas faces. Vamos modificar esse poliedro ampliando a face contida no plano considerado.
2. Deforme o poliedro modificado de forma que ele fique contido na face ampliada.

Note que o grafo obtido é planar, conexo, regular e todas as faces possuem o mesmo grau, então pela definição 3.1 tal grafo é platônico.

A figura 33 mostra a construção do grafo platônico correspondente ao cubo.

É importante destacar que o grafo platônico correspondente à um poliedro regular e a sua planificação são coisas distintas. Planificar um poliedro consiste em colocar todas as suas faces sobre um plano, sem que haja alteração de suas medidas e formas. Note que na construção do grafo platônico não nos preocupamos em manter as medidas e formas das faces. A Figura 34, extraída de [2], ilustra as diferenças entre um grafo platônico e a planificação dos poliedros convexos regulares.

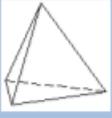
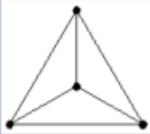
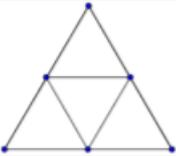
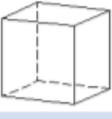
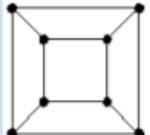
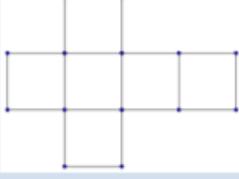
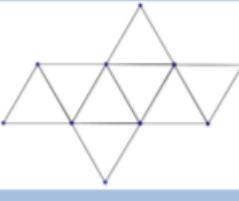
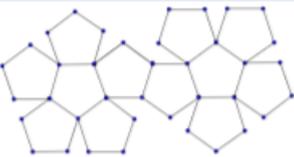
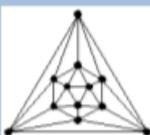
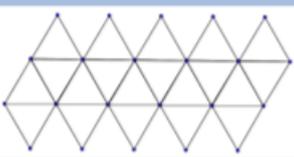
Poliedro	Grafo Platônico	Planificação
 Tetraedro		
 Hexaedro		
 Octaedro		
 Dodecaedro		
 Icosaedro		

Figura 34 – Os poliedros e seus respectivos grafos

Fonte:

3.2 Coloração de Mapas

Os problemas de coloração de mapas podem ser vistos como uma aplicação da coloração de grafos. Para ser mais preciso, podemos dizer que se resumem à coloração de vértices.

Para representar um mapa através de um grafo basta proceder da seguinte maneira: A cada região do mapa faça corresponder um vértice de um grafo e se duas regiões forem vizinhas haverá uma aresta conectando os vértices correspondentes.

O grafo obtido é um grafo planar chamado de grafo dual do mapa. Observe que o grafo dual de um mapa é um subgrafo do grafo dual apresentado na definição 1.24 pois, aqui não consideramos a região externa do mapa. Por um abuso de linguagem, nesta seção em especial, nos referiremos ao grafo dual como sendo o dual do mapa.

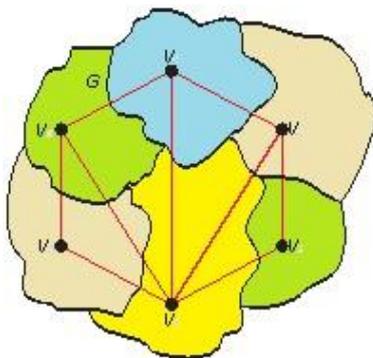


Figura 35 – Grafo de um mapa

<https://docplayer.com.br/docs-images/93/113693767/images/56-1.jpg>

Um resultado muito conhecido sobre a coloração de mapas é o problema das quatro cores proposto em 1852 pelo matemático inglês Francis Guthrie (1831-1899) que consistia em saber se seria possível colorir qualquer mapa utilizando apenas quatro cores sem que regiões vizinhas recebessem a mesma cor.

A primeira prova para este problema surgiu em 1879 apresentada por um advogado inglês, que também havia estudado matemática, chamado Alfred Bray Kemp (1849-1922). Porém, onze anos depois, um homem chamado Percy Jhon Heawood (1861-1955) encontrou um erro na demonstração de Kemp.

Em 1976 surgiu a primeira prova correta para o problema das quatro cores, apresentada pelo alemão Wolfgang Haken e pelo americano Kenneth Appel. O problema foi enunciado como o teorema das quatro cores, porém, a demonstração só foi obtida utilizando o computador, fato que gerou desconfiança entre os pesquisadores. O fato é que até o momento não há outra prova para o problema das quatro cores sem a utilização de computadores.

Não há aqui a pretensão de aprofundar na prova do teorema das quatro cores e muito menos a ousadia de tentar prová-lo, apresentaremos apenas um exemplo mostrando que é possível colorir o mapa do Brasil utilizando apenas quatro cores.

Exemplo 3.2. *Vamos comprovar o teorema das quatro cores e colorir o mapa do Brasil utilizando apenas quatro cores sem que estados vizinhos recebam a mesma cor.*

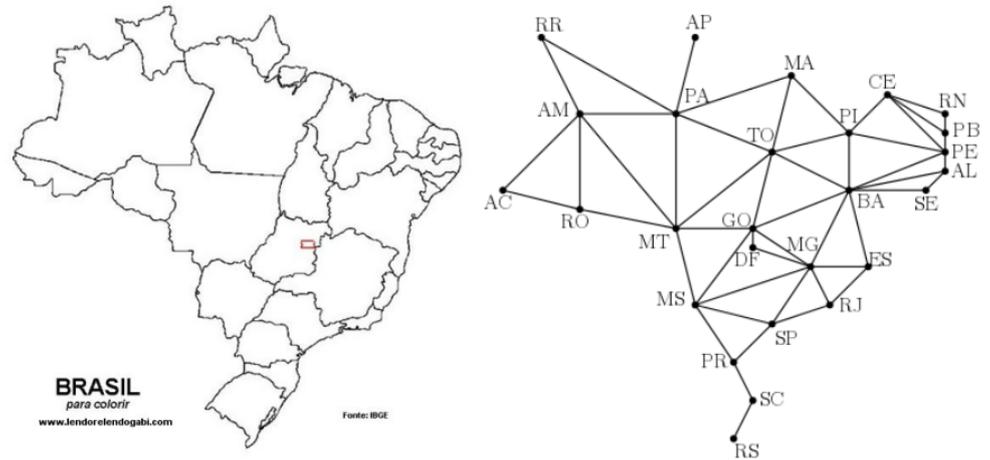


Figura 36 – Mapa do Brasil e seu grafo dual

Organizando os vértices na ordem decrescente de graus obtemos:

<i>BA</i>	8	<i>MS</i>	5	<i>MA</i>	3	<i>RN</i>	2
<i>MG</i>	7	<i>PE</i>	5	<i>PB</i>	3	<i>RR</i>	2
<i>GO</i>	6	<i>PI</i>	5	<i>PR</i>	3	<i>SC</i>	2
<i>MT</i>	6	<i>CE</i>	4	<i>RJ</i>	3	<i>SE</i>	2
<i>PA</i>	6	<i>SP</i>	4	<i>RO</i>	3	<i>AP</i>	1
<i>TO</i>	6	<i>AL</i>	3	<i>AC</i>	2	<i>RS</i>	1
<i>AM</i>	5	<i>ES</i>	3	<i>DF</i>	2		

Tabela 2 – Ordem decrescente de graus

Seja T_1 O conjunto dos vértices que serão coloridos com a cor 1. Como BA é o vértice de maior grau, $BA \in T_1$. MG e GO são adjacentes à BA e, portanto, não pertencem à T_1 . MT não é adjacente à BA , então $MT \in T_1$. PA, TO, AM, MS, PE e PI não pertencem à T_1 pois são adjacentes à BA ou à MT ou à ambos. O $CE \in T_1$ pois não é adjacente à nenhum dos dois vértices contidos em T_1 . Seguindo este raciocínio temos que:

$$T_1 = \{BA, MT, CE, SP, MA, AC, DF, RR, SC, AP\}$$

Excluindo T_1 da tabela 2 obtemos:

		<i>MS</i>	5			<i>RN</i>	2
<i>MG</i>	7	<i>PE</i>	5	<i>PB</i>	3		
<i>GO</i>	6	<i>PI</i>	5	<i>PR</i>	3		
				<i>RJ</i>	3	<i>SE</i>	2
<i>PA</i>	6			<i>RO</i>	3		
<i>TO</i>	6	<i>AL</i>	3			<i>RS</i>	1
<i>AM</i>	5	<i>ES</i>	3				

Tabela 3 – Tabela 2 menos T_1

Recomeçaremos o processo determinando T_2 como o conjunto dos vértices que serão coloridos com a cor 2. O primeiro vértice a ser adicionado à T_2 será *MG* pois, é o vértice de maior grau que aparece na tabela 3.

Repetindo-se o mesmo processo temos que:

$$T_2 = \{MG, PA, PE, PR, RO, RN, SE, RS\}$$

Excluindo T_2 da tabela 3 obtemos:

		<i>MS</i>	5				
				<i>PB</i>	3		
<i>GO</i>	6	<i>PI</i>	5				
				<i>RJ</i>	3		
<i>TO</i>	6	<i>AL</i>	3				
<i>AM</i>	5	<i>ES</i>	3				

Tabela 4 – Tabela 3 menos T_2

De acordo com a tabela 4, *GO* será o primeiro elemento do conjunto T_3 que é o conjunto dos vértices que serão coloridos com a cor 3. Seguindo a ordem decrescente de graus perceberemos que $TO \notin T_3$ pois, é adjacente à *GO* e que $AM \in T_3$. Analisando os outros vértices concluímos que:

$$T_3 = \{GO, AM, PI, AL, ES, PB\}$$

Excluindo T_3 da tabela 4 sobrarão os vértices *TO*, *MS* e *RJ* que não são adjacentes dois a dois, então os três comporão o conjunto T_4 e serão coloridos com a cor 4. Logo:

$$T_4 = \{TO, MS, RJ\}$$

O teorema a seguir é conhecido como o teorema das cinco cores e diz que qualquer mapa pode ser colorido com cinco cores ou menos, é uma prova mais fraca do teorema das quatro cores, sua demonstração será feita por indução sobre o número V de vértices de G e se encontra em [8]. Antes de enunciá-lo provaremos uma proposição que é uma consequência da fórmula de Euler.

Proposição 3.4. *Dados cinco vértices quaisquer, de um grafo planar, pelo menos dois deles não são adjacentes.*

Demonstração. Suponha que os cinco vértices sejam adjacentes, então há arestas de um grafo planar conectando cada um dos vértices aos outros quatro. O grafo planar formado pelos cinco vértices e por tais arestas é o grafo completo K_5 . Isso é absurdo pois, pela proposição 3.1 K_5 não é planar, logo os cinco vértices não são todos adjacentes. \square

Teorema 3.3. *Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração. Se $V \leq 5$ basta colorir cada vértice com uma cor diferente e estará provado. Suponha que o teorema seja também verdadeiro para $V = n$, tal que n seja natural e maior que 5. Então o grafo planar com n vértices possui $\chi(G) \leq 5$. Temos que provar que se G tiver $n + 1$ vértices ainda terá $\chi(G) \leq 5$. Considere o grafo planar G com $n + 1$ vértices. Pela proposição 3.3 (ii) G possui um vértice v de grau menor ou igual a 5. Então, considere o grafo $G' = G - v$. Observe que G' possui n vértices e, portanto, pode ser colorido com 5 cores. Ao colorir G' com as cinco cores estamos colorindo todos os vértices de G , exceto um, o vértice v . Precisamos mostrar que v também pode ser colorido com uma das cinco cores. Sabemos que v tem grau menor ou igual a 5. Se o grau de v for menor que 5 significa que existem no máximo quatro vértices adjacentes a ele, então é possível colorir cada um com uma cor e v com a quinta cor. Se o grau de v for igual a 5 teremos 5 vértices adjacentes a ele e, portanto, não seria possível pintá-lo com uma das cinco cores.

