

2022

Mônica Alves de Carvalho

DEMAT/UFOP

**Universidade Federal de Ouro Preto**

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT

---

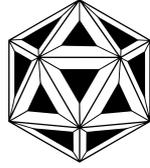
Dissertação

## Trajetórias periódicas em bilhares poligonais

*Mônica Alves de Carvalho*

Ouro Preto  
2022





DEPARTAMENTO DE  
**MATEMÁTICA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL  
EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL

Mônica Alves de Carvalho

# **Trajetórias Periódicas em Bilhares Poligonais**

Ouro Preto - MG, Brasil

Março 2022

Mônica Alves de Carvalho

## **Trajetórias Periódicas em Bilhares Poligonais**

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza

Ouro Preto - MG, Brasil

Março 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C331t Carvalho, Mônica Alves de.  
Trajetórias Periódicas em Bilhares Poligonais. [manuscrito] / Mônica  
Alves de Carvalho. - 2022.  
65 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.  
Coorientador: Prof. Dr. Gil Fidélis de Souza.  
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro  
Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática.

Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Trajetórias. 2. Triângulo. 3. Quadrilátero. I. Ferreira, Geraldo César  
Gonçalves. II. Souza, Gil Fidélis de. III. Universidade Federal de Ouro  
Preto. IV. Título.

CDU 510:374:004

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Mônica Alves de Carvalho**

### Trajetórias Periódicas em Bilhares Poligonais

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em 03 de maio de 2022

#### Membros da banca

Prof. Dr. Geraldo César G. Ferreira - Presidente Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto  
Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza - Universidade Federal de Ouro Preto  
Prof. Dr. Juliano Soares Amaral Dias - Universidade Federal de Ouro Preto  
Prof. Dr. José Eloy Ottoni - Universidade Federal de Viçosa  
Prof. Dr. Rafael da Costa Pereira - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. Geraldo César G. Ferreira, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 07/06/2022



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Cesar Goncalves Ferreira, VICE-COORDENADOR(A) LOCAL NA UFOP DO CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**, em 10/06/2022, às 13:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.ufop.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0340654** e o código CRC **7F078304**.

*“Pode se encontrar a felicidade mesmo nas horas mais sombrias, se a pessoa se lembrar de acender a luz.(Alvo Dumbledore)” J. K. Rowling*

---

# Agradecimentos

Agradeço ao meu companheiro de vida Jone que de forma especial, carinhosa e paciente me apoiou nos momentos de dificuldade. E a minha amada filha Júlia, que de forma iluminada entendeu que em alguns momentos não pude dar a atenção que ela merecia, mas que nunca faltou amor na nossa relação. Serei eternamente grata por me apoiarem e compreenderem a necessidade que eu tinha de dedicar tempo a este trabalho.

Agradeço aos meus pais que de forma até mesmo indireta me incentivaram a buscar realizar os meus sonhos.

Agradeço à todos os professores que me auxiliaram e dedicaram trazendo enriquecimento na minha carreira acadêmica, em especial, aos do PROFMAT da UFOP. Com destaque, ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo, que dedicou tempo, estudos e esforço para fazer esse trabalho da melhor forma possível.

Agradeço aos meus colegas de curso, e em particular, o Sérgio, por contribuir com as "caronas" e companhia nos dias de aulas. Contribuiu de forma muito enriquecedora a levarmos o curso com mais leveza e alegria.

Agradeço aos meus queridos alunos que me deram força e que me incentivaram para que eu prosseguisse com os estudos, colaborando para que não fosse um peso perante à todas as atribuições que tenho no dia a dia.

Agradeço à CAPES pelos recursos disponibilizados que me auxiliaram nessa caminhada.

# Resumo

Esse trabalho apresenta um estudo para a existência de trajetórias periódicas em bilhares poligonais convexos. Nos quadriláteros estudados utilizaremos como recurso o desdobramento do plano para simplificar as trajetórias. Em triângulos encontraremos trajetórias periódicas através da solução do problema de Fagnano. Iremos estender tal resultado para polígonos convexos de  $n$  lados.

Palavras chaves: Trajetórias; Trajetórias Periódicas; Bilhar Poligonal.

# Abstract

This work presents a study for the existence of periodic trajectories in convex polygon(s) billiards.

In the studied quadrilaterals, we are going to the unfolding of the plane as a resource to simplify the trajectories. In triangles we are going to periodic trajectories through the solution of the Fagnano problem. We are going to extend this result to convex polygons of  $n$  sides.

**keywords:** Trajectories; Periodic Trajectories; Polygonal Billiards.

---

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>13</b>	
<b>1</b>	<b>DEFINIÇÕES INICIAIS</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>TRAJETÓRIAS EM BILHARES QUADRANGULARES</b>	<b>28</b>
2.1	Trajectoria periódica de dois impactos	28
2.2	Trajectoria periódica de três impactos	29
2.3	Trajectoria periódica de quatro impactos e o método do desdobramento	30
2.4	Trajectorias periódicas bilhares quadrangulares	38
<b>3</b>	<b>TRAJETÓRIAS EM BILHARES RETANGULARES</b>	<b>43</b>
3.1	Trajectoria periódica de dois impactos	43
3.2	Trajectorias periódicas	43
<b>4</b>	<b>TRAJETÓRIA DE UMA BOLA EM UM BILHAR TRIANGULAR</b>	<b>49</b>
4.1	Problema de Fagnano e a existência de trajetória periódica de três impactos em triângulos agudos	50
4.2	Trajectorias periódicas em triângulos retângulos	55
<b>5</b>	<b>TRAJETÓRIA DE FAGNANO EM POLÍGONOS CONVEXOS</b>	<b>58</b>
<b>Conclusão</b>	<b>63</b>	
<b>Referências</b>	<b>64</b>	

---

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de Bilhar . . . . .	16
Figura 2 – Exemplos de polígonos . . . . .	17
Figura 3 – Duas figuras planas convexas e duas não convexas . . . . .	17
Figura 4 – $r$ é a reta de apoio dos polígonos $P_1$ e $P_2$ mas não de $P_3$ e $P_4$ . . . . .	18
Figura 5 – Teorema do ângulo externo . . . . .	19
Figura 6 – Arco capaz . . . . .	20
Figura 7 – Ângulo inscrito - $O$ está em um lado do ângulo . . . . .	20
Figura 8 – Ângulo inscrito - $O$ é interno ao ângulo . . . . .	21
Figura 9 – Ângulo inscrito - $O$ é externo ao ângulo . . . . .	22
Figura 10 – Quadrilátero inscrito . . . . .	23
Figura 11 – Quadrilátero com ângulos opostos suplementares . . . . .	23
Figura 12 – Quadrilátero inscritível . . . . .	24
Figura 13 – Triângulo . . . . .	25
Figura 14 – Triângulo . . . . .	25
Figura 15 – Desigualdade triangular . . . . .	26
Figura 16 – Triângulo órtico . . . . .	27
Figura 17 – Trajetória periódica de 2 impactos em um domínio quadrangular . . . . .	28
Figura 18 – Trajetória de 3 impactos em um domínio quadrangular . . . . .	29
Figura 19 – Trajetória de 4 impactos em um domínio quadrangular . . . . .	30
Figura 20 – Trajetória de 4 impactos em um domínio quadrangular . . . . .	31
Figura 21 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular . . . . .	33
Figura 22 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 1ª composição	33
Figura 23 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular- 1ª Continuação da trajetória . . . . .	34
Figura 24 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 2ª composição	35

Figura 25 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 2ª Continuação da trajetória . . . . .	35
Figura 26 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 3ª composição	36
Figura 27 – Trajetória com interseção em um domínio quadrangular . . . . .	37
Figura 28 – Trajetória periódica de 4 impactos em um domínio quadrangular . . . . .	38
Figura 29 – Desdobramento da trajetória no domínio quadrangular . . . . .	39
Figura 30 – Domínio quadrangular - reflexão vertical . . . . .	40
Figura 31 – Trajetória periódica de 2 impactos em um domínio retangular . . . . .	43
Figura 32 – Domínio retangular - reflexão . . . . .	44
Figura 33 – Domínio retangular - reflexão vertical . . . . .	45
Figura 34 – Problema de Heron . . . . .	50
Figura 35 – Teorema de Fagnano - Triângulo acutângulo qualquer . . . . .	51
Figura 36 – Teorema de Fagnano - Ângulos congruentes . . . . .	52
Figura 37 – Teorema de Fagnano - Cevianas . . . . .	52
Figura 38 – Teorema de Fagnano . . . . .	54
Figura 39 – Triângulo de Fagnano . . . . .	55
Figura 40 – Família de trajetórias periódicas no triângulo retângulo . . . . .	56
Figura 41 – Trajetória perpendicular . . . . .	57
Figura 42 – Polígono Convexo . . . . .	59
Figura 43 – Polígono - Satisfazendo a lei óptica . . . . .	60
Figura 44 – Comprimento mínimo - Trajetória de Fagnano . . . . .	61

---

# Introdução

Esse é um trabalho de conclusão para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

O trabalho trata de uma proposta de estudo para trajetórias periódicas em bilhares poligonais. O bilhar é comumente estudado na Área dos Sistemas Dinâmicos, mas este estudo dará ênfase e terá como requisitos a geometria Euclidiana Plana e a óptica geométrica.

O problema da existência de trajetórias periódicas em mesas de bilhar tem sido um incentivo interessante para a pesquisa matemática desde 1755, quando Fagnano descobriu o fato de que todo triângulo agudo admite tal trajetória.

Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi nasceu em 31 de janeiro de 1715 em uma das principais famílias de Sinigaglia. E, faleceu em 14 de maio de 1797 em Senigallia. A cidade de Sinigaglia, agora conhecida como Senigallia, fica no centro da Itália e na época do nascimento de Giulio fazia parte dos Estados Papais. Giovanni foi um clérigo e matemático italiano, filho de Giulio Carlo Fagnano (1682-1766), também matemático, uma das principais famílias de Sinigaglia. O pai de Giovanni ocupou um alto cargo em Sinigaglia. Ele foi nomeado "gonfaloniere" em 1723, quando Giovanni tinha oito anos. "Gonfaloniere" significa literalmente "porta-estandarte" e era um título de altos magistrados cívicos nas cidades-estados medievais italianas, como Sinigaglia. Giovanni Fagnano foi ordenado sacerdote. Em 1752 ele se tornou um cônego, e em 1755 foi nomeado arqui-diácono. Fagnano continuou o trabalho de seu pai sobre o triângulo e escreveu um tratado inédito sobre o tema. Ficou conhecido como problema de Fagnano, o problema de inscrever um triângulo de perímetro mínimo dentro de um triângulo agudo. Como mostrou Fagnano, a solução é o triângulo órtico, cujos vértices são os pontos onde as alturas do triângulo original interceptam seus lados. Outra propriedade do triângulo órtico, também provada por Fagnano, é que suas bissetrizes são as alturas do triângulo original. Fagnano também resolveu parcialmente o problema de encontrar a mediana geométrica de quatro pontos

no plano euclidiano.<sup>1</sup> Fagnano mostrou, quando os quatro pontos formam os vértices de um quadrilátero convexo, a mediana geométrica é o ponto onde as duas diagonais do quadrilátero se cruzam[7].

O grande desenvolvimento e interesse experimentado pela Teoria de Bilhares se deve, principalmente, aos seguintes fatores: são considerados, por muitos pesquisadores, como os melhores exemplos para a análise do caos determinístico; muitos sistemas dinâmicos de origem física que envolvem choques podem, de certa maneira, serem reduzidos ao estudo de bilhares; estudos recentes na área de caos quântico envolvem estudos detalhados de bilhares clássicos e, além disso, eles têm fornecido (desde o começo de seus estudos) um grande número de problemas em teorias matemáticas (como geometria, probabilidade e teoria ergódica) [10].

Um dos avanços mais importantes sobre o problema da existência de trajetórias periódicas é devido a Masur que provou que todo polígono racional (ou seja, um polígono cujo ângulos entre quaisquer dois seus lados são múltiplos racionais de  $\pi$ ) tem trajetórias periódicas de bilhar [4].

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos surge a partir aos trabalhos de Henri Poincaré sobre equações diferenciais, ao final do século 19. Dado que a maioria das equações diferenciais não podem ser resolvidas por meio de fórmulas, Poincaré defendeu uma nova abordagem em que as soluções devem ser objeto de uma análise qualitativa, utilizando as ferramentas geométricas e probabilísticas disponíveis, a qual deve ser complementada com um estudo numérico da equação diferencial.

No nosso estudo sobre o bilhar apresentaremos as trajetórias periódicas em polígonos convexos como quadrados e retângulos; triângulos e polígonos convexos de  $n$  lados.

Esse trabalho se estrutura em cinco capítulos. No primeiro capítulo são introduzidos as definições iniciais, conceitos teóricos básicos e principais ferramentas que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Nos quatro capítulos seguintes são apresentados as trajetórias periódicas em domínios poligonais.

No segundo capítulo iremos mostrar a existência de trajetórias periódicas em bilhares quadrangulares. Assim, é feita a análise de trajetórias periódicas com dois, três e quatro impactos. Verificamos que mapear um número significativo de impactos é uma tarefa difícil, assim ao invés de refletirmos a trajetória refletiremos o domínio da mesa de bilhar obtendo uma trajetória em linha reta. Demonstraremos que tal ação pode ser realizada independente se a trajetória é periódica ou não.

No terceiro capítulo mostraremos a existência de trajetórias periódicas em bilhares retangulares e que o comportamento desta trajetória periódica é similar ao comportamento da

---

<sup>1</sup> Este é o ponto que minimiza a soma de suas distâncias aos quatro pontos dados.

trajetória periódicas em bilhares quadrangulares com algumas particularidades.

No quarto capítulo nos dedicaremos ao estudo da existência de trajetórias periódicas em domínios triangulares. Encontraremos trajetórias periódicas em triângulos acutângulos e retângulos. Em triângulos acutângulos sempre podemos encontrar trajetórias periódicas, como a trajetória de Fagnano que provém da resolução do Problema de Fagnano o qual consiste em inscrever em um triângulo acutângulo um outro triângulo com o menor perímetro possível. E em triângulos obtusângulos os resultados estão em aberto para trajetórias periódicas.

O quinto capítulo será dedicado a apresentar uma extensão da trajetória de Fagnano para bilhares em polígonos convexos de  $n$  lados.

No trabalho de pesquisa e investigação foi utilizado como recurso tecnológico e visual o software de matemática dinâmica *GeoGebra* na plataforma online.

## Definições iniciais

Podemos pensar no bilhar para muitas situações físicas onde uma ou mais partículas se movem livremente em uma região delimitada, sofrendo colisões em sua fronteira e/ou com as outras partículas [10].

De uma maneira mais formal, o bilhar poligonal consiste no estudo de que como uma massa pontual (bola de bilhar) deve se mover dentro de uma região poligonal (mesa de bilhar) com vetor velocidade constante ao longo de uma linha reta (trajetória) até atingir a borda da mesa [11].

O traço do movimento de uma bola de bilhar é chamada de trajetória de bilhar. Se a trajetória chegar em um ponto das bordas da mesa (os lados do polígono), então a trajetória continua seu movimento na mesa de bilhar com a mesma velocidade ao longo de uma nova linha, satisfazendo a *Lei óptica* no ponto limite, ou seja, *o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão são iguais*. A trajetória muda a cada impacto e caso a bola retorne ao seu ponto inicial com o mesmo vetor de velocidade dentro de um número finito de impactos, a trajetória é dita periódica. Assim, devemos considerar colisões totalmente elásticas, que não perdem impulso a cada impacto e permitem considerar trajetórias infinitas, como mostrado na figura 1. E se, a trajetória impacta em um dos cantos da mesa (vértices do polígono), então a trajetória termina.

