UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ORLANDO DA CUNHA VASCONCELLOS NETO

Cadeias de Markov: uma visão geral e simplificada com possibilidade de aplicação no ensino médio

Campinas

2024

Orlando da Cunha Vasconcellos Neto

Cadeias de Markov: uma visão geral e simplificada com possibilidade de aplicação no ensino médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Jesus Enrique Garcia

Coorientadora: Verónica Andrea González López

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Orlando da Cunha Vasconcellos Neto e orientada pelo Prof. Dr. Jesus Enrique Garcia.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

V441c Vasconcellos Neto, Orlando da Cunha, 1991-
Cadeias de Markov : uma visão geral e simplificada com possibilidade de aplicação no ensino médio / Orlando da Cunha Vasconcellos Neto. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador(es): Jesus Enrique Garcia.
Coorientador(es): Verónica Andrea González López.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ensino médio. 2. Cadeias de Markov. I. Garcia, Jesus Enrique, 1966-. II. González-López, Verónica Andrea, 1970-. III. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: Markov chains : a general and simplified overview with the possibility of application in high school
Palavras-chave em inglês:
High school
Markov chains
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Jesus Enrique Garcia [Orientador]
Pedro Jose Catuogno
Márcio Luis Lanfredi Viola
Data de defesa: 27-11-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0006-3228-2139
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5169118639760466

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 27 de novembro de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. Dr. JESUS ENRIQUE GARCIA

Prof. Dr. PEDRO JOSE CATUOGNO

Prof. Dr. MÁRCIO LUIS LANFREDI VIOLA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho às minhas filhas, Mariana e Luana, que são as razões pelas quais tudo vale a pena.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por toda a proteção, amparo e realizações ao longo de minha vida.

Aos meus pais, Airton e Cristina, por toda a ajuda fornecida para que eu pudesse chegar até aqui, desde um cafezinho para não dormir sobre os livros até os grandes sacrifícios que todo pai e toda mãe faz para criar bem um filho.

À minha esposa, Karina, por todo amor e companheirismo desde o primeiro dia de graduação, data em que nos conhecemos.

Aos meus orientadores, professor Jesus Enrique Garcia e a professora Verónica Andrea González-López. Sinceramente, me faltam palavras para expressar o tamanho da minha gratidão pela paciência que tiveram comigo durante todo o processo de escrita desta dissertação.

Aos meus sogros, Mauro e Nina, por todo o apoio e por, gentilmente, muitas vezes emprestar sua casa para que eu pudesse escrever este trabalho.

A todos os professores com quem tive o prazer em ter aulas no programa PROFMAT, na Unicamp.

Resumo

Este trabalho pretende apresentar o processo estocástico “Cadeias de Markov” numa linguagem simples e direta para que possa ser aproveitado tanto por professores de ensino médio, para ter uma base de como elaborar uma aula sobre o tema, quanto por estudantes de ensino superior que desejam (ou precisam) saber mais sobre o assunto, de modo que o texto funciona bem como ponto de partida para os estudos relacionados ao tema.

Com relação ao ensino médio, há, nesta dissertação, exemplos que podem ser usados em sala e uma atividade prática proposta para ser aplicada aos estudantes (jogo do humor). A abordagem de Cadeias de Markov permite ilustrar o uso de conceitos trabalhados nessa fase do aprendizado, como vetores, matrizes, multiplicação de matrizes, dentre outros.

O texto também apresenta as cadeias de Markov com partição de estados, conceito que simplifica bastante os processos com grande número de parâmetros.

Palavras-chave: Ensino médio, cadeias de Markov.

Abstract

This work aims to present the stochastic process “Markov Chains” in a simple and straightforward language so that it can be used both by high school teachers to have a basis on how to prepare a class on the topic and by higher education students who wish (or need), so the text works well as a starting point for studies related to the topic.

Regarding high school, there are, in this dissertation, examples that can be used in the classroom and a practical activity proposed to be applied to students (humor game). The Markov Chain approach allows you to illustrate the use of concepts worked on in this phase of learning, such as vectors, matrices, matrix multiplication, among others.

The text also introduces Markov cards with state partitioning, a concept that greatly simplifies processes with a large number of parameters.

Keywords: high school, Markov Chain.

Sumário

Introdução

Neste trabalho pretendemos apresentar uma base para estudos e pesquisas que contextualizem as Cadeias de Markov e sua relevância em diversos campos e tornando este tema complexo acessível ao ensino médio por meio de uma abordagem prática e didática. A escolha desse tema reflete a necessidade de inovar o currículo escolar com conteúdos que estimulem o pensamento analítico e a resolução de problemas em contextos reais. Ao longo desta dissertação, são apresentados conceitos fundamentais das Cadeias de Markov, utilizando uma linguagem acessível e exemplos práticos. O trabalho se estrutura em capítulos que revisam conteúdos básicos, introduzem as Cadeias de Markov, exploram suas aplicações e culminam em uma proposta didática voltada ao ensino médio.

A partir dessa premissa, no Capítulo 1, dissertamos, inicialmente, sobre multiplicação de matrizes e probabilidade condicional visando proporcionar melhor fluidez na leitura e nos cálculos efetuados no capítulo seguinte. Os tópicos seguintes abordam a partição de um espaço amostral e o Teorema de Bayes para facilitar a compreensão do último capítulo desta dissertação.

No Capítulo 2 apresentamos a definição de processos estocásticos e das cadeias de Markov de ordem 1, além de abordar a resolução de algumas situações-problema que servem como base para a introdução dos conceitos: probabilidades de transição, matrizes de transição e de representação de estados, o teorema sobre a distribuição de estados de uma Cadeia de Markov, cadeias regulares e distribuição estacionária. O Capítulo 2 serve de base para os demais capítulos pois, ao compreender o processo mais "simples", os outros capítulos deverão tornar-se mais fáceis pois eles se baseiam nos conceitos apresentados neste capítulo.

No Capítulo 3, exploramos aplicações práticas das Cadeias de Markov, ilustrando como esses conceitos podem ser utilizados em diferentes áreas, como na biologia para a análise de processos genéticos, e no algoritmo PageRank do Google, que é crucial para o ranqueamento de páginas na internet. Esses exemplos demonstram a versatilidade e a importância das Cadeias de Markov em contextos reais.

No Capítulo 4, tendo como base teórica o livro (GUTTORP, 2018) apresentamos, através de exemplos e com base no capítulo 2, as cadeias de Markov de segunda ordem e de ordem $M > 2$.

No Capítulo 5, tratamos das cadeias de Markov com partição de estados e, brevemente, das cadeias de Markov de alcance variável. A principal ideia em particionar os estados em classes de equivalência formadas por estados com mesma probabilidade de transição é reduzir a quantidade de parâmetros em uma cadeia de Markov de ordem finita. Mostramos como isso pode ser feito e ilustramos tal feito com um problema real: a variação no preço semanal do dólar nos últimos anos. Para ilustrar o modelo de cadeias de Markov de alcance variável, tratamos da predição de texto, recurso muito comum presente, por exemplo, nos teclados dos *smartphones* atuais.

O Capítulo 6 apresenta um jogo que pode ser utilizado em sala de aula. O "Jogo do humor" trabalha de forma lúdica todos os conteúdos apresentados nos capítulos anteriores.

No Capítulo 7, apresenta as considerações finais.

Por fim, há, no final do texto, o anexo com as variações semanais do dólar, fonte dos dados usados no Capítulo 5.

1 Revisando conteúdos

Iniciamos este capítulo abordando a multiplicação de matrizes e da probabilidade condicional, fundamentos essenciais para a compreensão das Cadeias de Markov. Esses conceitos não são apenas cruciais para o entendimento dos capítulos seguintes mas também representam habilidades valiosas no currículo do ensino médio. Ao longo deste capítulo, apresentamos exemplos contextualizados e exercícios práticos para reforçar o aprendizado e demonstrar a aplicabilidade desses conceitos em cenários reais. Além disso, discutimos o Teorema de Bayes e a partição do espaço de estados, preparando o terreno para uma compreensão mais aprofundada das Cadeias de Markov, que é explorada nos capítulos subsequentes. Este capítulo serve como uma introdução fundamental, estabelecendo as bases matemáticas necessárias para uma jornada educacional enriquecedora nas Cadeias de Markov.

1.1 Multiplicação de matrizes

Sejam A e B duas matrizes tais que $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times q}$, com $m, n, q \in \mathbb{N}$. O produto $A.B$ resulta numa matriz $C = (c_{ij})_{m\times q}$ de modo que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

Veja o exemplo a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$$

$$C = A.B, \text{ em que } C = (c_{ij})_{2x2}$$

- $c_{11} = 1.10 + 2.30 + 3.50 = 220$
- $c_{12} = 1.20 + 2.40 + 3.60 = 280$
- $c_{21} = 4.10 + 5.30 + 6.50 = 490$
- $c_{22} = 4.20 + 5.40 + 6.60 = 640$

$$C = \begin{pmatrix} 220 & 280 \\ 490 & 640 \end{pmatrix}$$

Considerações

- Somente é possível efetuar o produto entre duas matrizes se o número de colunas da matriz da esquerda for igual ao número de linhas da matriz da direita;
- O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, não necessariamente $A.B = B.A$.

Vejamos a seguir um exemplo prático que pode ser aplicado para melhor compreensão do significado da multiplicação de matrizes.

Enunciado

Uma marcenaria fabrica guarda-roupas de três modelos, diferenciados pelas letras A,B e C. Os modelos possuem números diferentes de gavetas e de portas.

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Portas	4	9	12
Gavetas	6	8	10

Tabela 1 – Portas e gavetas separadas por modelo.

A tabela abaixo indica como foram as vendas desses modelos nos meses de maio e junho:

	Maio	Junho
Tipo A	15	12
Tipo B	12	10
Tipo C	5	8

Tabela 2 – Vendas dos modelos em maio e em junho.

Quantas portas e quantas gavetas foram fabricadas nos meses de maio e junho? Represente os resultados em uma matriz em que a posição da linha indica se o número faz referência a quantidade de portas ou de gavetas e a posição da coluna indica se o mês de referência é maio ou junho.

Resolução do problema

Representando as tabelas 1 e 2 como matrizes, temos:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix};$$
$$Q = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para saber quantas portas são fabricadas no mês de maio, devemos multiplicar a quantidade de portas de cada tipo com a quantidade de armários vendidos, de cada tipo, em maio, e somar os produtos obtidos.
Portas fabricadas em maio: $4.15 + 9.12 + 12.5 = 228$
Perceba que multiplicamos cada elemento da primeira linha da matriz P com o elemento correspondente da primeira coluna da matriz Q. Na prática, o problema pode ser resolvido facilmente utilizando a multiplicação de matrizes.

Efetuando o produto $P.Q$, obtemos a matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 228 & 234 \\ 236 & 232 \end{pmatrix}.$$

Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade de portas ou gavetas (portas para $i = 1$ e gavetas para $i = 2$) fabricadas no mês j ($j = 1$ indica o mês de maio e $j = 2$ indica o mês de junho). Logo,
$a_{11} = 228 \rightarrow$ Foram fabricadas 228 portas no mês de maio;
$a_{12} = 234 \rightarrow$ Foram fabricadas 234 portas no mês de junho;
$a_{21} = 236 \rightarrow$ Foram fabricadas 236 gavetas no mês de maio;
$a_{22} = 232 \rightarrow$ Foram fabricadas 232 gavetas no mês de junho.

1.2 Probabilidade condicional

Outro conceito bastante relevante para o estudo das cadeias de Markov é a probabilidade condicional. Vamos revisar este conceito tendo como base o exemplo a seguir:

Enunciado

Considere uma pesquisa feita com 30.000, pessoas sobre a preferência da marca de sabonete, onde verificou-se que:
14.000 pessoas consomem sabonetes da marca A;
12.000 pessoas consomem sabonetes da marca B;
10.000 pessoas não usam os sabonetes das marcas A e B.

Foi selecionada, ao acaso, uma pessoa que participou da pesquisa. Sabendo-se que ela é consumidora da marca B, determine a probabilidade de ela também ser consumidora da marca A.

Resolução do problema

Para resolver o problema, vamos esquematizar as situações possíveis:

- Situação 1: a pessoa entrevistada consome o sabonete da marca A;
- Situação 2: a pessoa entrevistada consome o sabonete da marca B;
- Situação 3: a pessoa não consome nem o sabonete da marca A nem o sabonete da marca B.

Denotamos a Situação 1 por X, a Situação 2 por Y e o conjunto de pessoas que participou da pesquisa por Ω.

A seguir temos o modo como representaremos a probabilidade de ocorrer algum dos eventos relacionados com a situação-problema.

- $n(\Omega) \rightarrow$ total de pessoas na pesquisa: 30.000;
- $n(X) \rightarrow$ número de pessoas que consomem sabonetes da marca A:14.000;
- $n(Y) \rightarrow$ número de pessoas que consomem sabonetes da marca B: 12.000;
- $n(X \cap Y) \rightarrow$ número de pessoas que consomem sabonetes da marca A e da marca B;
- $n(X \cup Y) \rightarrow$ número de pessoas que consomem sabonetes da marca A ou sabonetes da marca B (ou ambas);
- $n(\Omega - (X \cup Y)) \rightarrow$ número de pessoas que não consomem sabonetes da marca A e nem da marca B: 10.000.

