

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ANGÉLICA DE SALVO MIOTTI

**A concepção da forma da Terra e suas
representações cartográficas: uma abordagem
multidisciplinar a fim de combater o
*terraplanismo***

Campinas

2022

Angélica De Salvo Miotti

**A concepção da forma da Terra e suas representações
cartográficas: uma abordagem multidisciplinar a fim de
combater o *terraplanismo***

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Angélica De Salvo Miotti e orientada pelo Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M669c Miotti, Angélica De Salvo, 1996-
A concepção da forma da terra e suas representações cartográficas : uma abordagem multidisciplinar a fim de combater o *terraplanismo* / Angélica De Salvo Miotti. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Terra (Planeta) - Forma. 2. Mapas - Projeção. 3. Método de crivo de Eratóstenes. 4. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 5. Geometria - Estudo e ensino. 6. GeoGebra (Programa de computador). I. Jardim, Marcos Benevenuto, 1973-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The conception of the Earth's shape and its cartographic representations : a multidisciplinary approach in order to combat flat-earth movements

Palavras-chave em inglês:

Earth (Planet) - Figure

Map projection

Eratosthenes sieve method

Mathematics (High school) - Study and teaching

Geometry - Study and teaching

GeoGebra (Computer program)

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestra

Banca examinadora:

Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]

Samuel Rocha de Oliveira

Charles Aparecido de Almeida

Data de defesa: 04-08-2022

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-1081-0942>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/3520721509000840>

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 04 de agosto de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Prof(a). Dr(a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). CHARLES APARECIDO DE ALMEIDA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Sandro e Marisa, que sempre me encorajaram e me deram suporte. Aos meus avós, Giuseppe e Neusa, que sempre se fizeram presentes ao longo da minha vida. Ao meu marido e companheiro, Murilo, que sempre esteve ao meu lado.

Agradecimentos

Aos meus pais, Marisa e Sandro, que sempre me incentivaram e apoiaram a estudar.

Ao meu irmão, Luigi, pela compreensão de meu tempo escasso, especialmente durante a produção da parte final deste trabalho.

Ao meu marido, Murilo, cujo apoio, conselhos e críticas contribuem para a minha evolução acadêmica desde a graduação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim, pelos direcionamentos e conselhos ao longo da produção desta dissertação.

Aos colegas do PROFMAT, pelos momentos de troca de conhecimento e descontração ao longo deste curso.

Aos professores do PROFMAT do IMECC, pela dedicação e compromisso com a qualidade do programa, buscando prover uma sólida formação matemática a nós, alunos do programa e professores da Educação Básica.

Resumo

Nos últimos anos nota-se um aumento do interesse por teorias conspiratórias anti-ciência. Uma delas é a crença e difusão que a Terra seria plana. Pensando em formas de lutar contra a possibilidade de um aumento de adeptos a esta crença e utilizando-se da flexibilização de currículo permitida pela (BNCC, 2018), esta dissertação propõe-se a abordar durante o Ensino Médio a concepção da forma da Terra e as diferentes formas de projetar sua superfície curva sobre um plano. Para tanto, o presente estudo visa fornecer a fundamentação teórica para que seja desenvolvido um itinerário formativo integrado entre as áreas de Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em consonância com a BNCC (2018). Assim, a concepção da forma da Terra é abordada em diferentes períodos históricos, os alunos são introduzidos ao software *Stellarium*, em que devem, a partir de dados coletados no software, “demonstrar” por absurdo que a Terra não pode ser plana. Também são introduzidos ao software *GeoGebra*, onde são levados a realizar transformação entre diferentes sistemas de coordenadas, analisar as diferentes projeções cartográficas e as distorções causadas por elas ao representarem a superfície terrestre. Os alunos também são guiados a construir geometricamente dois tipos de projeção azimutais perspectivas. Por fim, é feita uma reflexão sobre as vantagens na escolha de cada projeção cartográfica e enfatizado que o popularmente denominado “mapa da Terra plana” não passa de uma projeção da superfície aproximadamente esferoidal da Terra sobre um plano, assim como tantas outras projeções. Dessa forma, busca-se desenvolver o letramento histórico, cartográfico, geográfico e matemático do indivíduo. Deseja-se também iniciá-lo ao pensamento computacional colocando-o em contato com diferentes software.

Palavras-chave: forma da terra. projeção cartográfica. terra plana. terraplanismo. matemática e ciências humanas. eratóstenes.

Abstract

In recent years there has been an increase in interest in anti-science conspiracy theories. One of them is the belief and diffusion that the Earth would be flat. Thinking of ways to fight against the possibility of an increase in supporters of this belief and using the curriculum flexibility allowed by BNCC (2018), this master thesis proposes to approach, during High School, the conception of the Earth's shape and the different ways of projecting its curved surface onto a plane. Therefore, the present study aims to provide the theoretical foundation for the development of an integrated formative itinerary between the areas of Mathematics and its Technologies and Applied Human and Social Sciences alligned with the (BNCC, 2018). Thus, the conception of the Earth's shape is approached in different historical periods, the students are introduced to the *Stellarium* software, where they must, from data collected in the software, "prove" by absurdity that the Earth cannot be flat. The students are also introduced to the *GeoGebra* software, where they are led to do coordinate transformations between different systems, analyze the different cartographic projections and the distortions caused by them when representing the earth's surface. Students are also guided to build geometrically two types of perspective azimuthal projection. Finally, a reflection is made on the advantages in choosing each cartographic projection and that the popularly called "flat Earth map" is nothing more than a projection of the Earth's roughly spheroidal surface onto a plane, just like so many other projections. In this way, we seek to develop historical, cartographic, geographic and mathematical literacy of the individual. It also seeks to introduce him to computational thinking by placing him in touch with different software.

Keywords: earth's shape. cartographic projection. flat-earth. flat-earth movement. mathematics and human sciences. eratosthenes.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Reconstrução do mapa feito por Anaximandro baseado na descrição de Heródoto.	24
Figura 2 – Reconstrução do mapa concebido por Eratóstenes	26
Figura 3 – Mapa contendo as cidades de Alexandria e Siena (atualmente Assuã).	27
Figura 4 – Relógio de Sol Scaphe grego no museu de Clemens-Sels na Alemanha.	28
Figura 5 – Representação do experimento feito por Eratóstenes com o relógio solar Scaphe.	28
Figura 6 – Representação em uma escala mais próxima da real dos raios solares incidindo sobre as cidades de Siena (Assuã) e Alexandria ao meio dia do solstício de verão	30
Figura 7 – Astrolábio construído em 1569 por Rennerus Arsenius.	32
Figura 8 – Exemplos de utilização do Astrolábio para medidas não astronômicas.	33
Figura 9 – Mapa-mundi da edição de 1478 do livro Geografia de Ptolomeu publicada em Roma.	38
Figura 10 – Reconstrução do mapa-mundi baseado nos escritos de Ptolomeu.	39
Figura 11 – Foto do globo terrestre construído por Martin Behaim.	42
Figura 12 – Mapa-mundi confeccionado por Waldseemüller	43
Figura 13 – Rota da primeira circum-navegação realizada entre 1519 e 1522.	46
Figura 14 – Imagem de uma loxodromia espiralando em direção ao Polo Norte.	47
Figura 15 – Mapa-mundi de Mercator	48
Figura 16 – Ilustração retirada do livro “L’image du monde”, escrito no século XIII.	51
Figura 17 – Mapa da Terra plana criado em 1983 por Orlando Ferguson.	54
Figura 18 – Mapa da Terra plana confeccionado por Voliva com a órbita solar inclusa.	55
Figura 19 – Terra plana e posição do Sol e da Lua na concepção de <i>terraplanistas</i>	57
Figura 20 – Logo da primeira convenção da Terra plana em São Paulo em 2019.	58
Figura 21 – Respostas discriminadas por idade à pergunta “Você acredita que a Terra seja redonda ou plana?” feita nos EUA pela agência YouGov.	60
Figura 22 – Esquemáticos do experimento feito por Eratóstenes utilizando conceito de tangente no lugar de relógio de sol.	75
Figura 23 – Representação do experimento de Eratóstenes supondo uma Terra plana.	77
Figura 24 – Releitura do experimento de Eratóstenes com três cidades no mesmo meridiano (supondo uma superfície plana).	78
Figura 25 – Passo a passo no <i>Stellarium</i> para determinar o momento em que o Sol atinge o zênite.	80
Figura 26 – Sistema horizontal de um observador na Terra.	81

Figura 27 – Distância em km calculada entre Sol e a Terra supondo-a plana a partir da distância d entre as cidades da Tabela 2 e Antofagasta.	84
Figura 28 – Gráfico de pontos da Tabela 2 com gráfico da função $h = \frac{\alpha}{\text{tg}\alpha} \cdot R$	85
Figura 29 – Tipos de projeção de acordo com a propriedade da projeção.	91
Figura 30 – Tipos de projeção de acordo com a superfície de projeção	92
Figura 31 – Projeção azimutal equidistante apresentada por Alexander Gleason em 1892.	94
Figura 32 – Projeção azimutal utilizada na bandeira da ONU.	95
Figura 33 – Projeção azimutal equidistante centrada em Campinas.	95
Figura 34 – Projeções azimutais geométricas perspectivas.	96
Figura 35 – Projeção plana (azimutal) estereográfica polar da Terra.	97
Figura 36 – Representação da construção da projeção estereográfica.	99
Figura 37 – Projeção ortográfica da Terra com o Brasil destacado em laranja.	100
Figura 38 – Projeção de Mercator com indicatrizes de Tissot.	102
Figura 39 – Projeção de Gall-Peters com indicatrizes de Tissot.	104
Figura 40 – Projeção conforme de Lambert.	106
Figura 41 – Mapeamento oficial do Brasil, feito na projeção policônica.	107
Figura 42 – Projeção cartográfica de Robinson com o Brasil destacado em laranja.	107
Figura 43 – Projeção cartográfica de Robinson com o Brasil destacado em laranja e indicatrizes de Tissot.	108
Figura 44 – Exemplo de mapa-mundi utilizado na China.	109
Figura 45 – Mapa-mundi proposto por Stuart McArthur em 1979.	110
Figura 46 – Projeção de Mercator utilizada pelo Google Maps atualmente.	110
Figura 47 – Captura de tela da “Atividade 1 - Coordenadas geográficas, esféricas e cartesianas” do Capítulo 1: Sistemas de coordenadas tridimensionais.	115
Figura 48 – Captura de tela da “Atividade 2: Transformação de coordenadas” do Capítulo 1: Sistemas de coordenadas tridimensionais.	117
Figura 49 – Captura de tela da “Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos” do capítulo Caminhos mais curtos na esfera.	119
Figura 50 – Tela final após a conclusão “Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos” em caso de resposta correta.	120
Figura 51 – Captura de tela da “Atividade 1 - Projeção de ponto e segmento de reta” do capítulo Projeções Ortográficas.	125
Figura 52 – Captura de tela final da “Atividade 1 - Projeção de ponto e segmento de reta”.	126
Figura 53 – Captura de telas iniciais da “Atividade 2 - Projeção de ponto e curva na esfera” do capítulo Projeções Ortográficas.	127
Figura 54 – Captura de tela da “Atividade 2 - Projeção de ponto e curva na esfera” finalizada.	128

Figura 55 – Captura de tela da “Atividade 4 - Projeção de um ponto e de uma curva” do capítulo Projeções Estereográficas.	130
Figura 56 – Captura de tela da “Atividade 4 - Projeção de um ponto e de uma curva” do capítulo Projeções Estereográficas	131
Figura 57 – Captura de tela da “Atividade 5 - Projeção azimutal estereográfica ” do capítulo Projeções Estereográficas.	132
Figura 58 – Captura de telas iniciais da “Atividade 6 - Ângulo entre curvas” do capítulo Projeções Estereográficas.	133
Figura 59 – Captura de tela final da “Atividade 6 - Ângulo entre curvas” do capítulo Projeções estereográficas.	134

Lista de tabelas

Tabela 1 – Três cidades brasileiras no mesmo meridiano.	82
Tabela 2 – Cidades/pontos com longitude aproximada para ilustrar a importância da escolha das cidades para realizar a atividade.	83

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Lista de Códigos-fonte

Código-fonte 1	– Código utilizado no software Mathematica para a construção de projeções cartográficas com suas respectivas indicatrizes de Tissot.	146
Código-fonte 2	– Código utilizado no software Mathematica para a construção de diferentes projeções cartográficas.	146
Código-fonte 3	– Código utilizado no software Mathematica para a construção da projeção cartográfica de Gall-Peters.	147

Sumário

	Introdução	19
I	EMBASAMENTO HISTÓRICO PARA AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS	22
1	DA PRÉ-HISTÓRIA À ANTIGUIDADE	24
1.1	Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.)	26
1.1.1	Eratóstenes não provou a esfericidade da Terra	31
1.2	Hiparco (190 - 120 a.C.)	31
1.3	Posidônio (135 - 51 a.C.)	34
1.4	Cleômedes e Estrabão	34
1.5	Claudius Ptolomeu (90 - 168 d.C.)	35
2	GRANDES NAVEGAÇÕES (SÉCULOS XV E XVI)	40
2.1	O conhecimento da esfericidade da Terra no século XV	40
2.2	O batismo do “Novo Mundo”	42
2.3	A comprovação empírica da forma arredondada da Terra	44
2.4	O mapa que revolucionou as navegações	46
2.5	Para saber mais sobre a representação da Terra ao longo dos séculos	48
3	MOVIMENTO TERRA-PLANA	50
3.1	O mito da Terra plana na Idade Média	50
3.2	O surgimento do terraplanismo no século XIX e sua reinauguração no século XX	52
3.3	A sociedade da Terra plana no século XXI	56
II	O QUE DIZ A BNCC	62
4	MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS	64
4.1	Competência específica 1	64
4.2	Competência específica 3	65
4.3	Competência específica 4	65
4.4	Competência específica 5	66
5	CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS	67

III	PROPOSTAS DE CURSO	69
6	SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1: DEMONSTRANDO QUE A TERRA NÃO É PLANA.	71
6.1	Orientações gerais	71
6.2	Objetivos	72
6.3	Habilidades da BNCC trabalhadas	72
6.4	Assuntos abordados	72
6.4.1	Matemática	72
6.4.2	Geografia	72
6.4.3	História	72
6.5	Aulas 1 a 4	73
6.5.1	Objetivos específicos	73
6.5.2	Recursos necessários	73
6.5.3	Sugestão de roteiro para a aula 1 (geografia): retomada de conteúdos e pré-requisitos para o desenvolvimento desta sequência didática.	73
6.5.4	Sugestão de roteiro para a aula 2 (história): a percepção da Terra por filósofos da antiguidade	74
6.5.5	Roteiro para a aula 3 (matemática): Óptica geométrica e eclipses	74
6.5.6	Roteiro para a aula 4 (matemática): História dos experimentos de Eratóstenes e Posidônio	75
6.6	Aulas 5 e 6 (matemática): releitura do experimento de Eratóstenes	76
6.6.1	Objetivos específicos	76
6.6.2	Recursos necessários	76
6.6.3	Roteiro para as aulas 5 e 6 (matemática): “demonstrando” que a Terra não é plana através do <i>Stellarium</i> .	77
6.6.3.1	Possíveis entraves	83
6.7	Aulas 7 e 8 (Extra): Projeto Eratóstenes Brasil	85
6.7.1	Objetivos específicos	86
6.7.2	Recursos necessários	86
6.7.3	Roteiro para as aulas 7 e 8 (matemática): reprodução do experimento de Eratóstenes	86
7	SEQUÊNCIA DIDÁTICA 2: A TERRA APROXIMADA POR UMA ESFERA E AS DISTORÇÕES CAUSADAS POR SUA REPRESENTAÇÃO NO PLANO ATRAVÉS DE PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS	88
7.1	Orientações gerais	89
7.2	Objetivos	89
7.3	Habilidades da BNCC trabalhadas	89
7.4	Assuntos abordados	90

7.4.1	Matemática	90
7.4.2	Geografia	90
7.4.3	História	90
7.5	Projeções cartográficas: Fundamentação teórica	90
7.5.1	Projeções planas (azimutais)	93
7.5.1.1	Projeção azimutal equidistante (não perspectiva).	93
7.5.1.2	Projeções azimutais perspectivas	96
7.5.2	Projeções cilíndricas	101
7.5.3	Projeções cônicas	104
7.5.4	Outras projeções	106
7.5.5	Os diferentes mapas-mundi	108
7.5.6	Para aprofundar-se em projeções cartográficas	111
7.6	Aula 1 (História): O conhecimento do formato arredondado da Terra e o “descobrimento” da América.	111
7.6.1	Objetivos específicos	112
7.6.2	Recursos necessários	112
7.6.3	Sugestão de roteiro para a aula 1: mapas-mundi utilizados no período das grandes navegações	112
7.7	Aulas 2 e 3 (Matemática): Como localizar um ponto na Terra a partir de suas coordenadas? E qual o caminho mais curto entre dois pontos em uma esfera?	113
7.7.1	Objetivos específicos	113
7.7.2	Recursos necessários	113
7.7.3	Roteiro para as aulas 2 e 3	114
7.7.3.1	Capítulo 1: Sistemas de coordenadas tridimensionais	114
7.7.3.2	Capítulo 2: Caminhos mais curtos na esfera	118
7.8	Aulas 4 e 5: O mapa da Terra plana e outras projeções cartográficas.121	
7.8.1	Objetivos específicos	121
7.8.2	Recursos necessários	121
7.8.3	Roteiro de aula	122
7.9	Aulas 6 e 7 (Matemática): Manipulação das projeções azimutais perspectivas no <i>GeoGebra</i>	123
7.9.1	Objetivos específicos	123
7.9.2	Recursos necessários	124
7.9.3	Roteiro para as aulas 6 e 7	124
7.9.3.1	Capítulo 1: Projeções ortográficas	124
7.9.3.2	Capítulo 2: Projeções estereográficas.	129
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135

REFERÊNCIAS	137
APÊNDICES	144
APÊNDICE A – FOLHA DE ATIVIDADE PARA A AULA DA SE- ÇÃO 7.8	145
APÊNDICE B – CÓDIGO MATHEMATICA	146

Introdução

A palavra geometria vem de duas palavras gregas: *geo*, que significa terra e *metrein*, que significa medida. Desde a antiguidade, o ser humano questiona-se sobre a forma da Terra, buscando explicações religiosas, místicas ou racionais. Já foram consideradas formas cilíndricas, planas, esféricas, dentre outras.

É em torno do século IV a.C. na Grécia Antiga que há um consenso sobre a forma esférica da Terra. Este consenso perdurou-se dentre as civilizações ditas ocidentais até o século XVII, quando as descobertas da existência das forças gravitacional e centrífuga e também do achatamento polar na forma de Júpiter levaram os cientistas da época a discutir se a Terra seria um esferoide oblato (achatado nos polos) ou prolato (alongado nos polos).

Enfim, após a confirmação experimental realizada no século XVIII, concluiu-se que a Terra é, na verdade, um elipsoide oblato. Hoje sabe-se que a Terra é aproximadamente um geoide, ou seja, um elipsoide com ondulações. Estas ondulações são definidas por uma superfície equipotencial¹ que coincide com valor médio do nível dos oceanos (DEPARIS, 2001; LANG DA SILVEIRA, 2014).

Ainda hoje são utilizados elipsoides, denominados elipsoides de referência para representar a Terra por razões de simplificação matemática. A diferença de altitude entre os raios equatorial e polar no elipsoide de referência é de 21 km e quando comparado ao elipsoide de referência, as ondulações do geoide são menores que 107 metros. Esta diferença entre os raios equatorial e polar é muito pequena quando comparada ao raio médio da Terra, representando apenas cerca de 0,3% de seu tamanho (LANG DA SILVEIRA, 2017).

Apesar do formato aproximadamente esferoidal da Terra ser um fato amplamente estabelecido e aceito pela sociedade há séculos, nos últimos anos nota-se um aumento do interesse pelo termo “terra plana” no buscador do *Google*, conforme apresentado por (SANTANA DE MACEDO, 2021) em sua dissertação de mestrado apresentada em 2021. Ademais, o Brasil sediou em novembro de 2019 a primeira convenção da Terra plana na cidade de São Paulo. Neste mesmo ano, uma pesquisa feita pelo Datafolha, a primeira do gênero, apontou que em torno de 11 milhões de brasileiros acreditam que a Terra seja plana (GARCIA, 2019).

Na esfera pessoal, a autora presenciou, nos últimos anos, alunos de Ensino Médio que comentavam sobre “Terra plana”, ainda que em tom de brincadeira e demonstraram-se curiosos para saber evidências e argumentos que sustentam a concepção da Terra redonda. Em um bate-papo informal com colegas do PROFMAT, após relatos de colegas que

¹ Superfície equipotencial: com potencial da gravidade constante

passaram por situações similares, foi levantada a questão de como demonstrar que a Terra não era plana no Ensino Médio.

Assim, a presente dissertação tem como tema principal a concepção da forma da Terra a fim de criar condições para mitigar o crescimento futuro do movimento *terraplanista*² através de informação e de letramento matemático, histórico e cartográfico, dadas as limitações do Ensino Médio.

Através desta dissertação, o aluno é levado a refletir sobre como ocorre a construção do conhecimento ao longo dos séculos, a compreender que o homem, mesmo sabendo que a Terra é aproximadamente esférica, sempre a representou sobre um plano por questões de simplificação. Também pretende-se que o aluno perceba que essa representação no plano sempre gera distorções e que cada país possui um objetivo ao optar por certa projeção, bem como ao escolher a disposição dos continentes nela (eurocêntrica, norte acima do sul).

Neste trabalho, pretende-se fornecer o ferramental teórico para que seja possível, no âmbito da nova BNCC, realizar um itinerário formativo integrado de um semestre com as áreas de Matemática e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas durante o Ensino Médio. Destaca-se a importância de que este trabalho seja realizado de forma conjunta entre as áreas para que o aluno perceba, através da abordagem histórica, como o conhecimento é construído ao longo dos séculos a partir de pequenas contribuições de cada indivíduo.

Deste modo, durante a **Parte I** são realizados levantamentos de dois períodos históricos. O primeiro deles aborda a concepção da forma da Terra pelas sociedades da Grécia e do Egito Antigo entre os séculos VI a.C. e II d.C.. Ele deve ser utilizado, juntamente com um livro didático de história do Ensino Médio, para auxiliar o professor de história durante a realização da primeira sequência didática, descrita no **Capítulo 6**. Já o segundo, aborda o período das grandes navegações, ocorridas entre os séculos XV e XVI, em que o conhecimento de que a Terra era esférica culminou na posterior ocupação da América pelos europeus. Esse capítulo deve ser utilizado pelos professores de história e de geografia para a execução da segunda sequência didática, apresentada no **Capítulo 7**.

Há ainda o **Capítulo 3** que também está contido na **Parte I**. Este capítulo trata da história do movimento *terraplanista* e recomenda-se sua leitura pelos professores das três disciplinas, que devem abordá-lo durante a execução das duas sequências didáticas a fim de expor os absurdos e contradições matemáticas dos modelos criados por eles.

A **Parte II** dedica-se a elencar as competências e habilidades da BNCC que serão aprimoradas durante as duas sequências didáticas.

² Designa-se por movimento “terraplanista” o grupo de pessoas que acreditam no formato plano da Terra, o difundem por de meios de comunicação ou são simpatizantes àqueles que realizam a difusão.

Por fim, a **Parte III** é consagrada ao desenvolvimento das duas sequências didáticas que compõem este itinerário. A primeira delas, explicada no **Capítulo 6**, aborda o experimento de Eratóstenes e propõe uma versão alternativa deste experimento para “demonstrar”³ por absurdo que a Terra não é plana através do software *Stellarium*. Já a segunda trata sobre sistemas de coordenadas no espaço, as diversas projeções cartográficas (com as projeções de Mercator, Peters e o erroneamente denominado “mapa da Terra plana” inclusos), sobre a construção gráfica de algumas delas no *GeoGebra*, bem como a distorção causada por elas ao representar a superfície terrestre modelada por uma esfera sobre um plano.

É relevante destacar que apesar do empenho em criar sequências didáticas que possam compor um itinerário integrado entre duas áreas, um maior aprofundamento por parte de professores de geografia e história seria desejável.

No campo de ciências humanas, além das disciplinas de história e geografia, seria de extrema pertinência que algumas aulas fossem dedicadas a filosofia. Particularmente durante a primeira sequência didática, poderia ser abordada que a filosofia é precursora do que hoje conhecemos como matemática, física, geografia e química, com enfoque no período pós-socrático, abordando principalmente Platão e Aristóteles, mas não deixando de abordar o período pré-socrático e as ideias dos filósofos dessa época, como Anaximandro e Tales de Mileto. Sendo assim, seria muito proveitoso se um acadêmico desta área propusesse aulas integradas a este itinerário.

³ O termo está entre aspas pois os dados coletados para este experimento não são coletados presencialmente em determinada localização da Terra. Eles advêm do software, que apresenta um modelo da Terra.

Parte I

Embasamento histórico para as sequências didáticas

Nesta parte, será apresentado o embasamento histórico necessário a fim de complementar o que já é fornecido pelos livros de história do Ensino Médio. O [Capítulo 1](#) fornece a introdução histórica necessária para a primeira sequência didática, descrita no [Capítulo 6](#). Para a segunda sequência didática, abordada no [Capítulo 7](#), o embasamento histórico concentra-se, em sua maioria no [Capítulo 2](#). Contudo, também recomenda-se a leitura do [Capítulo 1](#) e principalmente do [Capítulo 3](#).

Apesar de apenas o período da Grécia e Egito antigos e das Grandes Navegações serem abordados durante esta dissertação, não significa que não houve avanço no período entre os séculos II e XIV d.C. e, sobretudo, por civilizações não-europeias.

1 Da pré-história à antiguidade

Desde a pré-história, a Terra era, no geral, representada de forma plana. Um dos argumentos para sustentar essa ideia era que quando o Sol nasce ou se põe, a linha do horizonte se mostra como uma reta e não como uma curva (ARISTÓTELES, 1922).

É na Grécia antiga que aparecem as primeiras tentativas de explicar o formato da Terra sem procurar justificativas divinas ou mitológicas. Tales de Mileto (625 - 546 a.C.) acreditava que a Terra tinha um formato cilíndrico e flutuava imóvel sobre a água como uma madeira. Os filósofos que sucederam Tales avançaram em alguns tópicos, mas não no que diz respeito ao formato da Terra. As suas declarações variavam entre Terra plana e formato de tambor. Um avanço interessante foi feito por Anaximandro de Mileto (610 - 522 a.C.), que defendia que a Terra não era sustentada por nada; no entanto, ele acreditava que a Terra era plana. A justificativa para que ela não caísse era a simetria, pois ela estava a uma mesma distância de todas as coisas (BURCH, 1954, Capítulo. 3). Além disso, segundo os tradutores de Estrabão (1854, p. 13), Anaximandro foi o primeiro a publicar um mapa do mundo¹, cuja reconstrução segue abaixo.



Anaximander's Map of the World

Figura 1 – Reconstrução do mapa feito por Anaximandro baseado na descrição de Heródoto.

Fonte: Universidade Columbia | Centro de Ensino e Aprendizagem. Disponível em: <https://ccnmtl.columbia.edu/projects/mmt/frontiers/web/slideshows/first_world_map_anaximander_ch_4.html>

Não é certo se os Pitagóricos (V - IV a.C.) consideravam a Terra esférica ou

¹ Segundo o IBGE (2021), o mapa-múndi mais antigo do mundo é babilônico, datado de 2.500 a.C.

não. De acordo com [Burch \(1954, Capítulo 3\)](#), embora muitos historiadores assumam que os Pitagóricos pensavam em um formato esférico para a Terra, não há evidências concretas que sustentem essa afirmação. Apesar de alguns atribuírem à Parmênides (c. 515 - 460 a.C.) a ideia de uma Terra esférica, a única evidência é uma declaração de Diogenes Laertius (180 - 240 d.C.) que carece de fontes.

O primeiro registro formal da Terra ser esférica ocorre na obra *Phaedo* de Platão (428 - 348 a.C.), em um diálogo entre Simmias e Sócrates, em que Sócrates diz que acredita que a Terra é um corpo esférico no centro dos céus, que não há necessidade de nada para sustentá-la e evitar que ela caia e também que deve haver lugares na Terra, desconhecidos por eles, habitados por muitos outros homens ([PLATÃO, 1954, p. 109](#)). Esse argumento da Terra precisar estar no centro do Universo e, portanto, não precisa de nada para sustentá-la remonta ao argumento de Anaximandro.

Aristóteles (384 - 322 a.C.), discípulo de Platão, é o primeiro a apresentar evidências, em sua obra *De Caelo* (traduzida para o inglês por John Leofric Stock com o título *On the heavens*), que sustentam a ideia de uma Terra esférica baseando-se em observações da sombra da Terra em eclipses lunares e em observações de estrelas que são vistas no Egito e que não são vistas no norte. Considerando o formato esférico da Terra, Aristóteles diz que elementos como terra e água tendem a cair para o centro da Terra, uma ideia que assemelha-se, em partes, com o funcionamento da Teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton. Ele também menciona que a medida da circunferência da Terra encontrada naquela época era de 400.000 estádios e concluiu, com isso, que a Terra deveria ser pequena quando comparada às estrelas. Um ponto interessante a destacar é que embora diversas fontes atribuam a Aristóteles a observação de que quando um navio é avistado no horizonte, primeiro a ponta de seu mastro é avistada e conforme o navio se aproxima do observador, existe a impressão de que ele está emergindo da água como uma evidência para corroborar o formato esférico da Terra, isso não foi argumentado por ele em suas obras. Aristóteles ainda afirma que algumas pessoas acreditavam na esfericidade da Terra enquanto outras acreditavam que ela era plana, mas não havia consenso ([ARISTÓTELES, 1922](#)).

Em *De Caelo*, Aristóteles não cita quem encontrou o valor de 400.000 estádios para a medida da circunferência da Terra, entretanto, Paul Tannery atribui esta medida a Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), pois este produziu o trabalho mais importante de geografia antes de Eratóstenes ([TANNERY, 1893](#)).

Apesar de ter existido antes de Aristóteles filósofos que defendiam o formato esférico da Terra, foi após ele que esse formato tornou-se amplamente aceito pela comunidade de filósofos. ([AGUIAR, 2020](#))

1.1 Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.)

Nascido em Cirene no Egito antigo em 276 a.C., região que hoje pertence à Líbia, Eratóstenes viveu parte de sua vida nessa cidade, mudando-se para Atenas e depois para Alexandria a convite do faraó Ptolomeu III para se tornar bibliotecário da biblioteca da cidade. Ele elaborou um dos mapas mais famosos do mundo antigo, retratando a porção de Terra considerada habitada na época. Graça às críticas feitas por Estrabão (64 a.C. - 24 d.C.) em [Estrabão \(1854, Livro II\)](#) à concepção do mapa-mundi feito por Eratóstenes, é possível reconstruir este mapa, conforme a [Figura 2](#) e também inferir que este último introduziu o sistema de coordenadas.

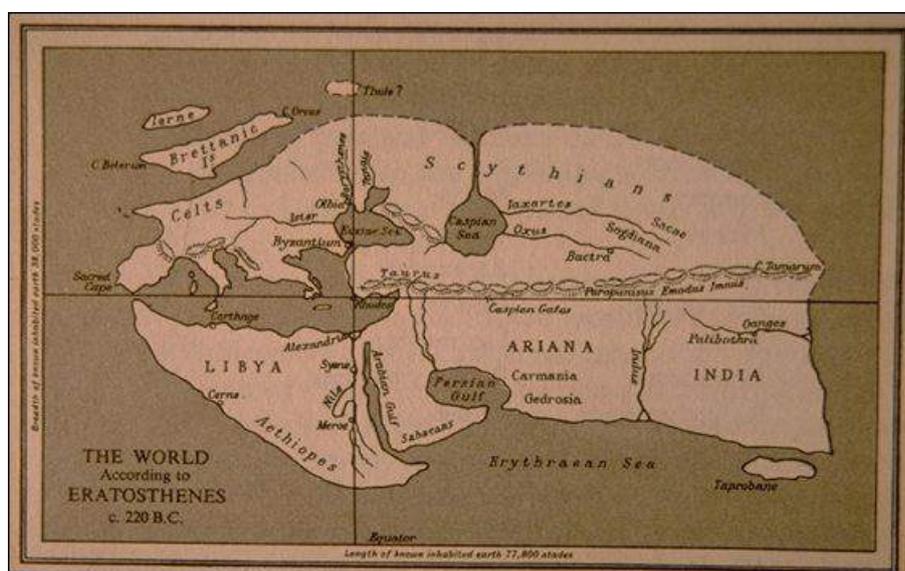


Figura 2 – Reconstrução do mapa concebido por Eratóstenes

Fonte: Projeto Arquimedes. Universidade Autônoma do México. Disponível em: http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/mapas/html/index2.html

Eratóstenes foi a primeira pessoa, de que restam registros, a calcular com precisão a circunferência da Terra. Como os registros dos cálculos de Eratóstenes praticamente se perderam, a fonte principal de seu feito é Cleômedes em sua obra *De motu circulari corporum caelestium* (séc. II) (traduzida para o inglês por Alan C. Bowen e R. B. Todd com o título *Cleomedes Lectures on Astronomy: A Translation of The Heavens* (CLEÔMEDES, 2004)). Supõe-se que a descrição de Cleômedes é mais suscinta, pedagógica em relação aos livros de Eratóstenes e é importante enfatizar que ela é feita pela óptica de Cleômedes a partir das escritas de Eratóstenes, portanto pode não corresponder exatamente à sua obra original.

Na época, acreditava-se que as cidades de Siena (atualmente Assuã) e Alexandria estavam sob o mesmo meridiano (hoje sabemos que Assuã está 3° a leste em relação

à Alexandria), que ao meio dia do dia 21 de dezembro na cidade de Siena, localizada aproximadamente no Trópico de Câncer (ver Figura 3), os raios solares incidiam perpendicularmente à superfície, podendo iluminar o fundo de um poço, por exemplo. Porém, em Alexandria no mesmo horário e dia, a luz solar não incidia perpendicularmente.

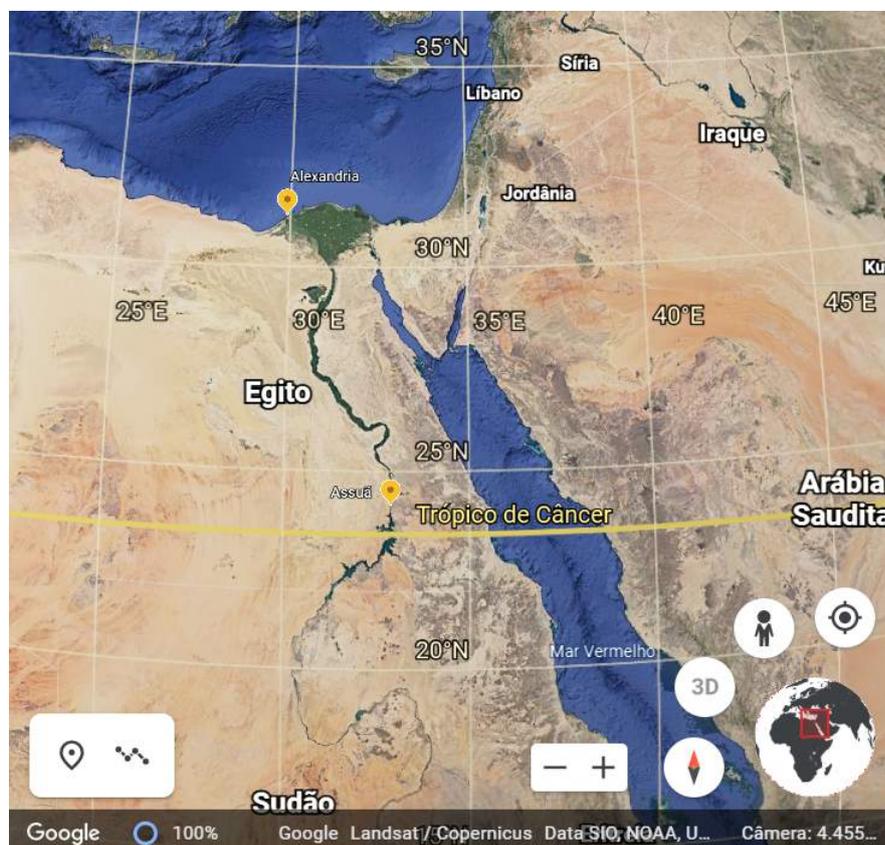


Figura 3 – Mapa contendo as cidades de Alexandria e Siena (atualmente Assuã).

Fonte: Google Maps. Disponível em: <<https://www.google.com.br/maps>>

Assim, ao descrever o método utilizado por Eratóstenes para o cálculo da circunferência da Terra, Cleômedes retrata que foi utilizado um relógio de sol denominado SCAPHE, composto por metade de uma esfera oca com um gnomo colocado em seu centro, conforme apresentado na Figura 4 que se colocado sobre o solo de Siena quando o Sol atinge o zênite no solstício de verão não gera sombra, ou seja, os raios solares chegam paralelos ao gnomo, e quando colocado sobre o solo de Alexandria no mesmo horário, produz uma sombra na esfera que compõe o relógio.

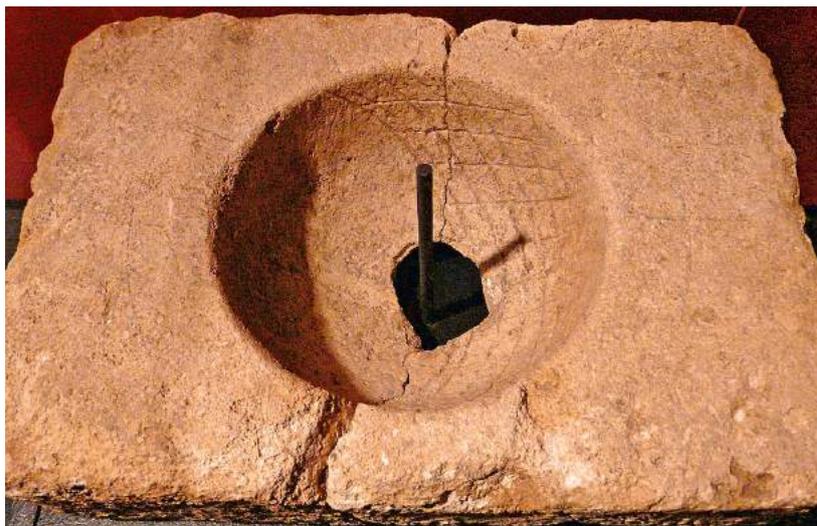


Figura 4 – Relógio de Sol Scaphe grego no museu de Clemens-Sels na Alemanha.

Fonte: Imagem feita por Hartmann Linge, Wikimedia Commons, CC-by-sa 3.0. Disponível em <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:201005151447_NE_CSM,_Sonnenuhr,_Kalkstein,_1._Jh.jpg>.

Em seguida, Cleômedes diz que desenhando um arco ligando a sombra da extremidade do gnomo até a base do mesmo, este corresponde ao ângulo entre o gnomo (perpendicular ao solo de Alexandria) e os raios solares que atingem a cidade de Alexandria, denotado por β na Figura 5. Segundo ele, Eratóstenes obteve que β correspondia a $\frac{1}{50}$ de uma circunferência completa.

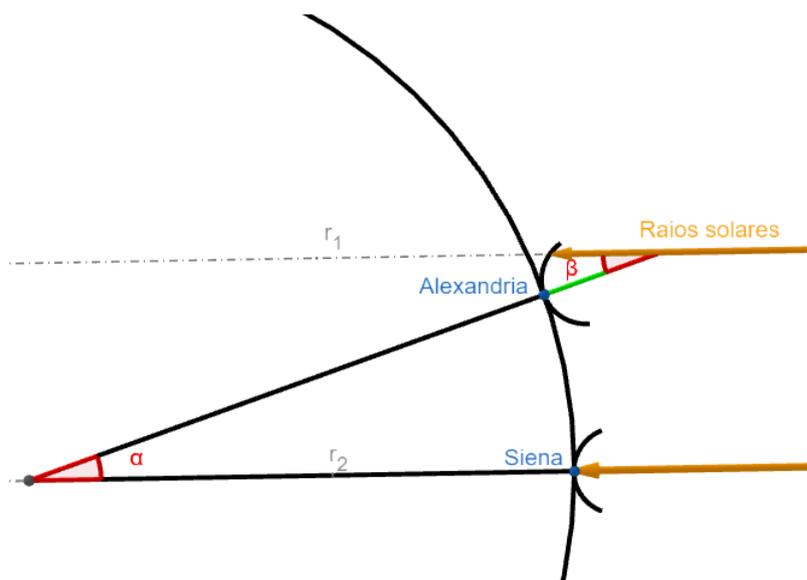


Figura 5 – Representação do experimento feito por Eratóstenes com o relógio solar Scaphe.

Fonte: Imagem feita pela autora.

Uma vez medido o valor de β , ele supôs que o Sol estava a uma grande distância da Terra, e, portanto, poderia-se considerar que os raios solares que a atingem são paralelos, ou seja, considere r_1 paralela a r_2 na [Figura 5](#). Levando em conta essa hipótese e supondo a Terra esférica, Eratóstenes calculou sua circunferência.

Para realizar o cálculo da circunferência da Terra, é necessário retomar a Proposição XXIX do livro I de *Os Elementos*.

Proposição 1 (Proposição XXIX - Livro I). *Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.*

Embora Cleômedes não fale o nome de Euclides, ele assume a [Proposição 1](#) como demonstrada por geômetras da época.

Como o gnomon está perpendicular ao solo de Alexandria, podemos prolongar o segmento até o centro da Terra e, utilizando a [Proposição 1](#), pode-se afirmar que $\beta = \alpha$. Assim, sabendo-se que a distância conhecida na época entre Siena e Alexandria era 5.000 estádios, é possível calcular o comprimento C da circunferência da Terra.

$$\frac{C}{5.000} = \frac{360^\circ}{\beta}$$

Substituindo $\beta = \frac{360^\circ}{50}$, temos

$$C = 5.000 \times 50 \implies C = 250.000 \text{ estádios}$$

De acordo com os tradutores de [Estrabão \(1854, Página 11\)](#), a medida estádio utilizada por Eratóstenes, provavelmente é a unidade de medida grega Estádio Olímpico, porém eles não dispensam a existência da medida Estádio Egípcio, embora não saibam se de fato existiu essa unidade de medida. Já segundo os tradutores de [Cleômedes \(2004, Capítulo 7\)](#), não é possível realizar uma correspondência exata entre unidades de medida atuais e a unidade utilizada por Eratóstenes.

Como 1 estádio grego corresponde a aproximadamente 180 metros², temos então $C = 45.000.000$ metros ([ANGLIN; LAMBEK, 1995, Capítulo. 18](#)). Atualmente, sabe-se que a circunferência da Terra mede 40.075 km ([IMECC, 2020](#)). Se este valor de 1 estádio estiver correto, o valor encontrado por Eratóstenes para a circunferência da Terra é 12% maior que o valor real.

Esse valor de 250.000 estádios é descrito por Cleômedes, porém Estrabão, ao mencionar a medida da circunferência da Terra calculada por Eratóstenes fala em 252.000

² Como não há consenso sobre o tipo de estádio utilizado por Eratóstenes, é possível encontrar diferentes valores entre 155,5 e 192 metros para a medida de um estádio.

estádios. De acordo com os tradutores de (ESTRABÃO, 1854, Página 11), Eratóstenes chegou no valor de 250.000, porém o alterou para 252.000 afim de facilitar cálculos e (TANNERY, 1893) explica que este valor tornou-se referência na antiguidade pois dessa forma cada grau corresponderia a 700 estádios.

A Figura 6 abaixo tem como objetivo fornecer uma melhor visualização do experimento de Eratóstenes, em uma escala mais próxima da real. A Terra está representada em azul, o plano que contém seu eixo de rotação está inclinado em $23,26^\circ$ em relação a uma direção perpendicular ao plano da órbita e os raios solares incidem quase perpendicularmente à cidade de Siena, que está muito próxima ao Trópico de Câncer.