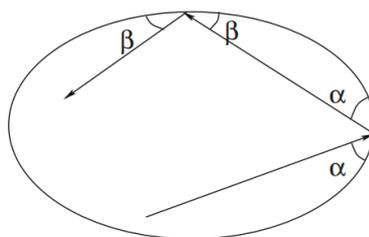


Figura 1 – Exemplo de Bilhar  
Fonte: [11]

Na educação básica estudamos os polígonos de maneira abreviada e muitos resultados são obtidos e até mesmo justificados de maneira intuitiva. Mas, no nosso estudo a definição de polígono requer um certo rigor, para que seja usada com resguardo e na sua totalidade. Assim, vamos tomar a definição de polígono a seguir de [5].

**Definição 1.1.** Dada uma sequência de pontos de um plano  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , com  $n \geq 3$ , todos distintos, onde três pontos distintos e consecutivos são não colineares, considerando consecutivos  $A_{n-1}, A_n$  e  $A_1$ , assim como,  $A_n, A_1$  e  $A_2$  chama-se polígono a reunião dos segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3} \dots \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ .

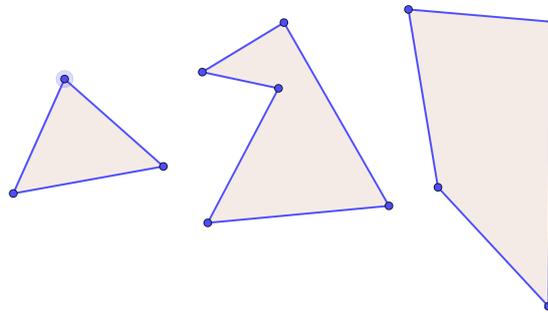


Figura 2 – Exemplos de polígonos

Nesse sentido, no nosso estudo utilizaremos a definição de polígonos convexos de [9].

**Definição 1.2.** Dizemos que uma região  $F$  do plano é convexa quando, para quaisquer dois pontos  $x$  e  $y$  em  $F$ , o segmento de reta  $xy$  está inteiramente contido em  $F$ .

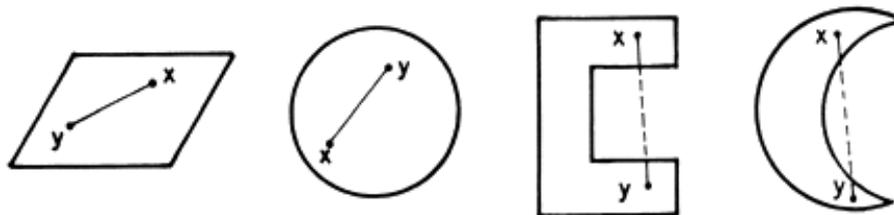


Figura 3 – Duas figuras planas convexas e duas não convexas

Fonte: [9]

**Definição 1.3.** Um polígono diz-se convexo quando a região por ele limitada é convexa.

Segue-se desta definição que toda diagonal de um polígono convexo está inteiramente contida na região por ele limitada.

Podemos ainda ter uma segunda definição para polígonos convexos segundo [9].

**Definição 1.4.** Toda reta  $r$  decompõe o plano em duas regiões que têm  $r$  como fronteira comum. Chamaremos essas regiões as margens de  $r$ .

**Definição 1.5.** Uma reta  $r$  é dita reta de apoio do polígono  $P$  quando  $P$  tem pelo menos um ponto em comum com  $r$  e situa-se inteiramente numa das margens de  $r$ .

**Definição 1.6.** Um polígono chama-se convexo quando a reta que contém qualquer dos seus lados é uma reta de apoio.

As margens de uma reta são figuras planas convexas. Se os pontos  $X$  e  $Y$  estão em margens opostas da reta  $r$ , o segmento de reta  $\overline{XY}$  corta  $r$ .

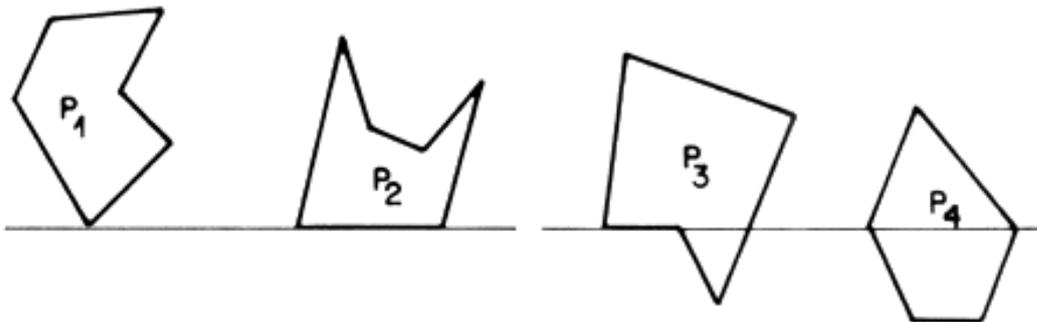


Figura 4 –  $r$  é a reta de apoio dos polígonos  $P_1$  e  $P_2$  mas não de  $P_3$  e  $P_4$   
Fonte: [9]

Por exemplo, na figura 4 somente  $P_4$  é convexo.

No restante desse capítulo apresentaremos alguns resultados necessários para o restante do trabalho.

**Definição 1.7.** Chamamos de ângulo externo a abertura entre o prolongamento de um lado do polígono e o lado adjacente a ele.

**Teorema 1.1.** (Teorema do ângulo externo) - Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se o ponto  $C$  está entre os pontos  $B$  e  $D$  então,  $\widehat{ACD}$  é um ângulo externo do triângulo  $ABC$ .

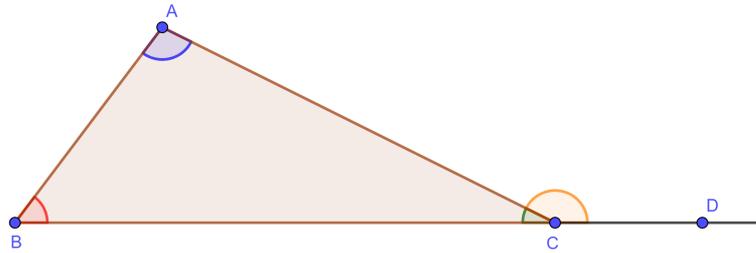


Figura 5 – Teorema do ângulo externo

Temos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$ .

Assim,

$$\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} \quad (1.1)$$

Os ângulos  $\widehat{DCA}$  e  $\widehat{ACB}$  são suplementares. Portanto,

$$\widehat{DCA} + \widehat{ACB} = 180^\circ \quad (1.2)$$

Pelas equações (1.1) e (1.2) podemos concluir que

$$\widehat{DCA} + 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 180^\circ$$

$$\widehat{DCA} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC}$$

□

**Definição 1.8.** (Arco capaz) - Dados, numa circunferência, uma corda  $\overline{AB}$  e um ponto  $P$  qualquer sobre um dos arcos determinados pelos pontos  $A$  e  $B$ , temos que o ângulo  $\widehat{APB} = \alpha$  é constante. Dizemos que esse arco, contendo o ponto  $P$ , é o arco capaz do ângulo  $\alpha$  construído sobre o segmento  $\overline{AB}$  [3].

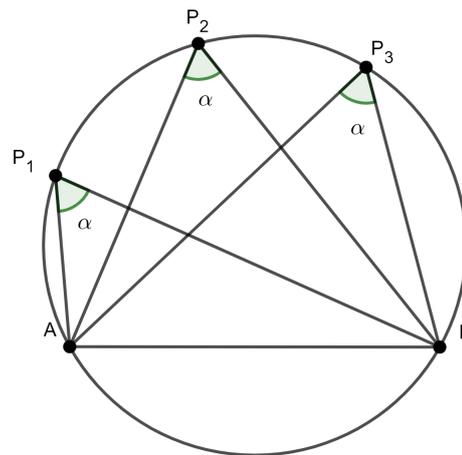


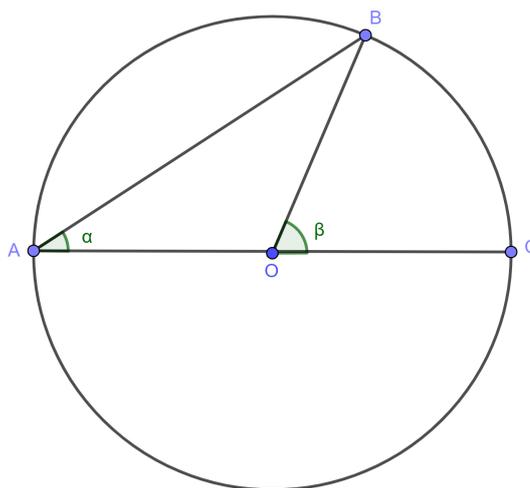
Figura 6 – Arco capaz

Isto significa que um observador situado em qualquer ponto sobre esse arco  $\overline{AB}$ , conforme figura 6 vê o segmento  $\overline{AB}$  sob o mesmo ângulo  $\alpha$ .

**Proposição 1.1.** (*Ângulo inscrito*) - Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são cordas de um círculo de centro  $O$ , então a medida do ângulo inscrito  $\widehat{BAC}$  é igual a metade do ângulo central  $\widehat{BOC}$  correspondente.

*Demonstração.* Para realizarmos a demonstração dessa Proposição vamos considerar 3 casos.

1.  $O$  está em um lado do ângulo.

Figura 7 – Ângulo inscrito -  $O$  está em um lado do ângulo

O ângulo  $\widehat{BAC}$  contém o centro  $O$  em um dos lados. O triângulo  $AOB$  é isósceles de base  $\overline{AB}$ , pois os segmentos  $\overline{AO} = \overline{BO}$  que são raios da circunferência.

Assim,  $\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = \alpha$ .

Pelo Teorema 1.1, temos que

$$\widehat{BOC} = 2\alpha = 2\widehat{BAC}.$$

2.  $O$  é interno ao ângulo.

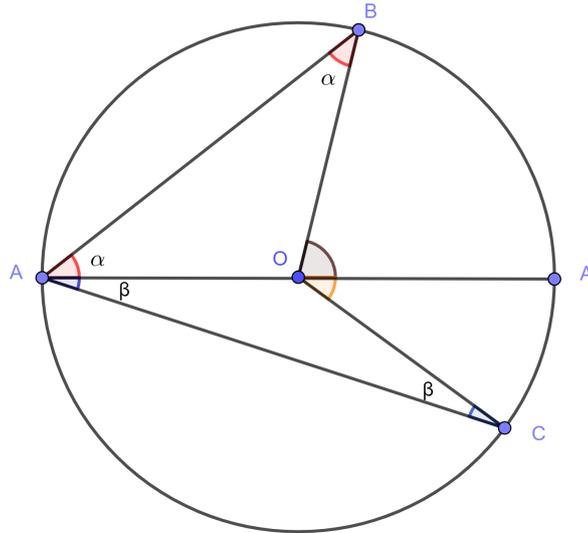


Figura 8 – Ângulo inscrito -  $O$  é interno ao ângulo

O ângulo  $\widehat{BAC}$  contém o centro  $O$  em seu interior. Os triângulos  $AOB$  e  $AOC$  são isósceles de bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Pois, os segmentos  $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$  são raios da circunferência.

Logo,

$$\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \alpha \quad (1.3)$$

e,

$$\widehat{CAO} = \widehat{ACO} = \beta \quad (1.4)$$

Pelas equações (1.3) e (1.4) e pelo Teorema 1.1 temos que  $\widehat{COA'} = 2\beta$  e  $\widehat{BOA'} = 2\alpha$ .

Portanto,

$$\widehat{BOC} = \widehat{COA'} + \widehat{BOA'} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\widehat{BAC}$$

3.  $O$  é externo ao ângulo.

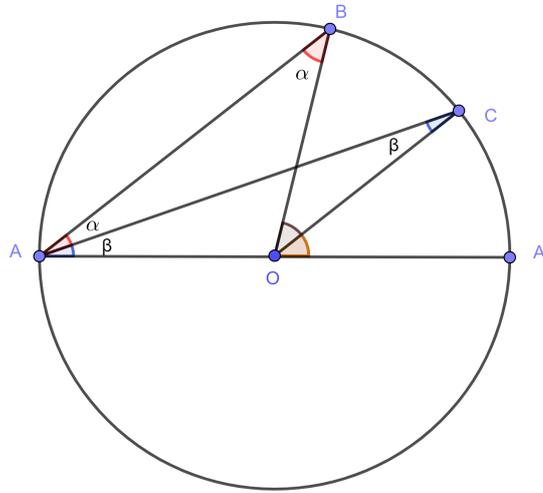


Figura 9 – Ângulo inscrito -  $O$  é externo ao ângulo

O ângulo  $\widehat{BAC}$  não contém o centro  $O$ . Os triângulos  $AOB$  e  $AOC$  são isósceles de bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. Pois, os segmentos  $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{OC}$  são raios da circunferência.

Logo,

$$\widehat{ABO} = \widehat{BAO} = \alpha \quad (1.5)$$

$$\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = \beta \quad (1.6)$$

e,

$$\widehat{BAC} = \alpha - \beta$$

Por (1.5), (1.6) e pelo Teorema 1.1 temos que  $\widehat{COA'} = 2\beta$  e  $\widehat{BOA'} = 2\alpha$ .

Portanto,

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOA'} - \widehat{COA'} = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) = 2\widehat{BAC}$$

□

**Definição 1.9.** Dizemos que um quadrilátero é inscritível se existir um círculo passando por seus vértices.

**Proposição 1.2.** *Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares [1].*

*Demonstração.* Vamos supor inicialmente que o quadrilátero possa ser inscrito em um círculo. Observe que cada um de seus ângulos é um ângulo inscrito no círculo. Seja  $ABCD$  o quadrilátero. Considere os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$ . Eles subtendem exatamente os dois arcos determinados pelos pontos  $B$  e  $D$ . Como estes dois arcos somam  $360^\circ$ , então, de acordo com a Proposição 1.1, a soma dos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$  será  $180^\circ$ . Portanto, eles são suplementares.

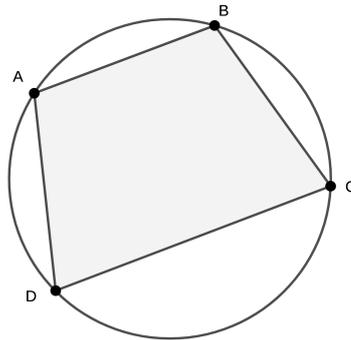


Figura 10 – Quadrilátero inscrito

Agora, vamos supor que um quadrilátero  $ABCD$  tem um par de ângulos opostos suplementares.

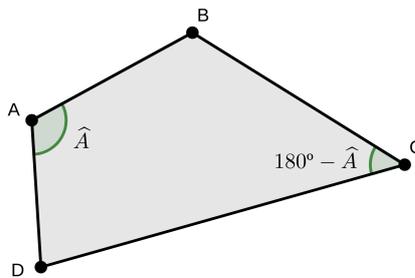


Figura 11 – Quadrilátero com ângulos opostos suplementares

Assim, temos que

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

Dados três pontos não colineares sempre irá existir uma circunferência passando por eles. Seja esses três pontos  $A, B, D$ .

Vamos traçar um segmento  $\overline{BE}$  de modo que o ponto  $E$  pertença à circunferência formada pelos pontos  $A, B, D$ . Assim, o quadrilátero  $ABED$  está inscrito na circunferência.

