



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Francisco das Chagas de Sousa Bezerra

Abordagem do pensamento estatístico no livro didático  
de Matemática da rede estadual do Maranhão sobre  
medidas de tendência central

Teresina - 2022



**Francisco das Chagas de Sousa Bezerra**

**Dissertação de Mestrado:**

**Abordagem do pensamento estatístico no livro didático de  
Matemática da rede estadual do Maranhão sobre medidas de  
tendência central**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientadora: Profa. Dra. Lya Raquel Oliveira dos Santos.

Coorientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

**Teresina - 2022**

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI  
Biblioteca Setorial do CCN

B574a Bezerra, Francisco das Chagas de Sousa.  
Abordagem do pensamento estatístico no livro didático de matemática da rede estadual do Maranhão sobre medidas de tendências central / Francisco das Chagas de Sousa Bezerra. – 2022.  
101 f.  
  
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Teresina, 2022.  
“Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lya Raquel Oliveira dos Santos”.  
Coorientador: Prof. Dr. Isaias Pereira de Jesus.  
  
1. Estatística. 2. Livro Didático – Análise de Conteúdo. 3. Matemática – Ensino Médio. I. Santos, Lya Raquel Oliveira dos. II. Título.

CDD 310

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Francisco das Chagas de Sousa Bezerra

Abordagem do pensamento estatístico no livro didático de  
Matemática da rede estadual do Maranhão sobre medidas de  
tendência central

Dissertação submetida à banca examinadora  
abaixo discriminada em defesa pública e apro-  
vada em 25/02/2022.

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Lya Raquel Oliveira dos Santos. (Orientadora)

Universidade Federal do Piauí



Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (Coorientador)

Universidade Federal do Piauí



Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares

Instituto Federal de Educação do Piauí

*Dedico esta dissertação à minha família em especial meus pais, Manoel (in memoriam) e Zilda, minha esposa Lorena e minha filha Alícia, que em todo instante me apoiaram e continuam me dando forças, para sempre continuar buscando os meus objetivos!*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar à Deus, pois me apoiei bastante na fé pra realizar este trabalho.

Ao apoio familiar principalmente da minha esposa Lorena que me deu forças para não desistir e a todo instante me insentiva a levantar a cabeça nas horas mais difíceis, agradeço a minha filha Alícia, pois ela é a fonte inspiradora de nunca desistir e saiba minha filha, é tudo por você!

Ao meu pai Manoel, que se foi muito cedo, mas que sempre me deu apoio nos estudos e a minha mãe Zilda, minha guerreira, que sempre cuidou para que meus objetivos fossem alcançados. Obrigado meus pais!

A paciência e auxílio da minha Orientadora Prof. Dra. Lya Raquel, que sempre esteve disponível, para juntos construirmos este trabalho, desejo a ela muitas bênçãos em sua vida.

Ao meu Coorientador Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus pela disponibilidade que teve comigo desde os tempos de graduação.

Aos professores e coordenadores do Departamento de Matemática - DM da Universidade Federal do Piauí- UFPI, em especial aos que atuaram no PROFMAT durante minha passagem, estes dedicaram seu tempo a compartilhar os seus conhecimentos e insentivar-nos a continuar com os estudos.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT (2009), pelos momentos de alegria, de apoio, incentivo e união, talvez sem eles essa jornada seria bem mais difícil. Em especial cito os amigos Giorsan Wylker(Lobo Solitário), Rodolfo, Augusto, Erimar, Giovanna, Leonardo e nosso grande amigo que nos deixou prematuramente vítima da COVID-19, nosso eterno amigo Francisco Daniel de Sousa Cavalcante, que estará sempre em nossas memórias, pela sua alegria contagiante, espero que esteja em um bom lugar meu amigo, pois era um ser de coração enorme.

A CAPES pelo apoio financeiro, no PROFMAT - 2019/2021.

A SEDUC-PI pelo apoio financeiro e por me conceder tempo para aprimorar os meus estudos, no PROFMAT - 2019/2021.

A todos os outros que diretamente ou indiretamente puderam me auxiliar, como os diretores, coordenadores e colegas de trabalho do Centro Educa Mais Jacira de Oliveira e Silva. A todos o meu muito Obrigado!

*“Acredito em Deus, todos os outros devem  
apresentar dados e fatos.”*

William Edwards Deming.



# Siglas e Nomenclaturas

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDDI	Centro de Documentação e Disseminação de Informações
CEMJOS	Centro Educa Mais Jacira de Oliveira e Silva
CNLD	Comissão Nacional do Livro didático
COLTED	Comissão do Livro Técnico e Livro Didático
DM	Departamento de Matemática
EB	Educação Básica
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EM	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
Fename	Fundação nacional do material escolar
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MA	Maranhão
MEC	Medidas de Tendência Central
MTC	Ministério da Educação
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PLD	Programa do Livro Didático
PLIFED	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNBE	Programa Nacional Biblioteca na Escola
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLDEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
UFPI	Universidade Federal do Piauí
USAID	Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional

# Lista de Figuras

1.1	Retrato de Confúcio . . . . .	8
1.2	Retrato de Carlos Magno . . . . .	8
1.3	Guilherme I . . . . .	9
1.4	Francesco Sansovino. . . . .	9
1.5	Gottfried Achenwall. . . . .	10
1.6	John Graunt. . . . .	11
1.7	William Petty . . . . .	11
1.8	Dr. William Farr . . . . .	12
1.9	Edmond Halley . . . . .	12
1.10	Richard Price . . . . .	12
1.11	Blaise Pascal . . . . .	13
1.12	Pierre de Fermat . . . . .	13
1.13	Tartaglia . . . . .	14
1.14	Cardano . . . . .	14
1.15	Galileu Galileu . . . . .	15
1.16	Jakob Bernoulli . . . . .	15
1.17	Laplace . . . . .	16
1.18	Retrato de Gauss . . . . .	17
1.19	Legendre . . . . .	17
1.20	Retrato de Poisson . . . . .	18
1.21	Retrato de Pearson . . . . .	20
1.22	Retrato de Fisher . . . . .	21
1.23	Ronald Snee . . . . .	23
1.24	Iddo Gal . . . . .	23

1.25	Maxine Pfannkuch . . . . .	24
1.26	Chris J. Wild . . . . .	24
2.1	Áreas do conhecimento . . . . .	41
2.2	Obras didáticas específicas . . . . .	41
2.3	. . . . .	47
2.4	Representação gráfica da média . . . . .	49
2.5	Representação gráfica da média dos elementos do conjunto D . . . . .	50
2.6	Propriedades categorizadas por Strauss (1988). . . . .	52
2.7	Número de acidentes de trabalho . . . . .	54
2.8	Gráfico do Comportamento do emprego formal no período de janeiro a outubro de 2010, no Brasil - CAGED . . . . .	56
3.1	Coleção de livros escolhidos no PNLD 2021 na rede estadual do MA . . . . .	63
3.2	Apresentação de MTC no livro Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade . . . . .	65
3.3	Exemplo de média aritmética . . . . .	66
3.4	Conceito de média aritmética ponderada dado pelos autores . . . . .	70
3.5	Introdução à de mediana . . . . .	71
3.6	Exemplo de mediana . . . . .	72
3.7	Exemplo de moda . . . . .	72
3.8	Exemplo sugerido pelos autores . . . . .	74

# Resumo

O presente trabalho, tem o propósito de realizar uma análise do conteúdo de medidas de tendência central, da coleção de livros, escolhido no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2021 do Ensino Médio, no estado do Maranhão, sob uma perspectiva voltada ao pensamento estatístico a ser desenvolvido no ensino e aprendizagem da estatística descritiva no Ensino Médio. Dessa forma, a pesquisa investigará se a obra escolhida contempla todas as etapas, apresentadas pelo estudo de Wild e Pfannkuch (1999) necessárias, para o desenvolvimento do pensamento estatístico: reconhecimento da necessidade de dados, transnumeração, considerações a respeito da variação, conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese. A obra antes de aprovada passou pelo crivo da Base Nacional Curricular Comum - BNCC e a mesma prevê que para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes tenham oportunidades não apenas de interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, além de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas. Assim, este trabalho investigará se a BNCC está alinhada com o que propõe Wild e Pfannkuch (1999), em seus estudos sobre as categorias para se alcançar o desenvolvimento do pensamento estatístico. A metodologia utilizada na pesquisa foi a análise documental e os resultados apontam que no conteúdo de medidas de tendência central na obra analisada, alcança parte das categorias do desenvolvimento do pensamento estatístico, ficando evidentes a transnumeração e o conjunto distinto de modelos. Foi identificado que a obra não contempla a primeira categoria em nenhuma de suas atividades ou exemplos propostos, ficando assim, necessário que o professor de matemática faça esse trabalho junto a seus alunos. Porém, ela oferece aos estudantes do ensino médio uma oportunidade de vivenciar a estatística não somente através de fórmulas, tabelas e gráficos, mas também de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática, como prevê a BNCC. Além disso, foi proposta uma metodologia de ensino voltada à contemplação de todas as categorias de formação do pensamento estatístico usando uma atividade do próprio livro didático.

Palavras-chave: BNCC, Pensamento Estatístico, Medidas de tendência central.

# Abstract

The present work has the purpose of carrying out an analysis of the content of measures of central tendency, of the book collection, chosen in the National Textbook Program - PNLD 2021 of High School, in the state of Maranhão, from a perspective focused on statistical thinking. to be developed in the teaching and learning of descriptive statistics in High School. In this way, the research will investigate whether the chosen work includes all the necessary steps, presented by the study by Wild and Pfannkuch (1999), for the development of statistical thinking: recognition of the need for data, transnumberring, considerations about variation, knowledge of the context, statistical knowledge and synthesis. Before being approved, the work passed through the scrutiny of the National Curricular Common Base - BNCC and it provides that for the development of skills related to Statistics, students have opportunities not only to interpret statistics published by the media, but, above all, to plan and execute sample research, interpreting measures of central tendency, in addition to communicating the results obtained through reports, including appropriate graphical representations. Thus, this work will investigate whether the BNCC is in line with what Wild and Pfannkuch (1999) proposes in their studies on the categories to achieve the development of statistical thinking. The methodology used in the research was document analysis and the results indicate that in the content of measures of central tendency in the analyzed work, it reaches part of the categories of the development of statistical thinking, with transnumberring and the distinct set of models being evident. It was identified that the work does not include the first category in any of its activities or proposed examples, thus making it necessary for the mathematics teacher to do this work with his students. However, it offers high school students an opportunity to experience statistics not only through formulas, tables and graphs, but also to investigate, explain and justify the solutions presented to problems, with an emphasis on mathematical argumentation processes, as predicted the BNCC. In addition, a teaching methodology was proposed aimed at contemplating all categories of formation of statistical thinking using an activity from the textbook itself.

Keywords: BNCC, Statistical Thinking, Measures of Central Tendency.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Sumário</b>	<b>xi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Da Estatística ao Pensamento Estatístico</b>	<b>7</b>
1.1 Um Pouco da História da Estatística . . . . .	7
1.2 O Pensamento Estatístico . . . . .	25
1.3 As Categorias do Pensamento Estatístico . . . . .	27
1.3.1 Primeira categoria: reconhecimento da necessidade de se ter dados . . . . .	29
1.3.2 Segunda categoria: transnumeração . . . . .	31
1.3.3 Terceira categoria: variação . . . . .	32
1.3.4 Quarta categoria: conjunto distinto de modelos . . . . .	33
1.3.5 Quinta categoria: conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese entre eles . . . . .	34
<b>2 O Livro Didático de Matemática e Medidas de Tendência Central</b>	<b>35</b>
2.1 História do livro didático no Brasil . . . . .	35
2.2 O PNLD 2021 . . . . .	40
2.3 Importância do Livro Didático de Matemática nas Escolas Públicas Brasileiras . . . . .	42
2.4 E o que diz a BNCC sobre o ensino e aprendizagem da Estatística na Educação Básica ? . . . . .	43
2.5 Medidas de Tendência Central . . . . .	45

---

2.5.1	Média ( $\bar{x}$ ) . . . . .	48
2.5.2	Média Ponderada . . . . .	53
2.5.3	Mediana (Md) . . . . .	55
2.5.4	Moda (Mo) . . . . .	57
2.6	Medidas de Tendência Central nos Livros Didáticos de Matemática . . . . .	59
<b>3</b>	<b>O Pensamento Estatístico no Livro de Matemática Escolhido no PNLD 2021 da Rede Estadual do MA</b>	<b>62</b>
3.1	O Livro Escolhido . . . . .	62
3.2	Análise do conteúdo de MTC no livro didático da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade . . . . .	64
3.3	Uma Atividade Norteada pelas Categorias do Pensamento Estatístico . . . . .	75
3.3.1	Primeira categoria . . . . .	76
3.3.2	Segunda categoria . . . . .	77
3.3.3	Terceira categoria . . . . .	77
3.3.4	Quarta categoria . . . . .	78
3.3.5	Quinta categoria . . . . .	79
	<b>Considerações finais</b>	<b>80</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>82</b>

# Introdução

Estamos no século XXI totalmente inseridos num mundo globalizado, onde a informação é se não, a maior ferramenta geradora de novas formas de pensarmos, agirmos, comunicarmos e influenciarmos. Porém, essa comunicação deve ser apresentada de forma responsável, isto é, não seja tendenciosa, para que não ofereça prejuízos, aos que dela fizerem uso. Desta forma, percebemos que as tomadas de decisões são mais assertivas quando feitas baseadas em informações estatísticas extraídas de dados que foram coletados, tratados, analisados, interpretados e divulgados estatisticamente da forma correta, sem algum viés. Percebemos, então que no estudo da Probabilidade e Estatística, podemos transformar dados em informação, possibilitando uma tomada de decisão mais assertiva, o que é de suma importância nos dias atuais, pois fornecem competências e habilidades que despertam um pensamento mais crítico na análise dos dados e nas tomadas de decisões.

Segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio - PCNEM

[...]uma das grandes competências propostas, diz respeito à contextualização sociocultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhes permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade. (BRASIL, 2002, p. 126)

É então no ensino médio, que os estudantes necessitam desenvolver uma boa interpretação da informação e uma aprimorada análise de dados de forma que sejam capazes de solucionar problemas de diversas naturezas, sejam elas políticas, sociais ou econômicas.

---

A análise de dados tem sido essencial em problemas sociais e econômicos, como nas estatísticas relacionadas a saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado. Propõe-se que constitua o terceiro eixo ou tema estruturador do ensino, e tem como objetos de estudo os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles dos demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades. Este tema pode ser organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade. (BRASIL, 2017, p.126)

Ainda segundo os PCNEM (2017, p. 126): "A Matemática do ensino médio pode ser determinante para a leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico."

Portanto, essa fase de ensino deve proporcionar a formação de indivíduos capazes de realizar leituras e interpretar informações, descritas em tabelas e gráficos, como também descreve a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em suas competências e habilidades para o Ensino Médio:

Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. (BRASIL, 2018, p. 539)

Porém, estes estudantes não podem estar limitados apenas à construção e/ou leitura dessas informações, mas que sejam capazes de refletir sobre os resultados, com um olhar mais crítico, dando significado a eles. Além de serem capazes de realizarem possíveis intervenções que possam melhorar ou aprimorar a busca por soluções dos problemas de natureza social, econômica ou política.

Outro fato que devemos estar atentos como professores de matemática é o de que devemos formar estudantes capazes de perceber a necessidade de ter dados que comprovem a veracidade dos fatos e possam intervir de modo a buscar a melhor solução, para os problemas e desafios postos a eles. Dessa forma devolveremos a sociedade um indivíduo mais produtivo e capaz de intervir de forma mais construtiva e objetiva nos desafios aos quais forem submetidos.

A Probabilidade e Estatística passou a ganhar um local de notoriedade, no final da década de 1990, passando a ser incluída na Educação Básica Brasileira, com a publicação, no ano de 1997, dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997). Porém,

---

mesmo com a determinação desse documento a forma como o tema é abordado em sala de aula ou mesmo nos materiais de apoio ao professor, como o livro didático, ainda estão bem abaixo do que se esperava, para o ensino da Probabilidade e Estatística. Muitas vezes esse tema nem é abordado durante toda a trajetória dos estudantes da Educação Básica, assim como explica Lopes (2010, p. 58), “nem sempre são estudados pelos alunos, por falta de convicção do seu real interesse ou por falta de domínio teórico-metodológico do professor sobre os conceitos estatísticos”.

Para Lopes (2010), a escola tem o hábito de enfatizar os cálculos, as fórmulas e os procedimentos ao invés de explorar situações a partir de contextos reais. E isso realmente vai ao encontro do que defende a Base Nacional Curricular Comum - BNCC pois nela, percebemos claramente a preocupação com o desenvolvimento das competências e habilidades dos estudantes no que tange o ensino e aprendizagem da Probabilidade e Estatística:

Para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes têm oportunidades não apenas de interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas. (BRASIL, 2018, p. 528)

Isso tudo evidencia que tanto a formação do professor de Matemática requer uma reorganização curricular, destinando maior carga horária à Educação Estatística, além da prática com experimentações durante a graduação. Quanto aos materiais de apoio ao professor, como o livro didático, percebemos que esse conteúdo necessita de uma melhor organização, de forma que dê suporte ao docente para que este conduza o estudante a pensar e não somente reproduzir fórmulas ou algoritmos matemáticos. Segundo Schirlo e Silva (2013, p. 14), normalmente, "há a predominância de atividades simples de leitura de gráficos e, algumas vezes, a apresentação dos dados nos gráficos e nas tabelas tem a função de apoio para os procedimentos algébricos".

Na Educação Básica - EB é o professor de Matemática o responsável por planejar e executar as aulas de Probabilidade e Estatística, e em muitas vezes, elas são pautadas, apenas pelo raciocínio lógico e determinista da Matemática. Tendo em vista que o professor já vem condicionado pela sua formação e, somado a escassez de materiais, é levado a propor aos estudantes situações problemas caracterizadas tão somente pelo pensamento matemático, deixando para o estudante uma impressão completamente errada, pois pensar estatisticamente é trabalhar também com a incerteza, como afirma Lopes (2010), o pensamento estatístico exige um raciocínio diferente do matemático, pois a Estatística lida com incertezas. Desta forma, destacamos a importância de que o estudante verdadeiramente compreenda todo o processo envolvido numa pesquisa amostral e não se limite

---

apenas, aos cálculos matemáticos exigidos. Para Change (2002), o estudante precisa ser capaz de transpor o que lhe foi ensinado, questionando espontaneamente e investigando os resultados acerca dos dados. Notadamente, percebemos em sua análise um alinhamento total ao que defende a BNCC.

Desde a graduação e atualmente como professor de Matemática, temos vivenciado tudo isso, pois poucas são as formações continuadas destinadas ao estudo da Probabilidade e Estatística e também poucos são os materiais de apoio, ofertados ao professor de Matemática, quando tratamos deste conteúdo. Dessa forma, apesar de ser um tema emergente desde o final do século XX, ainda encontramos poucas pesquisas realizadas, principalmente no território nacional. Com tudo, vemos que o tratamento da informação é de suma importância, para todos nós no século XXI, visto que o estudo da Probabilidade e Estatística, está presente em todas as áreas, como no setor financeiro, nos estudos climáticos, na medicina, na política, entre outros. Portanto, partimos em busca de uma pesquisa voltada para essa área, e que pudéssemos acrescentar um "algo a mais" nas aulas, ofertadas aos estudantes do ensino médio, público alvo do nosso trabalho.

Foi então nesse contexto que conhecemos o pensamento estatístico, categorizado pelos pesquisadores Wild e Pfannkuch (1999). Esse tema foi trabalhado na tese de Santos (2020) intitulada como "Formação reflexiva do professor de matemática: uma proposta de desenvolvimento do pensamento estatístico". Um tema ainda pouco explorado, mas que tem grande significância na formação do professor de matemática do EM, conforme constatado por Santos (2020) e que já é uma contribuição significativa no ensino e aprendizagem da Probabilidade e Estatística a professores da Educação Básica - EB.

Diante do exposto, este trabalho tem por objetivo central, identificar se as atividades propostas a respeito do conteúdo das Medidas de Tendência Central- MTC, no livro didático escolhido no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2021 na rede estadual do Maranhão, permitem que o pensamento estatístico dos estudantes seja formado. Para tanto utilizaremos a análise documental do livro didático da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade, dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa, tendo como editora a FTD.

Ao final do trabalho, oferecemos aos professores de matemática que se interessarem por este tema, uma proposta de atividade, como produto final do Mestrado. Esta proposta será retirada do próprio livro didático e terá por objetivo mostrar como uma atividade, pode ser desenvolvida pelo professor de matemática, de tal forma que possa contemplar todas as categorias do pensamento estatístico. Fomentando assim, nos estudantes o desenvolvimento do pensamento estatístico, destacado nas pesquisas de Wild e Pfannkuch (1999).

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

---

No capítulo 1 daremos uma breve escala cronológica da história e evolução da Estatística, em seguida o conceito do pensamento estatístico e as categorias necessárias para desenvolvê-lo.

No capítulo 2 abordaremos a história do livro didático no Brasil e sua importância no processo de ensino e aprendizagem nas escolas públicas, o qual mostraremos o PNL 2021 previsto para o ensino médio, em seguida apresentaremos as medidas de tendência central e como elas são retratadas nos livros didáticos de matemática.

No capítulo 3, mostraremos o livro didático de matemática escolhido pela rede de ensino do Maranhão no PNL 2021, com uma análise documental do conteúdo de medidas de tendência central e uma proposta de trabalho utilizando uma questão sobre as MTC extraída do livro didático, pautadas no desenvolvimento do pensamento estatístico.

Finalmente, serão apresentadas as considerações finais, desse trabalho.

# Capítulo 1

## Da Estatística ao Pensamento Estatístico

Neste capítulo, mostraremos uma breve escala cronológica da história e evolução da Estatística. Assim serão apresentados alguns nomes de destaque e algumas de suas contribuições, que motivaram e ainda motivam as pesquisas nesta área. Em seguida, falaremos sobre o pensamento estatístico, destacando o conceito e também as categorias necessárias para o seu desenvolvimento.

### 1.1 Um Pouco da História da Estatística

Os estudos mostram que a Estatística já era bastante utilizada por povos antigos, entretanto com a modernização, ela tem sido cada vez mais utilizada.