A seguir encontramos a quantidade de pessoas que consomem A ou B (ou ambas):

$$n(X \cup Y) = n(\Omega) - n(\Omega - (X \cup Y));$$
$$n(X \cup Y) = 30000 - 10000;$$
$$n(X \cup Y) = 20000.$$

Porém, quando somamos as quantidades de pessoas nos conjuntos X e Y, obtemos:

$$n(X) + n(Y) = 14000 + 12000 = 26000$$

A diferença nos dá a quantidade de pessoas contadas duas vezes.

$$26000 - 20000 = 6000.$$

Logo, temos que

$$n(X \cap Y) = 6000.$$

Considere as notações a seguir:

- $P(Y) \rightarrow$ Probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso e ela ser consumidora da marca A;
- $P(X \cap Y) \rightarrow$ Probabilidade de se escolher uma pessoa ao acaso e ela ser consumidora tanto da marca A quanto da marca B;
- $P(X|Y) \rightarrow$ Probabilidade de uma pessoa ser consumidora da marca A sabendo-se que ela é uma consumidora da marca B (que é justamente o que buscamos calcular).

Tendo em vista que o cálculo da probabilidade de um determinado evento A dentro de um espaço amostral Ω é dado por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

para calcular $P(X|Y)$, considerar como espaço amostral todas as pessoas que consomem a marca B, ou seja, $n(X)$. As pessoas que consomem Y e X são representadas por $n(X \cap Y)$, correspondente ao número de elementos do evento. Logo,

$$P(X|Y) = \frac{n(X \cap Y)}{n(Y)},$$

$$P(X|Y) = \frac{6000}{12000},$$

$$P(X|Y) = 50\%.$$

Ou seja, a probabilidade de ser selecionado um consumidor da marca A sabendo que ela é consumidora da marca B é de 50%.

Note que, dividindo-se o numerador e o denominador de $P(X|Y)$ por $n(X \cup Y)$, obtemos:

$$P(X|Y) = \frac{\frac{n(X \cap Y)}{n(\Omega)}}{\frac{n(Y)}{n(\Omega)}}.$$

Como $P(Y) = \dfrac{n(Y)}{n(\Omega)}$ e $P(X \cap Y) = \dfrac{n(X \cap Y)}{n(\Omega)}$, temos:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}.$$

Definição formal de probabilidade condicional: Sejam A e B dois eventos num espaço amostral Ω não vazio e finito. A probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

em que $P(B) > 0$.

1.3 Partição de um espaço amostral finito e Teorema da Probabilidade Total

Considere como espaço amostral os alunos de graduação matriculados na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Pode-se dividir os alunos em conjuntos de acordo com o curso que estão matriculados. Como nenhum aluno pode se matricular em mais de uma graduação, não há interseção entre os conjuntos (ou seja, são conjuntos disjuntos) e a união dos conjuntos citados é o próprio espaço amostral.

Nesse exemplo, apresentamos a partição do espaço amostral "alunos da Unicamp"considerando os cursos.

Vale destacar que é possível dividir o espaço amostral citado em partições das mais diversas formas, desde que sejam respeitados os seguintes critérios:

Considere um espaço amostral S e os eventos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$. Esses eventos formam uma partição de um espaço amostral se:

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, com $i,j = 1, \ldots, k$;
- $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_k$.

A seguir temos uma ilustração que representa a partição de um espaço amostral em cinco eventos disjuntos.

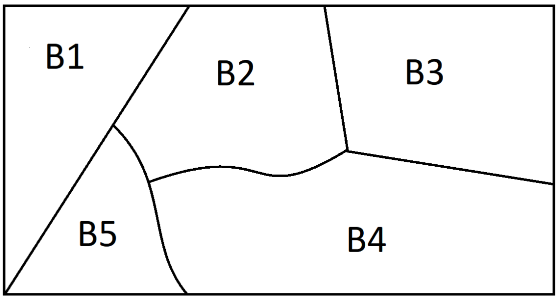

Figura 1 – Partição de um espaço mostral em cinco eventos.

É possível trabalhar com eventos que permeiem as partições. Por exemplo: considere que o espaço amostral é particionado em 5 conjuntos (como na Figura 1). Suponha que o espaço amostral S é formado pelos alunos de humanas de determinada universidade e os eventos B1,B2, B3, B4 e B5 são os alunos dos cursos de história, geografia,ciências sociais, filosofia e pedagogia, respectivamente. Suponha que estamos interessados no evento A: alunos fumantes. Note que o evento trabalha com todos os conjuntos da partição simultaneamente. Para um pesquisador ou entrevistador, é muito mais fácil computar os fumantes em cada um dos cursos separadamente do que trabalhar todos os fumantes que cursam ciências humanas como um único conjunto. A Figura 2 ilustra esta situação:

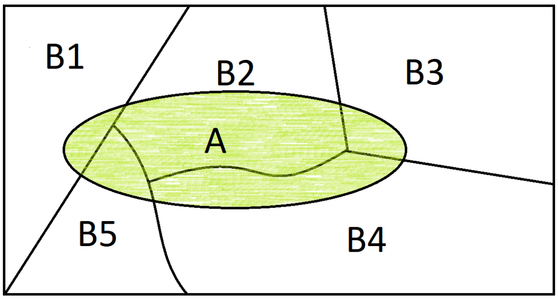

Figura 2 – Partição com evento A: alunos fumantes

Podemos pensar no evento A como sendo a união das interseções de A com cada conjunto que compõe a partição do espaço amostral, isto é,

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A) \cup (B_5 \cap A).$$

Pensando nas probabilidade de ocorrências dos eventos, temos:

$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A) + P(B_4 \cap A) + P(B_5 \cap A).$

Como vimos no Capítulo 1 Seção 1.2,

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}.$$

Logo, $P(X \cap Y) = P(X|Y) \cdot P(Y)$ Esta equação acima é conhecida como Teorema da Multiplicação.

Voltando ao exemplo, temos que

$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) + P(A|B_4) \cdot P(B_4) + P(A|B_5) \cdot P(B_5)$.

Com isso, conseguimos usar a partição do espaço amostral como instrumento para calcular a probabilidade de ocorrência do evento A.

Generalizando o exemplo anterior temos, como consequência, o **Teorema da Probabilidade Total**.

Seja $B_1, B_2, B_3, ...B_k$ uma partição do espaço amostral S e A um evento qualquer de S. Então
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

1.3.1 Teorema de Bayes

Pelo Teorema da multiplicação, temos que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \text{ ou } P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Como consequência temos que

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

O que implica na **forma simples do Teorema de Bayes**:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Essa forma é chamada de "simples" porque representa uma partição do espaço amostral em apenas dois eventos. Usando o Teorema da Probabilidade Total,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i),$$

obtemos a **forma geral do Teorema de Bayes**: seja $B_1, B_2, \cdots, B_k$ uma partição do espaço amostral S e A um evento.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Esse Teorema representa a probabilidade de uma partição B_i (com $1 \leq i \leq k$) ocorrer dado que A ocorreu.

1.3.2 Exemplos

Nesta subseção apresentamos dois exemplos simples de aplicação do que abordamos no capítulo. O primeiro contém uma partição do espaço amostral em dois eventos e o segundo exemplo contém a partição do espaço amostral em três eventos.

Exemplo 1: Considere uma cidade na qual 45% das pessoas são homens e 55% são mulheres. Além disso, 50% dos homens e 30% das mulheres são fumantes. Qual é a probabilidade de uma pessoa, selecionada ao acaso, ser homem dado que é fumante?

Resolução: Vamos começar "nomeando" os eventos:

- H : homem;
- M : mulher;
- F : fumante.

Dados do problema:

- $P(H) = 0{,}45$;
- $P(M) = 0{,}55$;
- $P(F|H) = 0{,}5$;
- $P(F|M) = 0{,}3$

Pelo Teorema da probabilidade total, temos:

$$P(F) = P(F|H) \cdot P(H) + P(M|F) \cdot P(M).$$

Substituindo os valores do enunciado, temos:

$$P(F) = 0{,}5 \cdot 0{,}45 + 0{,}3 \cdot 0{,}55 = 0{,}39.$$

Vamos calcular a probabilidade de ser homem dado que é fumante, ou seja, $P(H|F)$. Pelo Teorema de Bayes, temos:

$$P(H|F) = \frac{P(F|H) \cdot P(H)}{P(F)}.$$

Substituindo os valores, temos:

$$P(H|F) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}45}{0{,}39} = 57{,}69\%.$$

Portanto, a probabilidade de ser homem dado que é fumante é de, aproximadamente, 57,69%.

Exemplo 2: Uma empresa era formada por biólogos, engenheiros e administradores, sendo 40% dos funcionários biólogos, 30% engenheiros e 30% administradores.

O percentual de cada grupo exercendo cargo gerencial é: 30% dos biólogos, 40% dos engenheiros e 10% dos administradores. Selecionando-se um empregado aleatoriamente, determine:
a) A probabilidade de ser gerente.
b) A probabilidade de ser biólogo dado que é gerente.

Para a resolução desse problema, considere:

- $P(B)$: Probabilidade de ser biólogo;
- $P(E)$: Probabilidade de ser engenheiro;
- $P(A)$: Probabilidade de ser administrador;
- $P(G)$: Probabilidade de exercer cargo gerencial.

Pelo Teorema da probabilidade total, temos:

$$P(G) = P(G|B) \cdot P(B) + P(G|E) \cdot P(E) + P(G|A) \cdot P(A).$$

Substituindo os valores de acordo com o enunciado, obtemos:

$$P(G) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}27.$$

Logo, temos que a resposta do item a) é 27%.

Pelo Teorema de Bayes, temos:

$$P(B|G) = \frac{P(G|B) \cdot P(B)}{P(G)}.$$

Substituindo os valores do enunciado e os calculados no item a), obtemos:

$$P(B|G) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}27} = 0{,}444....$$

Temos então que a resposta do item b) é de, aproximadamente, 44,4%.

2 Cadeias de Markov

Neste capítulo, introduzimos e definimos as cadeias de Markov de ordem 1. O capítulo é dedicado a detalhar situações problemas essenciais para a compreensão dos conceitos fundamentais, incluindo probabilidades de transição, matrizes de transição, representação de estados, o teorema sobre a distribuição de estados de uma Cadeia de Markov, cadeias regulares e distribuição estacionária. Esses conceitos formam a base para os capítulos subsequentes, facilitando a compreensão de processos mais complexos. Ao dominar esses fundamentos, os leitores estarão bem preparados para explorar aplicações práticas mais avançadas, que serão abordadas no Capítulo 3.

2.1 Processos estocásticos

Uma sequência numérica é considerada **determinística** quando é possível determinar seus valores desde que sejam conhecidos seu(s) valor(es) inicial(iniciais) e sua regra de construção. Por exemplo: uma progressão aritmética é uma sequência determinística pois, conhecendo um de seus termos e a razão, podemos determinar quais os próximos valores da sequência (ou os anteriores, caso o termo em questão não seja o primeiro).

Uma sequência de valores definida, por exemplo, pelos resultados obtidos em diversos lançamentos de um dado com seis faces forma uma sequência não determinística pois, mesmo que tenhamos vários termos da sequência em questão, não é possível saber qual é o valor do próximo termo. Os elementos dessa sequência são chamados de **variáveis aleatórias** ou **estocásticas**. Variáveis aleatórias podem ser descritas pelos seus valores possíveis e suas probabilidades associadas.

Existem diversos tipos de processos estocásticos. Uma cadeia de Markov é um exemplo desse tipo de processo.

Tomando como base o exemplo os lançamentos de um dado de seis faces, chamamos de **alfabeto** o conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$, ou seja, as faces do dado. Caso o dado seja lançado duas vezes, consideramos como **espaço de estados** o conjunto $\{(11),(12),(13),\ldots,(66)\}$. Cada elemento do espaço de estados é chamado de **estado**.

2.2 Cadeias de Markov

Chamamos de *Propriedade Markoviana* a propriedade de um processo estocástico com estados discretos (ou contínuos) que determina que as distribuições de probabilidade de estado futuras não dependem de estados anteriores; apenas do estado presente (atual). Essa propriedade é assim denominada em homenagem ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov.

2.2.1 Exemplo

Considere o seguinte experimento: lançar duas moedas (honestas) e verificar se as faces voltadas para cima, após o lançamento, são coroas. Temos aqui dois estados: o estado **"A"**, que indica que as duas faces voltadas para cima da moeda são coroas, e o estado **"B"**, que indica que as duas faces não são coroas. Note que, neste caso, estamos trabalhando com todas as possibilidades possíveis pois, ou saem duas coroas, ou não saem duas coroas; não há um terceiro caso possível.

Vamos supor que tenham sido feitos 6 lançamentos, conforme a Tabela 3:

- CC indica cara no primeira moeda e cara na segunda;
- CK indica cara no primeira moeda e coroa na segunda;
- KC indica coroa no primeira moeda e cara na segunda;
- CC indica coroa no primeira moeda e coroa na segunda.

Lançamento	1	2	3	4	5	6
Resultados	CC	KC	KK	CK	CC	KK
Estado	B	B	A	B	B	A
Probabilidade	75%	75%	25%	75%	75%	25%

Tabela 3 – Lançamento de um dado de seis faces.