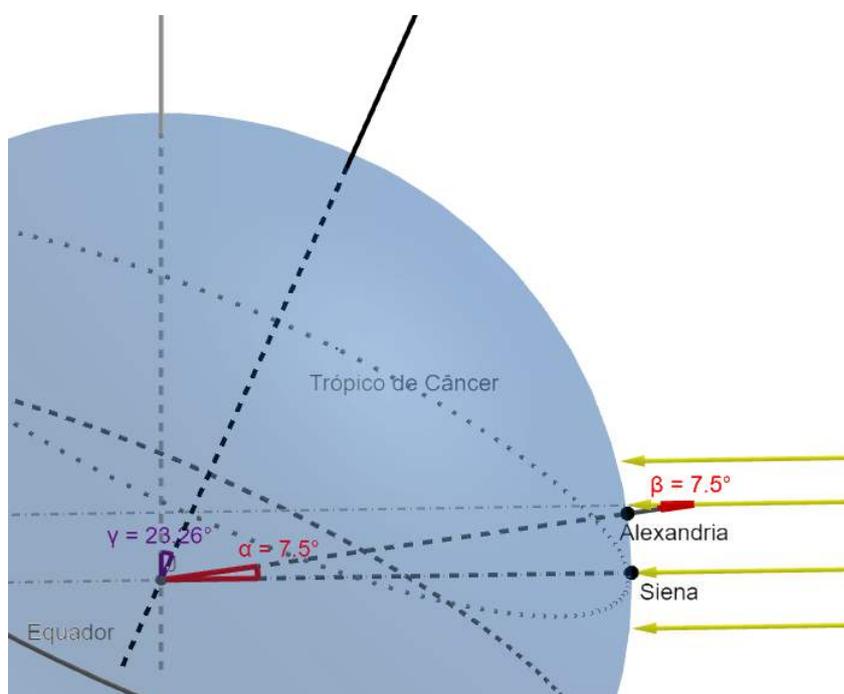


Figura 6 – Representação em uma escala mais próxima da real dos raios solares incidindo sobre as cidades de Siena (Assuã) e Alexandria ao meio dia do solstício de verão

Fonte: Imagem construída pela autora através do *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/uw8qwqce>>.

A tentativa de escolher duas cidades no mesmo meridiano foi primordial para que Eratóstenes obtivesse o valor da circunferência da Terra com uma boa precisão. Suponhamos que fossem escolhidas duas cidades em meridianos distantes, digamos Assuã e Xangai (China), que está aproximadamente na mesma latitude de Alexandria mas sua longitude é $91,5^\circ$ mais a leste.

O meio-dia solar em Xangai ocorre em torno de 6 horas antes de Assuã. Neste instante, os raios incidem perpendicularmente à cidade de Ruisui (Taiwan) que possui a

mesma longitude de Xangai e está localizada no Trópico de Câncer. Os raios solares só estarão perpendiculares à cidade de Assuã em torno de 6 horas depois, quando a Terra houver realizado $\frac{1}{4}$ de uma rotação completa.

Assim, não seria possível proceder com o mesmo raciocínio ilustrado na [Figura 6](#), pois os raios durante o meio-dia solar em Xangai não seriam paralelos aos raios durante o meio-dia solar em Assuã, uma vez que ocorreriam em instantes diferentes.

1.1.1 Eratóstenes não provou a esfericidade da Terra

É importante frisar que Eratóstenes não provou a esfericidade do planeta, ele supôs que os raios que atingem sua superfície são paralelos e que a Terra é esférica, para depois calcular seu raio.

Suponhamos que a Terra fosse plana e o Sol estivesse suficientemente próximo dela de forma que os raios que atingem a sua superfície não fossem paralelos, ou seja, o Sol funcionasse como uma fonte pontual de luz e os raios que atingissem a Terra fossem divergentes; ainda assim seria possível Eratóstenes realizar essa mesma observação e obter os mesmos dados.

Portanto, os raios solares incidirem perpendicularmente à superfície do solo de Siena e ao mesmo tempo incidirem não perpendicularmente em relação ao solo de Alexandria é uma condição necessária porém não suficiente para a Terra não ser considerada plana.

Para eliminar essa possibilidade de os raios solares que atingem a Terra serem divergentes, seria necessário realizar o mesmo experimento que fez Eratóstenes, mas desta vez com três cidades diferentes no mesmo meridiano. No [Capítulo 6](#), é proposto um experimento que aborda o assunto.

1.2 Hiparco (190 - 120 a.C.)

Nascido em Niceia em 190 a.C., hoje localizada na Turquia, Hiparco foi um grande crítico da obra de Eratóstenes. Entretanto, praticamente não restam registros de seus trabalhos. A maior fonte que hoje tem-se acesso à Hiparco é através de Ptolomeu, que não deixa explícito em suas obras o que é advindo de Hiparco. Inclusive ao longo da história, existiram vários cientistas que criticaram Ptolomeu, dizendo que este apenas copiou o trabalho de Hiparco.

Hiparco introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360 graus, cada grau subdividido em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos, utilizando o sistema sexagesimal desenvolvido pelos Babilônios. A partir de um círculo com 120 partes de diâmetro, ele determinou os comprimentos das cordas correspondentes a cada uma dessas partes. Ele

também estabeleceu o primeiro catálogo de estrelas, com aproximadamente 800 no total, fornecendo a latitude e longitude em relação à eclíptica ³(BIÉMONT, 2003).

Embora muitas fontes o atribuam como o criador da primeira tabela de cordas, segundo Tannery (1893), a tabela de Hiparco é provavelmente baseada em uma anterior de Arquimedes. Na seção 1.5 segue uma breve explicação sobre a tabela de cordas construída por Ptolomeu, baseada na concebida por Hiparco. Sua maior descoberta foi a precessão dos equinócios⁴, feita a partir de observação das estrelas e cuja teoria foi apresentada em *Principia Matemática* de Newton.

De acordo com Neugebauer (1975), Hiparco foi o criador do primeiro sistema de coordenadas esféricas, provavelmente para a resolução de problemas de astronomia esférica através de projeção estereográfica, que era utilizada para projetar a esfera celeste sobre o plano e será melhor detalhada no Capítulo 7. No geral, Hiparco é tido como o inventor da projeção estereográfica com a confecção de um astrolábio, apresentado na Figura 7. Entretanto existem fontes que apontam Eudoxo ou Apolônio como responsáveis pela sua invenção ⁵.



Figura 7 – Astrolábio construído em 1569 por Rennerus Arsenius.

Fonte: Museu de Artes e Ofícios de Paris. Disponível em: <<https://www.arts-et-metiers.net/musee/astrolabe-par-arsenius>>.

³ Plano da eclíptica: plano da órbita da Terra ao redor do Sol.

⁴ A lenta mudança na direção do eixo de rotação da Terra faz com que as estrelas no céu mudem de posição ao longo dos anos com relação a um observador em uma mesma localidade da superfície terrestre.

⁵ Devido a uma passagem no livro de *De Architectura* de Vitruvius escrito no século I a.C.

Dentre as diversas utilidades dos astrolábios, encontram-se a medida da altura de um corpo celeste, determinação da latitude a partir da hora local, determinação dos instantes de nascer e por de estrelas em uma determinada data, dentre elas o Sol, obtendo assim informações sobre a duração do dia e da noite. É possível também realizar medidas não astronômicas, como apresentado na [Figura 8](#), como a medição da profundidade de um poço e da altura de uma torre. Para saber mais detalhes sobre utilização e construção do astrolábio, é sugerida a leitura de [École Nationale Superieure de Lyon](#) () com a ferramenta de tradução de página do *Google Chrome* se necessário.

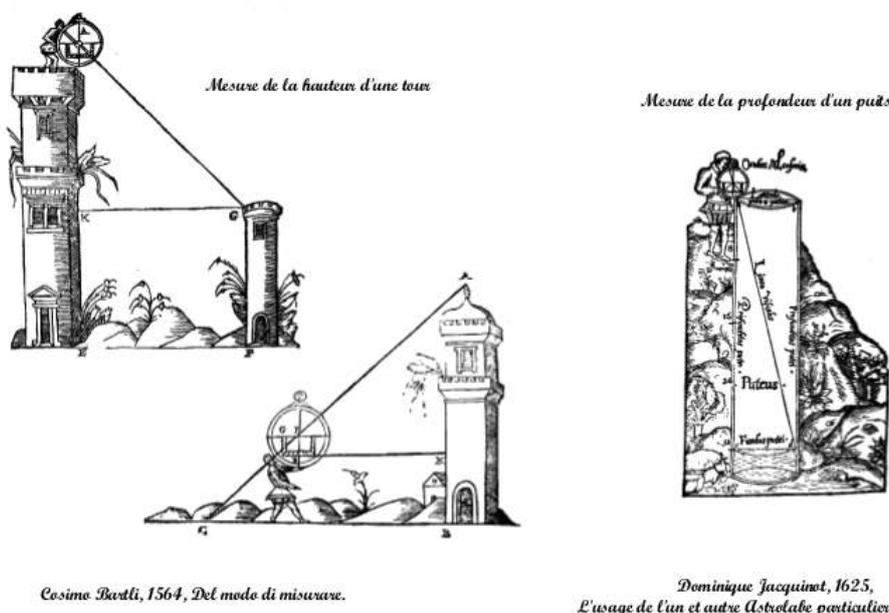


Figura 8 – Exemplos de utilização do Astrolábio para medidas não astronômicas.

Fonte: Esquemáticos produzidos por Cosimo Bartoli e Dominique Jacquinot. Disponível em: <<http://www.meridienne.org/atelier/instruments/astrolabe/utilisation/>>.

Além das aplicabilidades mencionadas, é possível utilizá-lo para calcular a circunferência da Terra reproduzindo o experimento de Eratóstenes, mas utilizando o astrolábio no lugar do Scaphe para medir o ângulo entre o gnomo e os raios solares. Para isto, é necessário posicionar o gnomo perpendicularmente ao solo, indicar a localização da extremidade da sua sombra e posicionar o astrolábio alinhado ao gnomo junto ao observador, assim como na [Figura 8](#) em que o astrolábio encontra-se alinhado à parede do poço para medir sua profundidade. Então, deve-se mover a aliade ⁶ de forma que seja possível visualizar, através dela, o ponto que foi marcado como extremidade da sombra. Desta forma, o astrolábio terá registrado o ângulo entre os raios solares e o gnomo perpendicular ao solo.

⁶ Parte móvel do astrolábio, que aparenta ser um ponteiro na [Figura 7](#). Ela possui dois visores alinhados, um em cada ponta.

1.3 Posidônio (135 - 51 a.C.)

Foram também Cleômedes, em seu livro *De motu circulari corporum caelestium* e Estrabão, em seu livro *Geografia* (séc. VII a.C., segundo os tradutores de [Estrabão \(1917\)](#)), que descreveram como Posidônio calculou a circunferência da Terra. Filósofo estoico, nascido em 135 a.C. em Apameia, uma antiga cidade síria, Posidônio utilizou um raciocínio similar ao de Eratóstenes, mas ao invés de utilizar o Sol, ele utilizou a posição da estrela Canopus no céu em duas cidades distintas, Rhodes na Grécia e Alexandria no Egito.

De acordo com [Cleômedes \(2004\)](#), para realizar seus cálculos, Posidônio realiza três suposições: Rhodes e Alexandria estão no mesmo meridiano (embora a diferença de longitude entre elas seja de $1^{\circ}50'$); a distância entre elas é de 5000 estádios e ele divide o meridiano que, segundo o que se acreditava, passaria por Rhodes e Alexandria em 48 partes. As observações feitas por Posidônio são: em Rhodes, a estrela Canopus se encontra no horizonte, enquanto que em Alexandria ela está acima do horizonte a uma altura correspondente a $\frac{1}{48}$ do meridiano. Assim, a distância entre Rhodes e Alexandria corresponderia a $\frac{1}{48}$ da circunferência terrestre, ou seja, a circunferência deveria medir 240.000 estádios. Utilizando a mesma aproximação de 180 metros para 1 estádio temos que Posidônio chegou em 43.200 km como medida da circunferência terrestre.

Estrabão adota alguns valores divergentes de Cleômedes, para ele, a distância entre Rhodes e Alexandria é em torno de 4000 estádios, mais precisamente 3750 estádios, valor que, segundo ele, foi determinado por Eratóstenes através de medidas feitas com relógios de Sol. Por outro lado, ele reconhece que de acordo com marinheiros, a distância é de 5000 estádios, que é o mesmo valor registrado por Cleômedes ([ESTRABÃO, 1854](#), Livro II, capítulo II). Em consequência da escolha de 3750 estádios para a distância entre as duas cidades, o valor apresentado por Estrabão para a circunferência da Terra também diverge do apresentado por Cleômedes, sendo 180.000 estádios, que corresponderia a 32.400 km, considerando que o mesmo valor de 180 metros para um estádio utilizado com Eratóstenes ([ESTRABÃO, 1854](#), Livro II, capítulo V). Essa divergência de valores se deve exclusivamente à diferença na distância entre as cidades adotadas por Estrabão e Cleômedes, pois o método para a obtenção da circunferência da Terra foi o mesmo em ambas as descrições, multiplicando a distância entre as duas cidades por 48.

1.4 Cleômedes e Estrabão

Pouco se sabe sobre a vida de Cleômedes, acredita-se que ele escreveu o livro *De motu circulari corporum caelestium* entre 50 a.C. e 250 d. C., mas muito provavelmente anterior a Ptolomeu (90 - 168 d.C.), devido a não haver nenhuma referência a ele. Este livro é sua única obra de que se tem conhecimento e era lido como um manual astronômico

até o ano 1900, quando houve interesse de acadêmicos em rastrear fontes e reconstruir ideias de antigos pensadores (CLEÔMEDES, 2004).

Estrabão (64 a.C. - 24 d.C.) é considerado o maior geógrafo da antiguidade, ele realizou uma síntese dos conhecimentos de gregos e romanos. Dezesete livros de sua maior obra, *Geografia*, ainda existem atualmente. Nos dois primeiros livros ele aborda o formato e tamanho da Terra, realiza um mapeamento dela e nos outros ele realiza uma descrição do mundo conhecido na época. Em sua escrita, ele apresenta e critica os trabalhos de outros estudiosos, como o de Eratóstenes, Hiparco e Posidônio. *Geografia* de Estrabão é mais descritiva, ao contrário da produção de mesmo título de Eratóstenes que possui uma abordagem matemática da geografia (BOCCALETTI, 2019).

Além de apresentar e criticar as concepções de Posidônio e principalmente Eratóstenes, Estrabão também expõe suas ideias. A seguir segue um extrato (traduzido do inglês) de Estrabão (1854, Livro I, p. 19), em que ele fala sobre a forma da Terra e apresenta alguns argumentos para sustentar sua afirmação.

Como o tamanho da Terra foi demonstrado por outros escritores, devemos assumi-lo como garantido e receber os avanços que eles produziram. Devemos também assumir que a Terra é esférica assim como sua superfície, que os corpos tendem ao seu centro, cujo último ponto é claro para a percepção da maioria das pessoas com entendimento médio. No entanto, podemos mostrar sumariamente que a Terra é esférica, considerando que todas as coisas, mesmo as distantes, tendem ao seu centro e que todo corpo é atraído em direção ao seu centro de gravidade, isso pode ser melhor provado a partir de observações do mar e do céu, pois aqui a evidência dos sentidos e a observação comum são as únicas necessárias. Para aqueles que navegaram, a convexidade do mar é mais uma prova disso; pois eles não podem perceber luzes à distância quando esta é colocada ao nível dos olhos, mas quando colocada em uma altura elevada, elas imediatamente tornam-se perceptíveis à visão, embora ao mesmo tempo mais distantes.

Assim, Estrabão acredita em uma Terra esférica e que todos os corpos são atraídos para seu centro de gravidade. Além dos argumentos citados acima, ele adiciona um sobre a visão dos navegadores da costa, que parece se elevar conforme eles se aproximam e objetos que a princípio pareciam pequenos também começam a elevar-se. Nesta passagem ele não fala sobre um valor para o “tamanho da Terra” (medida de sua circunferência), porém no segundo livro, ele salienta sua preferência pelo valor de 180.000 estádios calculado por Posidônio.

1.5 Claudius Ptolomeu (90 - 168 d.C.)

Chamado de pai da Cartografia, as duas obras mais importantes de Ptolomeu são intituladas *Almagesto* (ca. 150 d.C.), que possui uma tradução completa e confiável em inglês feita por G. J. Toomer em 1984 e *Geografia* (séc II d.C.), que infelizmente não

possui tradução completa para uma língua moderna considerada confiável por acadêmicos (BOCCALETTI, 2019).

A obra *Almagesto* foi inicialmente escrita em grego, sob o título de *Composição matemática* e apesar de ter desaparecido da Europa Ocidental no começo da idade média, ela foi muito difundida e estudada no império bizantino e traduzida para o árabe pela primeira vez no século IX sob o nome de *al-Majasti*. A tradução do árabe para o latim, feita no século XII, foi a principal forma de recuperação da obra pela Europa Ocidental, que adaptou o título árabe para *Almagestum*, originando o nome pelo qual ela é conhecida hoje (PTOLOMEU, 1984, Página 3).

Em *Almagesto*, Ptolomeu realiza um compilado dos conhecimentos de astronomia e matemática da época. Composto de treze livros, ela aborda nos dois primeiros livros a forma, a imobilidade e a posição da Terra, que ele acreditava estar no centro do universo, o movimento dos céus (estrelas fixas) que eram ideias no geral bem aceitas desde Aristóteles (TOOMER, 1970-1990). Na área de matemática, Ptolomeu constrói uma tabela de cordas, dividindo uma circunferência em 360 partes (hoje denominados 360°) cujo diâmetro tem 120 partes. Assim, ele confecciona a tabela de $0,5^\circ$ a 180° com intervalos de meio grau relacionando cada ângulo ao comprimento da corda, denotado atualmente por crd , correspondente a ele (na notação atual, teríamos $\text{crd}(\alpha) = 120 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$) (PTOLOMEU, 1984).

Nos outros livros, ele discute sobre definição e duração do ano solar, construção de um astrolábio, distância do Sol à Terra, eclipses solar e lunar, precessão dos equinócios, desenvolvimento de um catálogo de estrelas e os últimos livros são sobre teoria planetária, onde ele demonstra os tamanhos dos epiciclos de alguns planetas e os movimentos retrógrados dos mesmos e conceitos utilizados para explicar o modelo geocêntrico.

No que diz respeito ao formato da Terra no livro *Almagesto*, uma página do livro I é dedicada para dizer que a Terra é essencialmente esférica e não de outras formas (côncava, cilíndrica, triangular, plana, quadrada, poligonal) justificando sua afirmação com fatos, por exemplo no mesmo instante de tempo, a hora registrada por observadores mais ao leste está mais atrasada em relação à localidades mais a oeste, a mudança na posição e mesmo aparição e desaparecimento de novas estrelas em função da localização do observador na Terra. No entanto, ele nada diz sobre a possibilidade de ela ter outros formatos arredondados além do esférico (PTOLOMEU, 1984, Livro I, Capítulo IV).

Apesar de *Almagesto* ser sua obra mais famosa, é em *Geografia*, sua obra mais extensa, que concentra-se nosso interesse. Ela ficou esquecida pelo ocidente até o século XIII, quando foi recuperada pelos Bizantinos, traduzida para o latim e difundida pela Europa. Dela, não resta nenhum mapa original e também nenhuma versão anterior ao século XIII.

De acordo com [Neugebauer \(1975\)](#), poucas obras exerceram tamanha influência na humanidade quanto *Geografia* de Ptolomeu. Foi nesta obra que, pela primeira vez, uma teoria matemática foi claramente utilizada para um mapeamento geográfico, com a criação de um sistema consistente de coordenadas calculadas em graus, representando um notável progresso em relação a representações anteriores em coordenadas retangulares, dando início à cartografia moderna.

Composta por oito livros, Ptolomeu utiliza o sistema desenvolvido por Hiparco, dividindo a esfera terrestre em 360 partes (hoje chamados 360 graus) e classificando os diferentes lugares de acordo com sua latitude e longitude. No total, ele classificou 8.000 localidades distintas e 300 cidades, adicionando também a duração do dia mais longo em cada uma delas. Para a circunferência da Terra, Ptolomeu utilizou a medida escolhida por Estrabão, em que a Terra teria 180.000 estádios de circunferência, o que daria em torno de 32.400 km (supondo 1 estádio igual a 180 m) e devido sua influência, este valor foi amplamente difundido pela Europa influenciando inclusive nas grandes navegações, como explicado na [Capítulo 2 \(CHAMPION, 2007\)](#).

Acredita-se que havia entre 26 e 64 mapas além dos oito livros, sendo um deles o mapa do mundo conhecido na época (denominado ecúmeno). Apesar de não haver nenhum mapa original atualmente, existem descrições bastante detalhadas que permitiram a confecção de mapa-mundi a partir desta obra. No livro I de Geografia, Ptolomeu propõe um tipo de projeção cônica (no hemisfério norte) para representar o mundo conhecido, conforme apresentada na [Figura 9](#), que correspondia no geral a uma grande porção do hemisfério norte e uma pequena parte abaixo da linha do equador. Nesta projeção, os meridianos são linhas retas que convergem para o polo norte enquanto os paralelos são arcos de circunferência concêntricos e na linha do equador há uma descontinuidade no mapa de forma que parte correspondente ao hemisfério sul não corresponde a esta projeção cônica. No hemisfério norte deste mapa, a distância entre localidades em cada meridiano é preservada, assim como a razão entre os comprimentos dos paralelos ([NEUGEBAUER, 1975](#)).

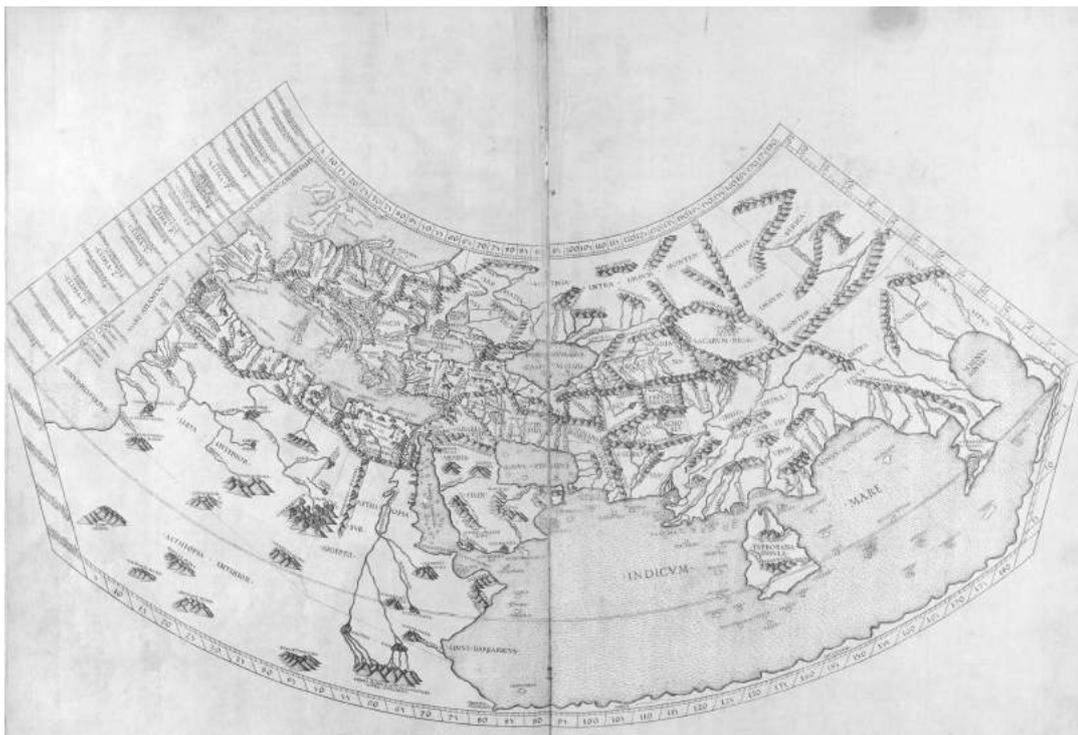


Figura 9 – Mapa-mundi da edição de 1478 do livro Geografia de Ptolomeu publicada em Roma.

Fonte: Biblioteca britânica. Disponível em: <<https://www.bl.uk/collection-items/world-map-in-a-printed-edition-of-ptolemys-geography>>.

No mesmo livro, Ptolomeu também propõe uma segunda projeção, denominada por Neugebauer de “segunda projeção cônica de Ptolomeu”. Nela, apresentada na Figura 10, os meridianos são apresentados como arcos de circunferência com concavidade para o meridiano central (o único representado em linha reta) com a intenção de obter uma representação mais natural. Nesta projeção, as localidades do meridiano central tem suas distâncias entre si preservadas, assim como as localidades nos três paralelos e a representação dos arcos são boas aproximações para os reais meridianos (NEUGEBAUER, 1975).

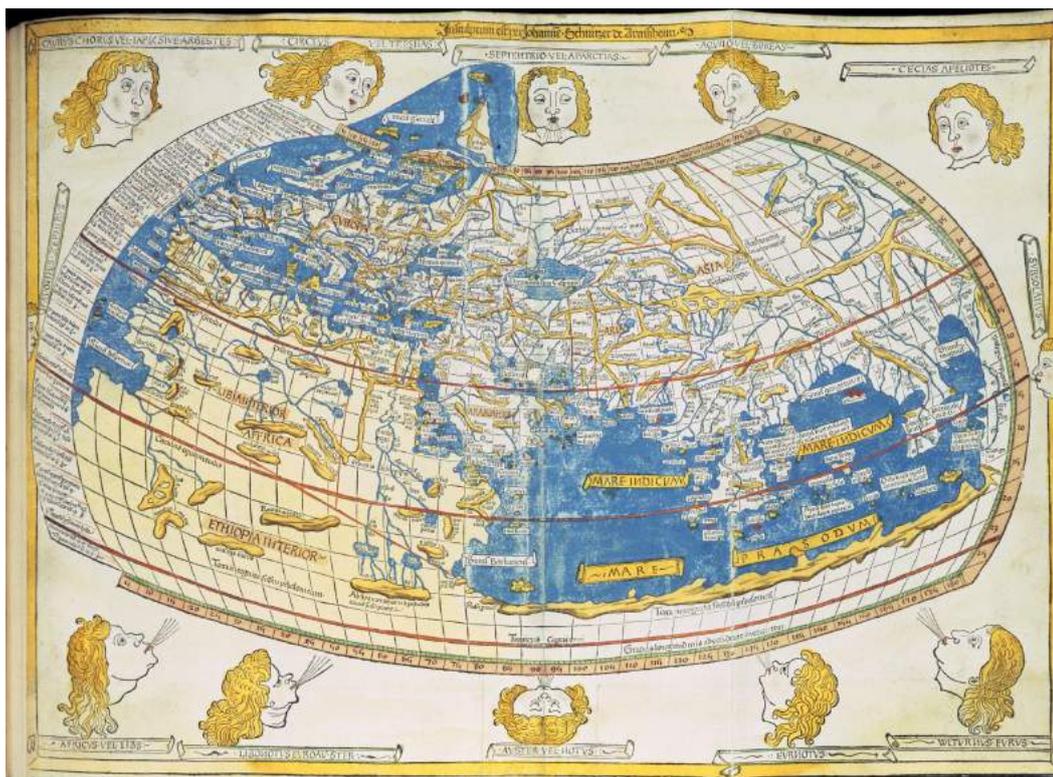


Figura 10 – Reconstrução do mapa-mundi baseado nos escritos de Ptolomeu.

Fonte: Biblioteca britânica. Link para acesso <<https://www.bl.uk/picturing-places/article/s/maps-of-the-15th-century>>.

A segunda projeção é mais fiel à realidade, entretanto é mais difícil desenhá-la devido aos seus meridianos não estarem representados em linha reta, o que levou a primeira projeção a ser mais popular perdurando como padrão até a projeção de Mercator ser desenvolvida, projeção esta que ainda hoje é utilizada por muitos países para representar o mapa-mundi.

De Ptolomeu vem a convenção de orientar os mapas com o norte acima do sul, o leste à direita, a noção de escala e o desenvolvimento de projeção de superfícies esféricas (CHAMPION, 2007).

2 Grandes Navegações (Séculos XV e XVI)

Durante os séculos XV e XVI compreendem o período da história europeia, principalmente ibérica, denotado como período das Grandes Navegações, em que principalmente portugueses e espanhóis buscavam encontrar uma rota alternativa para as Índias a fim de comprar especiarias. Esta procura de rotas alternativas resultou na descoberta de uma porção de terra até então desconhecida pelos europeus hoje denominada América. A descoberta do “novo continente” só foi possível pelo conhecimento bem difundido do formato redondo da Terra.

2.1 O conhecimento da esfericidade da Terra no século XV

Durante o século XV, os países europeus estavam em busca de uma rota alternativa à Índia, já que a rota conhecida era dominada por italianos, mais especificamente da cidade de Veneza. Desta forma, iniciou-se o processo de expansão marítimo europeu.

Assim, durante este século Portugal financiou expedições com o objetivo de alcançar as Índias contornando a África. Enquanto isto, Cristóvão Colombo (1451-1506) implorava a todas as pessoas de alguma importância para aceitar realizar a rota pelo oeste, considerando que o mundo era redondo. Ele obteve apoio de algumas pessoas influentes, como Paolo Toscanelli, que teria anteriormente enviado uma carta em 1474 que chegou até o rei Afonso V (1432-1481) de Portugal descrevendo planos para atingir as Antilhas e a Ásia navegando a oeste.

Em 1484, Colombo submeteu um pedido para que a coroa portuguesa financiasse sua viagem às Índias pelo oeste. Este pedido foi negado por um comitê em 1485. Segundo [Eliot Morison \(1942\)](#), mesmo com a negação o rei de Portugal Dom João II (1455-1495) ainda cogitava financiar sua expedição. É importante mencionar que ao contrário do que citou o autor Washington Irving em 1828 na bibliografia intitulada *A History of the Life and Voyages of Christopher Columbus* que escreveu de Colombo, em momento algum a esfericidade da Terra foi posta em dúvida pelo comitê. Na verdade, os questionamentos centraram-se principalmente na veracidade dos cálculos apresentados por Colombo para computar a distância até as Índias pelo oeste e se uma viagem de tal magnitude seria viável. Ele, então, partiu para a Espanha devido a dívidas que possuía em Portugal ([ELIOT MORISON, 1942](#)).

Após chegar à Espanha, Colombo buscou financiamento para seu plano, assim como havia tentado em Portugal. Sua primeira audiência com a coroa espanhola foi em 1486 e seus argumentos foram analisados por um comitê. Nesta época, as obras de Claudius

Ptolomeu eram referência entre os geógrafos. Ptolomeu acreditava que o planeta era coberto por água, exceto uma grande quantidade de terra habitada chamada de ecúmeno, que se estendia por 180° na direção leste-oeste. Assim, quando Cristóvão Colombo tentou convencer a coroa espanhola a financiar sua expedição, ele recebeu argumentos dos que se opunham à realização da expedição de que a circunferência da Terra era muito grande e a distância a ser percorrida não permitiria que a viagem fosse feita com sucesso. O comitê não chegou a um consenso e como a Espanha estava passando por um período de guerra, Colombo não obteve resposta por parte da coroa (RUSSELL, 1991).

Em 1488, enquanto estava na Espanha, Colombo escreveu uma carta ao rei de Portugal solicitando a renovação de sua aplicação e permiti-lo visitar Lisboa sem correr riscos de ser preso, visto que ele possuía dívidas em solo português. O rei o respondeu praticamente implorando para que ele voltasse imediatamente a Portugal e garantindo que ele não seria preso em nenhuma circunstância. No entanto, após a chegada de Bartolomeu Dias ao Cabo de Boa Esperança no extremo sul da África neste mesmo ano, a rota marítima para as Índias estava então aberta a Portugal. Portanto, a coroa portuguesa perdeu o interesse na proposta de Colombo em aventurar-se a oeste para tentar atingir as Índias (ELIOT MORISON, 1942).

Colombo voltou então seus esforços para convencer a rainha Isabel e o rei Fernando da Espanha a financiar sua expedição para alcançar a Ásia a fim de atingir as Índias pelo oeste. Ele dedicou-se a apresentar fontes e realizar cálculos que reduzissem a quantidade de graus ocupada pelo oceano e o tamanho do arco de circunferência correspondente a um grau. Para tanto, ele utilizou os dados do livro *Imago Mundi* de Pierre D'Ailly (1350-1420), que afirmava que a porção de terra habitada correspondia a 225° de extensão leste-oeste restando, portanto, 135° para o oceano. Além disso, ele também utilizou de relatos das viagens de Marco Polo (1254-1324), realizou algumas subestimações e superestimações em dados, considerou que partiria das Ilhas Canárias e concluiu que era necessário percorrer um arco correspondente a apenas 60°. Por fim, ele ainda realizou algumas manipulações no tamanho de um arco de circunferência de tal forma que após tantas mudanças, segundo ele a distância entre as ilhas Canárias e o Japão valia 4.450 km, sendo que a distância real é 22.000 km.

Após seus esforços, Colombo finalmente recebeu a aprovação da coroa em abril de 1492 e sua expedição partiu em agosto deste mesmo ano, chegando à América, mais especificamente onde hoje é a República Dominicana, em outubro de 1492. Até a data de seu falecimento, em 1506, Colombo acreditou ter chegado à Ásia (RUSSELL, 1991).

Um de seus filhos, Ferdinando Colombo, escreveu um livro em que retrata a biografia do pai. A tradução deste livro para o inglês, encontra-se disponível no seguinte link [The Life Of The Admiral Christopher Columbus By His Son](#).

No ano em que Colombo chegou à América, o alemão Martin Behaim (1459-

1507), que supõe-se ter conhecido Colombo, construiu o globo mais antigo ainda existente atualmente, estando exposto no museu germânico de Nuremberga na Alemanha. Behaim participou de uma das expedições marítimas portuguesas entre 1484 e 1485.

Denominado “maçã da terra”, este globo provavelmente foi apresentado antes de Colombo chegar à América. Nele constam as últimas descobertas da época, incluindo a de Bartolomeu Dias relatada alguns parágrafos acima.

A construção deste globo foi inspirada na obra *Geografia* de Ptolomeu e nas hipóteses de Marco Polo. Desta forma, devido ao tamanho da Terra subestimado por Ptolomeu e dos relatos de Marco Polo, os continentes apresentam-se maiores e mais próximos do que são na verdade (BNF, s.d.b)¹.



Figura 11 – Foto do globo terrestre construído por Martin Behaim.

Fonte: Biblioteca Nacional da França. Disponível em: <http://expositions.bnf.fr/marine/grand/por_352.htm>.

2.2 O batismo do “Novo Mundo”

Embora Colombo tenha sido o primeiro europeu a chegar na América no século XV, o continente foi batizado em homenagem a outro explorador europeu, Américo Vespúcio. Nascido em Florença no começo da década de 1450, Vespúcio trocou a Itália por Sevilha na Espanha em 1492. Em 1499, a Espanha retirou o monopólio de Colombo das viagens à América e Vespúcio partiu em sua primeira expedição ao continente. Sua segunda expedição foi em 1501, desta vez por Portugal. Dessas expedições, ele enviou

¹ s.d. = Publicação sem data.

três cartas a um amigo, descrevendo suas experiências e em nenhuma delas ele anuncia a descoberta de um novo mundo, mas sim de uma parte desconhecida da Ásia (LESTER, 2009).

A escolha do nome América para o novo mundo advém de um trabalho publicado por dois autores em 1507. Mathias Ringmann e Martin Waldseemüller publicaram um livreto intitulado *Cosmographiae Introductio*. Neste livreto, o novo mundo é descrito como uma porção de terra totalmente banhada pelo oceano e distante da Ásia. É neste texto que há a sugestão do nome América, supondo-se ser a “quarta parte do mundo” (as outras três são África, Europa e Ásia) (LEHMANN, 2013). Em conjunto com este texto, há um mapa-mundi que reunia os conhecimentos em cartografia dos últimos 20 anos com os conhecimentos advindos da “descoberta” do novo mundo. Este mapa foi o primeiro a apresentar o continente americano nomeado como América (WHITFIELD, 1994).

O título original do mapa em latim é *Universalis cosmographia secunda Ptholemei traditionem et Americi Vespucci aliorum que lustrationes* (Um desenho de toda a Terra seguindo a tradição de Ptolomeu e as viagens de Américo Vespúcio e outros), mas ele é conhecido como Mapa Waldseemüller.

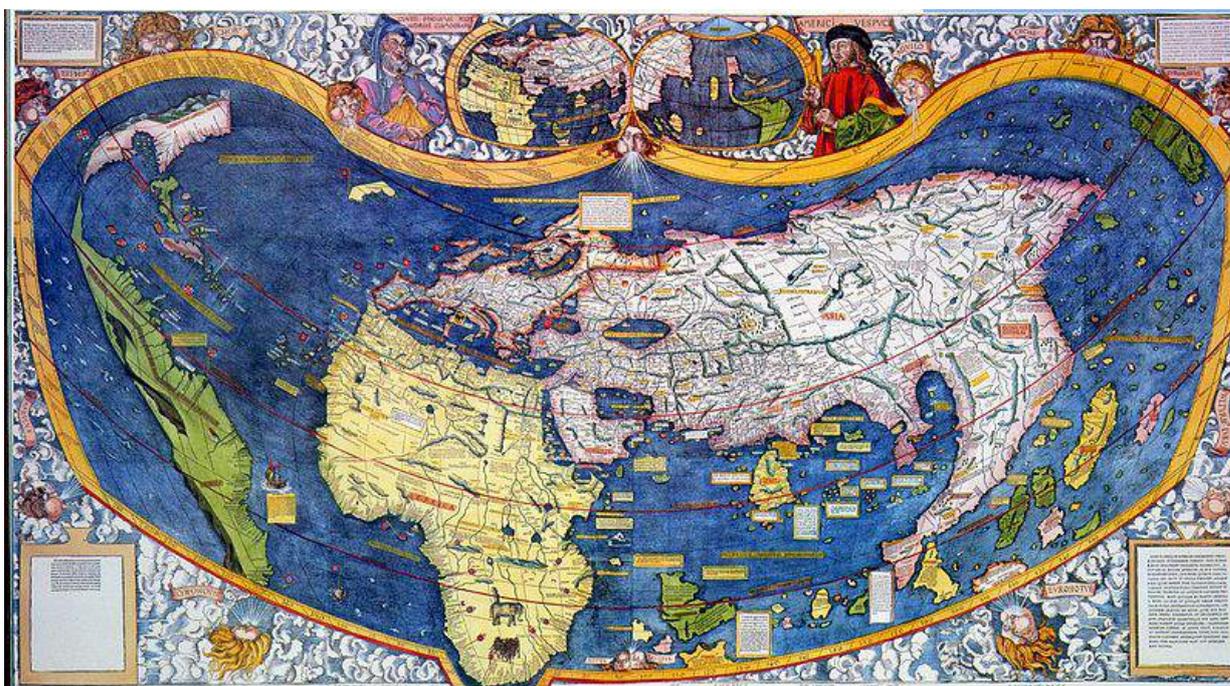


Figura 12 – Mapa-mundi confeccionado por Waldseemüller

Fonte: James Ford Bell Library, University of Minnesota. Disponível em: <<https://apps.lib.umn.edu/bell/map/WALD/WALL/lgwall.html>>.

Diferentes fontes, dentre elas a própria biblioteca do Congresso Nacional dos

Estados Unidos que hospeda o mapa de Waldseemüller, afirmam que o batismo do novo continente como América vem do fato que foi Américo Vespúcio que percebeu que tratava-se de um novo continente e a obra de Waldseemüller e Ringmann alinhou-se a suas ideias (LIBRARY OF CONGRESS, 2022).

Toby Lester, autor do livro *The fourth part of the World*, afirma em uma entrevista realizada pela BBC que os criadores deste mapa nomearam o novo continente como América pois eles acreditavam que Américo Vespúcio tinha sido o primeiro europeu a atingir o continente e que Cristóvão Colombo, por sua vez, havia chegado apenas às ilhas do Caribe. Ele ainda adiciona ser muito curioso que os autores deste mapa tenham retratado a América desta forma, pois nesta época, muitas pessoas pensavam que a América fazia parte da Ásia. Já o curador da biblioteca do Congresso Nacional dos EUA, local onde o mapa está atualmente, diz que possivelmente existia alguma relação entre Ringmann e Vespúcio (LLORENTE, 2018).

LEHMANN (2013) realizou uma análise dos termos empregados por Vespúcio em suas cartas para verificar se este considerava as terras recentemente descobertas por europeus um novo continente. Ele concluiu, no entanto, que Vespúcio acreditava que essas terras faziam parte do continente asiático. Ele apresenta um trecho da primeira carta enviada por Vespúcio em 1500 que torna essa conclusão indubitável, pois neste trecho Vespúcio afirma que “Após ter navegado em torno de 400 léguas ao longo da costa, concluimos que esta era terra continental, que eu digo ser o limite da Ásia pela parte oriental e o início da parte ocidental...” (BANDINI, 1745 apud LEHMANN, 2013).

De acordo com o autor, um dos fatores que contribuem para esta crença de que Vespúcio sabia se tratar de um novo continente, é a expressão italiana *terra ferma* na carta de Vespúcio *Mundus Novus* ter sido traduzida para o latim como *continens*, que no início do século XVI significava exclusivamente uma porção de terra conectada ao continente asiático e não o nosso conceito atual de continente.

Para LEHMANN (2013), esta crença de que Vespúcio acreditava que a América era um continente separado da Ásia surgiu de historiadores modernos. Ele também diz que não há nada além de especulação sobre os motivos que levaram Ringmann e Waldseemüller a retratar América como uma terra separada da Ásia. Por fim, ele afirma que a surpreendente forma acurada com que Waldseemüller representou a costa leste americana não pode ser atribuída às cartas de Vespúcio.

2.3 A comprovação empírica da forma arredondada da Terra

Uma outra personalidade relevante desta época, particularmente em relação à esfericidade da Terra, foi Fernão de Magalhães (1480-1521), responsável por comandar a primeira circum-navegação que se tem registro. Magalhães era um nobre português e

foi pajem da rainha D. Leonor, consorte de João II de Portugal. A serviço de Portugal, ele participou de expedições à Índia entre 1505 e 1511. Após uma missão ao Marrocos em 1514, ele recebeu acusações de vendas de espólio de guerra aos inimigos, gerando desconfiança no rei Manuel de Portugal, que rejeitou as petições de Magalhães e disse a ele para oferecer seus serviços em outro lugar. Em 1517, Magalhães desnaturalizou-se e decidiu servir ao imperador Charles V da Espanha (DOMINGUES, 2022).

Foi a serviço da Espanha que em setembro de 1519 iniciou-se a primeira circum-navegação, liderada por Fernão de Magalhães, partindo da Espanha com um total de cinco navios e tripulação em torno de 250 homens, com a intenção de atingir o oriente navegando em direção oeste atravessando a América do Sul. A América foi atravessada por uma região hoje denominada estreito de Magalhães, localizado na Patagônia. Este estreito conecta os oceanos Atlântico e Pacífico e era, até a construção do canal do Panamá no século XX, a única rota utilizada por navios para conectar o leste e oeste do mundo através do mar (BORUCHOFF, 2017; UNESCO, 2017).

Ao atingir uma ilha nas Filipinas em 28 de março de 1521, um escravo de Magalhães, Henrique de Malaca, de origem possivelmente da Malásia, conseguiu comunicar-se com os nativos desta ilha. Talvez ele tenha sido a primeira pessoa a realizar a primeira circum-navegação, em 1521, um ano antes da expedição retornar à Espanha. Algumas semanas depois deste evento, Magalhães foi morto em uma batalha com o povo nativo de outra ilha nas redondezas. Esta expedição teve fim em setembro de 1522, sob o comando de Juan Sebastian de Elcano em um único navio e com 31 homens, sendo 18 europeus e três asiáticos. Ela é a confirmação empírica da forma redonda da Terra (DOMINGUES, 2022; GUILLEMARD, 1890).

