UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FAGNER LEMOS NASCIMENTO

PROPOSTA PARA ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA A ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

VITÓRIA
2024

FAGNER LEMOS NASCIMENTO

PROPOSTA PARA ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA A ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Nascimento, Fagner Lemos, 1987-
N244p PROPOSTA PARA ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA A ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS / Fagner Lemos Nascimento. - 2024.
84 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Educação financeira. 2. Educação de jovens e adultos. 3. Orçamento familiar. 4. Cidadania. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Proposta para Ensino de Matemática Financeira a Alunos do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos”

Fagner Lemos Nascimento

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 05/12/2024 por:

Documento assinado digitalmente
gov.br
MOACIR ROSADO FILHO
Data: 06/12/2024 07:33:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Moacir Rosado Filho
Orientador(a) – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br
VALMECIR ANTONIO DOS SANTOS BAYER
Data: 10/12/2024 17:36:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Membro Interno – UFES

Documento assinado digitalmente
gov.br
PEDRO MATOS DA SILVA
Data: 15/12/2024 21:28:12-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.(a) Dr.(a) Pedro Mattos da Silva
Membro Externo – IFES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

Dentre todas as matérias ensinadas ao ensino médio, a matemática financeira merece grande destaque pois após a formatura e durante todo o resto de suas vidas os alunos terão de lidar com dinheiro, orçamento doméstico, tomar crédito em instituição financeira, usar o cartão de crédito e limite da conta corrente, além de fazer aplicações visando poupar para a aposentadoria. Esse tema é importante no ensino médio regular e ainda mais importante ao trabalhar com Ensino de Jovens e Adultos (EJA). Os alunos do EJA, em sua maioria, já se encontram no mercado de trabalho e têm responsabilidades financeiras dentro da família. Tendo em vista a necessidade informada acima, o objetivo desta dissertação é propor aos professores de matemática do EJA ensino médio um plano de ensino que vai além de fórmulas decoradas, exercícios e calculadora; a proposta é um ensino construtivo e dialogado, mostrando de onde vem as fórmulas e como cada etapa desse conhecimento é prática e importante para o aluno. Como resultado, este trabalho fica à disposição de colegas professores para embasarem seus planos de aula com a finalidade de promover um ensino mais significativo para os alunos EJA. As demonstrações são simples e podem, com boa preparação, serem apresentadas em aulas expositivas com seus respectivos alunos. Portanto, o bom uso das sugestões deste trabalho contribui para o desenvolvimento no entendimento de matemática financeira dos alunos de EJA ensino médio. Isto, por sua vez, promove um orçamento doméstico equilibrado, reduz o endividamento das famílias e proporciona cidadania para os alunos e suas famílias.

Palavras-chave: Matemática financeira; Educação de Jovens e Adultos; Orçamento doméstico.

ABSTRACT

Among all the subjects taught to high school, financial mathematics deserves great attention because after graduation and throughout the rest of their lives, students will have to deal with money, household budget, take credit from a financial institution, use the credit card and current account limit, in addition to making investments to save for retirement. This theme is important in regular high school and even more important when working with Youth and Adult Education (EJA). Most EJA students are already in the job market and have financial responsibilities within the family. In view of the need informed above, the objective of this dissertation is to propose to the mathematics teachers of EJA high school a teaching plan that goes beyond memorized formulas, exercises and calculator; The proposal is a constructive and dialogued teaching, showing where the formulas come from and how each stage of this knowledge is practical and important for the student. As a result, this work is available to fellow teachers to support their lesson plans in order to promote a more meaningful teaching for EJA students. The demonstrations are simple and can, with good preparation, be presented in expository classes with their respective students. Therefore, the good use of the suggestions of this work contributes to the development of the understanding of financial mathematics of EJA high school students. This, in turn, promotes a balanced household budget, reduces household indebtedness, and provides citizenship for students and their families.

Keywords: Financial Mathematics; Youth and Adult Education; Household budget.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Durante os anos iniciais da educação até o ensino médio, as crianças são apresentadas a vários conceitos e fórmula matemáticas, que são problemas desafiadores que auxiliam no crescimento cognitivo delas. No entanto, um dos assuntos que é menos trabalhado durante a formação educacional e que será extremamente importante na idade adulta é a educação financeira. Poucos anos atrás, um aluno me questionou: “Professor, porque a gente fala tanto sobre geometria e regra de três e fala tão pouco sobre dinheiro que é uma coisa que vamos precisar aplicar o resto da vida?”.

A resposta a essa pergunta não é simples e nem a correção de rotas está ao alcance de professores do ensino médio. O fato é que essa ausência de educação financeira com ensinamentos práticos tem causado efeitos adversos na vida adulta após a idade escolar. Uma simples pesquisa pode levantar os seguintes números: “Antes da pandemia, no final de 2019, os consumidores inadimplentes eram 63,3 milhões, segundo dados da Serasa. Esse número saltou para 72 milhões em maio de 2022.” (VINHAS, 2024). Grande parte desses brasileiros e brasileiras estão nessa situação devido ao mau uso do cartão de crédito ou mesmo por tomarem empréstimos em linhas pessoais de crédito com altas taxas ou com prazos prolongados. Conforme exposto, há uma lacuna no que é ensinado em nível de matemática financeira e a necessidade de educação financeira.

Além disso, uma segunda oportunidade para o aluno de terminar os estudos é a Educação de Jovens e Adultos (EJA); essa é também uma segunda oportunidade para cobrir a defasagem de conhecimento de finanças desses adultos que retornaram à escola não apenas para obter diploma, mas também para alcançar o conhecimento do qual sentiram tanta falta nos anos de ausência da escola regular. Com base nessa oportunidade, como podemos utilizar o tempo curricular ainda menor disponível no EJA para ensinar tópicos relevantes e práticos da educação financeira?

1.1 OBJETIVOS E METODOLOGIA

O objetivo geral desse trabalho é elaborar um plano de aula que aproveite o currículo estadual de que reserva apenas uma ou duas semanas para o ensino de séries numéricas para inserir assuntos relevantes como: (1) orçamento familiar, (2) folha de pagamento, (3) crédito rotativo e empréstimo pessoal e (4) investimentos financeiros.

Para atingir o objetivo geral, têm-se os seguintes objetivos específicos:

- Realizar revisão de literatura acerca do tema educação financeira;
- Elaborar proposta de plano de ensino de educação financeira aplicada ao EJA ensino médio;
- Demonstrar em algumas situações práticas como o aluno pode usar os conhecimentos de matemática financeira a seu favor.

Para isso, Vergara (2010) subdivide os tipos de pesquisa, quanto aos fins, em descritiva, exploratória, explicativa, aplicada, metodológica e intervencionista; e, quanto aos meios, em pesquisa de campo, de laboratório, documental, bibliográfica, experimental, participante, estudo de caso, pesquisa-ação ou *ex post facto*. Sendo assim, esta pesquisa é do tipo aplicada, por ter como finalidade a prática, e bibliográfica, pois utiliza material publicado em revistas, *sites*, etc.

Sendo assim, esta dissertação é destinada a professores de matemática que trabalham com turmas de EJA do ensino médio. No primeiro capítulo, o colega docente encontrará um plano de ensino do que é orçamento e como trabalhar com os alunos o cálculo do salário líquido.

No segundo capítulo, é trabalhado o desenvolvimento das fórmulas de juros simples e compostos de forma prática e construtiva, além de finalizar com um comparativo de quando cada modalidade é mais benéfica.

O capítulo três foi utilizado para propor uma apresentação de amortização aos alunos do EJA, dando maior destaque às tabelas PRICE e SAC.

O quarto e último capítulo demonstra como o aluno pode usar os conhecimentos de matemática financeira a seu favor de forma prática.

1.2 TEORIA PEDAGÓGICA

A escola é questionada sobre o porquê de não oferecer o ensino de educação financeira em sua grade curricular. Basta uma pesquisa no Google, que é possível encontrar vários vídeos e *blogs* com esse tema. Conforme os questionadores, esse seria um conhecimento útil, que faria com que as pessoas pudessem aprender a lidar e administrar o próprio dinheiro com sabedoria, evitando endividamento e outros problemas consequentes da pobreza.

Percebendo ser uma necessidade, pois o Brasil possui 31,6% e 5,9% de sua população vivendo em pobreza e extrema pobreza, respectivamente (IBGE, 2022), algumas por não saberem utilizar o dinheiro recebido por seu trabalho, ou até mesmo por falta de conhecimento sobre como poupar ou investir para uma emergência, em 2010 foi assinado o Decreto nº 7.397 de 22 de dezembro de 2010, que instituiu a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF. Esse Decreto também criou o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF, que anualmente faz a Semana Nacional da Educação Financeira, que tem o objetivo de conscientizar a população sobre a vida financeira.

> Quando o cidadão entende os fatores que influenciam suas escolhas financeiras, consegue equilibrar seus desejos imediatos com suas necessidades de longo prazo. Um dos efeitos disso é o aumento do hábito de poupar, outro importante pilar da educação financeira. E todos saem ganhando, já que cidadão financeiramente educado contribui para o bem-estar coletivo, seja porque essa qualificação resulta em um sistema financeiro mais sólido e eficiente, seja porque cada pessoa tem melhores condições para lidar com emergências e momentos difíceis da vida. (Brasil, 2024).

Entende-se que a educação financeira é importante tanto para o individual quanto para o coletivo. Esse direito à educação está amparado na Constituição Federal de 1988, art. 205, que diz: “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.” Nesse artigo, é possível perceber que a educação deve abranger vários aspectos na vida do estudante, tanto pessoal, quanto coletivo e laboral.

Tomando por base esse preceito, a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação), Lei nº 9.394/1966, no primeiro artigo define que: “A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na **convivência humana**, **no trabalho**, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais.” (Grifo Nosso). E, no § 2°, confirma: “A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do **trabalho** e à **prática social**.” (Grifo Nosso).

Além disso, mostrando a importância da educação financeira no ensino escolar, o Ministério da Educação, na Resolução nº 7, de 14 de dezembro de 2010, artigo 16, resolveu que:

> Os componentes curriculares e as áreas de conhecimento devem articular em seus conteúdos, a partir das possibilidades abertas pelos seus referenciais, a abordagem de temas abrangentes e contemporâneos que afetam a vida humana em escala global, regional e local, bem como na esfera individual. Temas como saúde, sexualidade e gênero, vida familiar e social, assim como os direitos das crianças e adolescentes, de acordo com o Estatuto da Criança e do Adolescente (Lei nº 8.069/90), preservação do meio ambiente, nos termos da política nacional de educação ambiental (Lei nº 9.795/99), **educação para o consumo, educação fiscal, trabalho**, ciência e tecnologia, e diversidade cultural devem permear o desenvolvimento dos conteúdos da base nacional comum e da parte diversificada do currículo. (Grifo Nosso).

Essa resolução deseja que o assunto educação financeira seja trabalhado de forma transversal (art. 16, § 2° e art. 24, §2º):

> Art. 16 [...] educação para o consumo, educação fiscal, trabalho, ciência e tecnologia, e diversidade cultural devem permear o desenvolvimento dos conteúdos da base nacional comum e da parte diversificada do currículo.
> [...]
> § 2º A **transversalidade** constitui uma das maneiras de trabalhar os componentes curriculares, as áreas de conhecimento e os temas sociais em uma perspectiva integrada, conforme a Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (Parecer CNE/CEB nº 7/2010 e Resolução CNE/CEB nº 4/2010).
> [...]
> Art. 24 A necessária integração dos conhecimentos escolares no currículo favorece a sua contextualização e aproxima o processo educativo das experiências dos alunos.
> [...]

> § 2º Constituem exemplos de possibilidades de integração do currículo, entre outros, as propostas curriculares ordenadas em torno de grandes eixos articuladores, projetos interdisciplinares com base em temas geradores formulados a partir de questões da comunidade e articulados aos componentes curriculares e às áreas de conhecimento, currículos em rede, propostas ordenadas em torno de conceitos-chave ou conceitos nucleares que permitam trabalhar as questões cognitivas e as questões culturais numa **perspectiva transversal**, e projetos de trabalho com diversas acepções. (Brasil, 2010, grifo nosso).