Desde remota antiguidade, os governos têm se interessado por informações sobre suas populações e riquezas, tendo em vista, principalmente, fins militares e tributários. O registro de informações perde-se no tempo. Confúcio relatou levantamentos feitos na China, há mais de 2000 anos antes da era cristã. No antigo Egito, os faraós fizeram uso sistemático de informações de caráter estatístico, conforme evidenciaram pesquisas arqueológicas. Desses registros também se utilizaram as civilizações pré-colombianas dos maias, astecas e incas. É conhecido de todos os cristãos o recenseamento dos judeus, ordenado pelo Imperador Augusto. (MEMÓRIA, 2004, p. 11)

A seguir, na Figura [1.1](#), temos a representação de Confúcio (551 AC – 479 AC) ensinando, retratado por Wu Daozi da Dinastia Tang. Confúcio foi um pensador e filósofo chinês do Período das Primaveras e Outonos<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>O período das Primaveras e Outonos (Chūnqiū Shídài) representou uma era na história da China

Figura 1.1: Retrato de Confúcio



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Confúcio>

Nos dias atuais, essa prática do recenseamento ainda acontece. No nosso País a cada dez anos ocorre o recenseamento e o órgão responsável por nossas estatísticas é o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE.

Ainda segundo Memória (2004), podemos citar os balancetes do Império Romano, o inventário das posses de Carlos Magno, o Domesday Book<sup>2</sup>, são alguns exemplos anteriores ao surgimento da estatística descritiva no século XVI, na Itália. A seguir temos o retrato de deo Carlos Magno (Figura 1.2), usando a coroa do Imperador Romano-Germânico, pintura esta realizada por Durer.

Figura 1.2: Retrato de Carlos Magno



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/CarlosMagno>

---

entre 722 a.C. e 481 a.C., que corresponde aproximadamente à primeira metade do Período Zhou Oriental.

<sup>2</sup>Registro que Guilherme, o Conquistador, invasor normando da Inglaterra, no século 11, mandou levantar das propriedades rurais dos conquistados anglo-saxões para se inteirar de suas riquezas.

A seguir vemos o retrato de Guilherme I, Figura 2.3, geralmente era chamado de Guilherme, o Conquistador e algumas vezes de Guilherme, o Bastardo. Reinou na Inglaterra de 3 de julho de 1035 a 9 de setembro de 1087.

Figura 1.3: Guilherme I



Extraído de <https://www.sohistoria.com.br/biografias/guilherme/>

No final do século XVI, às margens do Renascimento podemos citar uma obra pioneira de Francesco Sansovino (1521 - 1586) (Figura 1.4). De acordo com Memória (2004), essa foi uma época em que foi despertado o interesse pela coleta de dados estatísticos, principalmente por suas aplicações na administração pública. Também nessa época a Igreja Católica teve um papel importante, segundo Memória (2004), os registros de batismos, casamentos e óbitos, tornados compulsórios a partir do Concílio de Trento<sup>3</sup> (1545 - 1563), são as contribuições efetivas da Igreja Católica para a estatística na época.

A seguir temos o retrato de Francesco Tatti da Sansovino (1521 - 1586), nascido em Roma. Foi um grande estudioso italiano, humanista e homem de letras, considerado por muitos um dos estudiosos mais importantes de sua época.

Figura 1.4: Francesco Sansovino.



Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/FrancescoSansovino>

Os alemães no século XVIII, também apresentaram alguns trabalhos com significativa contribuição à estatística.

---

<sup>3</sup>Foi o 13º concílio da Igreja Católica e era chamado de Concílio Ecumênico, convocado pelo Papa Paulo III, na cidade de Trento.

[...]os estudos feitos pelos alemães, especialmente por Gottfried Achenwall (1719 – 1772), professor da Universidade de Göttingen, a quem se atribui ter criado o vocábulo estatístico, em 1746. Contudo, nada mais fizeram do que dar melhor sistematização e definição da mesma orientação descritiva dos estatísticos italianos. (MEMÓRIA, 2004, p. 12)

Gottfried Achenwall (1719 - 1772) (Figura 1.5), foi um dos intelectuais que mais significativamente contribuiu para o desenvolvimento da Statistik. Essa ciência tem poucas relações com a estatística atual, pois era mais relacionada à descrição abrangente das características sócio-político-econômicas dos diferentes estados.

Figura 1.5: Gottfried Achenwall.



Extraído de <https://www.ecured.cu/GottfriedAchenwall>

Entretanto, para Memória (2004), essas atividades não devem ser creditadas como o começo da história da Estatística pois para ele isso significaria deixar de compreender o verdadeiro significado dessa área.

Podemos dizer que o desenvolvimento da estatística teve origem nas aplicações, pois nenhuma disciplina tem interagido tanto com as demais disciplinas em suas atividades do que ela, dado que é por sua natureza a ciência do significado e do uso dos dados. Daí, sua importância como instrumento auxiliar na pesquisa científica. (MEMÓRIA, 2004, p. 12)

De acordo com Memória (2004), a primeira tentativa para se tirar conclusões a partir de dados numéricos foi feita somente no século 17, por John Graunt (1620 – 1674) (Figura 1.6), na Inglaterra, com o que foi denominado Aritmética Política, que evoluiu para o que se chama hoje de demografia. Contudo, só começou realmente a existir como disciplina autônoma no início do século 20, o verdadeiro início da estatística moderna.

O trabalho de Graunt foi continuado por seu contemporâneo William Petty (1623 – 1683), retratado na Figura 1.7 quem denominou de Aritmética Política à nova arte de raciocinar por meio de dados sobre fatos relacionados com o governo.

Figura 1.6: John Graunt.



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/JohnGraunt>

Em 1683, ele publicou sua obra *Five Essays on Political Arithmetic* e sugeriu que fosse criada uma repartição de registro de estatísticas vitais, mas isso só se consolidou no século 19, com o Dr. William Farr (1807 – 1883), contribuidor original da estatística médica. Note-se que a denominação posterior de estatística acabou por incluir a Estatística Descritiva e a Aritmética Política. (MEMÓRIA, 2004, p. 13)

Figura 1.7: William Petty



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/WilliamPetty>

Na Figura [1.8](#), retratamos Dr. William Farr (1807 – 1883), que foi um epidemiologista britânico e considerado um dos fundadores da estatística médica.

Nesse período os trabalhos de maior significância podemos destacar Edmond Halley (1656 – 1742) (Figura [1.9](#)), que segundo Memória (2004), é considerado, com justiça, o criador do cálculo atuarial. Cálculo este, que se utiliza das Ciências Atuariais (probabilidade, matemática, estatística, finanças, economia, computação) para avaliar riscos na indústria de seguros e finanças.

Figura 1.8: Dr. William Farr



Extraído de <https://en.wikipedia.org/wiki/WilliamFarr>

Figura 1.9: Edmond Halley



Extraído de <https://en.wikipedia.org/wiki/EdmondHalley>

Outro nome contemporâneo a Halley e que deve ser mencionado, é Richard Price (1723 – 1791) (Figura 1.10), o fundador da atuária, na Inglaterra.

Figura 1.10: Richard Price



Extraído de [https://pt.wikipedia.org/wiki/RichardPrice\(filósofo\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/RichardPrice(filósofo))

Ainda nesse período temos os trabalhos de grandes matemáticos do século XVII, dentre eles aparecem os nomes de Blaise Pascal (1623 – 1662) (Figura 1.11) e Pierre de

Fermat (1601 – 1665) (Figura 1.12), que solucionavam problemas relacionados às probabilidades em jogos de azar.

Figura 1.11: Blaise Pascal



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/BlaisePascal>

Figura 1.12: Pierre de Fermat



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/PierredeFermat>

De acordo com Memória (2004), anterior aos nomes de Pascal e Fermat já haviam alguns matemáticos italianos como Niccolò Fontana Tartaglia (1499 – 1557) (Figura 1.13). Nascido na Itália, era matemático cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau.

Figura 1.13: Tartaglia



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/NiccolòFontanaTartaglia>

Temos também o nome de Girolamo Cardano (1501 – 1576) (Figura 1.14), que na matemática, teve relevante contribuição, pois foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas, como tinha o hábito de jogar também foi levado a formular as primeiras regras da teoria da probabilidade.

Figura 1.14: Cardano



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/GirolamoCardano>

Ainda teremos os nomes de Galileu Galilei (1564 – 1642) (Figura 1.15) e Jacob Bernoulli (1654 – 1705) (Figura 1.16), que seguindo a mesma linha de pensamento, também interessaram-se por problemas de probabilidades relacionados com jogos de dados. Assim tiveram suas contribuições ligadas ao estudo da probabilidade.

Figura 1.15: Galileu Galileu



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/GalileuGalilei>

Figura 1.16: Jakob Bernoulli



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/JakobBernoulli>

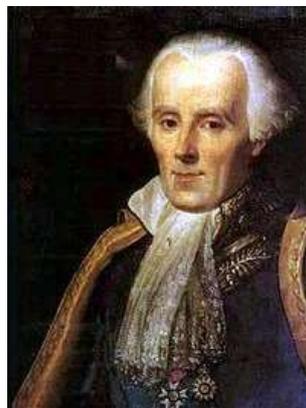
Os primeiros problemas sobre probabilidades refletiram o desenvolvimento da análise combinatória em jogos de azar. Em todos eles eram examinados os diferentes modos em que arranjos e combinações podiam ser empregados na enumeração dos casos favoráveis. Esses problemas eram dominados por considerações sobre os casos igualmente prováveis, com as probabilidades determinadas a priori, onde foi utilizado o seguinte tipo de raciocínio: dado uma urna contendo  $a$  (bolas pretas) e  $b$  (bolas brancas), a probabilidade de se extrair uma bola preta é igual a  $\frac{a}{a+b}$ . (MEMÓRIA, 2004, p. 15)

Destes matemáticos, segundo Memória (2004), o primeiro a considerar situações em que a enumeração não era possível foi Jacob Bernoulli, que propôs determinar a

probabilidade de tais casos a posteriori, isto é, pela frequência relativa do número de casos favoráveis determinada empiricamente, em sua obra *Ars Conjectandi*, publicada postumamente em 1713, por seu sobrinho Nicholas Bernoulli.

A astronomia também teve sua contribuição na estatística, porém somente no século XVIII e providos de uma mente mais voltada a matemática, surgem os nomes de Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749 – 1827) retratado na Figura 1.17, com muitas publicações e grande contribuição na teoria das probabilidades, com destaque para a generalização do teorema central do limite<sup>4</sup> de DeMoivre, intitulada de *Mémoire sur les formules qui sont function de très-grands nombres, Théorie Analytique des Probabilités*

Figura 1.17: Laplace



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre-SimonLaplace>

Surge também o nome de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) (Figura 1.18) com algumas publicações como, *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium* que continha uma seção final sobre combinações das observações e a curva dos erros. Esses estudos levaram-no a enunciar o Princípio dos Mínimos Quadrados. Posteriormente melhorada no ano de 1823 com publicação de *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae*.

Outro matemático da época também já havia proposto o método dos mínimos quadrados Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), retratado na Figura 1.19, com sua obra *Nouvelles Méthodes pour la Determination des Orbites des Comètes* e que continha o apêndice intitulado de *Sur la méthode des moindres quarrés*, mas como afirma Memória (2004), a curva normal ficou mais conhecida como curva de Gauss e o princípio dos mínimos quadrados foi atribuído a Gauss, que o utilizou como método de estimação de parâmetros.

Um outro nome aqui a ser citado e de grande contribuição a estatística é o de Siméon Denis Poisson (1781 – 1840) (Figura 1.20), com a descoberta da distribuição que

---

<sup>4</sup>“Qualquer soma ou média de variáveis aleatórias tem, para um grande número de termos, uma distribuição aproximadamente normal”.

Figura 1.18: Retrato de Gauss



Extraído de <https://pt.wikipedia.org/wiki/CarlFriedrichGauss>

Figura 1.19: Legendre



Extraído de <https://historica.fandom.com/wiki/Adrien-MarieLegendre>

leva o seu nome (Distribuição de Poisson), publicada conjuntamente com a sua teoria da probabilidade, em 1838 no seu trabalho *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*

No século XIX, autores que trataram da teoria geral incluem, além dos já citados, Sylvestre Lacroix (1765 - 1843), com as obras *Eléments de géométrie descriptive*, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, *Complément des Élémens d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des quatre-nations*, *Traité élémentaire de calcul des probabilités*. Lit-trow (1781 - 1840), um astrônomo austríaco com diversas contribuições como *Theoretische und praktische Astronomie* em 3 volumes, *Über Höhenmessung durch Barometer*, *Diop-trik, oder Anleitung zur Verfertigung der Fernrohre*, *Über den gefürchteten Kometen des gegenwärtigen Jahres 1832 und über Kometen überhaupt*, dentre outras.

Surge também o nome de Richard Dedekind (1831 - 1916) matemático alemão que fez contribuições importantes para a álgebra abstrata (especialmente na teoria dos anéis), na fundamentação axiomática dos números naturais, na teoria algébrica dos números e na definição de número real. Suas principais obras foram:

Figura 1.20: Retrato de Poisson



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/SiméonDenisPoisson>

- 1890. "Letter to Keferstein" in Jean van Heijenoort, 1967. *A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Harvard Univ. Press: 98–103.
- 1963 (1901). *Essays on the Theory of Numbers*. Beman, W. W., ed. and trans. Dover. Contains English translations of *Stetigkeit und irrationale Zahlen* and *Was sind und was sollen die Zahlen?*
- 1996. *Theory of Algebraic Integers*. Stillwell, John, ed. and trans. Cambridge Uni. Press. A translation of *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*.
- Ewald, William B., ed., 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols. Oxford Uni. Press.
- 1854. "On the introduction of new functions in mathematics," 754–61.
- 1872. "Continuity and irrational numbers," 765–78. (translation of *Stetigkeit...*)
- 1888. *What are numbers and what should they be?*, 787–832. (translation of *Was sind und...*)
- 1872–82, 1899. Correspondence with Cantor, 843–77, 930–40.

Helmert (1843 - 1917) nasceu em Freiberg, Reino da Saxônia escreveu um livro sobre os mínimos quadrados, que se tornou um texto padrão. Em 1876, ele descobriu a distribuição qui-quadrado como a distribuição da variância da amostra para uma distribuição normal. Hermann Laurent (1841 - 1908) matemático francês, que teve as seguintes publicações:

- Teoria das séries, contendo 1° as regras de convergência e as propriedades fundamentais das séries, 2° o estudo e somatório de algumas séries, 3° algumas aplicações da teoria das séries ao cálculo de expressões transcendententes ,1862

- Tratado de Álgebra, 1867
- Tratado de Mecânica Racional, Volumes 1 e 2, 1870
- Tratado sobre o cálculo das probabilidades, 1873
- Tratado de análise ,1885
- Eliminação ,1900
- Sobre os fundamentos da teoria dos números e geometria ,1902
- Geometria analítica geral ,1906
- Estatística matemática ,19083
- Hermann Laurent, Teoria Elementar das Funções Elípticas (Gauthier-Villars, Paris, 1880)

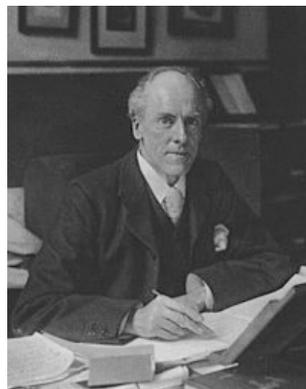
Augustus De Morgan (1806 - 1871), foi um matemático e lógico britânico. Responsável por formular as leis de De Morgan e o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática. Suas principais publicações são:

- 1836. An Explanation of the Gnomonic Projection of the Sphere. London: Baldwin.
- 1837. Elements of Trigonometry, and Trigonometrical Analysis. London: Taylor and Walton.
- 1837. The Elements of Algebra. London: Taylor and Walton.
- 1838. An Essay on Probabilities. London: Longman, Orme, Brown, Green and Longmans.
- 1840. The Elements of Arithmetic. London: Taylor and Walton.
- 1840. First Notions of Logic, Preparatory to the Study of Geometry. London: Taylor and Walton.
- 1842. The Differential and Integral Calculus. London: Baldwin.
- 1845. The Globes, Celestial and Terrestrial. London: Malby and Co.
- 1847. Formal Logic or The Calculus of Inference. London: Taylor and Walton.
- 1849. Trigonometry and Double Algebra. London: Taylor, Walton and Malbery.
- 1860. Syllabus of a Proposed System of Logic. London: Walton and Malbery.
- 1872. A Budget of Paradoxes. London: Longmans, Green.[5]

Também podemos destacar os trabalhos de George Boole (1815 - 1864). Em 1854 publicou sua obra prima: "Na Investigation into the Laws of Thought", "Uma Investigação das Leis do Pensamento", em que se fundamentam as teorias matemáticas da lógica e probabilidades, estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra.

Outros matemáticos que também contribuíram com suas obras foram Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796 – 1874), com sua principal obra, *Essai de Physique Sociale*, publicada em 1835, Sir Francis Galton (1822 – 1911) com a obra *Natural Inheritance*, publicado em 1889 auxiliado pelos contemporâneos J. D. Hamilton Dickson (1849 – 1931) e Walter Frank Raphael Weldon (1860 - 1906). Outro nome de destaque que surge é o de Karl Pearson (1857 – 1936) (Figura 1.21), um grande representante da Escola Biométrica<sup>5</sup>, que estudou matemática antes de se interessar por estatística. Segundo Memória (2004) seu pensamento filosófico influenciou suas ideias estatísticas. Publicou em 1982 a obra *The Grammar of Science*, influenciado pelos amigos Galton e Weldon, produziu uma série de artigos voltados a estatística relacionados com herança biológica, artigos esses intitulados de *Mathematical Contributions os the Theory of Evolution* de 1889 a 1912, sendo a maioria publicada em *Biometrika*. Outro artigo importante de Pearson foi *Heredity and Panmixia* (1896). Outros nomes que surgem são os nomes de George Udny Yule (1871 - 1951), que foi assistente de Pearson de 1893 a 1912, com a obra *An Introduction to the Theory of Statistics* que teve a participação de Maurice George Kendall (1907 – 1983), como coautor.

Figura 1.21: Retrato de Pearson



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/KarlPearson>

Na fase de experimentação, surge o nome de Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962) (Figura 1.22). Segundo Memória (2004) Fisher, fez contribuições teóricas fundamentais à Estatística e à análise e delineamento de experimentos que, por si, já garantiriam sua fama de um dos maiores cientistas do século.

---

<sup>5</sup>Surgiu na Inglaterra, entre o final do século XIX e o começo do século XX, mais precisamente entre 1890 e 1920. Foi um dos grandes períodos formativos da história da Estatística, com a predominância das técnicas de correlação e ajustamento de curvas, de notáveis resultados na descrição das grandes amostras.

Figura 1.22: Retrato de Fisher



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/RonaldFisher>

Como apresentado numa breve escala cronológica a estatística, começou a ganhar importância, no século XIX com os diversos estudos realizados na área, mas sobretudo foi a partir do século XX, que começou a ser aplicada pelas grandes organizações, e nos dias atuais ela está presente em áreas do setor financeiro, seguradoras, inteligência de mercado, medicina, programação, indústria, bioestatística, marketing, pesquisas, áreas acadêmicas dentre outras.

De acordo com Porter (1986) os primeiros trabalhos que aplicaram o pensamento estatístico datam do início do século XIX. Foi em torno de 1900 que o entendimento do pensamento estatístico começou a influenciar o desenvolvimento do pensamento moderno. Já nesta época, a variação era o principal fator estimulante dos estudos da estatística matemática, moderna. No entanto teve maior relevância a partir do século XX, segundo Cox (1997), em seu artigo *The Current Position of Statistics: A Personal View*, os anos de 1925 a 1960 podem se considerados a época áurea do pensamento estatístico.

O pensamento estatístico teve suas primeiras aplicações voltadas, nas necessidades de Estado, nas políticas, com o fornecimento de dados econômicos e demográficos. A Estatística tem sua maior relevância, nas situações de incerteza, pois desta forma contribui com a tomada de melhores decisões, nas mais diversas áreas do conhecimento. Justamente o fato que levou ao surgimento do desenvolvimento do pensamento estatístico na sociedade atual, proporcionando desta forma uma grande quantidade de informações e vantagens na tomada das decisões.

Muitos pesquisadores atuais contribuíram para a concepção do pensamento estatístico. Podemos aqui destacar Ronald Snee (Figura 1.23) PhD, e presidente da Snee Associates LLC. Ele fornece orientação para executivos seniores em sua busca por um melhor desempenho de negócios usando estratégia de experimentação. Para o pensamento estatístico desenvolveu tanto definição como aplicação direta no ramo empresarial. Possui várias contribuições para o desenvolvimento empresarial baseado na estatística,

dentre elas citamos:

- Validação de modelos de regressão: métodos e exemplos
- Regressão de cume na prática
- Lean Six Sigma - melhorando o tempo todo
- Liderando Six Sigma: um guia passo a passo com base na experiência com a GE e outras empresas Six Sigma
- Pensamento estatístico: melhorando o desempenho dos negócios
- Six – Sigma: a evolução de 100 anos de metodologia de melhoria de negócios
- O que está faltando na educação estatística?
- O pensamento estatístico e sua contribuição para a qualidade total
- Alguns aspectos da análise de dados não ortogonais: Parte I. Desenvolvimento de equações de previsão
- Projetos de vértices extremos para modelos de mistura linear
- Lean Six Sigma: ontem, hoje e amanhã
- Impacto do Six Sigma na engenharia da qualidade
- Exibição gráfica de meios
- Por que os estatísticos deveriam prestar atenção ao Seis Sigma?
- Lidando com o calcanhar de Aquiles das iniciativas Seis Sigma
- Exibição gráfica de tabelas de contingência bidirecionais
- Seis Sigma além do chão de fábrica: estratégias de implantação para serviços financeiros, saúde e o resto da economia real
- Projetos experimentais para modelos quadráticos em espaços de mistura restritos
- Conceitos de triagem e projetos para experimentos com misturas
- Estatísticas de teste para modelos de mistura

Figura 1.23: Ronald Snee



Extraído de <https://www.ivtnetwork.com/author/ronald-d-snee>

Destacamos também Iddo Gal (Figura 1.24), professor PhD e apresenta trabalho nos campos do desenvolvimento e avaliação da matemática de adultos, alfabetização estatística e competências funcionais relacionadas e também gestão de processos de serviço e capacitação de trabalhadores e clientes de organizações de serviço. Ele foi responsável por elencar os elementos do pensamento estatístico. Tem um currículo repleto de publicações em artigos científicos, revistas e livros, podemos citar alguns de seus trabalhos relacionados a educação e alfabetização estatística:

Figura 1.24: Iddo Gal



Extraído de <https://www.literacy.org/content/senior-advisors>

- Gal , I. (2002). Necessidades sistêmicas na educação matemática de adultos. Educação Básica de Adultos , 12 (1), 20-33. (Nota: Journal renomeado para: Journal of Research and Practice for Adult Literacy, Secondary, and Basic Education ).
- Gal, I. (2002). Desenvolvendo a alfabetização estatística: Rumo à implementação de mudanças. International Statistical Review, 70 (1), 46-51
- Gal, I. (2002). Alfabetização estatística de adultos: significados, componentes, responsabilidades. International Statistical Review , 70 (1), 1-25.