Neste caso temos uma série de estados independentes pois os resultados de um lançamento não dependem dos estados de outros. Assim a probabilidade de ocorrer duas coroas é 25%, logo, a probabilidade de não saírem duas coroas é de 75%, independentemente de resultados anteriores.

Suponha, agora, que o interesse é saber quantas vezes ocorre o evento "sair duas caras" (queremos saber quantas vezes ocorreu esse evento até o lançamento atual), obtendo a Tabela 4, que é obtida a partir da Tabela 3.

Tempo (Lançamento)	1	2	3	4	5	6
Resultados	CC	KC	KK	CK	CC	KK
Estado	0	0	1	1	1	2
Probabilidade	75%	75%	25%	75%	75%	25%

Tabela 4 – Lançamento de um dado e suas probabilidades de ocorrência.

A probabilidade de o sistema estar no estado 1 no tempo 4 dado que o sistema estava no estado 1 no tempo 3 é 75%, da mesma forma, a probabilidade de o sistema estar no estado 1 no tempo 4 dado que o sistema estava no estado 0 no tempo 3 é de 25%. Podemos dizer ainda que a probabilidade de o sistema estar no estado 1 no tempo 4 dado que o sistema estava no estado 2 no tempo 3 é 0.

Pode-se notar que, por temos o conhecimento do estado do sistema no tempo 3, não é necessário conhecer o estado do sistema nos tempos anteriores ao tempo 3 para calcular a probabilidade do estado do sistema no tempo 4.

2.2.2 Probabilidade de transição

Normalmente, utilizamos o símbolo $P(A|B)$ para definir a probabilidade de ocorrer um evento A dado que ocorreu um evento B. No caso das Cadeias de Markov utilizaremos o símbolo p_{ij} para representar a probabilidade de um estado passar de i para j.

Tendo como base o exemplo representado na Tabela 4 temos que:

- $p_{12} = 25\%$;
- $p_{11} = 75\%$;
- $p_{21} = 0$.

Na prática, pode-se dizer que, se A representa o evento do sistema estar no estado i num tempo n e B representa o evento do sistema estar no estado j no tempo $n + 1$, temos que:

$$P(B|A) = p_{ij}.$$

Dizemos que p_{ij} é a probabilidade de transição de um estado i para um estado j numa Cadeia de Markov.

2.2.3 Matriz de transição

Nesta subseção apresentamos um exemplo para ilustrar o que é uma matriz de transição:

Uma pesquisa de mercado de carros comercializado em três diferentes marcas constatou as seguintes propriedades:

- Um consumidor da marca A, a cada compra, tem probabilidade 80% de manter-se na marca, probabilidade 5% de escolher a marca B e 15% de escolher a marca C;
- Um consumidor da marca B, a cada compra, tem probabilidade 90% de manter-se na marca, probabilidade 1% de escolher a marca A e 9% de escolher a marca C;
- Um consumidor da marca C, a cada compra, tem probabilidade 50% de manter-se na marca, probabilidade 30% de escolher a marca A e 20% de escolher a marca B;
- A probabilidade do consumidor da marca A manter-se na marca A é denotada por p_{11}, de mudar para a marca B é denotada por p_{12} e de mudar para a marca C é denotada por p_{13}. As notações para os consumidores das marcas B e C são feitas de modo análogo;
- Tomando 1 como referência para a marca A, 2 como referência para a marca B e 3 como referência para a marca C, p_{ij} (com $1 \leqslant i \leqslant 3$ e $1 \leqslant j \leqslant 3$ e $i, j \in \mathbb{N}$) é a probabilidade do consumidor da marca "i"mudar (ou permanecer) na marca "j".

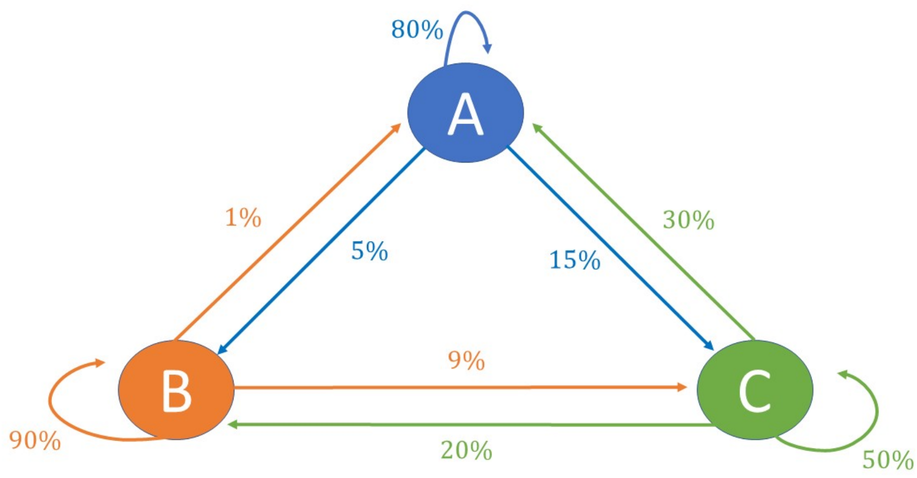

Figura 3 – Grafo que apresenta as probabilidades de mudança de estado.

Observação: estamos considerando, no exemplo, que a escolha da marca seja exclusiva, ou seja, se o consumidor utiliza a marca A, por exemplo, ele não consome as marcas B ou C.

Abaixo temos um exemplo de matriz de uma transição:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}01 & 0{,}9 & 0{,}09 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz de transição é uma **Matriz de Probabilidades**, ou seja, a soma dos elementos de uma mesma linha ou de uma mesma coluna é sempre igual a 1.

2.2.4 Matriz de representação de estado

Considerando o exemplo da subseção 2.2.3, suponhamos que, inicialmente, o consumidor seja da marca A. Como sabemos que ele consome a marca A, pela observação feita na subseção anterior, sabemos que ele não consome as marcas B ou C.

Utilizamos a matriz linha $\pi^{(0)}$ para representar a distribuição de probabilidade para a situação inicial, que para o referido exemplo, é:

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O elemento da primeira coluna é 1 porque temos certeza de que é consumida a marca A e, como isso implica que as marcas B e C não são consumidas, os elementos da segunda e da terceira coluna estão representadas por 0.

Caso o consumidor seja, inicialmente, da marca B, teríamos:

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Caso o consumidor seja, inicialmente, da marca C, teríamos:

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A **matriz de representação de estado** $(\pi^{(n)})$ representa a probabilidade de o indivíduo ser consumidor da marca A, da marca B ou da marca C no período n, ou seja,

$$\pi^{(n)} = \begin{bmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} & p_3^{(n)} \end{bmatrix},$$

em que $p_j^{(n)}$ representa a probabilidade de consumo da marca j no tempo n (no caso, com $1 \leq j \leq 3$, com $n \in \mathbb{N}$).

Se sabemos qual é a marca consumida inicialmente, chamamos o estado em questão de estado inicial, e será representado pela correspondente distribuição $\pi^{(0)}$.

Por exemplo: se desejamos saber, após duas compras, qual a probabilidade de um consumidor da marca A consumir a marca B, consumir a marca C ou permanecer na marca A, estamos buscando a "matriz de estado 2"($\pi^{(2)}$). Vejamos como é calculada tal matriz:

Considere a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}01 & 0{,}9 & 0{,}09 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

e a matriz de estado inicial

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para calcular quais as probabilidades de consumo na próxima compra devemos efetuar os cálculos a seguir:
$p(A|A) = 1.0{,}8 = 0{,}8$;
$p(B|A) = 1.0{,}05 = 0{,}05$;
$p(C|A) = 1.0{,}15 = 0{,}15$.

Com isso conseguimos a matriz de estado π_1:

$$\pi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{bmatrix}.$$

Para calcular quais as probabilidades de consumo na próxima compra devemos efetuar os cálculos a seguir:
$p_{A\to A\to A} + p_{A\to B\to A} + p_{A\to C\to A} = (0{,}8.0{,}8) + (0{,}05.0{,}01) + (0{,}15.0{,}3) = 0{,}6855$,
$p_{A\to A\to B} + p_{A\to B\to B} + p_{A\to C\to B} = (0{,}8.0{,}05) + (0{,}05.0{,}9) + (0{,}15.0{,}2) = 0{,}115$,
$p_{A\to A\to C} + p_{A\to B\to C} + p_{A\to C\to C} = (0{,}8.0{,}15) + (0{,}05.0{,}09) + (0{,}15.0{,}5) = 0{,}1995$,
em que, por exemplo, temos que $p_{A\to B\to A}$ indica a probabilidade do consumidor mudar da marca A para a marca B e, posteriormente, mudar para a marca A.

Efetuando o produto $\pi^{(1)}.P$, conseguimos a matriz de estado a seguir:

$$\pi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}6855 & 0{,}115 & 0{,}1995 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que, pelos procedimentos adotados acima, as seguintes equações são válidas para os cálculos de $\pi^{(1)}$ e $\pi^{(2)}$:

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}.P,$$
$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)}.P.$$

Logo, temos que:

$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)}.P \Rightarrow \pi^{(2)} = \pi^{(0)}.P.P \Rightarrow \pi^{(2)} = \pi^{(0)}.P^2.$$

De modo geral, podemos dizer que

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}.P^n$$

2.2.5 Matriz de transição de n fases e distribuição de uma Cadeia de Markov

Seja $P = [p_{ij}]$ a matriz de transição de uma Cadeia de Markov. A **matriz de transição de n passos**, denotada por $P^{(n)}$, é tal que

$$P^{(n)} = P^n.$$

Seja $\pi_j^{(n)}$ a probabilidade de uma matriz estar no estado j no tempo n. Considerando uma Cadeia de Markov com k estados, com $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\pi^{(n)} = \begin{bmatrix} \pi_1^{(n)} & \pi_2^{(n)} & ... & \pi_k^{(n)} \end{bmatrix}.$$

O vetor $\pi^{(n)}$ é chamado de **distribuição da Cadeia de Markov no tempo n**. O vetor $\pi^{(0)}$ é chamado de **distribuição inicial da Cadeia de markov**.

2.2.6 Teorema: Distribuição de uma Cadeia de Markov

Seja P uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov de estado inicial $\pi^{(0)}$. A distribuição da Cadeia de Markov num tempo n é dada por:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}.P^{(n)},$$

em que $P^{(n)} = P^n$.

2.2.7 Cadeias regulares e distribuição estacionária

Tomando como base o exemplo usado na Subseção 2.3.3, utilizando o aplicativo de geometria dinâmica Geogebra, foram calculadas algumas distribuições da cadeia em alguns períodos.

$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.01 & 0.9 & 0.09 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.01 & 0.9 & 0.09 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.01 & 0.9 & 0.09 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.01 & 0.9 & 0.09 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$
$\pi_0 = (\ 1 \quad 0 \quad 0\ )$	$\pi_0 = (\ 0 \quad 1 \quad 0\ )$	$\pi_0 = (\ 0 \quad 0 \quad 1\ )$	$\pi_0 = (\ 0.4 \quad 0.1 \quad 0.5\ )$
$\pi_1 = \pi_0\, P$ $\longrightarrow (\ 0.8 \quad 0.05 \quad 0.15\ )$	$\pi_1 = \pi_0\, P$ $\longrightarrow (\ 0.01 \quad 0.9 \quad 0.09\ )$	$\pi_1 = \pi_0\, P$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.2 \quad 0.5\ )$	$\pi_1 = \pi_0\, P$ $\longrightarrow (\ 0.47 \quad 0.21 \quad 0.32\ )$
$\pi_2 = \pi_0\, P^2$ $\longrightarrow (\ 0.69 \quad 0.12 \quad 0.2\ )$	$\pi_2 = \pi_0\, P^2$ $\longrightarrow (\ 0.04 \quad 0.83 \quad 0.13\ )$	$\pi_2 = \pi_0\, P^2$ $\longrightarrow (\ 0.39 \quad 0.3 \quad 0.31\ )$	$\pi_2 = \pi_0\, P^2$ $\longrightarrow (\ 0.47 \quad 0.28 \quad 0.25\ )$
$\pi_3 = \pi_0\, P^3$ $\longrightarrow (\ 0.61 \quad 0.18 \quad 0.21\ )$	$\pi_3 = \pi_0\, P^3$ $\longrightarrow (\ 0.08 \quad 0.77 \quad 0.14\ )$	$\pi_3 = \pi_0\, P^3$ $\longrightarrow (\ 0.41 \quad 0.35 \quad 0.24\ )$	$\pi_3 = \pi_0\, P^3$ $\longrightarrow (\ 0.46 \quad 0.32 \quad 0.22\ )$
$\pi_{100} = \pi_0\, P^{100}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_4 = \pi_0\, P^4$ $\longrightarrow (\ 0.12 \quad 0.73 \quad 0.15\ )$	$\pi_4 = \pi_0\, P^4$ $\longrightarrow (\ 0.4 \quad 0.38 \quad 0.21\ )$	$\pi_4 = \pi_0\, P^4$ $\longrightarrow (\ 0.44 \quad 0.36 \quad 0.21\ )$
$\pi_{101} = \pi_0\, P^{101}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_{101} = \pi_0\, P^{101}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_{101} = \pi_0\, P^{101}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_{101} = \pi_0\, P^{101}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$
$\pi_{1000} = \pi_0\, P^{1000}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_{1000} = \pi_0\, P^{1000}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_{1000} = \pi_0\, P^{1000}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$	$\pi_{1000} = \pi_0\, P^{1000}$ $\longrightarrow (\ 0.3 \quad 0.52 \quad 0.18\ )$

Figura 4 – Distribuição da Cadeia de Markov usando $\pi^{(0)}$ de valores variados.