Percebe-se, então, que a Resolução CNE/CEB nº 07/2010 é positiva aos temas transversais, sobre os quais os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dizem que:

> Por serem questões sociais, os Temas Transversais têm natureza diferente das áreas convencionais. Tratam de processos que estão sendo intensamente vividos pela sociedade, pelas comunidades, pelas famílias, pelos alunos e educadores em seu cotidiano. São debatidos em diferentes espaços sociais, em busca de soluções e de alternativas, confrontando posicionamentos diversos tanto em relação à intervenção no âmbito social mais amplo quanto à atuação pessoal. São questões urgentes que interrogam sobre a vida humana, sobre a realidade que está sendo construída e que demandam transformações macrossociais e também de atitudes pessoais, exigindo, portanto, ensino e aprendizagem de conteúdos relativos a essas duas dimensões. (Brasil, 2024, p. 26).

O tema educação financeira deve ser trabalhado de forma transversal, por ser um assunto que interessa ao estudante na vida acadêmica e para além dos muros da escola. Esse assunto é importante que seja trabalhado também na Educação de Jovens e Adultos (EJA). A EJA é um programa instituído pelo governo e está previsto na LDB:

> Art. 4º O dever do Estado com educação escolar pública será efetivado mediante a garantia de:
>
> VII - oferta de educação escolar regular para jovens e adultos, com características e modalidades adequadas às suas necessidades e disponibilidades, garantindo-se aos que forem trabalhadores as condições de acesso e permanência na escola;
>
> [...]
>
> Art. 37. A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos nos ensinos fundamental e médio na idade própria e constituirá instrumento para a educação e a aprendizagem ao longo da vida.
>
> § 1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
>
> § 2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
>
> § 3º A educação de jovens e adultos deverá articular-se, preferencialmente, com a educação profissional, na forma do regulamento. (Brasil, 1996).

É possível observar na leitura dos artigos acima que a Educação de Jovens e Adultos compreende um número de trabalhadores, e estes devem ter condições de se manterem na escola. Uma forma de dar essa condição, é por transmitir um conhecimento que ele observe que vai utilizar na prática da sua vida. E a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) já trouxe em seu documento informações sobre a importância de trabalhar esse tema de forma transversal:

> [...] Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.
>
> Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. (Brasil, 2017. p. 271).

Esse mesmo documento, traz habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos ao estudarem matemática. E várias dessas habilidades incluem a matemática financeira. Note a abrangência da matemática financeira na BNCC nos quadros 1 e 2.

Quadro 1 - Matemática financeira como habilidade a ser desenvolvida no ensino fundamental

Habilidade	
(EF07MA02)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
(EF09MA05)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
(EF05MA06)	Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

(EF06MA13)	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: BNCC, 2018, pp. 301,317.

Quadro 2- Matemática financeira como habilidade a ser desenvolvida no ensino médio

Habilidades	
(EM13MAT304)	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305)	Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT503)	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Fonte: BNCC, 2018, pp. 536, 541.

Portanto, a seguir apresento uma proposta de plano de aula para, em poucas aulas, ajudar os alunos nesse sentido.

2. ORÇAMENTO DOMÉSTICO

Inicialmente, antes de pensar em juros simples e compostos, de investimentos ou de dívidas, é importante esclarecer o orçamento familiar: o que é, qual sua importância e como elaborar o seu próprio orçamento.

O orçamento é uma ferramenta financeira essencial que permite o planejamento e o controle das finanças pessoais e empresariais. Segundo Cherobim (2016), o orçamento é um plano detalhado que estima e aloca recursos financeiros para diferentes áreas de gastos e receitas. Ele é um guia para gerenciar com eficiência os recursos disponíveis e alcançar metas financeiras específicas.

Assim, o orçamento é importante devido à sua capacidade de promover controle financeiro, de evitar desperdícios e de garantir o bom uso dos recursos financeiros disponíveis. Conforme Frezatti (2015), o orçamento oferece uma visão clara das finanças, o que pode auxiliar na tomada de decisões financeiras e possibilita realizar ajustes conforme a necessidade. Fazer um orçamento também é crucial para garantir a estabilidade financeira e para alcançar objetivos de curto e longo prazo.

Para se criar um orçamento familiar eficaz, são necessários diversos passos. Segundo Navarro e Massaro (2013), o primeiro passo é fazer uma lista de todas as fontes de renda e de todas as despesas da família para entender sua situação financeira; em seguida, é importante estabelecer metas financeiras claras e organizar receitas e despesas dentro de categorias. Assim, é importante avaliar as finanças no momento da confecção do orçamento e também monitorar continuamente os gastos e receitas, além de projetar gastos e receitas futuras, comparar receitas com despesas e fazer ajustes conforme necessário. Essas são etapas vitais para garantir que o orçamento esteja equilibrado.

Existem várias ferramentas disponíveis para ajudar na criação e controle de um orçamento familiar bem-sucedido: planilhas financeiras, aplicativos móveis e consultoria financeira pessoal são algumas opções mencionadas por Dessen (2015). Esses recursos podem facilitar o acompanhamento do orçamento elaborado, a identificação de áreas de gastos excessivos e o planejamento para alcançar os objetivos financeiros traçados.

Além de proporcionar controle financeiro, um orçamento familiar bem elaborado traz uma série de benefícios adicionais. Ele ajuda a reduzir o estresse financeiro, promove a comunicação e colaboração entre os membros da família, e facilita o planejamento para eventos futuros, como a compra de uma casa ou a educação dos filhos. O orçamento familiar é uma ferramenta poderosa para garantir a estabilidade financeira e alcançar uma vida financeira mais equilibrada e próspera (Anhanguera, 2024).

Dessa forma, a primeira atividade a ser desenvolvida é esclarecer aos alunos do EJA o que são as entradas e saídas de um orçamento doméstico e através de uma tabela simples, ajudá-los a elaborar o seu próprio orçamento de forma a identificar se o aluno tem um perfil poupador ou tomador. Ou seja, o aluno costuma ao final do mês ter recursos financeiros disponíveis que poderia guardar em uma conta de investimento e ganhar juros ou esse aluno ao final do mês tem mais gastos do que entradas e precisa às vezes pegar empréstimos com familiares, parentes ou instituição financeira de forma a cobrir os gastos rotineiros. Claramente, parte dessa atividade será orientar de forma que fique claro que há gastos extremamente importantes como alimentação, saúde, educação e até mesmo lazer; enquanto que alguns gastos podem ser evitados e representam desperdício, algo que não trará retorno a médio e longo prazo.

Para a atividade de elaborar o orçamento doméstico do aluno pode ser utilizada um quadro como o abaixo (Quadro 3).

Quadro 3 - PROPOSTA DE ORÇAMENTO DOMÉSTICO

	BRUTA	**LÍQUIDA**
RENDA (A)		
DESPESAS		
	VALOR PREVISTO	**VALOR GASTO**
MORADIA		
EDUCAÇÃO		

LAZER		
ALIMENTAÇÃO		
SAÚDE		
AUTOMÓVEL		
OUTRAS DESPESAS		
TOTAL DE GASTOS (B)		
SALDO (Renda Líquida (A) – Despesas (B))		

Fonte: adaptada de https://www.procon.sp.gov.br/wp-content/uploads/files/OrcamentoDomestico.pdf#

Algo a se destacar durante o preenchimento são as duas informações iniciais: renda líquida e renda bruta. O conceito de ambas é importante pois um primeiro deslize cometido na educação financeira é pensar que se uma pessoa tem renda de um salário mínimo, ou seja R$1412,00 em 2024, ela poderia gastar R$1300 a R$1400 por mês de forma a não se enrolar financeiramente. O erro mora em desconsiderar descontos percentuais que o cidadão comum percebe no seu pagamento mensal. Dentre os descontos, abordaremos os mais básicos: previdência, fundo de garantia e imposto de renda.

Essa pausa servirá para explicar suscintamente a finalidade de cada desconto na folha de pagamento, porém o principal será o cálculo de porcentagens e a interpretação da tabela do IRPF (imposto sobre a renda das pessoas físicas). Para tanto, tomaremos três pessoas fictícias com as suas respectivas rendas mensais, sejam elas:

Pessoa A – recebe um salário mínimo

Pessoa B – recebe R$ 5000,00

Pessoa C – recebe R$ 15000,00

Para cada uma das pessoas A, B e C será calculado o salário líquido e o percentual total que é descontado de seus salários mensais.

Nessa aula, serão dadas aos alunos informações explicando o percentual e o limite de cada desconto, além de três quadros a serem preenchidos com valores calculados.

Quadro 4 - Atividade: cálculo do salário líquido

Pessoa A		
Salário Bruto		
Desconto	**Valor descontado**	**Percentual**
INSS		
IRPF		
Total		
Salário líquido		

Fonte: próprio autor.

2.1 DESCONTO INSS

A previdência social, gerida pelo Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), é vital para a segurança financeira dos trabalhadores brasileiros, garantindo uma rede de proteção em momentos de necessidade, como doença, invalidez, aposentadoria, maternidade e morte (Direito2, 2024). Esses benefícios asseguram que os trabalhadores e seus dependentes possam manter uma renda mesmo diante de situações adversas, contribuindo significativamente para a estabilidade social e econômica do país. Além de proporcionar segurança financeira, a previdência social também desempenha um papel crucial na redução da pobreza e na promoção da equidade social (Direito2, 2024).

Para viabilizar essa proteção, os trabalhadores e seus empregadores contribuem para o INSS por meio de descontos aplicados diretamente sobre os salários. Esses descontos seguem uma tabela progressiva, onde a alíquota de contribuição varia conforme a faixa salarial. Em 2024, conforme Gov.br (Brasil, 2024), as alíquotas são: 7,5% para salários de até R$ 1.412,00; 9% para a faixa de R$ 1.412,01 a R$ 2.666,68; 12% para salários de 2.666,69 até R$ 4.000,03; e 14% para a faixa de R$ 4.000,04 até R$ 7.786,02. Para rendimentos que ultrapassam o teto previdenciário de R$ 7.786,02, a contribuição é limitada a esse valor. Esse modelo progressivo garante que a contribuição seja proporcional à capacidade financeira de cada trabalhador, promovendo equidade e justiça no sistema previdenciário (Brasil, 2024).

A estrutura de percentuais de desconto no salário do trabalhador é projetada para ser justa e proporcional, assegurando que todos contribuam de acordo com sua capacidade. Isso significa que trabalhadores de menor renda têm um desconto menor em seus salários, enquanto aqueles que ganham mais contribuem com uma porcentagem maior. Essa abordagem não só mantém a sustentabilidade do sistema previdenciário, mas também garante que os recursos arrecadados sejam suficientes para cobrir os benefícios necessários. A contribuição solidária de todos os trabalhadores e empregadores é essencial para que o INSS possa continuar oferecendo suporte financeiro a milhões de brasileiros, promovendo uma sociedade mais justa e equitativa.

2.2 DESCONTO IRPF

O Imposto de Renda é um tributo federal cobrado sobre a renda de pessoas físicas e jurídicas no Brasil. Instituído pelo governo, ele é destinado a financiar diversos serviços públicos, como saúde, educação, segurança e infraestrutura. O imposto incide sobre os rendimentos auferidos ao longo do ano, como salários, aluguéis, investimentos e outros tipos de ganhos. A administração e a fiscalização do Imposto de Renda são realizadas pela Receita Federal, que determina as regras para o cálculo, a declaração e o pagamento do tributo (Araujo, 2022).

As alíquotas do Imposto de Renda para pessoas físicas variam conforme a faixa de renda anual. Conforme o site Gov.br, Ministério da Fazenda, (Brasil, 2024) para o ano-calendário de 2024, por exemplo, as alíquotas são as seguintes: rendimentos anuais até R$ 26.963,20 - alíquota zero, sem dedução; de R$ 26.963,20 até R$ 33,919,80 - alíquota de 7,5%, com dedução de R$ 2.022,24; de R$ 33.919,81 até R$ 45.012,60 - alíquota de 15%, com dedução de R$ 4. 566,23; de R$ 45.012,61 até R$ 55.976,16 - alíquota de 22,5%, com dedução de R$ 7. 942,17; acima de R$ 55.976,16 - alíquota de 27,5%, com dedução de R$ 10.740,98. Já para as pessoas jurídicas, a alíquota padrão é de 15% sobre o lucro real, presumido ou arbitrado, com um adicional de 10% sobre a parcela do lucro que exceder R$ 20.000,00 por mês.