Por fim temos Maxine Pfannkuch (Figura 1.25), pesquisadora na área da educação estatística, atualmente explora novas maneiras de desenvolver o raciocínio inferencial estatístico dos alunos no ensino médio e nos níveis de graduação e Chris J. Wild (Figura 1.26), também pesquisador da educação estatística, com ênfase particular em visualização, software para análise de dados e desenvolvimento conceitual, do pensamento estatístico e processos de raciocínio. Ambos Maxine Pfannkuch e Chris J. Wild, são os responsáveis por categorizar o pensamento estatístico.

Figura 1.25: Maxine Pfannkuch



Extraído de <https://new.censusatschool.org.nz/2016/02/02/maxine-pfannkuch-award/>

Figura 1.26: Chris J. Wild



Extraído de <https://scholar.google.com>

Dos trabalhos de maior relevância de M. Pfannkuch e Chris J. Wild, a respeito do pensamento estatístico, podemos citar:

- O pensamento estatístico na investigação empírica, CJ Wild, M. Pfannkuch. *International Statistical Review* 67 (3), 223-248 1999.
- Rumo a uma compreensão do pensamento estatístico M Pfannkuch, C Wild. O desafio de desenvolver literacia estatística, raciocínio e pensamento, 17-46 293. 2004

## 1.2 O Pensamento Estatístico

Segundo Snee (1990, p. 118, tradução nossa), o pensamento estatístico é o

[...] processo, de raciocínio que reconhece que variação está em tudo ao nosso redor e presente em tudo que fazemos, que todo trabalho é uma série de processos interligados, e que identificar, caracterizar, quantificar, controlar e reduzir variação fornece oportunidades de melhoria. <sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>[...]process, which recognize that variation is all around us and present in everything we do, all work is a series of interconnected processes, and identifying, characterizing, quantifying, controlling, and reducing variation provide opportunities for improvement.

Nessa definição, o indivíduo ao desenvolver o pensamento estatístico é capaz de perceber as variações envolvidas no objeto de estudo. Desta forma, após as diversas análises poderá reduzir estas variações, tornando as tomadas de decisões mais precisas, afim de oportunizar uma melhora no objeto de estudo, em questão.

Para realmente minimizar a variabilidade, as fontes de variação devem ser identificadas e eliminadas (ou pelo menos reduzidas). Isso requer conhecimento do processo, que geralmente é derivado da teoria e dos dados. Os dados devem ser coletados de forma a possibilitar a medição da variabilidade no processo. Por exemplo, se alguém suspeitar que a densidade varia entre os lotes de produção de produtos químicos granulados, seria sensato amostrar dentro e entre os lotes para quantificar a variação. O conhecimento da variação permite o controle eficiente dos pesos de enchimento de embalagens de produtos químicos. (SNEE et al., 1995, p. 54, tradução nossa) <sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>To truly minimize variability, the sources of variation must be identified and eliminated (or at least reduced). This requires process knowledge, which is usually derived from theory and data. Data must be collected in a manner that will enable measurement of the variability in the process. For example, if one suspects that density varies among production batches of granulated chemical products, it would be wise to sample within and among batches to quantify the variation. Knowledge of the variation enables efficient control of the fill weights of packages of the chemical.

Para Campos et al. (2011, p. 480), o pensamento estatístico envolve um modo de pensar que inclui um raciocínio lógico e analítico. Ele permite avaliar o problema como um todo, além de suas partes componentes, assim como envolve um entendimento de por que e como as investigações estatísticas são conduzidas. Desta forma, a definição apresentada por Campos, reforça a definição apresentada por Snee, garantindo a quem possa desenvolver o pensamento estatístico, total entendimento de como serão conduzidas as análises e as devidas tomadas de decisões.

De acordo com Snee et al. (1995, p. 53, tradução nossa), sobre o pensamento estatístico "todos o possuem e todos devem usá-lo - não apenas os estatísticos. O pensamento estatístico pode criar um novo paradigma de gestão. No curto prazo, pode melhorar a qualidade das decisões; a longo prazo, pode ajudar a transformar gerentes em líderes".<sup>6</sup> Apesar de voltado para o setor comercial e/ou industrial, percebemos nessa fala que a necessidade de se desenvolver o pensamento estatísticos, não deve estar restrita aos estatísticos, mas que o mesmo pode permear as diversas áreas, incluindo claro a educação de jovens da educação básica. Como nosso foco aqui são estudantes do ensino médio, o pensamento estatístico será uma grande ferramenta, para o estudo da estatística, onde o estudante conhecerá e participará de todo o processo desde a necessidade dos dados à tomada de decisões e a síntese necessária para uma perfeita compreensão do problema.

Ainda sobre o pensamento estatístico, Snee (1990, p. 118, tradução nossa) afirma que são "processos de pensamento, que reconhecem que a variação está ao nosso redor e presente em tudo o que fazemos, todos trabalhamos: é uma série de processos interconectados, e identificar, caracterizar, quantificar, controlar e reduzir a variação fornece oportunidades para melhoria".<sup>7</sup>

Segundo Wild e Pfannkuch (1999, p. 224, tradução nossa), "Existe uma escassez de literatura sobre pensamento estatístico"<sup>8</sup>. Isso talvez tenha sido a mola propulsora, que incentivou ambos a voltarem suas pesquisas a essa área. Com o estudo então das literaturas de pesquisadores como, Moore, Snee, Britz, Mallows, Dransfield e outros, chegaram às categorias necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico. No entanto, notamos uma preocupação de Wild e Pfannkuch ao categorizarem o pensamento estatístico, torná-lo algo como uma cápsula a qual você entrega a uma pessoa e ela a partir daquele momento passa a possuí-lo:

---

<sup>6</sup>Statistical thinking, therefore, is public property. Everyone owns it, and everyone must use it—not just statisticians. Statistical thinking can create a new paradigm for management. Over the short term, it can improve the quality of decisions; over the long term, it can help turn managers into leaders.

<sup>7</sup>"thought processes, which recognize that variation is all around us and present in everything we do, we all work is a series of interconnected processes, and identifying, characterizing, quantifying, controlling, and reducing variation provide opportunities for improvement."

<sup>8</sup>There is a paucity of literature on statistical thinking

Não estamos preocupados em encontrar uma encapsulação nítida do “pensamento estatístico”. Nossas preocupações são mais profundas do que isso. Estamos investigando os complexos processos de pensamento envolvidos na solução de problemas do mundo real usando estatísticas com o objetivo de melhorar a resolução de problemas. Estamos, portanto, interessados em desenvolver uma estrutura para padrões de pensamento envolvidos na solução de problemas, estratégias para a solução de problemas e a integração de elementos estatísticos na solução de problemas. Não abordamos o pensamento envolvido no desenvolvimento de uma nova metodologia e teoria estatística. Reconhecemos que muito do pensamento estatístico pode ser benéfico nas atividades do dia-a-dia, particularmente na interpretação de informações na mídia e em outros relatórios. Na interpretação de relatórios, reconhecemos a aplicabilidade de partes de nosso conhecimento estatístico sobre a produção, o comportamento e a análise de dados ao tipo de informação que estamos recebendo e, portanto, podemos avaliar criticamente aspectos dessa informação. (WILD e PFANNKUCH, 1999, p. 4, tradução nossa.)<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>We are not concerned with finding some neat encapsulation of "statistical thinking". Our concerns are deeper than this. We are investigating the complex thought processes involved in solving realworld problems using statistics with a view to improving such problem solving. We are thus interested in developing a framework for thinking patterns involved in problem solving, strategies for problem solving, and the integration of statistical elements within the problem solving. We do not address the thinking involved in developing new statistical methodology and theory. We recognise that much statistical thinking can beneficially take place in day-to-day activities, particularly in the interpretation of information in media and other reports. In interpreting reports, we recognise the applicability of parts of our statistical knowledge about the production, behaviour and analysis of data to the type of information we are receiving and are thus able to critically appraise aspects of that information.

Observamos que é de suma importância tratar o pensamento estatístico, como um auxílio às atividades a serem desenvolvidas no estudo da estatística. Isso proporcionará aos estudos, uma melhor compreensão e interpretação das informações, que podem ser lançadas pela mídia ou outros meios de comunicação. Dessa forma, eles ampliam a forma de "vermos" a estatística, tornando o pensamento estatístico não uma metodologia, a ser utilizada no estudo da teoria estatística, mas sim, uma ferramenta benéfica as atividades que envolvam o estudo da estatística, melhorando de forma consistente o pensamento voltado a solução de problemas.

### 1.3 As Categorias do Pensamento Estatístico

Os pesquisadores Wild e Pfannkuch (1999), após estudos sobre o pensamento estatístico, perceberam a necessidade de categorizá-lo de modo a fornecer uma estrutura

mais coesa, na busca por dados relevantes e que sejam convenientes, obtidos através da experiência. Desta maneira, o desenvolvimento do pensamento estatístico, pode ser acompanhado em cada uma de suas etapas, nos estudos de estatística, possibilitando ao estudante interpretações mais seguras das soluções dos problemas, tornando assim mais claras as ações e interações com o problema e garantindo uma tomada de decisão mais qualificada e objetiva.

O avanço da tecnologia está mudando progressivamente o equilíbrio do aprendizado estatístico da operação de procedimentos mecânicos para a “arte” da estatística. Como podemos ensinar essa arte? Uma resposta é usar a experiência prática por meio de estudos de caso e trabalho de projeto. Mas, mesmo para empregar esses métodos de forma eficaz, precisamos saber como escolher boas atividades e saber para quais aspectos específicos dessas experiências atrairemos a atenção dos alunos. Isso exigirá que os estatísticos aplicados se envolvam na caracterização de como pensam e resolvem problemas - aprendendo a articular aspectos importantes da solução de problemas estatísticos que “todos sabem”, mas raramente articula - para tornar o implícito mais explícito. (WILD e PFANNKUCH, 2000, p. 01, tradução nossa)<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Advancing technology is progressively shifting the balance of statistical learning from the operation of mechanical procedures towards the “art” of statistics. How can we teach that art? One response is to use practical experience through case studies and project work. But even to employ these methods effectively, we need to know how to choose good activities and to know what particular aspects of those experiences to draw students’ attentions to. This will require applied statisticians becoming involved in characterizing how they think and solve problems—learning to articulate important aspects of statistical problem solving that “everyone knows” but seldom articulates—to make the implicit more explicit.

Chris Wild é um estatístico que como outros profissionais da área de estatística, sente-se preocupado com o aprendizado dos estudantes e vê que há necessidade, que esse discente possa “pensar estatisticamente”. Maxine Pfannkuch é uma educadora matemática que apresenta pesquisas voltadas na educação estatística. Ambos os pesquisadores voltaram seus estudos para o pensamento estatístico, como um forte aliado ao professor de matemática, no ensino e aprendizagem dos estudantes na estatística. Para eles existia:

O desejo de imbuir os alunos de “pensamento estatístico” levou ao recente aumento do interesse em incorporar investigações reais ao ensino de estatística. No entanto, ao invés de ser uma ideia ou conjunto de ideias precisamente compreendido, o termo “pensamento estatístico” é mais como um mantra que evoca coisas compreendidas em um nível vago e intuitivo, mas amplamente não examinado. O pensamento estatístico é a encarnação estatística do “senso comum”. “Sabemos quando o vemos”, ou talvez mais sinceramente, sua ausência é freqüentemente flagrantemente óbvia. E, para a maioria de nós, isto foi muito mais um produto da experiência, das histórias de guerra e da intuição do que de qualquer instrução formal que tenhamos passado. (WILD e PFANKUCH, 1999, p. 01, tradução nossa)<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>The desire to imbue students with "statistical thinking" has led to the recent upsurge of interest in incorporating real investigations into statistics education. However, rather than being a precisely understood idea or set of ideas, the term "statistical thinking" is more like a mantra that evokes things understood at a vague, intuitive level, but largely unexamined. Statistical thinking is the statistical incarnation of "common sense". "We know it when we see it", or perhaps more truthfully, its absence is often glaringly obvious. And, for most of us, it has been much more a product of experience, war stories and intuition than it is of any formal instruction that we have been through.

Desta forma, Wild e Pfannkuch fundamentaram o pensamento estatístico, em cinco categorias, dispostas da seguinte forma:

- A primeira categoria é o reconhecimento da necessidade de ter dados;
- A segunda categoria é a transnumeração;
- A terceira categoria é a variação;
- A quarta categoria envolve, conjunto distinto de modelos;
- A quinta categoria é o conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese.

A seguir trataremos especificamente de cada uma das categorias supracitadas, idealizando e exemplificando cada uma delas ao leitor.

### 1.3.1 Primeira categoria: reconhecimento da necessidade de se ter dados

Segundo Wild e Pfannkuch (1999, p. 221, tradução nossa), "o reconhecimento da inadequação de experiências pessoais e evidências anedóticas que levam ao desejo de basear decisões em dados coletados deliberadamente é um impulso estatístico."<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>The recognition of the inadequacies of personal experiences and anecdotal evidence leading to a desire to base decisions on deliberately collected data is a statistical impulse.

Esta primeira categoria parte do princípio que não é suficiente nos basearmos apenas em experiências pessoais, isto é, apenas em suposições. Desta forma, é imprescindível termos algo substancial em forma de dados, para que possamos fundamentar um estudo de causa. O reconhecimento da necessidade de ter dados funciona como uma mola propulsora do pensamento estatístico.

Como forma de exemplificar essa categoria, vamos levantar um questionamento sobre uma moeda ser ou não viciada. A princípio temos claramente a probabilidade clássica garantindo que a ocorrência de cara ou coroa será de 1 para 2, ou seja, probabilidade de 50% para cara e 50% para coroa, sendo a moeda não viciada. Porém se nada foi dito sobre o vício da moeda e o questionamento foi levantado, a probabilidade clássica não fornece resposta para esse problema. A única alternativa seria testarmos a moeda, ou por algum órgão de metrologia, utilizando-se de algum instrumento de medida ou mesmo no teste de arremesso manual buscando a probabilidade frequentista, que tende à probabilidade clássica quando é realizado um número elevado de arremessos. Portanto, essa necessidade de testar, de buscar dados é que podem garantir a análise de a moeda ser ou não viciada.

Segundo Coutinho (2013, p. 132) "[...] de fato, as pessoas só recorrerão às evidências quando sentirem que suas crenças, construídas por experiências sociais ou culturais, forem postas em contradição."

Em outras palavras, o que vemos é a necessidade da busca de dados que garanta a prova científica, através de experiências práticas. Cabe aqui ao professor de matemática levar aos seus estudantes da educação básica, essas experiências, garantindo assim o início da construção do pensamento estatístico.

### 1.3.2 Segunda categoria: transnumeração

Segundo Wild e Pfannkuch (1999, p. 227, tradução nossa)<sup>[10]</sup>:

A ideia mais fundamental em uma abordagem estatística da aprendizagem é formar e alterar representações de dados de aspectos de um sistema para chegar a um melhor entendimento desse sistema. Criamos a palavra transnumeração para nos referir a essa ideia. Nós o definimos como “transformações de numeramento feitas para facilitar a compreensão. A transnumeração ocorre quando encontramos formas de obter dados (por meio de medição ou classificação) que capturam elementos significativos do sistema real.

Esta segunda categoria está fundamentada no processo dinâmico da mudança de representação, de modo a gerar compreensão, seja em forma de tabelas, de gráficos, de uma medida ou classificação.

Para Wild e Pfannkuch (1999, p. 227, tradução nossa)<sup>[11]</sup>:

Podemos re-expressar os dados por meio de transformações e reclassificações em busca de novos *insights*. Podemos tentar uma variedade de modelos estatísticos. E no final do processo, a transnumeração acontece mais uma vez quando descobrimos representações de dados que ajudam a transmitir nossos novos entendimentos sobre o sistema real para outras pessoas.

No exemplo sugerido anteriormente para o lançamento da moeda, estaríamos realizando a transnumeração a partir do momento em que iniciamos os registros dos lançamentos, sejam eles, em forma de uma tabela, de um gráfico, ou qualquer outra forma de medição, que proporcione a compreensão. Assim segundo Wild e Pfannkuch (1999, p. 227, tradução nossa), "no final do processo, a transnumeração acontece mais uma vez quando descobrimos representações de dados que ajudam a transmitir nossos novos entendimentos sobre o sistema real para os outros”.

---

<sup>10</sup>The most fundamental idea in a statistical approach to learning is that of forming and changing data representations of aspects of a system to arrive at a better understanding of that system. We have coined the word transnumeration to refer to this idea. We define it as "numeracy transformations made to facilitate understanding". Transnumeration occurs when we find ways of obtaining data (through measurement or classification) that capture meaningful elements of the real system.

<sup>11</sup>We may re-express the data via transformations and reclassifications looking for new insights. We might try a variety of statistical models. And at the end of the process, transnumeration happens yet again when we discover data representations that help convey our new understandings about the real system to others

De acordo com Pfannkuch, Rubick e Yoon (2002. p. 567, tradução nossa), o processo ocorre em três estágios:

[...] primeiro, quando medidas quantitativas ou de classificação relevantes para o problema são capturadas de situações do mundo real; segundo, no sistema estatístico quando várias representações dos dados são empregadas na tentativa de entender o que os dados estão dizendo sobre a situação do mundo real; em terceiro lugar, quando os resumos estatísticos são comunicados de forma compreensível e convincente para o público-alvo, e que se relacionados à situação original do problema.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup>[...] first, when quantitative or classification measures relevant to the problem are captured from real-world situations; second, in the statistical system when multiple representations of data are employed in an attempt to understand what the data is telling about the real world situation; Third, when the Statistical summaries are communicated in an understandable and convincing to the target audience, and that are related to the situation problem document.

Dados esses três estágios, percebemos a variedade de modelos estatísticos, presentes, que vão desde as medidas coletadas, a organização dos dados em tabelas ou os diversos tipos de gráficos, que possibilitem uma visão mais detalhada do problema em questão, resumam as informações coletadas e que possam ser percebidas, de uma maneira convincente, aos sujeitos envolvidos na pesquisa e/ou situação problema.

### 1.3.3 Terceira categoria: variação

Segundo Wild e Pfannkuch (1999), o pensamento estatístico, pelo menos no sentido moderno, está relacionado ao aprendizado e à tomada de decisões sob incerteza. Grande parte dessa incerteza deriva da variação onipresente.

Esta categoria nos mostra o quanto a variação está presente em nossa realidade de forma a modificar ou influenciar as estratégias que possamos ter ao buscarmos a solução de um determinado problema. A busca pelo entendimento dessa variação pode ser um fator importante para o entendimento, a explicação ou mesmo o controle.

Outro fator também a se considerar sobre a variação, é o de acreditarmos que um experimento realizado com uma pequena amostra possa refletir as características ou culturas de uma população ou grupo. Desta forma devemos ser levados a levantar suspeitas, pois pequenas amostras, podem gerar dúvidas e incertezas e isso ocorre, devido a variação se apresentar de forma mais frequente nas pequenas amostras. Com isso a precisão ao qual se analisa a população ou o grupo pode estar comprometida.

Uma maneira de exemplificar a variação seria, quando lançamos uma moeda "não viciada"<sup>12</sup> 100 (cem) vezes e buscamos saber a frequência relativa do número de caras

---

<sup>12</sup>Uma moeda é não viciada quando a probabilidade de sair cara é exatamente igual ao de sair coroa,

para os primeiros 10 (dez) primeiros lançamentos. É provável que haja um desequilíbrio do número de coroas, porém se tomarmos amostras cada vez maiores, como os 30 (trinta) primeiros lançamentos, os 50 (cinquenta) e assim sucessivamente, iremos observar que a frequência relativa do número de caras cada vez se aproximará, do valor de 50%. Isso nos mostra como a variação pode ocorrer numa pesquisa amostral, se não forem levadas em consideração uma quantidade substancial de dados que reflitam de forma precisa as características de grupo ou população.

### 1.3.4 Quarta categoria: conjunto distinto de modelos

De acordo com Wild e Pfannkuch (2000, p. 136, tradução nossa), o raciocínio é construído a partir de modelos, com a estatística tendo sua própria classe distinta de modelos<sup>13</sup>. A principal contribuição da disciplina de estatística para o pensamento tem sido seu próprio conjunto distinto de modelos, ou estruturas, para pensar sobre certos aspectos da investigação de maneira genérica.

A modelagem tem por finalidade realizar uma simulação de sistemas reais, com o propósito de prever o comportamento destes. No caso da modelagem estatística essa consiste na tentativa de descrever um fenômeno.

A Modelagem pode ser compreendida como uma metodologia de ensino que possibilita ao estudante abordar conteúdos matemáticos a partir de fenômenos de sua realidade, e tem como objetivo explicar matematicamente situações do cotidiano, das mais diferentes áreas da Ciência, com o propósito de educar matematicamente. (COSTA e IGLIORI, 2018, p. 136)

Segundo Coutinho (2013, p. 136), "Em particular, os métodos de estudo de agrupamento de dados por meio de gráficos, tabelas e análises têm sido desenvolvidos a partir do fluxo de modelos matemáticos construídos com dados originados de situações aleatórias."

A quarta categoria portanto está associada aos modelos matemáticos, em especial os estatísticos, assim a partir de um problema vivenciado pelo estudante, constrói-se uma representação matemática e gera-se uma solução. Isso pode ser feito por meio de um estudo de série temporal, regressão, o uso das medidas de tendência e dispersão ou apenas pela análise gráfica que represente os dados reais.