Observação: por conta das configurações do software utilizado, nas imagens, π_n representa $\pi^{(n)}$.

Notamos que, após determinado período, as distribuições permanecem constantes, ou seja, passado algum tempo, as probabilidades de o sistema estar em um determinado estado não variam e, além disso, tais probabilidades não dependem do estado inicial. Tal distribuição é chamada de **distribuição de equilíbrio** (ou **distribuição estacionária**), que é representada pelo vetor V e calculada por:

$$V.P = V.$$

Note que V é um **autovetor** da matriz P associado ao autovalor 1. Vejamos como isso ocorre no exemplo dado:

Primeiramente, como $V.P = V \Rightarrow P^T.V^T = V^T$.

Logo, $P^T.V^T = V^T \Rightarrow P^T.V^T - V^T = 0$.

Então, $P^T.V^T - V^T = 0 \Rightarrow (P^T - I_n).V^T = 0$.

Usando os dados do exemplo, temos:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8-1 & 0{,}01 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}9-1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}09 & 0{,}5-1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes, temos:

$$\begin{cases} -0{,}2v_1 + 0{,}01v_2 + 0{,}3v_3 = 0 \\ 0{,}05v_1 - 0{,}1v_2 + 0{,}2v_3 = 0 \\ 0{,}15v_1 + 0{,}09v_2 - 0{,}5v_3 = 0 \end{cases}$$

Tal sistema é possível e indeterminado, logo, deixando a solução em função de uma das variáveis (no caso, v_3), obtemos:

$$V^T = \begin{bmatrix} \frac{64}{39}v_3 \\ \\ \frac{110}{39}v_3 \\ \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Ou ainda:

$$V^T = v_3. \begin{bmatrix} \frac{64}{39} \\ \\ \frac{110}{39} \\ \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como V é um vetor referente a uma matriz de probabilidades, temos que a soma dos elementos de V deve ser igual a 1, isto é,

$$(\frac{64}{39} + \frac{110}{39} + 1)v_3 = 1.$$

Logo,

$$v_3 = \frac{39}{213}$$

Temos, então, que

$$V = \begin{bmatrix} \frac{64}{213} & \frac{110}{213} & \frac{39}{213} \end{bmatrix}.$$

Usando a aproximação de duas casas decimais, temos:

$$V = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}52 & 0{,}18 \end{bmatrix}.$$

De modo geral, se P é uma matriz de transição de uma Cadeia de Markov. A distribuição estacionária V é o vetor linha que satisfaz a equação:

$$V.P = V,$$

na qual V é o autovetor associado ao autovalor 1.

Para que V exista, P deve ser uma matriz **irredutível** e **aperiódica**.

Uma cadeia de Markov é chamada de irredutível se é possível alcançar qualquer estado a partir de qualquer outro estado, em um número finito de passos, com uma probabilidade maior que zero. Isso significa que todos os estados são comunicantes entre si.

Formalmente: a cadeia de Markov é irredutível se, para qualquer par de estados i e j, existe um $n > 0$ tal que a probabilidade de transição $P^n(i,j) > 0$. Ou seja, se existir n tal que a probabilidade de atingir o estado j a partir do estado i em n passos é maior que zero.

Uma cadeia de Markov é chamada de aperiódica se não há um padrão regular no qual os estados são visitados. Mais formalmente: seja i um estado da cadeia. Ela é dita aperiódica se o máximo divisor comum dos tempos em que é possível retornar ao estado i for igual a 1. Em outras palavras, se um estado i puder ser retornado em tempos múltiplos que não sejam previsíveis por um único período, então a cadeia é aperiódica.

Como consequência, temos a propriedade de que

$$\lim_{k \to \infty} P^k = \vec{1}.V,$$

em que $\vec{1}$ é um vetor coluna com todos os elementos iguais a 1. O número de linhas do vetor $\vec{1}$ é o mesmo número de colunas de V.

No exemplo que foi utilizado anteriormente, temos:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0{,}30 & 0{,}52 & 0{,}18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}30 & 0{,}52 & 0{,}18\\0{,}30 & 0{,}52 & 0{,}18\\0{,}30 & 0{,}52 & 0{,}18\end{bmatrix}$$

De fato, usando o aplicativo Geogebra mencionado anteriormente, temos um exemplo prático da propriedade supracitada:

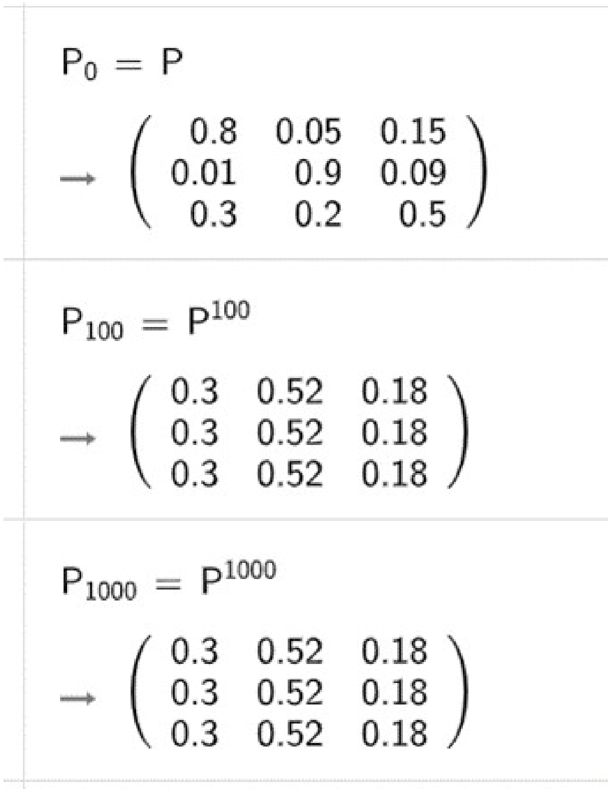

Figura 5 – Matriz P^n com valores relativamente grandes de n.

3 Aplicações das Cadeias de Markov

Neste capítulo focamos em exemplos de aplicações práticas das Cadeias de Markov, ilustrando como os conceitos teóricos abordados anteriormente se manifestam em situações do mundo real. Este capítulo é dedicado a apresentar estudos de caso em diferentes áreas, demonstrando a versatilidade e relevância das Cadeias de Markov em contextos variados. Ao explorar esses exemplos, os leitores terão a oportunidade de ver a teoria em ação e compreender melhor como as Cadeias de Markov podem ser aplicadas de maneira prática e significativa.

3.1 Aplicação em biologia - botânica

Considere um botânico que possui duas plantas monoicas (apresenta flores unissexuais, mas distribuídas no mesmo indivíduo), I e II, para fazer polinização cruzada (ou seja, entre as plantas I e II) para a produção de dois descendentes.

As plantas originais são descartadas e o mesmo processo é repetido assim que a nova geração estiver madura. Interessado na proporção de plantas de acordo com cada um dos vários genótipos para um gene específico, o processo é repetido várias vezes. Suponha também que o gene de interesse do botânico tenha dois alelos, A e a. Considere que a presença do alelo dominante A tenha um determinado fenótipo (característica) enquanto a ausência do alelo dominante implique em outro fenótipo.

Para começar o experimento temos seis estados iniciais: {AA, AA}, {AA, Aa}, {Aa,Aa}, {AA, aa}, {Aa, aa} e {aa, aa} - observe que não está sendo considerada a ordem em que os elementos aparecem, ou seja, o estado $\{Aa, aa\}$ é o mesmo de $\{aa, Aa\}$. Seguem os possíveis resultados de cruzamentos de acordo com cada estado inicial:

	A	A
A	AA	AA
A	AA	AA

Figura 6 – Estado 1 - cruzamento $\{AA{,}AA\}$.

Pela Figura 6, temos que só há um caso possível quando o experimento está neste ponto, ou seja:

$\{AA, AA\} \rightarrowtail \{AA,AA\} : p_{11} = 1$

	A	A
A	AA	AA
a	Aa	Aa

Figura 7 – Estado 2 - cruzamento $\{AA,Aa\}$.

Possibilidades e probabilidades de transição, de acordo com a Figura 7.

- $\{AA, Aa\} \rightarrowtail \{AA, AA\} : p_{21} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25;$
- $\{AA, Aa\} \rightarrowtail \{AA, Aa\} : p_{22} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 0{,}5;$
- $\{AA, Aa\} \rightarrowtail \{Aa, Aa\} : p_{2,4} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$

	A	A
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

Figura 8 – Estado 3 - cruzamento $\{AA,aa\}$.

Pela Figura 8, temos que só há um caso possível quando o experimento está neste ponto, ou seja:

$\{AA, aa\} \rightarrowtail \{Aa, Aa\} : p_{34} = 1.$

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Figura 9 – Estado 4 - cruzamento $\{Aa{,}Aa\}$.

Possibilidades e probabilidades de transição:

- $\{Aa, Aa\} \rightarrowtail \{AA, AA\} : p_{41} = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$;
- $\{Aa, Aa\} \rightarrowtail \{AA, Aa\} : p_{42} = 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 0{,}25$;
- $\{Aa, Aa\} \rightarrowtail \{AA, aa\} : p_{43} = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}125$;
- $\{Aa, Aa\} \rightarrowtail \{Aa, Aa\} : p_{44} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$;
- $\{Aa, Aa\} \rightarrowtail \{Aa, aa\} : p_{45} = 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}25$;
- $\{Aa, Aa\} \rightarrowtail \{aa, aa\} : p_{46} = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$.

	A	a
a	Aa	aa
a	Aa	aa

Figura 10 – Estado 5 - cruzamento $\{Aa{,}aa\}$.

Pela Figura 10, obtemos:

- $\{Aa, aa\} \rightarrowtail \{Aa, Aa\} : p_{54} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$;
- $\{Aa, aa\} \rightarrowtail \{Aa, aa\} : p_{55} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 0{,}5$;
- $\{Aa, aa\} \rightarrowtail \{aa, aa\} : p_{56} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

	a	a
a	aa	aa
a	aa	aa

Figura 11 – Estado 6 - cruzamento $\{aa{,}aa\}$

Pela figura 11, temos que só há um caso possível quando o experimento está neste ponto, ou seja:

$\{aa, aa\} \rightarrowtail \{aa{,}aa\} : p_{66} = 1.$

Com os dados obtidos, podemos construir a matriz de transição, mostrada a seguir:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}0625 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir a matriz de transição, podemos calcular potências de P com números suficientemente grandes e, com isso, conseguimos um resultado bastante curioso:

$$P^{2000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Independentemente do caso inicial, temos que, num longo prazo, temos apenas plantas homozigotas.

Vamos fazer os cálculos para encontrar a distribuição de equilíbrio:

$$V.P = V \Rightarrow (P^T - I).V^T = 0$$

Temos então que

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0{,}25 & 0 & 0{,}0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5-1 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 & 0{,}125 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 1 & 0{,}25-1 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}5-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0625 & 0{,}25 & 1-1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Os estados 1 e 6 são chamados de **estados absorventes**. Uma cadeia que possui estado(s) absorvente(s) não é uma cadeia **ergódica**, ou seja, não podemos alcançar qualquer estado a partir de outro estado.

3.2 Page Rank do Google

Criado em 1997, por Harry Page e Sergey Brin, o Google é uma multinacional americana que, dentre vários serviços, possui o conhecido mecanismo de busca para realizar pesquisas na rede. Em 1998 foi implementado o programa *Page Rank*, um método de pesquisa que tem como finalidade o ranqueamento dos sites referentes à busca feita pelo usuário com o objetivo de otimizar o tempo e qualidade da pesquisa.

O algoritmo calcula a probabilidade de chegar a determinados sites ao clicar em *back cliks* (links de uma página da internet para outra página, funcionando como uma referência dentro de um conteúdo) aleatórios, logo, quanto maior o resultado desse cálculo probabilístico, maior a chance de ele aparecer na página inicial do Google.

Para melhor compreensão do problema, segue um exemplo fictício usando a ideia de *Page Rank*:

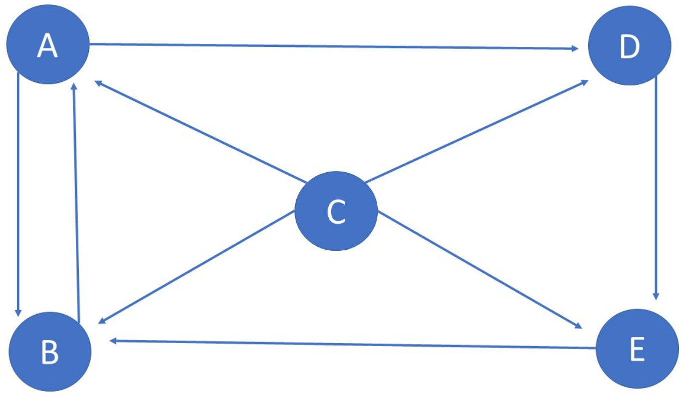

Figura 12 – *Page Rank* com cinco sites.