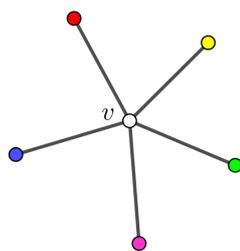


Figura 37 – Vértice v de grau 5

Fonte: Construção do autor

Para resolvermos esta situação precisaremos mostrar que é possível recolorir um dos vértices adjacentes da v com uma das quatro cores utilizadas nos outros quatro de forma que, a quinta cor possa ser disponibilizada para colorir v .

Considere os vértices u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 adjacentes a v e coloridos com as cores 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Vamos tentar mudar a cor do vértice u_1 para a cor 3. Aqui temos um problema, pois não sabemos se há outro vértice adjacente à u_1 que já esteja colorido com a cor 3, e caso exista, deveremos trocar sua cor também e assim correríamos o risco de nos perdemos.

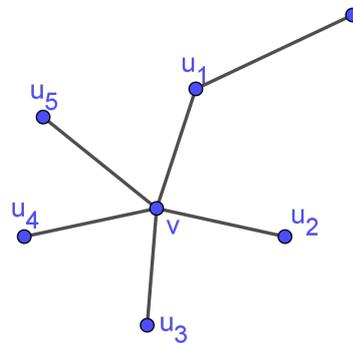


Figura 38 – Mudança da cor de u_1

Fonte: Construção do autor

Tentaremos mudar a cor de u_1 de outra maneira: Seja $H_{1,3}$ o subgrafo gerado pelos vértices coloridos com as cores 1 e 3. Note que $H_{1,3}$ é um grafo desconexo e que em suas componentes conexas há apenas vértices de cor 1 ou 3, então u_1 e u_3 pertencem a $H_{1,3}$.

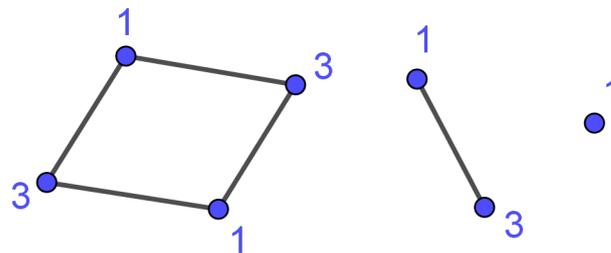


Figura 39 – Subgrafo $H_{1,3}$

Fonte: Construção do autor

Como $H_{1,3}$ é desconexo, temos que considerar duas possibilidades: u_1 e u_3 pertencem à mesma componente conexa ou u_1 e u_3 estão em componentes conexas distintas. Se u_1 e u_3 pertencerem à componentes distintas, então não há um caminho P entre u_1 e u_3 . Assim, se permutarmos as cores 1 e 3 na componente que contém u_1 o mesmo terá a cor 3 e a cor 1 não

estará mais entre os vértices adjacentes a v sendo possível colori-lo com ela e obtermos uma coloração de 5 cores para G .

Se u_1 e u_3 pertencerem à mesma componente conexa, permutar as cores 1 e 3 não disponibilizaria uma cor para v , então tentaremos mudar a cor de outro vértice.

Vamos tentar colorir u_2 com a cor 4. Seja $H_{2,4}$ o subgrafo gerado pelos vértices coloridos com as cores 2 e 4. $H_{2,4}$ é um grafo desconexo que contém u_2 e u_4 . Se u_2 e u_4 estiverem em componentes conexas distintas, análogo ao que ocorreu com u_1 e u_3 , uma permutação entre as cores 2 e 4 na componente que contém u_2 garante uma coloração de 5 cores para G pois, a cor 2 poderá ser utilizada para colorir o vértice v . Também análogo ao que ocorreu em u_1 e u_3 , caso u_2 e u_4 estejam em uma mesma componente conexa uma permutação entre as cores 2 e 4 não disponibiliza uma cor para o vértice v . Porém, u_2 e u_4 não podem estar em uma mesma componente conexa, veja:

Se u_2 e u_4 pertencem à mesma componente conexa existe um caminho Q , cujos vértices estão coloridos com as cores 2 e 4, que conecta u_2 a u_4 . Entre u_1 e u_3 existe o caminho P e seus vértices estão coloridos com as cores 1 e 3. Então, P e Q não possuem vértice em comum.

Se acrescentarmos o vértice v ao caminho P teremos um ciclo com u_2 em seu interior.

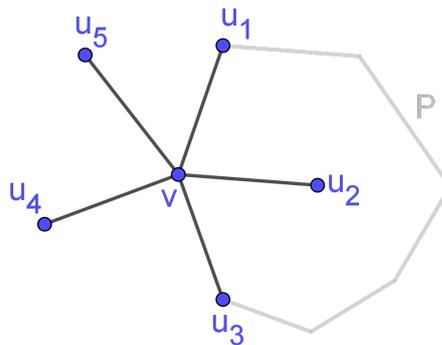


Figura 40 – Caminho P

Fonte: Construção do autor

O caminho Q conecta o vértice u_2 , interno ao ciclo, ao vértice u_4 que é externo ao ciclo. Como P e Q não têm vértices comuns temos aí um cruzamento de arestas, o que é absurdo pois, por hipótese, G é planar.

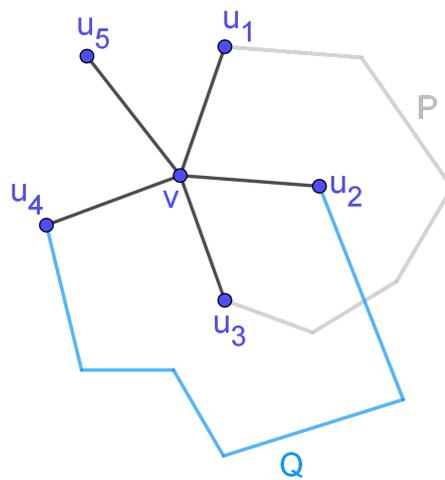


Figura 41 – Caminhos P e Q

Fonte: Construção do autor

Isso mostra que u_2 e u_4 não podem estar na mesma componente conexa e, portanto, é possível colorir v com a cor 2. Logo, se G é planar temos que $\chi(G) \leq 5$. \square

Sylvester-Gallai e as Linhas Monocromáticas

Neste capítulo, também baseado na teoria de grafos, estudaremos o Teorema de Sylvester-Gallai e as linhas monocromáticas. Iniciaremos com um breve estudo da Função Projeção Estereográfica que faz uma relação entre plano e esfera.

4.1 Projeção Estereográfica

Definição 4.1 (Projeção Estereográfica). *Sejam S^2 a esfera unitária de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, N o ponto de coordenadas $(0, 0, 1)$ chamado de polo norte da esfera e α o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$. Definimos como Projeção Estereográfica a função:*

$$\varphi : S^2 - N \rightarrow \alpha$$

Assim, se $M \in S^2$ temos que $\varphi(M) = M' = N\vec{M} \cap \alpha$.

Para conhecermos melhor a função φ , considere a esfera unitária S^2 e o ponto $M = (x, y, z) \in S^2$, conforme ilustrado na Figura 42. Se traçarmos uma semirreta com origem em $N = (0, 0, 1)$ passando por M temos que, a mesma fura o plano α no ponto M' de coordenadas $(a, b, 0)$, que é a imagem do ponto M no plano α , ou seja, qualquer ponto do conjunto imagem dessa função terá a última coordenada igual a zero e, portanto, podemos dizer que as coordenadas de M' são (a, b) . Assim, $\varphi(x, y, z) = (a, b)$ e o que precisamos fazer é escrever a e b em função x , y e z .

Observe que os pontos N , M e M' são colineares, então, os vetores $N\vec{M}$ e $N\vec{M}'$ são linearmente dependentes, o que significa que $N\vec{M}' = \lambda \cdot N\vec{M}$. Logo:

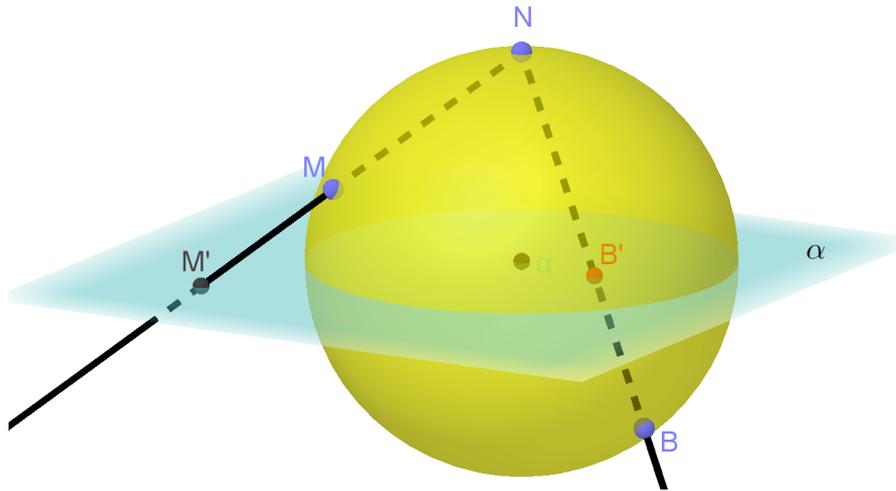


Figura 42 – Função projeção estereográfica

Fonte: Construção do autor

$$(a, b, 0) - (0, 0, 1) = \lambda \cdot [(x, y, z) - (0, 0, 1)]$$

$$(a, b, -1) = \lambda \cdot (x, y, z - 1)$$

$$(a, b, -1) = (\lambda x, \lambda y, \lambda(z - 1))$$

Então, $a = \lambda x$, $b = \lambda y$ e $-1 = \lambda(z - 1)$. Da terceira igualdade decorre que $\lambda = \frac{1}{1 - z}$ então, $a = \frac{x}{1 - z}$ e $b = \frac{y}{1 - z}$. Assim, a lei de formação da função φ será dada por:

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right)$$

O domínio da função φ é $S^2 - N$, então, note que φ está bem definida em todo seu domínio pois, o único caso em que haveria problema seria se $1 - z = 0$ e isso só aconteceria no ponto N que foi excluído do seu domínio.

A função φ é injetiva. Para verificar que esta afirmação é verdadeira podemos considerar dois pontos distintos A e B em S^2 . Sabemos que por N e A passa uma única reta (a) e que tal reta intersecta o plano α em um único ponto A' . Por N e B também passa uma única reta (b) que é diferente da reta (a) , então, a reta (b) não pode intersectar o plano α em A' e sim em outro ponto que chamaremos de B' . Sendo A' e B' as imagens dos pontos A e B respectivamente, mostramos que pontos diferentes em S^2 possuem imagens diferentes em \mathbb{R}^2 .

A função φ é sobrejetiva. Basta notar que para qualquer ponto do plano, a reta que passa por este ponto e pelo polo norte intersecta a esfera em um ponto, ou seja:

$$\forall B' \in \alpha, \exists B \in S^2 | \varphi(B) = B'$$

Ora, a função φ é injetiva e sobrejetiva, então φ é bijetiva e, portanto, podemos determinar a sua inversa que será a função

$$\varphi^{-1} : \alpha \rightarrow S^2 - N$$

Para escrevermos a função φ^{-1} consideraremos o ponto $B' \in \alpha$ de coordenadas $(x, y, 0)$ e o ponto $B \in S^2$ de coordenadas (a, b, c) tal que B é a intersecção da reta que passa por B' e N com a esfera. Dessa forma o que precisamos fazer é determinar os valores a, b e c em função de x e y . Os vetores \vec{NB} e \vec{NB}' são linearmente dependentes, logo: $\vec{NB} = t \cdot \vec{NB}'$.

$$(a, b, c) - (0, 0, 1) = t \cdot [(x, y, 0) - (0, 0, 1)]$$

$$(a, b, c) = (0, 0, 1) + t \cdot (x, y, -1)$$

$$(a, b, c) = (tx, ty, 1 - t) \tag{4.1}$$

Como (a, b, c) são as coordenadas de um ponto da esfera de raio 1 temos que $\|(tx, ty, 1 - t)\| = 1$, então:

$$\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t)^2} = 1$$

$$t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$$

$$t^2x^2 + t^2y^2 - 2t + t^2 = 0$$

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t = 0$$

$$t[t(x^2 + y^2 + 1) - 2] = 0$$

Diante dessa exposição, concluímos que $t = 0$ ou $t(x^2 + y^2 + 1) - 2 = 0$. Podemos descartar a solução $t = 0$ porque estaríamos multiplicando o vetor \vec{NB}' por zero, o que significaria que o ponto B' que está no plano seria o polo norte, o que é absurdo. Logo

$$t(x^2 + y^2 + 1) - 2 = 0$$

é a única solução, o que significa que $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$.