Um mapa com a rota feita pela expedição de Magalhães pode ser consultado abaixo. Este mapa discrimina a etapa comandada por Magalhães (em vermelho) e Elcano (em azul).

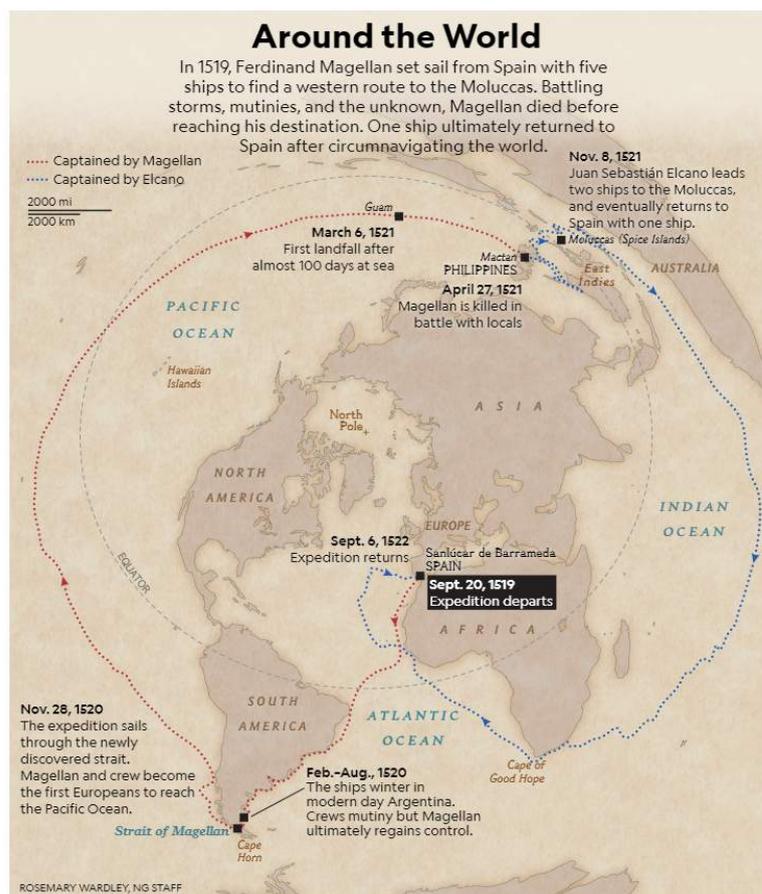


Figura 13 – Rota da primeira circum-navegação realizada entre 1519 e 1522.

Fonte: National Geographic. Disponível em : <<https://www.nationalgeographic.com/culture/article/magellan-first-sail-around-world-think-again>>. Acesso em: 20 jun 2022.

Antonio Pigafetta, um dos sobreviventes da circum-navegação comandada por Fernão de Magalhães, escreveu um diário de bordo sobre a viagem e o publicou entre 1523 e 1524. O livro com os relatos pode ser consultado através seguinte link [The First voyage round the world, by Magellan](#).

2.4 O mapa que revolucionou as navegações

Antes das formas modernas de geolocalização, que auxiliam a traçar o trajeto mais otimizado entre dois pontos da Terra, a determinação do trajeto a ser executado na navegação era feita de outras formas. Uma das formas, proposta pelo matemático português Pedro Nunes em 1537, foi o conceito de loxodromia. Isto é, o caminho entre dois pontos que cruza todos os meridianos com ângulo constante, conforme apresentado na [Figura 14](#). Este conceito demonstrou-se de muita utilidade para a navegação, pois desta forma, para seguir uma loxodromia, basta manter ângulo constante entre a direção em

que se navega e o polo norte/sul real ou magnético. Isso pode ser feito com uma bússola, por exemplo.

Como ainda não existia o conceito de função nesta época, diversas tabelas de loxodromia foram produzidas, apresentando caminhos específicos e este tornou-se um problema que interessou diversos pesquisadores, devido a sua utilidade para a navegação. Um livro em específico foi publicado por Nunes em 1566 ensinando em detalhes como calcular uma tabela de loxodromias, como desenhar estas linhas em um globo terrestre e como utilizá-las com propósitos navegacionais. Nesse livro, foram introduzidas as ideias fundamentais de loxodromias, contudo Nunes não avançou para além da aplicação prática, nem explicou como desenhá-las em mapas (LEITÃO; ALVES GASPAS, 2014).

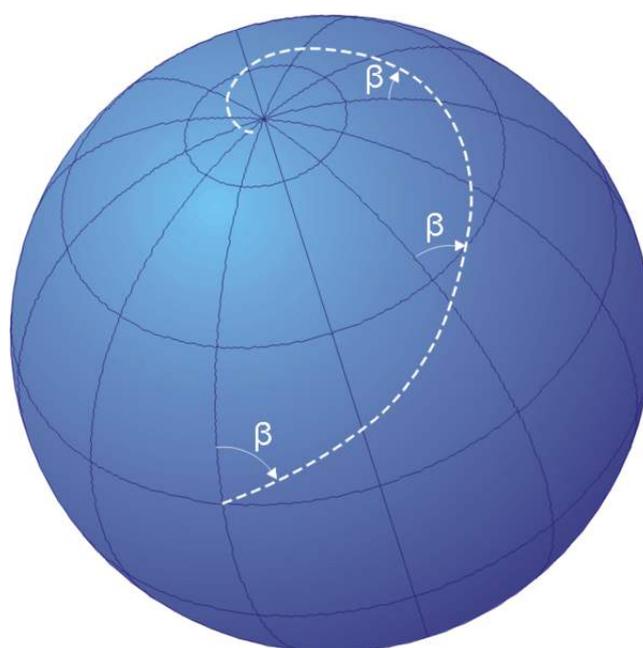


Figura 14 – Imagem de uma loxodromia espiralando em direção ao Polo Norte.

Fonte: Imagem feita por Joaquim Alves Gaspar, Wikimedia Commons. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Loxodrome.png>>.

Foi Gerardo Mercator (1512-1594), um dos maiores cartógrafos da Renascença, que apresentou o primeiro mapa-mundi dito bem adaptado para a navegação em 1569. Denominado *Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usus Navigantium Emendate Accommodata* (Nova e mais completa representação do globo terrestre propriamente adaptada para uso na navegação), este mapa apresenta as loxodromias como linhas retas. Sendo até hoje uma das projeções mais conhecidas e utilizadas do mundo, a denominada “projeção de Mercator” não obteve tanto sucesso na época em que foi produzida (LEITÃO; ALVES GASPAS, 2014; BNF, s.d.c).

A Figura 15 exhibe o mapa apresentado por Mercator em 1569. Nela, é possível

visualizar que o conhecimento do território americano ainda era limitado e a existência da Oceania ainda era desconhecida pelos europeus. Para mais detalhes sobre as principais características e propriedades da projeção de Mercator, é sugerida a leitura da [seção 7.5.2](#).

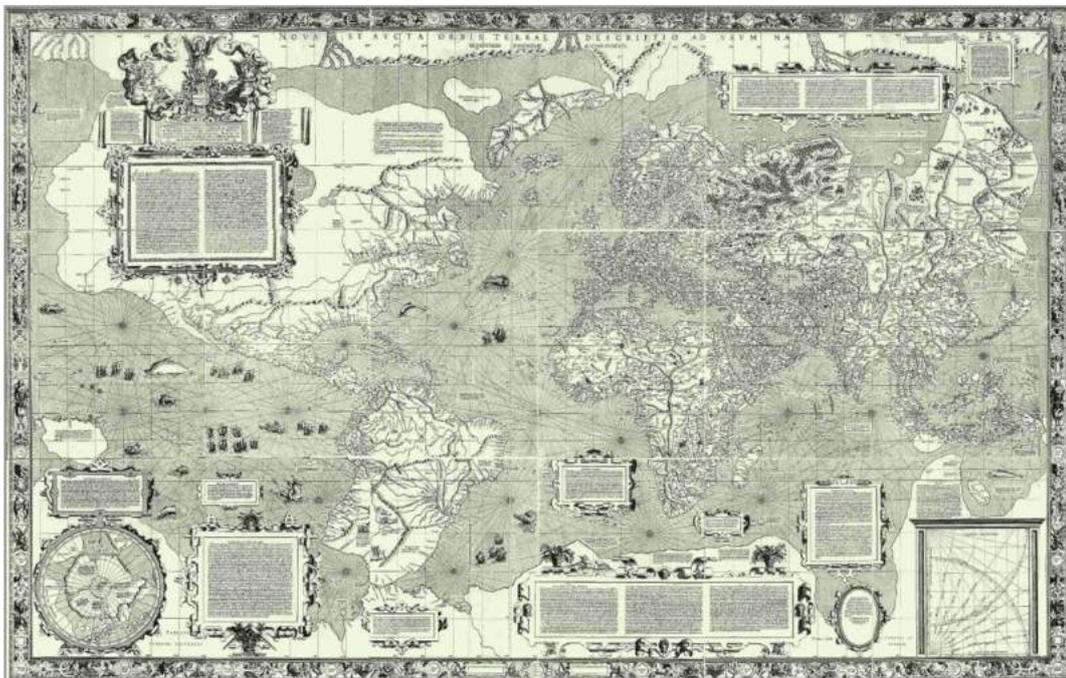


Figura 15 – Mapa-mundi de Mercator

Fonte: Imagem feita por Joaquim Alves Gaspar, Wikimedia Commons. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercator_1569.png.

2.5 Para saber mais sobre a representação da Terra ao longo dos séculos

Nesses dois primeiros capítulos, foi fornecido o embasamento histórico necessário em relação à concepção da forma da Terra em dois períodos para as sequências didáticas propostas no [Capítulo 6](#) e no [Capítulo 7](#). Existem diferentes fontes de boa qualidade que fornecem um panorama geral sobre os diferentes avanços feitos pela humanidade em torno deste tema e temas relacionados. Muitas delas não estão em português, o que não impede de consultá-las graças à ferramenta de tradução do Google Chrome. Abaixo seguem algumas fontes que podem ser relevantes.

- Biblioteca Nacional da França - O mundo das esferas. Linha do tempo expondo acontecimentos relevantes sobre a representação da Terra e assuntos relacionados. Esta linha do tempo faz parte de uma exposição virtual riquíssima feita pela biblioteca

que aborda os 2500 anos da história da representação da Terra e do Universo. Disponível em: [Bibliothèque Nationale de France: Le monde en spheres](#)

- Centro de Referência de Ensino de Física. Site hospedado pela UFRGS com o objetivo de responder a dúvidas relacionadas a física, com uma quantidade abundante de páginas dedicadas à forma da Terra. Disponível em: [Pergunte ao CREF](#)
- Planet Terre: Ressources scientifiques pour l'enseignement des sciences de la Terre et de l'Univers. Hospedado pela Universidade de Lyon e pela École Nationale Supérieure de Lyon (ENS), este site fornece diversos artigos detalhados sobre a concepção da forma da Terra durante diversos momentos da história, especialmente sobre eventos após as Grandes Navegações. Disponível em: [Planet Terre: Ressources scientifiques pour l'enseignement des sciences de la Terre et de l'Univers](#)

3 Movimento Terra-plana

Este capítulo visa abordar o *terraplanismo*, explicando seu surgimento no século XIX, sua origem falsamente atribuída à Idade Média, o seu ressurgimento na atualidade e as características deste movimento atual, do público atraído por essa teoria da conspiração, suas justificativas para esta crença, o crescimento do movimento e as possíveis causas deste crescimento.

3.1 O mito da Terra plana na Idade Média

Diferentes fontes afirmam que na idade média a Igreja católica defendia o formato plano para a Terra. O artigo de [Oliveira da Rocha \(2017\)](#) realiza uma compilação de excertos de diferentes livros de autores contemporâneos que apresentam este posicionamento.

Embora tenha havido alguns indivíduos católicos na idade média que possuíam a concepção citada acima, estes eram casos isolados e a posição endossada pela igreja medieval era de uma Terra esférica. Por exemplo, segundo [BNF \(s.d.c\)](#), o diálogo *Timeu* de Platão, escrito em torno de 360 a.C., obteve um sucesso relevante durante a idade média pois ele postulava um deus criador que girava o mundo em forma de esfera.

Ao mesmo passo que Rocha fornece extratos de autores contemporâneos que defendem a crença na Terra plana durante a idade média, ele também fornece escritos científicos, literários e provas iconográficas produzidos por pensadores deste período que evidenciam, na verdade, que a crença no formato esférico da Terra era algo bem estabelecido entre os pensadores e a Igreja Católica. Dentre os autores citados por ele destacam-se Agostinho de Hipona (351-430), considerado um santo para a Igreja católica e João de Sacrobosco (1195-1256) através de uma passagem de seu livro “O Tratado da Esfera”, livro-texto de astronomia utilizado em diferentes universidades por mais de 400 anos ([OLIVEIRA DA ROCHA, 2017](#), p. 108).

Quanto a imagens, há diversas obras medievais escritas por clérigos que representam a Terra redonda. Por exemplo, a [Figura 16](#), extraída da enciclopédia denominada “L’image du monde” escrita pelo poeta e padre Gossuin de Metz em 1246. Esta figura ilustra dois personagens que partem de um mesmo ponto na superfície terrestre em sentidos opostos e encontram-se nas antípodas.

A obra de Metz foi produzida a partir de um tratado em latim “Imago Mundi” escrito por Honorius Augustodunensis (1070-1140), um presbítero, monge e autor influente

da idade média, sobretudo entre os beneditinos ¹. Sendo sua obra mais copiada e lida, este tratado de Honorius, em conjunto com outros escritos por ele, tinha como objetivo explicar os quatro primeiros capítulos do livro Gênesis com esta obra em específico abordando o Universo, a natureza geográfica e física do mundo (BNF, s.d.a; CHIÓ SERRA CARVALHO, 2008).

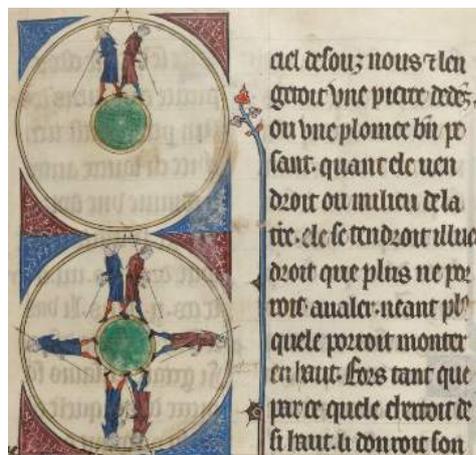


Figura 16 – Ilustração retirada do livro “L’image du monde”, escrito no século XIII.

Fonte: Biblioteca Nacional da França. Disponível em: <http://expositions.bnf.fr/monde-e-n-spheres/grand/mes_057.php>.

Além da figura acima, há outras imagens retiradas de obras medievais retratando o formato esférico da Terra na idade média retiradas da mesma referência que podem ser acessadas clicando no link a seguir da exposição da Biblioteca Nacional da França [LA SPHÈRE DANS L’OCCIDENT MÉDIÉVAL](#).

Conforme dito anteriormente, existiram autores cristãos que ocupavam um papel periférico na Igreja Católica e afirmavam que a Terra era plana a partir de interpretações literais de metáforas, por exemplo “o fim vem sobre os quatro cantos da Terra” (BÍBLIA, 2011, Ezequiel 7,2). Um deles é Lactâncio (265 - 345) que após ser praticamente ignorado na Idade Média, suas contribuições ganharam destaque a partir do século XIX, passando a serem valorizadas e ignorando-se o fato de suas obras terem sido condenadas por heresia na Idade Média (RUSSELL; BISHOP, 1991, 2008 apud OLIVEIRA DA ROCHA, 2017, p. 117). Um outro exemplo é o monge cristão Cosme Indicopleustes (séc. VI), autor de *Topografia Cristiana*, que descreve o Universo a partir de uma interpretação literal da Bíblia denunciando a interpretação metafórica da Bíblia a fim de sustentar a crença de que a Terra era um globo (GARWOOD, 2007).

Segundo Garwood (2007, p. 10), embora raros os autores que acreditavam na

¹ A ordem Beneditina é a mais antiga da igreja católica.

forma plana da Terra entre os séculos I e VIII d.C., os escritores vitorianos² consideravam o posicionamento de Lactânncio e Cosme como pensamento padrão de um indivíduo da idade média. Isto corroborou para a difusão equivocada que arrasta-se até os dias atuais de que na idade média acreditava-se que a Terra era plana.

Já David Noble argumenta, no prefácio do livro de Russell (1991), que o historiador Russell chama de “o moderno erro da Terra Plana” o equívoco difundido por alguns autores recentes ao afirmarem que na época medieval acreditava-se que a Terra era plana e que graças a coragem e racionalidade de Cristóvão Colombo em sua viagem realizada em 1492, a humanidade pôde enfim liberar-se das superstições da Igreja católica, sendo que na verdade durante toda a idade média os pensadores acreditavam em uma Terra redonda.

Russell (1991, p. 43) acredita que “o moderno erro da Terra Plana” iniciou com Washington Irving, através da publicação do livro “A Vida e as Viagens de Cristóvão Colombo” (tradução livre) em 1828, sendo ele o responsável por difundir que Colombo precisou vencer as superstições de uma Terra plana ao demonstrar que ela é redonda.

Um outro grande responsável pelo estabelecimento deste mito na academia é o francês Antoine Jean Letronne (1787 - 1848), sobretudo devido a ele possuir uma maior influência sobre os acadêmicos que Irving. Ele publicou um artigo intitulado “Sobre as Opiniões Cosmográficas dos Padres da Igreja” (tradução livre) em 1834 em que ele afirmava que até recentemente a ciência fora baseada na Bíblia e que astrônomos eram obrigados a acreditar que a Terra era uma superfície plana suspensa no espaço. Além do mais, Letronne também diz nesse artigo que durante a época de Colombo e Magalhães, as teorias *terraplanistas* eram dominantes e foram descontinuadas apenas com as descobertas de Kepler, Huygens e Newton (RUSSELL, 1991, Cap. 4).

O erro espalhou-se entre 1870 e 1920, quando a religião tornou-se símbolo de superstição pelos intelectuais da época e a ciência o único caminho da verdade. Foi nesta época então que a viagem de Colombo tornou-se símbolo do poder da demonstração empírica e da superficialidade da imaginação religiosa. Desde a década de 1920 há um esforço entre os historiadores em mitigar este mito do “moderno erro da Terra Plana” (RUSSELL, 1991, Prefácio).

3.2 O surgimento do terraplanismo no século XIX e sua reinauguração no século XX

A fundação do Movimento da Terra Plana ocorre com Samuel Birley Rowbotham (1816 - 1884) ao lançar um panfleto na década de 1840 transformado em livro em 1865. É

² Era vitoriana: período de 1837 a 1901, correspondente ao reinado da rainha Vitória no Reino Unido

possível acessar o livro através do seguinte link [Zetetic Astronomy: Earth Not a Globe](#). Através do pseudônimo de Parallax, ele descreve experimentos no canal de *Old Bedford* na Inglaterra a fim de descobrir se a água apresentava algum grau de convexidade, pois ele acreditava que se a Terra fosse redonda, a superfície da água em rios, lagos ou oceanos apresentaria algum grau de convexidade.

Após a realização de diversos experimentos, ele concluiu que a Terra é plana e a partir de “resultados experimentais”, passagens bíblicas e cálculos, ele argumentou que: a Terra está no centro do universo, é um disco plano, cercado por uma imensa barreira de gelo e no centro do disco localiza-se o polo norte. Além disso, a Terra deveria ser estacionária, com o Sol a uma distância de 400 milhas (640 km) de Londres executando uma órbita em espiral com período de 24 horas.

Em relação aos diferentes eventos que ocorrem na Terra ao longo do ano, Parallax fornece as mais diversas justificativas. Sobre as estações do ano e o comprimento variável dos dias ao longo do ano, as explicações são as seguintes: a órbita solar seria concêntrica e o seu raio seria alterado de acordo com a época do ano, de forma que durante o verão no Reino Unido, sua órbita seria mais próxima do polo norte e mais distante durante o inverno. Quanto aos eclipses, a explicação para o eclipse solar é análoga à realidade, contudo para o lunar, a justificativa é que seria resultado do movimento de um corpo escuro e não luminoso. Por fim, quanto ao nascer e por-do-sol, a explicação fornecida é que o efeito do Sol aproximando-se do horizonte é devido a uma “lei especial perspectiva” e ilusão óptica (GARWOOD, 2007, Cap. 2). Ele define esta lei perspectiva através de exemplos, onde ele apresenta situações em que corpos (balão, bando de pássaros, sequência de postes de luz de mesma altura) parecem descer conforme se aproximam do horizonte, mesmo mantendo a mesma altitude em relação ao solo (PARALLAX, 1865, p. 85).

Quanto ao desaparecimento de navios quando aproximam-se do horizonte, a observação seria efeito dessas leis da perspectiva e refração. Enfim, sobre a circunavegação, Parallax afirma que ela aconteceria ao viajar ao redor da borda do disco.

Em 1893, um outro *terraplanista* chamado Orlando Ferguson confeccionou o mapa representado abaixo cujo título é, em tradução livre, “Mapa da Terra quadrada e estacionária: quatrocentas passagens na Bíblia que condenam a teoria globular, ou a Terra voadora, e nenhuma (passagem) sustenta isso; este mapa é o mapa bíblico do mundo”. O mapa seria uma variação de um mapa da Terra plana, com quatro anjos, um em cada canto da Terra, uma clara referência ao novo testamento da bíblia (Apocalipse 7,1).

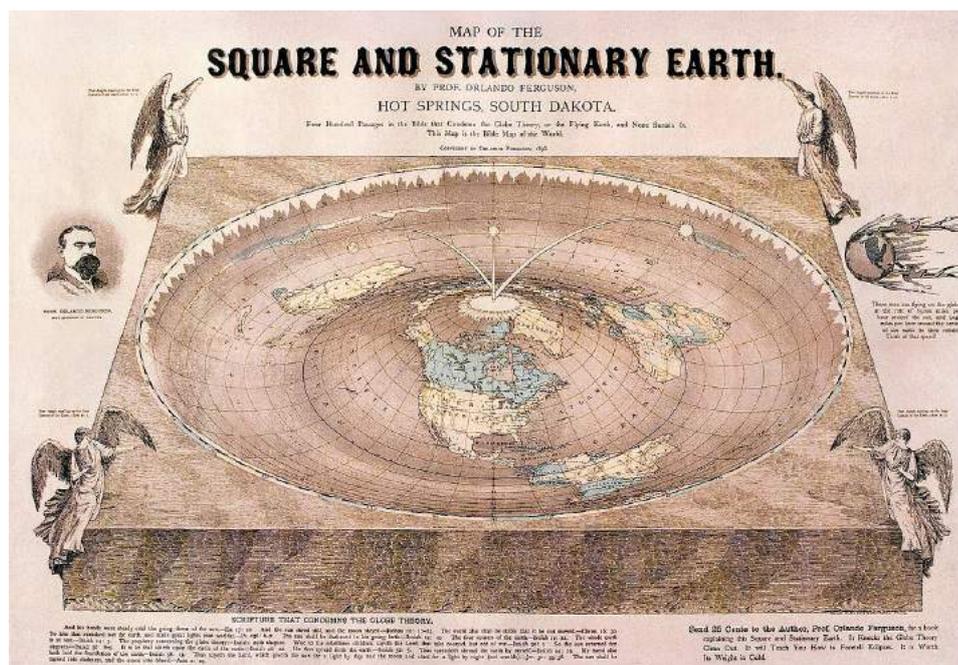


Figura 17 – Mapa da Terra plana criado em 1983 por Orlando Ferguson.

Fonte: The History Blog, atualmente Library of Congress 2011594831, G3201.A67 1893 .F4, Domínio público dos Estados Unidos. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Orlando-Ferguson-flat-earth-map_edit.jpg>.

O próximo defensor relevante do modelo da Terra plana do século XIX chamava-se Wilbur Glenn Voliva (1870-1942). Ele foi escolhido como líder da Igreja Cristã Católica Apostólica da cidade de Zion, nos EUA e enquanto líder da igreja, ele controlava a cidade. Assim, Voliva instaurou em 1923 o ensino do modelo da Terra plana por escolas paroquiais da cidade de Zion. Para o mapa-mundi, os professores destas escolas utilizavam o mapa da Figura 31. Além do ensino do *terraplanismo* nas escolas, Voliva foi o primeiro pastor a adquirir uma estação de rádio e a utilizou para difundir a crença na Terra plana mundo afora, visto que o sinal era extremamente potente (GARWOOD, 2007, Cap. 6)

Além do que já foi citado acima sobre Voliva, de acordo com o professor LANG DA SILVEIRA (10 set 2017), Voliva criou o mapa da figura abaixo. Nela consta o diâmetro do Sol, de 27 milhas (43 km) e a distância de 3 mil milhas (5.000 km) do Sol à superfície da Terra plana. Ele chegou a este valor utilizando-se do fato de que em certa localidade da Terra, que denominaremos ponto *B*, o Sol se encontra a uma elevação de 45° . Estando o ponto *B* a uma distância de 3 mil milhas do ponto em que o Sol está a pino, que denominaremos ponto *A*, ele concluiu que a distância entre o ponto *A* e o Sol deveria ser também de 3 mil milhas. A justificativa desse valor é que os pontos *A*, *B* e Sol formam um triângulo retângulo e isósceles, portanto a distância entre *A* e *B* é igual a distância entre *A* e o Sol.

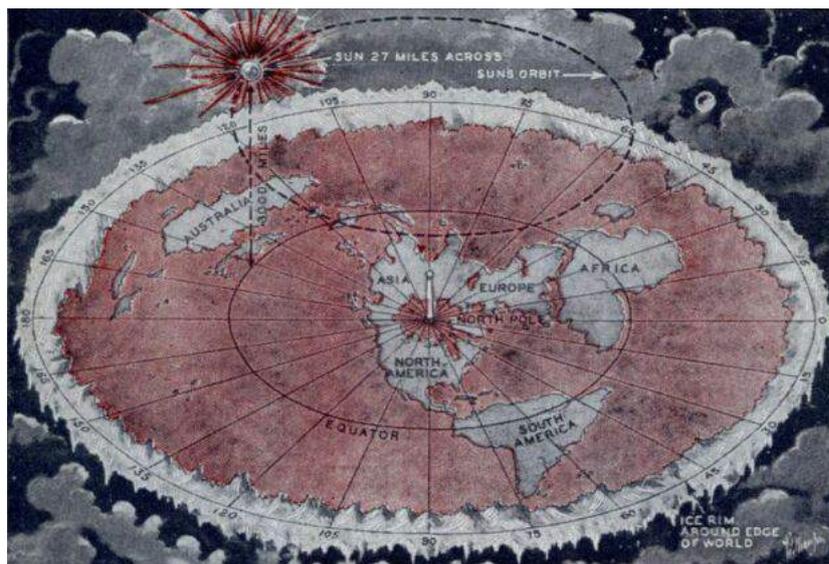


Figura 18 – Mapa da Terra plana confeccionado por Voliva com a órbita solar incluída.

Fonte: The Flat Earth Society. Disponível em: <<https://theflatearthsociety.org/home/index.php/featured/maps>>.

Segundo Garwood (2007, Cap. 7), apesar do crescimento da influência de movimentos fundamentalistas e pentecostais durante a primeira Guerra Mundial, é improvável que as ações de Voliva tenham gerado algum efeito fora dos limites da cidade de Zion. Até mesmo na própria cidade a Igreja abandonou o ensino da Terra plana sob a justificativa de ser uma crença pessoal e não doutrina oficial.

A próxima pessoa que será retratada é Samuel Shenton (1903 - 1971), considerado o fundador da *Flat Earth Society* em 1956, descendendo diretamente da *Universal Zetetic Society* criada por Rowbotham. Segundo a autora Garwood (2007, Cap. 7):

Shenton denominava-se frequentemente como um heroico pesquisador em uma busca solitária. No entanto, ele permaneceu um membro ordinário do público, um estranho para o mundo da ciência profissional, então ele emoldurou sua história como uma conspiração narrativa sobre seus esforços para guardar sua invenção.

Durante a corrida espacial na guerra fria, ele apresentou várias declarações conspiratórias sobre a chegada do homem ao espaço, chamando a atenção da mídia internacional que o procurou para expor seu “ponto de vista”. Uma das declarações feitas a jornalistas foi a de que o soviético Yuri Gagarin, primeiro ser humano a viajar ao espaço, havia, na realidade, realizado uma trajetória circular acima da Terra (plana), como uma agulha em um disco de vinil. Posteriormente, com a chegada do ser humano à Lua, ele julgou como fantasia, pois esta seria transparente. De acordo com Shenton, os fabricantes de globos eram um dos grandes responsáveis pela disseminação da Terra redonda a fim de aumentar as vendas.

Em 1967, a *BBC* lançou um programa denominado *Our World* e um dos apresentadores fez alusão a Terra redonda. Isto causou a ira em Shenton, que endereçou uma carta a emissora acusando-a de doutrinar milhões de pessoas. Esta carta foi lida em um programa da emissora e acabou gerando mais visibilidade e publicidade a ele. Isso gerou uma onda de cartas e fotos enviadas a Shenton vindas de pessoas de todo o mundo encantadas com suas ideias. Ele foi então convidado para comentar em vários renomados jornais sobre o levantamento fotográfico da superfície da Lua feito em uma expedição em 1967. O *The Sun* foi um dos jornais que deu voz a ele e publicou uma reportagem com a seguinte manchete em livre tradução “Farsa! Shenton expõe a grande conspiração da Terra redonda”. Parte da reportagem em questão pode ser consultada no livro de [Garwood \(2007, p. 305\)](#).

Existem outras pessoas que sustentaram o movimento *terraplanista*. Para uma leitura mais aprofundada sobre a história do movimento, bem como outras civilizações antigas que julgavam a forma da Terra como plana, sugere-se a leitura do livro de [Garwood \(2007\)](#), que aborda o movimento em detalhes até o fim do século XX. Além disso, o site atual do grupo *Flat Earth Society* realiza um resumo da história do movimento, elencando algumas personalidades de destaque para eles no seguinte link [HISTORICAL FIGURES AND PEOPLE](#).

3.3 A sociedade da Terra plana no século XXI

O movimento *terraplanista* moderno fornece as mais variadas explicações para cada fenômeno observado. No site [The Flat Earth Wiki](#), mantido pela *Flat Earth Society* é possível ter acesso a algumas explicações. Eles afirmam que Eratóstenes acreditou estar medindo a circunferência da Terra supondo-na esférica, quando, na verdade, ele mediu o diâmetro da Terra plana, onde seu formato é exatamente como o apresentado na [Subfigura 19\(a\)](#). Na seção “Perguntas frequentemente feitas” de *The Flat Earth Wiki*, é descrito que este movimento tem origem com Samuel Rowbotham (1816-1884) na *Universal Zetetic Society* que foi refundada por Samuel Shenton (1903-1971) sob o nome de *Flat Earth Research Society* em 1956.

No que diz respeito às evidências do formato plano da Terra, *Flat Earth Wiki* afirma que estas advêm de uma abordagem “empírica” e sensitiva. Além disso, as fotografias feitas da Terra no espaço são descreditadas por este movimento, pois segundo o site, podem ser facilmente manipuladas e alteradas. O movimento acredita que há uma conspiração entre os países para que a sociedade continue acreditando que a Terra é redonda a fim de que o financiamento destinado às falsas explorações espaciais sejam desviados para si próprios.

Quanto a gravidade, eles acreditam que ela possui um efeito bem menor do

que é ensinado e que a Terra está acelerando para cima a uma taxa constante de $9,8 \text{ m/s}^2$ graças a um acelerador universal conhecido como energia escura ou vento etérico ([THE FLAT EARTH WIKI, 2019](#)). O professor Fernando Lang da Silveira, bastante assíduo em desbançar afirmações de *terraplanistas* no portal no site Centro de Ensino de Física, hospedado pela UFRGS comenta parte desta afirmação absurda também a desbanca ([LANG DA SILVEIRA, 04 jul 2020](#)).

Em relação à forma da Terra, aos movimentos do Sol e da Lua e a como ocorrem o dia e a noite, o site utiliza as figuras abaixo para explicá-los.

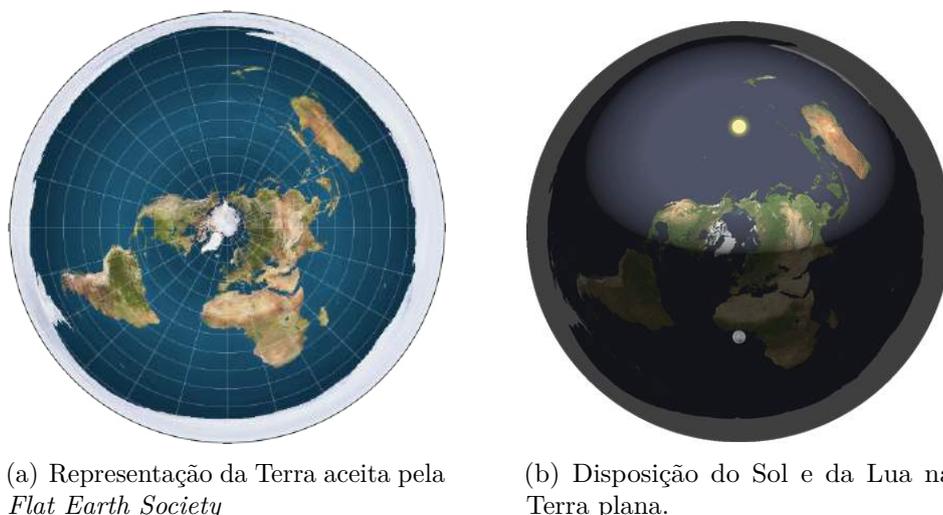


Figura 19 – Terra plana e posição do Sol e da Lua na concepção de *terraplanistas*.

Fonte: ([THE FLAT EARTH WIKI, 2019](#))

De acordo com essa teoria da conspiração, o mapa da [Subfigura 19\(a\)](#) é o modelo mais aceito entre eles da Terra plana. Neste modelo, o polo norte encontra-se no centro da Terra e ela é cercada por uma parede de gelo impenetrável que impede a água dos oceanos de escapar. Ironicamente, eles estão, na realidade, utilizando um mapa da Terra redonda, um de tantos outros mapas existentes, e argumentam que este seria o mapa da Terra plana. A projeção em questão utilizada por eles é uma projeção cartográfica azimutal equidistante polar e será abordada na segunda sequência didática proposta nesta dissertação (ver [seção 7.8](#)).

Já os movimentos do Sol e da Lua são apresentados na [Subfigura 19\(b\)](#). Ambos os astros são considerados esféricos e suas orbitas têm centro no eixo perpendicular ao polo Norte. De acordo com a figura acima, o Sol apresenta-se como um feixe divergente de raios e sua luz atinge apenas uma certa região da Terra. O dia e a noite se dão pelo movimento do Sol em torno do Polo Norte e por ele iluminar apenas uma certa região da Terra. Nesta mesma seção, o site explica como crê-se que as estações do ano ocorrem,

atribuindo um maior raio para a órbita solar quando é inverno no hemisfério norte e um menor raio para o verão neste hemisfério (THE FLAT EARTH WIKI, 2019).

A primeira sequência didática proposta nesta dissertação parte justamente da suposição, por absurdo, de que o Sol está próximo o suficiente da Terra plana de tal forma que ele pode ser considerado uma fonte de raios divergente e chega a uma contradição (ver Capítulo 6).

O Brasil também possui um movimento *terrapiplanista*. Em 2019 foi realizada a primeira convenção nacional da Terra plana no Brasil, na cidade de São Paulo. O jornal O Globo realizou uma reportagem descrevendo o que se passou no evento que contou com ataques à NASA, descrição da disposição de continentes na Terra plana e das posições do Sol e da Lua, conforme a Subfigura 19(a) e a Subfigura 19(b). Além de citações a referências bíblicas e até ataques ao atual Papa da Igreja Católica, Francisco (CAETANO, 11 nov. 2019).

Os organizadores desse evento foram convidados para participar do programa *The noite*, apresentado por Danilo Gentili e pode ser acessado no seguinte link [Entrevista com Terrapiplanistas | The Noite \(29/10/19\)](#). Neste programa, os entrevistados apresentam suas crenças que descrevem os fenômenos da Terra plana. As explicações apresentadas por eles coincidem, em sua maioria, com as escritas alguns parágrafos acima, apresentadas pela *Flat Earth Society*.



Figura 20 – Logo da primeira convenção da Terra plana em São Paulo em 2019.

Fonte: O Repórter Regional. Disponível em: <<https://www.oreporterregional.com.br/noticia/4057/flat-con-2019>>.

É possível notar, ao comparar a projeção cartográfica apresentada acima com o símbolo da Organização das Nações Unidas (ONU) exposto na [Figura 32](#), que as projeções são idênticas, pois assim como os *terraplanistas* utilizam uma projeção azimutal equidistante para representar a Terra plana, a ONU utiliza esta projeção em sua bandeira. A diferença é que a ONU realizou esta escolha sabendo que assim como qualquer mapa em duas dimensões, este mapa trata-se da representação de uma Terra redonda sobre um plano, construída matematicamente. Como aparentemente os *terraplanistas* não conhecem a construção de uma projeção azimutal, eles utilizam o logo da ONU para afirmar que ao utilizar este mapa, a organização evidencia que tem consciência sobre o formato plano da Terra. Existiu, inclusive, um time de futebol em Madrid na Espanha, que já possuiu o nome de *Flat Earth FC*, cujo emblema fazia clara alusão ao logo da ONU, incluindo até os ramos. Esse time foi vendido e extinto em 2021.

Além do exemplo acima, há outros evidenciando que a difusão do *terraplanismo* não se atém apenas a vídeos conspiratórios do *YouTube*. É possível encontrar publicações *terraplanistas* presentes em ambientes voltados à academia, como no site [academia.edu](#), uma plataforma que disponibiliza e difunde pesquisas acadêmicas. Segundo o próprio site, sua missão é acelerar a pesquisa mundial e provê acesso gratuito a artigos, livros entre outros a fim de democratizar o acesso. Por outro lado, esta mesma plataforma hospeda, por exemplo, um arquivo disponibilizado por [Boz \(2019\)](#), intitulado “A Mentira da Terra-Globo - Eric Dubay” que contava com 1.790 visualizações em 09 de junho de 2022. O autor deste arquivo, Eric Dubay é um famoso terraplanista do *YouTube* que realizou documentários sobre a Terra plana e um dos vídeos de sua autoria [Eric Dubay: 200 Proofs Earth is Not a Spinning Ball](#) supera um milhão de visualizações na plataforma.

A Folha de São Paulo produziu uma reportagem em 2019 sobre a primeira sondagem feita pelo Datafolha abordando a crença dos brasileiros sobre a forma da Terra. De acordo com a sondagem, 7% dos brasileiros acreditam que o formato da Terra é plano e 3% diz não saber sua forma. Dentre as faixas etárias em que o *terraplanismo* é mais popular destacam-se abaixo de 25 anos e acima de 60 anos, em que respectivamente 7% e 11% acreditam que a Terra é plana. Quanto ao grau de instrução, a quantidade de entrevistados que creem no formato plano para a Terra é inversamente proporcional ao nível de escolaridade ([GARCIA, 2019](#), Folha de São Paulo).

O jornal *The Guardian* também realizou uma reportagem sobre essa sondagem feita pelo Datafolha e salientou que, de acordo com a sondagem, as pessoas que acreditam em Terra plana no Brasil têm maior tendência a serem religiosas. Além disso, o jornal destacou o posicionamento de personalidades políticas ligadas ao atual presidente do Brasil, Jair Bolsonaro, que aparentam endossar a crença em uma Terra plana e a associação deste governo com o movimento Terra plana ([COWIE, 2019](#), *The Guardian*).

A reportagem da Folha de São Paulo menciona também uma sondagem similar

feita pela consultoria *YouGov* em 2018 com cidadãos americanos. A sondagem foi feita com 8.215 adultos e foi perguntado aos entrevistados se eles acreditavam que a Terra era redonda ou plana. Na figura abaixo seguem as respostas fornecidas pelos entrevistados e a discriminação dessas respostas por faixa etária.

Do you believe that the world is round or flat?

Age (8215 US adults - Feb 6, 2018)

	All	18-24	25-34	35-44	45-54	55+
I have always believed the world is round	84%	66	76	82	85	94
I always thought the world is round, but more recently I am skeptical/have doubts	5%	9	7	6	3	1
I always thought the world is flat, but more recently I am skeptical/have doubts	2%	5	4	3	2	1
I have always believed the world is flat	2%	4	3	1	2	2
Other/Not sure	7%	16	10	8	8	2

Figura 21 – Respostas discriminadas por idade à pergunta “Você acredita que a Terra seja redonda ou plana?” feita nos EUA pela agência YouGov.

Fonte: YouGov America. Disponível em: <<https://today.yougov.com/topics/lifestyle/survey-results/daily/2018/02/06/7e107/3>>.

Sobre estas respostas, é nítido perceber que o percentual de pessoas que sempre acreditou em uma Terra redonda cresce em função da idade dos entrevistados. Assim, jovens de 18 a 24 anos são os que menos acreditam em uma Terra redonda. Além disso, de acordo com esta mesma pesquisa, a crença em uma Terra redonda cresce em função do aumento da renda do indivíduo.

[Santana de Macedo \(2021\)](#), em sua dissertação de mestrado, exibiu uma pesquisa feita no *Google Trends* sobre o interesse dos brasileiros no tópico “Terra plana” e observou

que o interesse pelo assunto no Brasil iniciou-se em 2015, tendo seu auge em 2019, logo antes de ocorrer a primeira convenção nacional da Terra Plana em São Paulo. O autor também observou, a partir do *Google Trends*, que havia uma relação entre este termo e buscas por “Olavo de Carvalho”, ou seja, frequentemente, as mesmas pessoas que buscaram por Terra plana, também buscaram pelo autodenominado filósofo Olavo de Carvalho (1947-2022), considerado o guru do bolsonarismo (MAGENTA, 2022, BBC). Um simpatizante do movimento *terraplanista*, ele já realizou a seguinte afirmação na rede social *Twitter* em 2019: “Não estudei o assunto da terra plana. Só assisti a uns vídeos de experimentos que mostram a planicidade das superfícies aquáticas, e não consegui encontrar, até agora, nada que os refute”(CARVALHO, 2019).

Uma das causas sobre esse aumento recente no interesse sobre o assunto pode ser o próprio *YouTube*. O jornal *The Guardian* apresentou uma reportagem sobre a entrevista feita por pesquisadores a 30 pessoas que estiveram presentes em duas conferências da Terra plana em estados distintos nos Estados Unidos. Dos entrevistados, 29 não consideravam que a Terra era plana até dois anos antes e mudaram de ideia após assistir a vídeos conspiratórios no *YouTube*. De acordo com a entrevista, muitos estavam consumindo vídeos sobre outras teorias conspiratórias quando o *YouTube* sugeriu vídeos sobre a Terra plana para serem assistidos em seguida. Alguns inclusive assistiram a esses vídeos no intuito de desmascará-los, mas foram convencidos por eles (SAMPLE, 2019, The Guardian).

Não basta ignorar este movimento, é necessário combatê-lo em diferentes esferas, sendo a escola um dos ambientes primordiais para abordar este assunto a fim de mitigar possibilidades de seu crescimento entre os indivíduos após atingirem a vida adulta. Caso este movimento seja apenas ignorado, ele corre risco de crescer ainda mais e ser até encorajado pela mídia, como já é possível observar a partir da declaração (em tradução livre) de David Jordan, o diretor de política editorial da *BBC*:

Terraplanistas não terão muito espaço quando comparados àqueles que acreditam em uma Terra redonda, mas pode ser apropriado entrevistar um *terraplanista* ocasionalmente. E se muitas pessoas acreditam em Terra plana, devemos abordar mais o tópico do que abordamos atualmente (WATERSON, 2022, The Guardian)

Ele também disse que todos devem ter seus pontos de vistas representados, mesmo se for a crença na Terra plana. “É fundamental para a BBC que nós representemos todos os pontos de vista e dar-lhes o devido peso” (WATERSON, 2022, The Guardian)

Parte II

O que diz a BNCC

A nova BNCC para o Ensino Médio designa uma formação geral básica obrigatória comum a todas as escolas e uma formação composta por itinerários formativos, que podem ser ofertados de acordo com a necessidade de cada escola.