Na Figura 12, temos um conjunto com quatro sites, A, B, C, D, e E. Considere que a probabilidade de escolha da próxima página pelo internauta de acordo com as possibilidades do grafo seja igual em cada caso. Considerando o espaço de estados $S = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$, em que $\{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$ refere-se, respectivamente, a $\{A,B,C,D,E\}$, temos que:

Pode-se montar uma matriz de transição com os dados acima:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Este exemplo é um caso muito simplificado para que se tenha uma ideia de como funciona o motor de pesquisa de sites de busca. Uma simulação próxima do modelo real teria o espaço de estados com muito mais elementos (milhões de vezes maior do que o apresentado acima). Voltaremos a abordar esse exemplo mais adiante nesta dissertação. Para mais exemplos, recomendo a leitura do artigo (PÉREZ, 2021).

4 Cadeias de Markov de ordem superior

Vimos que, numa Cadeia de Markov de primeira ordem, o estado atual depende somente do estado imediatamente anterior e possui uma distribuição estacionária única (sob certas suposições) que pode ser calculada através da resolução de um sistema de equações lineares. Neste Capítulo, avançamos na exploração das Cadeias de Markov, focando agora nas cadeias de segunda ordem e de ordem superior a 2. Este capítulo visa ampliar a compreensão do leitor sobre a complexidade e aplicabilidade dessas cadeias em situações mais avançadas. Através de exemplos detalhados e construídos sobre os fundamentos estabelecidos no Capítulo 2, buscamos não apenas aprofundar o conhecimento teórico, mas também demonstrar como estes conceitos podem ser efetivamente aplicados em cenários práticos, oferecendo assim um recurso valioso para educadores que desejam introduzir estes tópicos em aulas de ensino médio.

4.1 Ordem de uma Cadeia de Markov

De maneira muito simples, pode-se dizer que a ordem de uma Cadeia de Markov está associada diretamente com a quantidade de estados que o próximo estado está condicionado. Por exemplo: uma Cadeia de Markov de primeira ordem é um processo no qual o próximo estado depende do estado atual. Uma cadeia de segunda ordem tem o próximo estado condicionado aos dois estados imediatamente anteriores. Uma cadeia de Markov de ordem M tem seu próximo estado relacionado com os M estados anteriores. A ordem de uma Cadeia de Markov depende do processo que está sendo modelado e dos objetivos de modelagem. Existem alguns métodos para determinar a ordem de uma Cadeia de Markov (caso não seja possível identificar a ordem do fenômeno estudado com a análise do problema como fizemos nos problemas anteriores) como os critérios AIC e BIC, porém, não trabalhamos esses conceitos aqui. Sugiro a leitura do artigo (ANDRÉ, 2013).

4.2 Cadeia de Markov de segunda ordem

Neste modelo o estado atual depende de dois estados imediatamente anteriores, ou seja, a probabilidade de transição de um estado para o outro é a probabilidade condicional desse estado dados os dois estados imediatamente anteriores. Veja o exemplo a seguir que ilustra a situação descrita:

Um restaurante faz entrega de apenas dois tipos de pizza: muçarela e calabresa. Fazendo dois pedidos de pizza, a partir do terceiro pedido você ganha uma pizza totalmente grátis. Condições da promoção:

- Os pedidos devem ser feitos em dias diferentes;
- O cliente pode escolher qualquer sabor de pizza em qualquer pedido;
- Os pedidos podem ser repetidos, ou seja, o segundo pedido pode ser igual ao primeiro.
- A promoção vale por dois meses a partir de seu anúncio;

O proprietário do restaurante resolveu computar a distribuição dos pedidos e notou que há uma relação entre a escolha do recheio da pizza grátis e os outros dois pedidos anteriores.

Temos uma situação em que um elemento depende diretamente da escolha de dois imediatamente anteriores e, dessa forma, supondo válidas todas as condições de uma cadeia de Markov, ela é de segunda ordem.

Considere a tabela 5, a qual apresenta as possibilidades da escolha da terceira pizza em função das escolhas das anteriores:

1ª pizza	2ª pizza	3ª pizza
Muçarela	Muçarela	Muçarela
Muçarela	Muçarela	Calabresa
Muçarela	Calabresa	Muçarela
Muçarela	Calabresa	Calabresa
Calabresa	Muçarela	Muçarela
Calabresa	Muçarela	Calabresa
Calabresa	Calabresa	Muçarela
Calabresa	Calabresa	Calabresa

Tabela 5 – Pedidos de pizzas.

Aos recheios das pizzas vamos atribuir os valores 0 para muçarela e 1 para calabresa. Definimos como **alfabeto (A)** o conjunto formado pelos elementos 0 e 1 ($A = \{0{,}1\}$) e definimos como **Espaço de estados (S)** o conjunto formado por todos os pares ordenados possíveis de serem formados com os elementos do alfabeto disponível, ou seja, $S = A^2 = \{(00), (10), (01), (11)\}$.

No caso, temos que $S = A^2$ porque nosso processo tem ordem 2.

Seja $s \in S$. Como o alfabeto em questão possui apenas dois elementos, temos que $p(1|s) = 1 - p(0|s)$.

Podemos considerar a matriz B a seguir para representar as probabilidades de transição do nosso exemplo, baseada na tabela 6.

–	0	1
(00)	$p(0\|00)$	$p(1\|00) = 1 - p(0\|00)$
(01)	$p(0\|01)$	$p(1\|01) = 1 - p(0\|01)$
(10)	$p(0\|10)$	$p(1\|10) = 1 - p(0\|10)$
(11)	$p(0\|11)$	$p(1\|11) = 1 - p(0\|11)$

Tabela 6 – Probabilidades de transição.

A seguir estão as informações presentes na tabela 6, organizadas na forma de matriz:

$$B = \begin{pmatrix} p_{000} & 1 - p_{000} \\ p_{010} & 1 - p_{010} \\ p_{100} & 1 - p_{100} \\ p_{110} & 1 - p_{110} \end{pmatrix}.$$

Nota-se que há um problema: a matriz de transição não é quadrada. Para podermos efetuar os cálculos envolvendo um estado inicial ou mesmo para calcular a distribuição estacionária, devemos considerar que estamos interessados em montar uma matriz de probabilidades de transição de um tempo t para um tempo t+1.

4.2.1 Exemplo genérico usando Cadeia de Markov de ordem 2

Considere o alfabeto $A = \{0,1\}$ e um espaço de estados correspondente $S = A^2 = \{00, 01, 10, 11\}$. Considere a sequência de eventos correspondentes aos dados fornecidos:

$$X = (1,0,1,0,0,0,1,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,0).$$

O objetivo do exemplo é montar a matriz de transição dessa cadeia. Na sequência X (fazendo-se a leitura da esquerda para direita), consideramos 10 como estado inicial e 01 como o próximo estado.

- $X = (\mathbf{1},\mathbf{0},1,0,0,0,1,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,0)$, com estado inicial em negrito;
- $X = (1,\mathbf{0},\mathbf{1},0,0,0,1,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,0)$, com o estado imediatamente posterior em negrito.

Supondo que a sequência de 20 elementos acima seja uma cadeia de Markov de ordem 2 bem definida, entende-se que o elemento x de um tempo (posição) $t + 2$ esteja relacionado com os elementos dos tempos t e $t + 1$, de modo que os elementos de posições anteriores não interfiram no valor de x. Seja n_{ij} a quantidade de vezes que os elementos

x_i e x_j aparecem na sequência e n_{ijk} a quantidade de vezes que os elementos x_i, x_j e x_k aparecem na sequência, com $j = i+1$ e $k = i+2$. Contando (literalmente) os elementos na sequência, obtemos:
$n_{00} = 4$, $n_{01} = 5$, $n_{10} = 6$, $n_{11} = 4$, $n_{000} = 2$, $n_{001} = 2$, $n_{010} = 3$, $n_{100} = 2$, $n_{011} = 2$, $n_{101} = 3$, $n_{110} = 2$ e $n_{111} = 2$.

Considerando que $p_{ijk} = \dfrac{n_{ijk}}{n_{ij}}$, temos:

- $p_{000} = \dfrac{n_{000}}{n_{00}} = 0{,}5$;

- $p_{001} = 1 - p_{000} = 0{,}5$;

- $p_{100} = \dfrac{n_{100}}{n_{10}} = 0{,}333...$;

- $p_{101} = 1 - p_{100} = 0{,}666...$;

- $p_{010} = \dfrac{n_{010}}{n_{01}} = 0{,}6...$;

- $p_{011} = 1 - p_{010} = 0{,}4$;

- $p_{110} = \dfrac{n_{110}}{n_{11}} = 0{,}5$;

- $p_{111} = 1 - p_{110} = 0{,}5$.

Com isso, obtemos a seguinte matriz:

$$P = \begin{pmatrix} p_{000} & p_{001} \\ p_{010} & p_{011} \\ p_{100} & p_{101} \\ p_{110} & p_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}333... & 0{,}666... \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Precisamos estruturar uma matriz de probabilidades para que possamos trabalhar com uma matriz quadrada (visando fazer um processo análogo ao feito no Capítulo 2). Para isso, considere:

- Estado atual: $S = ab$, com $a, b \in \{0{,}1\}$;

- Próximo estado: *ba* ou *bb*;
- Alfabeto: $A = \{0,1\}$;
- Espaço de estados: $S = A^2 = \{00,01,10,11\} = \{1,2,3,4\}$ (na respectiva ordem).

Sejam $i,j \in S$ e $m,n,p,q \in A$. Temos que $p_{i,j} = 0$ se $i = mn$, $j = pq$ e $n \neq p$. Para entender o porquê dessa condição, considere, por exemplo, que é impossível passar do estado 00 para o estado 10, logo, a probabilidade de ocorrência neste caso é zero.

Considerando essas condições, podemos montar a matriz de probabilidades a seguir:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00|00} & p_{01|00} & p_{10|00} & p_{11|00} \\ p_{00|01} & p_{01|01} & p_{10|01} & p_{11|01} \\ p_{00|10} & p_{01|10} & p_{10|10} & p_{11|10} \\ p_{00|11} & p_{01|11} & p_{10|11} & p_{11|11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}.$$

Adaptando a notação usada anteriormente para a atual, temos:

- $p_{000} = \dfrac{n_{000}}{n_{00}} = 0{,}5 = p_{00|00} = p_{11}$;
- $p_{001} = 1 - p_{000} = 0{,}5 = p_{01|00} = p_{12}$;
- $p_{100} = \dfrac{n_{100}}{n_{10}} = 0{,}333... = p_{00|10} = p_{31}$;
- $p_{101} = 1 - p_{100} = 0{,}666... = p_{11|10} = p_{32}$;
- $p_{010} = \dfrac{n_{010}}{n_{01}} = 0{,}6... = p_{10|01} = p_{23}$;
- $p_{011} = 1 - p_{010} = 0{,}4 = p_{11|01} = p_{24}$;
- $p_{110} = \dfrac{n_{110}}{n_{11}} = 0{,}5 = p_{10|11} = p_{43}$;
- $p_{111} = 1 - p_{110} = 0{,}5 = p_{11|11} = p_{44}$.

Com isso, temos a matriz P a seguir:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}333... & 0{,}666... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Daqui em diante todos os passos e procedimentos se assemelham aos já feitos em exemplos anteriores.

4.3 Cadeia de Markov de ordem M

Antes de mais nada, vamos estabelecer algumas notações:

- $x_1^n = x_1 x_2 ... x_n$;
- A: alfabeto finito;
- M: ordem da cadeia de Markov;
- $S = A^M$: espaço de estados;
- s: elemento do estado de espaços;
- (X_t): cadeia de Markov de ordem M.

Seguindo a ideia da seção anterior, uma cadeia de Markov de ordem M pode ser definida da seguinte maneira:

Considere um alfabeto finito A e um estado de espaços $S = A^M$. Sendo X_t uma cadeia de Markov de ordem M temos que

$$P(a|s) = Prob(X_t = a | X_{t-M}^{t-1} = s), \text{ com } s \in S,$$

é a probabilidade de transição de um elemento do tempo $t-1$ para o tempo t.

Em outras palavras, de modo simplificado, pode-se dizer que, numa cadeia de ordem M, a probabilidade de ocorrência de cada elemento num tempo $t > M$ está associada aos M elementos imediatamente anteriores (e somente a eles). Por exemplo: numa cadeia de ordem 5, a probabilidade de ocorrência do elemento x_7 está condicionada à ocorrência dos elementos x_6, x_5, x_4, x_3 e x_2. O processo para obter a matriz de transição é análogo ao que fizemos na seção anterior.