Substituindo t na equação 4.1 obtemos:

$$(a, b, c) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

$$(a, b, c) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

Dessa forma, a função $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - N$, inversa da função φ é definida por:

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

Como consequência da função projeção estereográfica podemos reescrever a definição 1.22 de grafo planar.

Definição 4.2 (grafo planar generalizado). *Um grafo será dito planar se puder ser desenhado no plano ou na esfera unitária S^2 sem que suas arestas se cruzem fora de suas extremidades.*

4.2 O Teorema de Sylvester-Gallai

Em 1893, James Joseph Sylvester, propôs um problema que dizia que dado um conjunto finito de pelo menos três pontos no plano não é possível organizá-los de forma que toda linha que passa por dois deles também contenha um terceiro, a menos que todos estejam alinhados.

O problema proposto por Sylvester foi resolvido 51 anos mais tarde por Tibor Gallai e ficou conhecido como teorema de Sylvester-Gallai.

A prova que apresentaremos para o teorema foi primeiramente notada pelo matemático americano Normam Steenrod combinando conceitos básicos da geometria topológica com a proposição 3.3 (ii).

Definição 4.3 (Pontos Antipodais). *São pontos diametralmente opostos que pertencem à superfície de uma esfera.*

Na Figura 43 os pontos B e D são pontos antipodais.

Lema 4.1. *Seja π^2 um plano em \mathbb{R}^3 que não intersecta a esfera unitária S^2 . À cada ponto P de π^2 podemos associar um par de pontos antipodais em S^2 , e ainda, essa relação é injetiva.*

Demonstração. Considere, conforme a ilustrado na Figura 44, o ponto $P \in \pi^2$. Se traçarmos uma reta que passa por P e pelo centro O da esfera notaremos que ela intersecta a esfera em dois

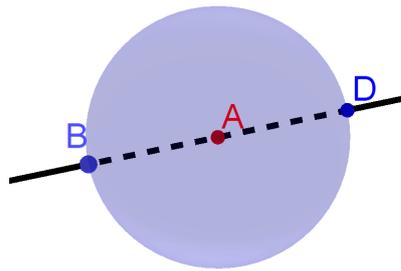
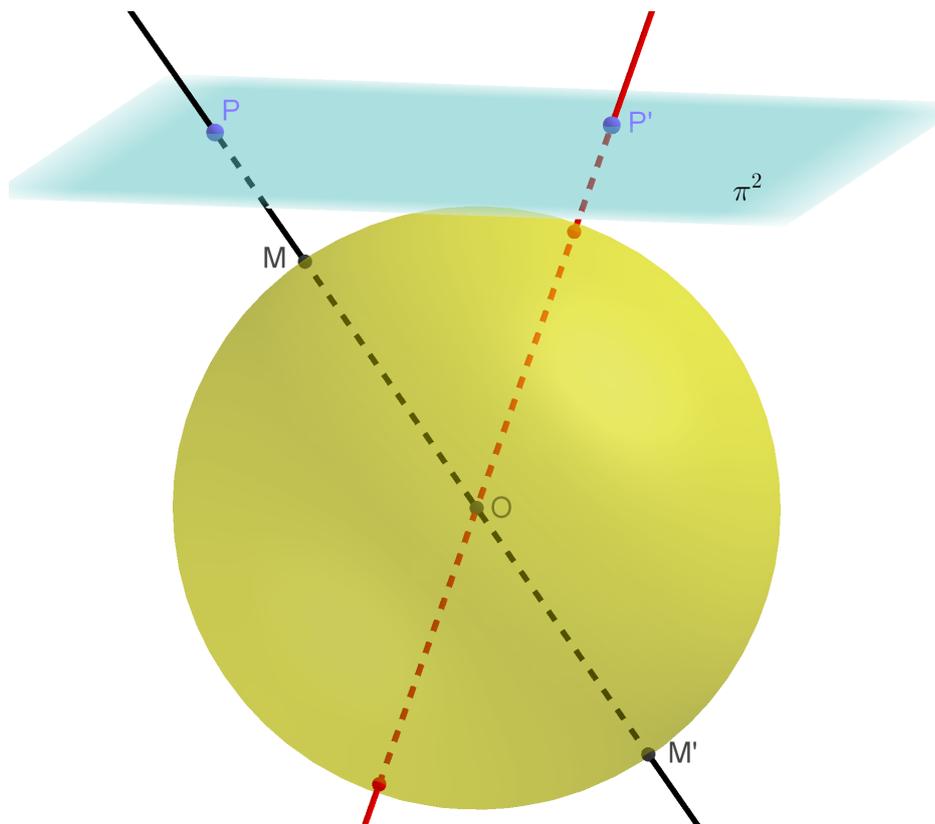


Figura 43 – Pontos Antipodais

Fonte: Construção do autor

Figura 44 – Ponto em $\pi^2 \rightarrow$ par de pontos antipodais em S^2 .

Fonte: Construção do autor

pontos diametralmente opostos, ou seja, um par de pontos antipodais que chamaremos de M e M' . Para verificar que esta relação é injetiva, considere o ponto $P' \in \pi^2$ tal que $P' \neq P$ e a reta que passa por P' e O . Como P e P' pertencem a π^2 temos que a reta que passa por eles também pertence. Assim, a reta que passa por P' e O é diferente da reta que passa por P e O pois, se fossem a mesma o ponto O também estaria no plano π^2 o que seria absurdo. Dessa forma a reta que passa por P' e O intersecta a esfera em pontos diferentes de M e M' . \square

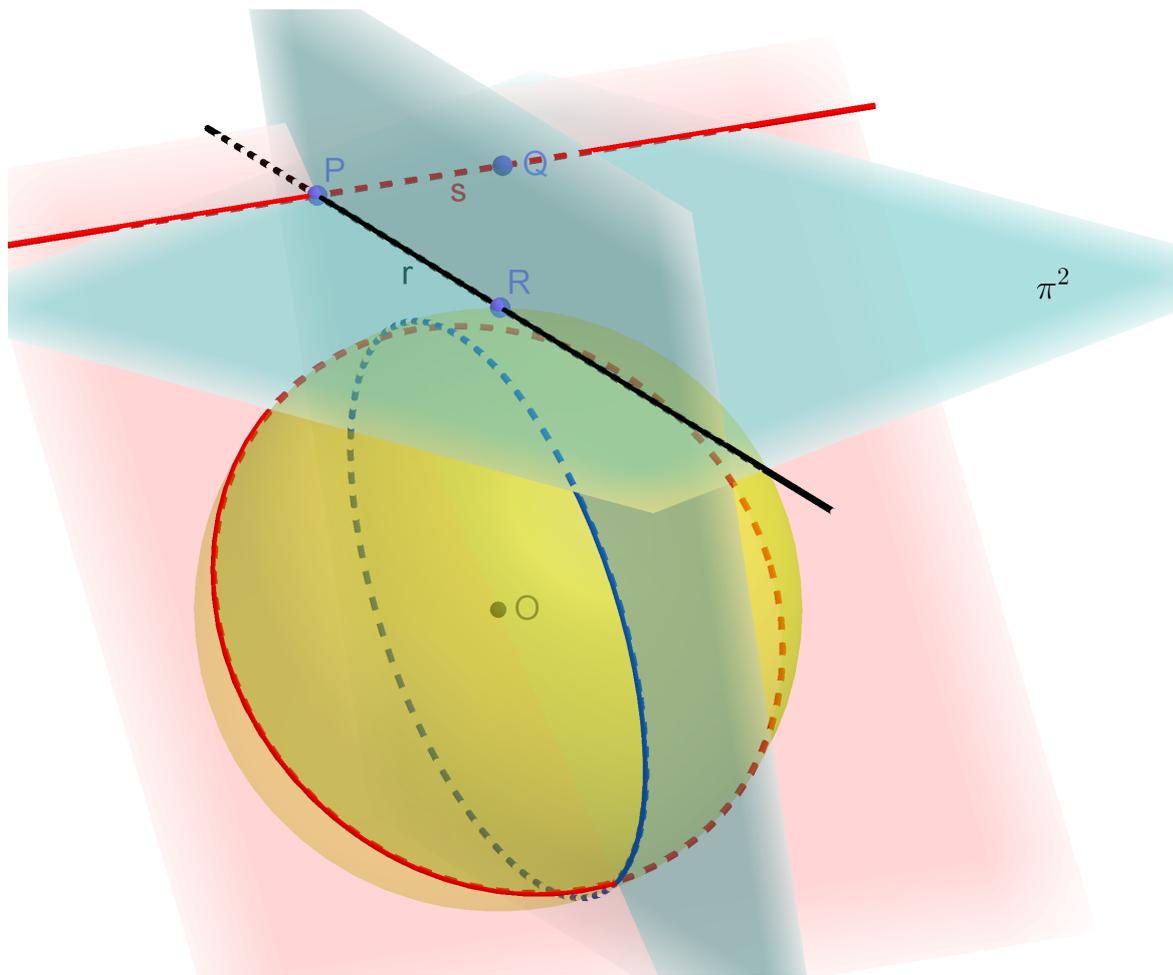


Figura 45 – Retas em $\pi^2 \rightarrow$ grandes círculos em S^2 .

Fonte: Construção do autor

Lema 4.2. *Seja π^2 um plano em \mathbb{R}^3 que não intersecta a esfera unitária S^2 . À cada reta r de π^2 podemos associar um grande círculo de S^2 , e ainda, essa relação é injetiva.*

Demonstração. Seja $r \in \pi^2$ uma reta. Veja Figura 45. Sabemos da Geometria, que se o plano secante à esfera passa pelo seu centro, temos um círculo de raio máximo como seção. Então, se considerarmos o plano que contém a reta r e o centro da esfera S^2 a intersecção deste plano com S^2 é um grande círculo. Considerando a reta $s \in \pi^2$, distinta de r , teremos que o plano que contém s e o centro de S^2 é diferente do plano que contém r e o centro de S^2 , logo, suas intersecções com S^2 são grandes círculos distintos, isso mostra que essa relação é injetiva. \square

Definição 4.4 (Grande círculo ortogonal). *Um círculo na esfera é denominado grande círculo se ele possuir o mesmo centro que a esfera. Diremos que um grande círculo é ortogonal a um par de pontos antipodais se estiver no plano ortogonal ao segmento de reta que contém este par de pontos.*

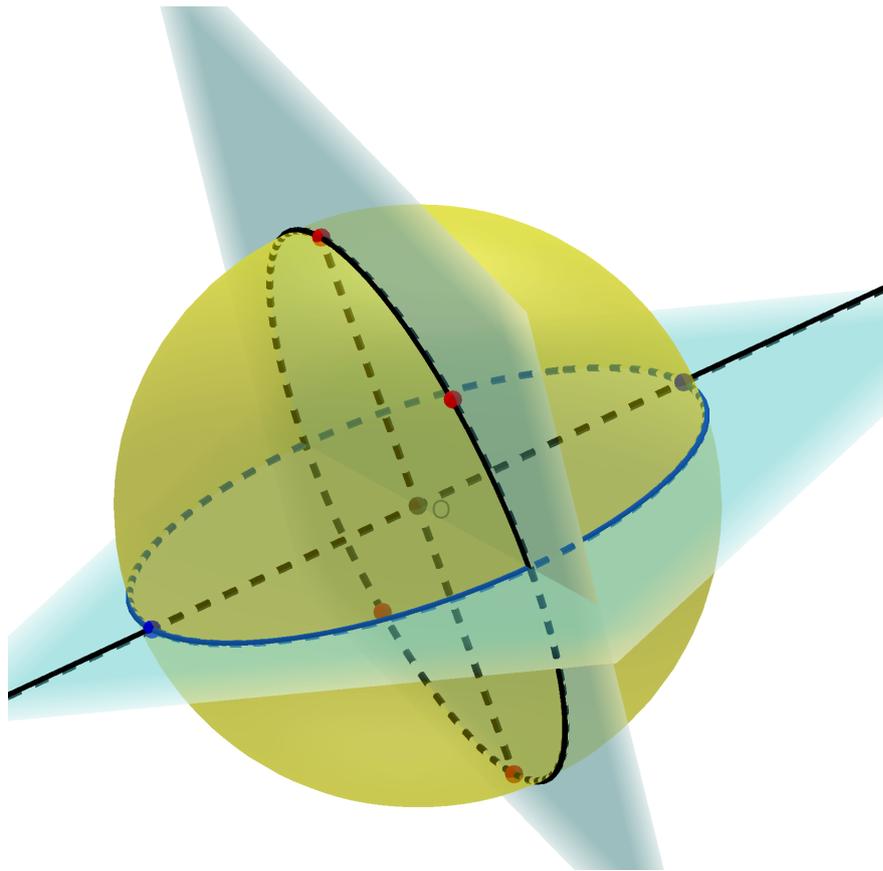


Figura 46 – Pares de pontos antipodais \leftrightarrow grandes círculos

Fonte: Construção do autor

Proposição 4.1. *A relação entre pontos antipodais e seus grandes círculos ortogonais correspondentes é bijetiva.*