Os itinerários formativos podem ser ofertados a partir das cinco áreas do conhecimento a seguir: linguagens e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias, ciências humanas e sociais aplicadas, ciências da natureza e suas tecnologias e formação técnica e profissional. Eles podem ser compostos por uma das áreas ou pela combinação de duas ou mais, sendo então denominados itinerários formativos integrados.

Além disso, os itinerários devem basear-se em torno de pelo menos um dos seguintes eixos estruturantes: mediação e intervenção sociocultural, processos criativos, investigação científica e empreendedorismo.

Para a proposta de curso apresentada no [Parte III](#), sugere-se um itinerário formativo que combine a área de matemática e suas tecnologias, focando no pensamento geométrico, no uso de diferentes recursos computacionais e introdução a matemática formal com a área de ciências humanas e sociais aplicadas, com enfoque nos períodos históricos da Grécia antiga até a época das grandes navegações, em projeções cartográficas

Apesar da BNCC enumerar as habilidades e competências a serem desenvolvidas, ela não designa os conteúdos específicos que devem ser trabalhados pelas disciplinas que compõem as áreas do conhecimento. Assim, o currículo paulista, construído de acordo com as diretrizes da BNCC, foi utilizado para endossar o embasamento legislativo para a composição do curso.

Abaixo serão apresentadas as competências trabalhadas e as habilidades a serem adquiridas na proposta do [Parte III](#) no âmbito de cada área de acordo com a [BNCC \(2018\)](#).

4 Matemática e suas tecnologias

Para o Ensino Médio, a [BNCC \(2018\)](#) propõe que a matemática deve promover ações que contribuam para ampliar o letramento matemático, continuando o trabalho já iniciado no Ensino Fundamental. Assim, é proposto que os alunos desenvolvam habilidades relativas a processos de investigação, resolução de problemas, ambas abordadas nas duas sequências didáticas e construção de modelos, explorada especialmente nas atividades de projeções perspectivas durante a segunda sequência didática.

Com relação à representação, a [BNCC \(2018\)](#) reforça “a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas”. Tanto a primeira quanto a segunda sequência didática apresentadas na [Parte III](#) utilizam de representações com estes propósitos e os conceitos matemáticos são trabalhados a partir delas.

Na [BNCC \(2018, p. 528\)](#), o documento enfatiza que o foco no Ensino Médio para a disciplina de matemática é que esta seja aplicada à realidade, em diferentes contextos, destacando-se a importância das tecnologias digitais e aplicativos a fim de promover o pensamento computacional e a investigação matemática.

Por fim, antes de apresentar as competências específicas, o documento ressalta a importância do desenvolvimento da comunicação e da argumentação, tanto matemática quanto na língua materna. A proposta é que ambos sejam desenvolvidos durante o semestre graças às apresentações que eles deverão preparar e discussões entre os membros de cada grupo.

4.1 Competência específica 1

Esta competência propõe a utilização de conceitos matemáticos para interpretar situações de ciências humanas e da natureza. Ambas as sequências didáticas da [Parte III](#) vão de encontro à esta competência. A primeira, cujo tema principal é a forma da Terra, explora conceitos de geografia, história e até física, com óptica geométrica. Já a segunda, centrada em projeções cartográficas, assunto comumente estudado na disciplina de geografia, realiza o estudo matemático de algumas projeções. Assim, embora não haja uma habilidade desta competência listada na [BNCC](#) que esteja diretamente ligada a estas sequências didáticas, esta competência é abordada nas duas sequências didáticas.

4.2 Competência específica 3

De acordo com a competência 3 da BNCC (2018, p. 535), os alunos devem ser capazes de construir modelos, resolver e formular problemas matemáticos envolvendo conceitos e noções de geometria. É enfatizada a importância de contemplar conceitos diversos, que envolvam outras áreas do conhecimento e também que as situações propostas tenham um significado real, abordando problemas cotidianos (não restrito apenas ao cotidiano do aluno, mas também para a comunidade como um todo). Também é ressaltada a importância no uso de tecnologias a fim de aumentar o raciocínio lógico e construir argumentações.

A primeira sequência didática vai de encontro à competência específica 3, pois aborda um assunto de cultura geral, que tem estado em relevância nos últimos anos devido a movimentos anti-ciência e a partir desse assunto é possível realizar uma proposta didática mostrando como a ciência é construída de forma criteriosa, com argumentos lógicos, embasados matematicamente e em observações empíricas, com um trabalho e estudo contínuo durante séculos e busca por um modelo que melhor representa a realidade.

A segunda sequência didática possui uma interseção com a primeira, uma vez que utiliza de projeções cartográficas para abordar o “terraplanismo” e, portanto, o que foi dito no parágrafo acima também se aplica a ela. Além disso, o tema desta sequência didática, ou seja, projeções cartográficas, envolve diretamente a disciplina de geografia, sendo um tema concreto e atual.

No que diz respeito às habilidades, a habilidade EM13MAT308 apresentada abaixo é aperfeiçoada na primeira sequência didática, visto que são abordados conceitos de triângulo retângulo e tangente de um ângulo interno do triângulo retângulo.

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

4.3 Competência específica 4

Nesta competência, o documento evoca a utilização e compreensão de diferentes registros de representação matemáticos, dentre eles geométrico e computacional. O documento destaca que é essencial que os alunos explorem mais de um registro de representação, escolhendo o mais propício para cada situação. Isto é justamente o que propõe a segunda sequência didática da Parte III, em que os estudantes exploram vários tipos de projeções cartográficas, as vantagens e desvantagens de cada uma e constroem duas delas geometricamente. Além disso, eles também exploram os diferentes sistemas de coordenadas em três dimensões e refletem sobre os contextos que cada um deve ser escolhido.

Há uma habilidade em particular relacionada a esta competência que é bastante explorada na segunda sequência didática da [Parte III](#). Apresentada a seguir, a habilidade EM13MAT407 será aperfeiçoada durante a execução das atividades contidas no capítulo [Projeções ortográficas](#) do *GeoGebra* durante as aulas descritas na [seção 7.9](#).

(EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.

4.4 Competência específica 5

Esta competência visa o aprimoramento de habilidades orientadas a capacidades de investigação e formulação de explicações advindas de experiências empíricas, em que os estudantes devem formular conjecturas, refutá-las ou validá-las através de contraexemplos ou argumentos que as sustentem ([BNCC, 2018](#), p. 532). Assim, os estudantes são introduzidos a uma visão mais formal da matemática, porém sem a necessidade de que eles desenvolvam de fato uma demonstração.

A aula da primeira sequência didática apresentada na [seção 6.6](#) introduz os alunos à técnica de demonstração por absurdo, ou seja, a fim de provar uma afirmação p , demonstra-se que a negação de p produziria uma contradição. Nesta aula, partindo da falsa premissa de que a Terra é plana, os cálculos levam a uma contradição. Com isto, os alunos são introduzidos à uma visão mais formal da matemática desenvolvendo a presente competência específica, além de compreenderem um pouco mais como a ideia de uma Terra plana é fruto da ignorância e má formação matemática.

Já durante a segunda sequência didática, a atividade 6 do capítulo [Projeções estereográficas](#) do *GeoGebra*, previsto para ser executado nas aulas descritas na [seção 7.9](#), vai de encontro a esta competência e, especialmente, à habilidade EM13MAT509 apresentada abaixo. Esta atividade explora a conformidade da projeção estereográfica, onde o aluno deve verificar através de ferramentas do *GeoGebra* a preservação de ângulos entre dois arcos de circunferências secantes e suas projeções estereográficas. O estudante é conduzido passo a passo a verificar a propriedade de conformidade, defini-la e argumentar como foi possível verificar esta propriedade durante a execução da atividade.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

5 Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Nesta área, a [Parte III](#) propõe abordar história e geografia, podendo também desenvolver atividades na disciplina de filosofia. De acordo com a [BNCC \(2018, p. 562\)](#), o estudante deve ser capaz de mobilizar diferentes linguagens, dentre elas digitais, tecnológicas, gráficas, cartográficas; essas linguagens são exploradas em ambas as sequências didáticas com a utilização dos software *Stellarium* e *GeoGebra* e com o estudo de projeções cartográficas. O mesmo parágrafo também fala que o estudante deve “valorizar os trabalhos de campo (entrevistas, observações, consultas a acervos históricos etc.), recorrer a diferentes formas de registros e engajar-se em práticas cooperativas, para a formulação e resolução de problemas”. Durante as aulas de história, é previsto que o professor exiba os mapas de diferentes épocas, podendo também exibir trechos de determinados livros, valorizando assim a o contato dos alunos com a fonte original e não apenas com livros produzidos por outros autores a partir destas fontes. Desta forma, é visado o desenvolvimento da habilidade EM13CHS101 pelo estudante, apresentada abaixo.

Conforme escrito na [BNCC \(2018, p. 563\)](#) “A compreensão do espaço deve contemplar suas dimensões histórica e cultural, ultrapassando suas representações cartográficas”, portanto é importante que seja feita uma contextualização histórica de cada época retratada, conectando os pensamentos em relação à forma, tamanho e territórios conhecidos da Terra nas representações cartográficas com os eventos históricos estudados no Ensino Médio.

(EM13CHS101) Identificar, analisar e comparar diferentes fontes e narrativas expressas em diversas linguagens, com vistas à compreensão de ideias filosóficas e de processos e eventos históricos, geográficos, políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.

A habilidade a EM13CHS106 será aprimorada durante a segunda sequência didática em dois momentos. O primeiro momento ocorre nas aulas descritas na [seção 7.8](#), em que os alunos entram em contato com diferentes tipos de projeção cartográficas e refletem sobre as intenções de cada país ao escolher determinada projeção para representar o mapa-mundi, assim como a escolha da posição de determinado território no centro, na região superior ou inferior do mapa. O segundo momento em que a habilidade em questão será abordada é na aula de história, apresentada na [seção 7.6](#), em que o estudo da história se dá embasado em mapas construídos e utilizados durante o período das grandes navegações.

Já durante a primeira sequência didática, esta habilidade é desenvolvida na aula de história, ao abordar os mapas-mundi concebidos na Grécia e Egito antigos.

(EM13CHS106) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

A habilidade EM13CHS206 pode ser explorada na disciplina de história em ambas as sequências didáticas através da análise dos mapas-mundi produzidos em diferentes épocas e reflexão sobre a ocupação, divisão e percepção do território exibido neles.

(EM13CHS206) Analisar a ocupação humana e a produção do espaço em diferentes tempos, aplicando os princípios de localização, distribuição, ordem, extensão, conexão, arranjos, casualidade, entre outros que contribuem para o raciocínio geográfico.

É possível ainda desenvolver outras habilidades de ciências humanas e sociais nestas sequências didáticas, para tanto é preciso que estas aulas sejam melhores elaboradas por um profissional da área. Ao abordar as perdas das obras originais de Ptolomeu, por exemplo, é interessante refletir sobre a descontinuidade da construção do conhecimento científico e suas consequências para a humanidade.

Parte III

Propostas de curso

A proposta a seguir é feita para ser executada em três sequências didáticas, a primeira com 6 aulas (com mais duas aulas optativas) e a segunda com 7 aulas, totalizando 13 aulas. Ela envolve principalmente as áreas de matemática e ciências humanas. Devido à formação da autora, as aulas de matemática são bem detalhadas e desenvolvidas, enquanto que para as aulas de geografia e história, são feitas sugestões que podem ser melhor desenvolvidas por professores ou por um acadêmico da área.

Um dos aspectos principais deste curso é a multidisciplinaridade, tendo como tema principal o formato da Terra abordado por diferentes disciplinas. De acordo com DCN (2013, p. 183) , é necessário "romper com as centralidades das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real". Esta citação foi feita pela BNCC (2018) com o objetivo de endossar o novo modelo de Ensino Médio e a proposta aqui apresentada foi construída fortemente embasada na nova BNCC.

Apesar de o curso ser multidisciplinar, a área protagonista é Matemática e suas Tecnologias e, conforme descrito pela BNCC como um dos focos da área durante o Ensino Médio, um dos aspectos principais a ser desenvolvido é a utilização de diferentes recursos computacionais pelos alunos afim de contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Embora seja apresentado um curso fechado, é possível adaptá-lo de acordo com a realidade de cada escola e mesmo fazer as sequências didáticas de forma isolada, pois embora haja uma sequência temporal, as sequências didáticas são independentes entre si.

6 Sequência didática 1: Demonstrando que a Terra não é plana.

Este capítulo compreende as primeiras seis aulas do curso, havendo a possibilidade de realizar duas aulas adicionais apresentadas na [subseção 6.7.3](#) dependendo da época do ano. Nele será abordado o seguinte período histórico: Grécia e Egito antigos, de Platão à Eratóstenes. Com isso, almeja-se que os estudantes percebam que há milênios o ser humano indaga e busca explicações tanto lógicas quanto místicas sobre o formato da Terra, sendo este curso focado nas discussões lógicas.

Espera-se que os alunos compreendam as diferentes posições do Sol no céu em determinada localidade ao longo do dia e do ano em função de sua latitude e longitude. Além disso, é desejado que eles compreendam e visualizem conceitos de geometria plana em situações como: eclipses e experimento de Eratóstenes,

Enfim, almeja-se que os alunos percebam que há diversas evidências que corroboram para confirmar o formato arredondado da Terra, além de ser possível comprovar matematicamente que ela não é plana por qualquer indivíduo com conhecimentos básicos de trigonometria.

Para realizar a [seção 6.6](#), é imperativo o acesso contínuo à internet, portanto, caso não haja acesso à internet na escola, recomenda-se seguir a [seção 6.7](#), que apesar de também precisar acessar a internet, ele pode ser feito antes ou após a aula pelo próprio professor.

6.1 Orientações gerais

- Número de aulas: seis a oito.
- Público Alvo: Alunos de Ensino Médio.
- Recursos online: *Stellarium* (download em: [<https://stellarium-web.org/>](https://stellarium-web.org/)), *Google Earth* (link para acesso: [<https://earth.google.com/>](https://earth.google.com/)) e *Google Maps* (link para acesso: [<https://www.google.com.br/maps/>](https://www.google.com.br/maps/))
- Disciplinas principais envolvidas: Matemática, geografia e história.
- Disciplinas opcionais: física e filosofia.

6.2 Objetivos

- Utilizar a geometria euclidiana como ferramenta para realizar cálculos acerca do formato da Terra.
- Contextualizar historicamente a percepção dos homens sobre o formato da Terra na Grécia Antiga.
- Retomar os conceitos de latitude, longitude, estações do ano e sua relação com o movimento da Terra ao redor do Sol.
- Utilizar diferentes recursos computacionais.

6.3 Habilidades da BNCC trabalhadas

Apresentadas na [Parte II](#), as seguintes habilidades desenvolvidas na sequência didática presente: em matemática e suas tecnologias: EM13MAT301 e EM13CNT205 e em ciências humanas: EM13CHS101 e EM13CHS106.

6.4 Assuntos abordados

6.4.1 Matemática

- Geometria plana: circunferência, arco de circunferência, reta transversal a duas paralelas.
- Geometria analítica: razões trigonométricas, semelhança de triângulos, comprimento de circunferência.
- Geometria espacial: esfera.

6.4.2 Geografia

- Superfície da Terra, movimentos da Terra em relação ao Sol e estações do ano (retomar e aprofundar conceitos trabalhados no 6º ano).
- Escala, fuso horário, latitude e longitude, coordenadas geográficas.

6.4.3 História

- Grécia Antiga.
- Antigo Egito.

6.5 Aulas 1 a 4

As quatro primeiras aulas devem oferecer o conteúdo e a contextualização essenciais para que os alunos realizem os experimentos propostos na [seção 6.6](#) e na [seção 6.7](#).

6.5.1 Objetivos específicos

Abordar as ideias de filósofos da antiguidade acerca do formato da Terra, bem como as justificativas para tais ideias. Compreender como conceitos de geometria se relacionam com o movimento da Terra ao redor do Sol resultando em fusos-horário, estações do ano, eclipses.

6.5.2 Recursos necessários

- Lousa e giz.
- Globo terrestre ou computador com acesso ao Google Earth.
- Desejável: computador com acesso à internet.

6.5.3 Sugestão de roteiro para a aula 1 (geografia): retomada de conteúdos e pré-requisitos para o desenvolvimento desta sequência didática.

É recomendado que a aula 1 seja apresentada por um professor de geografia. Nela, é aconselhado apresentar um resumo de como se dará o curso e explicar como percebemos a Terra hoje, mencionar sua forma geométrica aceita atualmente (geoide) e abordar seu movimento ao redor do Sol, retomando assim conceitos vistos no Ensino Fundamental, como o sistema heliocêntrico e divisões de latitude e longitude. Caso haja acesso à internet, o professor pode utilizar o Google Earth para apresentar as divisões de latitude e longitude e se julgar apropriado, pode utilizar o seguinte vídeo [Latitude e longitude \(vídeo aula de geografia\)](#).

Além disso, deve-se retomar conceito de estações do ano. Deve-se ressaltar que as estações do ano devem-se à inclinação da Terra em relação ao plano que contém sua órbita ao redor do Sol, pois mesmo isso tendo sido apresentado a eles no Ensino Fundamental, são raros os casos de alunos que sabem as razões pelas quais as estações do ano ocorrem. Para ilustrar melhor a aula, sugere-se a exibição do seguinte vídeo [Estações do ano](#).

A seguir, encontra-se um outro vídeo interessante sobre estações do ano, caso o professor queira utilizar nesta aula [Astrolab | Solstícios e equinócios](#).

Por fim, o professor pode apresentar três grandes nomes para a geografia que serão estudados ao longo deste itinerário: Eratóstenes devido a sua obra *Geographika* apresentar a palavra Geografia apareceu pela primeira vez, Estrabão, considerado um dos maiores geógrafos da antiguidade e Ptolomeu, autor de *Geographia*, o último geógrafo da antiguidade (ESTRABÃO, 1854).

6.5.4 Sugestão de roteiro para a aula 2 (história): a percepção da Terra por filósofos da antiguidade

Nesta aula, o professor deve realizar uma contextualização histórica do período da Grécia e Egito antigos. Sugere-se iniciá-la com enfoque em como os filósofos da antiguidade imaginavam a Terra, iniciando pelos jônicos (Tales de Mileto e Anaximandro) e seguindo até Platão e Aristóteles. Para ministrar essa aula é conveniente a utilização do [Capítulo 1](#) como texto de apoio para o professor, bem como as referências utilizadas para a construção deste capítulo e também a teoria encontrada em livros didáticos de Ensino Fundamental II e Médio.

Seria oportuno que o professor, além de descrever como os pensadores imaginavam a Terra, também apresentasse os mapas-mundi da [Figura 1](#) e da [Figura 2](#). Assim, os estudantes teriam a percepção de como acreditava ser a forma da Terra por esses povos.

Se houver a possibilidade da presença de um professor de filosofia, sugere-se acrescentar uma aula para abordar as diferenças entre as visões de Platão e Aristóteles.

Cabe ressaltar que a sugestão apresentada nessas duas últimas subseções devem ser melhor desenvolvidas pelos respectivos profissionais da área de ciências humanas.

6.5.5 Roteiro para a aula 3 (matemática): Óptica geométrica e eclipses

O conteúdo abaixo está contido no tópico de Óptica Geométrica em materiais didáticos de física. No entanto, devido a presente sequência didática não integrar a área de Ciências da Natureza e aos assuntos abordados a seguir serem, essencialmente, semelhança de triângulos, a aula pode ser conduzida por um professor de matemática.

O professor deve iniciar a aula introduzindo alguns conceitos de óptica geométrica fundamentais para o curso: o princípio de propagação retilínea da luz (a luz propaga-se em linha reta), fonte de luz pontual e extensa, feixe divergente e de raios paralelos, enfatizando que os raios do Sol que atingem a Terra são considerados paralelos em razão da distância entre ele e a Terra.

A partir destes conceitos, o professor deve explicar as condições para ocorrer eclipses solar e lunar, bem como a geometria envolvida nestes fenômenos. É interessante frisar que na antiguidade já se tinha conhecimento sobre eclipses e eles eram utilizados

como argumento para sustentar a ideia de uma Terra esférica, conforme explicado no [Capítulo 1](#)

A seguir encontra-se um vídeo que o professor pode utilizar se julgar necessário [NASA|Understanding Lunar Eclipses](#).

6.5.6 Roteiro para a aula 4 (matemática): História dos experimentos de Eratóstenes e Posidônio

Esta aula é reservada para apresentar os experimentos feitos por Eratóstenes e por Posidônio, expor os fatos já conhecidos na época de cada um e também mencionar que o que sabemos hoje é devido a cientistas posteriores que relataram os experimentos feitos por esses dois, pois sobreviveram apenas fragmentos de suas obras.

Além da explicação do experimento feito por Eratóstenes, o professor deve explicar que este experimento pode ser realizado hoje em dia sem o relógio solar Scaphe, apenas com uma estaca e uma trena, graças ao conceito de tangente de um ângulo.

Portanto, uma outra forma de realizar o experimento, que inclusive será utilizada na [seção 6.7](#), é através do conceito de tangente de um ângulo. É possível obter a tangente do ângulo entre o Sol e a direção perpendicular à superfície (distância zenital) colocando uma estaca de tamanho conhecido perpendicular ao solo, medindo o comprimento de sua sombra e a partir destas duas medidas e do conceito de tangente, obter o ângulo β entre os raios solares e a estaca, conforme mostra a [Figura 22](#)

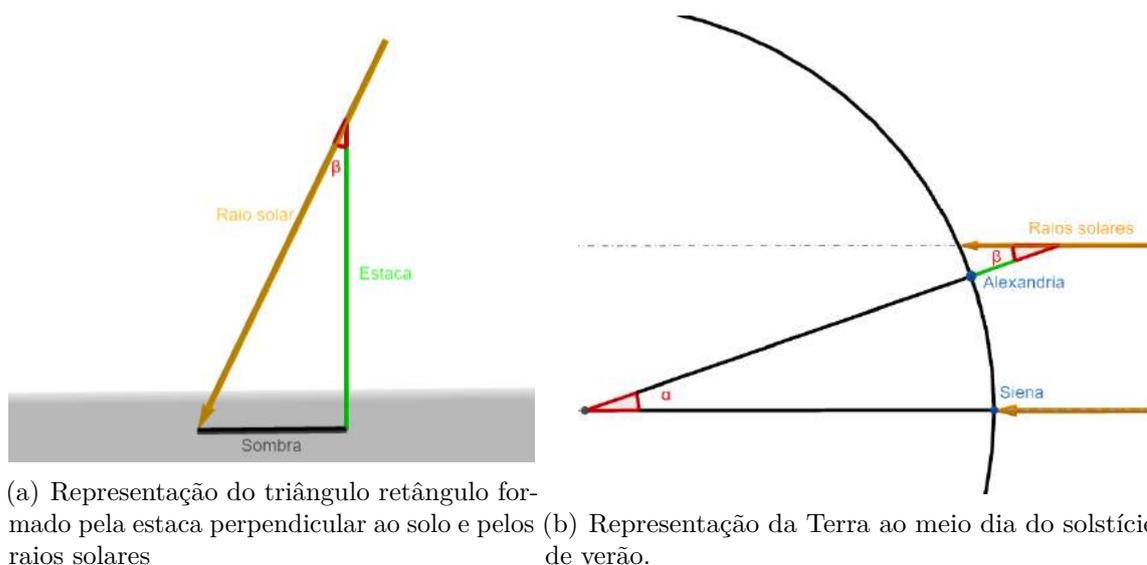


Figura 22 – Esquemáticos do experimento feito por Eratóstenes utilizando conceito de tangente no lugar de relógio de sol.

Fonte: Imagem feita pela autora através do *GeoGebra*.

Assim, a partir dos valores do comprimento da estaca (E) e da sombra (S), pode-se obter o valor de β através da relação $\beta = \arctan \frac{S}{E}$. Obtido o ângulo β , basta prosseguir como descrito na [seção 1.1](#) para calcular a medida da circunferência terrestre.

Após realizar a apresentação do experimento feito por Eratóstenes, assim como suas suposições, é oportuno falar para os alunos que este experimento não demonstra a esfericidade da Terra, pedir para que eles pesquisem sobre e tragam alguma razão pela qual ele não é suficiente para demonstrar que a Terra não é plana.

6.6 Aulas 5 e 6 (matemática): releitura do experimento de Eratóstenes

Esta aula, inspirada a partir do trabalho de [Lima Bezerra \(2019\)](#), é planejada para ser desenvolvida por um professor de matemática que deve começá-la incentivando os alunos a darem suas justificativas pedidas na aula anterior.

É importante enfatizar que o *Stellarium*, Google Earth e Maps são construídos a partir de um modelo de Terra redonda, ou seja, não podemos utilizar os dados coletados por eles para realizar uma demonstração matemática rigorosa que demonstre que a Terra não é plana. Embora eles sejam fiéis a realidade, para que pudéssemos considerar o experimento como uma demonstração por absurdo, os dados deveriam ser coletados pessoalmente. Porém, devido à grande dificuldade de realizar este experimento e para que o professor tenha liberdade de realizá-lo independentemente de terceiros, a utilização desses programas é proposta neste roteiro. Assim, a palavra demonstração estará escrita entre aspas pois ela não se enquadra de fato como uma demonstração científica.

6.6.1 Objetivos específicos

Abordar o experimento de Eratóstenes e, com o auxílio de tecnologias e de geometria, realizar um exercício ilustrativo “demonstrando” que a Terra não é plana.

6.6.2 Recursos necessários

Para realizar esta atividade, é imperativo o acesso à internet durante todo o período, preferencialmente um ponto de acesso à internet para cada grupo de alunos, que pode ser feito através de um celular, tablet ou computador. Também é imprescindível realizar download do software [Stellarium](#).

6.6.3 Roteiro para as aulas 5 e 6 (matemática): “demonstrando” que a Terra não é plana através do *Stellarium*.

O professor deve retomar o assunto de semelhança de triângulos e explicar que caso a Terra fosse plana e o Sol estivesse próximo o suficiente a ponto de ser considerado uma fonte de luz pontual e de raios divergentes, seria possível haver as condições que Eratóstenes utilizou para realizar seu experimento. Nesse caso, a relação Terra e Sol seria como a apresentada na figura abaixo.

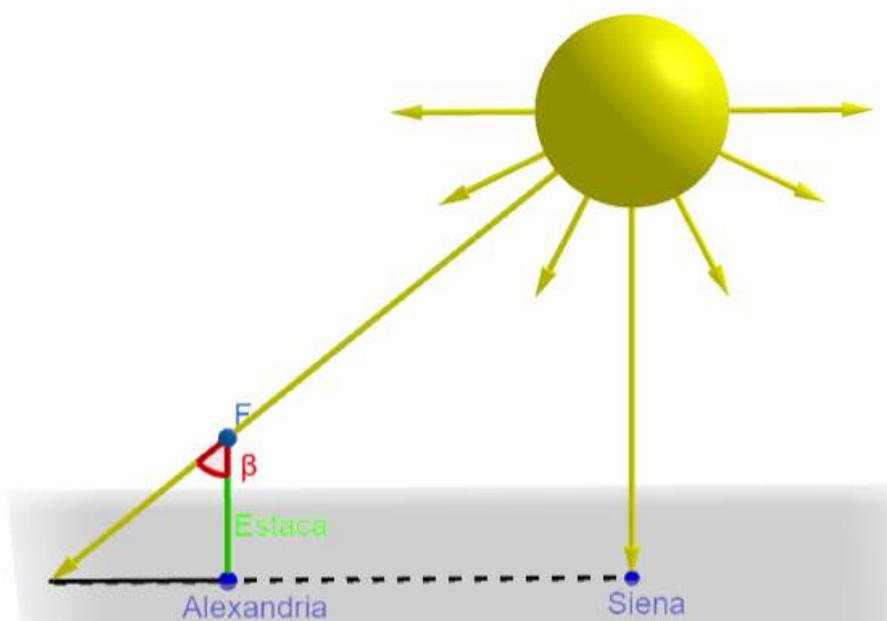


Figura 23 – Representação do experimento de Eratóstenes supondo uma Terra plana.

Fonte: Imagem construída pela autora através do *GeoGebra*. Link para acesso <<https://www.geogebra.org/m/emj7xxn8>>.

Para eliminar esse entrave, será obrigatório tomar uma terceira cidade no mesmo meridiano, assim, se o planeta fosse plano, teríamos algo como a figura abaixo.

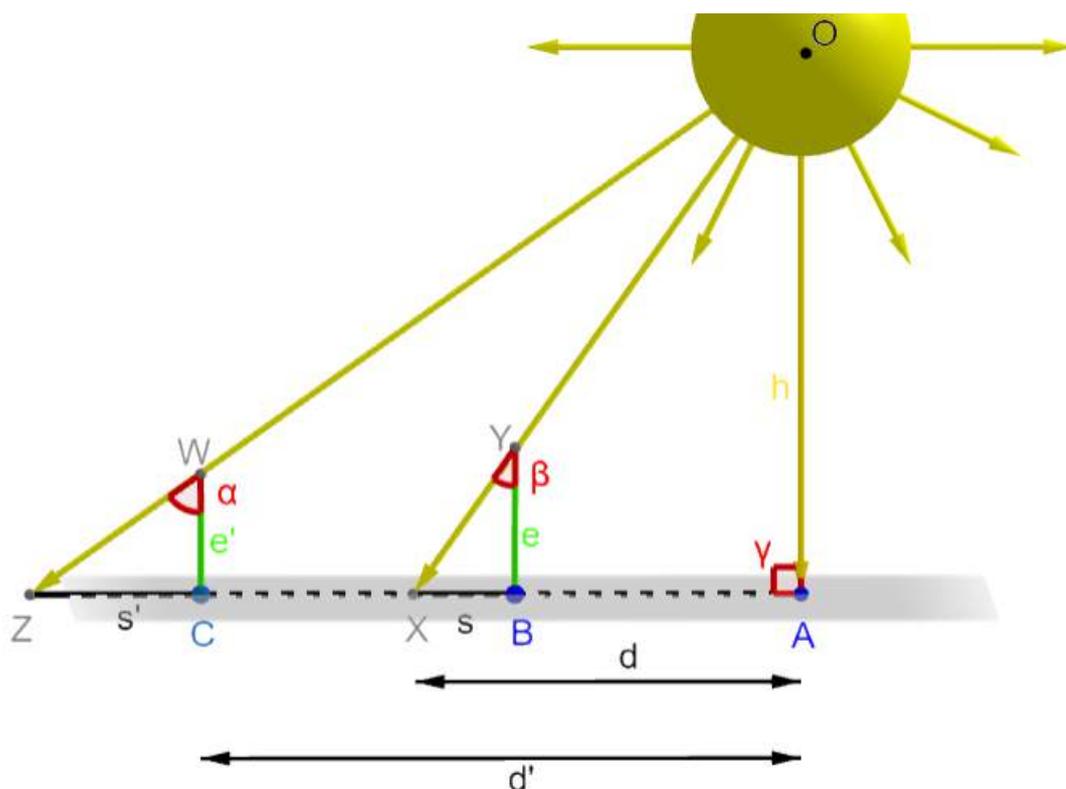


Figura 24 – Releitura do experimento de Eratóstenes com três cidades no mesmo meridiano (supondo uma superfície plana).

Fonte: Imagem construída pela autora através do *GeoGebra*. Link para acesso <<https://www.geogebra.org/3d/cvupuzqp>>.

No esquemático hipotético acima, A , B e C representam três cidades no mesmo meridiano, na superfície da Terra supostamente plana; s e s' são, respectivamente, os comprimentos das sombras das estacas com alturas e e e' , fincadas perpendicularmente ao solo e h é a distância entre a cidade A e o centro do Sol. A distância de A a B é d e de A a C é d' .

Para demonstrar a impossibilidade da superfície da Terra ser plana, pode-se supor por absurdo que ela o é e, a partir dos valores de s , e e d , por semelhança ângulo-ângulo entre os triângulos OAX e YBX , encontrar o valor de h . Então, novamente utilizando semelhança de triângulos entre OAZ e WCZ e conhecendo s' , e' e d' determinar um valor diferente para h , chegando em uma contradição.

Após realizar a explicação deste tópico, o professor deve dividir os alunos em grupos e propor que cada grupo três cidades suficientemente distantes no mesmo meridiano, com o auxílio do *Google Earth*, estando uma delas, que denominaremos de cidade de referência, sob o Trópico de Câncer, de Capricórnio ou linha do Equador. Ao escolher uma cidade que satisfaça estas condições, é mais fácil determinar o dia que o Sol

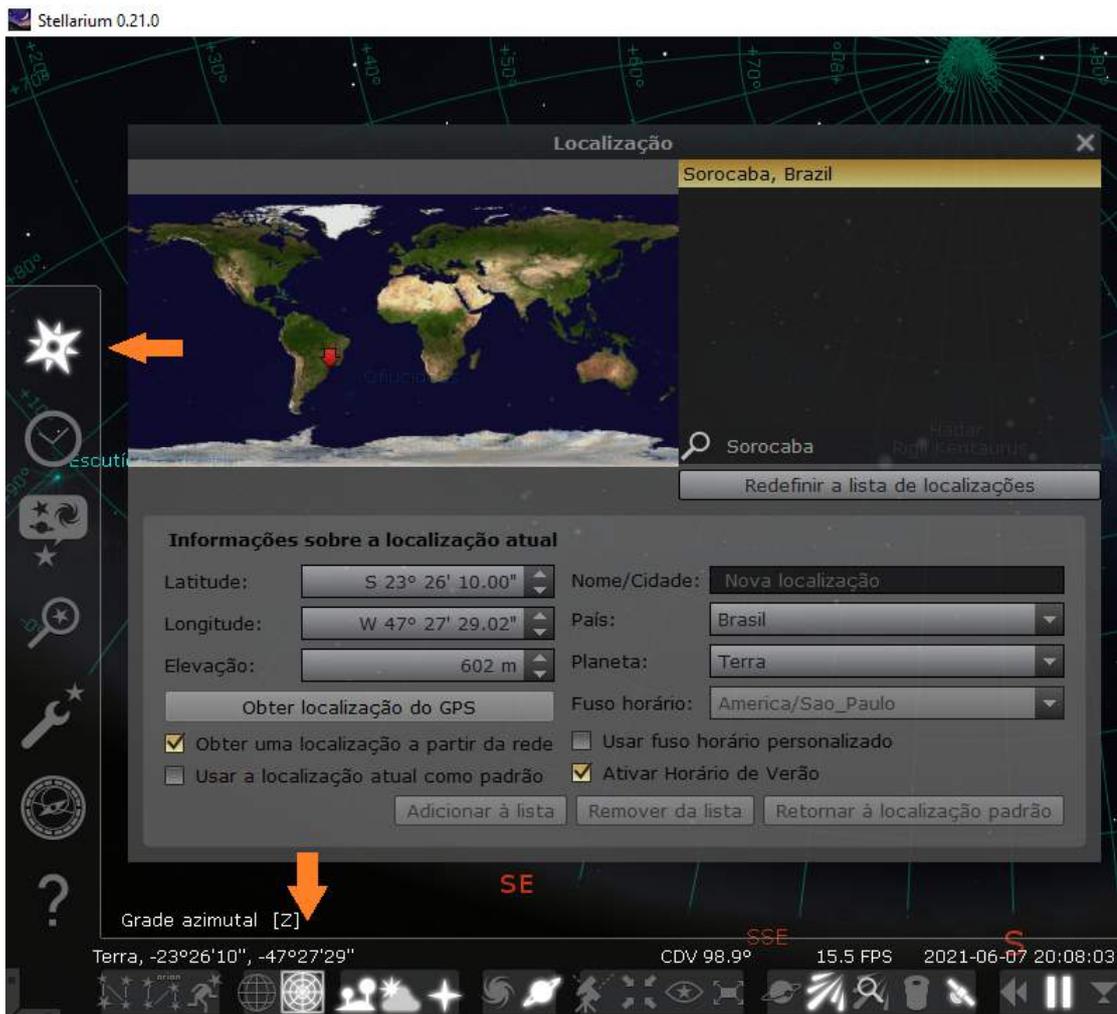
atingirá o zênite nesta localização, que é em torno de 21 de dezembro para quem está sob o Trópico de Capricórnio, 21 de junho para quem está sob o trópico de Câncer, 20 de março e 22 de setembro para quem está sob a linha do Equador. No entanto, é possível escolher qualquer cidade para ser referência, com a condição que esta esteja entre os dois trópicos¹; neste caso, a determinação do momento do ano que o Sol atinge o zênite pode demandar mais tempo.

Escolhidas as cidades, os alunos devem registrar as coordenadas de latitude e longitude de cada uma delas e, no *Google Maps*, medir a distância em linha reta entre elas. Para determinar as medidas, existe a ferramenta denominada “Medir distância”, cujo tutorial para utilizá-la está no seguinte link [Medir distâncias entre pontos](#).

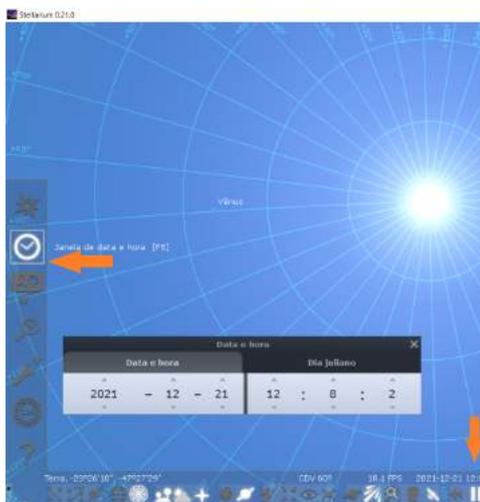
Após tomar nota, deve-se utilizar o *Stellarium* para determinar o instante do ano no qual o Sol se encontra no zênite na cidade de referência (o horário é sempre entre 11h e 13h desconsiderando o horário de verão) e depois verificar no mesmo programa qual a inclinação do Sol com relação ao Zênite nas outras cidades no mesmo dia e horário.

Abaixo segue o passo-a-passo para utilizar os comandos no *Stellarium*.

¹ O Sol nunca atinge o zênite em localidades acima do trópico de Câncer ou abaixo do de Capricórnio.



(a) Clicar no ícone Grade Azimutal na barra de ferramenta de baixo. Em seguida, no primeiro ícone da barra de ferramenta à esquerda, ou seja, localização. Inserir o nome da cidade.



(b) Clicar no segundo ícone na barra de ferramenta à esquerda, definir data e hora e na barra de ferramentas abaixo, pausar o tempo.



(c) Clicar no Sol e manipular a data e a hora até que o ângulo ALT aparente atinja o valor mais próximo a 90°.

Figura 25 – Passo a passo no *Stellarium* para determinar o momento em que o Sol atinge o zênite.

Fonte: Captura de tela do software *Stellarium*.

O ângulo ALT (altura) é o ângulo entre o horizonte do observador e a posição do Sol, conforme ilustrado na Figura 26. Já o ângulo zenital é complementar à altura, ou seja, é o ângulo entre a direção vertical em relação à superfície, representado pelo eixo Z na Figura 26 e o Sol. Portanto, quando o Sol atinge um valor de ALT igual a 90° , dizemos que ele atingiu o zênite (ângulo zenital igual a zero) e um objeto colocado perpendicular ao solo nesse instante não produzirá sombra.

Independente da localização na Terra e da época do ano, o Sol atingirá o seu ponto mais elevado com relação ao horizonte, momento denominado meio-dia solar, quando ele cruzar a linha meridiana (norte-sul). Assim, uma outra forma de encontrar o maior valor de ALT no software é encontrar o momento que o ângulo dado por AZ (ângulo azimutal), também indicado na Figura 26, registra o valor mais próximo de 180° ou de 0° . A figura abaixo mostra como são definidos os ângulos abordados acima em relação a um observador na superfície da Terra.

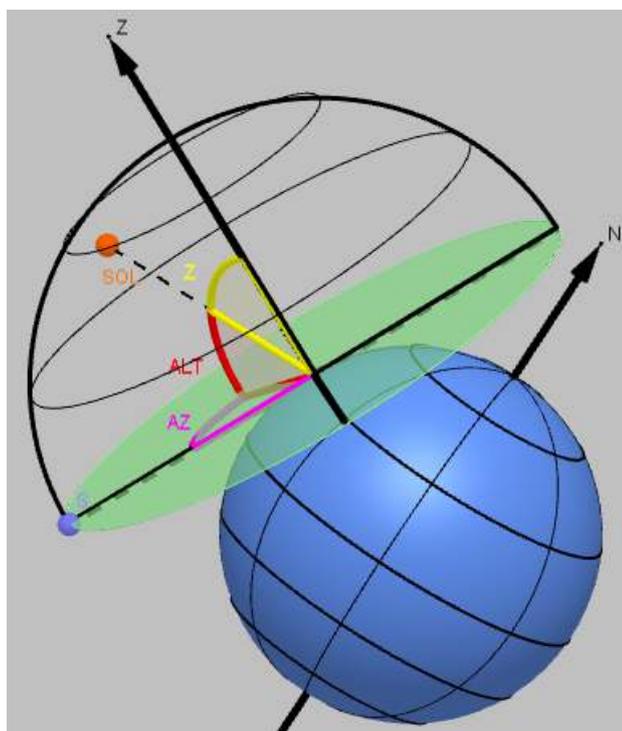


Figura 26 – Sistema horizontal de um observador na Terra.

Fonte: imagem produzida pela autora através do *GeoGebra*.

Uma vez determinados o dia e o horário que o Sol atinge o Zênite na cidade de referência, deve-se utilizar o *Stellarium* para obter o valor do ângulo ALT para as outras duas cidades conservando o mesmo dia e horário e a partir desse valor, calcular o ângulo zenital.

A tabela abaixo apresenta um exemplo de três cidades que satisfazem às

condições solicitadas, sendo Sorocaba, que está sob o trópico de Capricórnio, a cidade que será usada como referência para as outras.

Tabela 1 – Três cidades brasileiras no mesmo meridiano.

Cidade	Latitude (S)	Longitude (W)	Ângulo zênital	Distância em km
Sorocaba	23°26'10"	47°27'29"	0°	-
Franca	20°32'19"	47°27'29"	2,90°	322,36
Imperatriz	5°31'35"	47°27'29"	17,91°	1991,00

Na [Tabela 1](#), já apresentamos os valores dos ângulos zenitais calculados a partir das alturas do Sol para cada uma das três cidades no dia 21/12/2021 às 12h08min02. Assim, supondo que a superfície terrestre fosse plana, teríamos algo como a [Figura 24](#), em que Sorocaba seria o ponto *A*, Franca o ponto *B* e Imperatriz o ponto *C*.

Devido ao programa *Stellarium* fornecer o ângulo ALT, podemos calcular diretamente o ângulo zenital, sem precisar realizar as etapas de utilizar um Scaphe e sua sombra para descobrir o ângulo entre o Sol e o gnomon. Assim, a partir do valor do ângulo zenital $\alpha = 17,91^\circ$ em Imperatriz e de sua distância $d' = 1991,00$ km à Sorocaba, podemos calcular o valor de h , obtendo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d'}{h} \implies h = \frac{d'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1991,47}{\operatorname{tg}17,91^\circ} = 6162,03 \text{ km} \quad (6.1)$$

Portanto, a distância calculada entre o Sol e a superfície da Terra supondo-a plana e supondo o Sol próximo o suficiente para ser considerado uma fonte de luz divergente tomando as cidades de Imperatriz e Sorocaba como parâmetro é de $h = 6162,03$ km.

Já tomando a cidade de Franca, temos que o ângulo zenital do Sol em seu ponto mais alto no dia 21/12/2021 é $\beta = 2,9^\circ$ e que a distância entre Franca e Sorocaba é de $d = 322,36$ km. Então, utilizando a [Equação 6.1](#), temos que $h = 6363,48$ km. Dessa forma, obtivemos dois valores diferentes para a distância entre o Sol e a Terra supondo-a plana. Logo, ela não pode ser plana ou os raios não são divergentes. Porém se os raios não são divergentes, eles são obrigatoriamente paralelos, o que implicaria em um mesmo ângulo zenital em todas as localidades supondo uma Terra plana. Como isso não acontece, segundo observado no *Stellarium*, a única opção restante é que Terra não pode ser plana.