---

isto é a moeda não está adulterada

<sup>13</sup>[...] constructing and reasoning from models, with statistics having its own distinctive class of models

### 1.3.5 Quinta categoria: conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese entre eles

Para Wild e Pfannkuch (1999), as matérias-primas sobre as quais funciona o pensamento estatístico são o conhecimento estatístico, o conhecimento do contexto e a informação nos dados. O próprio pensamento é a síntese desses elementos para produzir implicações, insights e conjecturas. Não se pode entrar no pensamento estatístico sem algum conhecimento do contexto.

Na quinta categoria percebemos como é importante o estudante de estatística ter o conhecimento de causa e efeito. Ele deve conhecer todas as circunstâncias que acompanham um fato ou uma situação, para que possa compreender ou solucionar um problema de forma clara, dando significância a essas informações. Caso isso não ocorra Wild e Pfannkuch (1999, p. 228, tradução nossa) afirmam que:

A paisagem árida e sem contexto sobre a qual tantos exemplos usados no ensino de estatística são construídos garante que um grande número de alunos nem mesmo veja, muito menos se engaje no pensamento estatístico. É preciso trazer todo o conhecimento relevante, independentemente da fonte, para a tarefa em mãos e, então, fazer conexões entre o contexto-conhecimento existente e os resultados das análises para chegar ao significado<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>The arid, context-free landscape on which so many examples used in statistics teaching are built ensures that large numbers of students never even see, let alone engage in, statistical thinking.

Desta forma, percebemos que o interesse do estudante pelo ensino de estatística, está condicionado a forma como ele vê o problema e consegue contextualizar com seu dia a dia. As práticas experimentais são uma forte aliada do professor neste momento, pois conduzirá o discente a uma melhor compreensão e contextualização do problema. Por tanto, o estudante poderá trazer para si as informações contidas no problema e de forma concreta dar significância às soluções obtidas, possibilitando que as mesmas possam ajudá-lo a melhorar aquilo a que lhe foi proposto. Contudo é preciso criar formas para que, esse estudante, por meio do seu conhecimento de mundo e tendo como base os conceitos estatísticos e probabilísticos, seja capaz de generalizar resultados, aplicando-os em situações reais, consciente da incerteza presente nelas.

## Capítulo 2

# O Livro Didático de Matemática e Medidas de Tendência Central

Este capítulo é dedicado ao estudo sobre a história do livro didático no Brasil e sua importância no processo de ensino e aprendizagem nas escolas públicas. Falaremos do PNLD e como ele ocorreu no ano de 2021. Abordaremos como a BNCC prevê o conteúdo de estatística, de forma geral. Em seguida serão apresentadas especificamente as medidas de tendência central através de conceitos e exemplos, por fim mostraremos como essas medidas são trabalhadas nos livros didáticos das escolas públicas brasileiras.

### 2.1 História do livro didático no Brasil

Historicamente o livro didático, no Brasil, surgiu, na época do Brasil imperial e somente por volta do ano 1929, com a criação do Instituto Nacional do Livro - INL, ficou instituído o livro didático no país (Brasil Escola, 2021, p. 02). Esse instituto foi criado com a intenção de legitimar e auxiliar na produção do livro didático. No entanto, isso ficou apenas no papel, quando somente no ano de 1934, época do governo Vargas, o instituto começou a elaborar um dicionário nacional e uma enciclopédia, com o objetivo de aumentar o número de bibliotecas públicas, no país. Segundo Silva (2012), foi uma época que "preocupou-se em fortalecer a ideia de nação forte e unida" (SILVA, 2012, p. 808).

Economicamente, a crise de 1929 havia causado elevação no preço das importações de livros, forçando a produção de obras didáticas nacionais. Francisco Campos, ministro da Educação e da Saúde Pública em 1931, foi o responsável pela elaboração de uma proposta didática de cunho nacionalista. A partir de então, os livros didáticos passaram a ser produzidos em larga escala, com autores brasileiros, seguindo o programa nacionalista criado no início da década de 1930. (ZACHEU e CASTRO, 2015, p. 07)

No dia 30 de dezembro de 1938, com o decreto-lei n. 1006, foi criada a Comissão Nacional do Livro Didático – CNLD que, segundo Filgueiras (2013, p. 166) tinha, entre outras funções:

[...] examinar e autorizar o uso dos livros didáticos que deveriam ser adotados no ensino das escolas pré-primárias, primárias, normais, profissionais e secundárias de todo país. A CNLD deveria ser integrada por sete membros, designados pelo presidente da República, divididos em especializações: metodologia das línguas, metodologia das ciências e metodologia das técnicas.

Desta forma, fica instituída a criação do livro didático no país, instrumento esse que tem um papel muito importante na educação básica brasileira. De acordo com Zacheu e Castro (2015, p. 15):

Nesse momento, o livro didático é uma ferramenta essencial para concretização e reprodução ideológica do Estado Novo. Até então, o livro didático era encontrado de forma desorganizada no país, sendo que cada estado estabelecia um critério para o material. Gustavo Capanema, ministro da Educação e Saúde Pública desde 1934, no documento intitulado Livros escolares: projeto de exposição de motivos demonstrou a importância de se ter uniformizado no país uma seleção de material para o ensino elementar.

Durante o período de 1929 a 1996, muitos governos passaram e várias foram as formas utilizadas por eles, para que o livro didático chegasse às salas de aula das escolas públicas. Com a extinção da então Fundação de Assistência ao Estudante - FAE, no ano de 1997 e a transferência integral da política de execução do Programa Nacional do Livro Didático -PNLD, para o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE, teve início a produção, divulgação e distribuição dos livros didáticos, nas redes públicas estaduais e municipais.

Porém o país viveu uma época marcada pelo Regime Militar, iniciando no ano de 1964. Nesse período os currículos escolares sofreram bastante mudanças e foram adequa-

dos aos ideais e doutrinas que o regime impunha. De acordo com Bezerra e Luca (2006, p. 30)

Em 1966, sob a égide da ditadura militar foi criada a Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED), cuja função era coordenar a produção, edição e distribuição do livro didático. Para assegurar recursos governamentais, contou-se com o financiamento proveniente do acordo MEC – USAID (United States Agency for International Development). O aporte de recursos públicos garantiu a continuidade do livro didático que, a partir de então, ocupou lugar relevante nas preocupações do Estado brasileiro que, mais uma vez, pretendia ter o controle sobre o que e como se ensinava.

O período ficou marcado pela censura e repressão à liberdade, nos temas e conteúdos trabalhados nos livros didáticos das escolas brasileiras.

A questão da compra e distribuição de livros didáticos recebeu tratamento específico do poder público em contextos diferenciados — 1966, 1971 e 1976 —, todos marcados, porém, pela censura e ausência de liberdades democráticas. De outra parte, esse momento foi marcado pela progressiva ampliação da população escolar, em um movimento de massificação do ensino cujas consequências, sob o ponto de vista da qualidade, acabariam por deixar marcas indelévels no sistema público de ensino e que persistem como o seu maior desafio. Neste contexto particular, destaca-se o peso da interferência de pressões e interesses econômicos sobre a história ensinada, na medida em que os governos militares estimularam, por meio de incentivos fiscais, investimentos no setor editorial e no parque gráfico nacional que exerceram papel importante no processo de massificação do uso do livro didático no Brasil. Cabe destacar que a associação entre os agentes culturais e o Estado autoritário transcendeu a organização do mercado consumidor da produção didática e envolveu relações de caráter político-ideológico, cujas repercussões sobre o conteúdo dos livros didáticos foram marcantes, sobretudo pela perspectiva de civismo presente na grande maioria das obras, bem como pelo estímulo a uma determinada forma de conduta do indivíduo na esfera coletiva. Deste modo, o uso do livro didático tornar-se um instrumento de repressão e contenção do Estado, e sua distribuição passa a ser maciça para atingir estes fins. (MIRANDA, 2004, p. 03)

Na sequência, em 1967, foi criada a Fundação Nacional do Material Escolar – Fename – por meio da lei n. 5327/67. O período ficou marcado pela ampliação da rede escolar, devido a implantação parcial da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB - 1961.

Em 1971, o INL criou o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental – Plifed – assumindo os recursos e trabalhos antes organizados pela Colted, que de acordo com Filgueiras (2013), fora extinta nesse mesmo ano por envolvimento em escândalos com transportadoras e empresas que montariam as bibliotecas nas escolas. Neste mesmo ano, o MEC/USAID, puseram fim no convênio e a lei n. 5692/71, foi criada provocando a reforma educacional.

No ano de 1976 foi extinto o INL, tornando-se a Fename responsável pelo Programa do Livro Didático – PLD. De acordo com Filgueiras (2013) cabia a Fename a função de produzir os livros didáticos e financiar o mercado editorial privado. Ainda segundo Filgueiras (2013), com a fusão entre as instituições, a Fename tornou-se uma das mais importantes instituições no âmbito educacional do MEC.

No início da década de 1980, o Brasil ensaiava uma democracia e novamente o país iria passar por novas mudanças e estas foram bastante consideráveis, principalmente no âmbito escolar.

Nos anos 1980, novos ares de democracia começaram a soprar em terras brasileiras e, nesse momento, as mudanças também adentraram o campo escolar. Em 1983, a Fename foi incorporada pela Fundação de Assistência ao Estudante – FAE – que tomou o Plifed sob sua administração. Seguindo o rumo de uma tímida democracia em ascensão, o Plifed deu lugar em 1985 ao Programa Nacional do Livro Didático – PNLD. (ZACHEU e CASTRO, 2015, p. 09)

Desta forma, a partir do ano de 1985, até os dias atuais, o PNLD é o programa do Governo Federal do Brasil, que tem por objetivo principal avaliar e distribuir livros didáticos, pedagógicos e literários, de forma universal e gratuita, às escolas públicas das redes de ensino básico e também às instituições de educação infantil sem fins lucrativos e conveniadas com o poder público.

Na década de 1990, os professores passaram a atuar mais ativamente na etapa de seleção do livro, porém parte do programa nesse período, chegou a ser suspenso, pois o Brasil vivia momentos conturbados com a política empregada pelo governo Collor. No ano de 1992, a distribuição dos livros ficou restrita até a 4<sup>a</sup> série do ensino fundamental, devido às complicações orçamentárias vividas pelo governo brasileiro.

O ano de 1993, de acordo com Melo (2018, p. 48), significou um marco para a educação, devido à política voltada para os materiais didáticos. Foram então definidos critérios para avaliação dos livros didáticos, com a origem das comissões avaliadoras na Portaria 1.130, de 5 de agosto de 1993.

Até 1995, a entrega de livros didáticos ocorria de forma limitada, a poucas séries tinham o privilégio de recebê-los, além da falta de regularidade. O processo de distribuição

é retomado de forma gradativa nas séries subsequentes. Em 1995, são contempladas as disciplinas de matemática e língua portuguesa. Em 1996, a de ciências e, em 1997, as de geografia e história. Até então, apenas o Ensino Fundamental recebia este material.

Desde do ano de 1996, era a Secretaria de Educação Básica a responsável de coordenar e avaliar o conteúdo das obras inscritas no PNLD, em parceria com universidades públicas. O programa se fortaleceu quanto às regularizações, pois a avaliação dos livros ficou mais rigorosa e criteriosa e a distribuição passou a seguir regras e leis. Em 1997, o PNLD passou a alcançar todas os anos e componentes curriculares do Ensino Fundamental (TADEU, 2019, p).

O Ensino Médio e a Educação de Jovens e Adultos (EJA), de forma gradativa, passaram a receber o livro didático, de forma completa pelo programa no ano de 2011. Em 2012, o PNLD passou a incluir, além de livros impressos, material multimídia em DVD, com jogos, simuladores e infográficos para serem utilizados como recurso didático.

Outra novidade significativa surge nos anos 2000, com a distribuição de dicionários de língua portuguesa para os alunos do Ciclo I do ensino fundamental. Em 2003, é criado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLDEM), porém, contemplando então apenas as disciplinas de Português e Matemática e proporcionando a distribuição completa desses livros para todas as regiões do país somente em 2005. As demais disciplinas foram incorporadas de forma progressiva, sendo que em 2007 foram distribuídos os livros de Biologia, de História e de Química. Em 2008 abrangeram os livros de Física e de Geografia. Esses livros são entregues hoje trienalmente e de forma reutilizável. As disciplinas de Filosofia, Sociologia e Inglês passaram a ter livros didáticos distribuídos nas escolas a partir de 2010 e a disciplina de Artes somente a partir de 2015. Atualmente, os livros didáticos também podem ser encontrados de forma digitalizada, o que facilita a preparação de aulas com recursos tecnológicos. (ZACHEU e CASTRO, 2015, p. 09)

Em 2019, o PNLD institui a aquisição de livros com formato digital e acessíveis a todos os estudantes e professores. Com isso além do formato impresso os livros didáticos passaram a vir no formato digital, tornando seu acesso mais fácil e permitindo uma maior interação com o aluno e a possibilidade de recursos multimodais.

Com o Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, as ações anteriormente contempladas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e pelo Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE) foram unificadas. Com nova nomenclatura, o PNLD também foi ampliado e passou a incluir a possibilidade de outros materiais de apoio à prática educativa para além das obras didáticas e literárias: obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais

destinados à gestão escolar, entre outros.

Hoje estamos em meio ao PNLD 2021, momento este que professores, escolas e Secretarias de Educação, estão envolvidos na escolha do livro didático para o novo ensino médio. O PNLD 2021 ocorrerá em duas fases. Na primeira fase, já foram escolhidos os Projetos Integradores e Projeto de Vida: obras que propõem um aprendizado voltado à vivência prática, com ações de pesquisa, discussão e produção. Na segunda fase, foram escolhidos os livros didáticos por área do conhecimento, obras de formação para professores e gestores, recursos digitais e as obras literárias.

## 2.2 O PNLD 2021

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é um programa do Governo Federal do Brasil que tem por objetivo principal avaliar e distribuir livros didáticos, pedagógicos e literários, de forma universal e gratuita, às escolas públicas das redes de ensino básico e também às instituições de educação infantil sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

O PNLD é uma política pública executada pelo FNDE e pelo Ministério da Educação destinada a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma sistemática, regular e gratuita. É um dos maiores programas de distribuição de livros do mundo. Os materiais adquiridos vão diretamente para as mãos dos estudantes e professores das escolas públicas participantes do Programa. Isso garante o acesso a materiais de excelente qualidade! [...]Com a edição do Decreto nº 9.099, de 18/07/2017, os Programas do Livro foram unificados. Assim, as ações de aquisição e distribuição de livros didáticos e literários, anteriormente contempladas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e pelo Programa Nacional Biblioteca na Escola (PNBE), foram consolidadas em um único Programa, chamado Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD. (BRASIL, 2021, p. 01)

No momento que antecede a escolha do livro didático, cada rede de ensino deve optar por algum dos modelos previstos no PNLD 2021.

As redes de ensino devem decidir qual modelo de escolha pretendem adotar para cada Programa. A rede de ensino deve informar se deseja que cada escola receba o material registrado no sistema, se deseja criar grupos de escolas que receberão o mesmo material ou ainda se deseja adotar o mesmo material para todas as escolas da rede de ensino. (BRASIL, 2021, p. 03)

No estado do Maranhão toda a rede recebe o mesmo material, visto que foi esta a decisão da rede de ensino para as escolas maranhenses. Portanto, todas as instituições e seus respectivos professores participarão da escolha do livro didático e aquela coleção que obteve o maior percentual de escolha, foi adotada para toda a rede de ensino.

No ano de 2021 a escolha do livro didático para essa edição do PNLD, sofreu bastante mudanças, pois as escolas com estudantes no ensino médio deverão registrar a escolha para áreas do conhecimento e para obras didáticas específicas, conforme os quadros abaixo:

Figura 2.1: Áreas do conhecimento

DO ÁREAS CONHECIMENTO	ÁREAS DO CONHECIMENTO	OPÇÕES		
	ENSINO MÉDIO – 1º ao 3º ano			
	Linguagens e suas Tecnologias	1ª opção	2ª opção	
	Matemática e suas Tecnologias	1ª opção	2ª opção	
	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	1ª opção	2ª opção	
	Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	1ª opção	2ª opção	

Fonte: FNDE

Figura 2.2: Obras didáticas específicas

OBRA DIDÁTICAS ESPECÍFICAS	OBRA DIDÁTICAS ESPECÍFICAS	OPÇÕES		
	ENSINO MÉDIO – 1º ao 3º ano			
	Língua Portuguesa	1ª opção	2ª opção	
	Língua Inglesa	1ª opção	2ª opção	
	Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática	1ª opção	2ª opção	

Fonte: FNDE

As obras das áreas do conhecimento estão divididas em seis volumes por área, cada volume contemplando conteúdos específicos previstos na BNCC. As obras didáticas específicas são compostas por volumes únicos. Já as obras didáticas específicas de língua inglesa e ciências humanas e sociais aplicadas em diálogo com a matemática são independentes. Para cada obra, deverão ser escolhidas duas opções, 1ª e 2ª, de editoras diferentes.

As escolas e as redes de ensino serão as responsáveis por garantir que todos os professores da escola, participem de forma democrática da escolha de cada livro didático seja da área de conhecimento ou das obras didáticas específicas.

Compete às escolas e às redes de ensino garantir que o corpo docente da escola participe do processo de escolha democraticamente. Para registrar a participação dos professores na escolha e dar transparência ao processo, a decisão sobre a escolha das coleções deve ser documentada por meio da Ata de Escolha. Esse documento poderá ser encontrado no Guia do PNLD e também no portal do FNDE. (BRASIL, 2021, p. 08)

Desta forma, a escolha deverá ser realizada a partir de uma reflexão coletiva entre os professores de cada área do conhecimento, garantindo de forma democrática, a escolha da melhor obra para trabalharem durante o ano letivo e que estes materiais escolhidos, sejam verdadeiros instrumentos mediadores do ensino e aprendizagem.

## 2.3 Importância do Livro Didático de Matemática nas Escolas Públicas Brasileiras

O livro didático é de longe a ferramenta, mais utilizada pelo professor no processo de ensino e aprendizagem. Mesmo, nos dias atuais, onde a tecnologia conseguiu chegar a praticamente todos os setores, o livro didático é ainda um material indispensável nas salas de aula das escolas públicas brasileiras. Ele é o responsável pelo acompanhamento, planejamento e execução das aulas pelos professores e é um dos meios que os estudantes utilizam, para a aquisição do conhecimento.

O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos. (COSTA e ALLEVATO, 2009, p. 72)

Para Costa et al (2017), o livro didático vem dando uma grande contribuição ao desenvolvimento do processo educativo, merecendo uma maior atenção por parte dos professores e demais sujeitos envolvidos na promoção desse processo.

Os PCN destacam que:

O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 13)

Todo o processo dinâmico que envolve o ensino e aprendizagem, tem sua origem, no livro didático, sendo assim o maior aliado do professor na condução e execução de suas aulas. Segundo Luckesi (2004, p. 27), "o livro didático é um meio de comunicação, através do qual o aluno recebe a mensagem escolar". Desta forma, o livro didático, proporciona uma forte ligação entre o professor e o aluno, pois é com o seu uso durante as aulas, que

ambos conseguem extrair o conhecimento necessário para vida acadêmica.

Dentre os materiais envolvidos nas atividades escolares que são denominados de material escolar, encontra-se o livro didático, que é utilizado sistematicamente no ambiente escolar em aulas e cursos. Estes livros didáticos vêm se consolidando como uma das duas formas de transmissão do saber matemático na escola, a comunicação oral ou pessoal e os textos escritos. (DA SILVA JUNIOR, 2007, p. 13)

Contudo, como destaca Costa et al. (2017, p. 11) "o livro didático além de instrumento destinado à promoção do processo educativo nas escolas públicas, deve ser claro, objetivo, organizado e possuir uma linguagem acessível ao público ao qual se destina". Desta forma, deve se apresentar de forma contextualizada e que atenda a realidade ao qual os estudantes estão inseridos.

O conhecimento produzido por ele é categórico, característica perceptível pelo discurso unitário e simplificado que reproduz, sem possibilidade de ser contestado, como afirmam vários de seus críticos. Trata-se de textos que dificilmente são passíveis de contestação ou confronto, pois expressam 'uma verdade' de maneira bastante impositiva. Os livros didáticos merecem ser considerados e utilizados de acordo com suas reais possibilidades pedagógicas e cada vez mais aparece como um referencial, e não como um texto exclusivo, depositário do único conhecimento escolar posto à disposição para os alunos. (BITTENCOURT, 2004, p. 319).

Portanto, se bem utilizado, o livro didático é um material que oferece um grande apoio ao professor e ao aluno. Ele não deve ser na única ferramenta responsável para a aquisição de conhecimento. Isso limitaria a prática do professor e tiraria o direito do estudante o acesso a um aprendizado mais profundo, ao ponto de satisfazer suas necessidades e curiosidades.

### **2.4 E o que diz a BNCC sobre o ensino e aprendizagem da Estatística na Educação Básica ?**

A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. De acordo com o que determina a LDB, é ela a responsável por nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

A BNCC estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades necessárias durante todo o processo educacional dos estudantes. Ela tem por objetivo central, balizar a qualidade da educação no Brasil, por meio do estabelecimento de um patamar de aprendizagem e desenvolvimento a que todos os alunos têm direito.

O documento está estruturado em:

- Textos introdutórios (geral, por etapa e por área);
- Competências gerais que os alunos devem desenvolver ao longo de todas as etapas da Educação Básica;
- Competências específicas de cada área do conhecimento e dos componentes curriculares;
- Direitos de Aprendizagem ou Habilidades relativas a diversos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica — da Educação Infantil ao Ensino Médio.

Para o conteúdo de Estatística ela prevê que:

Para o desenvolvimento de habilidades relativas à Estatística, os estudantes têm oportunidades não apenas de interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas. (BRASIL, 2018)

Percebemos como a BNCC demonstra uma grande preocupação com o aprendizado dos estudantes da Educação Básica, no que diz respeito à Estatística e mesmo não tocando no tema pensamento estatístico, ela consegue em seu texto contemplar as categorias necessárias para o desenvolvimento desse tipo de pensamento.

Observando que ela prevê que, além de saber interpretar as estatísticas divulgadas pelos meios de comunicação, o estudante deve ter habilidades para planejar, executar uma pesquisa amostral e divulgar os resultados, a BNCC, contempla as cinco categorias necessária para o desenvolvimento do pensamento estatístico.