Demonstração. Considere na esfera, conforme representado na Figura 46, dois grandes círculos distintos e a reta normal ao plano que contém cada um deles, passando pelo centro. Essas retas são distintas, pois se fossem a mesma os grandes círculos não seriam distintos. Logo, suas intersecções com a esfera são pares de pontos antipodais também distintos, o que prova a injetividade desta relação. Considere agora um par de pontos antipodais (A, A') qualquer. Existe um plano ortogonal ao segmento AA' que contém o centro da esfera. A intersecção deste plano com a esfera é um grande círculo. Isso prova que todo par de pontos antipodais possui um grande círculo ortogonal correspondente. Logo esta relação é sobrejetiva. \square

Lema 4.3. *K pares de pontos antipodais estão em um mesmo grande círculo se, e somente se, K grandes círculos ortogonais se interceptam em um mesmo par de pontos antipodais.*

Demonstração. \Rightarrow Considere K pares de pontos antipodais pertencentes à um mesmo grande círculo e a reta m que passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano que contém esse

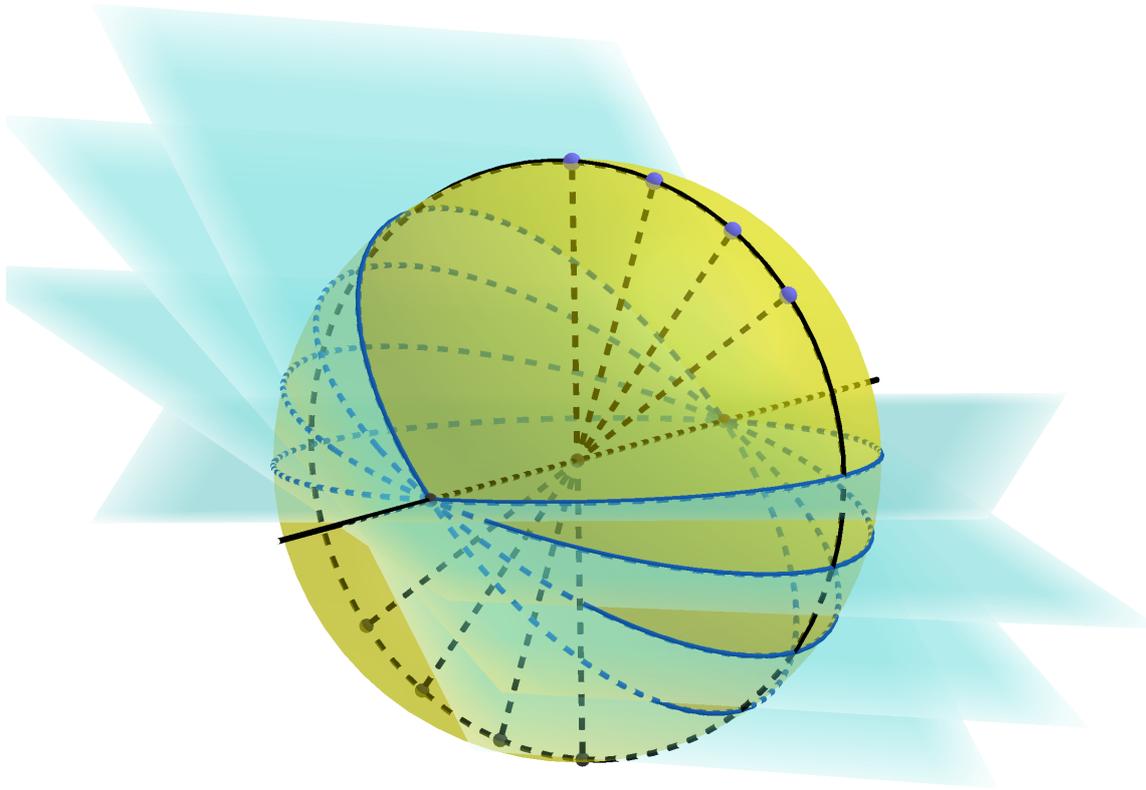


Figura 47 – K pares de pontos em um grande círculo $\rightarrow K$ grandes círculos em um par de pontos antipodais

Fonte: Construção do autor

grande círculo. Veja ilustração na Figura 47. Dentre os K pares de pontos antipodais, considere os pares (P, P') , (Q, Q') , (R, R') ... com seus respectivos segmentos. Pela reta m passam infinitos planos, em especial, um é ortogonal ao segmento PP' , outro é ortogonal ao segmento QQ' , outro é ortogonal ao segmento RR' e assim sucessivamente. As intersecções desses planos com a esfera são grandes círculos que passam pelo par de pontos antipodais (M, M') que são as intersecções da reta m com a esfera.

\Leftarrow Considere, conforme ilustrado na Figura 48, K grandes círculos passando pelo par de pontos antipodais (MM') . Trace, pelo centro da esfera, a reta r perpendicular ao plano que contém um dos grandes círculos e repita o processo para outro grande círculo, determinando assim a reta s . Trace o plano β que contém essas duas retas. Por construção, β é ortogonal ao segmento MM' e contém o centro da esfera. Então, β contém todas as retas perpendiculares ao segmento MM' que passam pelo centro da esfera. Assim, se considerarmos o plano que contém um grande círculo qualquer, dentre os $K - 2$ grandes círculos restantes, e uma reta perpendicular a ele passando pelo centro da esfera, teremos que essa reta será perpendicular ao segmento MM'

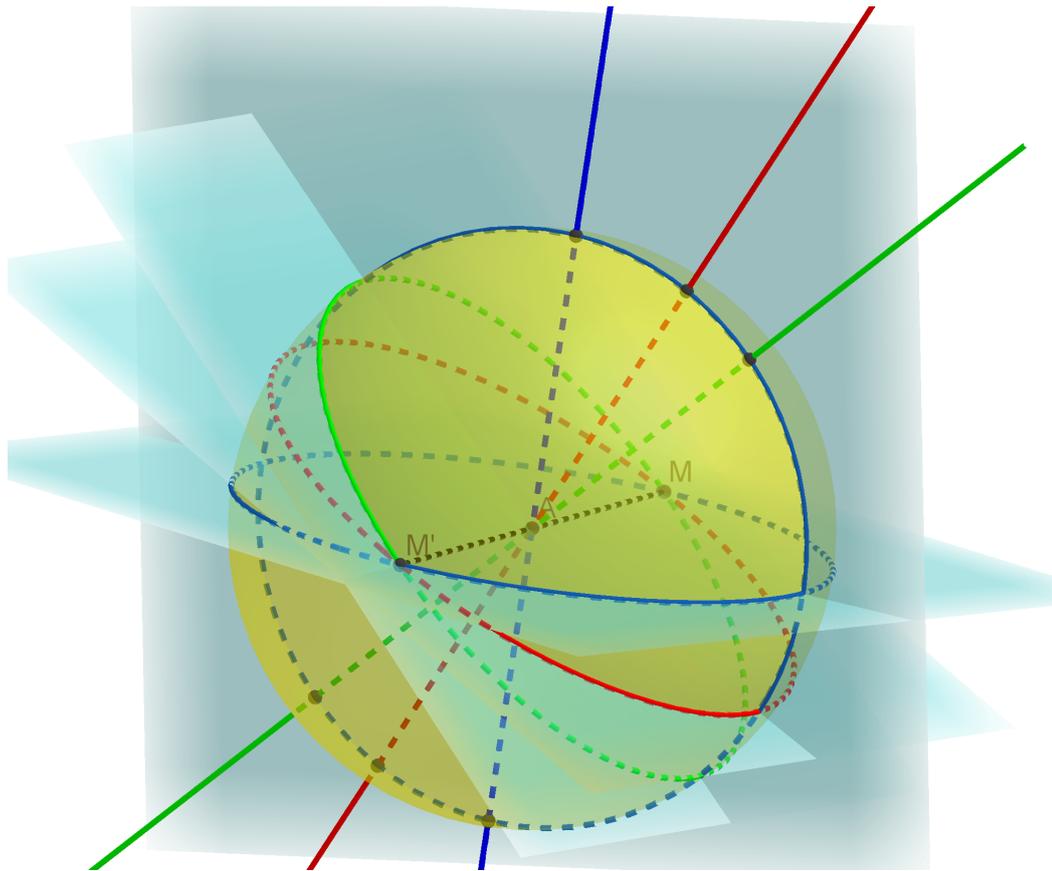


Figura 48 – K grandes círculos passando por um par de pontos antipodais $\rightarrow K$ pares de pontos antipodais em um grande círculo.

Fonte: Construção do autor

e estará contida em β . Dessa forma, teremos K retas contidas em β intersectando a esfera, ou seja, gerando K pares de pontos antipodais contidos no grande círculo que é a intersecção do plano β com a esfera.

□

Teorema 4.1 (Sylvester-Gallai). *Dado qualquer conjunto de $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares, sempre existe uma reta que contém exatamente dois desses pontos.*

Demonstração. Considere, em um plano π^2 que não intersecta a esfera unitária S^2 , um conjunto de $n \geq 3$ pontos e as retas que passam por tais pontos. Veja ilustração na Figura 49.

Sabemos, pelos lemas 4.1 e 4.2, que um ponto e uma reta em π^2 correspondem, respectivamente, à um par de pontos antipodais e à um grande círculo em S^2 . Então, conforme pode ser visto nas Figuras 50 e 51, podemos "transferir" o problema do plano para a esfera S^2 e mostrar que existe um grande círculo contendo exatamente dois pares de pontos antipodais, o que equivale ao propósito inicial do teorema.