Vale ressaltar que a escolha de três cidades brasileiras como exemplo para a construção da [Tabela 1](#) foi feita com o intuito de fornecer um exemplo mais próximo a realidade de um estudante brasileiro, sobretudo se o estudante residir no estado de São Paulo, onde ficam localizadas as cidades de Sorocaba e Franca. O estudante pode mesmo verificar empiricamente a distância entre as duas cidades sem grande dificuldade.

6.6.3.1 Possíveis entraves

É importante ressaltar que a diferença entre os valores obtidos para h tomando as cidades de Franca e de Imperatriz como referência não foram tão grandes e que essa diferença pode variar de acordo com a distância que as cidades se encontram da cidade de referência.

A tabela abaixo foi construída com o intuito de ilustrar este argumento e mostrar que caso os alunos escolham cidades muito próximas da referência, a diferença entre os valores de h não será tão notável podendo até ser desprezível. A escolha das cidades foi feita tomando como referência Antofagasta no Chile, localizada próxima ao trópico de Capricórnio. A opção por essa cidade deve-se ao fato que escolhendo uma cidade mais a oeste na América do Sul, é possível encontrar cidades na América do Norte com a mesma longitude, o que não ocorre ao tomarmos uma cidade no estado de São Paulo, por exemplo. A escolha das outras cidades, medida das distâncias de cada uma à Antofagasta (denominado como d na Tabela 2), medida dos ângulos zenitais e cálculo da distância do Sol a Antofagasta tomando cada uma das cidades como referência (denominado como h na Tabela 2) foram todos realizados conforme explicado anteriormente nesta mesma seção.

Tabela 2 – Cidades/pontos com longitude aproximada para ilustrar a importância da escolha das cidades para realizar a atividade.

	Cidade	País	Latitude	Longitude (W)	Âng zenital	d (km)	h (km)
1	Antofagasta	CL	S 23°31'25"	70°23'40"	0,09°	0	
2	Juliaca	PE	S 15°28'48"	70°10'40"	7,96°	894,68	6.398,38
3	Feijó	BR	S 8°10'52"	70°21'58"	15,25°	1.707,98	6.264,8
4	Leticia	CO	S 4°12'55"	69°56'26"	19,22°	2.148,64	6.163,21
5	Mitú	CO	N 1°15'16,2"	70°13'58'	24,69°	2.755,2	5.992,99
6	Barinas	VE	N 8°37'21,4"	70°12'27"	32,01°	3.574,46	5.718,11
7	Punto Fijó	VE	N 11°43'5"	70°13'16"	35,15°	3.918,7	5.565,42
8	Bani	RD	N 18°16'46,7"	70°12'27"	41,7°	4.648,33	5.217,17
9	Atlântico 1		N 28°	70°23'40"	51,42°	5.729,17	4.570,28
10	Atlântico 2		N 38°	70°23'40"	61,41°	6.841,1	3.728,12
11	Barnstable	EUA	N 41°42'0,4"	70°17'58"	65,1°	7.252,54	3.366,52
12	Portland	EUA	N 43°40'26"	70°19'	67,07°	7.473,13	3.161,39
13	Saint Georges	CA	N 46°6'48,71"	70°39'55"	69,5°	7.743,35	2.895,12

Fonte: Dados coletados através do *Google Maps* em julho de 2021.

Como mencionado anteriormente, é importante prestar atenção nas escolhas das cidades; por exemplo, ao compararmos duas cidades mais próximas à de referência, como Juliaca e Feijó, distantes uma da outra de 813,3 km, observamos uma diferença no

valor de h dada por $\Delta h = 133,58$ km. Já ao observarmos Barnstable e Portland, distantes de 220,59 km, temos que $\Delta h = 205,13$ km. Ou seja, mesmo as cidades de Juliaca e Feijó estando muito mais distantes uma da outra que as cidades de Barnstable e Portland, Δh foi maior entre as duas últimas pois a distância delas à Antofagasta é muito maior. Abaixo segue um gráfico de $h \times d$ para ilustrar o comportamento não linear de h em função da posição da cidade com relação à Antofagasta.

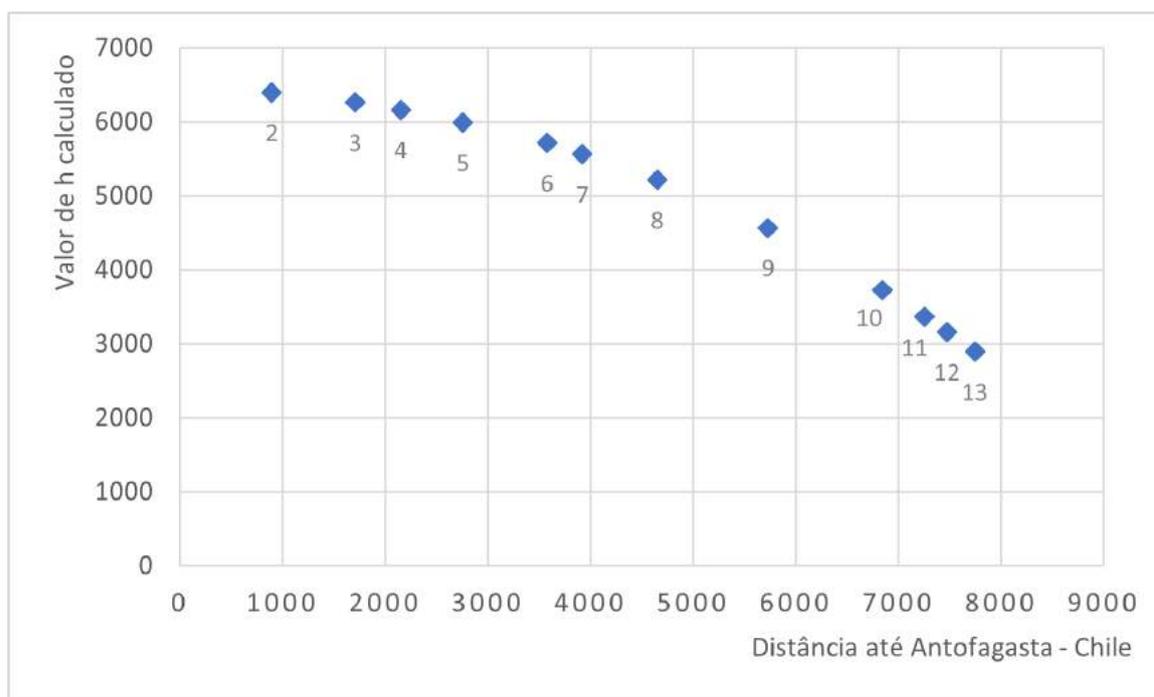


Figura 27 – Distância em km calculada entre Sol e a Terra supondo-a plana a partir da distância d entre as cidades da Tabela 2 e Antofagasta.

Fonte: Imagem produzida pela autora.

O gráfico acima foi construído com a coluna d da Tabela 2 no eixo das abscissas e a coluna h no eixo das ordenadas. Os índices 2 a 13 são os mesmos da tabela. O objetivo da construção desse gráfico é dar mais segurança ao professor para discutir os diferentes valores de h que os alunos calcularão e justificar eventuais valores de h muito próximos.

Além disso, o gráfico acima confirma previsões teóricas da Terra esferoidal. O professor Fernando Lang da Silveira LANG DA SILVEIRA (10 set 2017), fornece uma previsão teórica para os pontos do gráfico da Figura 27, em que relaciona a altura h calculada do Sol com o ângulo α entre a cidade de referência e as outras cidades escolhidas na mesma longitude. Supondo a Terra esférica, a relação entre as distâncias entre duas cidades em uma mesma longitude seria o tamanho do arco de circunferência compreendido entre elas, dado por $d = \alpha R$, em que α é o ângulo compreendido entre as duas cidades e R o raio da Terra, adotado como 6371 km. Além disso, conforme apresentado em Equação 6.1

para o cálculo da altura do Sol supondo a Terra plana, temos que $h = \frac{d}{\text{tg}\alpha}$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos

$$h = \frac{\alpha R}{\text{tg}\alpha} \quad (6.2)$$

Assim, plotando o gráfico da função [Equação 6.2](#) juntamente com os pontos da [Figura 27](#) porém com as coordenadas das abscissas dadas por $\alpha = \frac{d}{R}$, temos a figura abaixo.

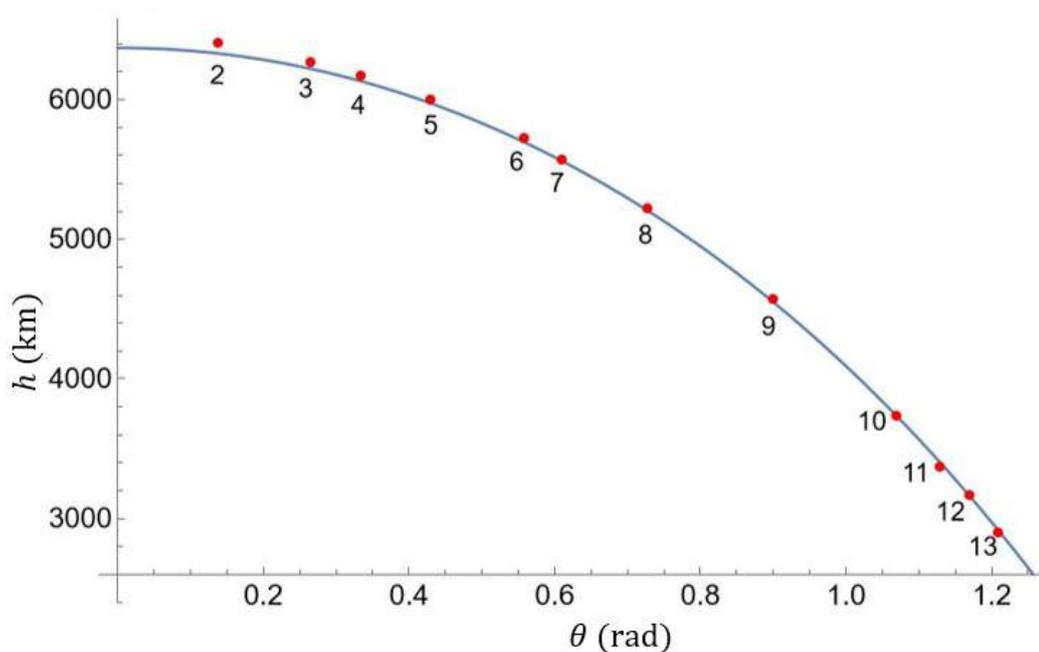


Figura 28 – Gráfico de pontos da [Tabela 2](#) com gráfico da função $h = \frac{\alpha}{\text{tg}\alpha} \cdot R$

Fonte: Imagem produzida pela autora.

Com o gráfico da [Figura 28](#), é possível termos mais evidências que o *Stellarium* representa um modelo acurado da Terra, pois os dados obtidos condizem com a previsão teórica que considera a Terra aproximada por uma esfera.

6.7 Aulas 7 e 8 (Extra): Projeto Eratóstenes Brasil

Caso o professor queira reproduzir o experimento de Eratóstenes, existe um projeto realizado anualmente que propõe a execução deste experimento. Há uma limitação de época do ano, já que ele deve ser realizado no mês de setembro e também de horário, pois as medidas devem ser realizadas no meio-dia solar (momento que o Sol atinge a altura mais elevada em relação ao horizonte, que pode ser determinado previamente com o auxílio do *Stellarium* conforme explicado na [subseção 6.6.3](#)).

A proposta desta atividade é de reproduzir um experimento análogo ao de Eratóstenes a partir de dados das escolas participantes de qualquer parte do mundo e calcular o raio da Terra.

É possível acessá-la no seguinte site <<https://sites.google.com/site/projetoe rato/get-started>>. Após o cadastro, cada escola deve escolher uma outra que também esteja inscrita no projeto para trabalhar em conjunto com a condição de que esta esteja localizada no mesmo meridiano e a uma distância superior a 400 km da primeira escola. Uma vez escolhidos os pares, um dia comum deve ser escolhido por ambas para realizar as medidas.

Caso os pares não estejam no mesmo meridiano, também é possível realizar o experimento, porém neste caso é necessário que a distância utilizada entre as duas escolas para realizar os cálculos seja substituída pela distância norte-sul entre elas. A explicação mais detalhada do experimento e dos cálculos a serem realizados encontra-se no Guia de Participação do site acima.

6.7.1 Objetivos específicos

Reproduzir um experimento análogo ao feito por Eratóstenes através de conceitos de geometria plana e trigonometria. Discutir sobre possíveis erros atrelados à realização de um experimento e cuidados a serem tomados para a minimização destes.

6.7.2 Recursos necessários

- Giz e lousa.
- Acesso à internet antes e depois da aula para inscrever a escola e enviar os dados coletados.
- Nível de bolha.
- Materiais para a construção do gnômon (sugestão: folha sulfite, esquadros, lápis e fita adesiva).
- Régua.

6.7.3 Roteiro para as aulas 7 e 8 (matemática): reprodução do experimento de Eratóstenes

Os alunos devem ser divididos em grupos desde o início da aula 4 onde permanecerão até o final da aula 5. Cada grupo deve construir um gnômon (no [Guia de Participação](#), é sugerida a construção de um gnômon feito com lápis, papel e esquadros,

mas é possível construí-lo com outros materiais). Construídos os gnômons, os alunos devem posicioná-los sobre uma superfície plana que receba luz solar direta por volta do horário em que ocorre o meio-dia solar naquela localidade e realizar a marcação de sombras conforme indicado no Guia de Participação.

Na aula 8, após enviar os dados coletados e receber os registros da escola parceira, o professor deve explicar aos alunos os cálculos que serão feitos para determinar o raio da Terra e cada grupo deve realizar os cálculos de acordo com seus dados.

A explicação para os cálculos pode ser encontrada no arquivo “Guia de Participação - Projeto Eratóstenes.pdf” disponível para download no final da página web do Guia de Participação mencionada anteriormente. É fortemente recomendado que o professor leia previamente todo o arquivo, pois este contém conselhos fundamentais para a boa realização do experimento e explicação sobre os cálculos a serem realizados que são ligeiramente distintos dos realizados por Eratóstenes, uma vez que as duas escolas em questão provavelmente não estarão recebendo luz solar perpendicularmente ao solo nesta época, exceto se uma delas estiver na linha do Equador.

Ao final, sugere-se que os grupos compartilhem os valores encontrados e caso eles sejam diferentes, pode ser feita uma discussão envolvendo toda a classe sobre as possíveis causas da divergência entre os dados encontrados pelos alunos.

7 Sequência didática 2: A Terra aproximada por uma esfera e as distorções causadas por sua representação no plano através de projeções cartográficas

Este capítulo compreende as aulas 7 a 13. É almejado que a partir dos mapas concebidos em diferentes períodos, seja abordada a época das grandes navegações, a influência de Ptolomeu em Cristóvão Colombo, a circum-navegação de Fernão de Magalhães e o primeiro mapa retratando o continente América por este nome.

Tomando o formato da Terra como aproximadamente esférico, espera-se que os alunos reflitam durante esta etapa sobre como é possível descrever um ponto na Terra apenas com dados de latitude e longitude, introduzindo a eles o sistema de coordenadas esférico a fim de proporcionar a visão de que existem outros sistemas de coordenadas além de retangulares que podem se mostrar mais úteis de acordo com o interesse de quem os utiliza.

Além disso, espera-se que os alunos compreendam que o mapa utilizado por “terraplanistas” para sustentar a ideia de que a Terra é plana com o argumento de que esta é a forma real da Terra não passa de uma projeção cartográfica da Terra, assim como outros mapas utilizados ao longo da vida escolar. Por fim, espera-se que eles aprofundem o conhecimento sobre projeções cartográficas através do estudo de algumas, que reflitam sobre a distorção que cada uma causa ao representar a superfície da Terra e os interesses políticos dos países ao escolher determinada projeção como padrão.

É importante ressaltar que apesar de esta sequência didática ser multidisciplinar, as partes de história e geografia não estão tão aprofundadas quanto a parte de matemática, devido à formação da autora. Desta forma, sugere-se elaborar atividades condizentes com o escopo das disciplinas a partir dos tópicos mencionados no roteiro das aulas.

Os principais tópicos que serão abordados nesta etapa são: latitude, longitude, coordenadas esféricas, círculo máximo, mapas utilizados ao longo da história para representar a Terra, as principais projeções cartográficas utilizadas atualmente, suas distorções, a construção geométrica de algumas delas, distorções geradas pela representação da esfera sobre um plano e os mapas-mundi atuais utilizados por diferentes países. Na [seção 7.6](#), sugere-se abordar, com o auxílio do [Capítulo 1](#) e do [Capítulo 2](#), os seguintes cientistas e exploradores: Hiparco, Ptolomeu, Mercator, Cristóvão Colombo e Fernão de Magalhães.

Para esta sequência didática, é imperativo que cada aluno (ou dupla de alunos) tenha acesso a um computador com boa conexão de internet.

É esperado que o aluno entenda que o ser humano representa mapas sobre uma superfície plana por questões de simplificação, mesmo tendo consciência do formato arredondado da Terra. O fato de um mapa ser representado sobre um plano não quer dizer que a Terra também é. Embora pareça banal, este argumento é utilizado por muitos “terraplanistas”, que utilizam uma projeção acreditando ser uma “imagem” da Terra plana.

7.1 Orientações gerais

- Número de aulas: sete.
- Público Alvo: Alunos de Ensino Médio.
- Recursos: *GeoGebra* (acesso em <<https://www.geogebra.org/3d>>).
- Disciplinas envolvidas: Matemática, geografia e história.

7.2 Objetivos

- Introduzir conceito de coordenadas esféricas e associá-lo ao conceito de latitude e longitude.
- Compreender, geometricamente, o conceito de projeção ortogonal.
- Analisar e discutir objetivos e consequências da utilização de determinada projeção cartográfica para a representação de um território do ponto de vista político.
- Compreender as diferentes distorções geradas ao projetar a superfície de uma esfera em um plano.
- Utilizar diferentes recursos computacionais como ferramentas para compreender conceitos cartográficos e matemáticos.
- Combater teorias da conspiração fantasiosas.

7.3 Habilidades da BNCC trabalhadas

Apresentadas na [Parte II](#), as seguintes habilidades desenvolvidas na sequência didática presente: em matemática e suas tecnologias: EM13MAT407 e EM13MAT509 e em ciências humanas: EM13CHS101, EM13CHS106 e EM13CHS206.

7.4 Assuntos abordados

7.4.1 Matemática

- Geometria analítica: coordenadas retangulares e esféricas, projeção ortogonal e estereográfica.
- Geometria espacial: esfera.
- Geometria esférica: círculo máximo

7.4.2 Geografia

- Projeções azimutais, cilíndricas e cônicas.
- Coordenadas geográficas.
- Projeções de Mercator e Peters.
- A escolha de diferentes mapas-mundi políticos feita por cada país.

7.4.3 História

- Grandes navegações
 - Expedição de Cristóvão Colombo.
 - Volta ao mundo de Fernão Magalhães.

7.5 Projeções cartográficas: Fundamentação teórica

De acordo com o [IBGE \(2022\)](#), cartografia é definida como “a representação geométrica plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou de parte desta, apresentada através de mapas, cartas ou plantas”. Nesta seção serão apresentadas diferentes projeções da superfície terrestre sobre um plano e a Terra será aproximada por uma esfera pois devido à pequena escala dos mapas, o achatamento dela é desprezível e não há a obrigação de apresentar sua forma como um elipsoide ([SNYDER, 1987](#), p. 11).

Existem muitas projeções cartográficas, cada uma gerando algum tipo de distorção sendo impossível representar uma superfície esférica no plano sem gerar alguma distorção. Desta forma, de acordo com os interesses e objetivos de quem as utiliza, determinada projeção pode demonstrar-se mais útil que outras.

Segundo o IBGE (2013), há duas formas principais para classificar as projeções cartográficas. Quanto à superfície de projeção e quanto às propriedades da projeção. Quanto às propriedades, as projeções podem ser classificadas como

- (a) Projeção conforme: quando uma projeção respeita os ângulos em torno de quaisquer pontos. Os paralelos e meridianos cruzam-se em ângulos retos
- (b) Projeção equivalente: nome dado a uma projeção que respeita a relação entre as áreas.
- (c) Projeção equidistante: os comprimentos são representados em uma escala uniforme. Porém esta escala se aplica apenas ao longo de linhas específicas do mapa. São menos utilizadas que as duas primeiras.
- (d) Projeção afilática: não conservam nenhuma das propriedades acima, no entanto possuem alguma outra característica relevante. No geral, elas minimizam as distorções de forma e área.

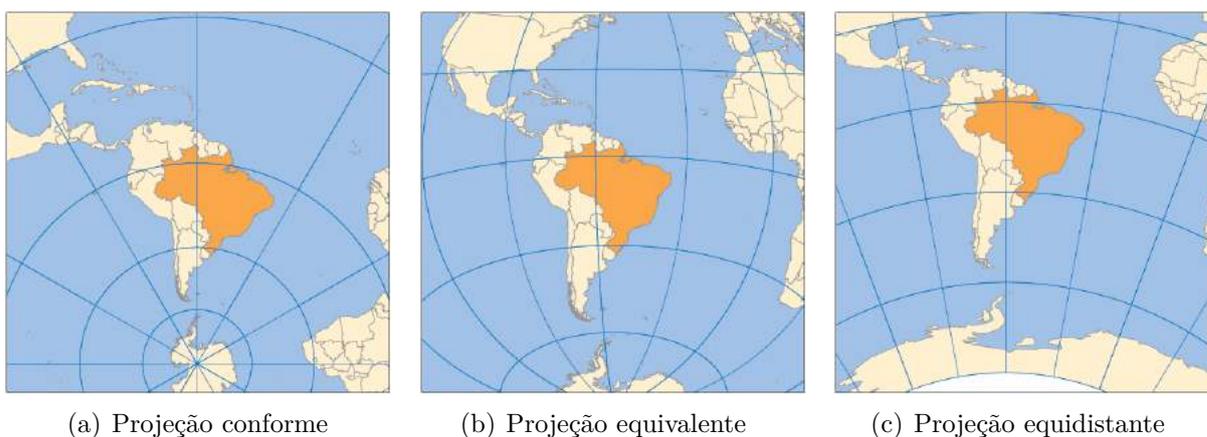


Figura 29 – Tipos de projeção de acordo com a propriedade da projeção.

Fonte: (IBGE, 2013)

Já no que diz respeito à superfície de projeção, as projeções podem ser classificadas como: plana (azimutal), cônica ou cilíndrica. Embora as duas últimas não sejam superfícies planas, ambas podem ser desenvolvidas em um plano sem distorções. O teorema que demonstra a afirmação acima, bem como a afirmação feita previamente sobre a impossibilidade de representar uma superfície esférica sobre um plano sem gerar distorções denomina-se Egrégio ou *Theorema Egregium* e foi demonstrado por Gauss. Esse teorema, assim como sua demonstração podem ser encontrados em Carmo (1995, cap. 4). Uma

explicação mais didática do teorema em questão é fornecida em Rocher (2020). As figuras abaixo apresentam cada uma das superfícies de projeção mencionadas.

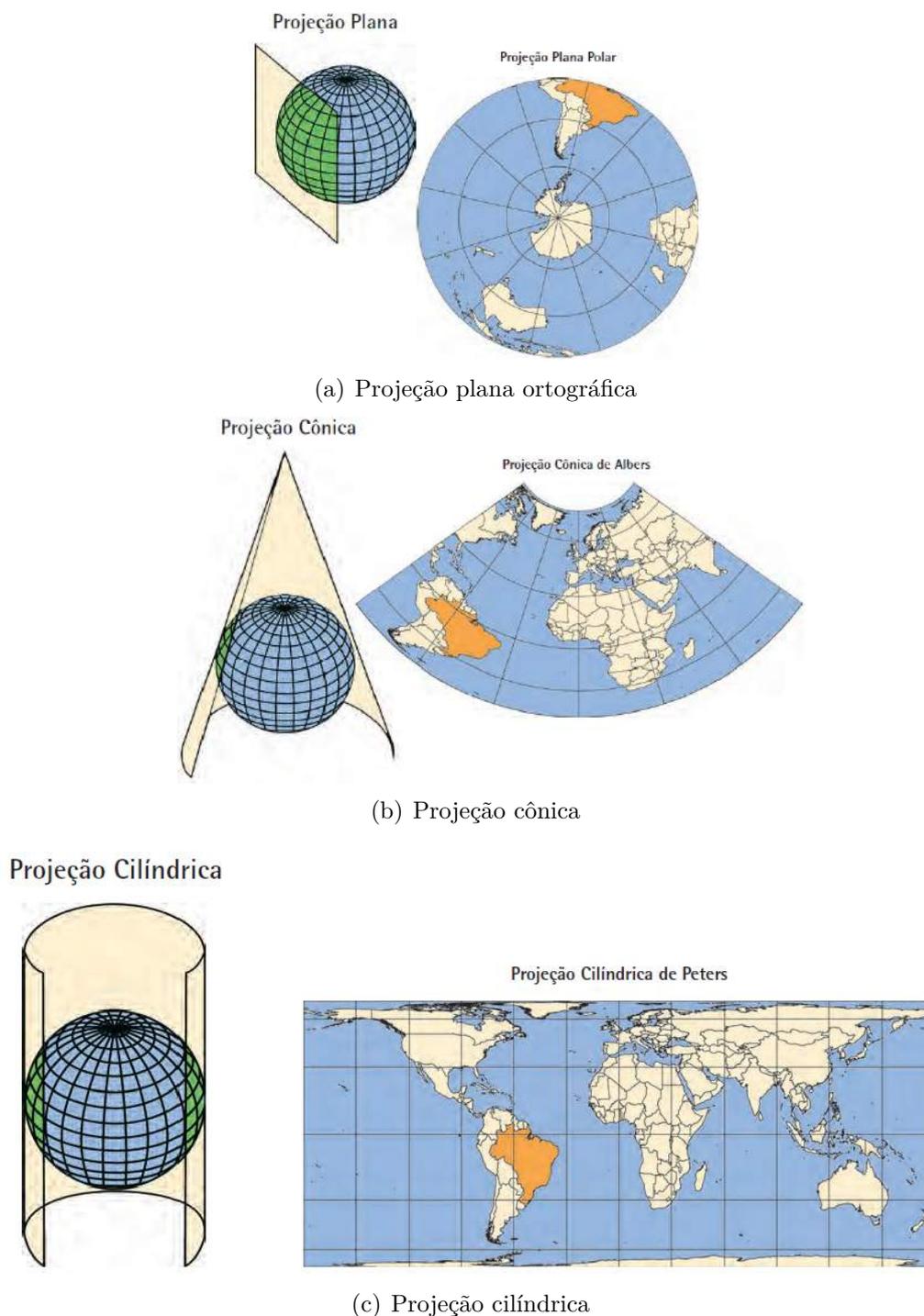


Figura 30 – Tipos de projeção de acordo com a superfície de projeção

Fonte: (IBGE, 2013)

Existe ainda uma terceira forma de classificação das superfícies de projeção quanto ao método de construção. Elas podem ser geométricas, analíticas ou convencionais.

As projeções geométricas são divididas em perspectivas e pseudo-perspectivas. As perspectivas são construídas a partir de um único ponto fixo, denominado ponto de projeção e serão apresentadas na [subseção 7.5.1.2](#). Já as pseudo-perspectivas podem utilizar diferentes projeções geométricas a fim de obter determinada propriedade, como a projeção cilíndrica equatorial estereográfica, em que o ponto de projeção percorre o equador estando sempre no antimeridiano do ponto a ser projetado tangente ao equador.

As projeções analíticas não são construídas geometricamente, são baseadas em leis matemáticas com o objetivo de obter certas propriedades (conservar áreas, distâncias, ângulos). Por fim, as projeções convencionais baseiam-se em princípios projetivos para deduzir uma expressão matemática (PIRES MIGUENS, 1996).

7.5.1 Projeções planas (azimutais)

São projeções sobre um plano tangente ou secante ao esferoide. Elas serão separadas essencialmente em projeções azimutais perspectivas e não perspectivas. As primeiras não são construídas geometricamente a partir de um ponto de projeção, enquanto o segundo tipo é e possui uma particularidade especial, que é a impossibilidade de plotar toda a Terra em uma única projeção (GISGEOGRAPHY, 2021).

Um aspecto interessante sobre todas as projeções azimutais, é que todo azimute de uma direção ¹ a partir do centro da projeção são verdadeiros. Dentre as projeções azimutais não perspectivas será apresentada a equivalente devido a sua utilização equivocada por terraplanistas como evidência de uma Terra plana. Já dentre as projeções azimutais perspectivas, serão abordadas na [subseção 7.5.1.2](#) principalmente as projeções estereográfica e ortográfica devido às suas construções geométricas e simplicidade algébrica.

7.5.1.1 Projeção azimutal equidistante (não perspectiva).

O registro mais antigo que se tem deste tipo de projeção é atribuído a Al-Biruni (séc. XI), um dos maiores ícones da matemática da idade do ouro islâmica, entretanto suspeita-se que ela seja utilizada desde os egípcios. Como o seu nome diz, ela resulta da projeção da superfície terrestre sobre um plano e a escala com relação a um ponto central do mapa é constante. Além disso, todas as direções (azimutes) a partir do centro também estão corretas e o menor caminho (denotado ortodromia ou arco de círculo máximo) passando pelo centro é sempre uma linha reta.

Nesta projeção, a Terra pode ser integralmente representada, no entanto é preferível apresentar apenas um hemisfério pois ocorre uma distorção excessiva ao representar o segundo hemisfério. Por exemplo, a escala leste-oeste no equador é em torno de 60%

¹ Em cartografia, o azimute é o ângulo entre o meridiano que contem os polos (magnéticos ou geográficos) e a direção considerada.

maior que no centro e a escala no ponto da Terra oposto ao que está retratado no centro é infinita (SNYDER, 1987).

Este tipo de projeção possui uma propriedade específica que pode ser utilizada por diversos fins: a partir do ponto central, é simples obter informações sobre distâncias e direções até todo o resto do mundo. Sendo assim, esta projeção é utilizada para mapas-mundi de aviação com determinado aeroporto em seu centro, para monitorar atividades sísmicas e para comunicações de rádio, quando deseja-se focar em uma antenna específica

Mais popular em seu aspecto polar, ou seja, com o polo representado ao centro, esta projeção é particularmente interessante por dois motivos: ela é o emblema da Organização das Nações Unidas (ONU) e o segundo é que ela é usada por terraplanistas como “evidência” de uma Terra plana, pois por ignorância ou má-intenção, eles supõem que ela retrata exatamente como é a Terra, ao invés de uma projeção de uma superfície esférica sobre uma superfície plana.



Figura 31 – Projeção azimutal equidistante apresentada por Alexander Gleason em 1892.

Fonte: (GLEASON, 1892).

Terraplanistas argumentam que há uma parede de gelo que envolve a Terra plana, que é possível de ser visualizada na Figura 31. No entanto, essa parede de gelo é na verdade a Antártica e está distorcida desta maneira pois ao ponto que o centro da projeção é o único ponto que não sofre distorção alguma, sua antípoda (no caso, polo sul) é o ponto que sofre a maior distorção e este ponto é projetado como um círculo ao redor da projeção. Assim, embora seu tamanho e formato real não sejam desta forma, devido à projeção a Antártica fica absurdamente distorcida.

De acordo com ONU (s.d.), a sua bandeira utilizada desde 1947 é composta uma projeção azimutal equidistante da Terra, centrada no polo norte e estendendo-se até

60° de latitude sul.



Figura 32 – Projeção azimutal utilizada na bandeira da ONU.

Domínio público dos Estados Unidos. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:UN_emblem_blue.svg>.

Apesar de o aspecto polar desta projeção ser o mais comum, é possível projetá-la com ponto de tangência em qualquer lugar do mundo, como na próxima figura, em que o ponto de tangência está localizado na cidade de Campinas, no estado de São Paulo.

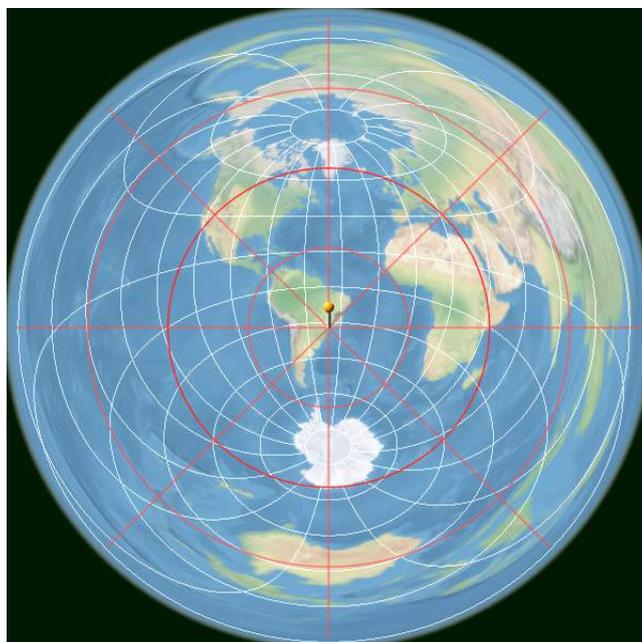


Figura 33 – Projeção azimutal equidistante centrada em Campinas.

Fonte: Flat Earth Map. Disponível em: <<https://www.flatearthlab.com/>>

7.5.1.2 Projeções azimutais perspectivas

Algumas projeções azimutais são obtidas a partir de uma perspectiva geométrica sobre o plano, podendo este ser secante à esfera ou tangente a um ponto desta, normalmente a um dos polos. Elas são classificadas de acordo com o ponto de projeção. Tomando o plano de projeção tangente ao polo sul, por exemplo, o ponto de projeção pode estar no ponto diametralmente oposto, neste caso o polo norte (projeção estereográfica); no centro da esfera (projeção gnomônica) ou no infinito (projeção ortográfica), conforme ilustra a figura abaixo.

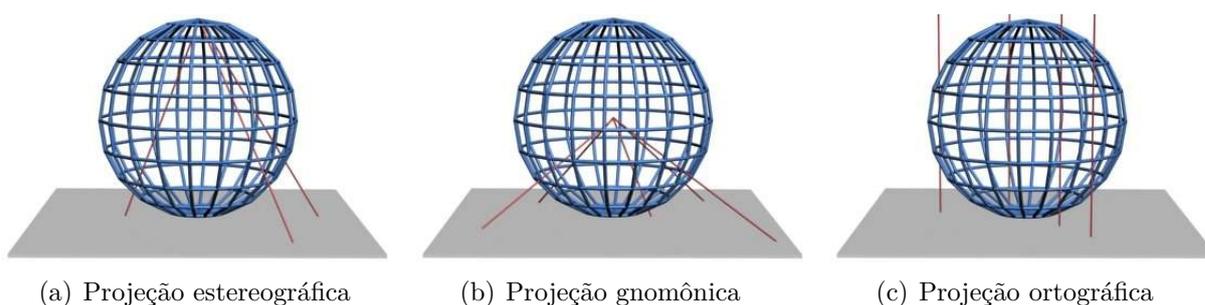


Figura 34 – Projeções azimutais geométricas perspectivas.

Fonte: (IBGE, 2013)

Nos três casos apresentados acima, considerando um dos polos como ponto de tangência, os meridianos projetados no plano são linhas retas se intersectando no ponto de tangência, os paralelos são círculos concêntricos e todos os círculos máximos que passam pelo ponto de tangência são representados como linhas retas (PIRES MIGUENS, 1996, p. 32).

A projeção gnomônica não é conforme, equidistante nem equivalente. Além disso, devido ao ponto de projeção estar no centro da esfera, ela não consegue projetar um hemisfério completo. Sobre ela, há dois tópicos interessantes, o primeiro é o fato de ser provavelmente a projeção mais antiga do mundo, possivelmente desenvolvida por Tales de Mileto em 600 a.C. e o segundo é ela apresentar todos os arcos de círculos máximos, denominados ortodromias, em linhas retas, ou seja, ela representa todos os menores caminhos entre dois pontos na esfera como linhas retas no plano, o que faz com que ela seja uma projeção bastante oportuna na navegação (PIRES MIGUENS, 1996). Apesar de ser uma projeção interessante, do ponto de vista da presente sequência didática ela não é tão relevante quanto as outras duas, por esta razão não será dedicado um tópico a ela.

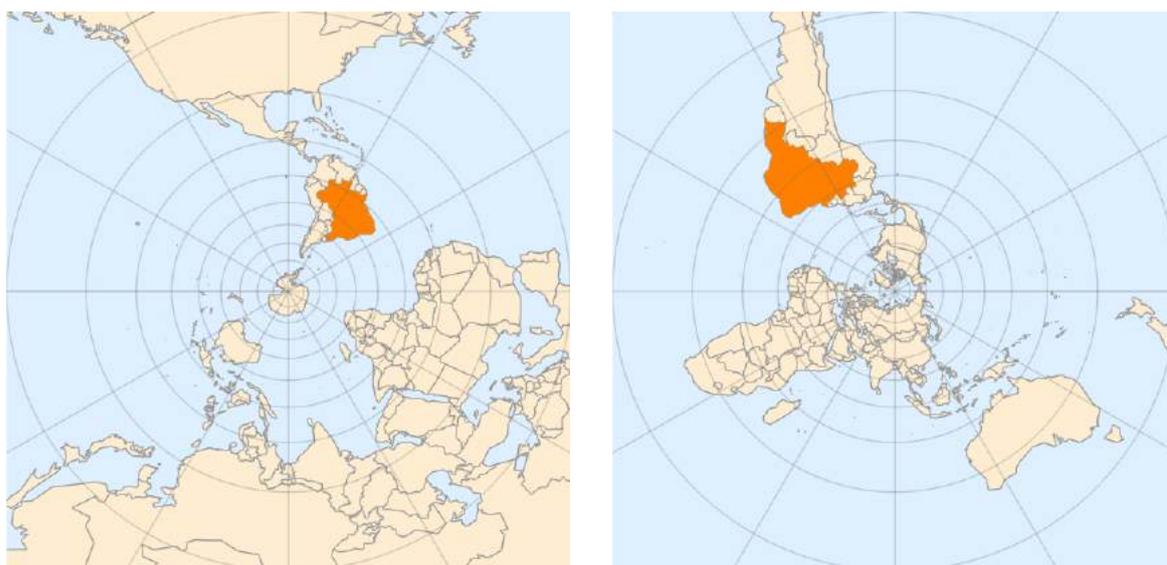
É relevante pontuar que acima foram apresentadas as projeções azimutais perspectivas, mas também é possível realizar projeções perspectivas sobre outras superfícies.

Projeção estereográfica

A projeção estereográfica é conforme, com formas preservadas e não equivalente, distorcendo excessivamente a área dos territórios conforme a projeção afasta-se do centro, ou seja, a escala aumenta. Acredita-se que ela tenha sido concebida por Hiparco (190 - 120 a.C.) através da invenção do astrolábio, conforme descrito na [seção 1.2](#). A primeira descrição geométrica desta projeção ocorreu no tratado *Planisphaerium* de Ptolomeu (90 - 168 d.C.). Ela é a projeção mais antiga de que se tem registro e ainda hoje é uma das projeções mais utilizadas, principalmente para representar áreas polares ou pequenas regiões (ICSM, s.d.).

Segundo [Snyder \(1987\)](#), dentre as projeções perspectivas, ela é a única conforme. A projeção estereográfica que será tratada neste tópico é a de aspecto polar. Assim, conforme apresentado na [Figura 35](#), o plano de projeção é tangente a um dos polos da Terra e o ponto de projeção situa-se no outro polo da Terra.

Para explicar sua construção, suponha o plano de projeção Π tangente ao polo sul. A determinação da projeção estereográfica de um ponto P na superfície terrestre se dá da seguinte forma: dado um ponto $P \neq N$, em que N é o ponto de projeção da esfera, situado no polo norte, a projeção estereográfica do ponto P em Π é o ponto $Q := r \cap \Pi$, em que r é a reta que passa por P e N . Há bibliografias, como [Snyder \(1987\)](#) que utilizam o polo sul como ponto de projeção para realizar a dedução matemática da função projeção estereográfica, mas aqui será utilizado o polo norte.



(a) Projeção estereográfica centrada no polo Sul (b) Projeção estereográfica centrada no polo norte

Figura 35 – Projeção plana (azimutal) estereográfica polar da Terra.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver [Apêndice B](#).

A função projeção estereográfica

Para realizar a dedução da função projeção estereográfica de um ponto, considere uma esfera centrada na origem $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o plano de projeção $\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = -1\}$, conforme mostra a [Figura 36](#).

Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte de S^2 , então $v = \vec{NP} = (a, b, c - 1)$ é o vetor diretor da reta r que passa por N e um ponto $P = (a, b, c)$ qualquer, diferente de N , de S^2 . Assim, a equação vetorial de r é

$$r := \{(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1)\} \quad (7.1)$$

$$r := \{(x, y, z) = (ta, tb, t(c - 1) + 1)\} \quad (7.2)$$

Seja $Q \in r \cap \Pi$ a projeção de P em Π . Desta forma temos $Q := \{(x_1, y_1, z_1) \in r; z_1 = -1\}$ e, portanto, $(x_1, y_1, -1) = (ta, tb, t(c - 1) + 1)$. Assim, $-1 = t(c - 1) + 1 \implies t = \frac{2}{1 - c}$.

Portanto, a projeção $\phi : S^2 - N \rightarrow \Pi$ pode ser definida como

$$\phi(a, b, c) := \left(\frac{2a}{1 - c}, \frac{2b}{1 - c}, -1 \right) \quad (7.3)$$

A aplicação ϕ admite inversa. De fato, considere $u = \vec{NQ}' = (x'_1, y'_1, -2)$ o vetor diretor da reta r' que passa por N e por um ponto qualquer $Q' = (x'_1, y'_1, -1)$ de Π . Então a equação vetorial de r' é

$$r' := \{(a', b', c') = (0, 0, 1) + \lambda(x'_1, y'_1, -2)\} \quad (7.4)$$

$$r' := \{(a', b', c') = (\lambda x'_1, \lambda y'_1, -2\lambda + 1)\} \quad (7.5)$$

Assim, dado um ponto $Q \in \Pi$ deseja-se obter o ponto $P' \in r \cap S^2 - \{N\}$ tal que Q' seja a projeção de P' em Π . Como P' pertence a $S^2 - \{N\}$ e a r' , temos

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (-2\lambda + 1)^2 = 1 \quad (7.6)$$

E, portanto,

$$\lambda = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4} \quad (7.7)$$

Por fim, a partir da [Equação 7.13](#) e da [Equação 7.15](#), podemos concluir que a aplicação $\phi^{-1} : \Pi \rightarrow S^2 - \{N\}$ é definida por

$$\phi^{-1}(x, y, z) := \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4} \right) \quad (7.8)$$

É possível verificar que ϕ e ϕ^{-1} são inversas.

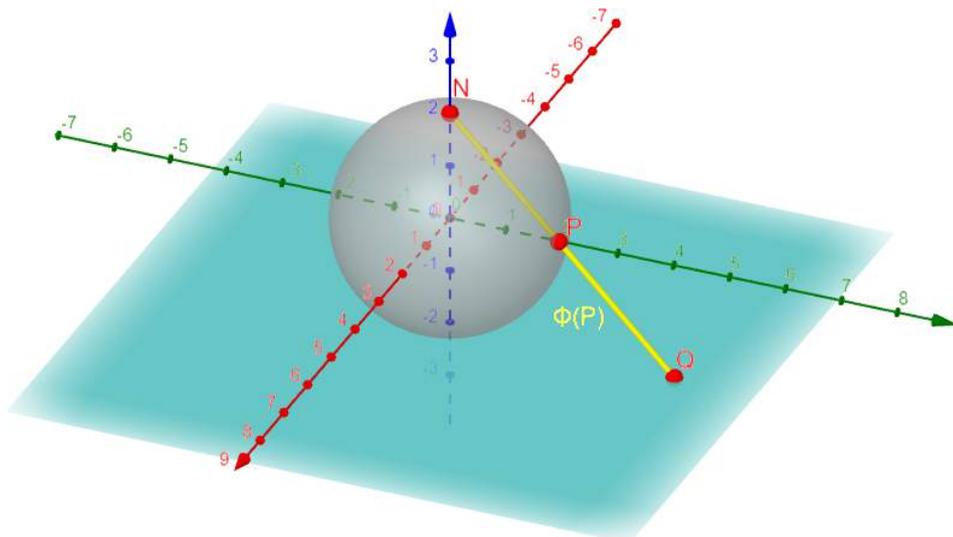


Figura 36 – Representação da construção da projeção estereográfica.