Portanto,

$$\widehat{A} + \widehat{E} = 180^\circ$$

$$\widehat{E} = 180^\circ - \widehat{A}$$

Seja,  $\widehat{EBC} = \beta$

Assim,  $\widehat{E}$  é ângulo externo do triângulo  $EBC$ , e pelo Teorema 1.1, temos que

$$\widehat{E} = \beta + \widehat{C}$$

$$180^\circ - \widehat{A} = \beta + \widehat{C}$$

$$180^\circ - \widehat{A} = \beta + 180^\circ - \widehat{A}$$

$$\beta = 0$$

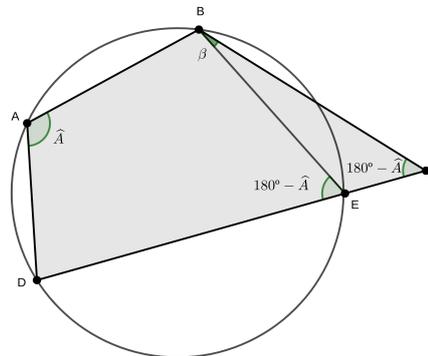


Figura 12 – Quadrilátero inscrito

Se  $\beta = 0$  os segmentos  $\overline{BE}$  e  $\overline{BC}$  são coincidentes, e o ponto  $C$  não está fora da circunferência, e sim sobre a circunferência.

□

**Proposição 1.3.** *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior lado está oposto ao maior ângulo.*

*Demonstração.* Conforme mostra a figura 13, suponha que  $\overline{BC} > \overline{AC}$ , logo, é possível tomar um ponto  $D$  em  $\overline{BC}$  tal que  $\overline{CD} = \overline{CA}$ . Como  $D \in \overline{BC}$ , pode-se afirmar que  $D$  é interno ao ângulo  $\widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{CAB} > \widehat{CAD}$ .

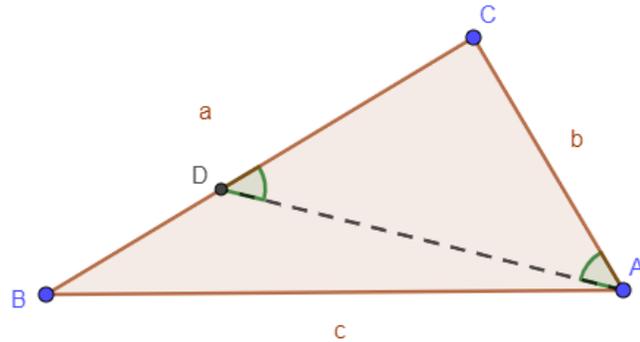


Figura 13 – Triângulo

Por construção o triângulo  $CAD$  é isósceles de base  $\overline{AD}$ . Então,  $\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$ . Sendo assim,  $\widehat{CAB} > \widehat{CDA}$ .

Por outro lado, tem-se que,  $\widehat{CDA}$  é ângulo externo no triângulo  $ABD$ , então,  $\widehat{CDA} > \widehat{ABD} = \widehat{ABC}$ .

Mas,  $\widehat{CAB} > \widehat{CDA}$  e  $\widehat{CDA} > \widehat{ABC}$ , então,  $\widehat{CAB} > \widehat{ABC}$ .

□

**Proposição 1.4.** *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo está oposto ao maior lado.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer conforme mostra a figura 14. Considere  $\widehat{BAC} > \widehat{ABC}$  queremos mostrar que  $\overline{BC} > \overline{AC}$ .

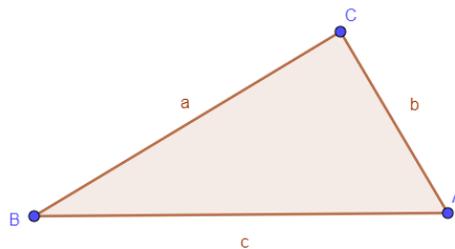


Figura 14 – Triângulo

Temos três possibilidades:

$$\begin{cases} \overline{BC} < \overline{AC} \\ \overline{BC} = \overline{AC} \\ \overline{BC} > \overline{AC} \end{cases}$$

- Se  $\overline{BC} < \overline{AC}$ , então, pela Proposição 1.3,  $B\hat{A}C < A\hat{B}C$ , o que contraria a hipótese.
- Se  $\overline{BC} = \overline{AC}$ , então, o triângulo é isósceles, e  $B\hat{A}C = A\hat{B}C$ , o que contraria a hipótese.

Sendo assim, por exclusão, temos que  $\overline{BC} > \overline{AC}$ .  $\square$

**Proposição 1.5.** (*Desigualdade triangular*) - Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer tal que  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ , conforme a figura 15. Vamos mostrar que  $a < b + c$ .

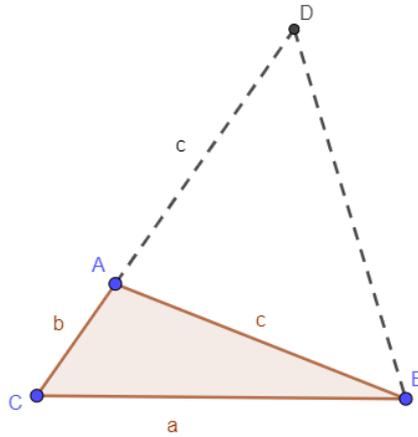


Figura 15 – Desigualdade triangular

Considere um ponto  $D$  na semirreta  $\overrightarrow{CA}$ , tal que  $\overline{AD} = \overline{AB}$ . Então, temos que  $\overline{CA} + \overline{AD} = \overline{CA} + \overline{AB}$ . Como o triângulo  $ABD$  é isósceles de base  $\overline{BD}$ , temos que:

$$A\hat{D}B = A\hat{B}D \quad (1.7)$$

Como o ponto  $A$  é interno ao ângulo  $C\hat{B}D$ , temos que:

$$C\hat{B}D > A\hat{B}D \quad (1.8)$$

Das igualdades 1.7 e 1.8 concluímos que  $C\hat{B}D > A\hat{D}B = C\hat{D}B$

Sendo assim, no triângulo  $BCD$  temos que  $\overline{BC} < \overline{CD}$ , pela Proposição 1.4. Logo,

$$a = \overline{BC} < \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{CA} + \overline{AB} = b + c$$

Portanto,  $a < b + c$

□

**Definição 1.10.** Chamamos *triângulo órtico* ao triângulo cujos vértices são as interseções das alturas com os lados de um triângulo dado.

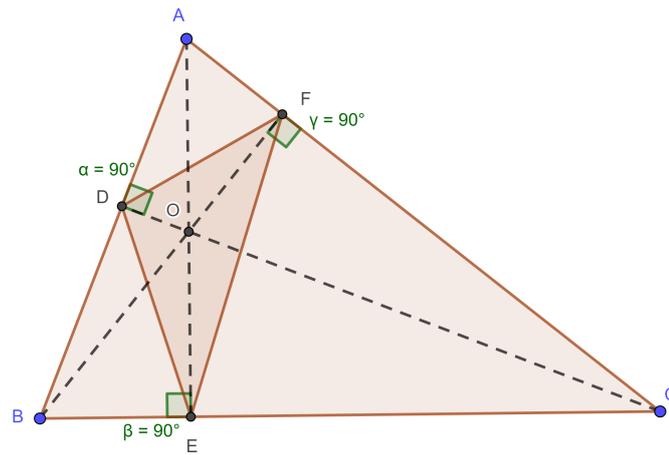


Figura 16 – Triângulo órtico

## Trajétórias em Bilhares Quadrangulares

Vamos analisar trajetórias em bilhares quadrangulares com dois impactos, três impactos e quatro impactos.

### 2.1 Trajetória periódica de dois impactos

Vamos verificar a trajetória periódica de dois impactos em um domínio quadrangular. Para isso, tomemos o ponto inicial como qualquer ponto que não esteja nos vértices desse domínio.

**Proposição 2.1.** *Fixado um lado do quadrado temos que para todo ponto  $A$  existe uma única trajetória de período 2 passando por  $A$ .*

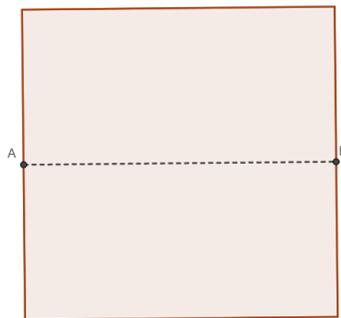


Figura 17 – Trajetória periódica de 2 impactos em um domínio quadrangular

*Demonstração.* Se temos dois impactos, então o segmento que a partícula percorre na ida é o mesmo segmento que ela percorre na volta. Pela definição de bilhar o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, temos que o ângulo no ponto de impacto B será igual a  $90^\circ$ .

De maneira análoga, se o ângulo de partida no ponto  $A$  for de  $90^\circ$ , então no próximo ponto de impacto também teremos um ângulo de  $90^\circ$ , o que nos dará uma trajetória de período 2.  $\square$

**Corolário 2.1.** *Existem infinitas trajetórias de período 2 no bilhar quadrangular.*

**Observação 2.1.** *Podemos estender também a Proposição 2.1 para um domínio retangular, que será apresentada na Proposição 3.1.*

## 2.2 Trajetória periódica de três impactos

Veremos que é impossível ter uma trajetória de três impactos distintos em um domínio quadrangular. A prova será baseada em [2].

**Proposição 2.2.** *Não existe trajetória periódica de três impactos em um domínio quadrangular.*

*Demonstração.* Vamos supor por absurdo que a trajetória periódica de três impactos seja possível. Seja  $C$ , o ponto inicial,  $\theta$  é o ângulo da primeira linha da trajetória. Os ângulos subsequentes estão representados na figura 18. Assim, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$  e, como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, então teremos a configuração mostrada pela figura 18, assim:

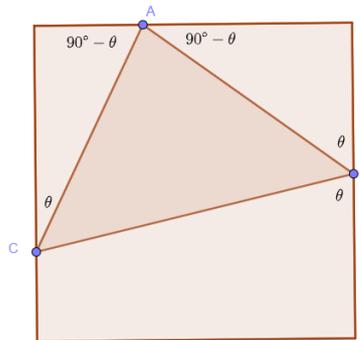


Figura 18 – Trajetória de 3 impactos em um domínio quadrangular

$$\hat{A} = 180^\circ - 2(90^\circ - \theta) = 2\theta$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 2\theta$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

Assim,  $\hat{C} = 0^\circ$ ,

Obtendo assim, um absurdo.

Portanto, nossa hipótese que a trajetória de três impactos em bilhar quadrangular era possível é falsa.

□

## 2.3 Trajetória periódica de quatro impactos e o método do desdobramento

Agora, vamos supor uma trajetória periódica de quatro impactos em um domínio quadrangular. Essa trajetória pode assumir a forma de um quadrado ou de um retângulo.

**Proposição 2.3.** *Em um domínio quadrangular se o ângulo inicial for de  $\frac{\pi}{4}$  em qualquer ponto teremos uma trajetória periódica de quatro impactos.*

*Demonstração.* Vamos considerar o domínio quadrangular  $ABCD$ .

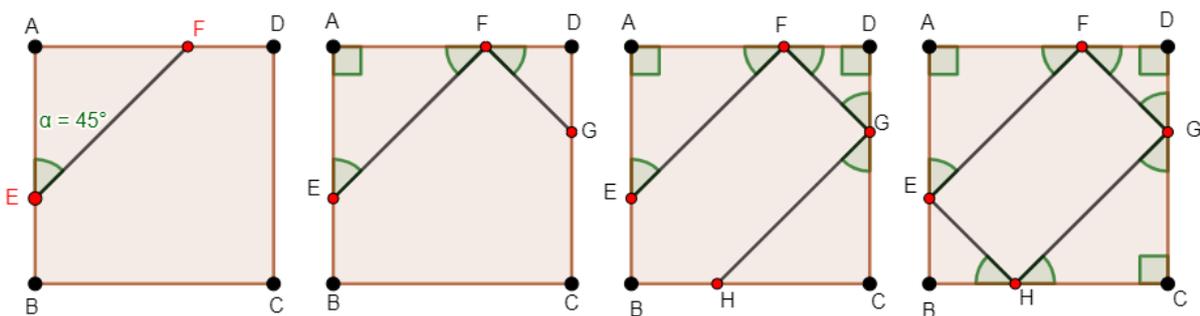


Figura 19 – Trajetória de 4 impactos em um domínio quadrangular

Sem perda de generalidade, seja o ponto  $E$ , o ponto inicial da trajetória sobre o lado  $\overline{AB}$ , sendo o ângulo de partida igual a  $45^\circ$  e o ponto  $F$ , o ponto de impacto sobre o lado  $\overline{AD}$ . Temos que no triângulo  $AEF$  o ângulo  $\widehat{AFE}$  será igual a  $45^\circ$ , pois:

- O ângulo  $\widehat{AEF}$  é de  $45^\circ$ , pois é a condição inicial;
- O ângulo  $\widehat{EAF}$  é  $90^\circ$ ;

Logo, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é a  $180^\circ$ , então  $\widehat{AFE}$  igual a  $45^\circ$ .

Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, o ângulo  $\widehat{DFG}$  será igual a  $45^\circ$ . Como  $F$  está sobre o lado  $\overline{AD}$  o ângulo  $\widehat{EFG}$  será de  $90^\circ$ .

E de maneira análoga, os ângulos  $\widehat{FGD}$ ,  $\widehat{GHC}$ ,  $\widehat{HE'B}$  são iguais a  $45^\circ$ .

Agora, vamos mostrar que essa trajetória é periódica, ou seja, retorna ao ponto inicial,  $E = E'$  com o mesmo ângulo.

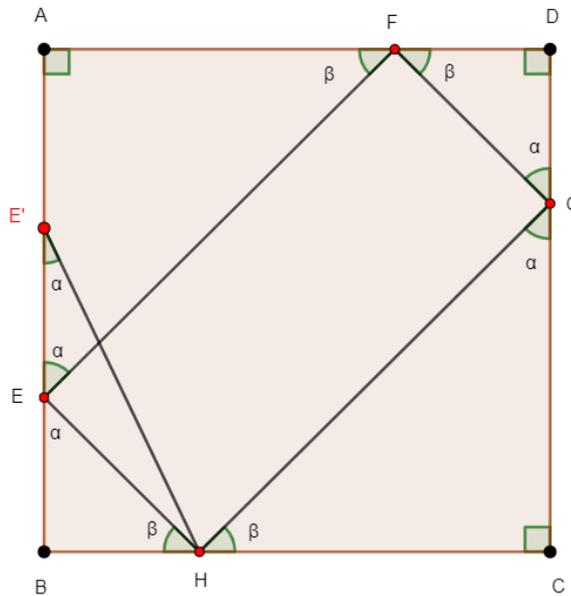


Figura 20 – Trajetória de 4 impactos em um domínio quadrangular

Temos um domínio quadrangular  $ABCD$  e como  $\alpha$  é igual a  $45^\circ$ , sabemos que sua tangente é igual a 1.

Assim, no triângulo  $AEF$  temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AF}{AE}$$

Logo,  $AF = AE$ ;

Do mesmo modo, no triângulo  $DGF$  temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{DF}{DG}$$

e assim,  $DF = DG$

De maneira análoga, no triângulo  $CGH$  temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CH}{CG} :$$

e assim,  $CH = CG$ .

E por fim, temos no triângulo  $BE'H$ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BH}{BE'}$$

e assim,  $BH = BE'$ .