Agora vejamos, ao planejar uma pesquisa, o ponto de partida é a necessidade de ter dados, desta forma aparece a primeira categoria. A segunda categoria que é a transnumeração se dá, quando o estudante iniciar o processo de transformação do registro dos dados coletados. A terceira categoria, variação, ocorre a partir do momento que estamos trabalhando com a incerteza, já que a mesma é onipresente, quando tratamos de fenômenos aleatórios, além do que se formos considerar uma pequena amostra os resultados

refletidos podem estar comprometidos, isto é, não retratam a situação real da população analisada. Apesar de a BNCC não explicitar a variação em seu texto, chamamos a atenção para o fato de que o professor pode trabalhar essa categoria durante a pesquisa, fazendo estimação com amostras maiores e menores para que os alunos avaliem os riscos relacionados às inferências feitas com amostras de tamanhos distintos. Quanto a quarta categoria o conjunto distinto de modelos, está presente, pois o estudante, poderá retratar sua pesquisa de diversas maneiras, sejam nas tabelas, gráficos, cálculos numéricos das medidas de tendência central, etc. A quinta e última categoria trata do conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese. Esta categoria é iniciada durante os questionamentos feitos pelo professor que vão gerar nos alunos o reconhecimento da necessidade de ter dados. O conhecimento de contexto e o conhecimento estatístico são pré-requisitos para o planejamento e execução de uma pesquisa amostral. A síntese por sua vez, ocorre ao final do processo, no qual o estudante dará significância às informações obtidas nos resultados. Desta forma a quinta categoria estará presente em todo o processo necessário para a elaboração de uma pesquisa amostral, passando pelo processo de execução, e se encerrando no processo de análise e tomada de decisões, baseadas nos resultados obtidos.

Como vemos a BNCC, apesar de seu texto não mencionar o pensamento estatístico, ela encontra-se totalmente alinhada ao que afirmam Wild e Pfannkuch (1999), quando categorizaram o desenvolvimento do pensamento estatístico.

## 2.5 Medidas de Tendência Central

Nesta seção trataremos das medidas de tendência central, tema este que é bastante abordado nos problemas de estatística presentes no ENEM. É também previsto na BNCC como conteúdo base para o aprendizado da estatística, pelos estudantes da Educação Básica. É de fato, é o conteúdo mais trabalhado pelos professores de matemática, quando se fala de estatística, em sala de aula. São elas, as medidas que podem caracterizar o comportamento dos elementos de uma série, possibilitando determinar se um valor está entre o maior e menor valor dessa série, ou se está localizado no centro do conjunto de dados por exemplo.

As medidas de tendência central, também conhecidas como as medidas de posição, tem esse nome pois representam um valor central ou valor típico para uma distribuição. Segundo Duquia e Bastos (2006), utilizamos as medidas de tendência central (MTC) para expressar, através de um único número, em torno de que valor tende a se concentrar um conjunto de dados numéricos.

Magalhães e Lima (2002, p. 93) exemplificam que:

Se estamos numa parada de ônibus urbano e nos pedem alguma informação sobre a demora em passar um determinado ônibus, que diremos? Ninguém imagina que poderíamos dar como resposta uma tabela de frequências que pacientemente coletamos no último mês, ou ano! Tampouco, seria adequado apresentar um modelo teórico pelo qual teríamos ajustado o comportamento da variável aleatória de interesse. Quem perguntou deseja uma resposta breve e rápida que sintetize a informação que dispomos e não uma completa descrição dos dados coletados ou da modelagem que porventura fizemos.

Desta forma entenderemos as MTC, como um valor que é associado a um conjunto de distribuições e este valor tende a estar localizado no centro desta distribuição, quando a mesma representa uma distribuição simétrica. Agora vejamos, numa distribuição simétrica, as medidas de tendência central coincidem, ou seja, a média, a moda e a mediana. No entanto, na distribuição assimétrica à esquerda, também chamada de negativa, a média é menor que a moda e na assimétrica à direita ou positiva, a média é maior que a moda.

Quando trabalhamos com variáveis quantitativas<sup>1</sup>, muitas vezes o número de observações é grande e necessitamos de parâmetros para descrever de forma sucinta o comportamento desse conjunto de informações. De acordo com Duquia e Bastos (2006) utilizamos as medidas de tendência central (MTC) para expressar, através de um único número, em torno de que valor tende a se concentrar um conjunto de dados numéricos.

Imaginemos agora o conjunto de dados formado pelas idades dos estudantes de uma escola. Esses dados poderiam ser agrupados em uma tabela e em seguida usados em uma representação gráfica. Segundo Iezzi et al. (2016, p. 128), "a esses dados podemos ainda estabelecer algumas medidas, ou seja, números reais que possam dar a eles uma representatividade, isto é, resumam o conjunto de todas essas idades registradas". Esses valores estão associados a dois tipos de medidas: medidas de centralidades e medidas de dispersão. Para Correa (2003, p. 48), tais medidas possibilitam comparações de séries de dados entre si pelo confronto desses números. As medidas de centralidade mais importantes são, a moda a média e a mediana. Outras medidas de posição são as separatrizes, que englobam, a mediana, os quartis, os decis e os percentis.

Observamos que as MTC, têm a função de realizar uma síntese das informações as quais os dados estão representando, ficando essa medida, próxima ao centro desses valores.

---

<sup>1</sup>As variáveis quantitativas são características que podem ser descritas por números, sendo estas classificadas entre contínuas e discretas. Variáveis discretas: a variável é avaliada em números que são resultados de contagens e, por isso, somente fazem sentido números inteiros. Exemplos: número de filhos, número de bactérias por litro de leite, número de cigarros fumados por dia. Variáveis contínuas: a variável é avaliada em números que são resultados de medições e, por isso, podem assumir valores com casas decimais e devem ser medidas por meio de algum instrumento. Exemplos: massa (balança), altura (régua), tempo (relógio), pressão arterial, idade.

Em Duquia e Bastos (2006, p. 190), perceberemos a necessidade das MTC, como o valor que descreve todos os outros, dados da pesquisa.

Um pesquisador interessado em estudar a creatinina, substância dosada pelo sangue que avalia a função renal de um indivíduo, em um grupo de idosos de um asilo, afere a creatinina de 20 idosos. Posteriormente, ele registra em uma tabela a creatinina de cada indivíduo, por ordem de entrevista, a fim de estudar o valor desse metabólito nesse grupo de pessoas. Da forma como está apresentado na TABELA 1, podemos observar especificamente a creatinina de cada idoso. Entretanto, qual o valor numérico que poderia representar esses 20 indivíduos? Dito de outra forma, próximo de que valor se encontra a maioria das medidas de creatinina dos idosos investigados?

Figura 2.3

TABELA 1 - Descrição da creatinina sérica de 20 indivíduos idosos.

Número do professor	Peso (kg)
1	0,6
2	0,8
3	1,0
4	0,8
5	0,9
6	1,0
7	0,7
8	0,5
9	1,1
10	0,5
11	0,8
12	1,1
13	0,8
14	0,9
15	0,8
16	0,9
17	0,7
18	0,6
19	0,8
20	0,7

Duquia e Bastos (2006, p. 190)

De acordo com Duquia e Bastos (2006, p. 191), "Algumas pessoas responderiam a esta questão citando a média da creatinina nesses 20 idosos". No entanto, conforme veremos posteriormente, nem sempre a média é a medida mais adequada, para descrever um conjunto de dados. Para respondermos a este questionamento ou a outros questionamentos formados por um conjunto de dados, frequentemente recorreremos as MTC, que têm como objetivo descrever de forma sucinta esse conjunto de dados. Existem três principais medidas de tendência central. São elas: média, mediana e moda.

Portanto como vemos além das MTC, representarem um único valor para a pesquisa, temos situações em que uma dada medida não consegue representar a característica descrita pela pesquisa amostral e assim necessitamos de uma outra MTC, para representá-la. Para Leite (2010) as medidas de tendência central podem auxiliar na análise de dados e se tornam indispensáveis e, em cada situação, uma pode ser mais conveniente do que a outra, porém não se pode dizer ao certo qual a mais adequada. A seguir, serão descritas as três principais medidas de tendência central:

- Média,
- Mediana
- Moda

### 2.5.1 Média ( $\bar{x}$ )

A história nos diz que o primeiro registro da ampliação da média aritmética de 2 para  $n$  casos para realização de estimativas ocorreu no século XVI. A partir do século XVI a média se tornou referência, para a redução de erros de medidas em diversas outras áreas.

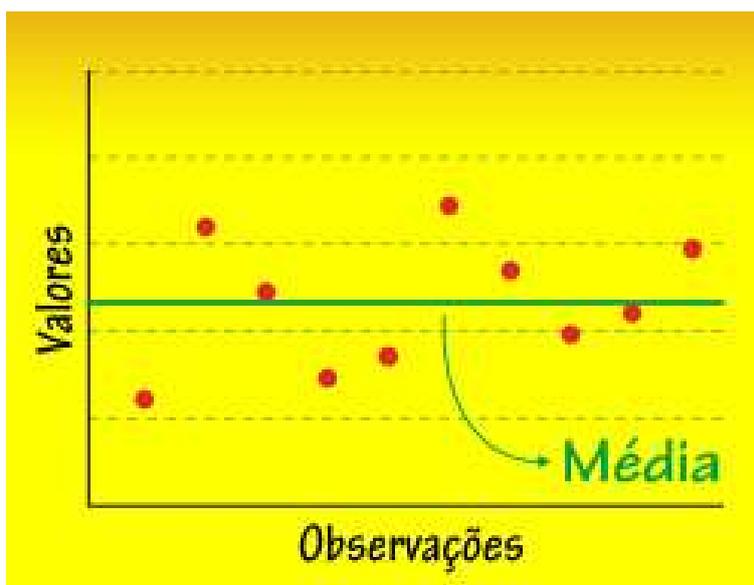
Segundo dados históricos, os astrônomos desejavam saber o valor real de medições imprecisas como a posição de um planeta e os diâmetros da terra e da lua. Com a média de vários valores medidos, cientistas assumiram que o número de erros era relativamente pequeno em comparação com o total de valores medidos. Assim o método de tirar a média para reduzir os erros de uma observação, foi principalmente desenvolvido na astronomia.

Segundo o IBGE (2021)<sup>2</sup>, a média serve para:

- Para estimar uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição, que é a diferença entre o valor indicado e o verdadeiro valor medido;
- Para obter um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme, ou seja, dos valores que tem a mesma chance de ocorrer em um intervalo;
- Para servir de elemento representativo de um conjunto de dados, cuja distribuição é simétrica – quando coincidem os valores da média, da moda e da mediana;
- Para obter um valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população;
- Para ser uma boa estimativa para a média de uma população;
- Para ser uma estimativa da variável para tempo futuro.

Na Figura 2.4, temos uma ideia da proposta de conceito dado pelo IBGE (2021). Desta forma, o conceito de média ficará mais fácil de ser compreendido pelo estudante, além do que o torna mais fácil na hora de formulá-lo. Cazorla, Santana e Utsumi (2019) afirmam que ela representa o centro de gravidade do conjunto numérico, é o único número que está mais próximo de todos os números que ela representa.

Figura 2.4: Representação gráfica da média



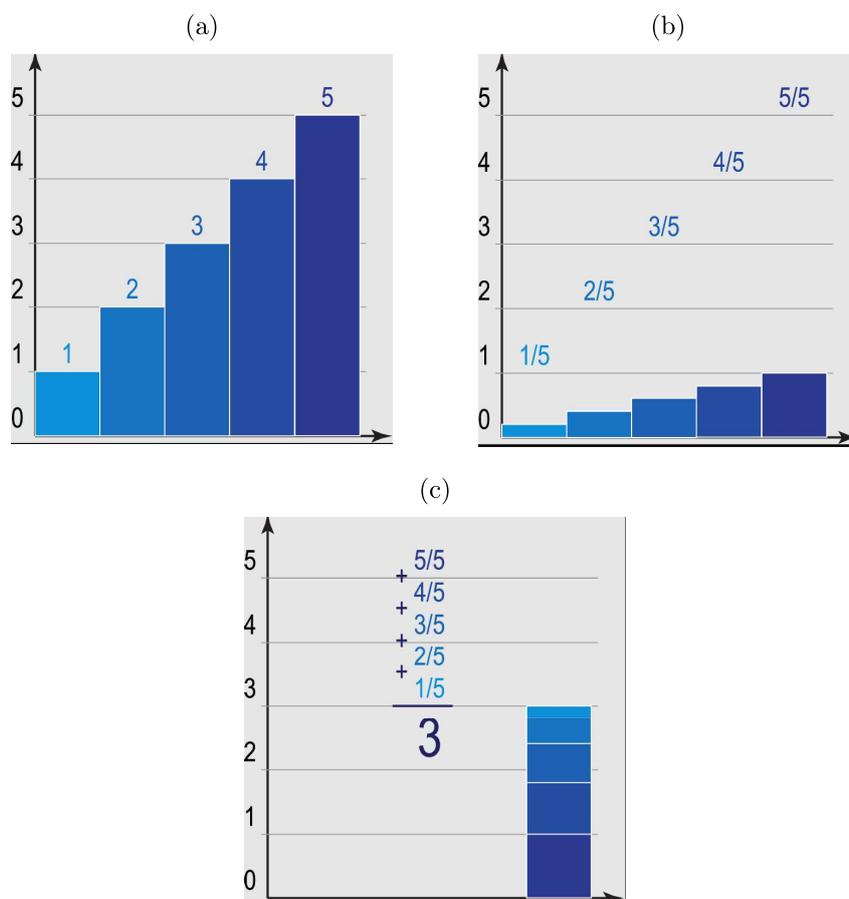
Fonte:IBGE (2021)

---

<sup>2</sup><https://educa.ibge.gov.br/>

No exemplo a seguir adaptado de IBGE (2021), veremos como essa média representa de forma igualitária os valores para cada um dos elementos de um conjunto de dados. Para o conjunto de dados  $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , a média aritmética é igual a  $\frac{(1 + 2 + 3 + 4 + 5)}{5} = 3$ . Na representação gráfica abaixo temos uma visão mais detalhada do conceito proposto. Na Figura 2.5a, temos a distribuição dos 5 elementos do conjunto de dados  $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Na segunda Figura 2.5b temos a representação da divisão igualitária desses valores. E por fim na terceira Figura 2.5c, temos a soma dos valores obtidos na divisão e portanto a média da distribuição.

Figura 2.5: Representação gráfica da média dos elementos do conjunto D



Fonte: IBGE (2021), adaptado pelo autor

De acordo com Correa (2003, p. 49), média é o quociente da divisão da soma dos valores da variável pelo número deles. A média (aritmética) é, de modo geral, a mais importante de todas as medidas descritivas. Cazorla (2002) afirma que a média é de fundamental importância, pois a partir dela são calculadas outras medidas, como é o caso da variância, do desvio padrão, do coeficiente de variação, assimetria, curtose e correlação. Desta forma existe um lugar de destaque para média, pois o seu conceito além de próprio ainda deve ser utilizado para o entendimento de outras medidas estatísticas.

Percebemos o quão importante é trabalharmos em sala de aula os conceitos e pro-

blemas que envolvam as MTC pelo professor de matemática, dada a relevante presença desses conteúdos em avaliações como o ENEM. Além disso, temos a sua real importância, na síntese de problemas que envolvam uma pesquisa estatística. Somando-se a isso o compromisso dos autores dos livros didáticos em conceituar de forma clara e objetiva as MTC, conectando o conteúdo das MTC com a vivência dos estudantes. Desta forma, o conteúdo das MTC ofertará a aos estudantes a capacidade de resolver problemas, dando significância aos resultados obtidos e ampliando assim o pensamento estatístico desses estudantes.

Novos estudos estão surgindo, os livros didáticos já apresentam capítulos direcionados exclusivamente à Estatística, e, ainda livros especializados estão aparecendo e fornecendo material didático relativamente a coleta, resumo, organização, interpretação e apresentação de dados, tabelas, gráficos, porcentagem, etc. (BAYER e ECHEVEST, 2003, p. 41)

Várias são as definições dadas à média pelos autores, porém poucos são os textos aos quais o autor apresenta um conceito que não seja direcionando o leitor diretamente para uma fórmula. Contudo devemos aqui destacar a importância de inicialmente direcionar o leitor para o conceito em que a média, representa um valor justo/equitativo, que uniformiza os valores coletados e a fórmula uma consequência desse pensamento. Vejamos agora como a média é definida por alguns autores.

Segundo Iezzi et al. (2016, p. 129):

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a relação dos valores assumidos por uma determinada variável quantitativa  $x$ . Define-se média aritmética (indicaremos por  $\bar{x}$ ) como a razão entre a soma de todos esses valores e o número total de valores:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Podemos ainda escrever esta expressão de forma reduzida fazendo uso das notações de somatório, portanto a expressão poderá ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Exemplo sugerido por IEZZI et al. (2016, p. 129):

Oito estudantes arremessaram um dado e obtiveram cada um os seguintes resultados, 4, 6, 3, 3, 2, 1, 6 e 4. Qual a média dos valores obtidos pelos estudantes?

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 3 + 3 + 2 + 1 + 6 + 4}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

Portanto, concluímos que o valor médio obtido pelos 8 estudantes é o número 4.

De acordo com Magalhães e Lima (2006, p.93), "Considere uma variável X com observações representadas por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . A medida desse conjunto é a soma dos valores dividida pelo número de observações."

Observamos aqui autores distintos, que apresentam a média como uma ideia que parte de uma fórmula, isto evidencia a necessidade de complementação da definição, pelo professor de matemática em sala de aula. Onde este pode apresentar inicialmente aos estudantes, um conceito de média como o valor equitativo/justo, que consolida os valores coletados em um valor uniforme. Desta forma, o estudante passará a se apropriar de uma ideia mais clara do significado de média aritmética, saindo da ideia que ela será apenas mais um número obtido na resolução do problema e assim conduzindo-o a uma real aplicabilidade da ideia de média, donde a fórmula nada mais é senão, a consequência desta ideia, modelada por uma fórmula matemática.

Strauss (1988), mostra que existem sete propriedades categorizadas por eles, que deveriam ser ensinadas na escola, para que haja o domínio do conceito de média pelos estudantes. Na Figura 2.6 estão elencadas cada uma das sete propriedades.

Figura 2.6: Propriedades categorizadas por Strauss (1988).

PROPRIEDADES	SIGNIFICADO
A	A média está localizada entre os valores extremos;
B	A soma dos desvios a partir da média é zero;
C	A média é influenciada por cada um e por todos os valores;
D	A média não coincide necessariamente com um dos valores do banco de dados que a compõe;
E	A média pode ser um número que não tem correspondente na realidade física;
F	O cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos;
G	A média é um valor representativo do banco de dados a partir dos quais ela foi calculada.

Fonte: Adaptado de Strauss e Bichler (1988, p. 69)

Strauss (1988), afirmam que das sete propriedades citadas no quadro, a G teria maior significativa, já que envolve o seu significado como medida de tendência central, ou seja, uma medida de centralidade. Em estudo de intervenção envolvendo pré-testes e pós-testes, Strauss (1988) constataram que, a mais fácil para o aprendizado dos estudantes foi a C, enquanto F e G foram aquelas em que os estudantes demonstraram maior dificuldade.

A seguir falaremos sobre um caso particular de média, conhecida como média aritmética ponderada ou simplesmente média ponderada, ela é assim denominada pois, leva em consideração a frequência de cada termo (que denominaremos de peso), uma vez que os termos apresentam frequências distintas dos demais.

## 2.5.2 Média Ponderada

A média aritmética ponderada tem seu cálculo similar ao da média aritmética, entretanto a diferença é que na média aritmética todos os valores possuem peso igual a 1, enquanto que no cálculo da média aritmética ponderada se leva em consideração o peso de cada valor, uma vez que cada um deles poderá contribuir mais que outros, isto é, terão uma frequência maior que 1.

De acordo com Iezzi et al. (2016, p. 131):

Considerando uma relação de valores formada pelos elementos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ , com frequências absolutas respectivamente iguais a  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . A média aritmética ponderada desses valores é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i \cdot n_k)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Podemos também expressar  $\bar{x}$  em termos da frequência relativa de cada  $x_i$  (com  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ), a saber,  $f_i = \frac{n_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$

Vamos escrever, convenientemente a expressão obtida para  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = x_1 \cdot \left( \frac{n_1}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \right) + x_2 \cdot \left( \frac{n_2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \right) + \dots + x_k \cdot \left( \frac{n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \right)$$

Assim obtemos:

$$\bar{x} = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_k \cdot f_k = \sum_{i=1}^k (x_i \cdot f_i)$$

Segundo Magalhães e Lima (2002, p.94), "Para os conjuntos de dados já dispostos em uma tabela de frequência pode-se utilizar a média ponderada, onde os valores da variável são ponderados pelos seus respectivos pesos ou frequências."

No exemplo a seguir faremos uso da média aritmética ponderada. Esse exemplo

pertence à prova do ENEM 2018, do segundo dia, caderno azul.

(ENEM 2018 - Questão 145) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho. Os resultados obtidos estão na Figura 2.7

Figura 2.7: Número de acidentes de trabalho

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

Fonte: ENEM 2018

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

- (A) 0,15.
- (B) 0,30.
- (C) 0,50.
- (D) 1,11.
- (E) 2,22.

SOLUÇÃO:

Inicialmente notemos que neste problema devemos ter atenção para não apenas tomar os números de acidentes (0, 1, ..., 5), somá-los e dividirmos esse resultado por 6, calculando a média aritmética, pois desta forma, iríamos desconsiderar as repetições (pesos) das observações. Portanto, para o problema proposto devemos aplicar a ideia de média aritmética ponderada, dada que por definição teremos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i \cdot n_k)}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

Desta forma temos:

$$\bar{x} = \frac{50 \cdot 0 + 17 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{100} = \frac{111}{100} = 1,11$$

Portanto, a média aritmética do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa será de 1,11 acidentes por funcionários, alternativa (C).

### 2.5.3 Mediana ( $M_d$ )

Para Correa (2003, p. 52), "A mediana é uma medida de posição. É, também, uma separatriz<sup>3</sup>, pois divide o conjunto em duas partes iguais, com o mesmo número de elementos". O valor da mediana encontra-se no centro da série estatística organizada, de tal forma que o número de elementos situados antes desse valor (mediana) é igual ao número de elementos que se encontram após esse mesmo valor (mediana).

Segundo Iezzi et al. (2016, p. 136):

A definição garante que a mediana seja um valor central que divide o conjunto de dados em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos. Em um subconjunto, todos os elementos são menores que a mediana ou iguais a ela; no outro subconjunto, todos os elementos são maiores que a mediana ou iguais a ela.