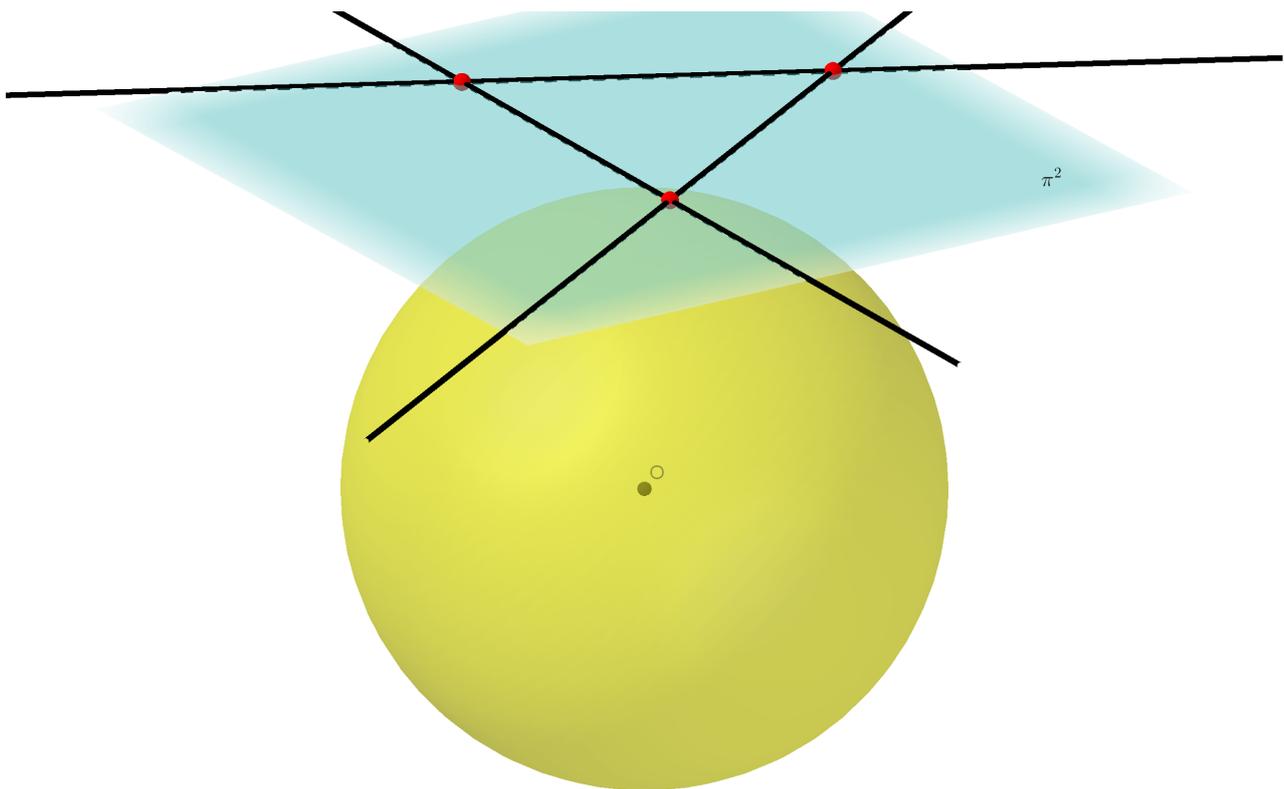


Figura 49 – Pontos e retas no plano

Fonte: Construção do autor

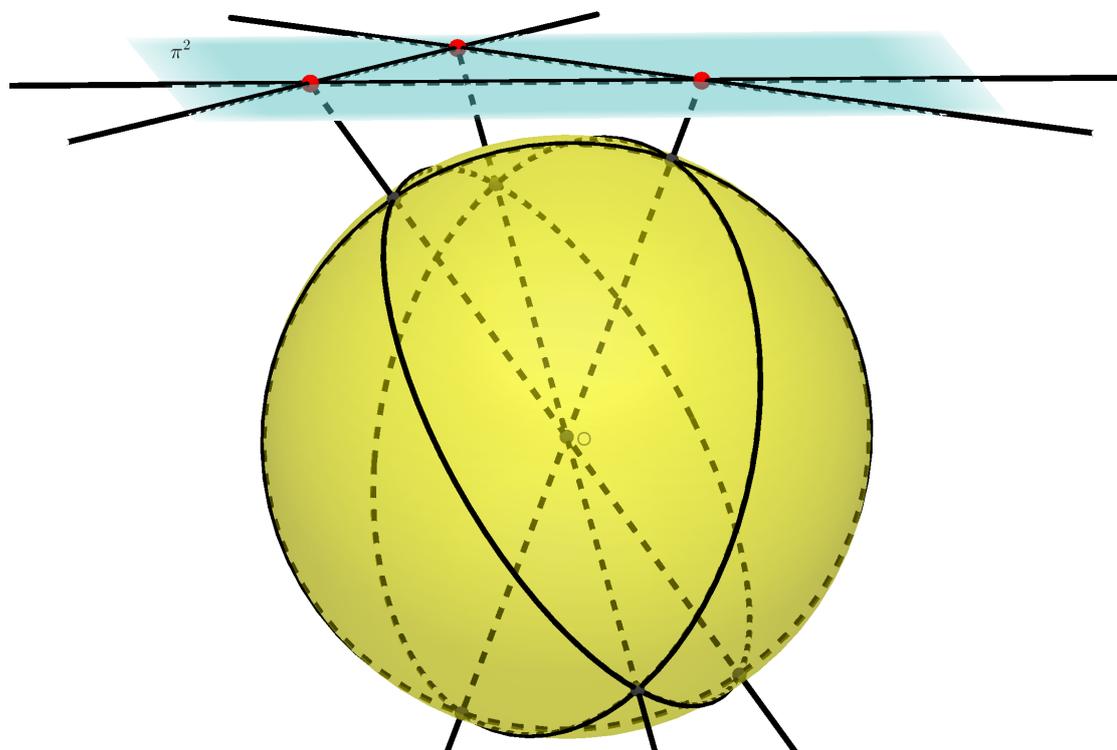
Dessa forma, o teorema de Sylvester-Gallai pode ser reenunciado:

Dado qualquer conjunto de $n \geq 3$ pares de pontos antipodais na esfera, nem todos em um mesmo grande círculo, sempre existirá um grande círculo que conterá exatamente dois desses pares de pontos antipodais.

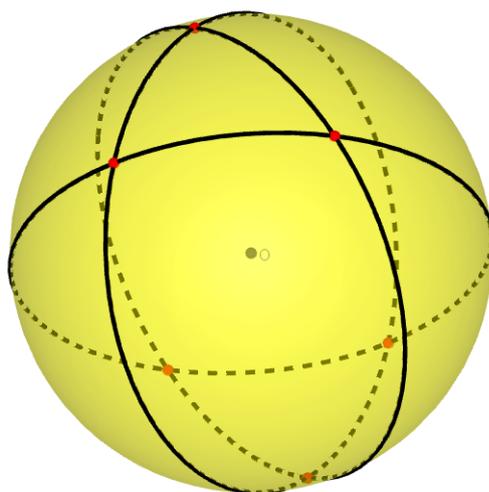
Pela proposição 4.1, há uma relação biunívoca entre grandes círculos ortogonais e pares de pontos antipodais. Então, trocaremos pontos antipodais por grandes círculos e grandes círculos por pontos antipodais. Para tal, considere o grande círculo ortogonal a cada segmento que contém dois pontos antipodais e, para cada grande círculo, trace pelo centro uma reta perpendicular ao plano que o contém, gerando assim, um par de pontos antipodais. O resultado dessas trocas se encontra ilustrado na Figura 52.

Pelo lema 4.3, K pares de pontos antipodais estão em um mesmo grande círculo se, e somente se, K grandes círculos ortogonais se intersectam em um único par de pontos antipodais. Dessa forma, mostrar que existe um par de pontos antipodais que pertence à exatamente dois grandes círculos equivale a mostrar que existe um grande círculo que passa por exatamente dois pares de pontos antipodais. Isso nos dá uma terceira maneira de enunciar o teorema:

Dado qualquer conjunto de $n \geq 3$ grandes círculos em S^2 , nem todos passando por um

Figura 50 – De π^2 para S^2

Fonte: Construção do autor

Figura 51 – Pontos antipodais e grandes círculos em S^2

Fonte: Construção do autor

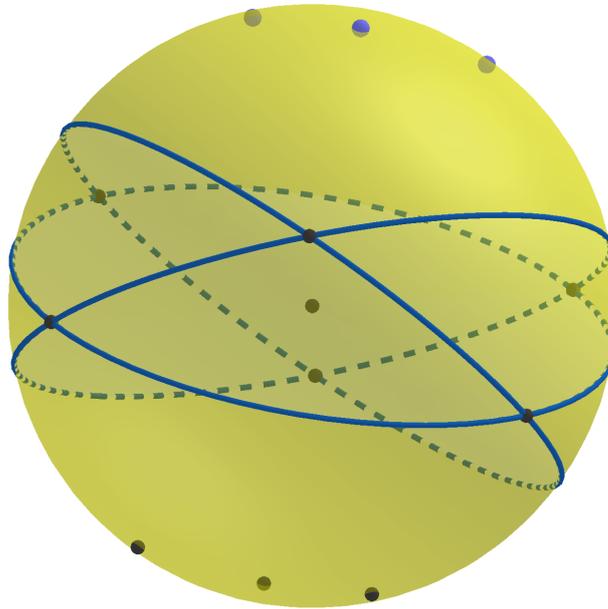


Figura 52 – Grafo planar simples em S^2
 Fonte: Construção do autor

mesmo par de pontos antipodais, sempre existirá um par de pontos que pertencerá a exatamente dois desses grandes círculos.

Observe que ao dualizarmos, ou seja, ao considerarmos grandes círculos ortogonais a segmentos determinados por pares de pontos antipodais, desenhamos um grafo na esfera, cujas arestas são pedaços desses grandes círculos e cujos vértices são as intersecções desses grandes círculos.

Analisando este grafo concluímos que:

- O grafo é conexo, pois quaisquer dois grandes círculos se cruzam, isso se deve ao fato de que todos têm o mesmo raio que a esfera.
- O grafo é simples já que não teremos laços e mais de uma aresta ligando dois vértices. Laços só seriam possíveis se considerássemos círculos de raios menores e, mais de uma aresta ligando dois vértices só aconteceria se considerássemos apenas dois grandes círculos ou se todos passassem pelo mesmo ponto, o que contrariaria o enunciado do teorema.
- O grafo é planar por construção, pois foi desenhado na superfície esférica e não há arestas

se cruzando fora dos vértices.

- O grafo possui mais de dois vértices. Só teria apenas dois vértices se considerássemos $n = 2$, o que acarretaria em apenas dois grandes círculos, ou se todos os grandes círculos passassem por um mesmo ponto.

Ora, o grafo em questão é planar, simples e possui mais que dois vértices, então, pela proposição 3.3 (ii), esse grafo possui um vértice de grau menor que ou igual a 5. Note que o grau em cada vértice é par e no mínimo 4, logo, existe um vértice de grau 4, ou seja, existe um vértice que pertence exatamente à dois grandes círculos.

□

Teorema 4.2 (Linhas monocromáticas). *Dada qualquer configuração de pontos pretos e pontos brancos no plano, nem todos colineares, sempre há uma linha monocromática ou seja existe uma reta cujos pontos possuem a mesma cor.*

Demonstração. Como fizemos no teorema de Sylvester-Gallai, transferiremos o problema para a esfera unitária S^2 . A Figura 53 ilustra a situação. Então, pelo lema 4.1, um ponto branco no plano corresponde à um par de pontos antipodais, brancos, em S^2 . De maneira análoga, um ponto preto no plano também corresponde à um par de pontos antipodais, pretos, em S^2 . Ainda pelo lema 4.1, uma reta no plano corresponde à um grande círculo em S^2 .

Dessa forma, dizer que existe uma reta que contém apenas pontos brancos ou apenas pontos pretos equivale a que dizer que existe um grande círculo que passa apenas por pontos brancos ou por apenas pontos pretos.

Sabemos, pela proposição 4.1, que há uma bijeção entre pares de pontos antipodais e grandes círculos ortogonais e, assim, conforme ilustrado na Figura 54, consideraremos grandes círculos brancos ortogonais aos segmentos que ligam pontos antipodais brancos, grandes círculos pretos ortogonais aos segmentos que ligam pontos antipodais pretos e os pontos antipodais correspondentes aos grandes círculos de S^2 .

Consequentemente, o teorema pode ser reescrito, dado que, provar que existe um par de pontos antipodais que está apenas em grandes círculos pretos ou apenas em grandes círculos brancos equivale a provar que existe um grande círculo que contém apenas pontos pretos ou apenas pontos brancos.

Dado um conjunto finito de grandes círculos pretos e grandes círculos brancos, nem todos passando por um mesmo ponto, existe sempre um ponto que está apenas em grandes círculos pretos ou apenas em grandes círculos brancos.