Incidência mensal sobre salários: a partir de fevereiro de 2024 o imposto de renda descontado na fonte segue a tabela 1.

Tabela 1 - Incidência mensal IRPF, a partir de fevereiro de 2024

Base de cálculo	**Alíquota**	**Dedução**
Até R$ 2.259,20	-	-
De R$ 2.259,21 até R$ 2.826,65	7,5%	R$ 169,44
De R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05	15,0%	R$ 381,44
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5%	R$ 662,77
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 896,00

Fonte: Ministério da Fazenda, 2024.

O Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF) é pago de duas formas principais: através do desconto na fonte e via Documento de Arrecadação de Receitas Federais (DARF). Cada método tem suas especificidades e situações de aplicação, garantindo que o tributo seja recolhido de forma adequada (Brasil, 2024).

O desconto na fonte, também conhecido como retenção na fonte, é a forma mais comum de pagamento do IRPF para trabalhadores assalariados. Nesse caso, o empregador é responsável por calcular e descontar mensalmente uma parte do salário do empregado, conforme as alíquotas de Imposto de Renda vigentes. O valor descontado é baseado na tabela progressiva do IRPF, levando em consideração o salário bruto do trabalhador e possíveis deduções, como dependentes e contribuições à previdência social. O valor retido é repassado à Receita Federal pelo empregador, funcionando como uma antecipação do imposto devido ao final do ano (Brasil, 2024).

Já o pagamento via DARF ocorre principalmente em situações onde o contribuinte recebe rendimentos que não são sujeitos à retenção na fonte ou quando existem ajustes a serem feitos na Declaração Anual de Ajuste. Exemplos incluem rendimentos de aluguel, ganhos de capital, rendimentos de trabalho autônomo, entre outros. Na Declaração Anual de Ajuste, feita geralmente entre março e abril, o contribuinte deve informar todos os rendimentos auferidos ao longo do ano anterior. Após o preenchimento e envio da declaração, o sistema da Receita Federal calcula se há imposto a pagar ou a restituir (Brasil, 2024).

Se houver imposto a pagar, o contribuinte pode gerar o DARF diretamente no programa da Receita Federal utilizado para a declaração. Esse documento pode ser pago em bancos, caixas eletrônicos, aplicativos de bancos ou via internet banking. O pagamento pode ser feito em cota única ou parcelado em até oito vezes, sendo que a primeira parcela vence em abril. O não pagamento nas datas estabelecidas pode acarretar juros e multas por atraso. É importante que os contribuintes mantenham atenção às datas e valores para evitar penalidades e garantir que o tributo seja recolhido corretamente (Brasil, 2024).

O imposto não é cobrado sobre todo o salário. O que é descontado em INSS, por exemplo, não entra na conta. Além disso, as alíquotas não são cobradas integralmente sobre os rendimentos.

Tome por exemplo uma pessoa que, após desconto da previdência oficial, tem ainda renda de R$ 4 mil por mês para ser tributado pela Receita Federal. Nesse exemplo, a pessoa se encaixa na faixa 4, porém não paga 22,5% sobre toda a parte tributável do salário. Pelas contas da Receita, os "primeiros" R$ 2.112 são isentos. O que passar desse valor e não superar os R$ 2.826,66 (o limite da faixa 2) é tributado em 7,5%. Já o que superar limite da faixa 2, mas não o da faixa 3, paga 15%, e assim sucessivamente, conforme site g1.globo.com.

Veja o exemplo abaixo na tabela 2:

Tabela 2 - Exemplo de cálculo do IR para salário de R$ 4 mil

Faixas do IR	**Parcela salarial em cada faixa**	**Alíquota**	**Imposto pago sobre a parcela**
1	até R$ 2.112	isento	zero
2	R$ 714,65	7,5%	R$ 53,59
3	R$ 924,39	15%	R$ 138,66
4	R$ 248,93	22,5%	R$ 56,01
Total	**Salário: R$ 4.000**	**Alíquota efetiva: 6,2%**	**Total pago: R$ 248,26**

Fonte: IBPT - Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação

Realizada esta atividade para compreensão dos descontos no salário do trabalhador e cálculos percentuais, os alunos poderão, na sequência, preencher o campo da sua própria renda líquida, aproveitando para verificar se o desconto do seu salário está adequado ou irregular.

Os demais campos da tabela proposta para preenchimento e organização do orçamento familiar são relativos às despesas mensais de cada grupo familiar e podem ser preenchidos facilmente pelos alunos sem necessidade de comentários ou orientação adicionais.

3. JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

Antes de definir o que são juros, é necessário apresentar aos alunos da educação de jovens e adultos o que é capital e o que é o montante. A diferença entre capital, ou principal, e montante é que este é o valor inicialmente investido ou emprestado, enquanto aquele é o valor total que inclui o capital mais os juros ou outros ganhos ao longo do tempo. Em outras palavras, o capital é o valor original envolvido em uma transação financeira, enquanto o montante é o resultado da aplicação de juros ou rendimentos sobre esse capital ao longo do tempo. O montante é sempre maior que o capital devido aos juros ou ganhos acumulados. Dessa forma, o montante representa o valor total a ser pago ou recebido ao final de um prazo determinado.

Os juros podem ser encarados como remuneração do capital porque representam o retorno que um investidor ou credor recebe pelo empréstimo de seu dinheiro ou pela aplicação de seus recursos em um investimento. Quando uma pessoa ou instituição empresta dinheiro, espera receber uma compensação pelo uso desse capital durante um período determinado. Essa compensação, chamada de juros, é calculada como uma porcentagem do valor emprestado ou investido. Os juros remuneram o capital ao fornecer um retorno que compensa pelo risco assumido e pela indisponibilidade temporária dos recursos.

Assaf Neto (2018), juros são a remuneração pelo uso de um capital emprestado, eles representam o valor adicional pago pelo devedor ao credor, como uma compensação pelo empréstimo de dinheiro ou pela extensão do crédito, calculado geralmente com base em uma taxa percentual sobre o valor principal. Para Gitman e Zutter (2018), os juros podem ser definidos como o custo do dinheiro ao longo do tempo; são a remuneração paga pelo uso de recursos financeiros de terceiros, e sua quantificação é geralmente feita por meio de uma taxa percentual aplicada sobre o valor emprestado ou financiado.

Além disso, os juros também podem ser compreendidos como o mecanismo que permite ao dinheiro "viajar no tempo". Este conceito é essencial na matemática financeira, onde os juros determinam como o valor do dinheiro muda ao longo do tempo. O conceito de valor presente (VP) e valor futuro (VF) está intimamente ligado aos juros. O valor presente é a quantia de dinheiro que, se investida hoje a uma determinada taxa de juros, resultará em uma quantia futura específica. Já o valor futuro é o montante que um valor presente se tornará após acumular juros ao longo de um período.

Um exemplo clássico disso é a aplicação dos juros compostos, onde os juros acumulados em cada período são reinvestidos, resultando em um crescimento exponencial do capital inicial. Os juros compostos são a base para o crescimento do capital, permitindo que o valor investido aumente de forma exponencial com o passar do tempo. Saber disso crucial para entender como o dinheiro pode crescer significativamente quando os juros sobre o capital inicial são continuamente reinvestidos, mostrando como os juros remuneram o capital de forma eficiente.

Os juros desempenham um papel de grande importância na economia, influenciando decisões de consumo, poupança e investimento. Quando as taxas de juros estão altas é comum a população procurar investir recursos em aplicações financeiras, obtendo um retorno maior sobre o dinheiro guardado. Por outro lado, quando a taxa de juros está baixa, a poupança fica pouco interessante e o consumo é estimulado, pois o custo do crédito fica mais barato. Além disso, os juros são uma ferramenta de política monetária utilizada pelos bancos centrais para controlar a inflação e estimular o crescimento econômico. Assim, a compreensão dos mecanismos de juros é vital para a formulação de estratégias econômicas e financeiras, tanto a nível individual quanto macroeconômico.

Finalmente, a compreensão de como os juros remuneram o capital e permitem que o dinheiro "viaje no tempo" é vital para uma boa gestão do dinheiro. Investidores e gestores utilizam esses conceitos para tomar decisões informadas sobre onde e como alocar seus recursos, buscando maximizar o retorno e minimizar o risco. A avaliação correta dos juros e a compreensão de seu impacto sobre o valor do dinheiro ao longo do tempo são essenciais para garantir que os recursos financeiros sejam utilizados de maneira produtiva e sustentável, promovendo o crescimento econômico e a prosperidade a longo prazo.

Na prática da sala de aula, o aspecto temporal dos juros pode ser debatido em sala levantando uma pergunta do tipo: você prefere receber R$100,00 agora ou onze pagamentos de R$10,00? Por quê?

Observe que no debate sobre a pergunta acima surgirão ponderações que envolvem o conceito de inadimplência, inflação e retorno sobre investimento (ROI). Os dois primeiros serão trabalhados sem muita profundidade, enquanto que o terceiro será aprofundado por meio do estudo dos juros simples e compostos.

3.1 JUROS SIMPLES

Neste caso, os juros são sempre calculados sobre o capital tomado ou emprestado que será remunerado conforme um percentual fixo. São muito utilizados em questões de concurso e ENEM. Mais do que isso, fazem parte do dia a dia de um aluno de EJA ao pagar por exemplo um boleto com atraso igual ou inferior trintas dias, ou quando um aluno empresta ou toma emprestado um valor de um familiar comumente cobrará uma remuneração que é calculada no esquema dos juros simples.

Observe um exemplo didático: Um capital de R$200,00 é emprestado a juros simples de 2% ao mês (a.m.), quanto deverá ser pago ao final de sete meses? Como os juros simples são sempre calculados sobre o capital, temos que no primeiro mês será pago

$$2\%\ de\ 200 \rightarrow 0{,}02 \cdot 200 = 4$$

Ao final do primeiro mês a quantia devida, ou o montante, será capital mais juros

$$M = C + J \rightarrow 200 + 4 = 204$$

No segundo mês, os juros devidos serão novamente 2% do capital, ou seja, mais quatro reais. Observe que, embora o montante tenha aumentado, os juros cobrados mês a mês são constantes pois são sempre calculados como um percentual do capital inicial. Assim, podemos calcular o crescimento da dívida e organizá-lo em forma de uma sequência numérica:

(capital, montante 1, montante 2, montante 3, ..., montante 7)

(200, 204, 208, 212, 216, 220, 224, 228)

Nesse ponto, cabe pedir aos alunos que analisem a sequência e vejam se lembram de já ter trabalhado com algo parecido durante o currículo escolar. A partir dessa reflexão, é provável que alguns alunos identifiquem que a dívida aumenta de forma análoga a uma Progressão Aritmética (PA) onde o primeiro termo, a_0, é o capital inicial, a razão, r, é a taxa de crescimento da dívida a qual é equivalente ao produto do capital pela taxa de juros, i. O enésimo termo, a_n, é o montante da dívida em determinado mês. Portanto, é possível utilizar a fórmula do termo geral da PA para calcular o montante devido em determinado mês.

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

Feitas as comparações entre juros simples e PA, podemos reescrever a fórmula como

$$M = C + J \; e \; J = C \cdot i \cdot n \rightarrow M = C + C \cdot i \cdot n$$

Vejamos um segundo exemplo para aplicar e fixar a fórmula. Um boleto de R$500 atrasado cobra juros de 3% ao dia. Calcule: a) o valor a pagar ao final de 11 dias; b) os juros a pagar após 18 dias de atraso.

a) O valor a pagar no final de um prazo corresponde ao montante, aplicando a fórmula temos

$$M = C + C \cdot i \cdot n$$

Onde,

$$M = ?$$

$$C = 500$$

$$i = 3\% \, a.d. = 0{,}03$$

$$n = 11$$

$$M = C + C \cdot i \cdot n = 500 + 500 * 0{,}03 * 11 = 665$$

Resposta: R$ 665,00.

b) Os juros ao final de 18 dias correspondem à diferença entre o valor inicial, capital, e o valor fina, montante.

$$M = ?$$

$$C = 500$$

$$i = 3\% \, a.d. = 0{,}03$$

$$n = 18$$

$$M = C + C \cdot i \cdot n = 500 + 500 \cdot 0{,}03 \cdot 18 = 770$$

Portanto, os juros são

$$M = C + J$$

$$770 = 500 + J$$

$$J = 220$$

Resposta: R$ 220,00.