De acordo com Correa (2003, p. 53) "a mediana de dados não tabelados corresponde ao valor central, em uma série com uma quantidade ímpares de termos o elemento mediano, indica a posição da mediana, isto é, o termo de ordem  $\frac{(n+1)}{2}$  será a mediana". Caso a série seja formada por número par de termos não haverá termo central único, mas, sim, dois termos centrais. A mediana será dada então pela média dos dois termos centrais, ou seja, o termo de ordem  $\frac{n}{2}$  e o termo de ordem  $\frac{n}{2} + 1$ . Sejam  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  os  $n$  valores ordenados assumidos por uma variável quantitativa  $X$ , em um conjunto de observações. Define-se a mediana (indicada por  $M_d$ ) por meio da relação:

- Para uma série com número ímpar de itens: a mediana corresponde ao valor central.

$E_{M_d}$  - elemento mediano: indica a posição da mediana.

Se  $n$  for ímpar o  $E_{M_d} = \frac{n+1}{2}$ , portanto a mediana será  $M_d = X_{E_{M_d}}$ , assim temos,

---

<sup>3</sup>São valores que dividem a distribuição em um certo número de partes iguais: a mediana divide em 2 partes iguais, os quartis dividem em 4 partes iguais, os decis em 10 partes iguais e os centis em 100 partes iguais.

$$M_d = \frac{n + 1}{2}.$$

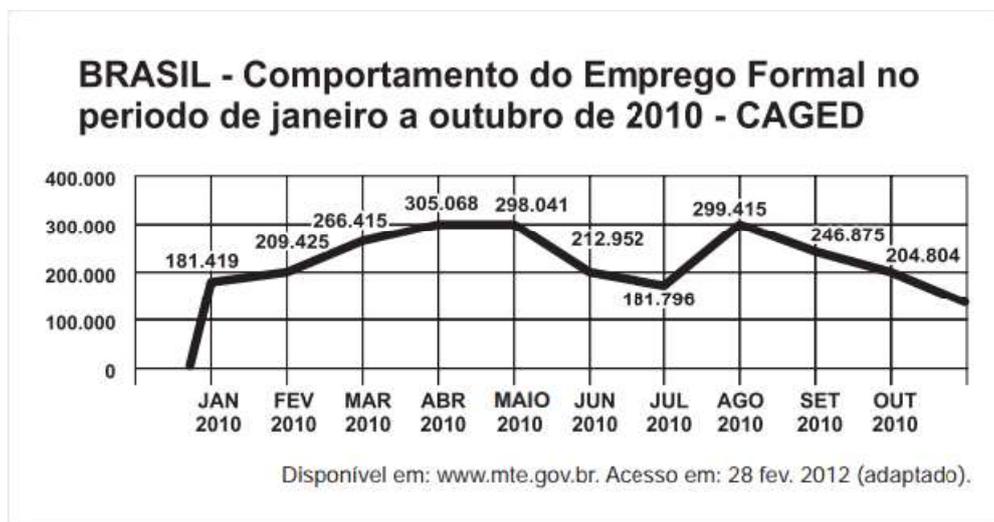
- Para uma série com número par de itens: não há termo central único, mas, sim, dois termos centrais. Desta forma:

Se  $n$  par o  $E_{Md} = \frac{n}{2}$ , portanto  $M_d = \frac{X_{E_{Md}} + X_{E_{Md}+1}}{2}$ .

O exemplo a seguir foi extraído do ENEM, de 2012, segundo dia, prova azul.

(ENEM 2012 - Questão 179) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

Figura 2.8: Gráfico do Comportamento do emprego formal no período de janeiro a outubro de 2010, no Brasil - CAGED



Fonte: ENEM 2012

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

- (A) 212952.
- (B) 229913.
- (C) 240621.
- (D) 255496.
- (E) 298041.

SOLUÇÃO:

Vamos inicialmente ordenar os elementos da amostra. Escolhemos a ordem crescente, sem a perda de generalidade, assim temos:

181.419, 181.796, 204.804, 209.425, 212.952, 246.875, 266.415, 298.041, 299.415 e 305.068.

Para o cálculo da mediana devemos pegar os valores centrais e realizar uma média aritmética entre eles, já que a mostra apresenta uma quantidade par de termos. Assim os termos centrais são 212.952 e 246.875. Para o cálculo da média aritmética, temos:

$$\bar{x} = \frac{(212.952 + 246.875)}{2} = 229.913,5$$

Como a parte inteira desse valor é 229.913, temos a alternativa (D), como resposta.

Para dados agrupados em classes segundo Iezzi (2016) a mediana de uma relação de valores é um valor que separa essa relação em duas partes com a mesma quantidade de valores, sendo que, em uma das partes, todos os valores são menores ou iguais à mediana e, na outra parte, todos os valores são maiores ou iguais à mediana.

Para o cálculo devemos inicialmente descobrir qual a classe mediana. Em seguida aplicamos a fórmula:

$$Me = l_i + \left[ \frac{\frac{n}{2} - f_{acant}}{f_i} \right] \cdot h$$

Donde:

$l_i$  é o limite inferior da classe mediana;

$f_{acant}$  é a frequência acumulada da classe que antecede à classe mediana;

$f_i$  frequência simples da classe mediana;

$h$  é a amplitude da classe mediana.

### 2.5.4 Moda (Mo)

Para Correa (2003, p. 50) "é o valor que ocorre com maior frequência em um conjunto de dados, e que é denominado valor modal". Baseado nesse contexto, um conjunto de dados pode apresentar mais de uma moda. Nesse caso, dizemos ser multimodais; caso contrário, quando não existe um valor predominante, dizemos que é amodal, isto é não apresenta moda.

Existem três casos a serem analisados. Temos os casos em que os dados são não tabelados, são tabelados sem intervalo de classes e com intervalos de classe. Em dados não tabelados, segundo Correa (2003, p. 50), "o valor modal é o predominante na distribuição". Isto quer dizer que a moda é equivalente ao valor de maior frequência, ou seja, a moda de um conjunto de valores é o valor que ocorre mais vezes.

Se os dados são tabelados, mas não apresentam intervalos de classe, para Correa (2006, p. 50), "o valor modal será o valor com maior frequência, assim como ocorre nos dados não tabelados". Já para os dados tabelados e com intervalos de classe Correia (2006, p. 51) afirma que, a moda não é percebida tão facilmente como nos casos anteriores e para calcular o valor modal, podemos utilizar os seguintes processos:

1º Processo: Fórmula de Czuber

$$M_o = l_{inf} + h_{M_o} \cdot \frac{(n_{mo} - n_{ant})}{(n_{mo} - n_{ant}) + (n_{mo} - n_{post})}$$

Onde:

$l_{inf}$  : limite inferior da classe modal;

$h_{M_o}$  : intervalo de classe modal;

$n_{mo}$  : frequência simples da classe modal;

$n_{ant}$  : frequência simples anterior à classe modal;

$n_{post}$  : frequência simples posterior à classe modal;

2º Processo: Fórmula de Pearson

$$M_o = 3 \cdot M_d - 2 \cdot \bar{x}$$

Onde :

$M_d$  : é a mediana;

$\bar{x}$  : é a média;

## 2.6 Medidas de Tendência Central nos Livros Didáticos de Matemática

O ensino e aprendizagem das MTC, previsto pelos PCN e também pela BNCC, é um conteúdo de bastante relevância e incluído nos livros didáticos de Matemática da Educação Básica Brasileira geralmente incluído, no capítulo destinado a probabilidade e estatística. Além disto, estes conteúdos são exigidos em exames oficiais tais como, o ENEM, Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OPMEP e outros vestibulares e concursos da nossa Federação.

Segundo Silva et al. (2018, p. 05):

A relevância da Estatística, sua visualização nos livros didáticos de Matemática e no Exame Nacional do Ensino Médio, justifica a necessidade de um enfoque plural da referida competência, preocupando-se com a construção do conhecimento do educando. É inegável a crescente importância de se trabalhar os conceitos de Estatística nos primeiros anos da escolaridade. Isto já ocorre há bastante tempo nos Estados Unidos e na Europa, onde encontramos diversos estudos e literatura especializada nesta área e já está em tempo de iniciar este processo no Brasil.

Percebemos que os livros devem se apresentar de forma acessíveis aos estudantes, com uma linguagem clara e facilitadora do conhecimento. E além de auxiliar a implementação do processo de ensino, deve possibilitar ao docente suporte para suas aulas, despertando em ambos o interesse pelo material e contribuindo diretamente com a relação de ensino-aprendizagem no ambiente escolar.

Nota-se que existe uma grande dificuldade do aluno do 3<sup>o</sup> ano do ensino médio, em levar o conhecimento adquirido no livro didático ao momento da prova de Matemática do ENEM, o fato é a evolução da elaboração das questões para um contexto mais sofisticado, ou seja, existe uma contextualização no desenrolar do enunciado, o que antes era cobrado de maneira clara e objetiva (direta).(SILVA et al, 2018, p. 05)

Estevam (2010), pondera que é necessário um olhar mais cuidadoso quanto aos livros didáticos e demais materiais de apoio utilizados em sala de aula. Ainda citando Estevam (2010, p. 176), "as atividades neles inscritas caracterizam, muitas vezes, um reducionismo da Estatística, denotando uma super simplificação dos conteúdos."

Percebemos, que apesar do esforço dos autores em trazer livros didáticos cada vez mais contextualizados e com problemas mais próximos dos que se apresentam no ENEM

e outros vestibulares, estes ainda ofertam questões bastante diretas, que tem como objetivo o aprendizado e aplicação de fórmulas matemáticas, deixando assim de estimular um pensamento mais crítico dos estudantes. Isto evidencia, a dificuldade imposta aos estudantes da educação básica, quando ele se depara com situações problemas, bem mais contextualizadas como a que temos na avaliação do ENEM e de outros vestibulares.

Ao passo que é o principal instrumento de trabalho do professor de matemática das escolas públicas, o livro didático, é o material que deve oferecer problemas mais próximos da realidade dos discentes e faça um paralelo com os conteúdos previstos no ENEM, assim como em outros vestibulares. Portanto, neste contexto em que o livro didático não consegue suprir essa necessidade de formulação de um pensamento mais crítico por parte dos discentes é que caberá ao professor a tarefa de instigar e inspirar seus alunos a pensarem de forma crítica.

Dada a importância a qual o conteúdo de probabilidade e estatística (em particular o conteúdo de medidas de tendência central), já que são bastante recorrentes nas diversas avaliações como o ENEM, os diversos vestibulares e são previstas nos PCN e BNCC, é que devemos estar atentos em como este conteúdo vem sendo retratado nos livros didáticos da Educação Básica Brasileira.

A relevância da Estatística, sua visualização nos livros didáticos de Matemática e no Exame Nacional do Ensino Médio, justifica a necessidade de um enfoque plural da referida competência, preocupando-se com a construção do conhecimento do educando, do ensino médio. É inegável a crescente importância de se trabalhar os conceitos de Estatística nos primeiros anos da escolaridade. Isto já ocorre há bastante tempo nos Estados Unidos e na Europa, onde encontramos diversos estudos e literatura especializada nesta área e já está em tempo de iniciar este processo no Brasil. Os Parâmetros Curriculares Nacionais serão os grandes propulsores na motivação do professor para que em suas aulas de Matemática sejam trabalhados conteúdos de Estatística com o objetivo de desenvolver no aluno a capacidade de lidar com as informações que permeiam o seu dia a dia. (SILVA, DANTAS e SOUZA, 2018, p. 10)

Segundo Stella (2003), os livros didáticos abordam a estatística de forma tímida e além disso, quando fazem, normalmente são tecnicistas, a apresentação é feita por meio de fórmulas e técnicas, sem situações significativas para os alunos, sem contar que o conteúdo de estatística é geralmente deixado para o último capítulo do livro.

Para tanto não basta que os autores, apenas contemplem os conteúdos das MTC, eles devem focar em como o estudante, conseguirá desenvolver habilidades necessárias para lidar com as informações presentes no seu dia a dia. E não obstante o professor também deve se preocupar em como esse conteúdo será direcionado ao estudante. Talvez

isso é o que fará toda a diferença ao trabalhar suas aulas, utilizando o livro didático.

Outro fator a se destacar é que o livro didático pouco se esforça para alicerçar as práticas experimentais, visto que o único fator utilizado é a resolução de problemas que por muitas vezes trazem em seu contexto apenas a utilização de fórmulas matemáticas, sem dar a devida atenção a interpretação e o contexto ao qual o estudante está inserido. Segundo Fuchs e Nehring (2012) "A ênfase é o tratamento efetivamente matemático dos conceitos". De acordo com Skovsmose (2000), o exercício apresenta características mecânicas que, inicia com técnicas matemáticas ensinadas pelo professor em sala de aula e em seguida exercícios resolvidos pelos alunos.

As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente daquelas baseadas em exercício. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com as 'referências' que visam levar os estudantes a produzirem significados para os conceitos e atividades." (SKOVSMOSE, 2000, p. 72)

De acordo com Skovsmose (2000, p. 71) "Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem e procurarem explicações. O convite do professor é simbolizado pelo "O que acontece se...?" O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus Sim, o que acontece se...?"

Portanto notamos na fala de Skovsmose (2000), que o livro didático se constitui como uma ferramenta indispensável no trabalho docente, para o planejamento e execução das aulas, mas que necessita cada vez mais de ajustes, por parte de seus autores, no que diz respeito às práticas experimentais em sala de aula.

Segundo Fuchs e Nehring (2012, p 05), "nem sempre a iniciativa do aluno é favorecida, visto que esse processo se dá, não a partir de temáticas escolhidas pelos alunos e dados por eles coletados, mas sim a partir de temáticas ou dados já estabelecidos."

## Capítulo 3

# O Pensamento Estatístico no Livro de Matemática Escolhido no PNLD 2021 da Rede Estadual do MA

Neste capítulo, apresentamos o livro didático de matemática escolhido pela rede de ensino do Maranhão, realizando uma análise documental, buscando identificar, se todas as cinco categorias, propostas por Wild e Pfannkuch, para o desenvolvimento do pensamento estatístico, estão presentes no conteúdo referente às medidas de tendência central, sejam nos exemplos sugeridos pelo autor, nos problemas resolvidos ou nos exercícios propostos. Por fim utilizamos uma das atividades do livro para trabalharmos as cinco categorias necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico.

### 3.1 O Livro Escolhido

Inicialmente, a SEDUC-MA apresentou cinco opções de livros didáticos de matemática, ambos de editoras diferentes e que foram aprovados pela BNCC como opções para o PNLD 2021. Após a análise minuciosa dos professores de matemática, do CEMJOS, escola a qual leciono, chegamos a conclusão que duas obras seriam as que melhor apresentaram os conteúdos, contemplando o que diz a BNCC e também o ENEM, destacando as competências e habilidades necessárias aos estudantes do ensino médio, com questões mais contextualizadas e retratando a realidade destes estudantes.

Na escolha do PNLD 2021, escolhemos como primeira opção a coleção de livros da editora Moderna, com o título Conexões: Matemática e suas tecnologias, esta coleção é de autoria da própria editora Moderna, tendo como editor responsável Fabio Martins de Leonardo. Com a segunda opção foi apontada a coleção da editora FTD, com o título Prisma: Matemática Ensino Médio, tendo como autores José Roberto Bonjorno, José Ruy

Giovani Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa.

Como na rede estadual do Maranhão a escolha é feita de acordo com a obra que tiver maior votação entre os centros de ensino, o resultado após a análise de todas as obras, teve a editora FTD como vencedora. Desta forma, a coleção de livros intitulada como, Prisma: Matemática Ensino Médio, será a coleção adotada, para o ano de 2022 em todas as escolas públicas da rede estadual do Maranhão Figura 3.1.

Figura 3.1: Coleção de livros escolhidos no PNLD 2021 na rede estadual do MA



Fonte: <https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/>

De acordo com os objetivos propostos, esta pesquisa se classifica como documental que, de acordo com, Lüdke e André (2005), se constitui numa técnica valiosa na abordagem qualitativa. As autoras consideram como documentos quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação: leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, revistas, arquivos escolares, etc. Neste trabalho, consideramos como documento o livro didático da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio, da editora FTD.

Assim, realizamos um estudo na obra escolhida no PNLD 2021, pela rede estadual do Maranhão, do capítulo que trata das medidas de tendência central, sob o ponto de vista das cinco categorias necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico, em estudantes do ensino médio. Por tanto, a análise documental, dar-se-á restritamente nas páginas do livro onde o tema medidas de tendência central está contido. Buscaremos aqui identificar qual ou quais das cinco categorias, necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico, estão contempladas no livro didático, para estudos das medidas de tendência central.

O conteúdo de medidas de tendência central encontra-se, no capítulo 1, do livro da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade, intitulado de "Noções de Estatística", na seção Medidas de tendência central compreendida nas páginas 25 a 27, deste material.

### **3.2 Análise do conteúdo de MTC no livro didático da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade**

Nesta seção faremos uma análise do livro didático da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade, sob o ponto de vista das cinco categorias necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico, quando os autores abordam o tema medidas de tendência central.

Inicialmente Figura 3.2 os autores informam sobre o estudo estatístico, da coleta e representação dos dados de uma pesquisa, sobre como é comum analisarmos as tendências que a amostra representa e o quão é importante sintetizar as informações por meio de parâmetros, realizando assim uma breve apresentação da seção de medidas de tendência central.

Percebemos, nesta apresentação, a presença intuitiva de algumas das cinco categorias necessárias ao desenvolvimento do pensamento estatístico, uma delas é a transnumeração, quando falam da coleta de dados. A seguir informam o leitor que uma pesquisa pode apresentar tendências (Figura 3.2), aqui nos deparamos com duas situações: uma a pesquisa contém erros ou realmente temos a presença da variação. Caso o autor esteja se referindo a variação, entende-se que ela pode sim modificar ou influenciar as estratégias que possamos ter, ao buscarmos uma solução de um determinado problema. Contudo, devemos ter em mente que um experimento realizado com uma pequena amostra não reflete as características ou culturas de uma população ou grupo.

Figura 3.2: Apresentação de MTC no livro Prisma: Matemática Ensino Médio - Estatística, Combinatória e Probabilidade

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

## Medidas de tendência central

Em um estudo estatístico, depois de se fazer a coleta e a representação dos dados de uma pesquisa, é comum analisarmos as tendências que a amostra apresenta. Assim, se a pesquisa envolve muitos dados, convém sintetizar todas as informações por meio de parâmetros que possam caracterizá-la.

Neste tópico, vamos apresentar alguns parâmetros e ferramentas, conhecidos como **medidas de tendência central** ou **centralização**, que podem ser utilizadas para nossas análises. São elas: média aritmética, mediana e moda.

### Média aritmética

Acompanhe a situação a seguir.

Uma livraria funciona de segunda-feira a sábado. Na semana passada, foram vendidas as seguintes quantidades de livros de literatura.

> Quantidade de livros vendidos na semana

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
28	23	22	27	25	13

Fonte: Dados fictícios.

O gerente dessa livraria faz um relatório semanal com o número de vendas para informar a quantidade média de livros vendidos, por dia, na semana. Para determinar essa quantidade, podemos fazer assim:

$$\frac{28 + 23 + 22 + 27 + 25 + 13}{6} = \frac{138}{6} = 23$$

O número 23 é chamado de **média aritmética** dos números 28, 23, 22, 27, 25 e 13. Indicamos  $\bar{x} = 23$ .

Nessa situação, a média aritmética significa que, se a venda diária dessa semana fosse sempre a mesma, ou seja, 23 livros por dia, obteríamos o mesmo total de livros vendidos: 138.

Assim, no relatório, o gerente da livraria pode informar que, na quarta-feira e no sábado, a venda da livraria foi abaixo da média, enquanto na segunda-feira, na quinta-feira e na sexta-feira foi acima.

Podemos definir a média aritmética como a razão entre a soma dos valores e a quantidade de valores. Portanto, se  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são  $n$  valores, então a média aritmética desse conjunto é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

**PENSA E RESPONDE**

A média aritmética ponderada de uma série de dados é determinada pela soma de todos os produtos de cada valor multiplicado pelo seu peso e dividido pela soma dos pesos. Agora, imagine que, para chegar à nota final de um estudante, foram aplicadas duas avaliações de modo que a nota da segunda é multiplicada por 2. Se a nota da primeira avaliação é  $p_1$  e a nota da segunda é  $p_2$ , nesse caso, como é calculada a média aritmética?

$\bar{x} = \frac{p_1 + 2p_2}{3}$

Ver as Orientações para o professor

25

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 25)

O conjunto distinto de modelos, é retratado quando, ao citar a representação dos dados, ficam subtendidos o uso de tabelas, gráficos, ou valores numéricos que sintetizem a pesquisa. O conhecimento estatístico e o conhecimento do contexto, é abordado quando pressupomos, serem necessários à realização da pesquisa, visto que, para produção de uma pesquisa estatística são pré requisitos os conceitos, as habilidades e o contexto ao qual essa pesquisa encontra-se inserida. A síntese em parte é contemplada, pois informam da importância de sintetizarmos os dados fornecidos na pesquisa, indicando as medidas

de tendência central ou de centralidade como um desses parâmetros, porém para o pensamento estatístico a síntese produzirá implicações à pesquisa, gerando um resumo que contempla as principais ideias ou a essência do objeto em questão, pesquisado. Desta forma observamos, que das cinco categorias, três estão contempladas, a segunda, a terceira e a quarta, a quinta encontra-se parcialmente contemplada. Já a primeira categoria, apesar de falarem da coleta de dados, eles não buscam mostrar da necessidade desta coleta, assim não proporcionam ao leitor o reconhecimento da necessidade de se ter dados. Para que esta categoria seja contemplada os autores deveriam apresentar situações que estimulem o leitor pela busca de dados, assim a pesquisa amostral passa a ter maior credibilidade, não sendo apenas conjecturas pessoais, mas sim um pesquisa fundamentada cientificamente.

Após essa apresentação do tema de medida de tendência central, os autores tratam da média aritmética, apresentando ao leitor o seguinte problema:

Figura 3.3: Exemplo de média aritmética

Uma livraria funciona de segunda-feira a sábado. Na semana passada, foram vendidas as seguintes quantidades de livros de literatura.

> Quantidade de livros vendidos na semana

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
28	23	22	27	25	13

Fonte: Dados fictícios.