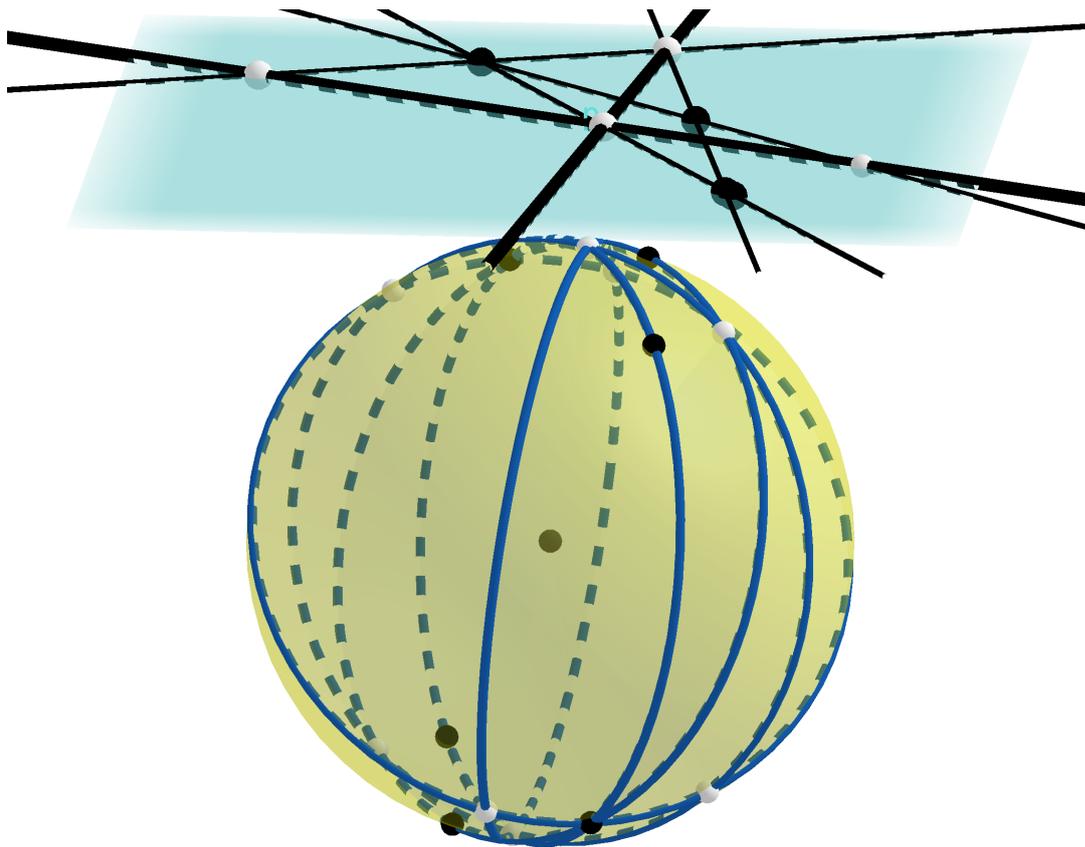


Figura 53 – Do plano para a esfera unitária S^2

Fonte: Construção do autor

Note que, assim como no teorema de Sylvester-Gallai, após dualizarmos, desenhamos em S^2 , um grafo planar simples com mais de dois vértices e que as arestas deste grafo são de duas cores. Observe que se círculos de cores distintas se cruzam em um vértice há, pelos menos, quatro mudanças de cor ao redor desse vértice. Porém, pela proposição 3.3(iii), o grafo desenhado em S^2 possui um vértice com no máximo duas mudanças de cor ao seu redor. Logo, por esse vértice passam apenas grandes círculos pretos ou apenas grandes círculos brancos.

□

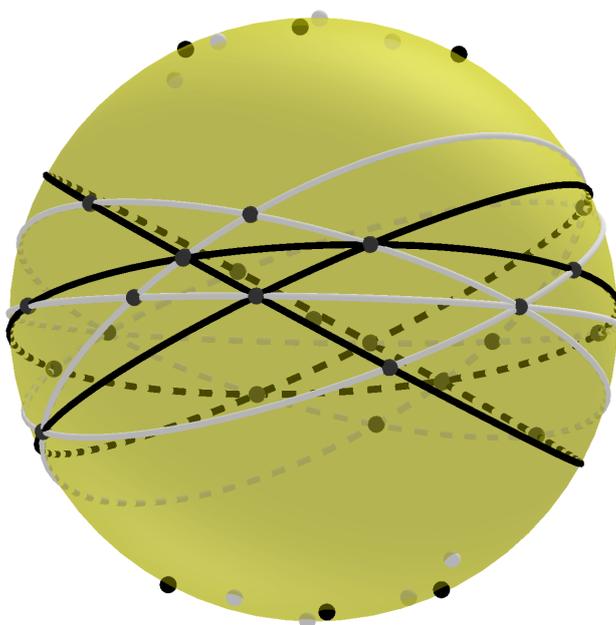


Figura 54 – Grandes círculos pretos e grandes círculos brancos na esfera unitária S^2
Fonte: Construção do autor

Teorema de Pick

O teorema de Pick é uma fórmula interessante para calcular a área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede de pontos. Este resultado foi descoberto pelo matemático tcheco G. Pick em 1899 [6] e será aqui demonstrado com base nos estudos feitos sobre a teoria de grafos.

Definição 5.1 (Rede no plano cartesiano). *Uma rede no plano cartesiano é o conjunto de todos os pontos de coordenadas (m, n) com m e $n \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras podemos dizer que uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos pertencentes à retas horizontais e verticais, tal que, a distancia de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou vertical seja igual a 1. A Figura 55 ilustra uma rede de pontos no plano cartesiano.*

Definição 5.2 (Polígono). *Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, em que três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1 , assim como A_n, A_1 e A_2 , chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.*

Definição 5.3 (Polígono Simples). *Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia.*

Definição 5.4 (Diagonal de um polígono). *A diagonal de um polígono é um segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos desse polígono.*

Definição 5.5 (Triangulação de polígonos). *A triangulação de um polígono é a sua decomposição em triângulos que se intersectam apenas nos vértices ou nas diagonais.*

Observação 5.1. *Para obter uma triangulação de um polígono qualquer basta traçar o maior número possível de diagonais de forma que elas não se cruzem. Veja a Figura 56.*

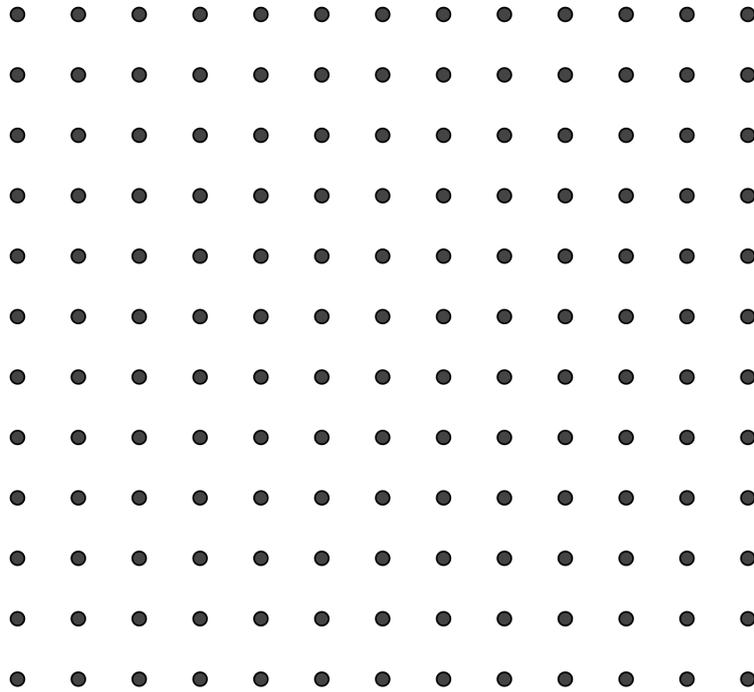


Figura 55 – Rede no plano
Fonte: Construção do autor

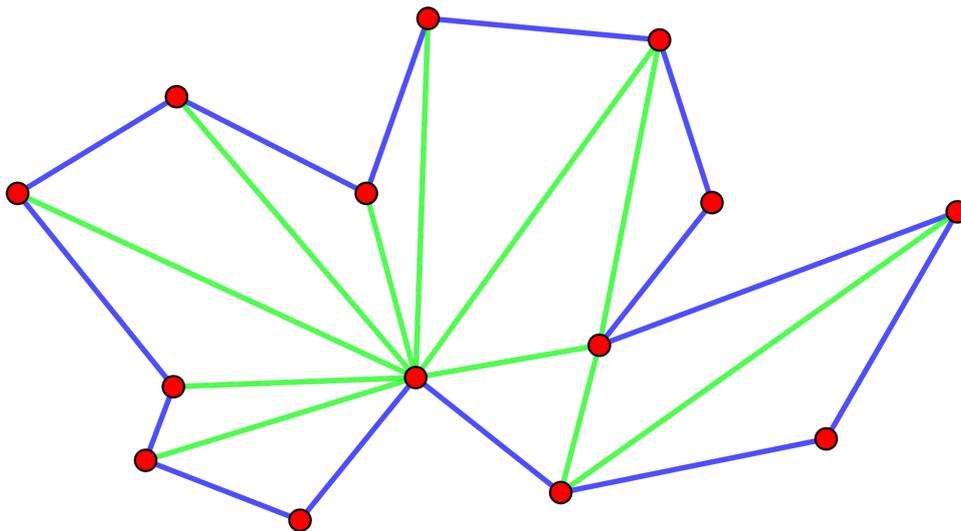


Figura 56 – Triangulação de um polígono
Fonte: Construção do autor

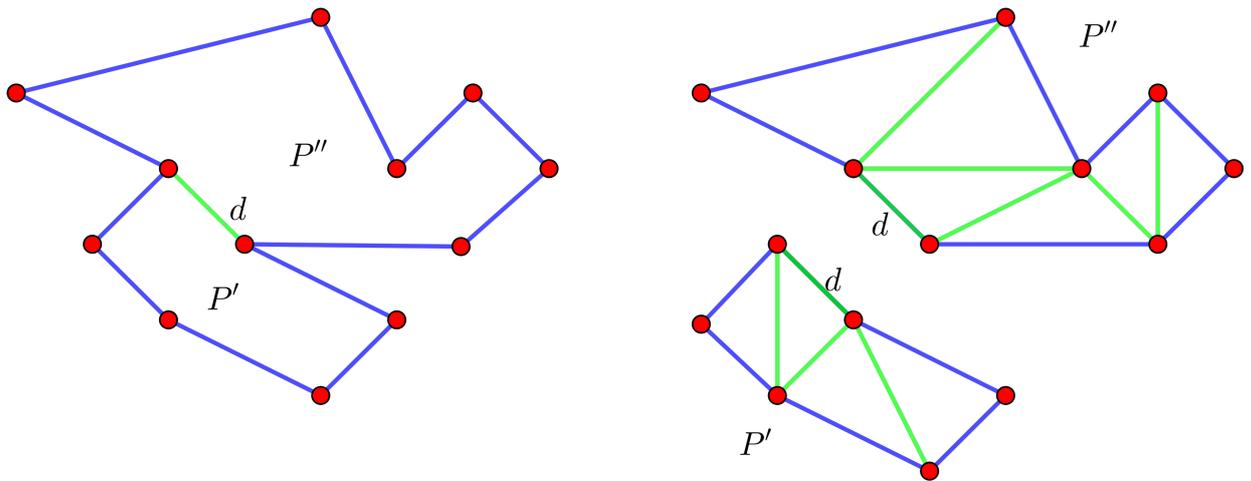


Figura 57 – Triangulação de P

Fonte: Construção do autor

Lema 5.1. *Todo polígono admite pelo menos uma triangulação.*

Demonstração. Seja P um polígono simples de n vértices. Provaremos por indução sobre n . Se $n = 3$ o polígono já é um triângulo.

Considere o teorema verdadeiro para todo polígono de até $n - 1$ vértices.

Para qualquer polígono com $n \geq 4$ vértices, trace, conforme ilustrado na Figura 57, uma diagonal d qualquer de forma que d divida P em dois polígonos denotados por P' e P'' sendo d , aresta de ambos.