Retomando o exemplo do Page Rank do Google, a escolha de um internauta por determinado site pode estar associada à seleção de outros sites, o que caracterizaria uma cadeia de Markov de ordem superior. Pode-se perceber nos exemplos anteriores que o aumento da ordem da cadeia acarrete um aumento significativo do número de parâmetros a serem estimados. Sendo $|A|$ a cardinalidade do alfabeto e M a ordem da cadeia, temos $(|A|-1).|S|$ parâmetros nessa cadeia. No exemplo da Seção 4.2.1, temos A={0,1}, $S = A^2$ (ou seja, $M = 2$). Logo, a quantidade de parâmetros do processo é $(2-1).2^2 = 4$. De fato, o processo possui os parâmetros $p(0|00), p(0|01), p(1|00)$ e $p(1|01)$.

Um processo de ordem 4, por exemplo, com $|A| = 5$, teria 2500 parâmetros.

Existem algumas alternativas para diminuir a quantidade de parâmetros nesses processos, dentre eles, temos as **Cadeias de Markov de Alcance Variável** (em inglês, *Variable Lenght Markov Chains*, nome que é frequentemente abreviado por VLMC) e as **Cadeias de Markov com Partição**. A seguir apresentam-se dois capítulos nos quais são abordados esses dois modelos: um breve capítulo sobre cadeias de alcance variável e outro sobre cadeias de partição mínima.

5 Cadeias de Markov com Partição e Cadeias de Markov de Alcance Variável

A essência deste capítulo reside na ideia de dividir os estados em classes de equivalência, em que cada classe é formada por estados com probabilidades de transição similares. Esta técnica nos permite reduzir a quantidade de parâmetros necessários para descrever uma cadeia de Markov, tornando o modelo mais gerenciável e compreensível. Vamos explorar como essa partição é realizada e ilustrar sua aplicabilidade com exemplos práticos, destacando a eficiência e utilidade deste método em contextos variados.

A ideia é análoga a de usar a partição de um espaço amostral para a resolução de um problema (como fizemos anteriormente), porém, vamos particionar o espaço de estados de acordo com as probabilidades de transição do processo em questão. Diferente das CMAV, os processos não tem alcance (ou ordem) variável. Vamos usar o exemplo genérico análogo ao da seção 4.2.1 para entender como funciona o método.

Considere $A = \{0,1\}$ um alfabeto e $S = A^2 = \{00, 01, 10, 11\}$ o espaço de estados correspondente ao alfabeto A. Considere a sequência de eventos correspondentes aos dados fornecidos:

$$X = (1,0,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,0).$$

As probabilidades de transição são:

- $p_{000} = 0{,}5$;
- $p_{001} = 1 - p_{000} = 0{,}5$;
- $p_{100} = 0{,}5$;
- $p_{101} = 1 - p_{100} = 0{,}5$;
- $p_{010} = 0{,}333...$;
- $p_{011} = 1 - p_{010} = 0{,}666...$;
- $p_{110} = 0{,}666...$;
- $p_{111} = 1 - p_{110} = 0{,}333....$

Vamos usar como critério de partição os casos que possuem iguais probabilidades de transição:

- $p_{000} = 0{,}5 = p_{100}$;
- $p_{010} = 0{,}333...$;
- $p_{110} = 0{,}666...$.

Definimos então que a partição $\pounds$ é formada por:

- L_1: conjunto de elementos tais que $p(0|L_1) = 0{,}5$;
- L_2: conjunto de elementos tais que $p(0|L_2) = 0{,}333...$;
- L_3: conjunto de elementos tais que $p(0|L_3) = 0{,}666...$.

Logo,

- $L_1 = \{00, 10\}$;
- $L_2 = \{01\}$;
- $L_3 = \{11\}$;
- $\pounds = \{\{00, 10\}, \{01\}, \{11\}\}$.

Os parâmetros da cadeia de Markov com partição $\pounds$ são:

- $P(0|L_1) = 0{,}5$;
- $P(0|L_2) = 0{,}333...$;
- $P(0|L_3) = 0{,}666...$.

Como podemos perceber, a quantidade de parâmetros reduziu, o que pode auxiliar a resolução de problemas com grande numéro de parâmetros. A seguir, apresentamos uma aplicação num problema real: a variação do preço do dólar.

5.1 Variação do preço do dólar - simulação de uma aplicação

Para ilustrar os conceitos até aqui discutidos, segue um problema real que pode ser trabalhado através das Cadeias de Markov.

A ideia é estudar a variação semanal do preço do dólar tendo como base dois parâmetros: “queda” ou “não queda”. A partir disso, temos alfabeto $S = \{1{,}2\}$, onde 1 indica “queda” e 2 indica “não queda”. Os dados coletados vão desde janeiro de 2019 até janeiro de 2023. Os dados foram coletados do site: *investing.com*. A seguir, mostramos as probabilidades de transição encontradas trabalhando com cadeias de ordem 1, ordem 2 e ordem 3. Os cálculos foram efetuados através do programa *Excel*.

A partir dos dados analisados no programa, foram obtidas as seguintes informações modelando o problema como uma cadeia de ordem 1:

Frequências absolutas:

$$\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 52 \\ 52 & 65 \end{pmatrix}.$$

Probabilidades de transição:

- $p_{11} = 0{,}428751$;
- $p_{12} = 0{,}571429$;
- $p_{21} = 0{,}444...$;
- $p_{22} = 0{,}555...$.

Com isso temos a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}428751 & 0{,}571429 \\ 0{,}444... & 0{,}555... \end{pmatrix}.$$

Modelando o problema como uma cadeia de segunda ordem, foram coletados os dados a seguir:

Frequências absolutas:

$$\begin{pmatrix} n_{(1|11)} & n_{(2|11)} \\ n_{(1|12)} & n_{(2|12)} \\ n_{(1|21)} & n_{(2|21)} \\ n_{(1|22)} & n_{(2|22)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 25 & 27 \\ 20 & 31 \\ 27 & 38 \end{pmatrix}.$$

Probabilidades de transição:

- $p(1|11) = 0{,}487179$;
- $p(1|12) = 0{,}480769$;
- $p(1|21) = 0{,}392157$;

- $p(1|22) = 0{,}415385$;
- $p(2|ij) = 1 - p(1|ij)$.

Com isso temos a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}487179 & 0{,}512821 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}480769 & 0{,}519231 \\ 0{,}392157 & 0{,}607843 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}415385 & 0{,}584615 \end{pmatrix}.$$

Por fim, seguem as informações obtidas usando como modelo uma cadeia de terceira ordem.

Frequências absolutas:

$$\begin{pmatrix} n_{(1|111)} & n_{(2|111)} \\ n_{(1|121)} & n_{(2|121)} \\ n_{(1|211)} & n_{(2|211)} \\ n_{(1|221)} & n_{(2|221)} \\ n_{(1|112)} & n_{(2|112)} \\ n_{(1|122)} & n_{(2|122)} \\ n_{(1|212)} & n_{(2|212)} \\ n_{(1|222)} & n_{(2|222)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 16 \\ 11 & 9 \\ 11 & 15 \\ 10 & 10 \\ 11 & 16 \\ 14 & 17 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}.$$

Probabilidades de transição:

- $p(1|111) = 0{,}421053$;
- $p(1|121) = 0{,}36$;
- $p(1|211) = 0{,}55$;
- $p(1|221) = 0{,}423077$;
- $p(1|112) = 0{,}5$;
- $p(1|122) = 0{,}407407$;
- $p(1|212) = 0{,}451613$;
- $p(1|222) = 0{,}421053$;
- $p(2|ijk) = 1 - p(1|ijk)$.

Neste último modelo já nos deparamos com um caso em que vale a pena tentar reduzir a quantidade de parâmetros para futuros cálculos. Para isso, podemos usar a partição de estados da seguinte maneira:

- $L_1 = \{\{111\},\{222\}\}$;
- $L_2 = \{121\}$;
- $L_3 = \{211\}$;
- $L_4 = \{221\}$;
- $L_5 = \{112\}$;
- $L_6 = \{122\}$;
- $L_7 = \{212\}$.

A partição L_1 foi selecionada do modo descrito acima porque $p(1|111) = p(1|222)$.

Para modelar um problema usando a cadeia de Markov devemos estabelecer a ordem dessa cadeia, porém, neste caso, não há como saber apenas pelo contexto do problema qual ordem dessa cadeia de Markov. Para comparar a eficiência da modelagem de acordo com o método usado, podemos usar, por exemplo, o *Critério Bayesiano de Scwartz (BIC)*. Para entender como aplicar tal critério no exemplo aqui mencionado, recomendo a leitura de (GARCÍA; GONZÁLEZ-LÓPEZ, 2017).

5.2 Cadeias de Markov de Alcance Variável (CMAV)

Uma cadeia estocástica com memória de alcance variável que constitui uma família de cadeias estocásticas finitas em um alfabeto finito. Uma CMAV se baseia na ideia de que a memória relevante na previsão de um evento pode variar de tamanho, de acordo com o ocorrido, reduzindo, assim, sua ordem.

Uma cadeia estocástica com memória de alcance variável que constitui uma família de cadeias estocásticas finitas em um alfabeto finito. Uma CMAV se baseia na ideia de que a memória relevante na previsão de um evento pode variar de tamanho, de acordo com o ocorrido, reduzindo, assim, sua ordem.

5.2.1 Definição de Contexto

Considere uma Cadeia de Markov finita, estacionária e de ordem M, representada por X_t. Para todo $(x_t)_{t\in\mathcal{Z}}$ temos que

$$P[X_t = x_t | X_{-\infty}^{t-1} = x_{-\infty}^{t-1}] = P[X_t = x_t | X_{t-M}^{t-1} = x_{t-M}^{t-1}]$$

Visamos modelar um processo de modo que o número de passos do passado relevantes seja variável e menor (ou igual) que M.

Considere A o alfabeto finito de X_t e $S = A^M$ seu espaço de estados. Chamamos de **contexto** a "porção do passado que interfere no futuro" para a determinação do problema, ou seja, dada uma sequência $x_1^n = x_1, x_2, ..., x_n$, define-se como um contexto de tamanho l a sequência $X_{n-l}^{n-1} = x_{n-l}, ..., x_{n-1}$ a porção finita de X_1^n que é relevante para predizer o próximo símbolo x_n. A CMAV será formada pelo conjunto dos contextos de X_t.

5.2.2 Exemplo: Predição de texto usando cadeias de Markov de alcance variável

Predição de texto é um recurso comum em teclados de *smartphones* e outros softwares; ele sugere que a próxima palavra em uma frase é baseada nas palavras anteriores. Neste exemplo, usamos uma cadeia de Markov de alcance variável para modelar como um algoritmo de predição de texto pode funcionar. Suponha que temos um conjunto de dados que inclui frases comuns em mensagens de texto.

Conjunto de Dados: Conjunto de dasdos de frases típicas usadas em mensagens de texto. Por exemplo: "Bom dia, como você está?" ou "Estou a caminho agora".

Criação da Cadeia de Markov: Para cada palavra nas frases, observamos as palavras anteriores e criamos uma cadeia de Markov que mapeia a probabilidade de cada palavra seguinte. Em cadeias de alcance variável, essa probabilidade pode depender não apenas da palavra imediatamente anterior, mas de várias palavras anteriores.

Implementação da Predição: Quando um usuário começa a digitar uma frase, o algoritmo usa a cadeia de Markov para prever a próxima palavra com base nas palavras já digitadas. Por exemplo, se um usuário digita "Bom dia!", o algoritmo pode sugerir "Como" como sendo a próxima palavra, baseando-se nas probabilidades aprendidas.

As CMAV podem ser usadas nesse exemplo pois podem capturar dependências entre palavras que estão mais distantes uma da outra em uma frase; cadeias de Markov de ordem fixa consideram apenas a palavra ou palavras imediatamente anteriores. A aplicação das CMAV nesse caso torna o modelo mais flexível e adaptável a padrões linguísticos.

Este exemplo é bastante relevante para estudantes do ensino médio, pois mostra a aplicação prática de conceitos matemáticos em tecnologias que eles usam diariamente. Ele também oferece uma oportunidade para discussões sobre a interseção entre matemática, computação e linguística.

Aqui tem-se uma ideia de como funcionam as cadeias de Markov de alcance variável. Para aprofundamento no tema, recomento a leitura do artigo (OTERO, 2005).

6 Jogo do humor

O "Jogo dos Humores" visa proporcionar aos alunos uma compreensão prática das Cadeias de Markov de ordem fixa, das Cadeias de Markov de Comprimento Variável (VLMCs) e das com Partição. O jogo modela como os estados emocionais podem ser influenciados por um histórico de estados anteriores (o tamanho do histórico pode não ser fixo), oferecendo assim uma abordagem mais realista para entender sequências de estados.

É também uma maneira bastante interessante para se trabalhar a competência socioemocional *autoconsciência*, presente na BNCC (Base Nacional Comum Curricular, em vigor até a data da escrita deste texto).

6.1 Material Necessário

- Cartões com diferentes *emoticons*, representando humores ("feliz", "triste" e "irritado"). Este é o alfabeto A (a ideia de usar o tamanho 3 é a de não complicar demais o desenvolvimento do jogo);
- Lousa ou quadro branco para documentar a sequência de humores;
- Marcadores ou giz colorido para ilustrar transições de estados (a depender do modelo adotado).