O gerente dessa livraria faz um relatório semanal com o número de vendas para informar a quantidade média de livros vendidos, por dia, na semana. Para determinar essa quantidade, podemos fazer assim:

$$\frac{28 + 23 + 22 + 27 + 25 + 13}{6} = \frac{138}{6} = 23$$

O número 23 é chamado de **média aritmética** dos números 28, 23, 22, 27, 25 e 13. Indicamos  $\bar{x} = 23$ .

Nessa situação, a média aritmética significa que, se a venda diária dessa semana fosse sempre a mesma, ou seja, 23 livros por dia, obteríamos o mesmo total de livros vendidos: 138.

Assim, no relatório, o gerente da livraria pode informar que, na quarta-feira e no sábado, a venda da livraria foi abaixo da média, enquanto na segunda-feira, na quinta-feira e na sexta-feira foi acima.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa, 2020, p. 25

---

Notamos aqui que os autores não iniciam, em primeira mão, introduzindo o conceito

de média. Partem de um exemplo, contextualizado, chamando a atenção do leitor para a aplicação desse conceito, porém não fazem indagações para que o aluno procure encontrar uma forma de resolver o problema e de representar as vendas diárias através de um número síntese. As categorias para desenvolvimento do pensamento estatístico, aqui apresentadas no exemplo, compreendem, a transnumeração (pela contagem das vendas diárias de livros), o conjunto distinto de modelos, conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese, pela conclusão no último parágrafo da Figura 3.3. Porém, percebemos que o reconhecimento da necessidade de se ter dados e também a variação, não foram contempladas.

Neste problema, faremos agora uma análise de quais categorias da média destacadas por Strauss et al. (1988), foram contempladas. Agora vejamos:

- Categoria A: A média está localizada entre os valores extremos;

Aqui percebemos que o número médio das vendas de livros durante a semana foi 23, sendo este um valor que encontra-se entre os extremos 13 e 28 livros, respectivamente.

- Categoria B: A soma dos desvios a partir da média é zero:

Calculando os desvios a partir da média temos:

$$28 - 23 = 5$$

$$23 - 23 = 0$$

$$22 - 23 = -1$$

$$27 - 23 = 4$$

$$25 - 23 = 2$$

$$13 - 23 = -10$$

Somando os desvios, temos:

$$5 + 0 + (-1) + 4 + 2 + (-10) = 0$$

- Categoria C: A média é influenciada por cada um e por todos os valores;

Se tivermos valores muito discrepantes, o valor da média é alterado, isto é, se na amostra aparecem em valor muito menores ou muito maiores dos demais valores, isto influenciará no valor da média. No exemplo proposto pelos autores o conjunto de dados se apresentaram de forma equilibrada e isso não gerou um valor discrepante que facilite a aprendizagem dessa categoria pelos alunos.

- Categoria D: A média não coincide necessariamente com um dos valores do banco de dados que a compõe;

Neste caso o valor da média (23 livros) coincide com o número de livros vendidos na terça-feira (23 livros), porém é importante destacar que isso pode ocorrer, mas que não é regra, podendo a média ser um valor distinto dos valores do banco de dados.

- Categoria E: A média pode não ser um número que não tem correspondente na realidade física;

No exemplo citado temos um valor inteiro para o valor correspondente a média de livros vendidos, desta forma ele condiz com a realidade física, porém é importante destacar que no cálculo da média poderíamos ter um valor não inteiro e desta forma, o valor não representaria fisicamente a quantidade de livros, já que essa quantidade necessariamente se caracteriza como um valor inteiro. A título de exemplo poderíamos ter a seguinte situação:

Suponha que na segunda feira tenham sido vendidos 27 livros em vez de 28 e nos demais dias mantivermos os números de vendas como o apresentado no problema. Desta forma, a média seria:

$$\bar{x} = \frac{27 + 23 + 22 + 27 + 25 + 13}{7} = 22,8333\dots$$

Neste caso percebemos que a média de livros passaria a valer 22,8333 livros o que não representa um valor físico do número de livros, já que essa quantidade necessariamente é melhor representada por um valor inteiro não negativo.

Segundo Feijoo (2010, p.14), "A média aritmética é um valor que pretende ser o resumo de todos os valores da distribuição. Dessa forma, pode vir a ser um valor não presente na distribuição."

Categoria F: O cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos;

Para o cálculo da média ressaltamos que ela será dada pela razão entre a soma de todos os valores do conjunto de dados (sejam eles positivos, negativos ou nulos) e o total de elementos desse conjunto de dados.

- Categoria G: A média é um valor representativo do banco de dados a partir dos quais ela foi calculada;

Como a média é uma medida de tendência central ou centralidade, observamos que o valor médio do número de vendas e então o valor que encontra-se no centro de gravidade deste conjunto de dados, assim ele sintetiza todos os outros valores como um valor médio de todos os outros. Como mencionado anteriormente por Strauss et al. (1988), esta categoria envolve o seu real significado como medida de tendência central.

Logo após o exemplo sugerido pelos autores eles partem para o conceito de média aritmética e o tratam como:

A razão entre a soma dos valores e a quantidade de valores. Portanto, se  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são  $n$  valores, então a média aritmética desse conjunto é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Ao que percebemos o conceito apresentado pelos autores, oferecem ao leitor subsídios necessários para o entendimento e a real significancia de uma média aritmética num dado problema. Mostrando que ela não passa apenas de um valor numérico associado a um conjunto de valores, dados. Mas vale destacar que o professor deve enfatizar em sala o real significado da média como um valor justo/equitativo para uma distribuição uniforme, assim o conceito de média ficará mais fácil de ser compreendido pelo estudante, além do que o torna mais fácil na hora de formula-lo. E como afirmam Cazorla, Santana e Utsumi (2019 ) a média representa o centro de gravidade do conjunto numérico, é o único número que está mais próximo de todos os números que ela representa.

O conceito de média aritmética ponderada, foi apresentado sem uma fórmula, e foi dado apenas pelo conceito já apresentado da média aritmética. "A média aritmética ponderada de uma série de dados é determinada pela soma de todos os produtos de cada valor multiplicado pelo seu peso e dividido pela soma dos pesos."(Bonjorno, Giovanni Júnior, Sousa, 2020, p. 25

Em seguida sugerem aos leitores um exemplo para que pensem (Figura 3.4):

Assim como no primeiro exemplo, aqui percebemos que não há uma preocupação com fórmulas, mas com a sua aplicação. Entretanto deixam um tanto vago esse conceito dado a média aritmética ponderada, tendo o professor, o papel principal na hora de apresentar e introduzir este conceito junto aos seus alunos.

Na apresentação da segunda medida de tendência central, a moda, novamente os autores iniciam o conceito tomando como base um exemplo. Nota-se aqui uma grande preocupação, em introduzir as idéias e conceitos baseando-se na resolução de problemas, uma forma facilitadora para o aprendizado dos estudantes.

A utilização da resolução de problemas na prática educativa da matemática é uma metodologia que deve merecer atenção por parte de todos professores. É a partir deles que se pode envolver o aluno em situações da vida real, motivando-o para o desenvolvimento do modo de pensar matemático.(SOARES e PINTO, 2001, p. 04)

A prática de introduzir os conceitos a partir de problemas, tornam os estudantes mais envolvidos com os conceitos, pois desta forma, chamam a atenção para uma matemática mais aplicada e as fórmulas ou modelos matemáticos associados aos problemas, uma consequência e portanto facilitando a compreensão dos mesmos, pelos estudantes.

A seguir o conceito de mediana introduzido pelos autores através de um exemplo, ver Figura 3.5.

Figura 3.4: Conceito de média aritmética ponderada dado pelos autores

**PENSE E RESPONDA**

A **média aritmética ponderada** de uma série de dados é determinada pela soma de todos os produtos de cada valor multiplicado pelo seu peso e dividido pela soma dos pesos.

Agora, imagine que, para chegar à nota final de um estudante, foram aplicadas duas avaliações de modo que a nota da segunda é multiplicada por 2. Se a nota da primeira avaliação é  $p_1$  e a nota da segunda é  $p_2$ , nesse caso, como é calculada a média aritmética?

$$\bar{x} = \frac{p_1 + 2p_2}{3}$$

Ver as **Orientações para o professor.**

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 25)

O exemplo aqui apresentado, faz uma boa relação com o conceito apresentado dando ao estudante subsídios para o entendimento desta medida de tendência central, tanto quando a quantidade de dados analisados são em quantidades pares ou ímpares. Contudo os autores não partiram do problema da média, nos casos em que ela não é suficiente para sintetizar um conjunto de dados, isto é, nos casos em que ela é afetada pelos valores extremos, tornando-a discrepante e impossibilitando-a de representar bem todos os valores da distribuição. Em casos como esse a mediana será a medida de tendência central que melhor representará esse conjunto de dados.

Quanto às categorias apresentadas para o desenvolvimento do pensamento estatístico, percebemos a transnumeração, quando os valores das idades dos atores são apresen-

Figura 3.5: Introdução à de mediana

Uma produtora de vídeo para comerciais de TV estava procurando atores de 25 a 50 anos para produzir uma peça publicitária. Para o teste, compareceram 9 atores com as seguintes idades, em ano: 37, 28, 40, 41, 45, 37, 37, 41 e 44.

Para comparar as idades desses atores, podemos organizá-las em ordem crescente, assim:

28, 37, 37, 37,      40,      41, 41, 44, 45  
 4 elementos      elemento central      3 elementos

**SAIBA QUE...**

Quando organizamos os dados em ordem crescente ou decrescente, dizemos que os dados estão em **rol**.

Observe que o elemento que divide o conjunto em partes iguais tem o valor numérico 40. A esse valor damos o nome de **mediana** ( $M_d$ ). Portanto, nessa situação, podemos dizer que pelo menos 50% dos atores que compareceram ao teste tinham no mínimo 40 anos.

Mediana é o valor do elemento central de um conjunto numérico em rol quando esse conjunto tem uma quantidade ímpar de valores. Caso o conjunto tenha uma quantidade par de valores, então encontraremos dois valores centrais e, nesse caso, definimos a mediana como a média aritmética desses dois elementos. Veja o exemplo a seguir:

$$\underline{28, 37, 37, 37,} \quad \underline{40, 41,} \quad \underline{41, 44, 45} \rightarrow M_d = \frac{40 + 41}{2} = 40,5$$

4 elementos      elementos centrais      4 elementos

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 26)

tadas, o conjunto distinto de modelos, quando além de aprendidos inicialente os valores e se seguida são escritos em rol. Contudo a quinta categoria conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese, não está completamente contemplada, já que a princípio os estudantes estão sendo apresentados aos conceitos. A síntese por sua vez deve fazer referência ao problema apresentado e como os autores não propuseram ensinar a mediana para resolver o problema da média, a quinta categoria não ficou bem trabalhada nesse exemplo.

Ressaltamos ainda, que os autores não provocam nos estudantes o reconheciento da necessidade da obtenção dos dados e não fazem menção de como a variação pode influenciar nos resultados obtidos. Portanto, fica a cargo do professor complementar em suas aulas essas categorias que não foram aqui identificadas. Outro ponto a se destacar é que houve um erro de digitação ou edição no livro didático, pois aparecem "3 elementos" e não 4 à direita do "elemento central" na Figura 3.6. Logo abaixo na mesma Figura 3.6, quando os autores propõem o cálculo da mediana para uma quantidade de dados em número par, encontramos um novo erro na quantidade de elementos apresentados, onde são indicados quatro elementos e, portanto, aparecem apenas três elementos (41, 44, 45).

Figura 3.6: Exemplo de mediana

Uma produtora de vídeo para comerciais de TV estava procurando atores de 25 a 50 anos para produzir uma peça publicitária. Para o teste, compareceram 9 atores com as seguintes idades, em ano: 37, 28, 40, 41, 45, 37, 37, 41 e 44.

Para comparar as idades desses atores, podemos organizá-las em ordem crescente, assim:

$\underline{28, 37, 37, 37}$        $\underline{40}$        $\underline{41, 41, 44, 45}$   
4 elementos      elemento central      3 elementos      ← 4 elementos

**SAIBA QUE...**

Quando organizamos os dados em ordem crescente ou decrescente, dizemos que os dados estão em **rol**.

Observe que o elemento que divide o conjunto em partes iguais tem o valor numérico 40. A esse valor damos o nome de **mediana** ( $M_d$ ). Portanto, nessa situação, podemos dizer que pelo menos 50% dos atores que compareceram ao teste tinham no mínimo 40 anos.

Mediana é o valor do elemento central de um conjunto numérico em rol quando esse conjunto tem uma quantidade ímpar de valores. Caso o conjunto tenha uma quantidade par de valores, então encontraremos dois valores centrais e, nesse caso, definimos a mediana como a média aritmética desses dois elementos. Veja o exemplo a seguir:

↓ 3 elementos  
 $\underline{28, 37, 37, 37}$        $\underline{40, 41}$       41, 44, 45 →  $M_d = \frac{40 + 41}{2} = 40,5$   
4 elementos      elementos centrais      4 elementos

Fonte: Adaptado de Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 26). Editado pelo autor

A próxima medida de tendência central apresentada é a moda. Novamente os autores fazem o uso da resolução de problemas como subsídio para o entendimento do conceito das medidas de tendência central. Para a moda é apresentado o seguinte exemplo:

Figura 3.7: Exemplo de moda

Leia a seguinte situação.

Em uma pesquisa para saber o número de irmãos que cada um dos 30 estudantes de uma turma possui, foram obtidos os seguintes dados: 0, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 5, 2, 4, 4.

Observe que o número de irmãos varia entre 0 e 5 e o que aparece mais vezes é o 2, isto é, 13 estudantes dessa turma têm dois irmãos. Dizemos que 2 é a **moda** ( $M_o$ ) desse conjunto de valores e indicamos assim:  $M_o = 2$ .

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Sousa (2020, p. 26)

Assim como nos exemplos apresentados nas outras medidas de centralidade, os autores, não buscam instigar os estudantes pela busca dos dados e nem mencionam a variação existente numa pesquisa amostral. Desta forma, ficam contempladas as categorias transnumeração (na organização dos valores e obtenção do resultado da moda da pesquisa

amostral). O conjunto distinto de modelos, não foi identificado, pois foram apenas apresentados os números de irmãos de cada um dos 30 estudantes, ou seja, um só modelo foi usado, na medida resumo. Aqui os autores poderiam utilizar tabelas, gráficos e não o fizeram, ficando a representação apenas nos dados brutos. Portanto, a quarta categoria não foi trabalhada. A quinta categoria conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese, também não foi identificada, já que os autores somente apresentaram no problema, um banco de dados. Essa categoria teria ocorrido se os autores se dedicassem a entender o que esse fato representa na sociedade. Talvez, se tivessem feito um paralelo apresentando a informações sobre o número de filhos por casal há 50 anos, 20 anos..., seria possível entender um comportamento social da atualidade, contudo nada disso foi feito.

Após a apresentação do problema os autores de dedicam a apresentar o conceito e os casos de moda de acordo com os dados apresentados.

A moda de um conjunto de valores é o valor que aparece em maior número de vezes, ou seja, é o valor de maior frequência absoluta. Um conjunto de valores pode ter uma só moda, duas modas (bimodal), três modas (trimodal), e assim por diante, assim como pode não ter nenhuma moda (amodal). (BONJORNO, GIOVANNI JUNIOR e SOUSA, 2020, p. 26)

A seguir, os autores trabalham as três medidas de tendência central para dados agrupados, novamente fazendo da resolução de problemas a metodologia adotada para incentivar, facilitar e mediar as suas idéias e apresentá-las aos estudantes. Ao todo são propostos dois exemplos resolvidos e dez exercícios para resolução dos estudantes. Em todos os exemplos, exercícios resolvidos ou exercícios propostos analisados, nenhum deles conseguiu apresentar todas as categorias necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico. Ficam evidentes as categoria 2 - transnumeração, categoria 4 - conjunto distinto de modelos e a categoria 5- conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese. As categorias 1 e 3, reconhecimento da necessidade de se ter dados e variação, respectivamente, não são contempladas pelos autores, ficando para o professor trabalhar em sala de aula as outras categorias que aqui não foram contempladas.

É importante destacar que as categorias do pensamento estatístico não são muito conhecidas pelos professores da educação básica, pois não fazem parte do currículo da licenciatura nas Instituições de Ensino Superior públicas do PI e nem do MA, dificultando a formação desse pensamento pelos estudantes. Porém como afirma Santos (2020, p. 166), devemos:

Potencializar no sentido de propiciar esses ensinamentos a um número maior de professores, é algo que pode ser concretizado se conseguirmos promover esse desenvolvimento profissional a todos os professores de Matemática: uma formação estatística, prática e reflexiva. Isso pode ser conquistado com a inserção de uma, ou mais, disciplina no currículo da Licenciatura nas instituições de formação inicial de professor de Matemática.

Os autores encerram o tema medidas de tendência central com uma atividade intitulada como "Fórum", como mostra a Figura 3.8 a seguir:

Figura 3.8: Exemplo sugerido pelos autores



The image shows a forum post layout. On the left, there is a blue header with a white arrow pointing right and the word "FÓRUM" in white. To the right of the header is a yellow icon of a book with a red 'X' over it and the text "NÃO ESCREVA NO LIVRO". The main text of the post is in black, discussing electricity consumption. To the right of the text is a photograph of a hand flipping a light switch. Below the photograph is a blue square icon followed by a caption in black text. At the bottom of the text area, there is a pink line of text.

**FÓRUM** NÃO ESCREVA NO LIVRO

O alto consumo de energia elétrica, além de impactar financeiramente, pode causar danos ao meio ambiente. Você já refletiu sobre o consumo de energia elétrica em sua residência? Sua família costuma tomar medidas a fim de reduzir esse consumo? Faça uma pesquisa sobre o assunto, trazendo informações sobre o impacto da energia elétrica no meio ambiente, fontes alternativas de energia, dados estatísticos sobre o consumo brasileiro desse tipo de energia, entre outros tópicos. A partir desse material, discuta com seus colegas maneiras de diminuir esses impactos nos âmbitos regional e nacional.  
*Esse tema pode ser desenvolvido em parceria com o professor de Geografia.*

O simples gesto de manter as luzes apagadas dos cômodos, ajuda na economia de energia.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior, Sousa (2020, p. 26)

A atividade em questão apresenta-se com um tema bastante atual e contextualizado com a realidade dos estudantes do ensino médio, além do que, deve ser encarado como um desafio para a sociedade brasileira, devido à falta de conscientização do uso da energia elétrica e incentivo ao uso das energias limpas e renováveis. Os autores propõem ainda, que esta atividade, pode ser trabalhada com professores de geografia, mostrando o interesse pela interdisciplinaridade. Também são felizes ao incentivarem a curiosidade dos estudantes pela pesquisa, através dos diversos questionamentos, realizados durante a execução da atividade e ao proporem uma pesquisa sobre o tema, aos estudantes.

Contudo, nota-se uma carência por este tipo de atividade, durante o desenvolvimento do conteúdo de medidas de tendência central. A falta de questionamentos que levem os estudantes a possibilidade de refletirem e pensarem sobre como variação está em tudo ao nosso redor e presente em tudo que fazemos, não lhes proporciona, o desenvolvimento do pensamento estatístico. Desta forma, para termos mais evidenciadas

as categorias necessárias ao desenvolvimento do pensamento estatístico, o livro didático necessita de material de apoio e desdobramento do professor, para que seus estudantes consigam pensar de forma que sejam capazes de identificar, caracterizar, quantificar, controlar e reduzir a variação presente em cada problema proposto. Com o pensamento estatístico desenvolvido, estes estudantes, serão capazes de fornecerem oportunidades de melhorias, aos objetos de estudos de cada problema proposto a eles.

Destaco aqui que esta atividade, dentre todas as apresentadas pelos autores, foi a que mais se aproximou das cinco categorias necessárias ao desenvolvimento do pensamento estatístico. Contudo qual quer das atividades apresentadas no livro didático, podem trabalhar o desenvolvimento do pensamento estatístico dos estudantes, bastando apenas que o professor conheça as categorias e se debruce a planejar atividades de estatística com esse propósito.

O livro didático é um instrumento mediador do conhecimento, além de ser a fonte norteadora dos planejamentos da prática docente e são nas atividades nele apresentadas, que o professor pautará suas aulas e conduzirá os estudantes ao conhecimento. Desta forma serão nas atividades, que o professor conduzirá sua aula e trará aos estudantes a possibilidade de experienciar os problemas propostos no livro didático.

Destaco aqui, que pela primeira vez na obra os autores abordaram um problema realmente, ao invés de só apresentar dados para serem resumidos pelos alunos. Por isso, faremos a análise dessa atividade na próxima seção, afinal, na vida real, os dados não vão se apresentar para o aluno pedindo a ele que os resuma, eles precisam ser levados a perceberem essa necessidade.

### **3.3 Uma Atividade Norteadora pelas Categorias do Pensamento Estatístico**

Nesta seção apresentaremos uma proposta de atividade a ser desenvolvida com estudantes do ensino médio e pautada nas cinco categorias necessárias para o desenvolvimento do pensamento estatístico, de Wild e Pfannkuch (1999). Essa atividade do livro didático teve sua análise separada das anteriores porque nela identificamos quatro das categorias de formação do pensamento estatístico, mais do que qualquer uma apresentada anteriormente. Além disso, propomos um modo de trabalhar a categoria que falta. Essa será uma proposta de trabalho que servirá de modelo para futuras atividades que os professores de matemática podem utilizar em suas aulas de MTC.

Como inspiração, será utilizada uma atividade do livro didático de Matemática escolhido no PNL D 2021, na rede estadual do Maranhão. Intitulada de Forum, a atividade está localizada na página 31 do livro da editora FTD, da coleção Prisma: Matemática Ensino Médio - Probabilidade e Estatística, tendo como autores José Roberto Bonjorno,

José Ruy Giovani Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa.

Dentre todas as atividades propostas (Figura 3.8), pelos autores, no conteúdo de MTC, esta atividade é que mais se aproxima do que foi proposto para formar o pensamento estatístico. Isso ocorre devido à maneira como o problema foi escrito pelos autores. Inicialmente propondo questionamentos, sobre como o alto consumo de energia elétrica pode impactar financeiramente e causar danos ao meio ambiente. Além de levar aos estudantes a possibilidade de refletirem sobre os consumos de suas famílias e também sobre as medidas tomadas por eles para reduzirem o consumo.