Imagem construída pela autora através do *GeoGebra*.

A dedução da função projeção estereográfica acima foi realizada utilizando a dissertação de Santos (2018) como base.

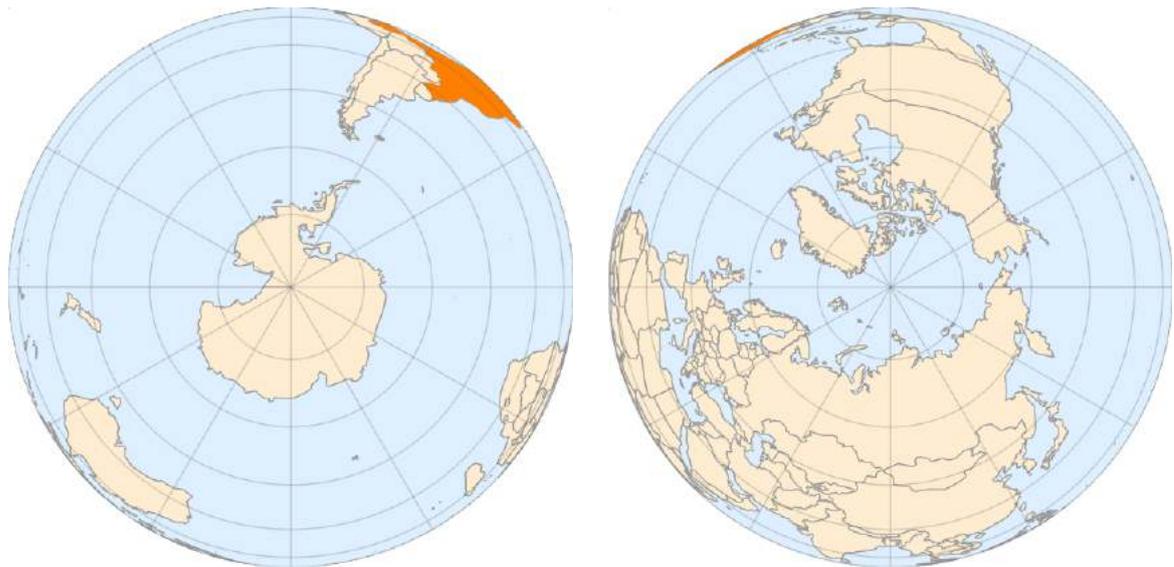
Projeção Ortográfica

Provavelmente conhecida desde os egípcios e utilizada por Hiparco para cálculos astronômicos, ela é a projeção azimutal mais conhecida, embora seja a menos útil para medidas. Esta projeção mostra apenas um hemisfério por vez e a distorção aumenta conforme aproxima-se da borda. Ela é aflática, ou seja, não conserva áreas ou ângulos, parece com um globo em aparência e as direções a partir do centro são verdadeiras (SNYDER, 1987).

Ela projeta geometricamente pontos da esfera no plano com o ponto de projeção no infinito, portanto todas as retas de projeção são ortogonais ao plano. Do ponto de vista matemático, ela é interessante pois a projeção ortográfica do globo terrestre no plano é a projeção ortogonal de seus pontos no plano, que é um conteúdo visto no Ensino Médio ao menos qualitativamente. Assim, os alunos já possuem noções de seu funcionamento.

As direções a partir do centro desta projeção são verdadeiras e ela é utilizada pelo Serviço Geológico dos Estados Unidos em Atlas Nacionais (ALPHA; SNYDER, 1982).

A parte esquerda da figura abaixo apresenta as linhas de projeção, indicando que apenas um hemisfério pode ser projetado e a parte direita mostra como ela representa o hemisfério norte no plano.



(a) Projeção ortográfica centrada no polo sul (b) Projeção ortográfica centrada no polo norte

Figura 37 – Projeção ortográfica da Terra com o Brasil destacado em laranja.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver [Apêndice B](#).

A função projeção ortográfica

Para realizar a dedução da função projeção ortográfica de um ponto, considere um hemisfério cujo centro está na origem $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ e A o subconjunto do plano de projeção $\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = -1\}$, definido por $A = \{(x, y); x, y \leq 1\}$.

Sejam $P = (a, b, c) \in S^2$ e $v = (0, 0, 1)$ um vetor perpendicular ao plano Π . Assim, a equação vetorial de r é

$$r := \{(x, y, z) = (a, b, c) + t(0, 0, 1)\} \quad (7.9)$$

em que v é o vetor diretor de r e, portanto, r é perpendicular ao plano Π . Assim,

$$r := \{(x, y, z) = (a, b, t + c)\} \quad (7.10)$$

Seja $Q \in r \cap \Pi$ a projeção de P em Π . Desta forma temos $Q := \{(x_1, y_1, z_1) \in r; z_1 = -1\}$ e, portanto, $(x_1, y_1, -1) = (ta, tb, t(c - 1) + 1)$. Assim, $-1 = t(c - 1) + 1 \implies t = \frac{2}{1 - c}$.

Portanto, a projeção $\phi : S^2 - N \rightarrow \Pi$ pode ser definida como

$$\phi(a, b, c) := \left(\frac{2a}{1 - c}, \frac{2b}{1 - c}, -1 \right) \quad (7.11)$$

A aplicação ϕ admite inversa. De fato, considere $u = N\vec{Q}' = (x'_1, y'_1, -2)$ o vetor diretor da reta r' que passa por N e por um ponto qualquer $Q' = (x'_1, y'_1, -1)$ de Π . Então a equação

vetorial de r' é

$$r' := \{(a', b', c') = (0, 0, 1) + \lambda(x'_1, y'_1, -2)\} \quad (7.12)$$

$$r' := \{(a', b', c') = (\lambda x'_1, \lambda y'_1, -2\lambda + 1)\} \quad (7.13)$$

Assim, dado um ponto $Q \in \Pi$ deseja-se obter o ponto $P' \in r \cap S^2 - \{N\}$ tal que Q' seja a projeção de P' em Π . Como P' pertence a $S^2 - \{N\}$ e a r' , temos

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (-2\lambda + 1)^2 = 1 \quad (7.14)$$

E, portanto,

$$\lambda = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4} \quad (7.15)$$

Por fim, a partir da [Equação 7.13](#) e da [Equação 7.15](#), podemos concluir que a aplicação $\phi^{-1} : \Pi \rightarrow S^2 - \{N\}$ é definida por

$$\phi^{-1}(x, y, z) := \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4} \right) \quad (7.16)$$

É possível verificar facilmente que ϕ e ϕ^{-1} são inversas.

7.5.2 Projeções cilíndricas

Nesta etapa, serão apresentadas algumas projeções cilíndricas, que são as mais utilizadas em mapas-mundi atualmente. Para apresentar as vantagens e desvantagens de cada uma, será utilizado um parâmetro denominado Indicatriz de Tissot, que são elipses que caracterizam distorções em determinado ponto do mapa através de elipses da seguinte forma:

- Se o mapa conserva ângulos em um ponto, a indicatriz será um círculo;
- Se o mapa conserva áreas, todas as elipses terão a mesma área.

Projeção de Mercator

A projeção mais conhecida mundialmente é a projeção de Mercator, que é uma projeção cilíndrica equatorial conforme, ou seja, a superfície terrestre é projetada sobre um cilindro tangente à linha do Equador e esta projeção conserva ângulos. Ela é classificada como convencional, não sendo construída a partir de um conceito geométrico específico.

Esta projeção mostrou-se muito oportuna para a navegação, pois devido à preservação de ângulos, as direções a partir de qualquer ponto são verdadeiras, podendo ser medidas diretamente no mapa. Outra característica de grande utilidade para a navegação

é que esta projeção apresenta as linhas de rumo², que são as trajetórias utilizadas na navegação, como linhas retas.

Para pontos próximos na superfície da Terra, a linha de rumo ou loxodromia é muito próxima do arco de círculo máximo correspondente a estes dois pontos, ou seja, do menor caminho entre dois pontos. Assim, ela é muito usada na navegação. Por outro lado, para distâncias muito grandes, a loxodromia torna-se muito maior que a ortodromia sendo necessária a substituição da projeção de Mercator por uma projeção plana gnomônica (PIRES MIGUENS, 1996). Além da navegação, esta projeção é a mais comum em Atlas e é utilizada nos mapas de fusos horários.

Um forte ponto negativo desta projeção é sua deformação exagerada em grandes latitudes, sendo impossível de representar os polos. A figura abaixo mostra como a projeção de Mercator deforma áreas através da Indicatriz de Tissot.

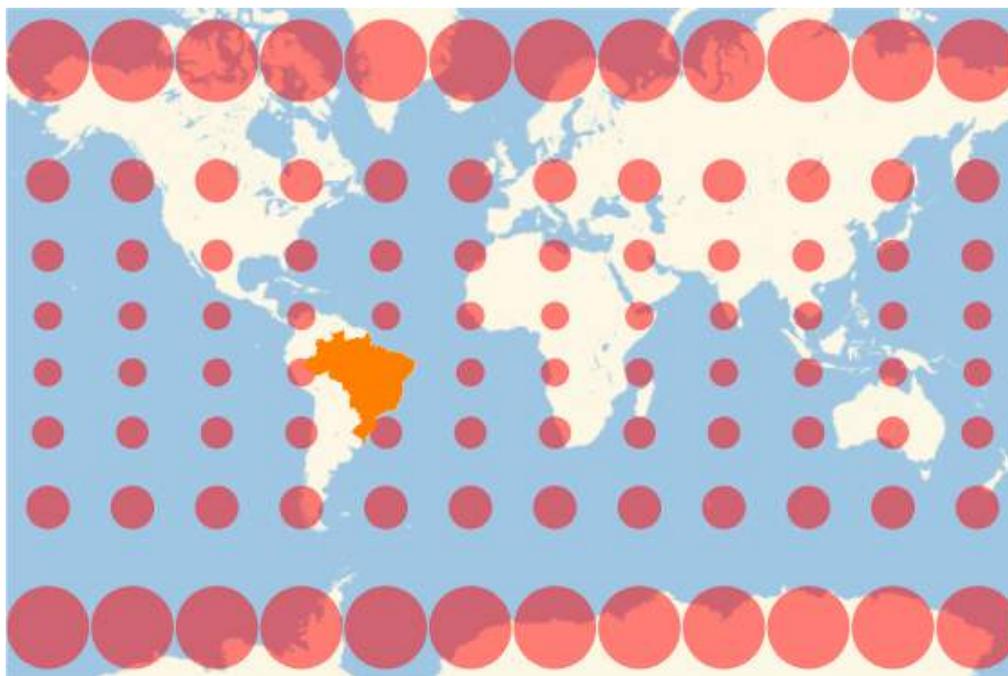


Figura 38 – Projeção de Mercator com indicatrizes de Tissot.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver [Apêndice B](#).

Como a projeção de Mercator é conforme (conserva ângulos), as indicatrizes de Tissot são círculos em todo o mapa. Assim, pode-se afirmar que a deformação da projeção de Mercator acontece na mesma taxa na vertical e na horizontal. As indicatrizes de Tissot também mostram que a área ocupada por um mesmo objeto no mapa será

² *Linha de rumo ou loxodromia*: é o caminho que faz um ângulo constante com os meridianos, assim, ao utilizar uma bússola, o ângulo entre sua agulha e direção da embarcação é mantido constante.

maior a medida que ele afasta-se da linha do Equador, fazendo com que a área dos territórios distorça em função da proximidade destes com os polos, sendo representados com tamanho exageradamente maior quando comparados aos territórios mais próximos à linha do Equador.

Projeção Cilíndrica Ortográfica

A projeção cilíndrica ortográfica é uma projeção perspectiva cujo ponto de projeção está no infinito e a superfície de projeção é um cilindro tangente ou secante à esfera.

A característica que torna esta projeção bastante vantajosa e estudada é o fato de ela ser equivalente, ou seja, ela preserva a razão entre as áreas. Ela foi proposta por Johann Heinrich Lambert em 1772 com o cilindro de projeção tangente ao equador. A partir desta projeção, diversas outras foram propostas com algumas modificações, como: compressão da projeção no sentido leste-oeste, expansão no sentido norte-sul e mudança da interseção entre o cilindro de projeção e a esfera.

Uma das projeções cilíndricas ortográficas estudada nas escolas atualmente foi proposta em 1855 por James Gall. Sua projeção possui paralelos padrão de 45° de latitude norte e sul, ou seja, o cilindro de projeção é secante a estes paralelos. Uma outra projeção do mesmo tipo foi proposta por Walther Behrmann em 1910 (SNYDER, 1987).

Em uma conferência de imprensa em 1973, Arno Peters apresentou uma projeção ortográfica cilíndrica (praticamente igual à proposta por Gall) como uma crítica à utilização da projeção de Mercator que, devido ao aumento excessivo na área próxima aos polos faz com que os países desenvolvidos, no geral localizados mais próximos aos polos, tenham seu tamanho representado de forma exageradamente grande em relação aos territórios que abrangem países em desenvolvimento, como a África, a América Central e do Sul, que são localizados mais próximos à linha do Equador. Além disso, esta projeção tem seu centro na África e não na Europa, como a de Mercator. Ela gerou intenso debate entre cartógrafos sobre o uso de ideologia na construção de mapas e é adotada por grupos internacionais, como ONU (Organização das Nações Unidas), em escolas de alguns países, como o Reino Unido como uma forma de corrigir a marginalização de países em desenvolvimento. O contexto em que ela foi apresentada, durante a Guerra Fria e época de descolonizações, politizou extremamente a região do "Terceiro Mundo", criando uma forma de recolonização deste construída sobre os interesses da Guerra Fria (BARNEY, 2014).

A projeção proposta por Peters tem o cilindro secante à esfera entre os paralelos de 45° e 47° e foi apresentada como algo original e revolucionário, em vez de uma reutilização da projeção ortográfica desenvolvida por Gall (SNYDER, 1987). Hoje, ela é estudada nas escolas na disciplina de geografia sob o nome de projeção de Peters ou projeção de

Gall-Peters. Em detrimento desta conservação, ela distorce as formas, apresentando os territórios mais próximos aos polos mais achatados e os mais distantes dos polos são representados mais afinados e compridos do que são na realidade. Na [Figura 39](#), é possível visualizar a deformação nas formas dos continentes a partir da Indicatriz de Tissot e também inferir que esta projeção não conserva ângulos, uma vez que não há somente círculos.

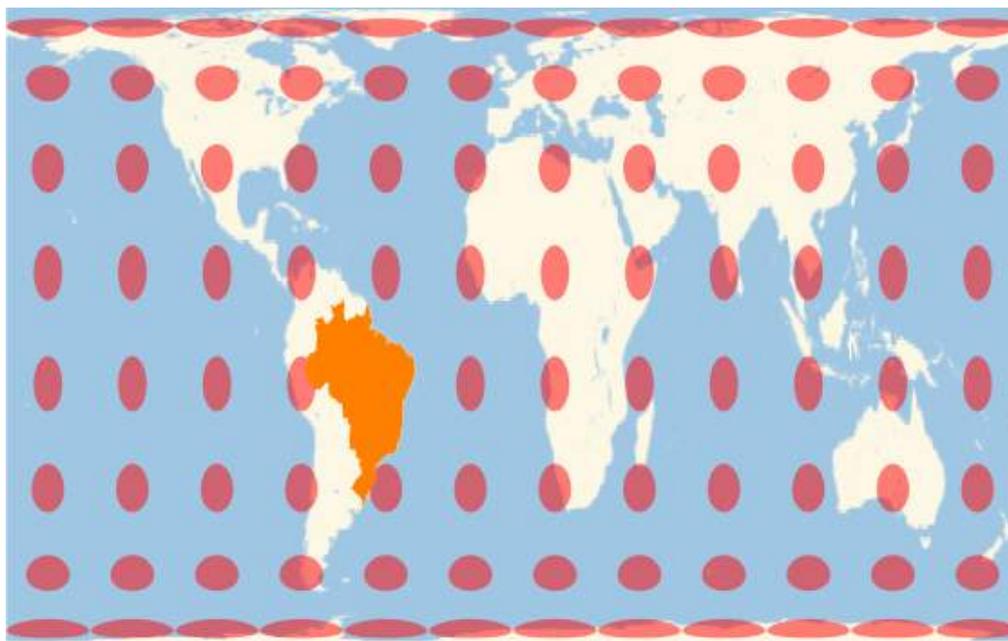


Figura 39 – Projeção de Gall-Peters com indicatrizes de Tissot.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver [Apêndice B](#).

7.5.3 Projeções cônicas

As projeções cônicas são construídas pela projeção de pontos da superfície terrestre sobre a superfície lateral de um cone que envolve a Terra, podendo este ser tangente ou secante a ela. No geral o vértice do cone encontra-se alinhado com o eixo da Terra e ao planificá-lo obtém-se um mapa da Terra. Os meridianos se intersectam no vértice do cone e os paralelos são arcos de circunferência concêntricos cujo centro coincide com o vértice do cone.

Os três tipos principais de projeções cônicas são as projeções equidistante, equivalente e conforme. Há também projeções cônicas perspectivas, entretanto elas são utilizadas raramente. A projeção cônica equidistante foi criada por Claudius Ptolomeu (ver [seção 1.5](#)) em uma versão rudimentar. Sua escala norte-sul é correta em todos os meridianos e ela não é conforme nem equivalente ([SNYDER, 1987](#)).

Abaixo serão apresentadas um exemplo de projeção cônica equivalente e um conforme, denominadas respectivamente, projeções cônicas de Albers e Lambert. Elas não são os únicos tipos de projeções cônicas com estas características, caso deseje-se saber mais sobre outras projeções cônicas, o livro de [Snyder \(1987\)](#) dedica extensas páginas ao tópico.

Projeção de Albers

Esta projeção leva este nome pois foi primeiramente apresentada por Heinrich Christian Albers em 1805. Ela é construída a partir de um cone secante a dois paralelos e é equivalente, ou seja, conserva a proporção entre as áreas. Ao longo desses paralelos a escala é correta em qualquer direção e meridianos e paralelos formam um ângulo de 90° . Um exemplo de mapa-mundi com esta projeção foi apresentado no início da seção, na [Subfigura 30\(b\)](#)

Segundo [GISGeography \(2021\)](#), ela é vantajosa quando deseja-se representar grandes países sem distorção de área. Ao utilizá-la para representar o mapa dos EUA, por exemplo, além da conservação da área, ela apresenta um erro pequeno na escala, de no máximo de 1,25% ao longo das bordas norte e sul e 1% ao centro ([SNYDER, 1987](#) apud [DEETZ; ADAMS, 1934](#)).

Projeção Conforme de Lambert

Concebida no século XVIII por Johann Henrich Lambert, esta projeção é confeccionada a partir de um cone secante à Terra, que por si só já diminui distorções ao longo dos meridianos, uma vez que a distorção aumenta a medida que se afasta do ponto de interseção entre o cone e a esfera. Além disso, é construída matematicamente para ser conforme, de forma que a distorção ao longo dos paralelos e dos meridianos seja a mesma. A escala de distância é aproximadamente constante e aumenta com a distância do paralelo central da projeção.

Uma de suas vantagens é que as linhas retas entre pontos próximos são praticamente ortodromias, ou seja, arcos de círculo máximo, assim ela torna-se muito útil para navegações aéreas ao realizar radiomarcações (marcações através de sinais de rádio, que se propagam por círculos máximos) ([PIRES MIGUENS, 1996](#)).

Ela é útil para representar regiões com grande extensão lateral e pequena diferença de latitude, como Canadá, EUA e Rússia, pois em altas latitudes no mapa-mundi a propriedade da conformidade não é válida devido às grandes deformações.



Figura 40 – Projeção conforme de Lambert.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver [Apêndice B](#).

7.5.4 Outras projeções

Além das superfícies de projeção já apresentadas, existem variações delas, como a azimutal bipolar, que utiliza duas projeções azimutais, uma centrada no polo norte e a outra no polo sul e a projeção policônica que utiliza vários cones sobre a superfície terrestre.

De acordo com o [IBGE \(2013\)](#), a projeção oficial do Brasil é a policônica, que utiliza vários cones como superfície de projeção. O mapeamento é feito a partir da projeção cônica conforme de Lambert de acordo com o padrão definido pela ONU (Organização das Nações Unidas). A projeção policônica em questão é afilática (minimiza distorções, mas não é equivalente, conforme nem equidistante) e diminui a deformação na região em que os meridianos se aproximam, ou seja, a região sul do país.



Figura 41 – Mapeamento oficial do Brasil, feito na projeção policônica.

Fonte: (IBGE, 2013)

Um outro tipo de projeção comumente conhecida é a projeção de Robinson. Ela é uma projeção pseudo-cilíndrica, ou seja, não possui nenhuma superfície de projeção mas possui características semelhantes à cilíndrica. Assim como a projeção oficial do Brasil, a projeção de Robinson é afilática, sendo portanto uma boa opção para fins didáticos, pois apresenta o mundo com menos distorções que as outras.



Figura 42 – Projeção cartográfica de Robinson com o Brasil destacado em laranja.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver [Apêndice B](#).

Devido à minimização das distorções de área direção e forma, além da redução das distorções de massa próximo aos polos, esta projeção é uma das principais utilizada pela ONU em seus mapas-mundi (ONU, s.d.).

A fim de ilustrar como esta projeção minimiza distorções, a figura abaixo mostra as indicatrizes de Tissot para a projeção de Robinson. Comparando-a com a Figura 38 e com a Figura 39, que são, respectivamente, projeções conforme e equivalente, é possível visualizar que as elipses da Figura 43 apresentam-se menos distorcidas, reforçando o caráter afilático desta projeção.

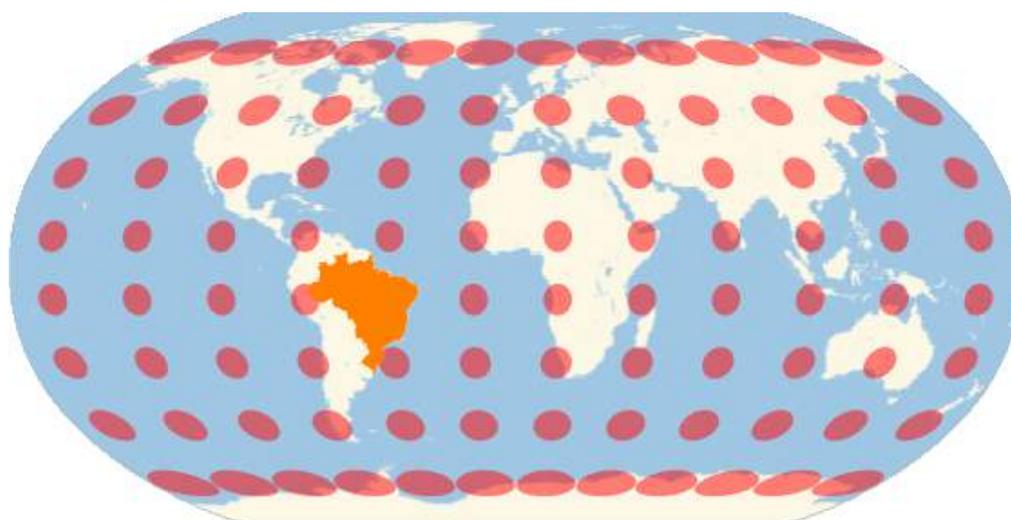


Figura 43 – Projeção cartográfica de Robinson com o Brasil destacado em laranja e indicatrizes de Tissot.

Fonte: Mapa confeccionado pela autora através do software Mathematica. Para consultar o código, ver Apêndice B.

7.5.5 Os diferentes mapas-mundi

Como já mencionado, existem diversas projeções cartográficas para representar a Terra em um plano, todas gerando alguma distorção, cabendo ao interessado em utilizá-las fazer a melhor escolha possível de acordo com seus interesses. Assim, cada país utiliza a projeção cartográfica que melhor lhe convém.

Por exemplo, o mapa-mundi abaixo é amplamente utilizado na China. Nele, a China é representada praticamente em seu centro e não na periferia como é em mapas estudados no Brasil.



Figura 44 – Exemplo de mapa-mundi utilizado na China.

Fonte: Hugo Van der Merwe, CLI. Disponível em: <<https://studycli.org/zh-CN/chinese-culture/china-world-map/>>

A disposição deste mapa pode causar estranhamento, entretanto como é possível observar no seguinte site de uma escola secundária chinesa que expõe os desenhos de alunos de uma classe (que podem ser acessados em <<https://www.0318minde.com/article-2220-1.html>>) a exceção de um, todos os outros desenhos são feitos na mesma disposição do mapa da Figura 44. Isso contribui para elucidar que a imagem de mapa-mundi dos Chineses é como da figura acima. Além da China, outros países da Ásia e da Oceania também concebem o mapa-mundi desta forma.

Existem também mapas que são feitos como forma de confronto, como o da Figura 45, confeccionado desta forma por Stuart MacArthur em 1979 pelo fato de a Austrália estar sempre retratada na região inferior do mapa-mundi e ser objeto de piadas *Down Under*³ por parte de europeus e estado-unidenses. Depois deste, outros mapas-mundi com a mesma proposta (denominados *upside down maps*) foram criados, como o mapa Hobo-Dyer, que é uma projeção equivalente com a Austrália retratada ao centro.

³ Termo utilizado para se referir a Austrália devido a ela estar no hemisfério sul, “abaixo” de todos os outros países em um mapa padrão.

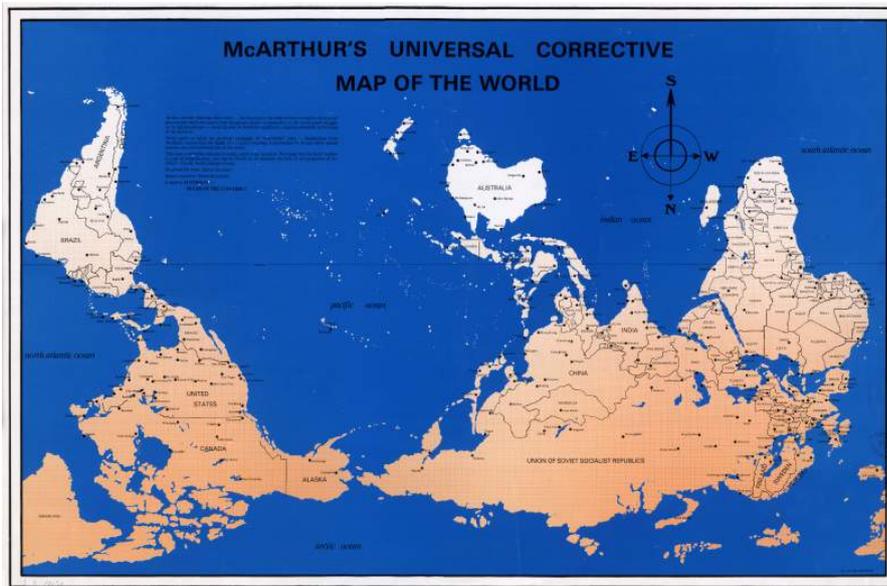


Figura 45 – Mapa-mundi proposto por Stuart McArthur em 1979.

Fonte: Wikimedia Commons. Imagem sob o domínio público. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reversed_Earth_map_1000x500.jpg>

Apesar do aumento da utilização e discussão de projeções “mais democráticas”, como a de Peters ou a apresentação de mapas com uma disposição diferente da eurocêntrica, como os apresentados acima, a projeção de Mercator ainda perdura como a mais conhecida e utilizada. O Google Maps, por exemplo, ainda a utiliza, como apresentado na Figura 46.



Figura 46 – Projeção de Mercator utilizada pelo Google Maps atualmente.

Fonte: Google Maps. Disponível em: <<https://www.google.com.br/maps>>.

7.5.6 Para aprofundar-se em projeções cartográficas

Nas seções anteriores, foi fornecida uma base teórica mínima para o professor conduzir a sequência didática. Há muitas outras projeções cartográficas que não foram apresentadas.

Existem diversas fontes que abordam diferentes projeções cartográficas. No entanto, boa parte delas não está em português, o que não impede de consultá-las graças à ferramenta de tradução do Google Chrome. Abaixo seguem algumas fontes pertinentes para aprender mais sobre as diferentes projeções cartográficas, além das já fornecidas nas referências.

- Map Projections - Wolfram MathWorld. Apresenta uma lista com aproximadamente 60 tipos diferentes de projeções em que é possível clicar sobre elas e obter as equações que fornecem a transformação da coordenada geográfica em coordenada no plano. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/topics/MapProjections.html>>
- Intergovernmental Committee On Surveying and Mapping - Commonwealth of Australia. Apresenta, em linhas gerais, as principais projeções cartográficas. Disponível em: <<https://www.icsm.gov.au/education/fundamentals-mapping/projections>>
- GISGeography. É possível encontrar a explicação e classificação de diferentes tipos de projeção na área de busca. Disponível em: <<https://gisgeography.com/conic-projection-lambert-albers-polyconic/>>
- Map Projections Album - United States Naval Academy. Exibe as principais projeções e suas propriedades com os rios incluídos nos mapas. Disponível em: <https://www.usna.edu/Users/oceano/pguth/md_help/html/cartography/map_projections.htm>

7.6 Aula 1 (História): O conhecimento do formato arredondado da Terra e o “descobrimento” da América.

Esta aula deve ser ministrada por um professor de história. Nela, os mapas apresentados no [Capítulo 1](#) e no [Capítulo 2](#) serão utilizados para realizar um aprofundamento histórico dos períodos e sociedades em que foram construídos.

A historiadora [Teixeira Pina \(2017\)](#) critica a resistência dos professores de história, que argumentam ser imprescindível ter conhecimentos técnicos de cartografia para a utilização de mapas em sala de aula, porém estes mesmos apropriam-se de outros materiais sobre os quais não possuem domínio, como cinema, pintura e métrica para seu processo de ensino-aprendizagem. Portanto, os mapas devem ser problematizados pelos professores de história, assim como já o fazem com outras fontes. Além disso, ela diz

ressalta-se os mapas como testemunhos concretos de um tempo, de uma mentalidade, de uma cultura, seja em seu caráter expansionista, político ou científico. O professor deve se referir ao mapa como construção social, ou seja, um documento elaborado - muitas vezes - com objetivos específicos e permeados de interesses, sobretudo, econômicos e políticos.

A partir de dois mapas de uma mesma região produzido em épocas distintas, a historiadora sugere que o professor trabalhe noções de espaço e como elas se transformaram ao longo da história.

7.6.1 Objetivos específicos

Mostrar como a percepção do espaço pelo ser humano está em constante mudança e apropriar-se de mapas como recursos para o ensino de história, mais especificamente para o ensino do período das grandes navegações.

7.6.2 Recursos necessários

Para desenvolver o que é sugerido na próxima subseção, é necessário um projetor para exibir as imagens dos mapas.

7.6.3 Sugestão de roteiro para a aula 1: mapas-mundi utilizados no período das grandes navegações

Baseando-se na crítica da historiadora [Teixeira Pina \(2017\)](#) e nos mapas apresentados na [Parte I](#), sugere-se que o professor utilize os mapas das [Figura 9](#), [Figura 10](#) e o globo da [Figura 11](#) para abordar o período das grandes navegações e também os mapas das [Figura 12](#) e [Figura 15](#) que surgiram após a “descoberta” da América pelos europeus.

É interessante que o professor aborde em detalhes o percurso de Cristóvão Colombo para tentar convencer as coroas portuguesa e espanhola, enfatizando que em momento algum a esfericidade da Terra foi questionada, conforme explicado no [Capítulo 2](#). Também é pertinente que o professor explique aos alunos os fatores que levaram o pioneirismo ibérico nas grandes navegações.

Além de Colombo, há outras personalidades que são oportunas de retratar, como Américo Vespúcio, Pedro Álvares Cabral e Waldseemüller, autor do primeiro mapa-mundi em que a América aparece com este nome.

Enfim, não pode-se deixar de finalizar o período das grandes navegações sem falar de Fernão de Magalhães, que realizou a primeira circum-navegação da história. Para realizar esta aula, sugere-se o apoio na teoria fornecida pelo [Capítulo 2](#) e pelos livros didáticos do Ensino Médio.

Para finalizar a aula, já adiantando o que será visto em geografia nas aulas seguintes, o professor pode exibir o mapa feito por Mercator em 1541, que até hoje é a projeção cartográfica mais conhecida e utilizada no mundo.

Sugere-se que o professor de história desenvolva melhor este esboço de roteiro de forma a adequá-lo às especificidades da área. Para isso, pode ser viável a consulta de materiais baseados na [BNCC \(2018\)](#) que desenvolveram sequências didáticas na disciplina de história a partir de mapas.

[Starling e Germano \(1999\)](#) apresentam um roteiro muito interessante no portal do professor do MEC, em que uma sequência didática bastante robusta é sugerida para abordar todo este período das grandes navegações que visa, inclusive, que o aluno compreenda a importância da ciência árabe para o pioneirismo português.

Um outro exemplo é a situação de aprendizagem 4 da disciplina de história da apostila produzida pelo governo do estado de São Paulo e implementada nas escolas estaduais no ano de 2022 ([SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, 2022](#), p. 83).

7.7 Aulas 2 e 3 (Matemática): Como localizar um ponto na Terra a partir de suas coordenadas? E qual o caminho mais curto entre dois pontos em uma esfera?

Esta aula é consagrada à matemática e mais especificamente à geometria, através da utilização do *GeoGebra*. Os conteúdos centram-se em estudo de coordenadas geográficas, esféricas e retangulares, além de determinar o caminho mais curto entre dois pontos em uma esfera e observar a distorção do caminho quando projetado em diferentes mapas.

7.7.1 Objetivos específicos

Aprender a localizar um ponto na Terra a partir de suas coordenadas geográficas e aprender a converter as coordenadas geográficas de um ponto em esféricas e retangulares. Compreender que o menor caminho entre dois pontos na casca esférica é um arco de circunferência cujo centro coincide ao da casca. Visualizar como ocorre a distorção do caminho mais curto em certas projeções cartográficas.

7.7.2 Recursos necessários

Para esta aula, é imperioso que cada aluno (ou dupla de alunos) tenha acesso a um computador com internet e que o professor tenha uma conta no *GeoGebra*.

7.7.3 Roteiro para as aulas 2 e 3

Para estas aulas, o professor deve utilizar o seguinte livro do *GeoGebra* <<https://www.geogebra.org/m/yk7wfqty>>, intitulado “Terra, coordenadas esféricas e caminho mais curto” produzido pela autora. O livro é composto de dois capítulos, o primeiro trata de coordenadas geográficas, esféricas e retangulares e o segundo aborda menor caminho entre dois pontos em uma superfície esférica e ilustra como este caminho é projetado em uma superfície de projeção cônica e em uma cilíndrica. As seções que contêm a palavra Atividade no título demandam que o aluno interaja de alguma forma, seja realizando alguma construção ou respondendo a alguma questão. Recomenda-se que cada capítulo seja trabalhado em uma aula.

Antes de iniciar a aula 2, sugere-se que o professor copie o livro para seu perfil e crie uma sala no *GeoGebra* para obter um feedback das atividades feitas pelos alunos nestas aulas. As instruções sobre como criá-la estão disponíveis no tutorial escrito por [Mathias e GeoGebra Team](#) (s.d.). Antes de criar a sala, é importante ressaltar que o professor deve cadastrar uma conta no *GeoGebra* para que a execução da atividade pelos alunos fique salva em seu perfil.

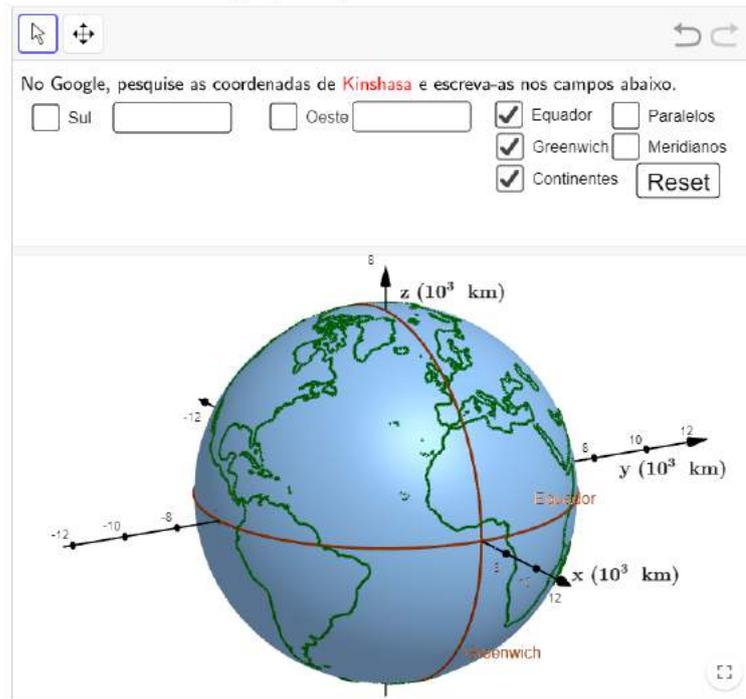
7.7.3.1 Capítulo 1: Sistemas de coordenadas tridimensionais

Após obter acesso ao livro, os alunos podem acessar a primeira seção deste capítulo, denominada “Atividade 1 - Coordenadas geográficas, esféricas e cartesianas”, que inicia com uma breve definição e explicação de coordenadas geográficas, esféricas e cartesianas.

Recomenda-se que o professor tenha acesso a um computador e projete a tela para os alunos a fim de utilizar a explicação contida nesta atividade, introduzir os três sistemas de coordenadas e explicar como realizar a transformação entre coordenadas esféricas e geográficas. O professor também pode realizar esta atividade, apresentada na [Figura 47](#), para mostrar aos alunos como executá-la.

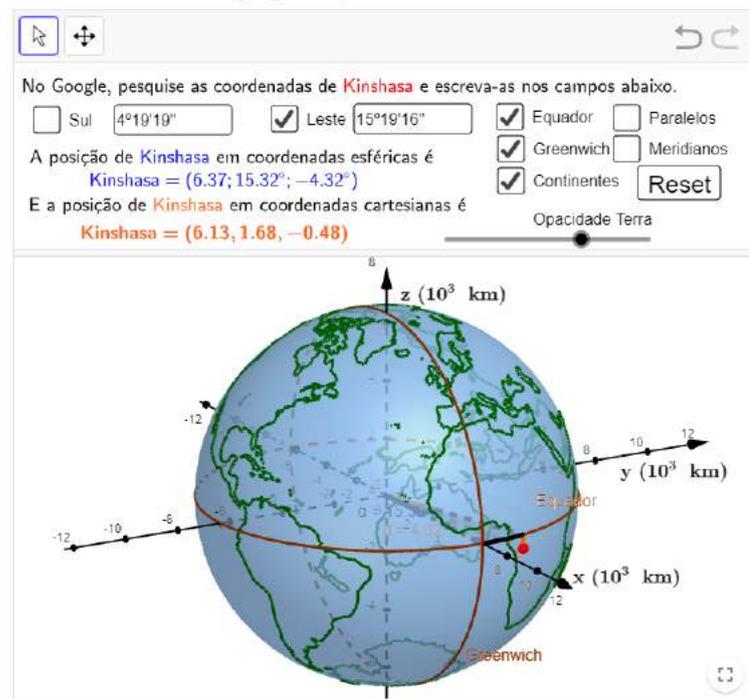
Cada vez que a atividade inicia, ela seleciona uma cidade fora do Brasil ao acaso (dentre as cidades mais populosas de cada continente), pede para que o Google seja utilizado para pesquisar as coordenadas desta cidade e estas sejam escritas nos campos correspondentes. Antes de escrever a latitude, é imperativo sinalizar se ela é Norte ou Sul, mantendo a caixa ao lado esquerdo da palavra Sul em branco caso a latitude seja sul e clicando sobre ela caso a latitude seja Norte. Se nada for feito antes de escrever a latitude, o programa reconhecerá automaticamente uma latitude ao Sul. O mesmo vale para a caixa Leste/Oeste.

Atividade: Coordenadas geográficas, esféricas e cartesianas



(a) Tela inicial da atividade 1.

Atividade: Coordenadas geográficas, esféricas e cartesianas



(b) Tela final da atividade 1 após fornecimento de coordenadas.

Figura 47 – Captura de tela da “Atividade 1 - Coordenadas geográficas, esféricas e cartesianas” do Capítulo 1: Sistemas de coordenadas tridimensionais.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yk7wfqty#material/axdzjdxs>.

Na [Figura 47](#), foram solicitadas as coordenadas de Kinshasa, capital da República Democrática do Congo. Uma vez escritas, o exercício a localiza sobre a Terra e escreve sua posição em coordenadas cartesianas e esféricas, conforme mostra a [Subfigura 47\(b\)](#). É possível mudar a opacidade da Terra com o controle deslizante e esconder ou exibir a linha do Equador, o meridiano de Greenwich, os continentes, os paralelos e meridianos.

Feita a atividade, há duas questões para os alunos responderem. A questão 1 visa que os alunos compreendam o que significa a primeira componente da coordenada esférica, assim é solicitado que eles identifiquem o raio da Terra a partir das coordenadas da cidade. Na segunda questão, os alunos devem escrever os nomes da cidade e suas coordenadas a fim de que elas fiquem registradas para o professor realizar a correção futura.

A próxima seção, intitulada “Atividade 2: Transformação de coordenadas” aborda a conversão de coordenadas esféricas em retangulares. Antes de iniciar a atividade, há uma breve explicação sobre como realizar a transformação de coordenadas junto com um exemplo. Sugere-se que o professor a utilize ao explicar como obter, a partir de coordenadas esféricas, as coordenadas retangulares de um ponto.

Em seguida, a atividade inicia exibindo aleatoriamente uma cidade no Brasil (dentre cinco) em conjunto com suas coordenadas esféricas, pede para que o aluno calcule suas coordenadas retangulares e as escreva no espaço designado. Este exercício realiza a verificação da resposta do aluno: caso ela esteja correta, o texto tornará-se verde, conforme a [Subfigura 47\(b\)](#), caso contrário o texto ficará vermelho.

Atividade: Transformação de coordenadas

Abaixo seguem as coordenadas geográficas da cidade de Rio de Janeiro. Realize a transformação das coordenadas acima em coordenadas retangulares (x,y,z) e escreva o resultado abaixo.

Rio de Janeiro= $(6.37; 316.8^\circ; -22.9^\circ)$

Coordenadas retangulares

Meridianos Paralelos Continentes

Opacidade Terra

(a) Tela inicial da atividade 2.

Atividade: Transformação de coordenadas

Abaixo seguem as coordenadas geográficas da cidade de Rio de Janeiro. Realize a transformação das coordenadas acima em coordenadas retangulares (x,y,z) e escreva o resultado abaixo.

Rio de Janeiro= $(6.37; 316.8^\circ; -22.9^\circ)$

Coordenadas retangulares

Meridianos Paralelos Continentes

Opacidade Terra

(b) Tela final da atividade 2 em caso de resposta correta.

Figura 48 – Captura de tela da “Atividade 2: Transformação de coordenadas” do Capítulo 1: Sistemas de coordenadas tridimensionais.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yk7wfqty#material/cx2epy6h>.