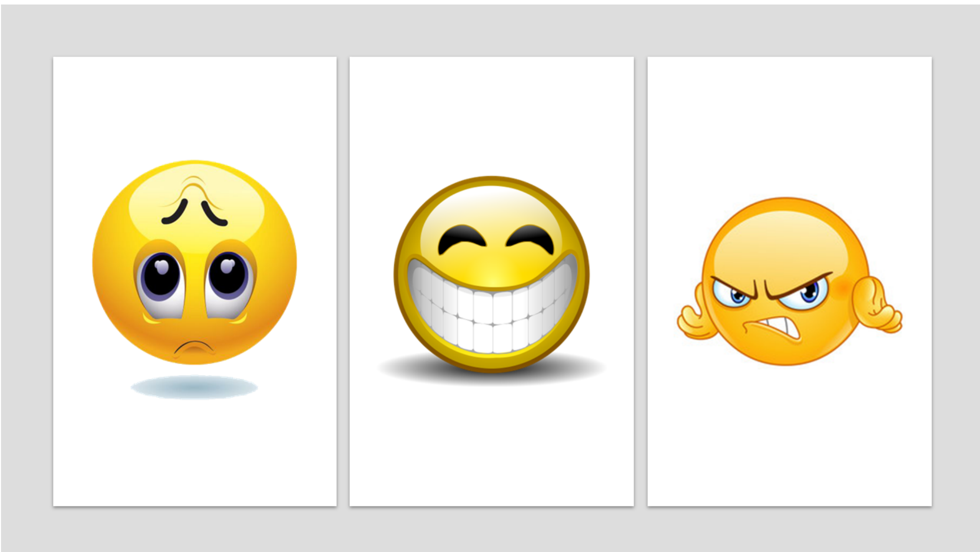

Figura 13 – Sugestão de *Emoticons* para serem usados no cartão

.

6.2 Procedimentos

1. Configuração inicial

    i. Cada aluno recebe um conjunto de cartões de emoticons, um para cada letra no alfabeto A;

    ii. Um calendário semanal é desenhado no quadro, com espaços para os alunos colocarem seus cartões de humor para cada dia.

2. Rodadas do jogo

    i. Primeira Rodada: Cada aluno escolhe um cartão de humor para representar seu estado emocional naquele dia e coloca no quadro;

    ii. No caso de ordem 1, os alunos escolhem um novo cartão de humor, levando em consideração não apenas seu humor no dia anterior, mas também em dias anteriores que considerarem relevantes. No caso de ordem maior que 1, os alunos escolhem um novo cartão de humor, levando em consideração não apenas seu humor no dia anterior, mas nos últimos 3 dias; nesse caso, para falar de partições, deve-se observar se há algumas situações em que a escolha parece ser do mesmo tipo para diversas combinações diferentes de humor nos últimos 3 dias.

    Caso seja interessante falar sobre cadeias de alcance variável, os alunos devem escolhem um novo cartão de humor, levando em consideração não apenas seu humor no dia anterior, mas também em dias anteriores que considerarem relevantes.

    No caso de alcance variável, o modelo matemático que representa esse processo é:

    $$P(M_{t+1} = m | M_t, M_{t-1}, \dots, M_{t-k}) = P(m | M_t, M_{t-1}, \dots, M_1),$$

    em que k é o número de dias anteriores que um aluno considera ao escolher seu humor para o dia $t+1$.

3. Discussão e análise

    Após algumas rodadas, conduza uma discussão em classe:

    i. Peça aos alunos para explicar por que escolheram determinado cartão de humor com base no estado anterior ou nos estados anteriores segundo o caso;

    ii. Examine como o humor de um dia pode ser influenciado por múltiplos estados emocionais anteriores;

    iii. Estabelecer que (pela natureza do problema) o modelo tem que ser probabilístico. Isto é observar a natureza aleatória com base na estrutura da Cadeia de Markov;

iv. Qual tipo de Cadeia ou ordem parece mais conveniente? (provavelmente haverá diferentes respostas na sala);

v. Para qual modelo é mas difícil escolher o conjunto de probabilidades necessárias (pode-se fazer uma comparação entre eles)?

vi. Discussão: a modelagem de alcance variável é mais flexível e realista do que uma Cadeia de Markov de ordem fixa? Ou a modelagem de partições?

vii. Complexidade do problema de escolher probabilidades para cada tipo de modelo;

viii. Algumas combinações de humores não apareceram? Caso sim, o que significa?

6.3 Considerações finais sobre o jogo dos humores

O Jogo dos Humores não só introduz os conceitos de CM (cadeias de Markov), VLMCs (CMAV), e "CM com partição" de uma forma lúdica e interativa, mas também promove uma discussão mais profunda sobre como estados futuros podem ser influenciados por um histórico variável de estados anteriores e da complexidade dos diferentes modelos. O jogo pode ser uma introdução eficaz ao uso de Cadeias de Markov em diferentes campos, como psicologia, linguística e ciência de dados e, além disso, ele possibilita uma discussão que permite que os alunos (e o professor) se conheçam de forma mais profunda, algo que pode ser bastante importante tanto para o aprendizado e para o ambiente em sala de aula quanto para a formação do aluno enquanto cidadão.

7 Considerações Finais

A dissertação apresentou o conteúdo “Cadeias de Markov” de modo objetivo e simplificado para que o leitor, caso seja um professor de ensino médio, possa tirar proveito dos conteúdos aqui apresentados para mostrar aos seus alunos como funcionam tais processos estocásticos. Tendo isso em mente, o primeiro capítulo “revisando conteúdos” foi elaborado pensando na ordem em que esses assuntos normalmente são trabalhados com os estudantes. Os capítulos seguintes contêm exemplos práticos e de fácil compreensão com o intuito de exibir possibilidades que possam ser aproveitadas num possível plano de aula sobre o assunto. Não escrevi nenhum capítulo com um modelo de proposta didática formalizada pois acredito que o conteúdo aqui dissertado possa ser trabalhado de inúmeras maneiras de acordo com a realidade de cada região, da instituição de ensino e da turma com a qual o leitor trabalha.

Para os leitores que não exercem a docência para o público mencionado, o estudo dos artigos (GARCÍA; GONZÁLEZ-LÓPEZ, 2017) e (PEREIRA, 2021) será muito útil pois a determinação da ordem adequada numa cadeia de Markov é algo de extrema importância num experimento. Apesar de não aprofundar determinados tópicos, este texto apresenta a base, a estrutura do processo “cadeias de Markov” e pode ser usado como ponto de partida para estudos relacionados com o tema.

Com relação à aplicação do tema em salas de aula do ensino médio, o intuito de fazê-lo é fornecer aos alunos um contato, mesmo que breve, das aplicações de conteúdos que, muitas vezes, são entendidos como abstratos e inaplicáveis por eles e, com isso, incentivá-los às práticas relacionadas com pesquisas acadêmicas nessa área. Para isso, o Capítulo 6 traz uma sugestão de abordagem que, mesmo de maneira lúdica, pode trabalhar com todos os temas presentes nos capítulos anteriores.

Referências

ANDRÉ, C. M. G. Critérios para seleção de modelos baseados na razão de verossimilhança. 2013. Citado na página 40.

GARCÍA, J.; GONZÁLEZ-LÓPEZ, V. Consistent estimation of partition markov models. *Entrophy*, v. 19, n. 4, p. 160, 2017. ISSN 1099-4300. Citado nas páginas 51 e 57.

GUTTORP, P. *Stochastic modeling of scientific data*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2018. Citado na página 11.

OTERO, C. V. *Cadeias de Markov de alcance variável: um estudo de convergência do estimador*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2005. Citado na página 53.

PEREIRA, D. F. S. *Critério de determinação eficiente para estimação de cadeias de Markov de partição mínima*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2021. Citado na página 57.

PÉREZ, F. L. Cadeias de markov. 2021. Citado na página 39.

Anexos

ANEXO A – Dados usados no exemplo de aplicação do capítulo 5

01.01.2023	5,2254	5,2865	5,4802	5,2186		-0,0115	-1,15
25.12.2022	5,286	5,1669	5,3049	5,1545		0,0234	2,34
18.12.2022	5,1652	5,3145	5,3404	5,116		-0,028	-2,8
11.12.2022	5,314	5,2404	5,373	5,2309		0,0141	1,41
04.12.2022	5,24	5,217	5,2916	5,1841		0,004	0,4
27.11.2022	5,2189	5,408	5,4307	5,1616		-0,0353	-3,53
20.11.2022	5,4098	5,3832	5,4251	5,2794		0,005	0,5
13.11.2022	5,3827	5,3253	5,5307	5,2589		0,0108	1,08
06.11.2022	5,325	5,0571	5,4155	5,0461		0,0533	5,33
30.10.2022	5,0557	5,2962	5,4083	5,0184		-0,0452	-4,52
23.10.2022	5,2949	5,1649	5,3927	5,1648		0,026	2,6
16.10.2022	5,1605	5,3288	5,3307	5,1404		-0,0309	-3,09
09.10.2022	5,3252	5,1999	5,3817	5,1625		0,0242	2,42
02.10.2022	5,1996	5,4158	5,4158	5,1083		-0,0398	-3,98
25.09.2022	5,4154	5,2603	5,43	5,2603		0,0296	2,96
18.09.2022	5,2595	5,2544	5,3029	5,1055		0,0012	0,12
11.09.2022	5,2531	5,1477	5,3105	5,0766		0,0208	2,08
04.09.2022	5,1462	5,166	5,2539	5,1378		-0,0042	-0,42
28.08.2022	5,1681	5,0608	5,2577	5,0076		0,0213	2,13
21.08.2022	5,0601	5,1706	5,2046	5,054		-0,0212	-2,12
							Var (%)

14.08.2022	5,1697	5,0721	5,2199	5,0721		0,019	1,9
07.08.2022	5,0735	5,1638	5,1712	5,0342		-0,0176	-1,76
31.07.2022	5,1646	5,1759	5,3163	5,1269		-0,0017	-0,17
24.07.2022	5,1734	5,4987	5,501	5,1448		-0,0588	-5,88
17.07.2022	5,4968	5,4092	5,5152	5,3517		0,0164	1,64
10.07.2022	5,4082	5,2551	5,4906	5,2551		0,0294	2,94
03.07.2022	5,2536	5,3307	5,4627	5,2501		-0,0145	-1,45
26.06.2022	5,331	5,2423	5,3402	5,1754		0,017	1,7
19.06.2022	5,2417	5,1534	5,2763	5,1167		0,0175	1,75
12.06.2022	5,1518	4,989	5,1561	4,989		0,0331	3,31
05.06.2022	4,9865	4,7765	5,0124	4,7467		0,0446	4,46
29.05.2022	4,7734	4,7311	4,8321	4,6904		0,0093	0,93
22.05.2022	4,7295	4,8797	4,8797	4,7147		-0,0306	-3,06
15.05.2022	4,8788	5,0647	5,1045	4,8519		-0,0358	-3,58
08.05.2022	5,0602	5,0784	5,2102	5,0455		-0,0034	-0,34
01.05.2022	5,0774	4,9692	5,115	4,8921		0,0212	2,12
24.04.2022	4,9721	4,7974	5,0461	4,7974		0,0372	3,72
17.04.2022	4,7937	4,6971	4,8393	4,608		0,0207	2,07
10.04.2022	4,6965	4,7056	4,7417	4,6215		-0,0001	-0,01
03.04.2022	4,697	4,6595	4,795	4,5805		0,0085	0,85
							Var (%)

Figura 14 – Tabela com valores e variações semanais do dólar

.

27.03.2022	4,6575	4,7526	4,8196	4,6525		-0,0178	-1,78
20.03.2022	4,742	5,0245	5,0299	4,7297		-0,056	-5,6
13.03.2022	5,0231	5,0591	5,17	4,9924		-0,0101	-1,01
06.03.2022	5,0745	5,0785	5,1152	4,982		0,0025	0,25
27.02.2022	5,062	5,1638	5,2233	5,0188		-0,0194	-1,94
20.02.2022	5,1623	5,1374	5,181	4,9939		0,0046	0,46
13.02.2022	5,1385	5,256	5,267	5,1088		-0,0217	-2,17
06.02.2022	5,2527	5,326	5,3283	5,1727		-0,0141	-1,41
30.01.2022	5,3279	5,3698	5,3981	5,254		-0,0074	-0,74
23.01.2022	5,3674	5,4528	5,5251	5,3532		-0,0166	-1,66
16.01.2022	5,4582	5,5352	5,5832	5,379		-0,0138	-1,38
09.01.2022	5,5344	5,634	5,693	5,5005		-0,0179	-1,79
02.01.2022	5,6355	5,5668	5,7255	5,5564		0,0117	1,17
26.12.2021	5,5703	5,6701	5,7105	5,5469		-0,0184	-1,84
19.12.2021	5,675	5,7141	5,7579	5,6259		-0,0037	-0,37
12.12.2021	5,6959	5,6105	5,7364	5,6012		0,0148	1,48
05.12.2021	5,6127	5,6532	5,7029	5,5175		-0,0072	-0,72
28.11.2021	5,6532	5,6085	5,6959	5,577		0,0078	0,78
21.11.2021	5,6093	5,6013	5,6636	5,5479		-0,0007	-0,07
14.11.2021	5,6135	5,457	5,6151	5,4296		0,0283	2,83
							Var (%)

07.11.2021	5,4588	5,5667	5,5979	5,3879		-0,0152	-1,52
31.10.2021	5,5428	5,6221	5,7	5,5012		-0,0167	-1,67
24.10.2021	5,6372	5,6533	5,6637	5,5365		-0,0018	-0,18
17.10.2021	5,6474	5,4576	5,7547	5,4576		0,0341	3,41
10.10.2021	5,4611	5,5073	5,5737	5,4337		-0,0086	-0,86
03.10.2021	5,5082	5,3614	5,5381	5,3614		0,0271	2,71
26.09.2021	5,3628	5,3384	5,4767	5,3067		0,0053	0,53
19.09.2021	5,3344	5,2851	5,3779	5,2495		0,0087	0,87
12.09.2021	5,2883	5,249	5,3472	5,198		0,0082	0,82
05.09.2021	5,2454	5,192	5,3347	5,1547		0,0105	1,05
29.08.2021	5,1908	5,1999	5,2266	5,1154		-0,0017	-0,17
22.08.2021	5,1996	5,3795	5,4023	5,1869		-0,033	-3,3
15.08.2021	5,377	5,2439	5,4757	5,2285		0,0249	2,49
08.08.2021	5,2466	5,2325	5,2993	5,1636		0,0032	0,32
01.08.2021	5,2301	5,2158	5,2757	5,1101		0,0034	0,34
25.07.2021	5,2123	5,2051	5,2304	5,0406		0,0022	0,22
18.07.2021	5,2006	5,1185	5,295	5,1185		0,0168	1,68
11.07.2021	5,1147	5,2586	5,285	5,053		-0,0272	-2,72
04.07.2021	5,2579	5,0551	5,3145	5,0459		0,0396	3,96
27.06.2021	5,0575	4,9307	5,0745	4,9171		0,0251	2,51
							Var (%)

Figura 15 – Tabela com valores e variações semanais do dólar
.