Como,

$$AF + FD = AD$$

$$DG + GC = DC$$

$$CH + HB = CB$$

$$BE + EA = BA$$

E,  $AF = AE$  e  $FD = EB$

Porém,  $BE' = BH = FD$ ,

Temos que  $AE = AE'$

□

Outra abordagem que se pode fazer é através dos desdobramentos no plano para as trajetórias em domínios quadrangulares. Para isso, vamos realizar composições de isometrias de reflexão.

Na figura 21 temos o exemplo de uma trajetória não periódica sem auto interseção dos segmentos que definem a trajetória de quatro impactos com ângulo inicial qualquer.

O ponto  $E$  será o ponto inicial. Os pontos  $F, G, H, I$  são pontos de impactos sobre o domínio quadrangular  $ABCD$ , nos dando a trajetória de impacto  $EFGHI$ .

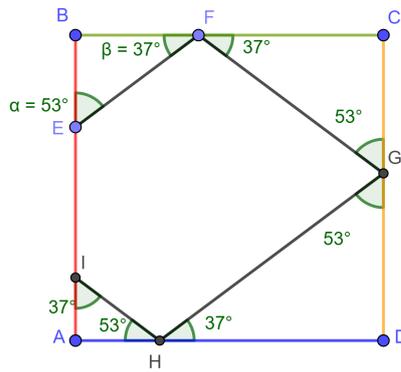


Figura 21 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular

Agora, vamos refletir o quadrado  $ABCD$  em relação ao segmento  $\overline{AB}$ . Assim, obtemos o quadrado  $ABC_1D_1$  sendo o nosso novo domínio quadrangular.

E, vamos refletir o segmento  $\overline{FG}$  sobre o segmento  $\overline{AB}$ , obtendo o segmento  $\overline{FG'}$ .

Assim, no triângulo  $FGG'$   $G$  é equivalente a  $G'$ , pois:

$FG = FG'$ , por construção;

O segmento  $\overline{AB}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{CC_1}$ .

E, o triângulo  $FGG'$  é isósceles e,  $BG = BG'$ .

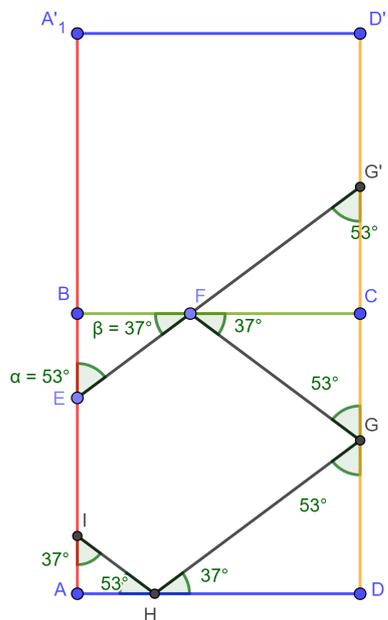


Figura 22 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 1ª composição

Agora, vamos continuar a trajetória a partir do ponto de impacto  $G'$ . Assim, teremos o

novo impacto no ponto  $K$  sobre o lado  $\overline{D_1C_1}$ .

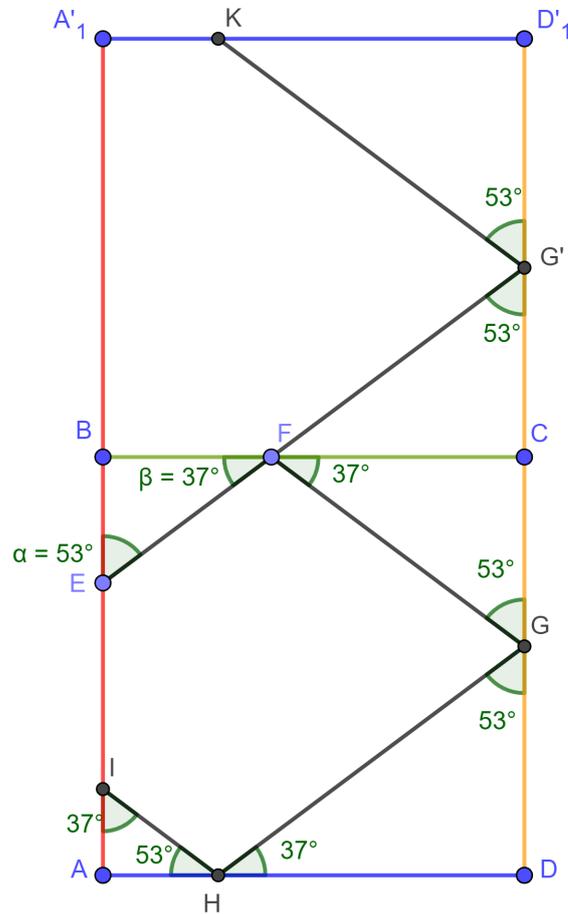


Figura 23 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular- 1ª Continuação da trajetória

De maneira análoga ao procedimento anterior, vamos refletir o domínio quadrangular  $ABC_1D_1$  sobre o lado  $BC_1$ , obtendo  $A_1BC_1D_2$ , sendo o nosso novo domínio quadrangular.

Refletindo o segmento  $\overline{KG'}$  sobre o segmento  $\overline{BC_1}$ , obtemos o segmento  $\overline{K'G'}$ .

Assim, no triângulo  $G'KK'$  o ponto  $K$  é equivalente a  $K'$ , pois:

$KG' = GK'$ , por construção;

O segmento  $\overline{BC_1}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{D_1D_2}$ .

E, o triângulo  $G'KK'$  é isósceles e,  $\overline{KC_1} = \overline{K'C_1}$ .

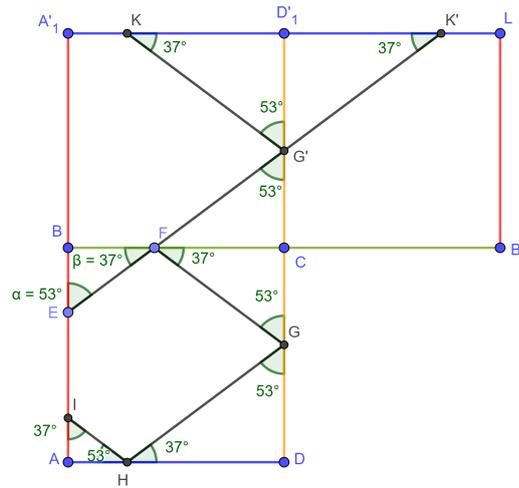


Figura 24 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 2ª composição

Agora, vamos continuar a trajetória a partir do ponto de impacto  $K'$ . Assim, teremos o novo impacto no ponto  $M$  sobre o lado  $\overline{A_1D_2}$ .

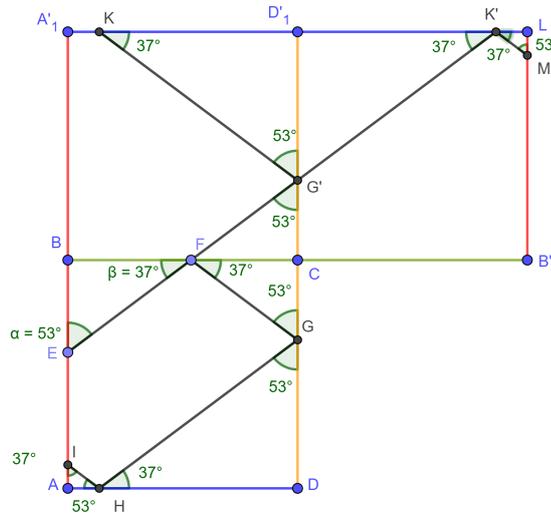


Figura 25 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 2ª Continuação da trajetória

Vamos refletir o domínio quadrangular  $A_1BC_1D_2$  sobre o lado  $C_1D_2$ . Assim, vamos obter o quadrado  $A_2B_1C_1D_2$  sendo o nosso novo domínio quadrangular.

Refletindo o segmento  $\overline{K'M}$  sobre o segmento  $\overline{C_1D_2}$ , obtemos o segmento  $\overline{K'M'}$ . Assim, no triângulo  $K'MM'$ ,  $M$  é equivalente a  $M'$ , pois:

$$K'M = K'M'$$

O segmento  $\overline{A_1A_2}$  é perpendicular ao segmento  $\overline{C_1D_2}$ . E, o triângulo  $K'MM'$  é isósceles e,

$$\overline{MD_2} = \overline{M'D_2}$$

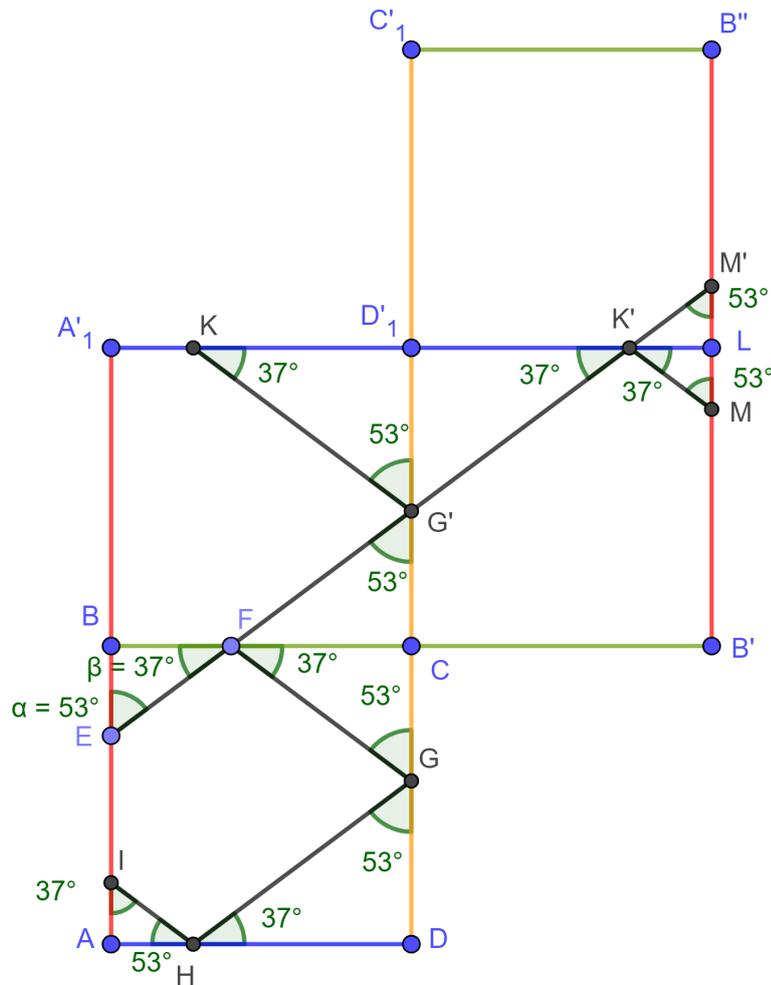


Figura 26 – Trajetória de 4 impactos aberta em um domínio quadrangular - 3ª composição

Portanto, temos que o ângulo de saída  $\widehat{AEF}$  é igual ao ângulo de chegada  $\widehat{K'M'D_2}$ .

Mostrando que essa trajetória é única, dado que se a trajetória inicia com um ângulo determinado só teremos uma trajetória que terá a mesma medida como ângulo final.

De forma similar, vamos realizar o desdobramento de uma trajetória não periódica com interseção entre os segmentos que definem a trajetória em um domínio quadrangular. Na figura 27, temos o exemplo de uma trajetória não periódica com interseção de quatro impactos com ângulo inicial qualquer.

Ao realizarmos as isometrias de reflexão teremos que o ângulo inicial será igual ao ângulo final. Mostrando que essa trajetória será única dependendo do ângulo inicial escolhido.

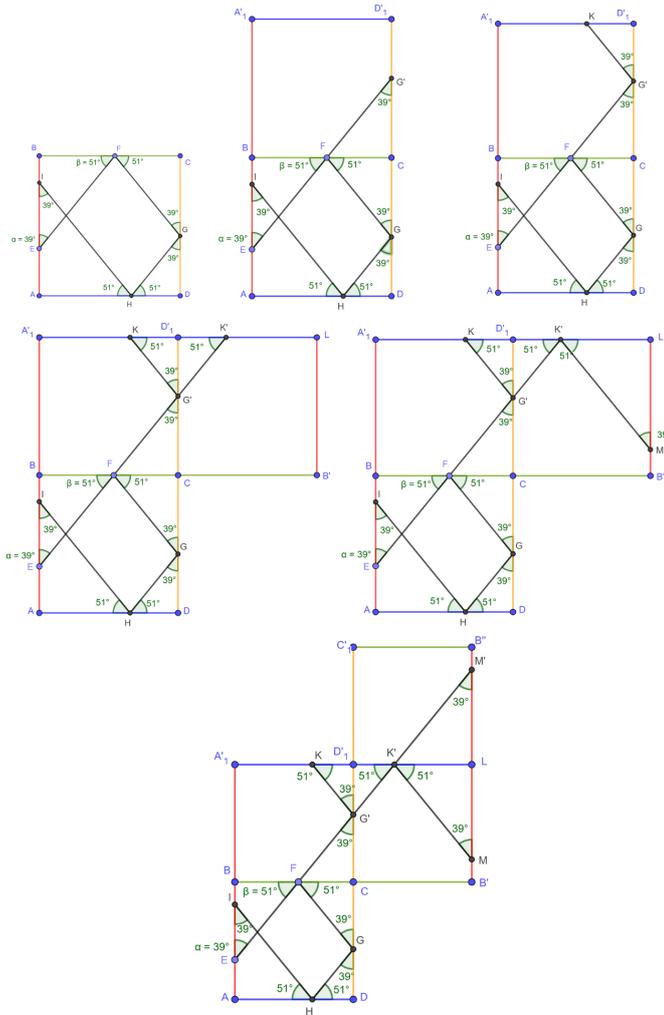


Figura 27 – Trajetória com interseção em um domínio quadrangular

Assim, podemos utilizar as reflexões no plano para descrever as trajetórias em linha reta. E, esse método nos mostra que após quatro impactos o ângulo inicial será igual ao ângulo de chegada independente se a trajetória é periódica ou não.

Como consequência do método do desdobramento, temos que a trajetória será periódica se, e somente se, os pontos finais e iniciais forem equivalentes. Isso se dá quando temos um ângulo de saída igual a  $\frac{\pi}{4} rad$  e, será a única trajetória periódica em um domínio quadrangular.

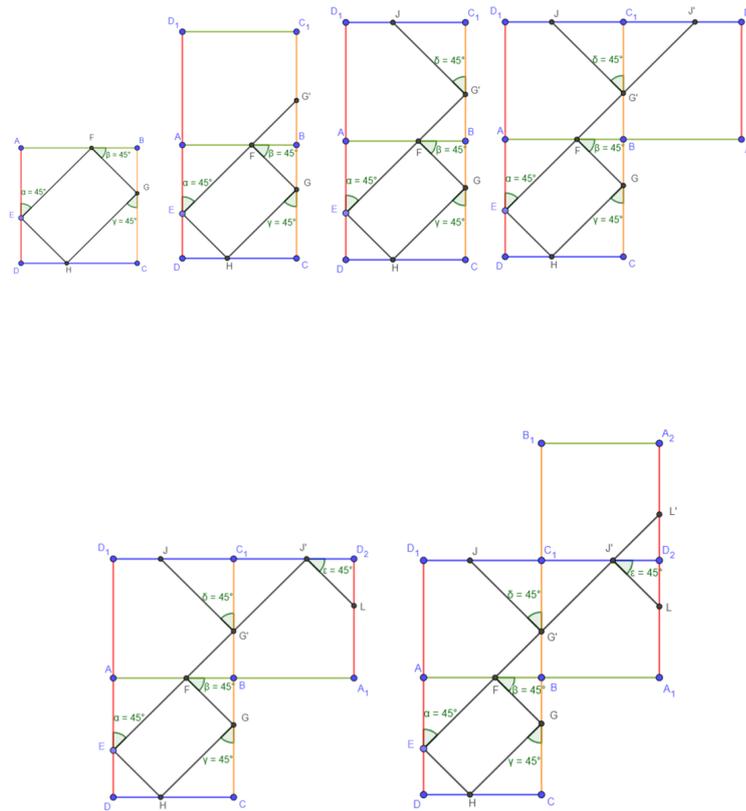


Figura 28 – Trajetória periódica de 4 impactos em um domínio quadrangular

Desse modo, a proposição 2.3 pode ser reescrita como,

**Proposição 2.4.** *A trajetória será de 4 impactos se, e somente se, o ângulo inicial for de  $\frac{\pi}{4}$ .*

A vantagem desse método do desdobramento é que ele pode ser usado para o estudo de quaisquer trajetórias.