Realizada esta atividade, há duas questões: a primeira pede para o aluno escrever o nome da cidade da atividade e suas coordenadas retangulares. Já a segunda questão tem como objetivo ilustrar a diferença entre coordenadas geográficas e esféricas, pois estas últimas terão sempre o mesmo valor (igual ao raio da Terra) para a primeira componente na superfície da Terra nos modelos que ela é considerada esférica, como este em questão. Portanto, quando a Terra é aproximada por uma esfera, as coordenadas esféricas não apresentam diferenças práticas quando comparadas às geográficas. Assim, para visualizar a diferença entre elas, é proposto sejam determinadas as coordenadas esféricas de um ponto a uma determinada altitude, mais especificamente de um satélite, que possua as mesmas coordenadas geográficas da cidade sorteada.

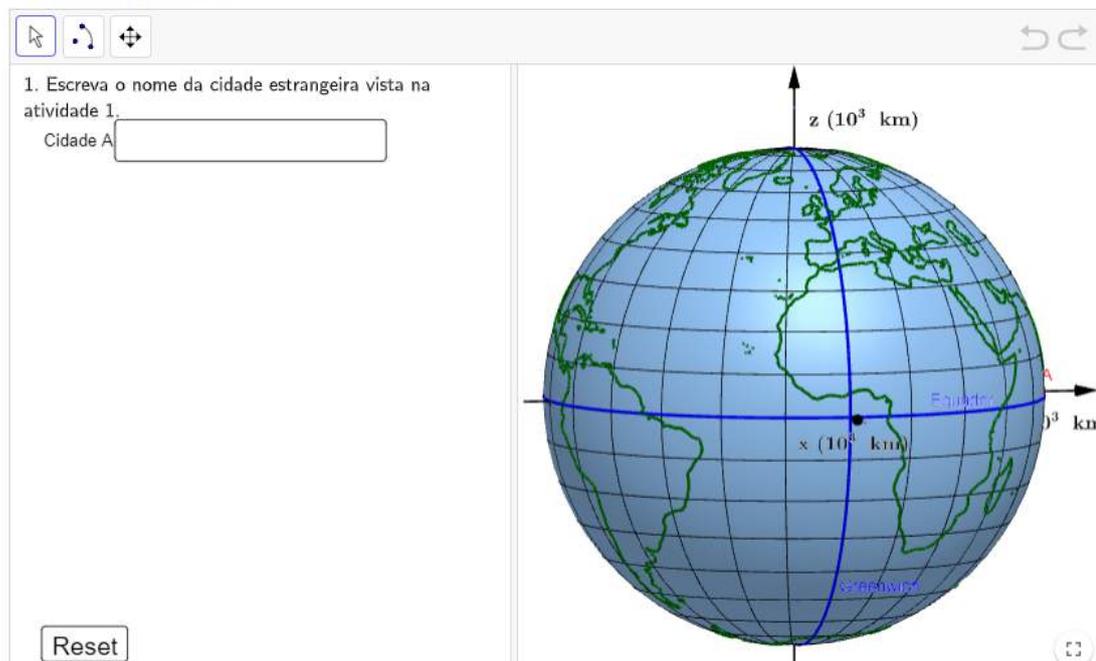
7.7.3.2 Capítulo 2: Caminhos mais curtos na esfera

O capítulo 2 inicia-se com a “Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos” cuja construção foi inspirada no applet construído no *GeoGebra* por [Cambré e Mathias \(s.d.c\)](#) que ilustra que o caminho mais curto entre dois pontos na superfície de uma esfera é sempre um arco de circunferência cujo centro coincide com o da esfera. Na cartografia, este arco de circunferência denomina-se ortodromia.

Nesta atividade, cuja tela inicial é apresentada na [Subfigura 49\(a\)](#), o aluno deve fornecer o nome e as coordenadas retangulares das cidades vistas nas atividades exibidas na [Figura 47](#) e na [Figura 48](#), conforme solicitado. Lembrando que no *GeoGebra*, o separador decimal é o ponto e as coordenadas retangulares são separadas por vírgula.

Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos

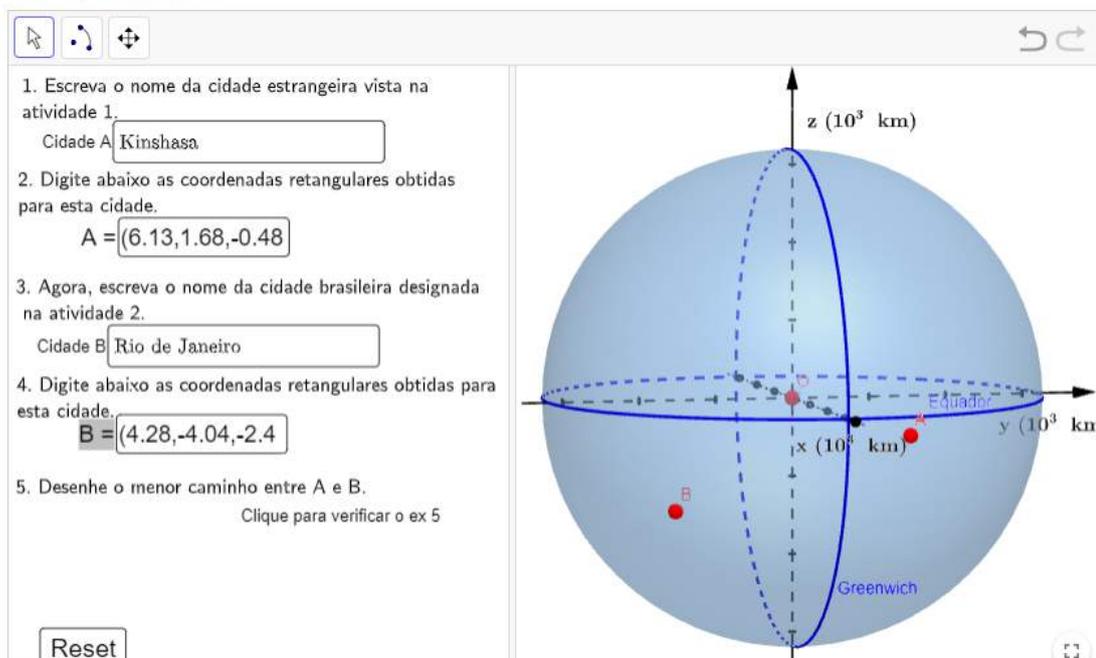
Autor: Angélica De Salvo Miotti



(a) Tela inicial da atividade 3.

Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos

Autor: Angélica De Salvo Miotti



(b) Tela da atividade 3 após fornecer coordenadas das cidades.

Figura 49 – Captura de tela da “Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos” do capítulo Caminhos mais curtos na esfera.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yk7wfqty#material/jueuwtfg>.

Após localizar as duas cidades, a atividade solicita que o aluno desenhe o menor caminho entre A e B. A única ferramenta de desenho disponível para ele utilizar é o arco de circunferência. Assim, ele deve selecionar primeiro o centro do arco e depois os pontos A e B. Em seguida, é possível verificar a construção clicando sobre a área indicada na [Subfigura 49\(b\)](#). Ao clicar no local indicado, a própria atividade verifica se a construção foi feita corretamente e, em caso positivo, um caminho alternativo entre as duas cidades passando por um ponto M é exibido.

A [Figura 50](#) exibe como fica a atividade logo após a verificação da construção do caminho mais curto entre A e B. Nesta etapa, o aluno pode comparar as distâncias do menor caminho com a de qualquer outro arco entre A e B possível na superfície da Terra apenas movendo o ponto M.

Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos

Autor: Angélica De Salvo Miotti

1. Escreva o nome da cidade estrangeira vista na atividade 1.
Cidade A:

2. Digite abaixo as coordenadas retangulares obtidas para esta cidade.
A =

3. Agora, escreva o nome da cidade brasileira designada na atividade 2.
Cidade B:

4. Digite abaixo as coordenadas retangulares obtidas para esta cidade.
B =

5. Desenhe o menor caminho entre A e B.
Acertou! Clique para verificar o ex 5

6. Mova o ponto M e veja como a distância do caminho em laranja se altera.
Distâncias:
Verde = 6619.1 km
Laranja = 7229.53 km

Reset

The 3D globe shows a coordinate system with axes labeled z (10^3 km), x (10^3 km), and y (10^3 km). A green arc represents the shortest path between points A and B. A yellow point M is on the globe, and an orange arc represents an alternative path from A to B passing through M. The label 'Greenwich' is visible on the globe.

Figura 50 – Tela final após a conclusão “Atividade 3: Menor caminho entre dois pontos” em caso de resposta correta.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yk7wfqty#material/jueuwtfg>.

Por fim, há uma questão que pede para que o aluno pesquise a distância entre as duas cidades em questão através do [Google Maps](#) e indique na caixa de resposta o valor encontrado. Para as cidades de Kinshasa e do Rio de Janeiro, inserindo no Google Maps as coordenadas geográficas correspondentes às fornecidas na [Subfigura 47\(a\)](#) e [Subfigura 48\(a\)](#) que são, respectivamente, as coordenadas do Cristo Redentor e do Aeroporto de Kinshasa-Ndolo, o Google Maps exibiu o valor de 6.608,15 km para a menor distância entre elas ao

longo da superfície terrestre. Assim, a distância de 6.619,1 km calculada pelo *GeoGebra* na [Figura 50](#) é 0,17% maior que a calculada pelo Google Maps.

Finalizada esta atividade, há mais dois applets desenvolvidos por Chris Cambré sobre como o caminho mais curto entre duas localidades na Terra são projetados sobre um mapa. O primeiro exibe a projeção cônica de Lambert lado a lado com a Terra e como o menor caminho entre duas localidades na superfície terrestre é retratado nessa projeção (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.f). Já o segundo mostra a projeção de Mercator lado a lado com a Terra e como o menor caminho entre dois pontos na superfície terrestre é apresentado por essa projeção (CAMBRÉ, s.d.).

Sugere-se a exibição desses dois applets para introduzir dois aspectos aos alunos: o primeiro é que mapas-mundi não são obrigatoriamente cilíndricos e o segundo é que ambos distorcem a superfície terrestre, cada um a sua maneira, podendo inclusive mencionar que toda projeção da superfície terrestre sobre um plano desencadeará distorções.

7.8 Aulas 4 e 5: O mapa da Terra plana e outras projeções cartográficas.

Esta aula deve ser apresentada por um professor de geografia que introduzirá as principais projeções cartográficas, desconstruirá argumentos de terraplanistas sobre o mapa da Terra plana e abordará questões como eurocentrismo e disposição do hemisfério norte acima do sul nos mapas.

7.8.1 Objetivos específicos

Apresentar diferentes tipos de projeções cartográficas, explorando suas vantagens e desvantagens, com enfoque especial na projeção azimutal equidistante, devido a sua utilização por terraplanistas e nas projeções de Peters e Mercator. Além disso, problematizar a utilização de mapas como instrumento de domínio e poder, através da exibição dos mapas das Figuras 45 e 44.

7.8.2 Recursos necessários

O professor precisa ter acesso a um computador com projetor para apresentar as diferentes projeções aos alunos e com acesso à internet. Cada dupla de alunos precisa ter um dispositivo com acesso à internet, preferencialmente um computador.

7.8.3 Roteiro de aula

O professor deve iniciar a aula exibindo o mapa da [Figura 31](#) com o seguinte título “Terraplanistas afirmam que este é o mapa da Terra plana”. Em seguida, utilizando a [Capítulo 3](#) e a [subseção 7.5.1.1](#) como material de apoio, o docente deve explicar que alguns terraplanistas acreditam que este mapa é a representação da Terra plana, que inclusive argumentam que a ONU tem conhecimento disto devido ao seu emblema, que apresenta o mesmo mapa. Dada a explicação, o professor deve relembrar os alunos o experimento realizado anteriormente, (olhar [seção 6.6](#)) “demonstrando” que a Terra não é plana e questioná-los: se a Terra é arredondada e o mapa não é falso, uma vez que ele é utilizado pela ONU, de que forma ele é construído para adquirir este formato deveras atípico?

Realizada esta indagação, o professor deve explicar que a representação de uma esfera no plano sempre implica algum tipo de distorção e, portanto, todo mapa em 2D distorce alguma característica da superfície terrestre, cabendo ao interessado em realizar a projeção escolher o que é necessário conservar e o que é possível distorcer (a fim de facilitar a visualização para os alunos, o professor pode levar meia casca de laranja na sala de aula e mostrar o que acontece ao tentar planificá-la na parede). Assim, o professor deve introduzir o conceito de “projeção cartográfica” detalhando as propriedades das projeções (conforme, equivalente, equidistante) e os tipos de projeção de acordo com a superfície (plana, cônica, cilíndrica), apresentando a [Figura 7.5](#).

Depois, o professor deve exemplificar alguns tipos de projeções, abordando suas vantagens e desvantagens, iniciando pela projeção Azimutal Equidistante, que é justamente a projeção utilizada erroneamente pelos terraplanistas para reforçar sua crença. Recomenda-se mencionar seu uso na aviação e navegação para traçar rotas a partir do ponto central, pois as distâncias a partir deste ponto são verdadeiras.

Além da projeção azimutal equidistante, é pertinente que o professor apresente uma projeção cônica, preferencialmente a projeção cônica de Lambert por ser bastante conhecida e vantajosa para representar países com grande extensão leste-oeste. E por fim, apresente algumas projeções cilíndricas, com enfoque para as de Mercator e Peters, mostrando a sobreposição das duas no ítem 5 do site <https://map-projections.net/compare.php?p1=gall-peters&p2=mercator-84&w=1&sps=1> e solicitando que os alunos apontem a diferença entre elas. Na mesma página da internet, o professor pode explicar como a Indicatriz de Tissot funciona para mostrar a distorção em diferentes pontos do mapa. Com as observações dos alunos sobre as diferenças entre as duas projeções, o professor deve explicar as principais críticas feitas à projeção de Mercator por cartógrafos.

Na segunda aula, os alunos devem ser divididos em duplas com a condição que cada uma tenha acesso à internet, receber a folha exibida no [Apêndice A](#) e realizarem a atividade proposta. A atividade propõe acessar dois sites em inglês e caso necessário, é

possível traduzi-los para o português acessando-os pelo Google Chrome. Sugere-se que o professor de geografia enriqueça a atividade com outros exercícios.

Esta atividade tem como objetivo que os alunos comparem as diferentes projeções cartográficas, discutam as distorções atreladas a cada uma e reflitam sobre a utilização delas em diferentes contextos, sobretudo a projeção de Mercator.

Finalizada esta atividade, a segunda etapa da aula trata-se de problematizar a concepção de mapa-mundi eurocêntrico. Assim, o mapa da [Figura 45](#) deve ser exibido aos alunos, devendo estes expressarem suas impressões sobre esta projeção, que devem ser registradas na lousa e problematizadas pelo professor, comparando a localização e tamanho de países e continentes nesta projeção e nas usuais. Então o professor pode apresentar o mapa da [Figura 44](#) e questionar os alunos sobre o que pretende-se destacar com um mapa nesta disposição e para quais países sua utilização pode ser vantajosa.

Para concluir a aula, deve-se ressaltar que não existe uma projeção mais correta e que a escolha de qual projeção utilizar e da disposição do mapa (qual ponto cardeal acima, qual continente ao centro) depende dos interesses e objetivos de quem as utiliza.

7.9 Aulas 6 e 7 (Matemática): Manipulação das projeções azimutais perspectivas no *GeoGebra*

Estas duas aulas concentram-se na construção geométrica e visualização de projeções ortográfica e estereográfica de um ponto, um segmento de reta ou um arco de circunferência no plano. Projeção ortogonal é um assunto já estudado no Ensino Médio e abordado no ENEM de forma recorrente nos últimos anos, inclusive em contextos de cartografia ([DESCOMPLICA, s.d.](#)). Assim, além de desenvolverem determinadas competências propostas pela BNCC, as atividades propostas nestas aulas, mais especificamente sobre a construção geométrica de projeções ortográficas, são bastante relevantes para que os alunos saibam como se dá a construção gráfica dessas projeções.

7.9.1 Objetivos específicos

Determinar a projeção ortogonal de um ponto no espaço, construir geometricamente a projeção ortogonal de segmento de reta e arco de circunferência sobre um plano. Visualizar a distorção da projeção azimutal ortográfica de um arco de circunferência, correspondente ao caminho mais curto entre dois pontos em um hemisfério.

Construir geometricamente a projeção azimutal estereográfica de um ponto e de uma curva na esfera. Visualizar a distorção da projeção do caminho mais curto e compará-lo a uma reta. Verificar a conservação de ângulos entre curvas nesta projeção através da medida do ângulo entre duas curvas na esfera e de suas respectivas projeções.

Compreender, enfim, em conjunto com o que foi aprendido nas aulas 4 e 5 que uma projeção azimutal não corresponde ao “mapa da Terra plana” e sim a um conjunto de métodos matemáticos para representar a superfície arredondada da Terra sobre um plano.

7.9.2 Recursos necessários

Para esta aula, é mandatório que cada aluno tenha acesso a um computador com internet e que o professor tenha uma conta no *GeoGebra*.

7.9.3 Roteiro para as aulas 6 e 7

Estas duas aulas concentram-se no estudo de projeções ortográficas e estereográficas. Será proposto que os alunos construam ambas as projeções azimutais e que eles manipulem projeções cilíndricas ortográficas e estereográficas já previamente construídas.

O professor deve iniciar a aula explicando como as projeções azimutais perspectivas são construídas, com enfoque nas projeções azimutais ortográfica e estereográfica. Para isto, recomenda-se que o professor se apoie na fundamentação teórica fornecida em [subseção 7.5.1.2](#) e em livros didáticos do Ensino Médio que abordam projeção ortogonal ou no livro [Lages Lima et al. \(2004\)](#).

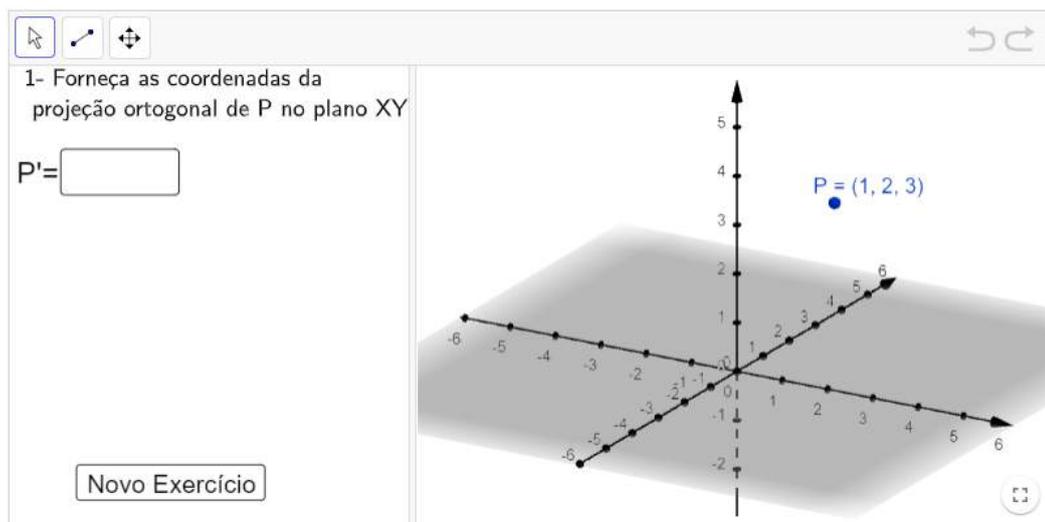
Após a explicação sobre projeções ortográficas, o professor deve utilizar o seguinte livro do *GeoGebra* <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk>>, intitulado “Projeções Cartográficas” e produzido pela autora que contém atividades que devem ser executadas pelos alunos no decorrer das aulas.

Assim como explicado na [subseção 7.7.3](#), o professor deve criar uma sala no *GeoGebra* para os alunos executarem o livro e serem avaliados.

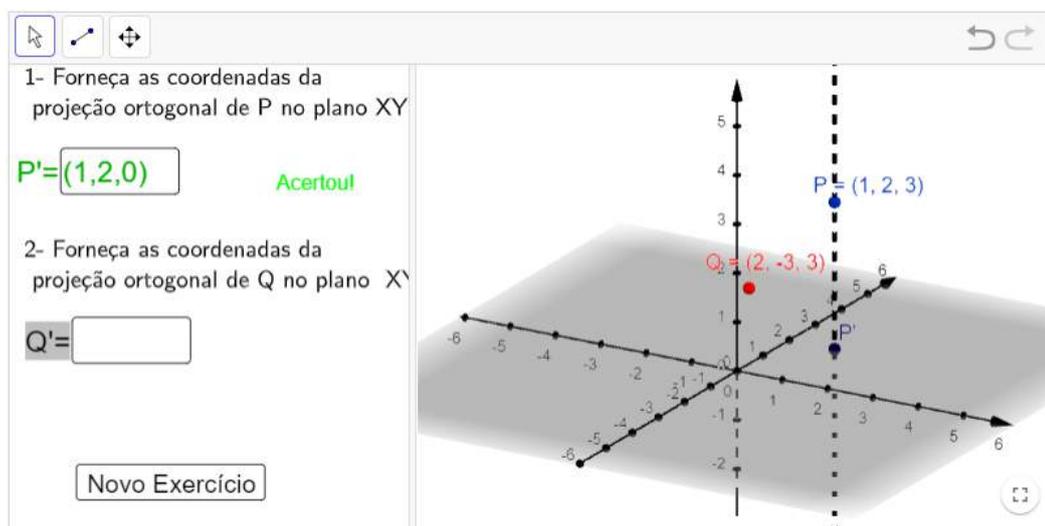
7.9.3.1 Capítulo 1: Projeções ortográficas

Este capítulo é composto por quatro seções, sendo três de atividades sobre projeção plana ortográfica, cada uma contendo instruções e exercícios que o aluno deve realizar. A última seção trata-se de projeção cilíndrica ortográfica, nela o aluno não é solicitado a completar nenhuma tarefa.

A captura da tela do início da “Atividade 1 - Projeção de um ponto e de uma curva” está exibida na [Subfigura 51\(a\)](#). Assim, o aluno deve fornecer as coordenadas da projeção ortogonal do ponto P, escolhido ao acaso, no plano XY e em seguida fazer o mesmo com o ponto Q também escolhido ao acaso, conforme ilustra a [Subfigura 51\(b\)](#).



(a) Tela inicial da atividade 1.



(b) Tela da atividade 1 após resposta correta à primeira questão.

Figura 51 – Captura de tela da “Atividade 1 - Projeção de ponto e segmento de reta” do capítulo Projeções Ortográficas.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/s2ut85y8>>.

Quando o aluno insere as coordenadas da projeção ortogonal de Q no campo designado, a atividade apresenta-se como na [Figura 52](#). Então é solicitada a construção da projeção ortogonal do segmento PQ.

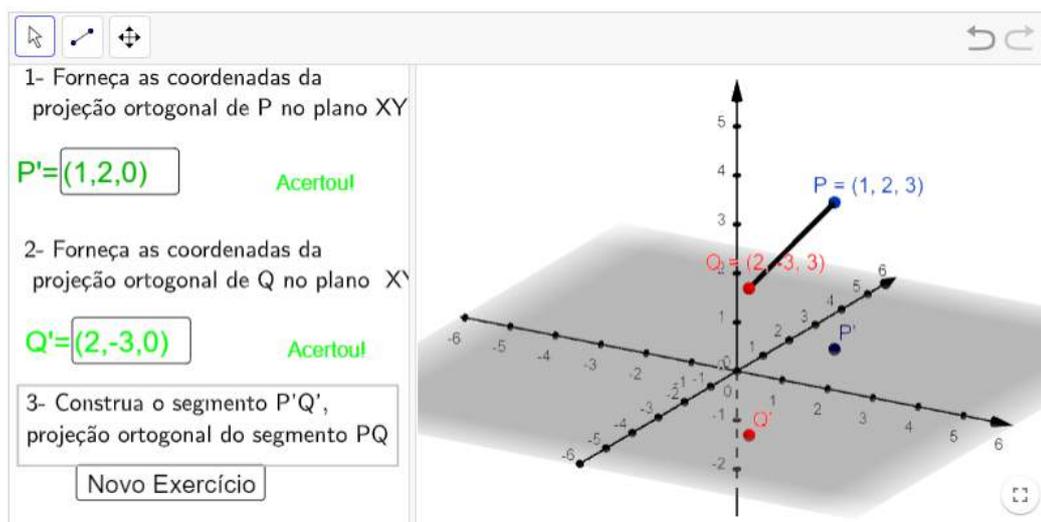


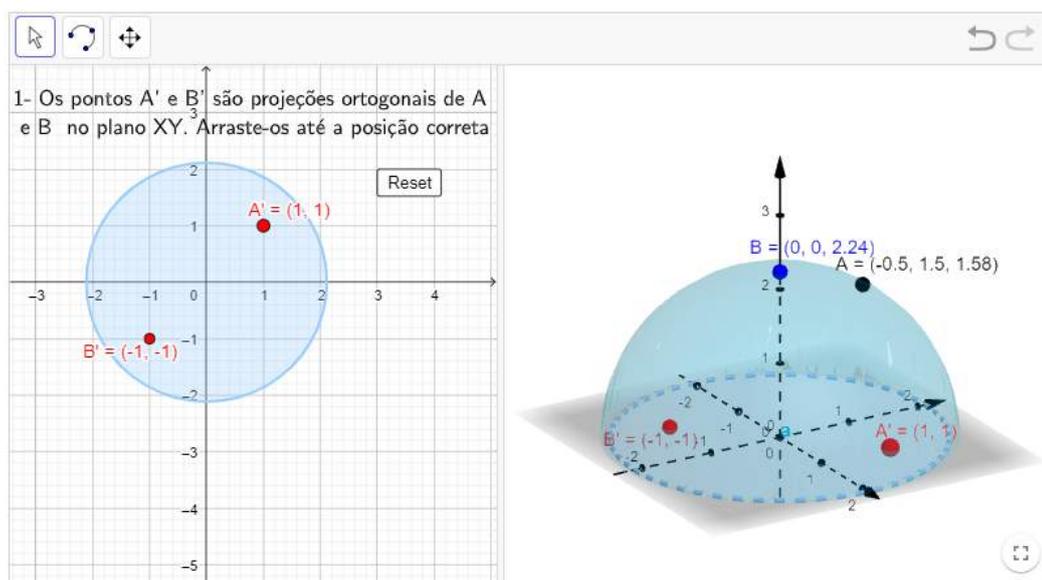
Figura 52 – Captura de tela final da “Atividade 1 - Projeção de ponto e segmento de reta”.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/s2ut85y8>>.

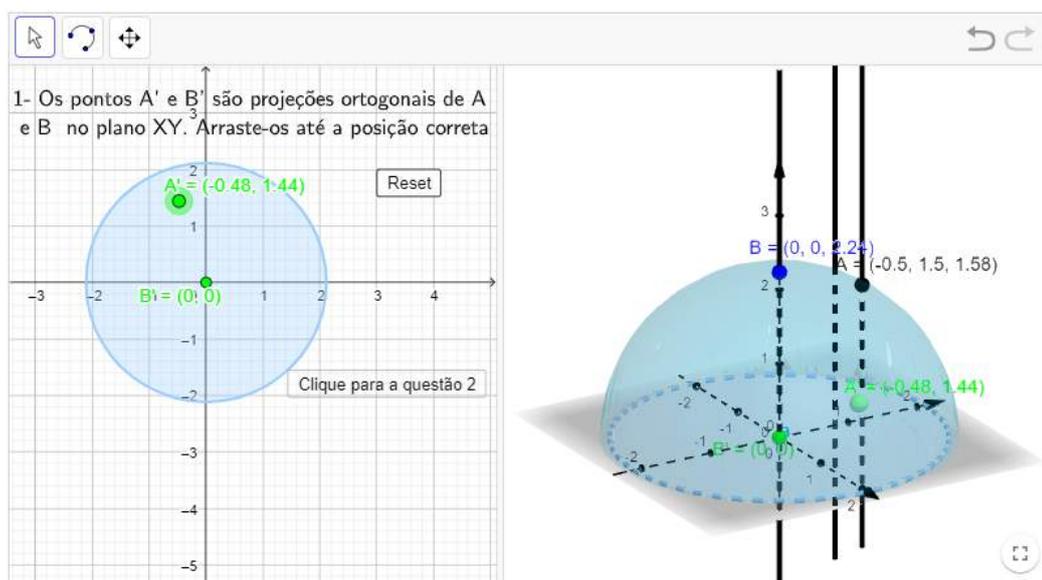
Assim, a atividade 1 objetiva que o aluno aprenda ou relembre como determinar a projeção ortogonal de pontos e de segmento de reta sobre o plano XY.

A “Atividade 2 - Projeção de ponto e curva na esfera” por sua vez já possui um formato mais compatível com a projeção ortográfica de um hemisfério terrestre, considerando a Terra por uma esfera. Ela inicia-se com um hemisfério cujo círculo de maior área, tangente ao plano XY, seja representado no plano 2D, onde também são apresentadas as instruções para a realização desta atividade. Sugere-se que o professor faça uma analogia entre esta atividade e a projeção ortográfica de um hemisfério terrestre.

A [Figura 53](#) mostra o início da atividade. O aluno deve arrastar os pontos A' e B', respectivamente projeções ortogonais de A e B até a posição correta. Quando eles atingirem a posição correta, a tela se tornará como apresentado na [Subfigura 53\(b\)](#).



(a) Tela inicial da atividade 2.

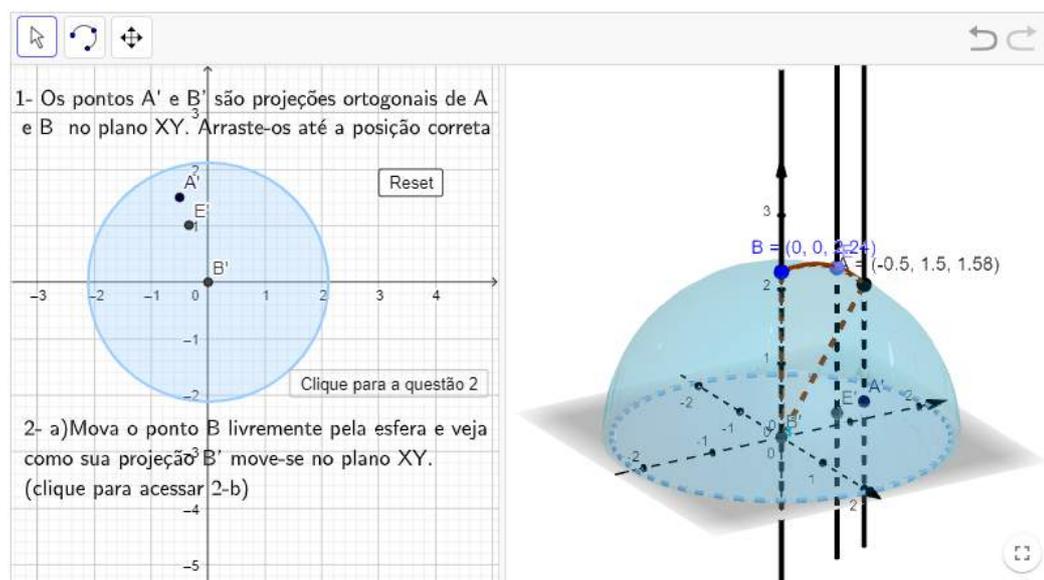


(b) Tela da atividade 2 após exercício 1 executado corretamente.

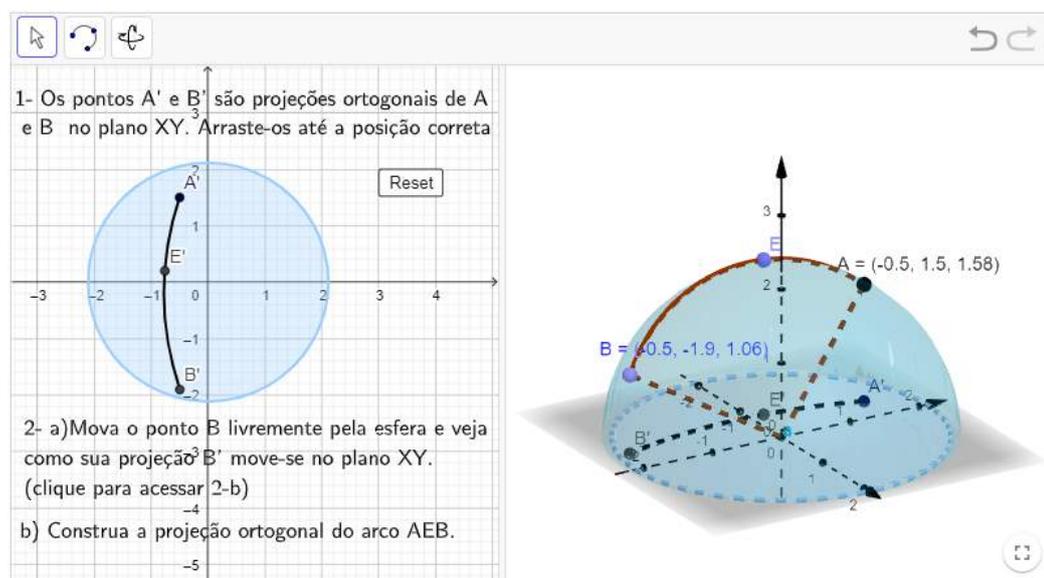
Figura 53 – Captura de telas iniciais da “Atividade 2 - Projeção de ponto e curva na esfera” do capítulo Projeções Ortográficas.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/epvezfse>>.

Na próxima etapa, conforme apresentado na [Figura 54](#), é possível mover livremente o ponto B pela superfície do hemisfério. Por fim, o exercício solicita que o aluno construa, a partir da projeção ortogonal de três pontos, a projeção do arco de circunferência que passa por esses três pontos. Para realizá-la, o aluno possui apenas a ferramenta “Arco circular definido por três pontos” do *GeoGebra* à sua disposição.



(a) Tela da atividade 2 ao acessar exercício 2



(b) Tela final da atividade 2.

Figura 54 – Captura de tela da “Atividade 2 - Projeção de ponto e curva na esfera” finalizada.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/epvezfse>>.

Após finalizar o item b do exercício 2, resta responder o exercício 3, localizado abaixo do applet. Este exercício solicita que o aluno mova o ponto B pelo hemisfério, observe em que circunstâncias a projeção do arco \widehat{AEB} apresenta-se como um segmento de reta e quando ela se apresenta como um arco de circunferência.

Com esta atividade, é esperado que o aluno compreenda as distorções da

projeção do caminho mais curto entre dois pontos em uma esfera e, que na próxima atividade, denominada “Atividade 3 - Projeção Azimutal Ortográfica”, seja verificado o mesmo padrão para a forma da projeção do arco de circunferência no plano.

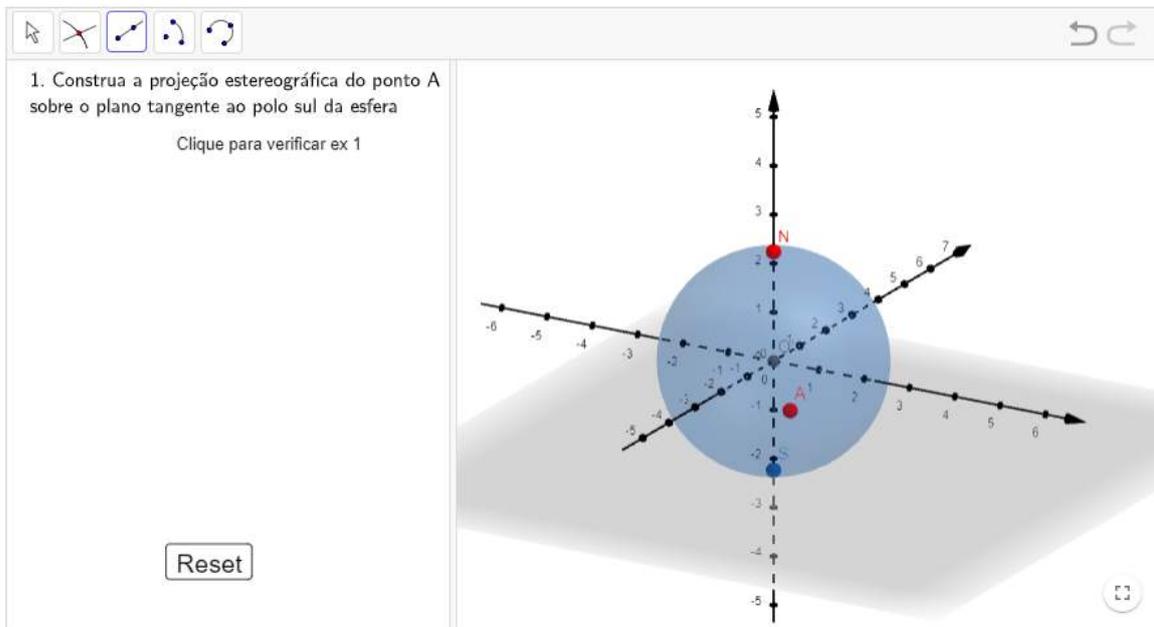
A atividade 3 utiliza um applet criado por Chris Cambré, que exibe dois pontos móveis sobre a superfície terrestre e o caminho mais curto entre eles, bem como a projeção ortográfica dos continentes e do caminho mais curto em questão (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.a). Além da construção desenvolvida por Chris Cambré, há um exercício que o aluno deve realizar análogo ao da Atividade 2, onde ele deve verificar as circunstâncias em que a projeção do caminho mais curto apresenta-se como um segmento de reta ou como um arco de circunferência e comparar com suas observações feitas na atividade anterior.

Por fim, existe um último applet também desenvolvido por Chris Cambré denominado neste livro como “Projeção cilíndrica ortográfica - Caminho mais curto”. A intenção de utilizar este applet nesta aula é de mostrar aos alunos que as projeções ortográficas não são obrigatoriamente azimutais, podendo ser cilíndricas, por exemplo. Este applet, assim como o anterior, exibe dois pontos móveis sobre a superfície terrestre, o menor caminho entre eles, a projeção da Terra, dos pontos e do menor caminho. A diferença entre este applet e o anterior é que a projeção em questão é cilíndrica ortográfica (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.b).

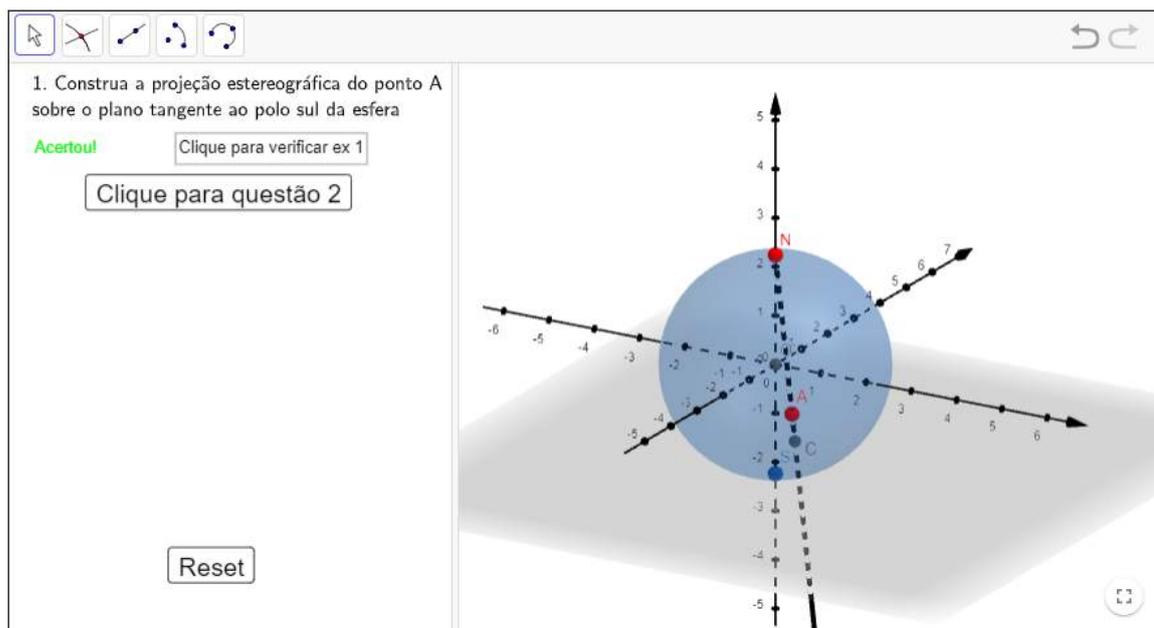
7.9.3.2 Capítulo 2: Projeções estereográficas.

Este capítulo é composto por cinco seções, sendo três de atividades sobre projeção plana estereográfica, cada uma contendo instruções e exercícios que o aluno deve realizar e a outras duas seções de projeções cilíndricas estereográficas em que o aluno não é solicitado a completar nenhuma tarefa.

A captura da tela do início da “Atividade 4 - Projeção de um ponto e de uma curva” está exibida na [Subfigura 55\(a\)](#). Assim, o aluno deve construir a projeção estereográfica do ponto A sobre o plano XY utilizando as ferramentas “Semirreta” e “Interseção de dois objetos”, apresentadas na parte superior esquerda desta figura. Caso o aluno não realize a construção corretamente, a mensagem “Tente novamente” aparecerá em vermelho junto com um botão “Dica”, que ajuda o aluno explicando como construir a projeção de A. Se o aluno realizar a construção corretamente, a tela ficará como na [Subfigura 55\(b\)](#).



(a) Tela inicial da atividade 4.



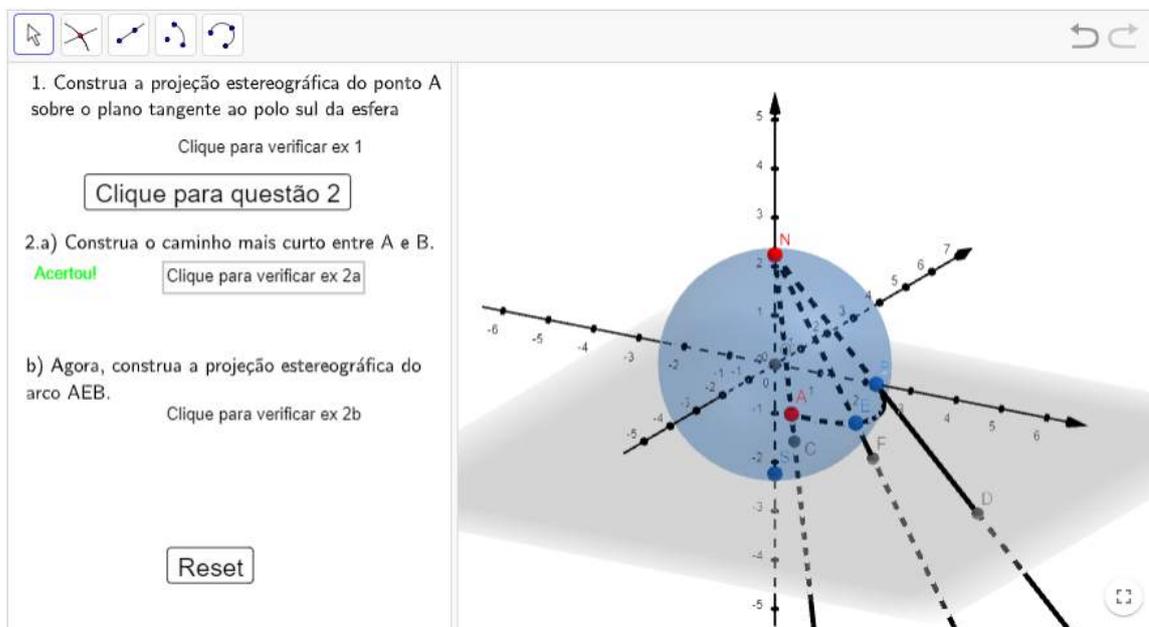
(b) Tela da atividade 4 após execução correta do exercício 1.

Figura 55 – Captura de tela da “Atividade 4 - Projeção de um ponto e de uma curva” do capítulo Projeções Estereográficas.