Note que tanto P' quanto P'' possuem menos que n vértices e, portanto, por hipótese, são trianguláveis. Logo, combinando as triangulações e d obtemos a triangulação de P . \square

Definição 5.6 (Triângulos fundamentais). *Um triângulo será dito fundamental quando tiver os três vértices e nenhum outro ponto (do interior ou dos lados) sobre a rede de pontos.*

Teorema 5.1. *Todo polígono cujos vértices pertencem à uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração. Considere o polígono Q cujos vértices pertencem à rede de pontos. Pelo lema 5.1 Q pode ser triangulado. Assim, precisamos mostrar que cada triângulo contido em Q pode ser decomposto em triângulos fundamentais. Considere o triângulo ABC . Se existir algum ponto P da rede em seu interior, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A , B e C e assim o decomparamos em três triângulos, cada um contendo um número menor de pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os seus lados, escolhamos um desses pontos e o

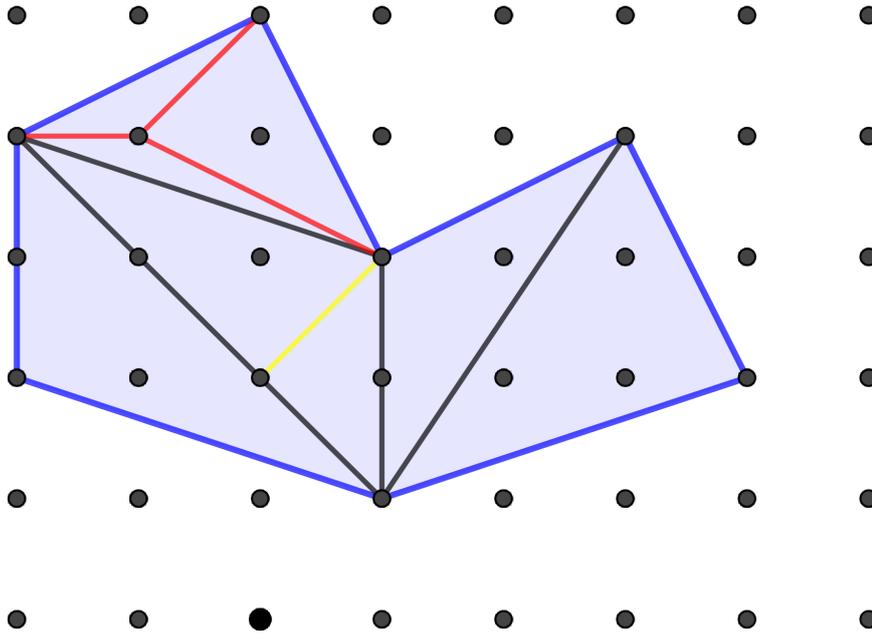


Figura 58 – Processo de decomposição em triângulos fundamentais

Fonte: Construção do autor

ligamos ao vértice oposto ao lado que o contém e, assim decomponemos ABC em dois triângulos, cada um contendo um número menor de pontos da rede. A Figura 58 ilustra esta construção. Repetindo esse processo um número finito de vezes chegaremos à uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais e, fazendo o mesmo processo em todos os triângulos que compõem o polígono Q chegaremos à uma decomposição de Q em triângulos fundamentais. \square

Definição 5.7 (Paralelogramo fundamental). *Um paralelogramo será dito fundamental quando tiver seus vértices, e nenhum outro ponto (do seu interior ou dos seus lados), sobre a rede de pontos.*

Note que traçando uma das diagonais de um paralelogramo fundamental obtemos dois triângulos fundamentais. Analogamente, partindo de um triângulo fundamental, podemos obter um paralelogramo. O lema a seguir mostrará que tal paralelogramo é fundamental.

Lema 5.2. *Se ABC é um triângulo fundamental, então, o paralelogramo $ABCD$ obtido traçando pelo ponto C uma paralela ao lado AB e pelo ponto B uma paralela ao lado AC as quais se interceptam no ponto D , é fundamental.*

Demonstração. Considere um sistema de coordenadas cartesianas no plano no qual os pontos da rede tenham coordenadas inteiras. Sejam $A(0,0)$, $B(m,n)$ e $C(s,t)$ as coordenadas dos

vértices do triângulo ABC . Somando os vetores \vec{AB} e \vec{AC} concluímos que o ponto D possui coordenadas $(m + s, n + t)$.

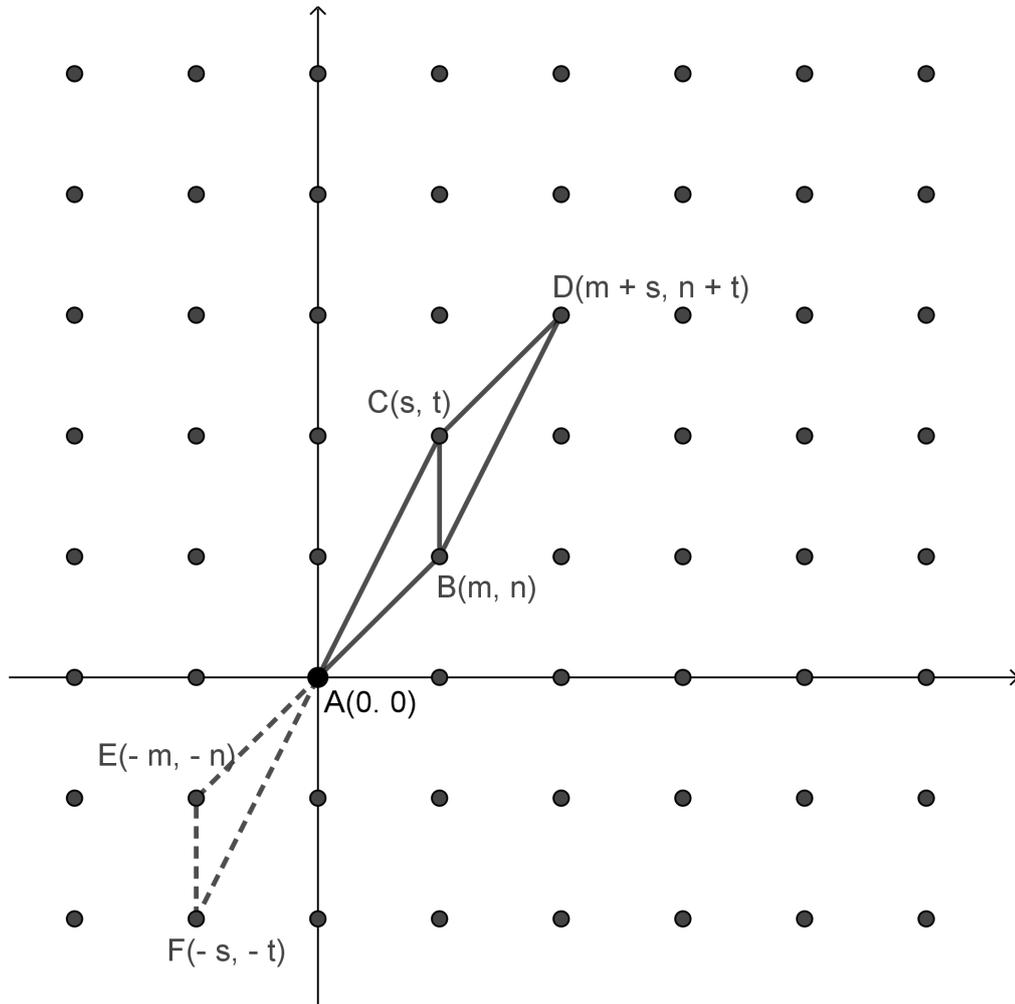


Figura 59 – Paralelogramo fundamental

Fonte: Construção do autor

Considere agora o triângulo AEF obtido trocando os sinais das coordenadas dos vértices do triângulo ABC . Assim, os pontos $A(0, 0)$, $E(-m, -n)$ e $F(-s, -t)$ são os vértices do triângulo AEF que é fundamental uma vez que não contém outro ponto da rede..

Analisemos agora os triângulos obtidos somando-se $m + s$ à abscissa e $n + t$ à ordenada de um ponto arbitrário $P(x, y)$ do triângulo AEF , ou seja, os vértices desses triângulos são da forma $P'(x + m + s, y + n + t)$. Assim, P' possui coordenadas inteiras se, e somente se, P também possui pois $m + s$ e $n + t$ são inteiros. Então, o triângulo BCD pertence à esse conjunto de triângulos pois os vértices do triângulo AEF possuem coordenadas inteiras. De fato, somando $m + s$ à abscissa e $n + t$ à ordenada do ponto $E(-m, -n)$ obtemos o ponto $C(s, t)$, de forma análoga, partindo de $F(-s, -t)$ chegaremos em $B(m, n)$ e partindo de $A(0, 0)$ chegaremos em

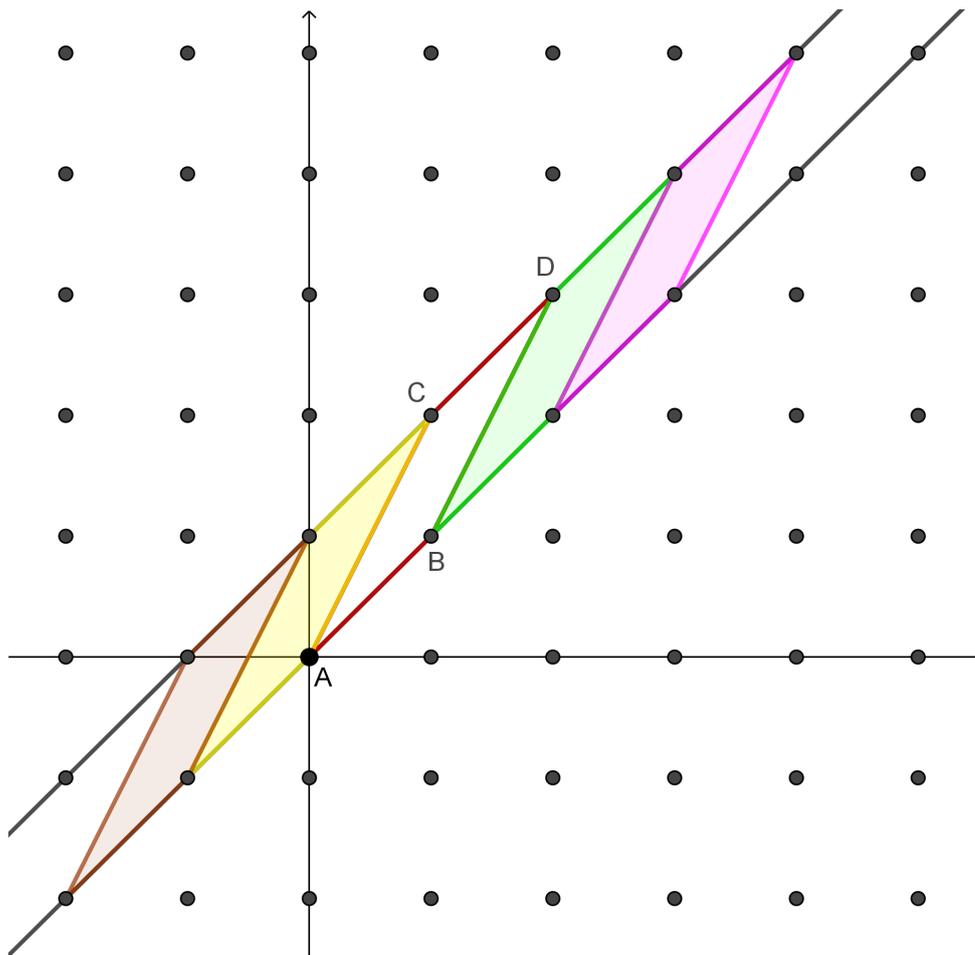


Figura 60 – Paralelogramos fundamentais entre duas retas paralelas

Fonte: Construção do autor

$D(m + s, n + t)$. O triângulo AEF é fundamental, então não existem pontos de coordenadas inteiras no seu interior e nem em seus lados, então no triângulo BCD também não existem tais pontos, logo BCD também é fundamental.

Assim, os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo $ABCD$ são os vértices, logo $ABCD$ é fundamental. \square

Sendo o paralelogramo $ABCD$ fundamental podemos notar que não há pontos da rede na região do plano delimitada pelas retas suportes de AB e CD . Assim, somando a mesma quantidade à abscissa e à ordenada dos vértices de $ABCD$ podemos decompor esta região em paralelogramos fundamentais. Veja a Figura 60.