A fim de exercitar a fórmula e apresentar o caminho para solucionar cada tipo de questão com juros simples, vejamos mais alguns exemplos a respeito de como calcular a taxa e também como calcular o prazo.

Considere uma dívida de R$50,00 que após um prazo de dois meses está sendo cobrado o valor de R$55,00. Calcule a taxa de juros mensal simples dessa transação.

$$M = 55$$

$$C = 50$$

$$i = ?$$

$$n = 2$$

$$M = C + J$$

$$55 = 50 + J$$

$$J = 5$$

Mas, $J = C \cdot i \cdot n$

$$5 = 50 \cdot i \cdot 2$$

$$5 = 100i$$

$$i = \frac{5}{100}$$

Portanto, a taxa de juros dessa transação foi de 5% a.m.

Vejamos ainda dois problemas sobre o cálculo do prazo. Pedro contratou um serviço de internet residencial que é pago via boleto. A mensalidade é de R$110,00 e em caso de atraso, é cobrada uma multa de 1,5% ao dia (a.d.). Infelizmente, Pedro esqueceu qual era a data correta de pagar o boleto e quando foi a loteria para pagar a caixa informou que o valor devido era de R$123,20. Com quantos dias de atraso esse boleto foi pago?

$$M = 123{,}20$$

$$C = 110$$

$$i \ = \ 1{,}5\% \ a.d.$$

$$n = ?$$

$$M = C + J$$

$$123{,}20 = 110 + J$$

$$J = 13{,}20$$

A partir da fórmula, $J = \ C \cdot i \cdot n$ podemos calcular o prazo, n.

$$J = \ C \cdot i \cdot n$$

$$13{,}20 = \ 110 \cdot \frac{1{,}5}{100} \cdot n$$

$$13{,}20 = \ 1{,}65n$$

$$n = \frac{13{,}20}{1{,}65} = 8$$

Portanto, o boleto foi pago com 8 dias de atraso.

Considere uma aplicação de R$300,00 a taxa de juros simples de 3% a.m. Qual o prazo necessário para que essa aplicação retorne juros de R$51,00?

$$J = 51$$

$$C = 300$$

$$i = 3\% \, a.m.$$

$$n = ?$$

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$51 = 300 \cdot \frac{3}{100} \cdot n$$

$$51 = 9n$$

$$n = \frac{51}{9} = 5{,}6 \cdots$$

Nesse problema, é possível compreender que o prazo da aplicação está entre 5 e 6 meses, o que gera duas observações interessantes. A primeira é que, apesar de os juros simples serem semelhantes ao crescimento de uma PA, as progressões aritméticas têm número de termos pertencentes ao conjunto dos números naturais (N), ou seja, temos o 5º e o 6º termos, mas o termo 5,6 não faz sentido para uma PA. Isso constitui a principal limitação na analogia PA e Juros Simples. A segunda observação é que, caso a aplicação financeira desse problema tenha remuneração diária, o aluno consegue precisar o prazo exato para alcançar os juros propostos. Para isso, basta fazer uma regra de três considerando que o mês comercial tem 30 dias. Dessa forma, será obtido o prazo total de 5 meses e 20 dias.

3.2 JUROS COMPOSTOS

Juros simples é uma maneira fácil de calcular os juros sobre um valor inicial, onde os juros são calculados apenas sobre esse valor, sem considerar os juros acumulados ao longo do tempo. Isso funciona bem para situações de curto prazo ou onde não há muita variação no dinheiro ao longo do tempo. No entanto, essa simplicidade também é sua maior limitação. Em muitas situações financeiras do dia a dia, como empréstimos de longo prazo ou investimentos, usar apenas juros simples não dá uma imagem precisa de como o dinheiro realmente cresce ou se acumula.

O problema principal com os juros simples é que ele ignora os juros sobre os juros, ou seja, o efeito de capitalizar os juros acumulados. Juros compostos, por outro lado, consideram esse efeito, onde você ganha juros não só sobre o valor inicial, mas também sobre os juros que já foram acumulados. Isso faz uma grande diferença, especialmente em prazos mais longos. Por exemplo, se você investe dinheiro e os juros são compostos anualmente, seu investimento cresce muito mais rápido do que se apenas os juros simples fossem aplicados, porque os juros compostos aumentam o montante total ao reinvestir os juros ganhos.

Além disso, usar juros compostos é essencial em contextos como a inflação, planejamento de aposentadoria e avaliação de investimentos. A inflação diminui o valor do dinheiro ao longo do tempo, e os juros compostos podem ajudar a combater esse efeito, fazendo seu dinheiro crescer a uma taxa que supera a inflação. No planejamento de aposentadoria, o crescimento proporcionado pelos juros compostos pode significar uma diferença enorme no valor acumulado ao longo dos anos. Portanto, entender e usar juros compostos é crucial para tomar decisões financeiras mais inteligentes e adequadas à realidade econômica, garantindo que seu dinheiro trabalhe a seu favor de uma maneira que traga bom retorno.

Na prática, pode-se apresentar aos alunos do EJA a seguinte situação: considere um empréstimo R$100,00 a juros de 10% a.m. para uma pessoa. Ao final de um mês essa pessoa te deverá R$110,00, mas quanto será devido ao final de dois meses? Pelo sistema de juros simples a resposta óbvia seria R$120,00 devido ao acréscimo constante de R$10,00 por mês. Mas, imagine que em vez do valor ficar pendente dois meses com a mesma pessoa, no final do primeiro mês os R$110,00 sejam devolvidos e emprestados para uma segunda pessoa à mesma taxa de 10% a.m. Nesse caso, o capital passaria a ser R$110,00 e no final do segundo mês os juros serão 10% desse capital, ou seja, R$11,00. Nessa segunda situação, o montante acumulado será de R$121,00. Uma pequena diferença foi observada nesses dois casos e se essas transações fossem continuadas nos mesmos moldes por cinco meses, obteríamos a tabela 3, a seguir.

Tabela 3 - Comparativo entre o montante de juros simples x juros compostos

	início	**mês 1**	**mês 2**	**mês 3**	**mês 4**	**mês 5**
caso A	100	110	120	130	140	150
caso B	100	110	121	133,10	146,41	161,05

Fonte: Autoria própria.

Conforme observado na tabela 3, no final do prazo de cinco meses o caso B renderia R$11,05 a mais do que o caso A correspondente aos juros simples. O esquema de juros simples só teve resultado semelhante no primeiro mês e a partir do segundo mês sempre apresentou desvantagem. Além disso, a desvantagem entre os dois esquemas é cada vez maior. Apresentados e esclarecidos os dois esquemas acima, resta ao professor informar aos alunos que o caso B é o esquema de juros compostos – o qual é amplamente praticado no sistema financeiro por apresentar vantagem para aquele que aplica seu capital.

Uma demonstração de como os juros compostos crescem pode ser feita utilizando a álgebra e os símbolos já conhecidos pelos alunos M, C, J, i e n. Para isso recorremos ao problema anterior, porém sem utilizar os valores. Partindo de um capital C, aplicado a uma taxa i, durante prazos iguais $n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = 1$, obtemos o montante M_1, M_2, M_3, ..., através de reaplicações da fórmula dos juros simples.

No primeiro período, teremos

$$M = C + J \; e \; J = C \cdot i \cdot n \rightarrow M = C + C \cdot i \cdot n$$

$$n_1 = 1,\; M = C + C \cdot i \cdot 1 \rightarrow M = C + C \cdot i = C(1 + i)$$

$$M_1 = C(1 + i)$$

No segundo período, $n_2 = 1$, o montante obtido no primeiro período será reaplicado de forma que o capital do segundo período será igual ao montante do primeiro período $M_1 = C_2$. Assim, temos

$$M = C + C \cdot i \cdot n = C(1 + i \cdot n)$$

$$M_2 = C_2(1 + i \cdot n)$$

$$n_2 = 1,\ C_2 = C(1 + i),\ M_2 = [C(1 + i)](1 + i \cdot 1)$$

$$M_2 = C(1 + i)(1 + i)$$

$$M_2 = C(1 + i)^2$$

Analogamente, o montante obtido no período anterior será reaplicado, formando o capital do terceiro período, $n_3 = 1$

$$M_3 = C_3(1 + i \cdot n)$$

$$n_3 = 1,\ C_3 = C(1 + i)^2,\ M_3 = [C(1 + i)^2](1 + i \cdot 1)$$

$$M_3 = [C(1 + i)^2](1 + i)$$

$$M_3 = C(1 + i)^3$$

Essas mesmas operações podem ser repetidas de forma a obter a fórmula para o cálculo dos juros compostos

$$M_n = C(1 + i)^n$$

Essa abordagem pode não ser prática ao trabalha com alunos do ensino de jovens e adultos, dado as limitações e dificuldades observadas nessa modalidade conforme apresentadas no capítulo inicial.

Uma abordagem alternativa é retomar a tabela e o problema proposto ao se comparar os juros simples com os juros compostos. Podemos pedir aos alunos para dividir o montante do mês 5 pelo montante do mês 4; divida o montante do mês 4 pelo montante do mês 3 e assim sucessivamente. Realizadas as divisões, partimos para a análise dos resultados usando perguntas como: Qual o resultado obtido? Existe alguma relação entre o resultado obtido com a taxa de juros do problema? Qual seria a operação a efetuar para encontrar o valor do montante no mês 6?

Retomando a tabela anterior e efetuando as divisões, temos a tabela

Tabela 4 - Compreensão do fator multiplicativo

	Início	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5	Mês 6
Caso B	100	110	121	133,10	146,41	161,05	?
		$\frac{110}{100} = 1{,}1$	$\frac{121}{110} = 1{,}1$	$\frac{133{,}1}{121} = 1{,}1$	$\frac{146{,}41}{133{,}1} = 1{,}1$	$\frac{161{,}05}{146{,}41} = 1{,}1$	

Fonte: Autoria própria.

Essa análise ajudará os alunos a compreender que a sequência numérica se desenvolve de forma crescente, multiplicando o termo anterior pelo fator constante de forma a obter o próximo termo.

A depender do entendimento da turma e do que já foi trabalhado em sala de aula, o professor pode retomar os conceitos de Progressão Geométrica (PG) para chegar à fórmula para calcular o montante dos juros compostos. Observe que o parágrafo anterior descreve justamente a forma de obter os termos de uma PG. A analogia entre juros compostos e PG é da seguinte forma. O primeiro termo, a_0, é o equivalente do capital inicial, C. A taxa de crescimento, $1 + i$, é o equivalente da razão da PG. A quantidade de ou posição do termo da PG, n, é o equivalente ao prazo dos juros compostos. E, por fim, o montante é o equivalente ao termo geral da PG, a_n.

Assim, temos com a aplicação da analogia, a construção da fórmula para o cálculo do montante

$$a_n = a_0 q^n$$

levando a

$$M_n = C(1 + i)^n$$

Alternativamente, caso o professor identifique que a turma de EJA teve dificuldades ao estudar PG ou mesmo esse conteúdo ainda não tenha sido trabalhado, é possível conduzir a construção da fórmula do montante dos juros compostos utilizando-se ainda da tabela anterior

Nessa condução, o professor deve ajudar o aluno a interpretar a relação entre valor constante a ser multiplicado e a taxa de juros do problema: $1{,}1 = 110\% = 100\% + 10\%$ – a primeira parcela retoma o capital e a segunda representa o acréscimo da taxa de juros. Além disso, o aluno é convidado a raciocinar que a sequência numérica se desenvolve de forma crescente, multiplicando o termo anterior pelo fator constante de forma a obter o próximo termo. Assim, é possível calcular o montante do sexto mês e de qualquer mês à frente. Interessante, notar que para avançar de um mês para dois ou três meses à frente é preciso apenas multiplicar o valor atual por $1{,}1$ ou $1{,}1^2$ respectivamente.