Em um segundo momento, o problema sugere que seja realizada uma pesquisa sobre o tema. De tal forma que os estudantes tragam informações sobre como o alto consumo de energia elétrica pode impactar no meio ambiente, quais as fontes alternativas de energia e também colem dados sobre o consumo brasileiro, da energia elétrica. Por fim, o problema propõe, a partir da coleta de todo o material, uma discussão entre eles, de modo que hajam intervenções, com o objetivo de diminuir os impactos pelo alto consumo de energia, nos âmbitos regional e nacional.

Ao que percebemos o problema apresenta aos estudantes um tema bastante atual e contextualizado, que é o alto consumo de energia elétrica pelos brasileiros. Esta proposta se bem planejada pelo professor de matemática, permitirá explorar com mais evidência, cada uma das cinco categorias necessárias para desenvolvimento do pensamento estatístico.

A seguir, serão apresentadas em ordem as cinco categorias a serem trabalhadas nesta atividade de modo que o professor consiga, de forma satisfatória, desenvolver o pensamento estatístico de seus estudantes.

### 3.3.1 Primeira categoria

A primeira categoria é o reconhecimento da necessidade de se ter dados. Para que esta categoria seja desenvolvida é necessário iniciar a atividade propondo discursões sobre o tema da atividade, que é o consumo de energia elétrica, questionar sobre os efeitos que o consumo inadequado de energia elétrica pode causar na renda familiar e também no impacto ambiental. E para que o estudante perceba a necessidade de se ter dados eles podem ser questionados, sobre qual o consumo médio anual em sua residência e o consumo médio anual de todos os estudantes da sua sala de aula. Desta forma, o estudante perceberá que a única maneira a chegar nesse valor médio anual é buscando os dados nas contas de energia de suas casas, assim a primeira categoria passa a ser contemplada.

Percebemos que se o estudante já encontrar os dados prontos no problema, ele não será conduzido a buscar informação. Porém ao ser questionado ele passa a ser participante desta ação e logo, passa a iniciar o processo de desenvolvimento do pensamento estatístico. Esse gatilho deve ser ofertado aos estudantes pelos seus professores de matemática,

de modo a gerarem neles o gosto e a necessidade de pesquisar sobre um determinado tema. Isso de fato, faz com que o estudante não fique à mercê de informações infundadas sobre determinados temas e assim não seja alvo fácil das atuais, *fake news*<sup>1</sup>.

### 3.3.2 Segunda categoria

A segunda categoria é transnumeração e ocorre a partir do momento que os estudantes coletam os dados e os transformam em números. Como foram questionados sobre a média anual de suas residências e também a média anual de toda a sala de aula, eles precisarão representar esses dados através de valores numéricos e ainda fazer uso de uma das medidas de tendência central que, no caso, é a média aritmética. Desta forma, a segunda categoria estará contemplada no momento em que os estudantes coletarem os dados e os transformam em números ou medidas de tendência central.

Um ponto a ser considerado aqui, é que o professor de matemática deve informar aos seus estudantes que o consumo de energia elétrica é um valor que representa uma grandeza. Assim, é importante que ele informe aos estudantes que tal grandeza deve ser indicada pela unidade kwh/mês que significa quilowatt-horas por mês, isto é, uma medida da energia consumida pelos aparelhos elétricos funcionando durante um mês, em uma residência.

### 3.3.3 Terceira categoria

A terceira categoria é a variação, essa categoria se apresenta a partir do momento em que tomamos uma amostra pequena da população e a comparamos com uma amostra maior, assim percebemos que quanto maior a amostra tomada, mais próxima do resultado da população ele estará. Portanto, para o problema serão calculadas, a média da população que será dada pela média de todos os estudantes da turma e as médias de amostras de tamanhos distintos, dadas pela média de pequenos grupos de estudantes, tomados da turma.

Vamos então à dinâmica: o professor deve solicitar que a média geral da turma seja calculada. Logo após, escolhe ao acaso um grupo de estudantes, uns cinco por exemplo, para representar a nossa amostra inicial e pede que a média dele seja calculada. Em seguida, acrescenta ao grupo inicial um estudante por vez e calcula a média do novo grupo, isso deve ser feito sucessivas vezes. Com isso, à medida que a amostra for aumentando, perceberemos que o valor da média encontrada, se aproxima cada vez mais da média da turma. De fato, contemplamos a terceira categoria e mostramos que uma amostra muito pequena não é suficiente para representar toda uma população ou comportamento de um

---

<sup>1</sup>Fake news significa "notícias falsas". São as informações noticiosas que não representam a realidade, mas que são compartilhadas na internet como se fossem verdadeiras, principalmente através das redes sociais.

determinado grupo.

Destaco aqui que a média poderá não ser a melhor MTC que represente o conjunto de dados. A média e a mediana desempenham papéis semelhantes quando tentamos compreender a tendência central de um conjunto de números. De longe a média é a mais utilizada e é tradicionalmente uma medida popular de um ponto médio em um conjunto de dados. No entanto, leva desvantagem, pois pode ser influenciada por valores individuais que são muito maiores ou menores do que o restante dos valores, isto é, muito discrepantes. Desta forma se isto for notado nas análises de dados realizados pelos estudantes, o professor deverá fazer tal observação e assim orientar que em casos como esse a mediana será a medida que descreverá melhor o ponto médio, do conjunto desses dados. Quanto à moda, observamos ela como uma medida que ocorrerá quando um ou mais valores se apresentarem com maior frequência, desta forma, se alguns dos valores aparecem com bastante frequência, algo de relevante poderá ser extraído deste valor, mostrando inclusive que um grande número de estudantes apresenta consumos de energia iguais, assim vários questionamentos poderão ser levantados e colocados em discussão em sala de aula.

Nesta categoria percebemos, o quanto a variação está presente em toda e qualquer análise de dados pela estatística. Para que essa análise seja satisfatória, isto é, tenha um resultado próximo da realidade de toda a população é que devemos tomar uma amostra bastante considerável desta população e da maneira mais aleatória possível assim, os resultados proporcionarão uma tomada de decisão mais assertiva, pelos agentes da pesquisa.

### 3.3.4 Quarta categoria

A quarta categoria é o conjunto distinto de modelos e está bem evidente, quando utilizamos de diversos modelos, para representar uma amostra ou um grupo de uma população. Esses modelos se apresentam na forma de tabelas, nos gráficos, numa distribuição de valores em rol, e até mesmo na representação da medida de tendência central em questão. Desta forma, após os estudantes realizarem as coletas dos dados eles necessitarão de modelos que organizem de forma, satisfatória estes dados e permitam a eles futuras análises e tomadas de decisões. As tabelas e os gráficos são de fato os modelos mais utilizados e de fácil compreensão aos estudantes de ensino médio assim, para essa atividade, o professor pode, além de questionar sobre como os estudantes irão organizar os dados coletados, deixa-los livres para que escolham um modelo que considerem, a melhor forma de representar esses dados.

Portanto, assim temos a quarta categoria contemplada, quando o estudante se apropria de modelos que possa representar estatisticamente uma amostra por ele coletada. Notemos, que caso hajam valores muito extremos na amostra, será necessário que os alu-

nos identifiquem a mediana como melhor representante para os dados, em vez da média. Isto ocorre pois a mediana não é afetada por esses valores discrepantes. Aqui vale ressaltar, que se não houver tais valores o próprio professor pode supor a existência deles, para que seja possível o entendimento dos alunos sobre a utilidade de cada medida descritiva.

Agora vejamos como podemos proceder com a quinta e última categoria, aplicada ao estudo das medidas de tendência central.

### 3.3.5 Quinta categoria

A quinta categoria está dividida em três eixos, o conhecimento do contexto, o conhecimento estatístico e a síntese entre eles. Nesta quinta categoria, nos deparamos com uma situação, onde o estudante necessita de um conhecimento prévio do contexto do problema ao qual ele foi inserido, também deve ter previamente um certo domínio do conhecimento estatístico a ser utilizado na resolução do problema e ao final conseguir sintetizar todas as informações a eles apresentadas, desde o início da pesquisa ao final dela, quando ele poderá, a partir das informações coletadas, realizar intervenções e melhorias, baseadas em dados concretos obtidos por eles e assim tomar a melhor decisão, de fato.

Esta categoria, para ser trabalhada neste problema, temos que ter em mente que o estudante, já apresenta um certo conhecimento dos conceitos e aplicações das medidas de tendência central e também já tenha ideia de como se realiza uma pesquisa. Outro ponto a se destacar, são as informações pesquisadas pelos alunos sobre os problemas gerados pelos altos consumos de energia. Ainda é sugerido no problema, pelos autores do livro, que haja uma colaboração dos professores de geografia, que poderão contribuir de forma contundente no tema em questão. Assim, conseguimos contemplar parte da quinta categoria, ficando a síntese de todo o problema como a parte final da pesquisa.

A síntese está presente a partir do momento em que os estudantes tiverem a média aritmética do consumo anual de suas residências e fizerem um comparativo com o consumo médio anual dos brasileiros. Assim, poderão realizar comparações e verificarem se o consumo adotado por suas famílias está acima ou a abaixo da média brasileira. Com isso, podem tomar decisões de como diminuir este consumo ou mesmo adotar uma fonte de energia alternativa, fazendo uso das diversas energias sustentáveis que temos, como a energia eólica ou mesmo a solar, que vem de forma acentuada tomando espaço entre energias limpas no cenário brasileiro.

# Considerações finais

No início deste trabalho nós nos propomos a identificar as categorias de formação do pensamento estatístico, especificamente no capítulo referente às MTC, do livro didático adotado pela rede estadual do Maranhão. A escolha de trabalharmos as categorias do pensamento estatístico, neste capítulo, ocorreu devido a importância dada ao conteúdo das MTC no ensino médio. Essa relevância é notadamente observada, nos exames como o ENEM e outros vestibulares, que servem de acesso ao ensino superior. Nesses exames percebemos com certa recorrência este tema. Outro fator decisivo para a escolha está relacionado ao tratamento dado pela BNCC e os PCN quando sugerem a forma do professor trabalhar as MTC, no ensino médio.

Para tanto, inicialmente, resolvemos retratar historicamente a estatística de um modo geral, apresentando alguns dos principais responsáveis pelo seu surgimento. A breve escala cronológica trata desde os princípios da estatística até os estudos realizados sobre o pensamento estatístico, peça chave da fundamentação teórica deste trabalho. No pensamento estatístico foram abordados os conceitos, as características deste pensamento e suas categorias, propostas por Wild e Pfannkuch (1999), Snee (1990) e Gal (2002). Em seguida o trabalho é voltado para o livro didático, onde são abordadas a história do livro didático no Brasil, a maneira como esses livros trazem em seus textos as MTC e a devida importância deste tema dada pela BNCC e os PCN. Logo em seguida, são feitas considerações sobre a escolha do livro didático realizada pelo PNLN no ano de 2021 e a maneira que foi utilizada pela rede estadual do Maranhão, para a escolha deste livro didático de Matemática.

Finalmente, analisando a obra em questão identificamos que o pensamento estatístico se encontra parcialmente contemplado nos exemplos, exercícios resolvidos e atividades propostas pelos autores. Identificamos que a categoria 2 (transnumeração) é a mais trabalhada na obra, seguida pela categoria 4 (conjunto distinto de modelos). As categorias 3 (variação) e 5 (conhecimento do contexto, conhecimento estatístico e síntese entre eles) em alguns instantes são identificadas na obra de forma parcial. Contudo não conseguimos identificar em nenhum momento na obra a categoria 1 (reconhecimento da necessidade de se ter dados).

Desta forma, os resultados apontam que no conteúdo de medidas de tendência central

a obra, alcança parte das categorias do desenvolvimento do pensamento estatístico, ficando mais evidentes a transnumeração e o conjunto distinto de modelos. No entanto, a obra não contempla a primeira categoria em nenhuma de suas atividades ou exemplos propostos, ficando assim, necessário que o professor de matemática faça esse trabalho junto a seus alunos. No entanto, foi identificado que a obra oferece aos estudantes do ensino médio uma oportunidade de vivenciar a estatística não somente através de fórmulas, tabelas e gráficos, mas também de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática, como prevê a BNCC.

Esta dissertação tem então sua conclusão, em uma proposta de trabalho das categorias do desenvolvimento do pensamento estatístico, em uma das atividades da obra que fora analisada. Nessa atividade conseguimos observar a presença de grande parte dessas categorias e, portanto, ficando ela como uma sugestão de trabalho para os professores de matemática que se interessarem por este tema.

Como trabalho futuro, nós nos propomos a desenvolver atividades em sala de aula que contemplem a formação do pensamento estatístico dos alunos e escrevermos sobre essa atividade, para que esse tema seja mais difundido entre comunidade de professores de matemática.

Acreditamos que a formação do pensamento estatístico possa ser de extrema importância para a aprendizagem da estatística e que talvez possa minimizar as dificuldades que os estudantes tenham nessa área. É então com essa premissa, que este trabalho nos mostra um caminho que possa viabilizar o ensino da estatística a estudantes do ensino médio e ofertar aos professores de matemática a possibilidade de estudos mais aprofundados e pesquisas nessa área.

# Referências Bibliográficas

BEZERRA, Holien Gonçalves; LUCA, Tânia Regina de. Em busca da Qualidade PNLD – História – 1996 – 2004. In: SPOSITO, Maria Encarnação Beltrão (org). Livros Didáticos de História e Geografia. Avaliação e Pesquisa. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2006. p. 27 – 53.

BONJORNO, José Roberto; JUNIOR, José Ruy Giovanni; CÂMARA, Paulo Roberto. Prisma matemática : estatística, combinatória e probabilidade : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias de Sousa. 1<sup>a</sup> ed. São Paulo : Editora FTD, 2020.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

Brasil Escola. A ORIGEM DO LIVRO DIDÁTICO. 2021. Disponível em: <https://meuartigo.brasilecola.uol.com.br/pedagogia/a-origem-livro-didatico.htm>. Acesso: 26/11/2021.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio) – Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000.

BAYER, A; ECHEVESTE, S. Estatística na escola: importância dos conteúdos de estatística no ensino fundamental e médio. ACTA SCIENTIAE – v.5 – n.1 – jan. /jun. 2003.

BITTENCOURT, C. M. Livros didáticos: concepções e uso. Recife: Secretaria da Educação e Esporte de Pernambuco, 1997. (Coleção Qualidade do Ensino, Série: Formação do Professor).

CAMPOS, C. R.; JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; FERREIRA, D. H. L. Educação estatística no contexto da educação crítica. Bolema. 2011. v. 24, n. 39, p. 473-494. 2011.

CAMPOS, Celso Ribeiro et al. Educação estatística no contexto da educação crítica. Bolema-Boletim de Educação Matemática, v. 24, n. 39, p. 473-494, 2011.

CASTRO, J. B. O uso de objetos de aprendizagem para a construção e compreensão de gráficos estatísticos. 2012. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

CAZORLA, I. M.; KATAOKA, V. Y.; SILVA, C. B. Trajetória e Perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOU, S. A. (Orgs). Estudos e Reflexões em Educação Estatística. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2010, p. 19-44.

CHANGE, B. L. (2002) Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. Journal of Statistics Education, v. 10, n.3, 2002.

CORDANI, Lisbeth K. Oficina “Estatística para todos”. Disponível em: <https://www.ime.usp.br>. Acesso em: 15/07/2020.

CORREA, Sonia Maria Barros Barbosa. Probabilidade e estatística. 2<sup>a</sup> ed. - Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.

COSTA, Felipe A.; IGLIORI, Sonia B. C. Estudo da periodicidade a partir da modelagem matemática à luz da Teoria da aprendizagem Significativa. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br>. 2018. São Paulo, v.7, n.1, pp. 133-145. 2018. Acesso em: 01/09/2020.

COSTA, Maria Helena de Carvalho. et al. O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO EDUCATIVO. IV CONEDU. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/>. 2017. Acesso em: 23/08/202.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. Vidya, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010.

COUTINHO, C.de Q. S. Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica. Coleção Educação Estatística. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

DA SILVA JUNIOR, Clovis Gomes. O Livro didático de matemática e o tempo. Revista de Iniciação Científica da FFC-(Cessada), v. 7, n. 1, 2007.

SILVA, Renata Fabrícia V. N. da. et al. AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO E SUA PRESENÇA NAS PROVAS DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM, NO PERÍODO DE 2009 A 2017. Recife: Anais do 16<sup>o</sup> Congresso Internacional de Tecnologia na Educação, 2018. |

DUQUIA, Rodrigo Prereira; BASTOS, João Luiz Dornelles. Medidas de tendência central: onde a maior parte dos indivíduos se encontra. Scientia Medica, v. 16, n. 4, p. 190-94, 2006.

ESTEVAM, E. J. G. (Res)significando a Educação Estatística no Ensino Fundamental: análise de uma sequência didática apoiada nas Tecnologias de Informação e Comunicação. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Presidente Prudente. 2010.

COSTA, Maria Helena de Carvalho. et al. O PAPEL DO LIVRO DIDÁTICO NO PROCESSO EDUCATIVO. IV CONEDU. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/>. 2017. Acesso em: 23/08/2021

FELJOO, Ana Maria Lopez Calvo de. Medidas de tendência central. In: A pesquisa e a estatística na psicologia e na educação [online]. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2010, pp. 14-22. ISBN: 978-85-7982-048-9. Available from SciELO Books <<http://books.scielo.org>>. Acesso em: 28/08/2021

FILGUEIRAS, Juliana Miranda. As avaliações dos livros didáticos na Comissão Nacional do Livro Didático: a conformação dos saberes escolares nos anos 1940. Campinas-SP, v. 13, n. 1 (31), p. 159-192, jan./abr. 2013

FUCHS, Mariele J.; NEHRING, Cátia M. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE: PERSPECTIVAS DE ABORDAGEM EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL. Salão do Conhecimento, 2012.

GAL, Iddo. Adults statistical literacy: meanings, componets, reponsibilites. *Internacional Statistical Review*, Disponível em: <https://iase-web.org>, cidade, v.70, n.1, p.1-50, Abril. 2002. Acesso em: 21/06/2020.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. A Média. Rio de Janeiro: IBGE, 2021. Disponível em: [duca.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/17862-media-pagina-inicial.html](https://duca.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/17862-media-pagina-inicial.html). Acesso em: 29/06/21.

IEZZI, Gelson. et al. Matemática: ciência e aplicações, volume 3 :ensino médio. 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, Júlio de. Percentis e sua importância nos testes de performance. Disponível em: <https://medium.com/@juliodelimas/percentis-e-sua-importancia-nos-testes-de-performance-ea83e3bba462>, 2016. Acesso em: 01/09/2020.

LOPES, C. E. (2010) Os Desafios para a Educação Estatística no Currículo de Matemática. In: C. E. LOPES, C. de Q. e S. COUTINHO; S. A. ALMOULOU (Orgs.), Estudos e reflexões em educação estatística. Campinas: Mercado de letras.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2005.

MAGALHÃES, Marcos N.; LIMA, Antonio C. P. de. Noções de Probabilidade e Estatística. 5 ed. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2002.

- MEMÓRIA, José Maria Pompeu. Breve história da estatística. Brasília, DF : Embrapa Informação Tecnológica, 2004.
- MIRANDA, Sônia Regina; LUCA, Tânia Regina. O livro didático de história hoje: um panorama a partir do PNLD. Revista Brasileira de História, São Paulo, v.24, n.48, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbh/v24n48/a06v24n48.pdf/>>. Acesso: 21/11/2021
- MOREIRA, Andréia de P. Machado. Aplicações da teoria da decisão e probabilidade subjetiva em sala de aula do ensino médio. 2015. 178 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, 2015.
- NETO, Pedro de Lima; SILVA, Thiago C da. Lei dos Grandes Números. Disponível em: < <https://www.rpubs.com/pedrin1/533227>>, 2019. Acesso em: 01/09/2020.
- PFANNKUCH, Maxine; WILD, Chris J. Statistical thinking an statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. Statistical science, v. 15, n. 2, p. 132-152, 2000.
- PFANNKUCH, M.; RUBICK, A.; YOON, C. Statistical thinking and transnumeration. In: B. BARTON, K. C. IRWIN, M. PFANNKUCH, M. O. J. THOMAS (Eds.), Mathematics Education in the South Pacific (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland, pp. 567-574). Sydney: MERGA, 2002.
- PORTER, T. M. The rise of statistical thinking. Princeton University Press. New Jersey. 1986.
- ROSS, Sheldon. Probabilidade: um curso moderno com aplicações I Sheldon Ross; tradutor: Alberto Resende De Conti. - 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2010.
- SANTOS, Lya Raquel Oliveira dos. Formação reflexiva do professor de matemática: uma proposta de desenvolvimento do pensamento estatístico. Tese de Doutorado - UFPI, Teresina, 18/11/2020.
- SCHIRLO, A. C.; SILVA, S. C. R. Estatística: refletindo sua inserção nos livros de matemática. Espacios, v. 34, n.9, p. 1-14, 2013.
- SILVA, Marco Antônio. A fetichização do livro didático. Educação e Realidade, v. 37, n. 3, set./dez. de 2012, p. 803-821.
- SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Bolema-Boletim de Educação Matemática, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
- SNEE, Ronald; D.HARE, Lynne B.; HOERL, Roger W.; HROMI John D.(1995) The Role of Statistical Thinking in Management. Quality Progress. Disponível em : <https://www.researchgate.net>. 1995. Acesso em : 22/06/2020.

SNEE, Ronald D. (1990) Statistical thinking and its contribution to total quality. The American Statistician, Vol.44, n.2, p.116-121. Disponível em: [www.jstor.org](http://www.jstor.org).1990. Acesso em : 25/06/2020.

SOARES, Maria Teresa Carneiro; PINTO, Neuza Bertoni. METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. UFPR. Paraná, 2021.

SPIEGEL, Murray Ralph. Probabilidade e estatística / Murray R. Spiegel; tradução (de) Alfredo Alves de Farias. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1978.

STELLA, C. A. Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children' concepts of the arithmetic average. Journal for Research in Mathematics Education, v. 19, n. 1, p. 64-80, 1988. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749111>. 1988. Acesso em: 23/07/2020.

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review. México. v. 67. n. 3. 223-265. 1999.

ZACHEU, Aline Aparecida; CASTRO, Laura Laís de Oliveira. DOS TEMPOS IMPERIAIS AO PNLD: A PROBLEMÁTICA DO LIVRO DIDÁTICO NO BRASIL. São Paulo, 2015.