Podemos generalizar e criar uma grade de paralelogramos cobrindo todo o plano, para tal, consideraremos o paralelogramo fundamental $ABCD$ e traçaremos retas paralelas aos lados AB e CD , traçaremos também, retas paralelas aos outros dois lados do paralelogramo. O resultado da construção destas retas é a decomposição do plano em paralelogramos fundamentais pois cada

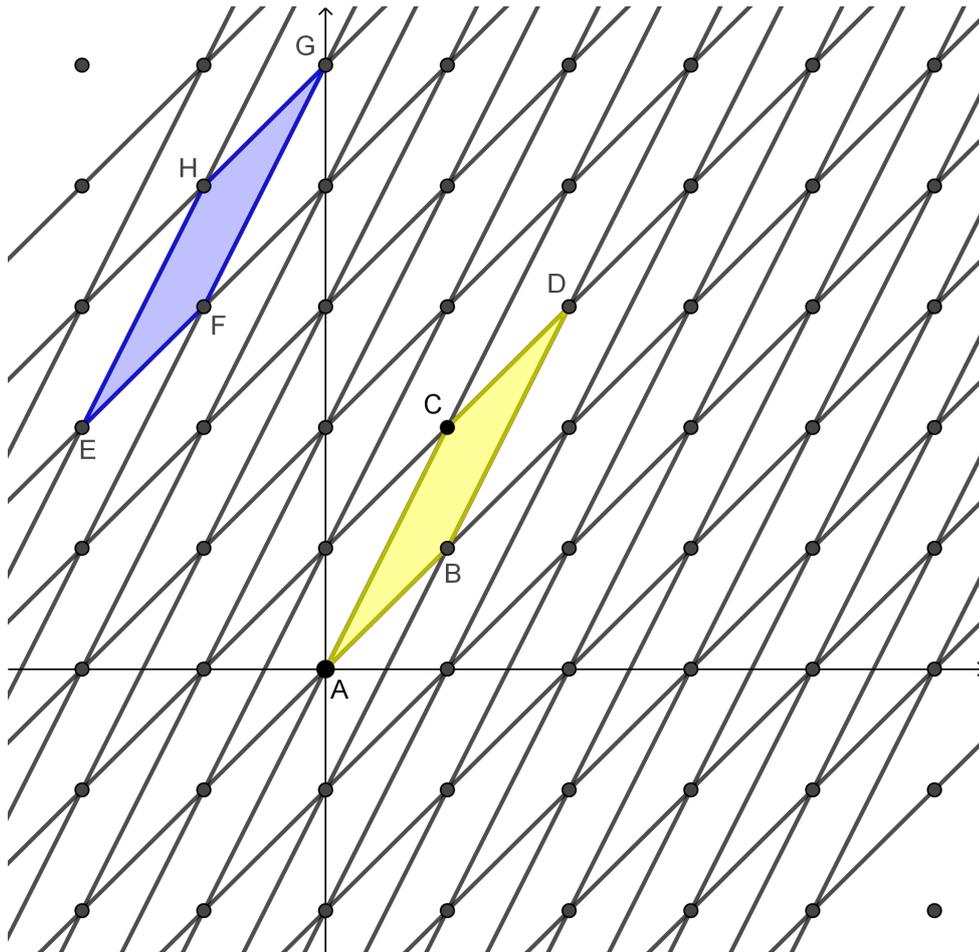


Figura 61 – Paralelogramo $EFGH$ obtido do paralelogramo $ABCD$

Fonte: Construção do autor

um deles resulta da soma de inteiros às coordenadas dos vértices de $ABCD$. Então, podemos dizer que se $ABCD$ é um paralelogramo dessa grade, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que os vértices do paralelogramo $A'B'C'D'$, que também está contido na grade, são todos da forma $(x + a, y + b)$ sendo (x, y) um vértice de $ABCD$.

A figura 61 mostra o caso em que o paralelogramo $EFGH$ foi obtido somando -2 à abscissa e 2 à ordenada dos vértices do paralelogramo $ABCD$.

Lema 5.3. A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.

Demonstração. Considerando o plano cartesiano de forma que todos os pontos da rede tenham coordenadas inteiras, tomemos o triângulo fundamental cujos vértices são: $A = (0, 0)$, $B = (a, b)$ e $C = (c, d)$. Sabemos, pelo lema 5.2, que o paralelogramo $ABCD$, onde D tem coordenadas $(a + c, b + d)$, é fundamental. Notemos que o lado BC divide o paralelogramo $ABCD$ em dois triângulos congruentes. Dessa forma, mostrar que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a 1

equivale à mostrar que a área do triângulo fundamental ABC é igual a $\frac{1}{2}$.

Definimos o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$. Então, T transforma qualquer ponto do \mathbb{R}^2 em outro ponto do \mathbb{R}^2 , em particular, T transforma todo ponto de coordenadas inteiras em outro ponto também de coordenadas inteiras, pois, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Portanto, T está bem definido para \mathbb{Z}^2 , ou seja, o operador $T : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ transforma qualquer ponto do \mathbb{Z}^2 em outro ponto também do \mathbb{Z}^2 , e assim, para todo ponto $P = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ existe o ponto $P' \in \mathbb{Z}^2$ que é a imagem $T(m, n) = (am + cn, bm + dn)$ e é vértice de algum paralelogramo da grade que decompõe o plano. Como \vec{AB} e \vec{AC} são linearmente independentes temos que $T : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ é injetivo.

O operador $T : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ é também sobrejetivo, pois, dado qualquer ponto de coordenadas $p, q \in \mathbb{Z}^2$ temos que este ponto é vértice de algum paralelogramo da grade, então, existe algum ponto de coordenadas $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $T(m, n) = (p, q)$, ou seja, $(p, q) = (am + cn, bm + dn)$.

Como $T : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ é bijetivo podemos considerar seu inverso $T^{-1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ e, portanto, $\det(T) \cdot \det(T^{-1}) = \det(T \cdot T^{-1}) = \det(I) = 1$. Desta igualdade decorre que $\det(T^{-1})$ é o inverso de $\det(T)$, como ambos são inteiros temos que $\det(T) = \pm 1$. Como a área do paralelogramo $ABCD$ é o valor absoluto do $\det(T)$ concluímos que sua área é igual a 1 e, portanto, a área do triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$. \square

Teorema 5.2 (Pick). *Dado um polígono P construído sobre a rede no plano, cujos vértices são pontos dessa rede, então, sua área é dada por*

$$\text{Área} = \frac{B}{2} + I - 1$$

em que B é a quantidade de pontos da borda de P e I é a quantidade de pontos internos.

Demonstração. Considere o polígono P cujos vértices são pontos da rede no plano. Pelo teorema 5.1, P pode ser decomposto em triângulos fundamentais. Notemos que a triangulação do polígono P é um grafo Planar, pois, está desenhado no plano e pela definição de triangulação 5.5 suas arestas não se cruzam fora de seus vértices.

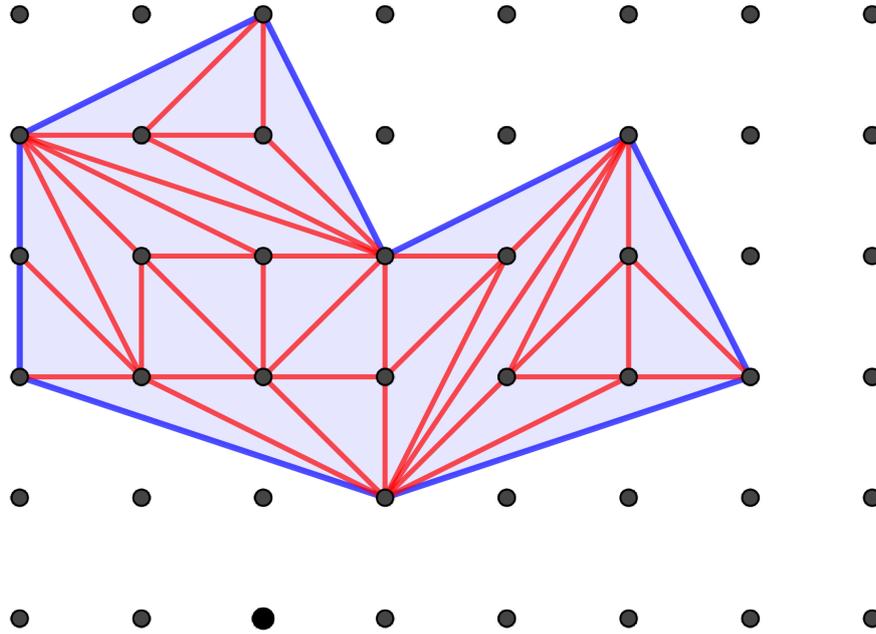


Figura 62 – Decomposição do polígono P

Fonte: Construção do autor

Contando os triângulos fundamentais contidos em P encontraremos uma unidade a menos que F , o número de faces do grafo planar, a face externa é a face excluída. Pelo lema 5.3, a área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$. então, a área do polígono P será dada por:

$$\text{área}(P) = \frac{1}{2} \cdot (F - 1) \quad (5.1)$$

Façamos agora a contagem das arestas deste grafo. Como cada triângulo possui três arestas e o total de triângulos é dado por $F - 1$ poderíamos concluir, de forma equivocada, que a quantidade de arestas seria $3 \cdot (F - 1)$. O equívoco ao contar as arestas dessa forma está no fato de que as arestas internas, que denotaremos por A_I , serão contadas duas vezes enquanto as arestas da borda, A_B , serão contadas uma única vez. Porém, deste fato decorre que:

$$3 \cdot (F - 1) = 2 \cdot A_I + A_B$$

$$3F - 3 = 2A_I + A_B$$

$$F + 2F - 3 + A_B = 2A_I + 2A_B$$

$$F = 2(A_I + A_B - F) - A_B + 3$$

$$F = 2(A - F) - A_B + 3$$

Utilizando a fórmula de Euler $A - F = V - 2$, tem-se

$$F = 2(A - F) - A_B + 3 = 2(V - 2) - A_B + 3$$

Sendo V a quantidade de vértices do grafo temos que $V = V_B + V_I$ onde, V_B são os vértices da borda e V_I são os vértices internos. Note que os números de arestas e vértices da borda são iguais, ou seja $A_B = V_B$. Então:

$$F = 2(V_I + V_B - 2) - V_B + 3 = 2V_I + V_B - 1$$

Substituindo F na equação 5.1, obtemos:

$$\text{área}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \cdot (F - 1) = \frac{1}{2} \cdot (2V_I + V_B - 1 - 1) = V_I + \frac{V_B}{2} - 1 = \frac{B}{2} + I - 1.$$

□

Considerações Finais

A fórmula de Euler relaciona o número de vértices, faces e arestas de um poliedro. Neste trabalho, nosso principal objetivo foi mostrar que essa fórmula pode ser utilizada para obter outros resultados.

No desenvolvimento do trabalho, procuramos seguir a linha de raciocínio apresentada no texto “Three applications of Euler’s formula” que se encontra em [3]. Este texto apresenta a aplicação da fórmula de Euler nas provas dos seguintes resultados: Teorema de Sylvester-Gallai, linhas monocromáticas e teorema de Pick. Porém, à medida que a pesquisa avançava outras aplicações interessantes foram surgindo e enriquecendo nosso trabalho.

O tema desenvolveu-se a partir da teoria de grafos, o que simplificou os cálculos e nos possibilitou demonstrar o teorema de Euler de uma forma consistente e diferente da maioria das demonstrações encontradas nas referências bibliográficas estudadas.

Esperamos que este trabalho sirva como fonte de pesquisa e que possa contribuir na formação de outros estudantes.

Referências

- [1] Domingos Moreira Cardoso. Teoria dos grafos e aplicações. 2011. Citado na página 42.
- [2] Adriana Priscila De Brito. Grafos, a fórmula de Euler de e os poliedros regulares. 2014. Citado na página 46.
- [3] Leonhard Euler. Three applications of Euler’s formula. *Proofs from the book*, page 89, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 81.
- [4] John A Fossa. Leonhard Euler. Citado na página 15.
- [5] Samuel Jurkiewicz. Grafos–Uma Introdução. *São Paulo: OBMEP*, 2009. Citado na página 21.
- [6] Elon Lages Lima. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias, 5ª edição. *Rio de Janeiro: SBM*, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 71.
- [7] Antonio Caminha Muniz Neto. Geometria. *Rio de Janeiro: SBM*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.
- [8] João Carlos V Sampaio. Quatro Cores e Matemática. *Salvador, II Bienal da SBM–UFBA*, disponível em www.bienasbm.ufba.br, 35, 2004. Citado na página 51.
- [9] Eduardo Wagner. $V - A + F = 2$ existe o Poliedro. *Revista do Professor de Matemática*, (47), 2001. Citado na página 45.