Essas observações e análises auxiliarão a preencher cada linha do quadro 5, abaixo, e deduzir a fórmula para calcular o montante dos juros compostos.

Quadro 5 - Uso do fator multiplicativo para chegar à fórmula para o cálculo dos juros compostos

Início	**Mês 1**	**Mês 2**	**Mês 3**	**Mês 4**	**Mês 5**	...	**Mês n**
100	110	121	133,10	146,41	161,05	...	------
100	1,1*100	1,1*110	1,1*121	1,1+133,10	1,1*146,41	...	------
C	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	...	M_n
C	$1{,}1C$	$1{,}1M_1$	$1{,}1M_2$	$1{,}1M_3$	$1{,}1M_4$	...	$1{,}1M_{n-1}$
C	$1{,}1C$	$1{,}1^2C$	$1{,}1^3C$	$1{,}1^4C$	$1{,}1^5C$	...	$1{,}1^4C$
C	$(1+i)C$	$(1+i)^2C$	$(1+i)^3C$	$(1+i)^4C$	$(1+i)^5C$	...	$(1+i)^nC$

Fonte: Autoria própria.

A última célula da tabela constitui a fórmula desejada.

$$M_n = C(1+i)^n$$

A fórmula matemática dos juros compostos pertence à família das funções exponenciais as quais são utilizadas em diversas áreas devido à sua capacidade de modelar fenômenos de crescimento e decaimento rápido. Aqui estão outros exemplos práticos de suas aplicações:

1) Crescimento Populacional: Em ecologia, a função exponencial é usada para modelar o crescimento de populações em condições ideais, onde recursos são abundantes e não há limitações ambientais. A fórmula $P(t) = P_0 e^{rt}$ descreve o crescimento populacional, onde $P(t)$ é a população no tempo t, P_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento e e é a base do logaritmo natural (aproximadamente 2,71828). Por exemplo, se uma população de bactérias dobra a cada hora, seu crescimento pode ser modelado exponencialmente.

2) Decaimento Radioativo: Na física, o decaimento radioativo é um processo em que substâncias radioativas perdem sua radioatividade ao longo do tempo. Esse processo é descrito por uma função exponencial decrescente $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, onde $N(t)$ é a quantidade de substância restante, N_0 é a quantidade inicial, λ é a constante de decaimento, e t é o tempo. Isso é crucial para entender a meia-vida de elementos radioativos e suas aplicações em medicina e arqueologia.

3) Propagação de Doenças: Na epidemiologia, as funções exponenciais modelam a propagação de doenças infecciosas durante os estágios iniciais de um surto. A fórmula $I(t) = I_0 \cdot e^{rt}$ pode descrever o número de indivíduos infectados ao longo do tempo, onde $I(t)$ é o número de infectados no tempo t, I_0 é o número inicial de infectados, e r é a taxa de transmissão. Isso é especialmente relevante em pandemias, onde o número de casos pode crescer exponencialmente se medidas de controle não forem implementadas.

4) Carga e Descarga de Capacitores: Em eletrônica, a função exponencial é usada para descrever a carga e descarga de capacitores em circuitos RC, ou resistor-capacitor/condensador. A carga Q em um capacitor ao longo do tempo t pode ser descrita por $Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ para o carregamento, e $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ para a descarga, onde Q_0 é a carga inicial, R é a resistência, e C é a capacitância. Isso ajuda a entender o comportamento de circuitos em dispositivos eletrônicos, como temporizadores e filtros.

Esses exemplos demonstram como a função exponencial é fundamental para modelar processos de crescimento e decaimento em diversas disciplinas, refletindo sua ampla aplicabilidade em situações do mundo real.

Apresentadas algumas das aplicações da função exponencial, voltemos para aquela que é o objeto de estudo e vejamos alguns exemplos de problemas em que podemos aplicar a fórmula de juros compostos. Na resolução desses exemplos e dos futuros exercícios os alunos são incentivados a usar a calculadora.

Exemplo 1: Calcule os juros gerados por um capital de R$5000,00 aplicado à taxa de juros compostos de 2% a.m. durante um semestre.

$$M_n = C(1+i)^n$$

$$M_6 = ?$$

$$C = 5000$$

$$i = 2\%\ a.m.$$

$$n = 6$$

$$M_6 = 5000(1+0{,}02)^6$$

$$M_6 = 5000(1{,}02)^6$$

$$M_6 = 5630{,}81$$

Visto que $M = C + J$, temos que os juros obtidos dessa aplicação foram R$630,81.

Exemplo 2: A fim de pagar uma dívida de R$9000,00 daqui a um ano, qual deve ser o valor aplicado hoje num investimento que rende 5% ao quadrimestre (a.q.)?

$$M_n = C(1+i)^n$$

$$M = 9000$$

$$C = ?$$

$$i = 5\%\ a.q.$$

$$n = \frac{12}{4} = 3$$

$$9000 = C(1 + 0{,}05)^3$$

$$9000 = C(1{,}05)^3$$

$$C = \frac{9000}{(1{,}05)^3} = 7774{,}54$$

Portanto, para saldar a dívida no prazo proposto é necessário aplicar hoje R$7774,54.

Os dois exemplos a seguir aplicam conceitos de radiciação e logaritmos e, portanto, deve ser avaliado a real necessidade de apresenta-los a alunos do EJA.

Exemplo 3: O capital de R$800,00 é aplicado a uma taxa semestral, gerando um montante de R$900,41 após dois anos. Calcule a taxa dessa aplicação financeira.

$$M_n = C(1 + i)^n$$

$$M = 900{,}41$$

$$C = 800$$

$$i = ?$$

$$n = \frac{24}{6} = 4$$

$$900{,}41 = 800(1 + i)^4$$

$$900{,}41 = 800(1 + i)^4$$

$$(1 + i)^4 = \frac{900{,}41}{800}$$

$$\sqrt[4]{(1 + i)^4} = \sqrt[4]{\frac{900{,}41}{800}}$$

$$(1 + i) = 1{,}03$$

$$i = 3\%\ a.s.$$

Exemplo 4: Um investimento de R$3000,00 rendeu R$1221,30 de juros após ser aplicado à taxa de 5% ao bimestre (a.b.). Calcule o prazo dessa operação.

$$M_n = C(1+i)^n$$

$$M = 4221{,}30$$

$$C = 3000$$

$$i = 5\%\ a.b.$$

$$n = ?$$

$$4221{,}30 = 3000(1+0{,}05)^n$$

$$4221{,}30 = 3000(1{,}05)^n$$

$$(1{,}05)^n = \frac{4221{,}30}{3000}$$

Aplicando logaritmo de base 10 em ambos os membros, temos

$$\log(1{,}05)^n = \log\frac{4221{,}30}{3000}$$

$$n\log 1{,}05 = \log\frac{4221{,}30}{3000}$$

$$n = \log\frac{4221{,}30}{3000}\cdot\frac{1}{\log 1{,}05}$$

$$n = 7$$

Portando, para alcançar os juros propostos serão necessários 7 bimestres, ou seja, um ano e dois meses.

3.3 JUROS COMPOSTOS *X* JUROS SIMPLES

Uma pergunta recorrente nas aulas de matemática financeira é como saber quando usar juros simples e quando usar juros compostos. Uma vez que os alunos aprendem as fórmulas e como aplicar cada uma, eles apresentam dúvidas sobra qual modalidade de juros cada problema envolve. Normalmente o professor indica que as próprias questões apresentam qual modalidade deve ser usada. Isso é simples e funciona para todas as questões dos livros didáticos. Uma questão ainda maior e mais importante seria como discernir quando usar juros simples e juros compostos no mundo real.

A atividade a seguir visa esclarecer aos alunos do EJA como funcionam na prática os juros simples e compostos. Como introdução, pode ser solicitado aos alunos que levem um boleto de cobrança de internet ou outro tipo de fatura de compra ou serviço; fatura de cartão de crédito não serve.

Figura 1 - Boleto genérico

BANCO LEGAL S.A. | 5000-7 | 5000-7.341254.66691.0122365.5400.409070.7000000

AGÊNCIA RECEBEDORA
Pagável em qualquer agência bancária até a data do vencimento

VENCIMENTO
01/12/2012

CEDENTE
BANCO LEGAL S.A.

CÓDIGO DO CEDENTE
5000-7 1234567890

Documento	N.º do documento	Espécie	Aceite	Processamento	Nosso n.º
25/11/2011	000123000	FAT	N	25/11/2011	06/0669610257

USO BANCO	CIP	CARTEIRA	ESPÉCIE	QUANTIDADE	VALOR	(*) VALOR DO DOCUMENTO
	000	06	R$	06	1.215,00	R$ 1.215,00

INSTRUÇÕES (TEXTO DE RESPONSABILIDADE DO CEDENTE)

(*) OUTROS ACRÉSCIMOS

APÓS O VENCIMENTO COBRAR MULTA DE 2% MAIS
JUROS MORATÓRIOS DE 0,05% AO DIA
NÃO RECEBER APÓS 30 DIAS DO VENCIMENTO

(*) TOTAL COBRADO

SACADO
ENÉZIMO CARLOS DA SILVA PRIMEIRO
RUA ROBERTO OBINAR 141 – V. GANDI - SP

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/4575087.

Além da leitura das informações da cobrança, vamos chamar a atenção dos alunos para o prazo máximo de cobrança. Conforme a imagem abaixo, é comum nos boletos vir a informação com dizeres “Não receber após 30 dias do vencimento.”. Essa informação é uma dica preciosa para auxiliar os alunos a compreender a aplicação prática dos juros simples e compostos. A pergunta que surge é: Por que um boleto não aceita pagamento após o trigésimo dia de vencimento?

Para responder essa pergunta, vamos retomar o problema utilizado na comparação entre o rendimento dos juros simples e dos juros compostos: considere um empréstimo R$100,00 a juros de 10% a.m. para uma pessoa. Qual será o montante da dívida ao longo do tempo nos esquemas de juros simples e de juros compostos? Dessa vez, para responder a pergunta não será utilizado tabela, mas sim a construção de gráfico. A ferramenta proposta para traçar os gráficos é o GeoGebra.

Esse recurso GeoGebra é um software educativo que combina geometria, álgebra e cálculo, oferecendo uma plataforma interativa para aprender e ensinar matemática. Criado em 2001 por Markus Hohenwarter, o GeoGebra começou como um projeto de doutorado na Universidade de Salzburgo, na Áustria. Desde então, evoluiu para se tornar uma ferramenta amplamente utilizada em escolas e universidades ao redor do mundo, disponibilizada em mais de 25 idiomas. O GeoGebra é um software de código aberto, o que significa que está continuamente sendo melhorado por uma comunidade global de desenvolvedores e educadores, garantindo que ele permaneça atualizado com as mais recentes inovações pedagógicas e tecnológicas.

Nas aulas de matemática, o GeoGebra é utilizado para ensinar conceitos de uma forma visual e interativa, facilitando a compreensão dos alunos. Por exemplo, professores podem usar o software para demonstrar teoremas geométricos, explorar funções algébricas e realizar cálculos complexos em tempo real. Além disso, o GeoGebra permite aos alunos experimentar com os conceitos matemáticos, manipulando figuras geométricas e observando os efeitos das mudanças em tempo real. Esta abordagem interativa ajuda a promover um aprendizado ativo e aprofundado, tornando a matemática mais acessível e interessante para os alunos.