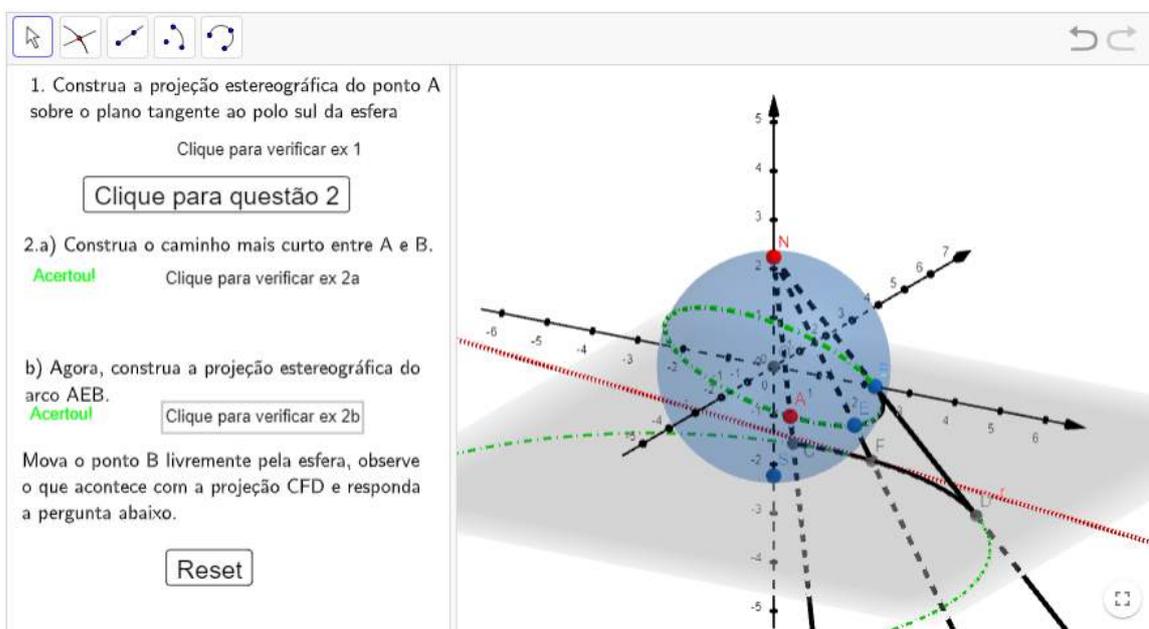
Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/mtphn26f>>.

Ao clicar em “Clique para a questão 2”, o ponto B e sua projeção estereográfica aparecerá e o aluno deverá utilizar a ferramenta “Arco circular” para construir o caminho mais curto entre A e B não se esquecendo de selecionar primeiro o ponto O no centro da esfera e posteriormente os pontos A e B.

Por fim, assim como exibe a [Subfigura 56\(a\)](#), no exercício 2.b) o aluno deve construir a projeção estereográfica do arco $A\widehat{E}B$. Para isso, deve-se utilizar a ferramenta “Arco Circuncircular” e selecionar os pontos C, F e D.



(a) Tela da atividade 4 após execução correta do exercício 2.a).



(b) Tela final da atividade 4 em caso de execução correta.

Figura 56 – Captura de tela da “Atividade 4 - Projeção de um ponto e de uma curva” do capítulo Projeções Estereográficas

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/mtphn26f>.

Verificado o item b do exercício 2, a atividade se apresentará conforme a *Subfigura 56(b)* e abaixo dela há o exercício 3 que solicita que o aluno registre sob quais condições a projeção do arco \widehat{AEB} apresenta-se como um segmento de reta.

A próxima seção é a “Atividade 5 - Projeção azimutal estereográfica”, que utiliza um applet produzido por Chris Cambré e traduzido por Carmen Mathias. Nele, é apresentada a Terra com seus continentes e, ao lado, sua projeção estereográfica. Além disso, há dois pontos móveis sobre a superfície terrestre, o caminho mais curto entre eles e a projeção desse caminho mais curto (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.g).

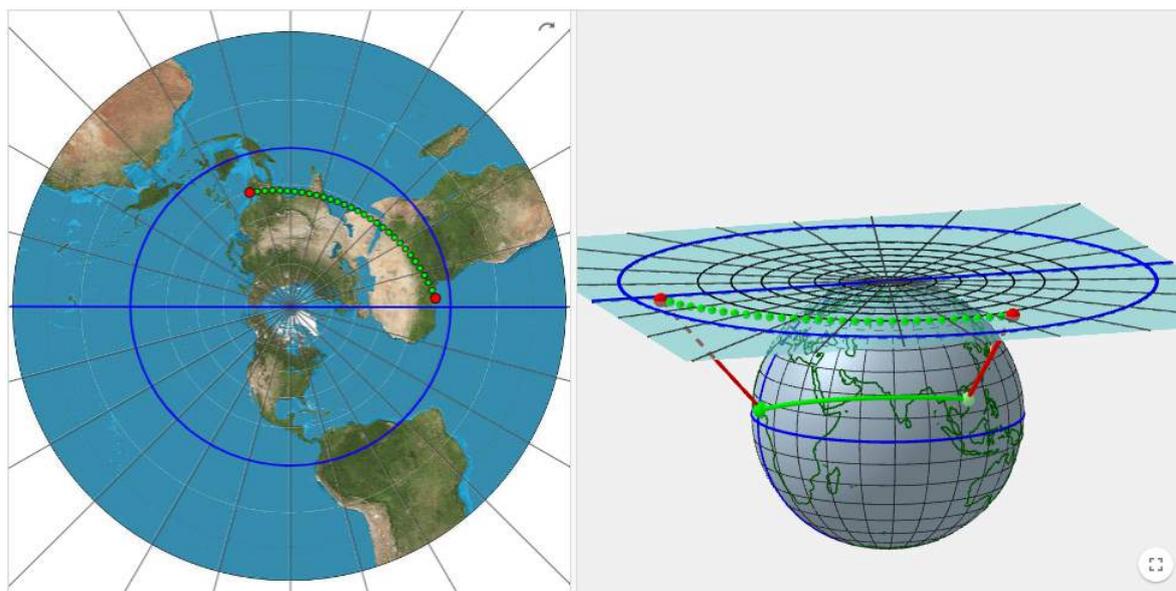


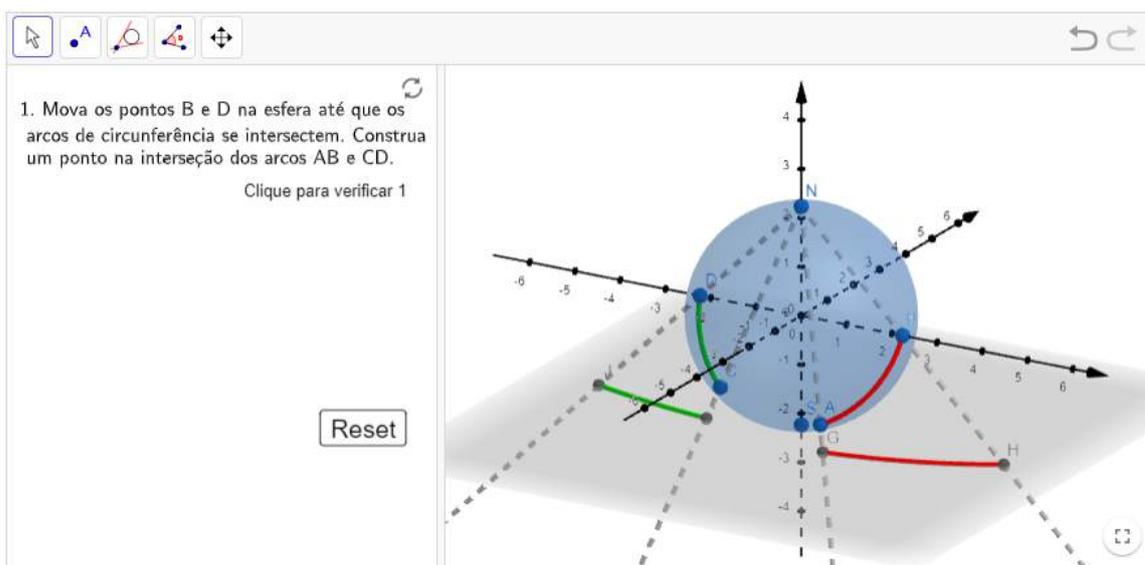
Figura 57 – Captura de tela da “Atividade 5 - Projeção azimutal estereográfica” do capítulo Projeções Estereográficas.

Fonte: (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.g)

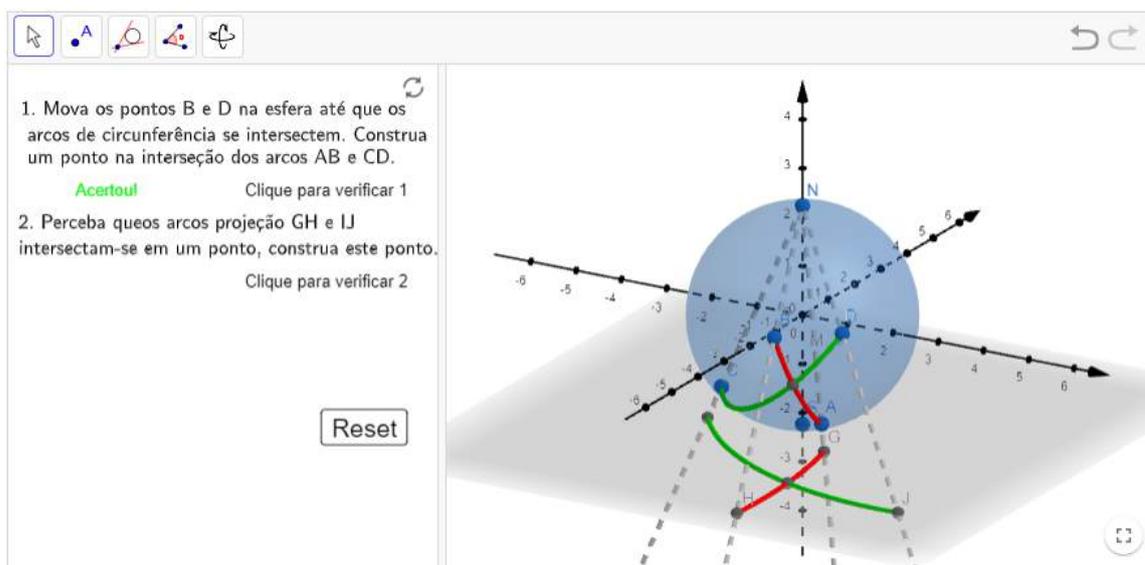
Abaixo do applet, há um exercício análogo ao exercício 3 da atividade anterior para o aluno realizar. A intenção com esta atividade é que o estudante perceba que a geometria utilizada na Atividade 4 por ele para realizar as construções é exatamente a mesma da projeção estereográfica da Terra, considerando esta uma esfera.

A próxima seção, intitulada “Atividade 6 - Ângulo entre curvas”, foi feita com a intenção de que o aluno verifique a conformidade da projeção azimutal estereográfica através da verificação da conservação de ângulos entre curvas na esfera.

Dessa forma, a atividade inicia-se, conforme apresentado na *Subfigura 58(a)*, com dois arcos na esfera, suas respectivas projeções e solicita que o estudante mova os arcos até que estes se intersectem. Em seguida, é solicitado que o aluno construa um ponto na interseção dos arcos \widehat{AB} e \widehat{CD} e faça o mesmo com suas projeções.



(a) Tela inicial da atividade 6.



(b) Tela da atividade 2 após correta execução do exercício 1.

Figura 58 – Captura de telas iniciais da “Atividade 6 - Ângulo entre curvas” do capítulo Projeções Estereográficas.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/myc7zsm2>>.

Verificada as construções solicitadas nos exercícios 1 e 2, o exercício 3 pede que o aluno meça o ângulo entre os arcos e suas projeções. Em caso de dúvida em como realizar a construção, há um botão denominado “Dica - Ex3” que ao ser clicado, exibirá a mensagem abaixo do botão, conforme mostra a [Figura 59](#).

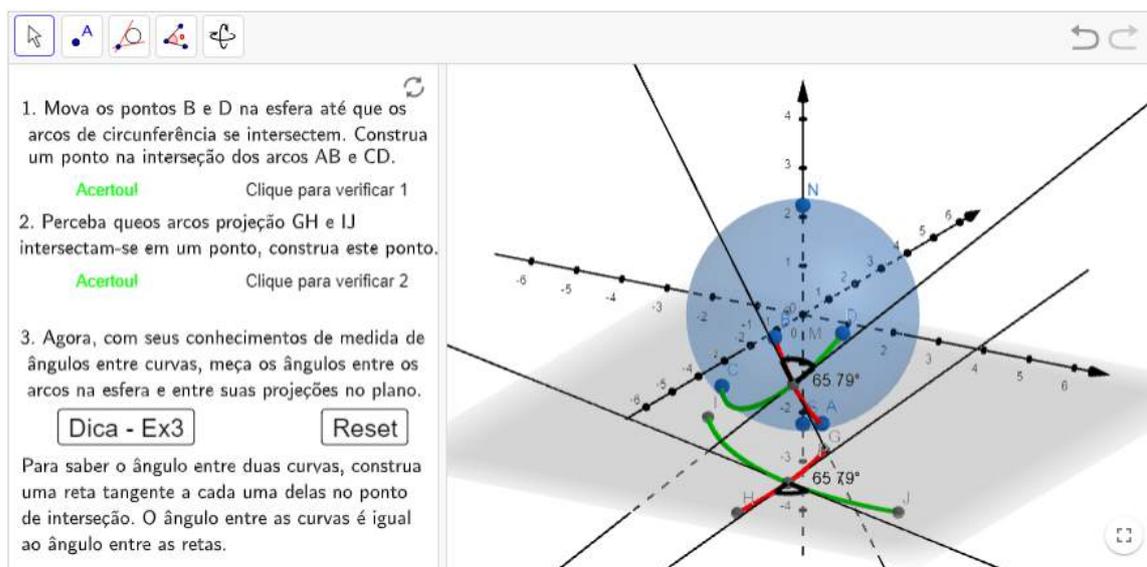


Figura 59 – Captura de tela final da “Atividade 6 - Ângulo entre curvas” do capítulo Projeções estereográficas.

Fonte: Captura de tela da atividade produzida pela autora no *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yhx8d5uk#material/myc7zsm2>>.

Assim, é esperado que o aluno note que os ângulos em questão têm mesmo valor e, com base em seu aprendizado sobre o significado da palavra conforme, responda ao exercício 4, localizado abaixo do applet.

Enfim, há mais dois applets que exibem duas projeções cilíndricas estereográficas: a projeção de Braun e de Gall. A seção “Projeção cilíndrica de Braun - Caminho mais curto” exhibe dois pontos móveis sobre a superfície terrestre, o menor caminho entre eles, a projeção estereográfica da Terra sobre um cilindro tangente a ela, a projeção dos pontos e do menor caminho (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.d). Já a “Projeção cilíndrica de Gall - Caminho mais curto” é parecida com a anterior exceto pela superfície de projeção, que é secante e não tangente a esfera (CAMBRÉ; MATHIAS, s.d.e).

A intenção na exibição destas duas projeções é mostrar que existem diferentes tipos de superfícies para realizar uma projeção estereográfica e que elas podem ser tangentes ou secantes à esfera.

Todas as atividades desta sequência didática que apresentam os continentes utilizaram o modelo criado por Liste (s.d.).

8 Considerações Finais

A presente dissertação buscou abordar a forma da Terra, que pode ser aproximada por uma esfera e as diferentes formas de representá-la em um plano através de um itinerário formativo integrado entre as áreas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias. Com isso, espera-se que o aluno que opte por este itinerário não se torne um adulto que acredite em movimentos conspiratórios, especialmente o da Terra plana e compreenda que existem diferentes formas de representar a Terra sobre um plano, todas elas causando algum tipo de distorção, cabendo ao interessado escolher aquela que melhor se adéqua aos seus objetivos.

A realização desta proposta de itinerário só foi possível devido à nova BNCC estar mais flexível, permitindo que ocorra esta integração entre as áreas. Outro aspecto que permitiu a sua realização é o fato de ela orientar as competências e habilidades a serem desenvolvidas, ao invés de especificar conteúdos engessados por disciplina sem que o professor tenha a liberdade para abordá-los de outra forma ou em conjunto com outra área. É claro que esta flexibilidade traz consigo desvantagens, porém esta análise faria parte de outra dissertação.

Ressalta-se a importância do trabalho conjunto entre a história e a matemática, no geral ausente nos livros didáticos do Ensino Médio. Deste modo, os alunos conscientizam-se de que a construção da ciência é feita ao longo de séculos de discussão e que uma teoria é um modelo que pode ser substituído, de forma que não exista uma verdade imutável.

Caso possível, é interessante abordar também, especialmente ao longo da segunda sequência didática, que muitas vezes há mais de um modelo matemático que descreve uma determinada situação na natureza (como a esfera, o elipsoide ou o geoide para representar a Terra) e a escolha do melhor modelo depende da finalidade do interessado.

Caso o professor de matemática queira realizar um trabalho individual, abordando medida da circunferência da Terra com o Ensino Fundamental II, recomenda-se utilizar a introdução histórica apresentadas na [Parte I](#) desta dissertação e os capítulos 4 e 5 da dissertação de [Santana de Macedo \(2021\)](#), que fornecem o referencial teórico e também o relato da execução do experimento do Projeto Eratóstenes proposto pela Universidade de Buenos Aires na escola “Professor Mário Bergamasco” em Jaguariúna-SP. A dissertação de Macêdo é voltada para o 9º ano do Ensino Fundamental 2 e, além do cálculo do raio da Terra a partir da participação no Projeto Eratóstenes, ela propõe a determinação de algumas medidas (diâmetro do Sol e da Lua e altura de determinada construção) através da semelhança de triângulos e trigonometria.

Em um próximo trabalho, pode-se desenvolver o embasamento histórico da

forma da Terra detalhado para outros períodos e tratando de outras sociedades. Por exemplo, abordar o desenvolvimento da matemática, astronomia e cartografia pelos árabes durante a idade média no que diz respeito à forma da Terra e suas projeções. Foram os árabes que realizaram a tradução das obras de Ptolomeu e realizaram avanços científicos a partir delas durante este período. Eles também utilizaram outras técnicas para medir a circunferência da Terra. Al-Biruni (973-1048 d.C.) por exemplo é considerado um dos maiores matemáticos do mundo islâmico, calculou o valor de 6.339,6 km para o raio da Terra, precisão que só foi atingida pelas civilizações ditas ocidentais no século XVI (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999).

Pode-se também abordar historicamente as discussões em torno do formato da Terra ser um elipsoide prolato ou oblato, ocorridas entre os séculos XVII e XVIII na Europa. No campo da matemática, relacionado a este período histórico, é possível realizar a construção de um elipsoide de revolução no *GeoGebra* e estudar suas propriedades analíticas. Já em física, em correlação também com esta época, é interessante abordar a aceleração da gravidade, explorar como ela varia de acordo com a posição do indivíduo na superfície terrestre e assim desconstruir a ideia transmitida durante todos os exercícios de física de que a aceleração da gravidade tem um valor fixo de $9,8 \text{ m/s}^2$. É possível também explorar as causas dessa variação da aceleração da gravidade na superfície da Terra, aproximando-a para um elipsoide, em termos das forças centrífuga e gravitacional. Por fim, é oportuno explorar Newton, um cientista muito abordado no ensino de física durante o Ensino Médio, porém apresentado rasamente, ignorando o desenvolvimento das teorias antes dele e apresentando-o como gênio desconectado do seu tempo, como se ele não tivesse se apoiado nos cientistas e filósofos que o antecederam para dar sua contribuição para a ciência.

Referências

AGUIAR, C. R. de. A terra e sua forma: Uma breve história. *Revista Percurso - NEMO*, v. 1, n. 1, p. 179–183, 2020. Citado na página 25.

ALPHA, T.; SNYDER, J. *The properties and uses of selected map projections*. 1982. Disponível em: <<https://pubs.er.usgs.gov/>>. Citado na página 99.

ANGLIN, W.; LAMBEK, J. *The Heritage of Thales*. New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, 1995. Citado na página 29.

ARISTÓTELES. *On the Heavens*. Tradução: John Leofric Stocks. New York, NY, USA: Oxford: The Clarendon Press, 1922. Disponível em: <<http://classics.mit.edu/Aristotle/heavens.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

BARNEY, T. The peters projection and the latitude and longitude of recolonization. *Journal of International and Intercultural Communication* 7, v. 2, p. 103–126, 2014. Disponível em: <<http://scholarship.richmond.edu/rhetoric-faculty-publications/46>>. Citado na página 103.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE DE FRANCE. *Le Christ en majesté au-dessus: Gossuin de metz (actif au xiii siècle, l'image du monde*. s.d. Disponível em: <http://expositions.bnf.fr/monde-en-spheres/grand/mes_058.php>. Acesso em: 07 jun 2022. Citado na página 51.

_____. *Le Globe de Martin Behaim : vers 1492*. s.d. Disponível em: <http://expositions.bnf.fr/marine/grand/por_352.htm>. Acesso em: 27 mai 2022. Citado na página 42.

_____. *Le monde en sphères: portraits de savants*. s.d. Disponível em: <<http://expositions.bnf.fr/monde-en-spheres/portraits-de-savants/index.html#26>>. Acesso em: 09 jun 2022. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 50.

BIÉMONT, E. Astronomes célèbres et astronomes moins connus (3): Hipparque. *Galactée*, v. 35, p. 41–45, 2003. Citado na página 32.

BISHOP, L. M. *The Myth of the Flat Earth: Misconceptions about the middle ages*. Nova Iorque: Routledge, 2008. Acesso em: 07 jun 2022. Citado na página 51.

BOCCALETTI, D. *The Shape and The Size of the Earth: A historical journey from Homer to Artificial Satellites*. Cham, Suíça: Springer Nature, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

BORUCHOFF, D. A. Reviewed work: The first voyage around the world 1519–1522: An account of magellan's expedition by antonio pigafetta. *Cambridge University Press*, v. 62, n. 1, p. 172–174, 2017. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/10.1086/598376>>. Acesso em: 20 jun 2022. Citado na página 45.

BOZ, A. *A Mentira da Terra-Globo - Eric Dubay*. 2019. Disponível em: <https://www.academia.edu/39224324/A_Mentira_da_Terra_Globo_Eric_Dubay_Traduç~ao_Arthur_Boz>. Acesso em: 09 jun 2022. Citado na página 59.

- BURCH, G. B. The counter-earth. *Osiris*, The University of Chicago Press, v. 11, p. 267–294, 1954. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/368583>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- BÍBLIA Sagrada. Tradução: João Ferreira Annes d’Almeida. [S.l.]: Sociedade Bíblica Trinitariana do Brasil, 2011. Acesso em: 07 jun 2022. Citado na página 51.
- CAETANO, G. *Primeira convenção de terraplanistas do Brasil tem infiltrados, ‘revelações de Deus’ e críticas à Nasa*. O Globo, 11 nov. 2019. Disponível em: <<https://oglobo.globo.com/epoca/sociedade/primeira-convencao-de-terraplanistas-do-brasil-tem-infiltrados-revelacoes-de-deus-criticas-nasa-24074319>>. Acesso em: 12 jun 2022. Citado na página 58.
- CAMBRÉ, C. *routes op Mercatorkaart*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/yjxp7xm3#material/tbxs3jxg>>. Acesso em: 12 mai 2022. Citado na página 121.
- CAMBRÉ, C.; MATHIAS, C. *Mapa e globo*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww#material/rwt4jnhy>>. Acesso em: 14 mai 2022. Citado na página 129.
- _____. *Mapa e globo*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww#material/qvzrwuma>>. Acesso em: 14 mai 2022. Citado na página 129.
- _____. *O caminho mais curto*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/m8xaf4ky>>. Acesso em: 10 mai 2022. Citado na página 118.
- _____. *Projeção cilíndrica de Braun*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww#material/vbn6g2bn>>. Acesso em: 15 mai 2022. Citado na página 134.
- _____. *Projeção cilíndrica de Gall*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww#material/aspbajee>>. Acesso em: 15 mai 2022. Citado na página 134.
- _____. *Rotas mais curtas*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww#material/mpyb7mnq>>. Acesso em: 12 mai 2022. Citado na página 121.
- _____. *Rotas mais curtas*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww#material/zshwdnej>>. Acesso em: 15 mai 2022. Citado na página 132.
- CARMO, M. P. do. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Tradução: José Claudio Sabina de Lis. 3. ed. Madrid: Alianza Universidad Textos, 1995. Citado na página 91.
- CARVALHO, O. *Não estudei o assunto da terra plana. Só assisti a uns vídeos de experimentos que mostram a planicidade das superfícies aquáticas, e não consegui encontrar, até agora, nada que os refute*. Twitter, 2019. Disponível em: <<https://twitter.com/opropriolavo/status/1133838337570217984>>. Acesso em: 11 jun 2022. Citado na página 61.
- CHAMPION, B. La mesure du monde: Eratosthène et ptolémée. *Travaux & documents*, v. 24, p. 135–160, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- CHIÓ SERRA CARVALHO, J. R. *Honorius Augustodunensis e o Eluxidarium: Um estudo sobre a reforma, o diabo e o fim dos tempos entre o fim do século xi e o começo do xii*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível

em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8138/tde-25082009-142913/publico/JOAO_RAFAEL_CHIO_SERRA_CARVALHO.pdf>. Acesso em: 07 jun 2022. Citado na página 51.

CLEÔMEDES. *Cleomedes' lectures on astronomy : a translation of the heavens*. Tradução, prefácio e notas: Alan C. Bowen and Robert B. Todd. Berkeley and Los Angeles, California: University of California Press, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 26, 29, 34 e 35.

COWIE, S. *Brazil's flat Earthers to get their day in the sun*. The Guardian, 2019. Disponível em: <<https://www.theguardian.com/world/2019/nov/06/brazil-flat-earth-conference-terra-plana>>. Acesso em: 11 jun 2022. Citado na página 59.

DEETZ; ADAMS. *Elements of map projection with applications to map and chart construction*. [S.l.: s.n.], 1934. Citado na página 105.

DEPARIS, V. La forme de la terre: plate, oblongue ou aplatie aux pôles ? *Planet-Terre: Ressources scientifiques pour l'enseignement des sciences de la Terre et de l'Univers*, 2001. Disponível em: <<https://planet-terre.ens-lyon.fr/ressource/histoire-forme-Terre.xml>>. Acesso em: 16 jun 2022. Citado na página 19.

DESCOMPLICA. *GABARITO ENEM/2016/SEGUNDO DIA/CADERNO AZUL/QUESTÃO 178*. s.d. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2016/segundo-dia/a-figura-representa-o-globo-terrestre-e-nela-estao-marcados-os-pontos-a-b-e-c/>>. Acesso em: 12 abr 2022. Citado na página 123.

DOMINGUES, F. C. *Ferdinand Magellan*. 2022. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Ferdinand-Magellan/Allegiance-to-Spain>>. Acesso em: 20 jun 2022. Citado na página 45.

ELIOT MORISON, S. *Admiral of the ocean sea: a life of christopher columbus*. Boston: Brown and Co, 1942. Disponível em: <<https://archive.org/details/admiralofocanse0000mori>>. Acesso em: 16 jun 2022. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

ESTRABÃO. *The Geography of Strabo*. Tradução e notas: Hans Claude Hamilton, William Falconer. London: Henry G. Bohn, 1854. Citado 7 vezes nas páginas 24, 26, 29, 30, 34, 35 e 74.

_____. *The Geography of Strabo*. Tradução, prefácio e notas: H. L. Jones. Loeb Classical Library, 1917. I. Disponível em: <https://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Strabo/Introduction*.html>. Citado na página 34.

GARCIA, R. *7% dos brasileiros afirmam que Terra é plana, mostra pesquisa*. Folha de São Paulo, 2019. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2019/07/7-dos-brasileiros-afirmam-que-terra-e-plana-mostra-pesquisa.shtml>>. Acesso em: 09 jun 2022. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 59.

GARWOOD, C. *Flat Earth: The history of an infamous idea*. Londres: Macmillan, 2007. Disponível em: <<https://archive.org/details/flaearthhistory0000garw/mode/2up>>. Acesso em: 10 jun 2022. Citado 5 vezes nas páginas 51, 53, 54, 55 e 56.

GISGEOGRAPHY. *Azimuthal Projection: Orthographic, Stereographic and Gnomonic*. 2021. Disponível em: <<https://gisgeography.com/azimuthal-projection-orthographic-stereographic-gnomonic/>>. Acesso em: 28 fev 2022. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 105.

- GLEASON, A. *Gleason's new standard map of the world*. Buffalo, N.Y: Buffalo, N.Y : Buffalo Electrotype and Engraving Co., 1892. Disponível em: <<https://ark.digitalcommonwealth.org/ark:/50959/7h149v85z>>. Acesso em: 01 mar 2022. Citado na página 94.
- GUILLEMARD, F. H. H. *The life of Ferdinand Magellan and the first circumnavigation of the globe*. Londres: GEORGE PHILIP & SON, 1890. Acesso em: 20 jun 2022. Citado na página 45.
- IBGE. *Atlas escolar: O que é cartografia?* 2022. Disponível em: <<https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia>>. Acesso em: 10 fev 2022. Citado na página 90.
- IMECC. *A primeira medição do Raio da terra*. 2020. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/>>. Acesso em: 17 jun 2022. Citado na página 29.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Comissão Nacional de Classificação*. 2021. Disponível em: <<https://cnae.ibge.gov.br/en/component/content/article/97-7a12/7a12-voce-sabia/curiosidades/1607-o-mapa-mais-antigo>>. Acesso em: 21 jul 2021. Citado na página 24.
- INTERGOVERNMENTAL COMMITTEE ON SURVEYING AND MAPPING. *Commonly Used Map Projections*. Australia, s.d. Disponível em: <<https://www.icsm.gov.au/education/fundamentals-mapping/projections/commonly-used-map-projections>>. Acesso em: 21 fev 2022. Citado na página 97.
- LAGES LIMA, E.; PINTO CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM - Coleção Professor de Matemática, 2004. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~toscano/disc/2021/LimaCarvalhoWagnerMorgadoEMvol2.pdf>>. Acesso em: 14 mai 2022. Citado na página 124.
- LANG DA SILVEIRA, F. *Seria a mítica Terra Plana um Elevador de Einstein?* 04 jul 2020. Centro de Referência para o Ensino de Física. Disponível em: <<https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=seria-a-mitica-terra-plana-um-elevador-de-einstein>>. Acesso em: 12 jun 2022. Citado na página 57.
- _____. *Distância ao Sol na mítica Terra Plana: a razão de as diversas estimativas serem conflitantes!* 10 set 2017. Centro de Referência para o Ensino de Física. Disponível em: <<https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=distancia-ao-sol-na-mitica-terra-plana-a-razao-de-as-diversas-estimativas-serem-conflitantes>>. Acesso em: 17 nov 2021. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 84.
- _____. *O formato da Terra*. 2014. Centro de Referência para o Ensino de Física. Disponível em: <<https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=o-formato-da-terra>>. Acesso em: 21 jun 2022. Citado na página 19.
- _____. Sobre a forma da terra. *Física na Escola*, v. 15, n. 2, p. 4–14, 2017. Disponível em: <<http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol15-Num2/a02-low.pdf>>. Acesso em: 16 jun 2022. Citado na página 19.

- LEHMANN, M. Amerigo vespucci and his alleged awareness of america as a separate land mass. *The International Journal for the History of Cartography*, v. 65, n. 1, p. 15–24, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03085694.2013.731201>>. Acesso em: 21 jun 2022. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- LEITÃO, H.; ALVES GASPAR, J. Globes, rhumb tables, and the pre-history of the mercator projection. *Imago Mundi, Ltd*, v. 66, n. 2, p. 180–195, 2014. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/24270011>>. Acesso em: 27 jun 2022. Citado na página 47.
- LESTER, T. *The fourth part of the world : the race to the ends of the Earth, and the epic story of the map that gave America its name*. 1. ed. New York: New York : Free Press, 2009. Disponível em: <<https://archive.org/details/fourthpartofwo00lest/page/316/mode/2up?q=asia>>. Acesso em: 23 jun 2022. Citado na página 43.
- LIBRARY OF CONGRESS. *Universalis Cosmographia Secundum Ptholomaei Traditionem et Americi Vespucii Alioru[m]que Lustrationes*. 2022. Disponível em: <<https://www.loc.gov/rr/geogmap/waldexh.html>>. Acesso em: 24 jun 2022. Citado na página 44.
- LIMA BEZERRA, E. V. *Investigando a Terra plana com o Stellarium*. 55 p. Monografia de conclusão de curso de especialização — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Citado na página 76.
- LISTE, R. L. *Earth (basic model)*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/kEzknh9g>>. Acesso em: 10 mai 2022. Citado na página 134.
- LLORENTE, A. *4 curiosidades sobre el mapa en el que aparece el nombre América por primera vez*. 2018. Disponível em: <<https://www.bbc.com/mundo/noticias-america-latina-44219307>>. Acesso em: 22 fev 2022. Citado na página 44.
- MAGENTA, M. *Olavo de Carvalho: morte de escritor é 'grande revés' para o bolsonarismo, diz pesquisador alemão*. 2022. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/brasil-60132468>>. Acesso em: 11 jun 2022. Citado na página 61.
- MATHIAS, C.; GeoGebra Team. *Aprenda sobre o GeoGebra Classroom*. s.d. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/a4dujady>>. Acesso em: 27 abr 2022. Citado na página 114.
- Ministério da Educação. *Diretrizes curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília, 2013. 565 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Citado na página 70.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. 600 p. Citado 9 vezes nas páginas 7, 8, 63, 64, 65, 66, 67, 70 e 113.
- NEUGEBAUER, O. *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. Berlin: Springer, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 32, 37 e 38.
- NORMAS de apresentação Introdução à cartografia. 1. ed. Rio de Janeiro: Biblioteca. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2013. Disponível em: <http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv44152_cap2.pdf>. Acesso em: 12 dez 2021. Citado 5 vezes nas páginas 91, 92, 96, 106 e 107.

- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni*. MacTutor History of Mathematics Archive, 1999. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>>. Acesso em: 17 jun 2022. Citado na página 136.
- OLIVEIRA DA ROCHA, C. H. A figura da terra no pensamento medieval europeu. *Revista Brasileira de Geomática*, v. 5, n. 1, p. 103–123, 2017. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo>>. Acesso em: 07 jun 2022. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. *The United Nations Flag*. s.d. Disponível em: <<https://research.un.org/en/maps/flags>>. Acesso em: 21 fev 2022. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 108.
- PARALLAX. *Zetetic Astronomy. Earth Not a Globe!*: an experimental inquiry into the true figure of the earth. Londres: S. Hayward, 1865. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=oTUDAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=snippet&q=sunrise&f=false>. Acesso em: 21 jun 2022. Citado na página 53.
- PIRES MIGUENS, A. *Navegação: A ciência e a Arte. Volume I - Navegação costeira, estimada e em áreas restritas*. 1. ed. Niterói (RJ): Diretoria de Hidrografia e Navegação - Marinha do Brasil, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 93, 96, 102 e 105.
- PLATÃO. *Plato's Phaedo*. Tradução e notas: F. J. Church. Prefácio: F. H. Anderson. New York, NY, USA: The liberal arts press, 1954. Disponível em: <https://www.bard.edu/library/arendt/pdfs/Plato_Phaedo.pdf>. Citado na página 25.
- PTOLOMEU, C. *Ptolemy's Almagest*. Tradução, prefácio e notas: G. J. Toomer. London: Gerald Duckworth & Co. Ltd., 1984. Citado na página 36.
- ROCHER, N. *UN THÉORÈME ET UNE PART DE PIZZA*. 2020. Disponível em: <<http://images.math.cnrs.fr/Un-theoreme-et-une-part-de-pizza.html?lang=fr>>. Acesso em: 29 sep 2022. Citado na página 92.
- RUSSELL, J. B. *Inventing the Flat Earth: Columbus and modern historians*. Prefácio: David Noble. Nova Iorque: Praeger, 1991. 118 p. Disponível em: <<https://archive.org/details/inventingflatear00russ>>. Acesso em: 07 jun 2022. Citado 3 vezes nas páginas 41, 51 e 52.
- SAMPLE, I. *This article is more than 3 years old Study blames YouTube for rise in number of Flat Earthers*. The Guardian, 2019. Disponível em: <<https://www.theguardian.com/science/2019/feb/17/study-blames-youtube-for-rise-in-number-of-flat-earthers>>. Acesso em: 12 jun 2022. Citado na página 61.
- SANTANA DE MACEDO, É. *A Terra não é plana! Como a Geometria do Ensino Fundamental pode ensinar noções de Astronomia: uma perspectiva de Arquitetura da Informação da Escola de Brasília*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 19, 60 e 135.
- SANTOS, K. C. *A Matemática na Cartografia e o Uso de Mapas no Ensino de Matemática na Educação Básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, 2018. Citado na página 99.

- SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Currículo em Ação: CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS*: Primeira série ensino médio. 1. ed. São Paulo: Governo do Estado de São Paulo, 2022. v. 1. Citado na página 113.
- SNYDER, J. P. *Map Projections - A Working Manual*. 1. ed. Washington D.C., USA: U.S. Government Printing Office, 1987. Citado 7 vezes nas páginas 90, 94, 97, 99, 103, 104 e 105.
- STARLING, B. P.; GERMANO, L. B. de P. *As grandes navegações e o pioneirismo português*. Portal do Professor - Ministério da Educação, 1999. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28896>>. Acesso em: 01 fev 2022. Citado na página 113.
- TANNERY, P. *Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie Ancienne*. Paris: GAUTHIER-VILLARS & FILS, 1893. Citado 3 vezes nas páginas 25, 30 e 32.
- TEIXEIRA PINA, C. Os mapas e o ensino de história. In: *III Seminário Internacional História do Tempo Presente*. UDESC - Florianópolis, 2017. p. 1–12. Disponível em: <<http://eventos.udesc.br/ocs/index.php/STPII/IIISIHTP/paper/viewFile/594/373>>. Acesso em: 28 jan. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 112.
- THE FLAT EARTH WIKI. *Flat Earth - Frequently Asked Questions*. 2019. Disponível em: <https://wiki.tfes.org/Flat_Earth_-_Frequently_Asked_Questions>. Acesso em: 12 jun 2022. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- TOOMER, G. J. *Ptolemy (Or Claudius Ptolemaeus)*. 1970–1990. Dictionary of Scientific Biography. Disponível em: <<https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/astronomy-biographies/ptolemy>>. Acesso em: 25 oct 2021. Citado na página 36.
- UNESCO. *Route of Magellan. First around the World*. 2017. Disponível em: <<https://whc.unesco.org/en/tentativelists/6212/>>. Acesso em: 20 jun 2022. Citado na página 45.
- WATERSON, J. *BBC does not subscribe to 'cancel culture', says director of editorial policy*. The Guardian, 2022. Disponível em: <<https://www.theguardian.com/media/2022/jan/11/bbc-does-not-subscribe-to-cancel-culture-says-director-of-editorial-policy>>. Acesso em: 12 jun 2022. Citado na página 61.
- WHITFIELD, P. *The image of the world: 20 centuries of world maps*. London: The British Library, 1994. Citado na página 43.
- WOLFRAM MATHEMATICA. *Veja a distorção do mapa com a indicatriz de Tissot*. s.d. Disponível em: <<https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-10/geographic-visualization/show-map-distortion-with-tissots-indicatrix.html>>. Acesso em: 31 mai 2022. Citado na página 146.
- ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE DE LYON. *L'astrolabe*. Disponível em: <http://www.ens-lyon.fr/RELIE/Cadrans/activpedago/TextesCours/WebAstrolabe/Astrolabe.htm#_Toc528321823>. Acesso em: 17 jan 2022. Citado na página 33.

Apêndices

APÊNDICE A – Folha de atividade para a aula da seção 7.8

Orientações:

Em um navegador de internet, acesse o seguinte site <<https://thetruesize.com/>>. Ao abrir o site, digite na caixa de pesquisa o nome *Brazil* (com z pois está em inglês) e clique com o botão direito do mouse sobre os países que estiverem destacados e você desejar excluir.

Arraste o Brasil destacado para comparar como ele seria representado se ele estivesse em outros lugares do mapa e compare-o com outros países do mapa.

1. O que acontece com seu tamanho ao movê-lo na direção norte-sul? E leste-oeste?
2. Qual a projeção caracterizada por este tipo de distorção?
3. Ela é útil para quais objetivos?
4. Uma crítica feita a esta projeção é o fato de ela possuir um caráter eurocêntrico. Apresente duas evidências do mapa que justifiquem esta crítica.

Agora, através do Google Chrome, acesse o site <<https://map-projections.net/compare.php?p1=behrmann&p2=mercator-84&w=1&sps=1>> e traduza a página se necessário. O site faz uma comparação entre duas projeções cartográficas: a de Mercator e a de Behrmann, que é uma projeção equivalente (respeita a relação entre as áreas).

5. Observando o ítem 5 do site, quais são as diferenças entre as duas projeções?
6. Quais continentes estão maiores e quais estão menores?
7. Qual a característica comum dos territórios que estão maiores na projeção de Mercator em relação à de Behrmann?

APÊNDICE B – Código Mathematica

Neste apêndice são apresentados e descritos os códigos utilizados para a confecção dos mapas exibidos nas figuras da [seção 7.5](#).

O código abaixo foi utilizado para gerar imagens de diferentes projeções com as indicatrizes de Tissot. Ele foi criado a partir do código [Wolfram Mathematica \(s.d.\)](#), disponibilizado na página online do próprio software com algumas modificações feitas pela autora. O exemplo abaixo gerou a imagem da figura [Figura 38](#). O Mathematica possui o nome de cada projeção já cadastrado, basta escrevê-la entre aspas assim como segue “Mercator” no código abaixo.

Código-fonte 1 – Código utilizado no software [Mathematica](#) para a construção de projeções cartográficas com suas respectivas indicatrizes de Tissot.

```

1 GeoGraphics[{GeoStyling["OutlineMap", Directive[Red, Opacity
2   [0.5]]],
3   GeoDisk[GeoPosition[#], Quantity[5, "AngularDegrees"]] & /@
4   Flatten[Table[{20*i - 90, 30*j - 165}, {i, 1, 8}, {j, 1,
5     12}], 1],
6   GeoStyling[Orange], Polygon[Entity["Country", "Brazil"]] }
7   ,
8   GeoRange -> {{-90, 90}, {-180, 180}},
9   GeoBackground -> GeoStyling["StreetMapNoLabels"],
10  GeoProjection -> "Mercator"]

```

O próximo código foi utilizado para a confecção de imagens das projeções com o Brasil destacado em laranja. Sua confecção se deu a partir da modificação do código anterior. Este código gerou a imagem da [Subfigura 35\(a\)](#). O comando “GeoPosition” foi utilizado apenas em certas projeções, quando desejado que seu centro fosse em um ponto específico, como a [Subfigura 37\(b\)](#) e a [Subfigura 37\(a\)](#).

Código-fonte 2 – Código utilizado no software [Mathematica](#) para a construção de diferentes projeções cartográficas.

```

1 GeoGraphics[{GeoStyling[Orange],
2   Polygon[Entity["Country", "Brazil"]]}, GeoGridLines ->
3   Automatic,
4   GeoRange -> {{-90, 45}, {-180, 180}},
5   GeoBackground -> GeoStyling["StreetMapNoLabels"],
6   GeoProjection -> {"Stereographic",

```

```
6 "Centering" -> GeoPosition[{-90, -90}]]]
```

Das projeções executadas com o código acima, há uma em que é preciso adicionar um complemento para gerá-la: a projeção de Gall-Peters. Além do nome “CylindricalEqualArea”, deve-se adicionar seus paralelos padrão (“StandardParallels”) para diferenciá-la de outras projeções cilíndricas ortográficas, conforme explicado na [seção 7.5.2](#).

Código-fonte 3 – Código utilizado no software [Mathematica](#) para a construção da projeção cartográfica de Gall-Peters.

```
1 GeoGraphics[{GeoStyling[Orange],  
2   Polygon[Entity["Country", "Brazil"]]}, GeoGridLines ->  
   Automatic,  
3   GeoRange -> {{-90, 90}, {-180, 180}},  
4   GeoBackground -> GeoStyling["StreetMapNoLabels"],  
5   GeoProjection -> {"CylindricalEqualArea",  
6   "StandardParallels" -> {45, -45}}]
```