## 2.4 Trajetórias periódicas bilhares quadrangulares

Consideremos um quadrado unitário com os vértices  $A(0, 1); B(1, 1); C(1, 0); D(0, 0)$  com a trajetória começando em  $\overline{AD}$  e  $(0, \alpha)$ . A prova dos lemas é baseada em [2].

**Lema 2.1.** *Se a trajetória é periódica terminando no ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $x_0 \in 2\mathbb{Z}$ .*

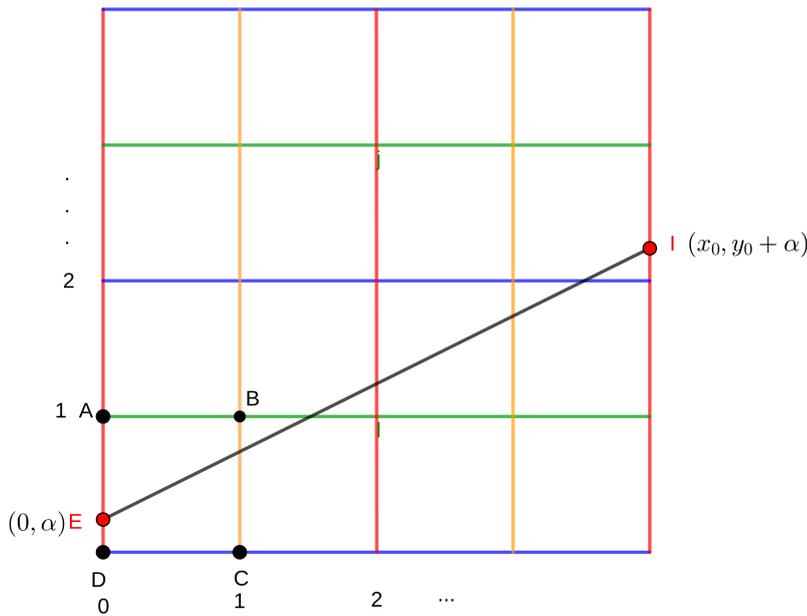


Figura 29 – Desdobramento da trajetória no domínio quadrangular

*Demonstração.* Utilizando o método do desdobramento do plano, isso significa que para que o ponto de massa viaje de  $(0, \alpha)$  de  $\overline{AD}$  para um ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$  a linha da trajetória deve interceptar a reta determinada pelo segmento  $\overline{BC}$ .

Então, vamos posicionar o quadrado com o segmento  $\overline{BC}$  em  $x = 1$ . Estamos investigando quando o quadrado é refletido horizontalmente, porque reflexões verticais não alteram o  $x_0$ .

Quando o quadrado é refletido horizontalmente sobre o segmento onde  $x = 1$ . Assim, o segmento  $\overline{AD}$  sobre  $x = 2$ .

Em seguida, a reflexão sobre o segmento onde  $x = 2$  posiciona o segmento  $\overline{BC}$  sobre  $x = 3$ .

Assim, o segmento equivalente a  $\overline{AD}$  sempre será posicionado em uma linha par. Da mesma forma, as sucessivas reflexões posicionarão o segmento equivalente a  $\overline{BC}$  posicionado em uma linha ímpar.

Portanto, se o ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  é o ponto final da trajetória que é equivalente ao ponto inicial  $(0, \alpha)$ ,  $x_0$  não pode estar em uma linha ímpar, ou seja,  $x_0 \in 2\mathbb{Z}$ .

□

**Lema 2.2.** Se a trajetória do ponto de massa é periódica terminando em  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $y_0 \in 2\mathbb{Z}$ .

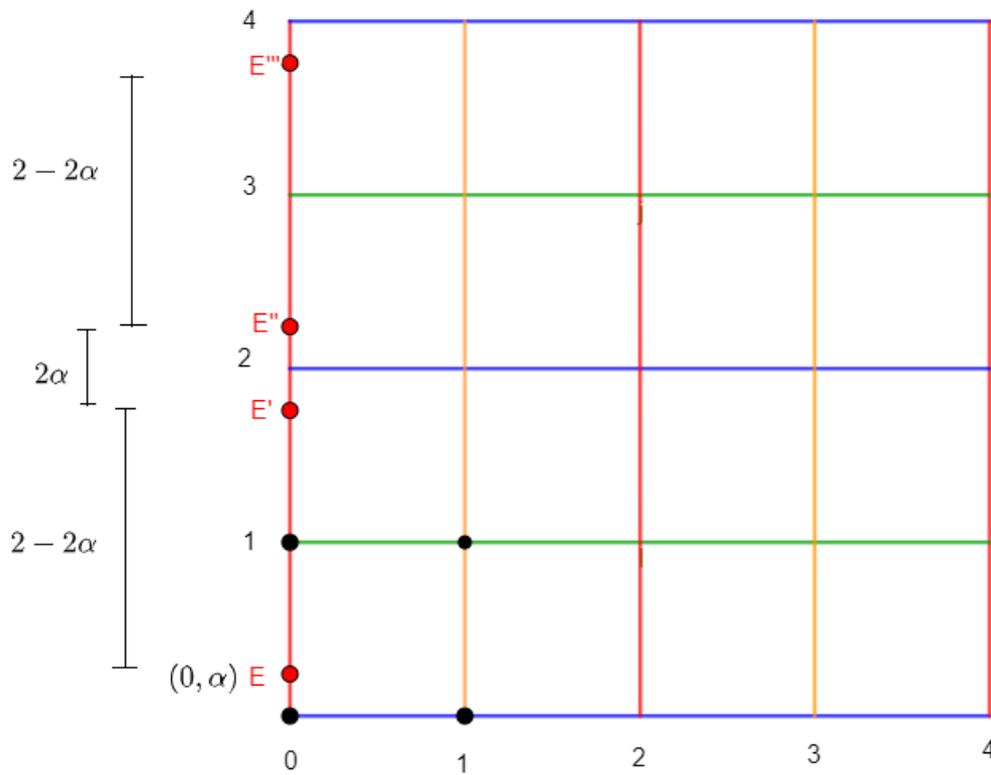


Figura 30 – Domínio quadrangular - reflexão vertical

*Demonstração.* Se a trajetória do ponto de massa terminar em uma coordenada  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  e esse ponto for equivalente a  $(0, \alpha)$ , então, é possível refletir a trajetória por linhas inteiras do ponto  $(0, \alpha)$  até o ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$ . Vamos começar com  $y = 1$ , depois  $y = 2$ , e assim, por diante. Assim, a distância entre duas reflexões sucessivas de  $(0, \alpha)$  é  $2\alpha$  ou  $2 - 2\alpha$ . Pois, o ponto é sempre uma distância  $\alpha$  ou de  $1 - \alpha$  da linha inteira mais próxima.

Se refletirmos uma vez, a distância entre as duas reflexões sucessivas de  $(0, \alpha)$  será de  $2 - 2\alpha$ . Se refletirmos novamente, a distância entre  $(0, \alpha)$  e o ponto refletido será de  $2 - 2\alpha + 2\alpha$ .

A medida que continuamos a refletir o ponto, continuamos alternando entre  $2 - 2\alpha + 2\alpha$  e  $2\alpha$ .

Analisaremos a coordenada  $y$  de forma separada.

Se  $(x_0, y_0 - \alpha)$  for equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $y_0 + \alpha = r(2 - 2\alpha) + r2\alpha + \alpha$  ou  $y_0 - \alpha = r(2 - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha + \alpha$ , com  $r \in \mathbb{N}$ .

$$y_0 - 2\alpha = r(2 - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha + \alpha - \alpha \Rightarrow$$

$$y_0 - 2\alpha = r(2 - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha \Rightarrow$$

$$y_0 - 2\alpha = 2r - 2r\alpha + 2r\alpha - 2\alpha \Rightarrow$$

$$y_0 - 2\alpha = 2r - 2\alpha \Rightarrow$$

$$0 = 2r - 2\alpha + 2\alpha \Rightarrow$$

$$y_0 = 2r$$

Portanto,  $y_0 \in 2\mathbb{Z}$ .

Da mesma forma, se  $(x_0, y_0 + \alpha)$  é equivalente a  $(0, \alpha)$ , então

$$y_0 + \alpha = r(2 - 2\alpha) + r2\alpha + \alpha \Rightarrow$$

$$y_0 + \alpha = 2r - 2r\alpha + r2\alpha + \alpha \Rightarrow$$

$$y_0 + \alpha = 2r + \alpha \Rightarrow$$

$$y_0 = 2r + \alpha - \alpha \Rightarrow$$

$$y_0 = 2r$$

Portanto,  $y_0 \in 2\mathbb{Z}$ .

□

**Proposição 2.5.** Se  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  e  $(0, \alpha)$  são equivalentes, então  $x_0, y_0 \in 2\mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Segue dos Lemas 2.1 e 2.2.

□

**Lema 2.3.** Se a trajetória começa no segmento  $\overline{AD}$  em  $(0, \alpha)$  e termina em um ponto  $(x_0, y_0 - \alpha)$  com  $x_0, y_0 \in 2\mathbb{Z}$ , então o ponto de massa termina em um canto antes da trajetória completar um período.

*Demonstração.* O ponto inicial da trajetória é  $(0, \alpha)$  e o ponto final é  $(x_0, y_0 - \alpha)$ . Portanto, a linha de trajetória é a linha através desses dois pontos. Isso significa que ponto médio da linha está na trajetória. O ponto médio dessa linha é  $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2})$  e pela Proposição 2.5, temos que  $(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}) \in \mathbb{Z}$  e, logo esse ponto é um vértice. Portanto, o ponto de massa passa por um vértice antes do período ser concluído.

□

**Corolário 2.2.** *O número de reflexões verticais necessárias para uma trajetória periódica começando em  $(0, \alpha)$  é sempre par, pois se for ímpar temos que o ponto final é da forma  $(y_0 - \alpha)$  e a trajetória acaba em um vértice anterior.*

**Lema 2.4.** *Só existem trajetórias periódicas pares, isto é, se uma trajetória é periódica a quantidade de impactos é par.*

*Demonstração.* Pelo resultado da Proposição 2.5 sabemos que  $x_0, y_0 \in 2\mathbb{Z}$ . Para que  $x_0 \in 2\mathbb{Z}$  o número de reflexões horizontais do domínio o bilhar deve ser ímpar. E para que  $y_0 \in 2\mathbb{Z}$  o número de reflexões verticais do domínio do bilhar deve ser par. Temos essa diferença porque o ponto inicial está na linha inteira quando  $x = 0$  e cai sobre linhas inteiras verticalmente.

Mas, temos que a soma de um número par e um número ímpar é ímpar. E o número total de reflexões para mapear a trajetória é ímpar. No entanto, devemos considerar o ponto inicial da trajetória. O primeiro impacto ocorre antes de refletirmos o domínio do bilhar. Então, devemos adicionar o primeiro impacto a este número ímpar de impactos. Assim, o número total de impactos é par.

**Corolário 2.3.** *E, se o número de impactos, em uma trajetória é ímpar, a trajetória não pode ser periódica.*

□

## Trajétórias em bilhares retangulares

### 3.1 Trajetória periódica de dois impactos

**Proposição 3.1.** *Fixado um lado do retângulo temos que para todo ponto  $A$  existe uma única trajetória de período 2 passando por  $A$ .*



Figura 31 – Trajetória periódica de 2 impactos em um domínio retangular

*Demonstração.* A prova é análoga a da Proposição 2.1.

□

### 3.2 Trajetórias periódicas

As trajetórias em domínios retangulares desdobram no plano de forma similar as trajetórias dos domínios quadrangulares. Assim, os Lemas mostrados anteriormente em domínios

quadrangulares tem provas semelhantes nos domínios retangulares.

Podemos analisar as trajetórias em polígonos retangulares fazendo a decomposição separada da componente horizontal e vertical. Ao realizar as reflexões, a componente horizontal só será afetada se as reflexões acontecerem nas laterais. Já a componente vertical será afetada se as reflexões acontecerem na parte superior e inferior do retângulo.

Para o domínio de um bilhar retangular vamos considerar o retângulo  $ABCD$  posicionado no plano de forma que o vértice  $A$  esteja em  $(0, b)$ ,  $B$  em  $(a, b)$ ,  $C$  em  $(a, 0)$  e  $D$  em  $(0, 0)$ . E a trajetória iniciando sobre o segmento  $\overline{AD}$  e coordenada  $(0, \alpha)$  com  $\alpha \in (0, a)$  e terminando sua trajetória no ponto final de coordenada  $(x_0, y_0 + \alpha)$ . Desta maneira, para estudarmos esta trajetória basta analisarmos a reta no plano reticulado determinada pelo método do desdobramento. A equação da trajetória no retângulo será

$$\frac{y_0}{x_0}x + \alpha$$

Generalizaremos as provas dos Lemas 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

**Lema 3.1.** *Se a trajetória é periódica terminando no ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $x_0 \in 2a\mathbb{Z}$ .*

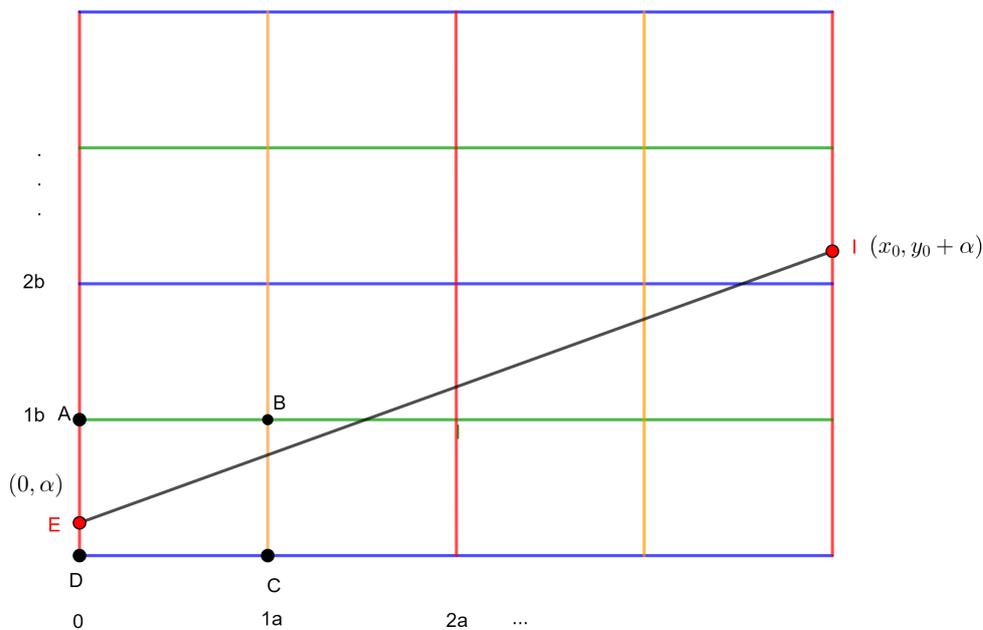


Figura 32 – Domínio retangular - reflexão

*Demonstração.* Para que a trajetória inicie em  $(0, \alpha)$  e retorne qualquer ponto sobre o segmento  $\overline{AD}$  incluindo  $(0, \alpha)$  ele deve sair do ponto inicial e impactar a reta determinada pelos pontos  $B$  e  $C$ .