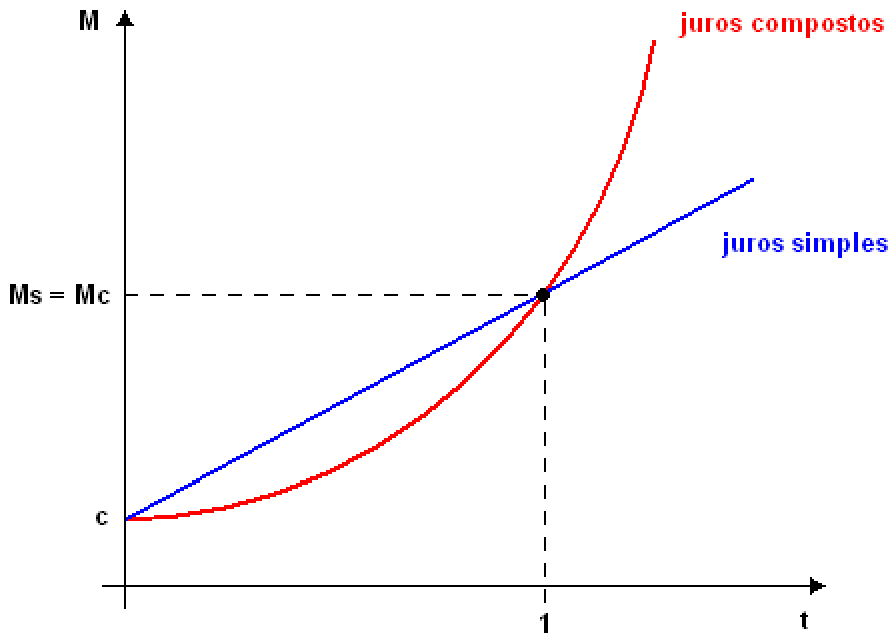
Para a construção dos gráficos no GeoGebra é preciso lembrar aos alunos que nas duas modalidades de juros as informações de taxa e capital inicial são constantes enquanto que o prazo é uma variável independente e o montante é a variável dependente. Então para a comparação proposta temos as seguintes funções

Função A: Juros simples $M(n) = C(1 + i \cdot n)$

Função B: Juros compostos $M(n) = C(1 + i)^n$

Como resultado da comparação das duas funções no Geogebra e utilizando a ferramenta zoom, será observado um gráfico semelhante ao obtido abaixo.

Gráfico 1 - Comparativo de juros simples e juros compostos



Fonte: Blog do Prof. Milton Araújo: Pílulas de Matemática Financeira (2)

Conforme demonstrado no gráfico acima, o regime de juros simples tem maior rentabilidade no período inferior a um mês ou 30 dias. No prazo de um mês, os regimes de juros simples e compostos se equiparam. E acima de trinta dias, o regime de juros compostos apresenta maior rentabilidade. Esse gráfico é uma forma didática de utilizar um recurso visual e ajudar os alunos do EJA a compreender quando que na prática cada modalidade de juros se aplica. É importante destacar aos alunos que a interseção observada na imagem é no primeiro período de capitalização dos juros a fim de evitar confusão na interpretação do gráfico e do entendimento esperado.

4. AMORTIZAÇÃO

Amortização é um processo financeiro que envolve a redução gradual de uma dívida através de pagamentos periódicos, que cobrem tanto os juros acumulados quanto uma parte do capital.

Historicamente, a prática da amortização remonta a tempos antigos, mas seu uso formal e matemático ganhou destaque ao longo da história econômica. O desenvolvimento de modelos matemáticos mais refinados para calcular a amortização foi crucial para o avanço da teoria econômica e financeira. Assim, a aplicação de fórmulas matemáticas para calcular a amortização impactou significativamente a gestão financeira, permitindo uma compreensão mais precisa e sistemática dos processos de pagamento de dívidas.

Atualmente, a amortização continua a desempenhar um papel fundamental nas finanças pessoais e corporativas, sendo essencial para o gerenciamento de dívidas e também para a avaliação de investimentos e planejamento financeiro estratégico.

Para os consumidores, o direito à amortização de dívidas traz diversos benefícios (Serasa, 2024). Primeiramente, ele permite que os devedores mantenham seu fluxo de caixa sob controle, evitando o pagamento de uma grande quantia de uma só vez. Ao espalhar os pagamentos ao longo do tempo, os devedores podem planejar melhor seu orçamento e garantir que outras necessidades financeiras também sejam atendidas. Além disso, a amortização regular da dívida contribui para a construção de um histórico de crédito positivo, desde que os pagamentos sejam realizados pontualmente, o que pode facilitar a obtenção de crédito futuro em condições mais favoráveis.

Outro benefício significativo da amortização de dívidas é a redução gradual da carga de juros. Como os pagamentos são estruturados para incluir tanto o principal quanto os juros, o saldo devedor diminui a cada pagamento realizado. Isso significa que, com o tempo, o valor dos juros pagos em cada parcela também diminui, resultando em uma menor quantia total de juros pagos ao longo da vida do empréstimo. Para consumidores que conseguem fazer pagamentos adicionais ao principal, o benefício é ainda maior, pois isso pode reduzir significativamente o tempo necessário para quitar a dívida e o montante total de juros pagos.

Além dos benefícios financeiros, a amortização de dívidas também pode proporcionar uma sensação de segurança e alívio emocional aos consumidores endividados (Campêlo, 2023). Saber que há um plano estruturado para a quitação da dívida pode reduzir o estresse financeiro e permitir que os devedores se concentrem em outros objetivos financeiros e pessoais. Em suma, a amortização de dívidas não só facilita a gestão das obrigações financeiras, mas também oferece uma série de vantagens que podem contribuir para a estabilidade e o bem-estar financeiro dos consumidores a longo prazo.

Apresentada a definição e o contexto de amortização e dado que a turma da Educação de Jovens e Adultos entendeu a diferença entre juros simples e compostos, onde cada um se aplica e como calcular o montante em cada caso, resta uma questão interessante: normalmente uma dívida como empréstimo pessoal ou financiamento de carro ou casa não é paga à vista, uma parcela é calculada para cada situação; então, como calcular essa parcela? E como funciona o abatimento mensal dessa dívida? O conteúdo a seguir apresenta a teoria com a demonstração da fórmula para cálculo de uma parcela de uma dívida em juros compostos, porém será dada ênfase ao entendimento prático desse assunto junto aos alunos de EJA.

4.1 CONSTRUÇÃO DE UMA TABELA DE AMORTIZAÇÃO SIMPLES

Considere a situação em que um aluno tenha tomado emprestado R$2000,00 junto a um conhecido para pagamento em cinco parcelas à taxa de 3% a.m., além disso, ficou combinado que esse aluno consegue pagar no máximo R$500,00 por mês. A essa altura é possível toda a turma já tenha o entendimento de que, passando de um mês de transação financeira, o esquema que se aplica é o de juros compostos e queira utilizar a forma correspondente; porém, como a dívida vai ser reduzida, ou amortizada, a cada mês vamos analisar gradualmente com os alunos o desenrolar dessa situação, construindo linha a linha a tabela de amortização.

Após o primeiro mês, a dívida de R$2000,00 subiu R$60,00 de juros correspondentes aos 3% mensais da transação e alcança o total de R$2060,00. Nesse mesmo mês o aluno efetua o pagamento da parcela combinada, R$500,00. Dessa forma, a dívida ao final de um mês ficou em R$1560,00.

Quadro 6 - Construção de uma tabela de amortização (1)

Mês	Saldo inicial	Juros (3%)	Amortização	Saldo devedor
1	2000,00	60,00	500,00	1560,00

Fonte: Autoria própria.

No segundo mês, o montante da dívida fica em R$1606,80 – valor correspondente ao saldo do mês anterior, R$1560,00, mais os juros remuneratórios de 3%. Neste mês, novamente é paga a parcela combinada de R$500,00, o que deixa um saldo de R$1106,80.

Quadro 7 - Construção de uma tabela de amortização (2)

Mês	Saldo inicial	Juros (3%)	Amortização	Saldo devedor
2	1560,00	46,80	500,00	1106,80

Fonte: Autoria própria.

No terceiro mês, a dívida avança novamente 3%, gerando o montante de R$1140,00. Após o pagamento da parcela com binada de R$500,00, resta ainda um saldo devedor de R$640,00.

Quadro 8 - Construção de uma tabela de amortização (3)

Mês	Saldo inicial	Juros (3%)	Amortização	Saldo devedor
3	1106,80	33,20	500,00	640,00

Fonte: Autoria própria.

Na sequência, vem o quarto mês e com ele R$19,20 de juros que correspondem a 3% sobre o saldo anterior. Então neste quarto mês o montante da dívida é de R$659,20. Feita a amortização dos R$500,00 combinados, resta ainda um saldo de R$159,20.

Quadro 9 - Construção de uma tabela de amortização (4)

Mês	**Saldo inicial**	**Juros (3%)**	**Amortização**	**Saldo devedor**
4	640,00	19,20	500,00	159,20

Fonte: Autoria própria.

Por fim, no quinto e último mês, a dívida avança mais 3%, totalizando R$163,98. Observe que nesse mês o aluno não precisará pagar o mesmo valor dos anteriores visto que a parcela máxima combinada era R$500,00. Dessa forma, o aluno pagará R$163,98 e amortizará de forma que ela se torne zero. Essa última transação que leva uma aplicação ou mesmo uma dívida ao fim, tornando o saldo zero é chamada de liquidação.

Quadro 10 - Construção de uma tabela de amortização (5)

Mês	**Saldo inicial**	**Juros (3%)**	**Amortização**	**Saldo devedor**
5	159,20	4,78	163,98	0,00

Fonte: Autoria própria.

Juntando todas as transações, temos a tabela de amortização completa:

Tabela 5 - Tabela de amortização completa

Mês	**Saldo inicial**	**Juros (3%)**	**Amortização**	**Saldo devedor**
1	2000,00	60,00	500,00	1560,00
2	1560,00	46,80	500,00	1106,80
3	1106,80	33,20	500,00	640,00
4	640,00	19,20	500,00	159,20
5	159,20	4,78	163,98	0,00

Fonte: Autoria própria.

Para fim de fixação é sugerida a seguinte atividade aos alunos:

Prevendo gastos futuros, um investidor aplica R$8000,00 em um investimento que lhe rende 2% ao mês. A partir do primeiro mês ele fará saques de R$1200 reais até liquidar esse investimento. Responda:

a) Qual o saldo desse investimento ao final de 3 meses?

b) Quanto de juros esse investimento rendeu no 4 mês?

c) Quantos saques mensais esse investidor conseguirá realizar?

d) Qual o saldo residual que o investidor sacou no último mês?

É esperado que os alunos compreendam o problema proposto e construam uma tabela semelhante a observada abaixo de forma a conseguir responder as questões.

Tabela 6 - Aplicação financeira amortizada por saques mensais

Mês	Saldo inicial	Juros (2%)	Saque	Saldo final
1	8000,00	160,00	1500,00	6660,00
2	6660,00	133,20	1500,00	5293,20
3	5293,20	105,86	1500,00	3899,06
4	3899,06	77,98	1500,00	2477,05
5	2477,05	49,54	1500,00	1026,59
6	1026,59	20,53	1047,12	0,00

Fonte: Autoria própria.

A atividade anterior demonstra que a tabela de amortização pode ser utilizada tanto para dívidas quanto para investimentos. Além de fixar o algoritmo do cálculo, essa atividade contribui para a leitura e interpretação de tabelas ao passo que o aluno terá que identificar qual a linha e a coluna da informação requerida.

Após a realização das atividades anteriores, um ponto a ser levantado é que normalmente o valor da parcela de um empréstimo pessoal é fixo e todas as parcelas são iguais, o que não foi observado na primeira atividade a qual demonstrou como montar uma tabela de amortização. De fato, o modelo apresentado e desenvolvido é bem útil, mas na prática existem formas padronizadas de calcular a parcela amortizada. Vejamos as mais comuns.

4.2 TIPOS DE AMORTIZAÇÃO EM FINANÇAS

Amortização é o processo fundamental no qual uma dívida é gradualmente reduzida ao longo do tempo por meio de pagamentos periódicos que incluem tanto juros quanto a amortização do principal. Existem diferentes métodos de amortização, cada um com suas particularidades que se adequam às necessidades e preferências dos devedores e das instituições financeiras. Neste texto, exploraremos os principais tipos de amortização: Sistema PRICE, Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Misto (SAM), Sistema Americano de Amortização (SAA) e Sistema de Pagamento Variável.