20.06.2021	4,9335	5,0753	5,0824	4,8929		-0,0306	-3,06
13.06.2021	5,0894	5,1153	5,119	4,9815		-0,0054	-0,54
06.06.2021	5,1171	5,0466	5,1395	5,0172		0,0134	1,34
30.05.2021	5,0495	5,2228	5,2632	5,032		-0,0335	-3,35
23.05.2021	5,2244	5,3664	5,3746	5,2088		-0,0256	-2,56
16.05.2021	5,3617	5,2725	5,371	5,2298		0,0169	1,69
09.05.2021	5,2728	5,234	5,3331	5,1964		0,0069	0,69
02.05.2021	5,2368	5,436	5,4843	5,2025		-0,0368	-3,68
25.04.2021	5,4366	5,4757	5,4904	5,3274		-0,007	-0,7
18.04.2021	5,4751	5,5873	5,6224	5,4239		-0,0203	-2,03
11.04.2021	5,5883	5,6822	5,7562	5,5658		-0,0165	-1,65
04.04.2021	5,6821	5,71	5,7101	5,5381		-0,0045	-0,45
28.03.2021	5,7075	5,755	5,8069	5,608		-0,0085	-0,85
21.03.2021	5,7566	5,5087	5,7589	5,464		0,0482	4,82
14.03.2021	5,4917	5,5501	5,6827	5,4482		-0,0108	-1,08
07.03.2021	5,5518	5,6898	5,8787	5,5257		-0,0244	-2,44
28.02.2021	5,6908	5,587	5,7729	5,5438		0,0165	1,65
21.02.2021	5,5986	5,5128	5,6093	5,3895		0,0402	4,02
14.02.2021	5,3823	5,3685	5,4706	5,367		0,0023	0,23
07.02.2021	5,3698	5,404	5,4478	5,3042		-0,0001	-0,01
							Var (%)

31.01.2021	5,3704	5,4663	5,4863	5,3201		-0,0169	-1,69
24.01.2021	5,4625	5,467	5,5061	5,3119		-0,0007	-0,07
17.01.2021	5,4666	5,3025	5,4875	5,2314		0,0329	3,29
10.01.2021	5,2927	5,4666	5,5166	5,191		-0,0231	-2,31
03.01.2021	5,4178	5,1351	5,4408	5,1197		0,0431	4,31
27.12.2020	5,1937	5,1784	5,3124	5,1519		-0,0044	-0,44
20.12.2020	5,2165	5,2012	5,225	5,1094		0,0224	2,24
13.12.2020	5,1022	5,0383	5,144	5,01		0,0072	0,72
06.12.2020	5,0656	5,1597	5,1981	5,0143		-0,0175	-1,75
29.11.2020	5,1557	5,2906	5,3971	5,1164		-0,0352	-3,52
22.11.2020	5,3438	5,378	5,4507	5,2955		-0,0067	-0,67
15.11.2020	5,3797	5,4148	5,4584	5,274		-0,0144	-1,44
08.11.2020	5,4582	5,2746	5,5264	5,2235		0,0174	1,74
01.11.2020	5,3647	5,743	5,7667	5,3586		-0,0661	-6,61
25.10.2020	5,7446	5,6551	5,8084	5,5986		0,0226	2,26
18.10.2020	5,6175	5,6463	5,6503	5,5472		-0,0045	-0,45
11.10.2020	5,6428	5,5263	5,6549	5,521		0,0201	2,01
04.10.2020	5,5318	5,6498	5,6774	5,483		-0,027	-2,7
27.09.2020	5,6851	5,5135	5,6929	5,5127		0,0221	2,21
20.09.2020	5,5624	5,4511	5,6243	5,3828		0,0324	3,24
							Var (%)

Figura 16 – Tabela com valores e variações semanais do dólar
.

13.09.2020	5,3876	5,3191	5,3988	5,2102		0,0129	1,29
06.09.2020	5,3189	5,3608	5,4096	5,2583		0,0033	0,33
30.08.2020	5,3012	5,385	5,4955	5,2465		-0,0161	-1,61
23.08.2020	5,3881	5,5773	5,6342	5,3855		-0,0411	-4,11
16.08.2020	5,6192	5,441	5,6733	5,4089		0,0367	3,67
09.08.2020	5,4204	5,4395	5,4925	5,349		-0,0033	-0,33
02.08.2020	5,4383	5,2223	5,4394	5,2115		0,041	4,1
26.07.2020	5,224	5,2332	5,2332	5,1145		-0,0017	-0,17
19.07.2020	5,2329	5,387	5,3913	5,0827		-0,0282	-2,82
12.07.2020	5,3849	5,313	5,4542	5,2917		0,0115	1,15
05.07.2020	5,3238	5,315	5,4017	5,245		0,0015	0,15
28.06.2020	5,3158	5,4847	5,5082	5,2656		-0,0307	-3,07
21.06.2020	5,484	5,2904	5,4931	5,1336		0,0327	3,27
14.06.2020	5,3105	5,1314	5,3884	5,0477		0,0515	5,15
07.06.2020	5,0505	4,9619	5,1118	4,8175		0,0186	1,86
31.05.2020	4,9585	5,334	5,4196	4,9328		-0,0708	-7,08
24.05.2020	5,3361	5,4942	5,5301	5,2691		-0,0357	-3,57
17.05.2020	5,5338	5,8565	5,8565	5,5229		-0,0549	-5,49
10.05.2020	5,8554	5,7825	5,9718	5,742		0,0215	2,15
03.05.2020	5,7319	5,6141	5,877	5,4818		0,0449	4,49
							Var (%)

26.04.2020	5,4856	5,5427	5,726	5,3306		-0,0188	-1,88
19.04.2020	5,5907	5,2864	5,7484	5,2642		0,0677	6,77
12.04.2020	5,2363	5,1219	5,2761	5,1038		0,0255	2,55
05.04.2020	5,1063	5,2998	5,3114	5,0487		-0,0457	-4,57
29.03.2020	5,3506	5,118	5,3541	5,1128		0,0492	4,92
22.03.2020	5,0997	5,0628	5,1479	4,9722		0,0073	0,73
15.03.2020	5,0627	4,86	5,255	4,86		0,0421	4,21
08.03.2020	4,858	4,76	5,0284	4,6345		0,0499	4,99
01.03.2020	4,6269	4,4949	4,672	4,4521		0,0343	3,43
23.02.2020	4,4733	4,3884	4,5143	4,3879		0,0191	1,91
16.02.2020	4,3895	4,3003	4,4068	4,2969		0,0214	2,14
09.02.2020	4,2974	4,321	4,3835	4,2906		-0,0053	-0,53
02.02.2020	4,3203	4,2816	4,324	4,2086		0,0089	0,89
26.01.2020	4,282	4,1842	4,2905	4,1797		0,0241	2,41
19.01.2020	4,1814	4,1658	4,2178	4,1554		0,0048	0,48
12.01.2020	4,1616	4,0907	4,2011	4,0885		0,016	1,6
05.01.2020	4,096	4,0567	4,1051	4,0399		0,0072	0,72
29.12.2019	4,0669	4,049	4,072	4,0037		0,0053	0,53
22.12.2019	4,0456	4,102	4,102	4,0347		-0,0138	-1,38
15.12.2019	4,1022	4,1104	4,1104	4,0462		-0,0014	-0,14
							Var (%)

Figura 17 – Tabela com valores e variações semanais do dólar
.

08.12.2019	4,108	4,1415	4,1613	4,0752		-0,008	-0,8
01.12.2019	4,1411	4,2362	4,2541	4,134		-0,0225	-2,25
24.11.2019	4,2364	4,1989	4,2778	4,183		0,0096	0,96
17.11.2019	4,1962	4,1785	4,2244	4,1697		0,0001	0,01
10.11.2019	4,1957	4,1679	4,1993	4,1355		0,0078	0,78
03.11.2019	4,1633	3,9894	4,1709	3,975		0,0435	4,35
27.10.2019	3,9897	4,0028	4,0378	3,9637		-0,0033	-0,33
20.10.2019	4,0029	4,1118	4,1523	3,9914		-0,0262	-2,62
13.10.2019	4,1105	4,1064	4,1873	4,1064		0,0003	0,03
06.10.2019	4,1094	4,0561	4,1378	4,056		0,0134	1,34
29.09.2019	4,0551	4,1625	4,1858	4,0498		-0,0252	-2,52
22.09.2019	4,1599	4,15	4,1948	4,1214		0,0031	0,31
15.09.2019	4,1472	4,0858	4,1839	4,0718		0,0155	1,55
08.09.2019	4,084	4,063	4,1297	4,0265		0,0057	0,57
01.09.2019	4,0607	4,144	4,1894	4,0534		-0,0202	-2,02
25.08.2019	4,1445	4,12	4,1949	4,103		0,006	0,6
18.08.2019	4,1196	4,003	4,1324	3,9904		0,0285	2,85
11.08.2019	4,0054	3,9402	4,054	3,939		0,0164	1,64
04.08.2019	3,9406	3,8864	3,9929	3,8864		0,0135	1,35
28.07.2019	3,8883	3,7748	3,8935	3,7478		0,0299	2,99
							Var (%)

21.07.2019	3,7753	3,7462	3,8068	3,7292		0,0073	0,73
14.07.2019	3,7481	3,7365	3,7717	3,7178		0,0033	0,33
07.07.2019	3,7358	3,816	3,8175	3,7296		-0,0224	-2,24
30.06.2019	3,8215	3,8373	3,8812	3,7834		-0,0079	-0,79
23.06.2019	3,8518	3,822	3,8733	3,8066		0,0086	0,86
16.06.2019	3,819	3,8977	3,9249	3,8127		-0,0197	-1,97
09.06.2019	3,8956	3,876	3,9139	3,8296		0,0047	0,47
02.06.2019	3,8774	3,9232	3,9344	3,8365		-0,0113	-1,13
26.05.2019	3,9218	4,0131	4,0541	3,9086		-0,0247	-2,47
19.05.2019	4,0213	4,1013	4,1221	4,0068		-0,0191	-1,91
12.05.2019	4,0997	3,9771	4,1133	3,966		0,0362	3,62
05.05.2019	3,9566	3,9383	4,0003	3,9252		0,0048	0,48
28.04.2019	3,9378	3,93	3,9721	3,9128		0,0023	0,23
21.04.2019	3,9288	3,927	4,0065	3,9121		0,0007	0,07
14.04.2019	3,926	3,8819	3,9518	3,8591		0,0115	1,15
07.04.2019	3,8812	3,8728	3,9081	3,8147		0,0021	0,21
31.03.2019	3,873	3,8897	3,893	3,8328		-0,0129	-1,29
24.03.2019	3,9238	3,9041	4,016	3,8335		0,0044	0,44
17.03.2019	3,9066	3,8173	3,9167	3,7381		0,0245	2,45
10.03.2019	3,8131	3,8667	3,8719	3,7996		-0,0138	-1,38
							Var (%)

Figura 18 – Tabela com valores e variações semanais do dólar
.

03.02.2019	3,729	3,6597	3,7483	3,6595		0,019	1,9
27.01.2019	3,6596	3,7785	3,7878	3,6363		-0,0292	-2,92
20.01.2019	3,7695	3,7604	3,817	3,7374		0,0051	0,51
13.01.2019	3,7502	3,7113	3,7746	3,6839		0,0106	1,06
06.01.2019	3,7108	3,7144	3,7423	3,6749		-0,0012	-0,12
							Var (%)

Figura 19 – Tabela com valores e variações semanais do dólar

.