Com o desdobramento do plano, isso significa que a trajetória deve partir do ponto  $(0, \alpha)$  de  $\overline{AD}$  para um ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$  interceptando o segmento  $\overline{BC}$ .

Então, vamos posicionar o quadrado com o segmento  $\overline{BC}$  em  $x = 1a$ .

Estamos investigando quando o retângulo é refletido horizontalmente, porque reflexões verticais não alteram o  $x_0$ .

Quando o retângulo é refletido horizontalmente sobre o segmento onde  $x = 1a$ . Assim, o segmento  $\overline{AD}$  sobre  $x = 2a$ .

Em seguida, a reflexão sobre o segmento onde  $x = 2a$  posiciona o segmento  $\overline{BC}$  sobre  $x = 3a$ .

Assim, o segmento equivalente a  $\overline{AD}$  sempre será posicionado em uma linha par. Da mesma forma, as sucessivas reflexões posicionarão o segmento equivalente a  $\overline{BC}$  posicionado em uma linha ímpar.

Portanto, o ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  é o ponto final da trajetória que é equivalente ao ponto inicial  $(0, \alpha)$ . E  $x_0$  não pode estar em uma linha ímpar. Então,  $x_0 \in 2a\mathbb{Z}$ .

□

**Lema 3.2.** Se a trajetória é periódica terminando em  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ .

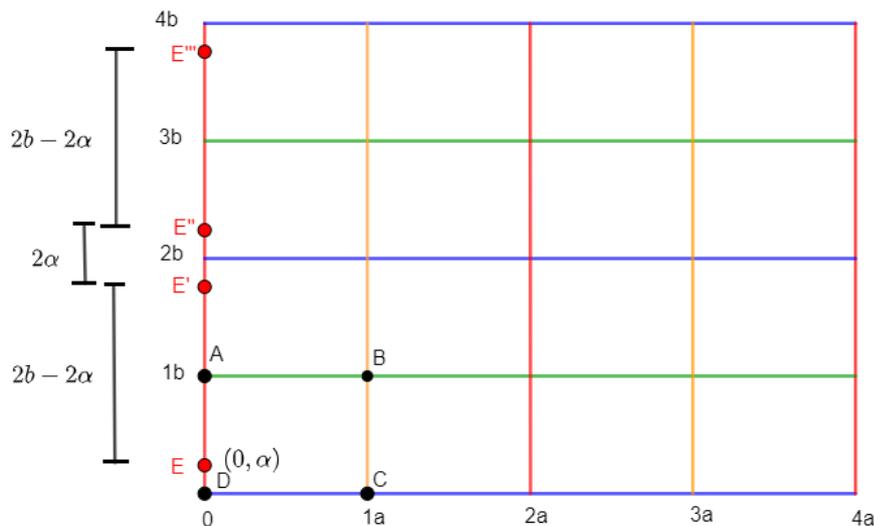


Figura 33 – Domínio retangular - reflexão vertical

*Demonstração.* Se a trajetória do ponto de massa terminar em uma coordenada  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  e esse ponto for equivalente a  $(0, \alpha)$ , então, é possível refletir a trajetória por linhas inteiras do ponto  $(0, \alpha)$  até o ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$ . Vamos começar com  $y = 1b$ , depois  $y = 2b$ , e assim, por diante. Assim, a distância entre duas reflexões sucessivas de  $(0, \alpha)$  é  $2\alpha$  ou  $2b - 2\alpha$ . Pois, o ponto é sempre uma distância  $\alpha$  ou de  $1b - \alpha$  da linha inteira mais próxima.

Se refletirmos uma vez, a distância entre as duas reflexões sucessivas de  $(0, \alpha)$  será de  $2b - 2\alpha$ . Se refletirmos novamente, a distância entre  $(0, \alpha)$  e o ponto refletido será de  $2b - 2\alpha + 2\alpha$ .

A medida que continuamos a refletir o ponto, continuamos alternando entre  $2b - 2\alpha + 2\alpha$  e  $2\alpha$ .

Assim, se refletirmos um número par de vezes, a nova coordenada  $y$  será  $r(2b - 2\alpha) + r2\alpha + \alpha$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ .

Se refletirmos um número ímpar de vezes, já estamos alternando a distância entre as reflexões de  $2b - 2\alpha + 2\alpha$  e  $2\alpha$ , iremos começar com  $2b - 2\alpha$  e a nova coordenada de  $y$  será  $r(2b - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha + \alpha$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ .

Isso significa que se  $(x_0, y_0 - \alpha)$  for equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $y_0 + \alpha = r(2b - 2\alpha) + r2\alpha + \alpha$  ou  $y_0 - \alpha = r(2b - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha + \alpha$ , com  $r \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} y_0 - 2\alpha &= r(2b - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha + \alpha - \alpha \Rightarrow \\ y_0 - 2\alpha &= r(2b - 2\alpha) + (r - 1)2\alpha \Rightarrow \\ y_0 - 2\alpha &= 2rb - 2r\alpha + 2r\alpha - 2\alpha \Rightarrow \\ y_0 - 2\alpha &= 2rb - 2\alpha \Rightarrow \\ y_0 &= 2rb - 2\alpha + 2\alpha \Rightarrow \\ y_0 &= 2rb \end{aligned}$$

Logo,  $y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ .

Da mesma forma, se  $(x_0, y_0 + \alpha)$  é equivalente a  $(0, \alpha)$ , então

$$\begin{aligned} y_0 + \alpha &= r(2b - 2\alpha) + r2\alpha + \alpha \Rightarrow \\ y_0 + \alpha &= 2rb - 2r\alpha + r2\alpha + \alpha \Rightarrow \\ y_0 + \alpha &= 2rb + \alpha \Rightarrow \\ y_0 &= 2rb + \alpha - \alpha \Rightarrow \\ y_0 &= 2rb \end{aligned}$$

Por consequência,  $y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ . Se  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  for o ponto final da trajetória e for equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ .

Para que  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  e  $(0, \alpha)$  sejam equivalentes, devemos refletir o ponto por linhas inteiras sucessivas com  $x_0, y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ .

Esse processo se encaixa no método de desdobrar as trajetórias refletindo no domínio do bilhar. Mas, essa equivalência permite reflexões por quaisquer linhas inteiras, então devemos mostrar que para  $(0, \alpha)$  e  $(x_0, y_0)$  serem equivalentes  $x_0$  e  $y_0$  devem ser par.

□

**Proposição 3.2.** *Se a trajetória é periódica terminando no ponto  $(x_0, y_0 \pm \alpha)$  equivalente a  $(0, \alpha)$ , então  $x_0 \in 2a\mathbb{Z}$  e  $y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ .*

Como nos Lemas 3.1 e 3.2 as demonstrações dos Lemas 3.3 e 3.4 são análogas as feitas nos Lemas 2.3 e 2.4.

**Lema 3.3.** *Se a trajetória começa no segmento  $\overline{AD}$  em  $(0, \alpha)$  e termina em um ponto  $(x_0, y_0 - \alpha)$  com  $x_0 \in 2a\mathbb{Z}$ ,  $y_0 \in 2b\mathbb{Z}$ , então o ponto de massa termina em um canto antes da trajetória completar um período.*

**Lema 3.4.** *A trajetória não pode ser periódica se o número de impactos é ímpar.*

**Lema 3.5.** *Se a trajetória tem como ponto inicial  $(0, \alpha)$  e ponto final  $(x_0, y_0 + \alpha)$ , com esse último equivalente a  $(0, \alpha)$  tal que  $x_0 = bm$  e  $y_0 = an$  e  $\frac{\alpha}{a} = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q \in \mathbb{Z}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , então a trajetória irá impactar em um canto se e somente se  $q \mid m$  e  $p \in 2\mathbb{Z}$  ou se  $\frac{m}{q} \in 2\mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* A equação da reta que representa a trajetória é dada por

$$y = \frac{y_0}{x_0}x + \alpha \quad (3.1)$$

Suponha que a trajetória impacte um canto quando  $x = sb$ ,  $y = ra$ , para algum  $s, r \in \mathbb{Z}$ . Então, o ponto  $x_0 = bm$  e  $y_0 = an$  satisfazem a equação da reta 3.1.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{y_0}{x_0} x + \alpha \Rightarrow \\
ra &= \frac{y_0}{x_0} sb + \alpha \Rightarrow \\
ra &= \frac{an}{bm} sb + \alpha \Rightarrow \\
ra &= \frac{ans}{m} + \alpha \Rightarrow \\
r &= \frac{ns}{m} + \frac{\alpha}{a} \Rightarrow \\
r &= \frac{ns}{m} + \frac{p}{q} \Rightarrow \\
mr &= ns + \frac{mp}{q}
\end{aligned}$$

Temos que  $m, n \in 2\mathbb{Z}$  pelos Lemas 3.1 e 3.2 desde que  $r, s \in \mathbb{Z}$  e  $mr, ns \in 2\mathbb{Z}$ .

Essa equação só será verdadeira se  $\frac{mp}{q}$  for um inteiro par. Isso ocorre se e somente se  $q \mid m$  e  $p \in 2\mathbb{Z}$  ou  $\frac{m}{q} \in 2\mathbb{Z}$ , desde que  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . □

**Observação 3.1.** Note que estas são as únicas trajetórias dentro do domínio retangular que podem terminar nos vértices e uma condição necessária para que isso ocorra é que  $\frac{\alpha}{a}$  seja racional.

---

# Trajétoria de uma bola em um bilhar triangular

O estudo de trajetórias periódicas em domínios triangulares pode ser dividido em triângulos acutângulos e retângulos.

Vale lembrar que o método do desdobramento utilizado anteriormente em trajetórias com domínios quadrangulares e retangulares não podem ser usados em domínios triangulares quaisquer, pois não podemos associar os lados do triângulo de forma que as linhas mantenham a mesma direção.

Em cada triângulo acutângulo há uma trajetória periódica de três impactos. Essa trajetória é formada pelo triângulo órtico, conforme a Definição 1.10 solução do Problema de Fagnano, como veremos adiante que essa trajetória é chamada de trajetória de Fagnano.

Em triângulos retângulos não podemos traçar uma trajetória de Fagnano, ela termina ao impactar o vértice cujo ângulo é de  $90^\circ$ . Mas, conseguimos determinar famílias de trajetórias periódicas.

Já em triângulos obtusângulos os resultados estão em aberto para as trajetórias periódicas e como não se encontra no escopo desse trabalho.

Vamos usar a solução do problema de Heron para encontrar a trajetória de Fagnano em domínios triangulares.

## 4.1 Problema de Fagnano e a existência de trajetória periódica de três impactos em triângulos agudos

*Problema de Fagnano:* Dado um triângulo acutângulo inscrever nele um outro triângulo de perímetro mínimo.

A solução do problema de Fagnano pode ser feita através da solução Problema de Heron.

**Teorema 4.1.** (*Problema de Heron*) - Dada uma reta  $r$  e dois pontos  $P$  e  $Q$ , não pertencentes a  $r$  e do mesmo semiplano em relação à  $r$ , e sendo  $R$  um ponto de  $r$ , então temos que o comprimento  $\overline{PR} + \overline{QR}$  é mínimo quando  $\overline{PR}$  e  $\overline{QR}$  fazem o mesmo ângulo com  $r$ . [6]

*Demonstração.* Se  $P'$  é o ponto simétrico de  $P$  em relação à reta  $r$ , afirma-se que o ponto  $R$  desejado é o ponto de interseção de  $\overline{P'Q}$  com  $r$ , conforme figura 34.

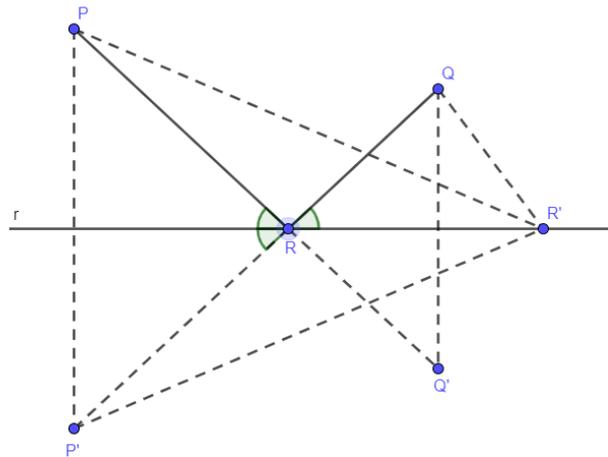


Figura 34 – Problema de Heron

Vamos tomar  $R'$  um ponto qualquer de  $r$ , tal que  $R' \neq R$ . Como  $P'$  é simétrico de  $P$  em relação à  $r$ , nos garante que:

$$\overline{PR} = \overline{P'R} \quad (4.1)$$

e, também;

$$\overline{PR'} = \overline{P'R'} \quad (4.2)$$

Pelas igualdades (4.1), (4.2) e pela Proposição 1.5, temos que:

$$\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{P'R} + \overline{RQ} = \overline{P'Q} < \overline{P'R'} + \overline{R'Q} = \overline{PR'} + \overline{R'Q}$$

□

**Teorema 4.2.** (Problema de Fagnano) - Seja  $ABC$  um triângulo agudo. Existe um único triângulo  $DEF$  de perímetro mínimo inscrito (isto é, cujos vértices estão sobre cada um dos lados do triângulo dado) no triângulo  $ABC$ .

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo qualquer. E sobre os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , temos os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente.

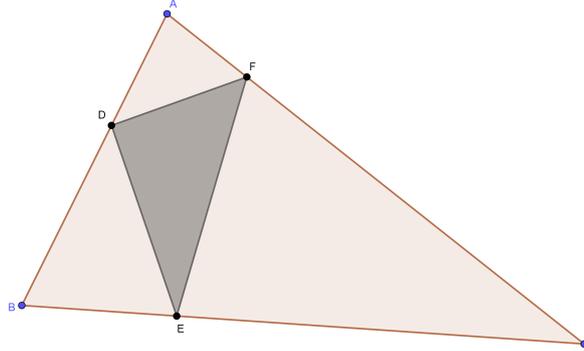


Figura 35 – Teorema de Fagnano - Triângulo acutângulo qualquer

Pelo Teorema 4.1 para que o comprimento seja mínimo entre os pontos  $D$  e  $E$  passando por  $\overline{AC}$  teremos que ter um ponto  $F \in \overline{AC}$  tal que

$$\widehat{AFD} = \widehat{CFE} = \beta$$

Assim,  $\overline{DF} + \overline{FE}$  é mínimo.

De maneira análoga, temos que

$\widehat{CEF} = \widehat{BED} = \alpha$  e,  $\overline{FE} + \overline{ED}$  é mínimo.

E,  $\widehat{ADF} = \widehat{BDE} = \theta$  e assim,  $\overline{FD} + \overline{DE}$  é mínimo.