4.2.1 Sistema PRICE

O Sistema PRICE, também conhecido como Sistema Francês de Amortização, recebeu esse nome em homenagem ao seu criador, o francês Richard Price. Este sistema de amortização é amplamente utilizado em financiamentos imobiliários e empréstimos pessoais de longo prazo (InfoMoney, 2024). Neste sistema, as parcelas são fixas ao longo do período do empréstimo, porém a composição entre juros e amortização varia ao longo do tempo. No início do contrato, a maior parte da parcela é destinada ao pagamento de juros, enquanto a parte restante é usada para amortizar o principal. Conforme o tempo passa, a proporção destinada à amortização aumenta, enquanto a parte de juros diminui. Um exemplo prático seria um financiamento habitacional de 30 anos, no qual as prestações mensais permanecem constantes, mas a porcentagem do pagamento destinada à amortização aumenta progressivamente ao longo dos anos.

4.2.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

No Sistema de Amortização Constante (SAC), as parcelas consistem em uma combinação fixa de amortização do principal e juros calculados sobre o saldo devedor restante (InfoMoney, 2024). Diferentemente do Sistema PRICE, onde a parcela de amortização aumenta gradualmente, no SAC, ela permanece constante durante todo o período de pagamento. Isso significa que, ao longo do tempo, a parcela destinada ao pagamento dos juros diminui à medida que o saldo devedor é reduzido. Por isso, quem opta por um financiamento pelo Sistema de Amortização Constante acaba pagando menos juros do que no Sistema Price. Um exemplo típico do SAC seria um empréstimo de curto prazo, como uma linha de crédito empresarial, onde a previsibilidade das parcelas e a rápida redução do saldo devedor são fundamentais.

4.2.3 Sistema de Amortização Misto (SAM)

O Sistema de Amortização Misto (SAM) combina características do Sistema PRICE e do SAC. Neste método, a amortização é constante ao longo do tempo, mas a parte de juros pode variar de acordo com o saldo devedor restante (InfoMoney, 2024). Isso proporciona certa flexibilidade aos devedores, pois a parcela mensal é mais previsível em termos de amortização, enquanto os juros podem ser ajustados conforme as condições do mercado ou contratuais. Normalmente, utiliza-se o formato misto nos financiamentos imobiliários que seguem as regras do Sistema Financeiro Habitacional (SFH). Isso porque ele combina a possibilidade de parcelas menores do que as do SAC com juros menores do que os do sistema PRICE.

4.2.4 Sistema Americano de Amortização (SAA)

O Sistema Americano de Amortização (SAA) difere dos métodos tradicionais ao permitir que o devedor pague apenas os juros sobre o saldo devedor durante um período inicial do contrato, sem amortização do principal (InfoMoney, 2024). Essa modalidade é comumente utilizada em linhas de crédito rotativo ou empréstimos comerciais de curto prazo, onde a liquidez imediata é prioritária para o devedor. Esse tipo de amortização não é tão comum no mercado brasileiro. De forma geral, é utilizado em casos específicos, quando o devedor tem a previsão de receber uma determinada quantia de dinheiro em certo prazo.

4.2.5 Sistema de Pagamento Variável

O Sistema de Pagamento Variável é menos convencional e permite ajustes nas parcelas de amortização e juros de acordo com determinados critérios acordados entre o devedor e a instituição financeira. Esses critérios podem incluir variações na taxa de juros, desempenho financeiro do devedor ou condições de mercado (InfoMoney, 2024). Este método oferece flexibilidade significativa aos devedores para adaptar seus pagamentos conforme suas capacidades financeiras e necessidades específicas. Um dos exemplos mais comuns de pagamento variável é o rotativo do cartão de crédito. Dependendo de cada instituição financeira, é estabelecido um valor mínimo para a fatura, que já contempla os juros do mês em questão.

Em resumo, a escolha do método de amortização adequado depende das circunstâncias individuais de cada devedor, incluindo o tipo de empréstimo, a capacidade financeira e as preferências de gestão de risco. Cada sistema apresentado possui suas vantagens e limitações específicas, sendo crucial uma análise detalhada antes de optar por um contrato de financiamento ou empréstimo.

Voltando à nossa turma de EJA, vamos focar nos cálculos e construção de tabela de amortização das duas principais modalidades - o sistema SAC e o sistema PRICE.

4.3 TABELA DE AMORTIZAÇÃO NO SISTEMA SAC

No Sistema de Amortização Constante (SAC), a fórmula para calcular a amortização de cada período é direta e baseia-se na distribuição constante do pagamento do principal ao longo da duração do empréstimo. Aqui está a fórmula básica utilizada:

$$A = \frac{D_0}{n}$$

Onde:

- A é o valor periódico da amortização,

- D_0 é o inicial do financiamento (principal),
- n é a quantidade total de períodos de amortização.

No SAC, o valor da amortização em cada período é constante e é calculado dividindo-se o valor do principal pelo número total de períodos de amortização. Isso significa que a mesma quantia do principal é amortizada a cada período, o que resulta em uma redução linear do saldo devedor ao longo do tempo. Ou seja, as prestações do Sistema SAC são sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, cujo valor de cada prestação é composto por uma parcela de juros e outra de amortização constante do capital.

Por exemplo, se um empréstimo é de R$ 150.000,00 com um prazo de 10 anos (ou 120 meses), a amortização mensal seria calculada da seguinte forma:

$$A = \frac{D_0}{n}$$

$$A = \frac{150000}{120}$$

Portanto, a amortização mensal neste caso seria de R$ 1250,00. Ao longo dos 120 meses, esse valor é constante, enquanto os juros são calculados sobre o saldo devedor restante a cada período. Essa constância na amortização mensal é uma das características distintivas do Sistema de Amortização Constante (SAC), proporcionando uma previsibilidade aos devedores em relação ao pagamento do principal ao longo do tempo.

Vejamos um exemplo para aplicação da fórmula e construção da tabela de amortização SAC:

Um empréstimo bancário para empresa, capital de giro, de R$30000,00 será pago no sistema de amortização constante em seis meses. Dada a taxa de juros de 4% a.m., construa a tabela de amortização desse empréstimo.

Façamos a construção linha a linha dessa tabela. O empréstimo será amortizado em seis meses, então o valor amortizado a cada mês será

$$A = \frac{D_0}{n}$$

$$A = \frac{30000}{6} = 5000$$

No primeiro mês, temos que o percentual de 4% gerou R$1200,00 de juros. De forma que o pagamento ao final do primeiro mês será a amortização de R$5000,00 mais os juros do período, gerando um pagamento de R$6200,00 e deixando um saldo de R$25000,00.

Quadro 11 - Construção de uma tabela de amortização SAC (1)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final
1	30000,00	1200,00	5000,00	6200,00	25000,00

Fonte: Autoria própria.

No mês subsequente, o saldo anterior gera juros de R$1000,00 que somados a amortização de R$5000,00 gera a parcela de R$6000,00. Após o pagamento mensal, resta um saldo de R$20000,00.

Quadro 12 - Construção de uma tabela de amortização SAC (2)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final
2	25000,00	1000,00	5000,00	6000,00	20000,00

Fonte: Autoria própria.

Após o terceiro mês, o saldo de R$20000,00 remunerado a 4% rende R$800,00 de juros que somados à amortização mensal, dá uma parcela de R$5800,00. O saldo ao final do mês é de R$15000,00.

Quadro 13 - Construção de uma tabela de amortização SAC (3)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final

3	20000,00	800,00	5000,00	5800,00	15000,00

Fonte: Autoria própria.

No quarto mês, o saldo anterior gera R$600,00 de juros que somados à amortização mensal de R$5000,00, totalizam a parcela de R$5600,00. Dessa vez, resta o saldo de R$10000,00.

Quadro 14 - Construção de uma tabela de amortização SAC (4)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final
4	15000,00	600,00	5000,00	5600,00	10000,00

Fonte: Autoria própria.

Ao final do quinto mês, o saldo anterior de R$10000,00 à taxa de 4% gera R$400,00 de juros. De forma que a parcela amortizada nesse mês será R$5400,00, deixando um saldo final de R$5000,00.

Quadro 15 - Construção de uma tabela de amortização SAC (5)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final
5	10000,00	400,00	5000,00	5400,00	5000,00

Fonte: Autoria própria.

Por fim, no sexto mês, o saldo residual de R$5000,00 gera R$200,00 de juros, sendo a soma dos dois valores a parcela final que liquida a operação de crédito.

Quadro 16 - Construção de uma tabela de amortização SAC (6)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final
6	5000,00	200,00	5000,00	5200,00	0,00

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, podemos construir a tabela de amortização completa desse problema:

Tabela 7 - Tabela de amortização SAC completa

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Amortização	Parcela	Saldo final
1	30000,00	1200,00	5000,00	6200,00	25000,00
2	25000,00	1000,00	5000,00	6000,00	20000,00
3	20000,00	800,00	5000,00	5800,00	15000,00
4	15000,00	600,00	5000,00	5600,00	10000,00
5	10000,00	400,00	5000,00	5400,00	5000,00
6	5000,00	200,00	5000,00	5200,00	0,00
	Total	4200,00	30000,00	34200,00	-

Fonte: Autoria própria.

Observe que ao longo dessa operação de crédito foram pagos R$34200,00, sendo o valor de R$4200,00 correspondentes aos juros gerados.

Outra observação a ser feita, dessa vez junto com os alunos, é como o valor da parcela a ser paga se desenvolve. Uma análise atenta da quinta coluna remeterá os alunos do EJA a uma sequência numérica que será identificada como uma progressão aritmética (PA).

A seguir, temos uma demonstração algébrica do motivo dessa sequência ser uma PA.

Dado o capital inicial D_0 e a quantidade de parcelas n, calculamos o valor a amortizar A.

$$A = \frac{D_0}{n}$$

Na primeira amortização o valor a ser pago será

$$P_1 = A + J_1$$

Onde,

$$J_1 = D_0 \cdot i$$

Então,

$$P_1 = A + D_0 \cdot i$$

Por sua vez, D_1 o valor da dívida após a primeira amortização será

$$D_1 = D_0 - A$$

Na segunda amortização, o valor a ser pago será

$$P_2 = A + J_2$$

Onde,

$$J_2 = D_1 \cdot i$$

$$J_2 = (D_0 - A) \cdot i$$

E, portanto,

$$P_2 = A + J_2 \rightarrow P_2 = A + (D_0 - A) \cdot i$$

$$P_2 = D_0 \cdot i + A(1 - i)$$

Na terceira amortização, o valor a ser pago será

$$P_3 = A + J_3$$

Onde,

$$J_3 = D_2 \cdot i$$

$$J_3 = (D_2 - A) \cdot i = (D_0 - 2A) \cdot i$$

E, portanto,

$$P_3 = A + J_3 \rightarrow P_3 = A + (D_0 - 2A) \cdot i$$

$$P_3 = D_0 \cdot i + A(1 - 2i)$$

Na quarta amortização, o valor a ser pago será

$$P_4 = A + J_4$$

Onde,

$$J_4 = D_3 \cdot i$$

$$J_4 = (D_3 - A) \cdot i = (D_0 - 3A) \cdot i$$

E, portanto,

$$P_4 = A + J_4 \rightarrow P_4 = A + (D_0 - 3A) \cdot i$$

$$P_4 = D_0 \cdot i + A(1 - 3i)$$

Como observado até aqui, os juros em cada período de amortização se comportam da seguinte forma

$$J_1 = D_0 \cdot i$$

$$J_2 = (D_0 - A) \cdot i = D_0 \cdot i - A \cdot i$$

$$J_3 = (D_0 - 2A) \cdot i = D_0 \cdot i - 2A \cdot i$$

$$J_4 = (D_0 - 3A) \cdot i = D_0 \cdot i - 3A \cdot i$$

Na enésima amortização, teremos

$$J_4 = D_0 \cdot i - (n - 1)A \cdot i$$

Assim, observamos que os juros se comportam como uma PA decrescente onde o primeiro termo é $D_0 \cdot i$, e a razão da PA é $-A \cdot i$.

Além disso, visto que $P_n = A + J_n$, as parcelas pagas mensalmente também formam uma PA decrescente de mesma razão.

4.4 TABELA DE AMORTIZAÇÃO NO SISTEMA PRICE

O Sistema Price também é conhecido como **Sistema Francês de Amortização** (SAF) e é muito utilizado em todos os setores financeiros, principalmente nas compras a prazo de bens de consumo, através do crédito direto ao consumidor. No Sistema PRICE, as prestações são iguais e sucessivas, onde cada prestação é composta por duas parcelas: juros e amortização do capital; cujo cálculo baseia-se numa série uniforme de pagamentos.

$$A_n = P - J_n$$

Onde:

- A_n é o valor da amortização no período n,
- P é o valor da prestação mensal fixa,
- J_n é o valor dos juros pagos no período n.