Sabemos que soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a  $180^\circ$ .

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

Por outro lado, temos que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \theta = 180^\circ \quad (4.3)$$

$$\widehat{B} + \alpha + \theta = 180^\circ \quad (4.4)$$

$$\widehat{C} + \beta + \alpha = 180^\circ \quad (4.5)$$

Somando as equações (4.3), (4.4) e (4.5) temos que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + 2\alpha + 2\beta + 2\theta = 540^\circ$$

$$180^\circ + 2\alpha + 2\beta + 2\theta = 540^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\theta = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

Por consequência,  $\widehat{A} = \alpha$ ,  $\widehat{B} = \beta$  e  $\widehat{C} = \theta$ .

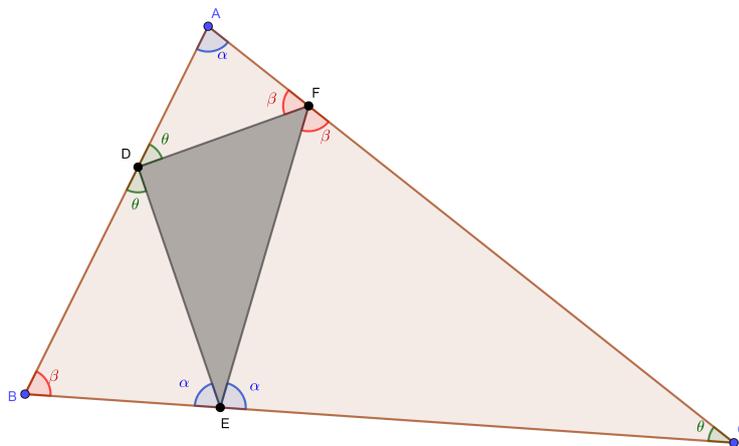


Figura 36 – Teorema de Fagnano - Ângulos congruentes

Agora, vamos considerar os segmentos  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$ .

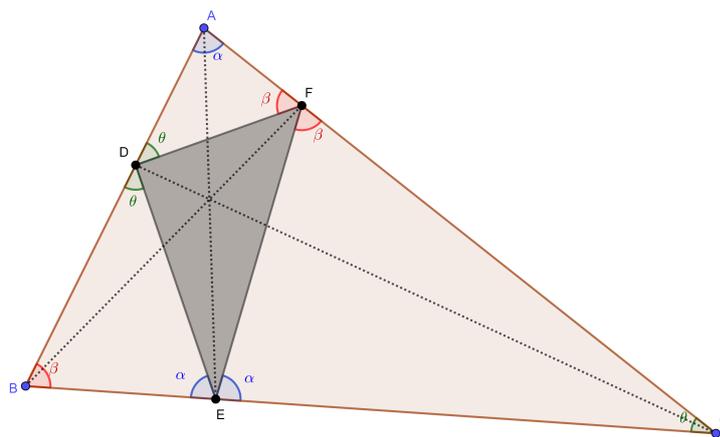


Figura 37 – Teorema de Fagnano - Cevianas

O quadrilátero  $ABEF$  é inscritível, pela Proposição 1.2, pois

$$\widehat{BAF} = \widehat{FEC} = \alpha$$

ou

$$\widehat{ABE} = \widehat{EFC} = \beta$$

Seja  $\widehat{ABF} = x$  e  $\widehat{FBE} = \beta - x$ . Pela Definição 1.8 temos que:

$$\widehat{FBE} = \beta - x = \widehat{FAE}$$

$$\widehat{ABF} = x = \widehat{AEF}$$

$$\widehat{BAE} = \alpha - \beta + x = \widehat{BFE}$$

O quadrilátero  $BCFD$  é inscritível, pela Proposição 1.2, pois

$$\widehat{BCF} = \widehat{FAD} = \theta$$

ou

$$\widehat{DBC} = \widehat{DFA} = \beta$$

Seja  $\widehat{DBF} = x = \widehat{DCF}$ . Pela Definição 1.8 temos que:

$$\widehat{BCD} = \theta - x = \widehat{BFD}$$

$$\widehat{FBC} = \beta - x = \widehat{FDC}$$

O quadrilátero  $ACED$  é inscritível, pela Proposição 1.2, pois

$$\widehat{ACE} = \widehat{EDB} = \theta$$

ou

$$\widehat{CAD} = \widehat{DEB} = \alpha$$

Seja  $\widehat{ACD} = x = \widehat{AED}$  e  $\widehat{CAE} = \beta - x = \widehat{CDE}$ . Pela Definição 1.8 temos que:

$$\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$$

$$\theta + \beta - x = x + \alpha \quad (4.6)$$

$$\theta - x = x + \alpha - \beta$$

e,

$$\widehat{BFE} = \theta - x$$

Assim, mostramos que  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CD}$  são bissetrizes, respectivamente de  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ .

As bissetrizes de um triângulo se encontram em um único ponto, que é chamado de Incentro do triângulo.

Como  $\widehat{AEB}$  e  $\widehat{BEC}$  são suplementares, temos que  $\alpha + x + \alpha + x = 180^\circ$ . Assim,  $\alpha + x = 90^\circ$  e pela equação (4.6)  $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ .

$\widehat{BDC}$  e  $\widehat{ADC}$  também são suplementares. Assim,  $\widehat{BDC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ .

De modo semelhante,  $\widehat{BFA}$  e  $\widehat{CFA}$  são suplementares. E,  $\widehat{BFA} = \widehat{CFA} = 90^\circ$ .

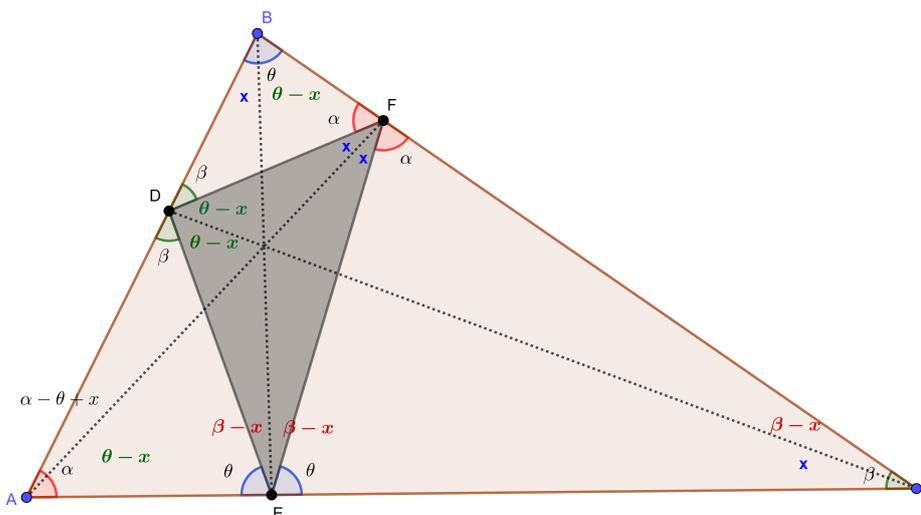


Figura 38 – Teorema de Fagnano

Logo, as bissetrizes  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CD}$  também são alturas do triângulo  $ABC$ , que é o triângulo órtico, conforme definição 1.10.

Sendo assim, está demonstrado que num triângulo acutângulo, o triângulo órtico é o triângulo inscrito que tem menor perímetro. Assim, a figura 39 nos mostra que o triângulo órtico é uma trajetória periódica do bilhar.

□

**Teorema 4.3.** *O triângulo formado conectando os pontos das alturas em um triângulo agudo é uma trajetória de periódica de três impactos.*

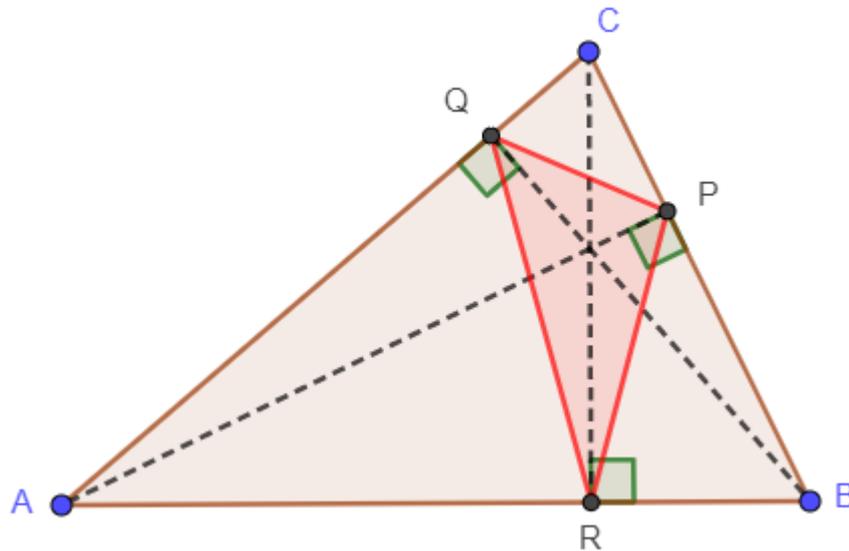


Figura 39 – Triângulo de Fagnano

*Demonstração.* A prova segue do Teorema 4.2.

□

## 4.2 Trajetórias periódicas em triângulos retângulos

Não conseguimos traçar trajetórias de Fagnano em triângulos retângulos. A trajetória termina ao impactar o vértice cujo ângulo é  $\frac{\pi}{2} rad$ . Mas, podemos traçar famílias de trajetórias periódicas nesse domínio. Para isso vamos utilizar [8] como referência.

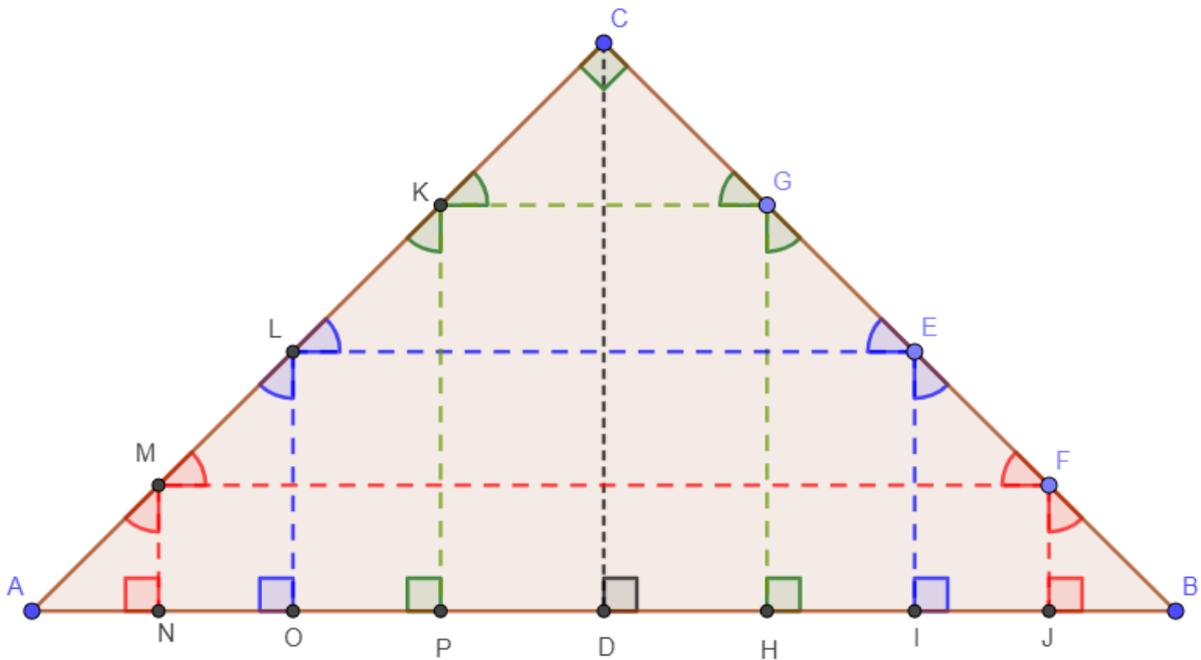


Figura 40 – Família de trajetórias periódicas no triângulo retângulo

Como mostra a figura 40. A trajetória em preto incide no ângulo de  $\frac{\pi}{2} rad$  e termina. Pois, intercepta um dos vértices.

Já as trajetórias em vermelho, azul e verde nos mostram algumas trajetórias periódicas. Assim, verificamos que essas trajetórias periódicas serão de seis impactos, retornando ao ponto inicial.

**Lema 4.1.** *Uma trajetória perpendicular à hipotenusa em um triângulo retângulo é periódica contanto que atinja os outros dois lados antes de retornar.*

*Demonstração.* Vamos supor um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $\hat{C}$  e que a trajetória inicia da hipotenusa perpendicular em um ponto  $P$ . Assim, reflete em  $\overline{BC}$  no ponto  $Q$  e em  $\overline{AC}$  em  $R$ .

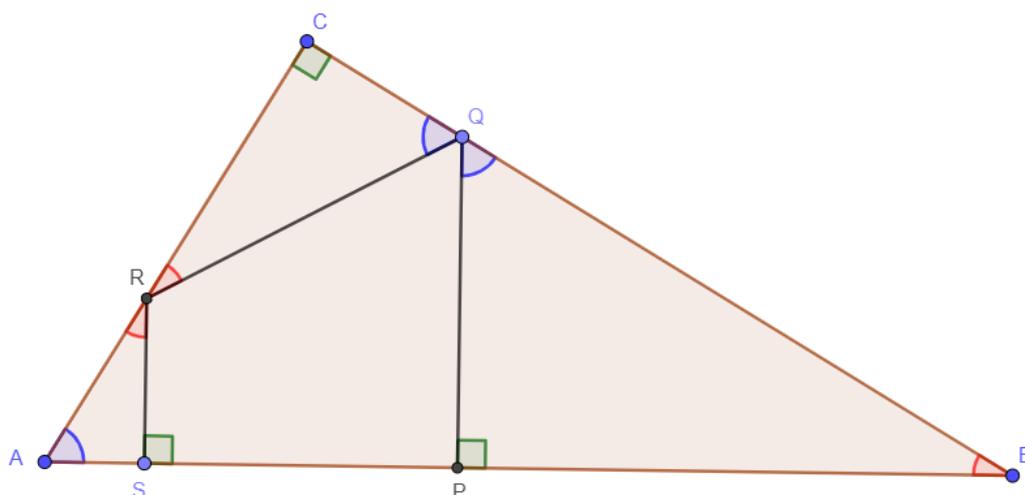


Figura 41 – Trajetória perpendicular

Assim, verificamos que  $C\hat{Q}R = P\hat{Q}B$  e  $Q\hat{R}C = A\hat{R}S$ , pois o impacto satisfaz a lei de reflexão.

Note que:

- Os triângulos  $QBP$  e  $ABC$  são semelhantes, pois, tem o ângulo  $\hat{B}$  em comum e os ângulos  $\hat{P}$  e  $\hat{C}$  de  $90^\circ$ .
- Os triângulos  $QRC$  e  $ABC$  são semelhantes, pois, tem o ângulo  $\hat{A}$  em comum e o ângulo  $\hat{C}$  de  $90^\circ$ .
- Os triângulos  $ARS$  e  $ABC$  são semelhantes, pois, tem o ângulo  $\hat{A}$  em comum e os ângulos  $\hat{S}$  e  $\hat{C}$  de  $90^\circ$ .

Então,  $R\hat{S}A = 90^\circ$  e a trajetória  $PQRSPQ$  é periódica.

□

---

# Trajétoria de Fagnano em polígonos convexos

Estamos interessados em compreender quais domínios poligonais admitem trajetórias periódicas poligonais.

Seguindo o resultado da trajetória de Fagnano que é uma trajetória periódica para domínios triangulares vamos mostrar que podemos traçar trajetórias com perímetros mínimos em domínios poligonais.

Portanto, generalizaremos a trajetória de Fagnano em polígonos convexos e usaremos como referência [4].

**Definição 5.1.** *Um  $n$ -ciclo em  $A$  é uma linha poligonal fechada  $P_1P_2\cdots P_n$ , onde  $P_i$  encontra-se no segmento de linha aberta  $(A_iA_{i+1})$  para todo  $i$ .*

*O comprimento é dado por:*

$$\lambda(P_1P_2\cdots P_n) = \sum_{i=1}^n |P_iP_{i+1}|$$

**Lema 5.1.** *Qualquer  $n$ -ciclo  $P$  em um polígono convexo também é um polígono convexo.*

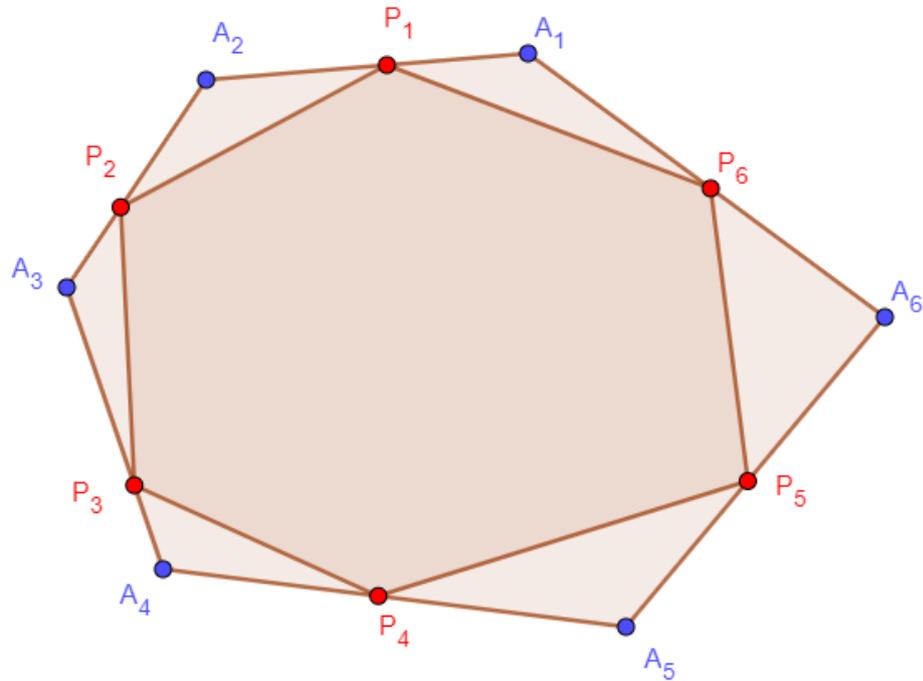


Figura 42 – Polígono Convexo

*Demonstração.* Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  a reta  $l_{P_i P_{i+1}}$  intercepta a região poligonal fechada  $\overline{I(A)}$ . A reta determinada por  $P_i P_{i+1}$  divide o plano em dois semi-planos. Assim, segue da Definição 1.3 que um polígono diz-se convexo quando a região por ele limitada é uma figura plana convexa. Logo, os segmentos formados por  $P_1 P_2 \dots P_n$  formaram um polígono convexo.

□

**Definição 5.2.** Um  $n$ -ciclo em  $A$  é chamado de pedal se houver um ponto  $P$  cujas projeções nos lados de  $A$  são exatamente os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

**Exemplo 5.1.** O pedal de 3 ciclos corresponde ao ortocentro de um triângulo agudo é chamado de triângulo órtico. Como podemos verificar na figura 16.

**Definição 5.3.** Uma trajetória de Fagnano é um  $n$ -ciclo  $P_1 P_2 \dots P_n$  em  $A$  satisfazendo a Lei de reflexão óptica em cada  $P_i$ .

$$A_i \hat{P}_i P_{i-1} = A_{i+1} \hat{P}_i P_{i+1}$$

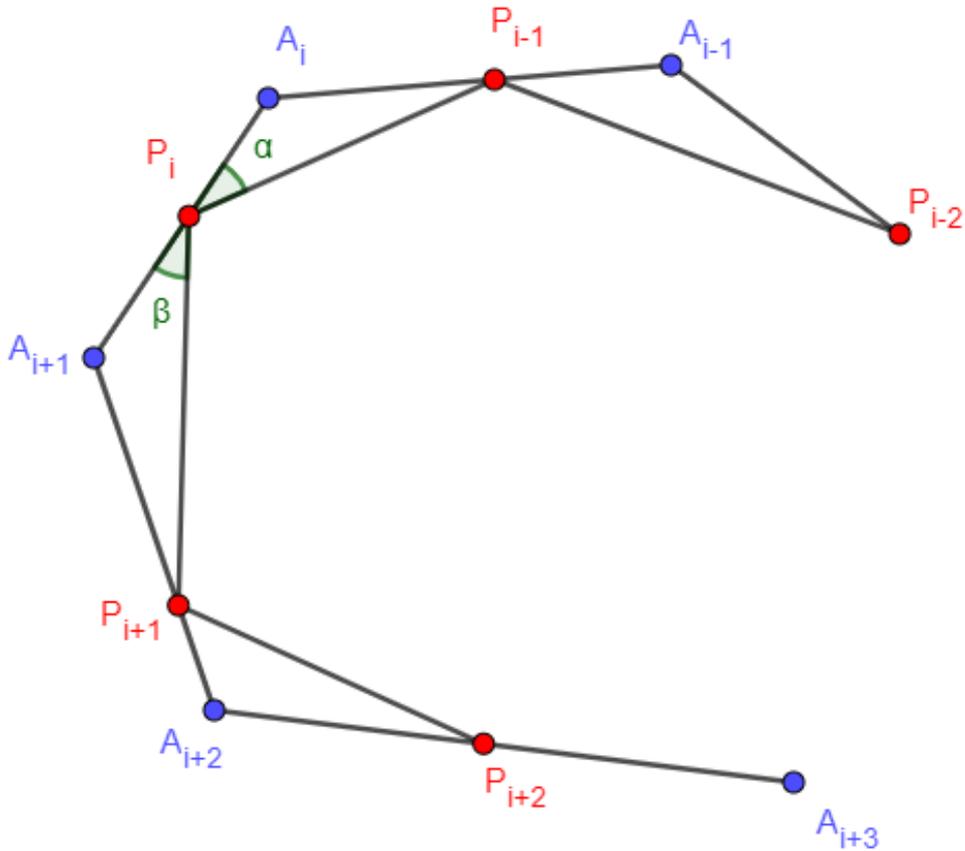


Figura 43 – Polígono - Satisfazendo a lei óptica

Assim, a trajetória de Fagnano é uma trajetória periódica de bilhar tocando sucessivamente em ordem cada um dos lados da mesa exatamente uma vez antes de voltar ao seu ponto inicial.

**Teorema 5.1.** *Qualquer  $n$ -ciclo em  $A$  de comprimento mínimo é uma trajetória de Fagnano.*

*Demonstração.* Suponha que para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  os dois ângulos  $P_{i-1}\widehat{P}_iA_i$  e  $P_{i+1}\widehat{P}_iA_{i+1}$  não são congruentes, por exemplo:

$$P_{i-1}\widehat{P}_iA_i < P_{i+1}\widehat{P}_iA_{i+1}$$

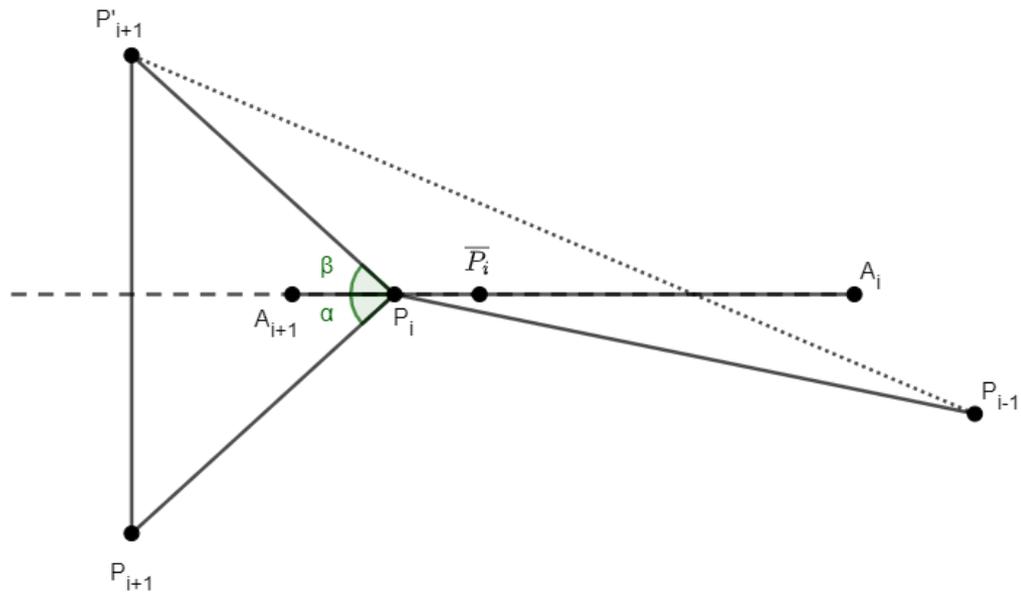


Figura 44 – Comprimento mínimo - Trajetória de Fagnano

Vamos refletir o ponto  $P_{i+1}$  em relação ao segmento  $\overline{A_i A_{i+1}}$  no ponto  $P'_{i+1}$ .

Então, teremos que o comprimento do segmento  $\overline{P_{i-1} P_i P'_{i+1}}$  pode ser reduzido deslocando  $P_i$  em direção a  $A_i$  até um ponto  $\bar{P}_i$ .

Assim, iremos obter um novo  $n$ -ciclo  $P_1 P_2 \dots P_{i-1} \bar{P}_i P_{i+1} \dots P_n$  de comprimento estritamente menor.

Conforme já provado no Teorema 4.1.

□

**Definição 5.4.** Um polígono  $A$  é denominado cíclico se todos os seus vértices estiverem em um círculo denominado circuncentro de  $A$ .

**Teorema 5.2.** Seja  $A$  um polígono cíclico com circuncentro  $O$  e  $P_1 P_2 \dots P_n$  um polígono de  $n$ -ciclo em  $A$ . Vamos denotar por  $\theta_i$  os ângulos formados pelas linhas orientadas  $l_{OA_i}$  e  $l_{P_{i-1}P_i}$ . Então, o  $n$ -ciclo  $P_1 P_2 \dots P_n$  é uma trajetória de Fagnano em  $A$  somente se  $\theta_i + \theta_{i+1} = \pi$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.1, temos:

$$\theta_{i+1} = \widehat{OA_{i+1}P_i} + \widehat{P_{i+1}\bar{P}_iA_{i+1}} \quad (5.1)$$

$$\pi - \theta_i = \widehat{P_{i-1}\bar{P}_iA_i} + \widehat{O_{i+1}\bar{A}_iP_i} \quad (5.2)$$

O polígono  $A$  é inscrito, assim os seus vértices pertencem à circunferência. O triângulo  $A_{i+1}OA_i$  é isósceles, pois  $OA_{i+1}$  e  $OA_i$  são raios da circunferência. Assim, os ângulos da base são congruentes.

$$\widehat{OA_{i+1}P_i} = \widehat{OA_iP_i}$$

Subtraindo as equações (5.1) e (5.2) temos:

$$\theta_{i+1} - \pi + \theta_i = P_{i+1}\widehat{P_iA_{i+1}} - P_{i-1}\widehat{P_iA_i}$$

$$\theta_{i+1} + \theta_i = P_{i+1}\widehat{P_iA_{i+1}} - P_{i-1}\widehat{P_iA_i} + \pi$$

Assim, temos que na trajetória de Fagnano que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

$$P_{i+1}\widehat{P_iA_{i+1}} = P_{i-1}\widehat{P_iA_i}$$

Portanto,  $\theta_{i+1} + \theta_i = \pi$

□

---

## Considerações Finais

Neste estudo, nosso objetivo foi mostrar a existência de trajetórias periódicas em polígonos convexos.

Utilizamos a Geometria Euclidiana Plana de uma maneira diferente do que é abordado na sala de aula. Uma das contribuições desse trabalho foi investigar e desenvolver os conteúdos de forma a relacioná-los com a necessidade de compreender como poderíamos encontrar trajetórias periódicas em polígonos convexos conforme a proposta. Todo o processo começou com a pesquisa e o estudo relacionados a bilhares poligonais. No início, tínhamos o intuito de relacionar somente com alguns quadriláteros e triângulos. Mas, como consequência optamos por relacionar esse estudo com a trajetória de Fagnano nos triângulos acutângulos e estender essa compreensão para domínios poligonais.

No sistema educacional temos a necessidade de reformular a prática pedagógica constantemente de forma que as nossas aulas não fiquem ultrapassadas, tragam significado e tornem mais interessantes para os nossos alunos. Um dos aportes desse trabalho foi a utilização como forma de construção das figuras, o *GeoGebra*. Uma ferramenta gratuita que permite explorar e confirmar alguns resultados, auxiliando na propagação, desenvolvimento e aquisição de conteúdos.

Considerando o potencial de se trabalhar a Geometria Euclidiana Plana sob uma nova perspectiva e passada a condição em que nos encontramos da pandemia de COVID-19, com o retorno das aulas presenciais na rede pública de ensino é de desejo trabalhar com tal assunto, almejando mostrar novas abordagens e desenvolvimento do tema. E assim, levar algo diferente de forma a contribuir para melhorar a Educação Básica no nosso país.

---

## Referências

- [1] João Lucas Marques Barbosa. *Geometria euclidiana plana*. SBM, 1985. Citado na página [23](#).
- [2] Dusty Brooks. N-impact trajectories in rectangular billiards. 2011. Citado 2 vezes nas páginas [29](#) e [38](#).
- [3] Valderi Candido da COSTA et al. Números construtíveis. 2013. Citado na página [19](#).
- [4] A Deniz and AV Ratiu. On the existence of fagnano trajectories in convex polygonal billiards. *Regular and Chaotic Dynamics*, 14(2):312–322, 2009. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [58](#).
- [5] Osvaldo DOLCE and José Nicolau POMPEO. Geometria plana. *Fundamentos de matemática elementar. São Paulo: Atual*, 9:45–47, 1985. Citado na página [17](#).
- [6] Raquel Maria Almeida Faria. *Interpretação geométrica dos problemas clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti*. PhD thesis, 2013. Citado na página [50](#).
- [7] EF Robertson JJ O'Connor. Giovanni francesco fagnano dei tochi. Disponível em: [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fagnano\\_Giovanni/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fagnano_Giovanni/). Acesso em: 4 Janeiro 2022, 2022. Citado na página [14](#).
- [8] Emil Ledberg. Introduction to rational billiards, 2018. Citado na página [55](#).
- [9] Elon Lages Lima. Qual é mesmo a definição de polígono convexo? *Revista do Professor de Matemática*, 21, 1991. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [18](#).
- [10] Alberto Saa and Renato de Sá Teles. *Bilhares: aspectos físicos e matemáticos*. IMPA, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [16](#).

- 
- [11] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30. American Mathematical Soc., 2005. Citado na página [16](#).