Para calcular a prestação mensal P, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$P = D_0 \frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}$$

Onde:

- D_0 é o valor do financiamento inicial (principal),
- i é a taxa de juros mensal,
- n é a quantidade total de períodos de amortização.

Após calcular a prestação mensal P, a amortização A_n é obtida subtraindo-se os juros J_n do valor da prestação P. Os juros J_n são calculados sobre o saldo devedor restante no início de cada período:

$$A_n = P - J_n$$

$$J_n = D_{n-1} \cdot i$$

Para aplicar a fórmula apresentada tomemos como exemplo um problema similar ao do tópico anterior: Um empréstimo bancário para empresa, capital de giro, de R$30000,00 será pago no sistema PRICE em seis meses. Dada a taxa de juros de 4% a.m., construa a tabela de amortização desse empréstimo.

Nesse problema, temos os seguintes dados

$$D_0 = 30000$$

$$i = 4\%$$

$$n = 6$$

Aplicando a fórmula para o cálculo da parcela, temos

$$P = D_0 \frac{(1+i)^6 . i}{(1+i)^6 - 1}$$

$$P = 30000 \frac{(1+0{,}04)^6 . 0{,}04}{(1+0{,}04)^6 - 1} = 5722{,}857$$

Considerando duas casas decimais, a parcela utilizada será R$5722,86. Dessa forma, ao final do primeiro mês, o capital emprestado de R$30000,00 gerou 4% de juros equivalentes a R$1200,00. Ou seja, no pagamento da parcela $A_n = P - J_n$, R$4522,86 foi amortização.

Quadro 17 - Construção de uma tabela de amortização PRICE (1)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
1	30000,00	1200,00	5722,86	4522,86	25477,14

Fonte: Autoria própria.

No segundo mês, o saldo anterior de R$25477,14 rende R$1019,09 de juros. Dada a parcela fixa de pagamento de R$5722,86, temos que a amortização nesse mês foi de R$4703,77. Ao final do período, restou um saldo de R$20773,37.

Quadro 18 - Construção de uma tabela de amortização PRICE (2)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
2	25477,14	1019,09	5722,86	4703,77	20773,37

Fonte: Autoria própria.

No mês subsequente, o saldo anterior gera juros de R$830,93. Dessa forma, a amortização do terceiro mês foi de R$4891,93 e o saldo final de R$15881,44.

Quadro 19 - Construção de uma tabela de amortização PRICE (3)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
3	20773,37	830,93	5722,86	4891,93	15881,44

Fonte: Autoria própria.

No quarto mês, o saldo anterior gera R$635,26 de juros que, ao subtrairmos da parcela fixa de R$5722,86, obtemos R$5087,60 de amortização.

Quadro 20 - Construção de uma tabela de amortização PRICE (4)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
4	15881,44	635,26	5722,86	5087,60	10793,84

Fonte: Autoria própria.

Ao final do quinto mês, o saldo anterior de R$10793,84 à taxa de 4% gera R$431,75 de juros. Assim, neste mês foram amortizados R$5291,11.

Quadro 21 - Construção de uma tabela de amortização PRICE (5)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
5	10793,84	431,75	5722,86	5291,11	5502,73

Fonte: Autoria própria.

Por fim, no sexto mês, o saldo residual de R$5502,73 gera R$220,11 de juros. Somados, temos R$5722,84 de parcela final que liquidará a operação de crédito.

Quadro 22 - Construção de uma tabela de amortização PRICE (6)

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
6	5502,73	220,11	5722,84	5502,73	0,00

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, podemos construir a tabela de amortização PRICE completa desse problema:

Tabela 8 - Tabela de amortização PRICE completa

Mês	Saldo inicial	Juros (4%)	Parcela	Amortização	Saldo final
1	30000,00	1200,00	5722,86	4522,86	25477,14
2	25477,14	1019,09	5722,86	4703,77	20773,37
3	20773,37	830,93	5722,86	4891,93	15881,44
4	15881,44	635,26	5722,86	5087,60	10793,84
5	10793,84	431,75	5722,86	5291,11	5502,73
6	5502,73	220,11	5722,84	5502,73	0,00
Total		4337,14	34337,14	30000,00	-

Fonte: Autoria própria.

Observe que ao longo dessa operação de crédito foram pagos R$34337,14, sendo o valor de R$4337,14 correspondentes aos juros gerados.

Através do mesmo problema aplicando os dois sistemas de amortização, PRICE e SAC, fica comprovado o que foi afirmado anteriormente: do ponto de vista do tomador de crédito, o sistema SAC é mais vantajoso pois serão pagos menos juros.

4.4.1 Demonstração da fórmula para o cálculo da parcela no sistema PRICE

Segue uma demonstração que pode ser apresentada de forma dialogada para alunos do EJA de forma a compreender a origem da fórmula para o cálculo da parcela no Sistema de Amortização Francês, ou Sistema PRICE.

Considere uma operação que será paga em n parcelas P de mesmo valor no sistema PRICE, sendo que, nessa operação, a taxa aplicada é a taxa i com remuneração mensal. Caso o cliente queira antecipar a primeira parcela, ele não precisaria pagar o valor P, pois P é composto de uma parcela de amortização mais juros; porém, o cliente não vai precisar pagar a taxa de juros desse período devido à antecipação da parcela. Digamos que o valor que ele vai pagar é o valor atual, a, e tendo em vista que está antecipando apenas o primeiro pagamento, esse valor será chamado de a_1.

Observe que pela fórmula dos juros simples, lembrando que estamos exatamente no primeiro mês, e aplicando os termos à nossa operação os quais sejam P é o montante após um mês, a_1 é o valor atual ou o capital, a taxa é i e o prazo é 1 mês.

$$M = C \cdot (1 + in) \rightarrow P = a_1 \cdot (1 + i \cdot 1)$$

Portanto, o valor atual da primeira parcela antecipada seria

$$a_1 = \frac{P}{(1 + i)}$$

Em seguida, considere que o cliente queira também antecipar a segunda parcela, pagando apenas o valor atual dela sem os juros, ou seja, a_2. Nesse caso, P ainda é o montante, a_2 é o valor atual ou o capital, a taxa é i e o prazo é 2 meses. Tendo em vista que o prazo superou um mês, aplicaremos a fórmula de juros compostos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n \rightarrow P = a_2 \cdot (1 + i)^2$$

Portanto, o valor atual da segunda parcela antecipada seria

$$a_2 = \frac{P}{(1 + i)^2}$$

Para facilitar a compreensão dos alunos, façamos mais uma iteração. Para antecipar a terceira parcela, pagando apenas o valor atual dela sem os juros, ou seja, a_2, temos que P ainda é o montante, a_3 é o valor atual ou o capital, a taxa é i e o prazo é 3 meses. Aplicando a fórmula de juros compostos:

$$M_n = C \cdot (1+i)^n \rightarrow P = a_3 \cdot (1+i)^3$$

Portanto, o valor atual da segunda parcela antecipada seria

$$a_3 = \frac{P}{(1+i)^3}$$

Em seguida, colocamos as três primeiras parcelas antecipadas lado a lado e pedimos aos alunos para verificar se enxergam algum padrão e se é possível deduzir qual seria uma fórmula para calcular o valor da quarta e da quinta parcela antecipada.

$$(a_1, a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) = \left(\frac{P}{(1+i)}, \frac{P}{(1+i)^2}, \frac{P}{(1+i)^3}, -, -\right)$$

Essa comparação lado a lado vai auxiliar os alunos a visualizar e compreender que o primeiro termo tem expoente um no denominador, o segundo termo tem expoente dois no denominador e o terceiro termo tem expoente três no denominador; levando os alunos a arriscar que a posição do termo é equivalente ao denominador observado no denominador enquanto que os demais fatores são constantes. Dessa forma os dois próximos termos serão:

$$a_4 = \frac{P}{(1+i)^4}$$

$$a_5 = \frac{P}{(1+i)^5}$$

Para a próxima observação, podemos completar a sequência e pedir aos alunos para escrever como seria o termo geral, a_n, dessa sequência numérica.

$$\left(\frac{P}{(1+i)}, \frac{P}{(1+i)^2}, \frac{P}{(1+i)^3}, \frac{P}{(1+i)^4}, \frac{P}{(1+i)^5}, \dots,\ a_n\right)$$

Espera-se que os alunos apliquem o expoente n para o numerador do termo geral

$$a_n = \frac{P}{(1+i)^n}$$

Completando a sequência numérica

$$\left(\frac{P}{(1+i)}, \frac{P}{(1+i)^2}, \frac{P}{(1+i)^3}, \frac{P}{(1+i)^4}, \frac{P}{(1+i)^5}, \dots, \frac{P}{(1+i)^n}\right)$$

O passo seguinte na construção juntamente com os alunos do EJA da fórmula desejada é pedir que, analisando a sequência, digam se ela parece com alguma sequência já estudada. Talvez nesse ponto seja necessário dar a dica de que existe um valor multiplicativo constante para avançar de um termo da sequência para o próximo.

$$fator\ multiplicativo = \frac{1}{(1+i)}$$

De forma que

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

$$a_4 = a_3 \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

$$a_5 = a_4 \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

A conclusão é que os termos dessa sequência numérica formam uma Progressão Geométrica, PG.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde

$$a_1 = \frac{P}{(1+i)}$$

$$q = \frac{1}{(1+i)}$$

Então,

$$a_n = \frac{P}{(1+i)} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)}\right]^{n-1} = \frac{P}{(1+i)^n}$$

Além disso, a série numérica formada por esses termos – a soma de cada uma das parcelas trazidas ao valor presente – equivale ao valor inicial da operação, ou seja, o capital que foi tomado ou emprestado.

$$D_0 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$D_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}} + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Quando a série é definida como a soma dos termo de uma PG, podemos utilizar a fórmula para a soma dos termos da progressão geométrica para calcular o valor de $D_0 = S_n$.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Aplicando a fórmula, temos

$$D_0 = \frac{\frac{P}{(1+i)} \cdot \left(\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n - 1\right)}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

Aplicando mínimo múltiplo comum no numerador, temos

$$D_0 = \frac{\frac{P}{(1+i)} \cdot \left(\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n - 1\right)}{\frac{1}{(1+i)} - \frac{(1+i)}{(1+i)}}$$

$$D_0 = \frac{\frac{P}{(1+i)} \cdot \left(\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n - 1\right)}{\frac{1-(1+i)}{(1+i)}} = \frac{\frac{P}{(1+i)} \cdot \left(\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n - 1\right)}{\frac{-i}{(1+i)}}$$

Eliminando o fator comum no numerado e no denominador, $n \neq 0$, temos

$$D_0 = \frac{P \cdot \left(\left[\frac{1}{(1+i)}\right]^n - 1\right)}{-i}$$

Aplicando mínimo múltiplo comum no numerador, temos

$$D_0 = \frac{P \cdot \left(\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right)}{i}$$

$$D_0 = \frac{P \cdot \left(\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right)}{-i} = \frac{P \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right)}{i}$$

Isolando P, obtemos

$$P = \frac{D_0 \cdot i}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}$$

Organizando o segundo membro chegamos na fórmula desejada

$$P = \frac{D_0 \cdot i}{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}} = \frac{D_0 \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = D_0 \frac{(1+i)^n . i}{(1+i)^n - 1}$$

A demonstração acima tem o componente didático de utilizar a fórmula para a soma dos termos da PG em vez de aplicar símbolos de somatória. De acordo com o conhecimento que o professor da turma de EJA tem da capacidade de acompanhar o desenvolvimento, é possível fazer essa demonstração com o objetivo de esclarecer que as fórmulas, seja na matemática, física ou outras matérias, tem o caminho e método para se chegar nelas. Portanto, longe de ser algo que surgiu do nada no quadro apenas para ser decorado, a fórmula para o cálculo da parcela pode ser alcançada em sala de aula, mesmo numa turma de EJA, trazendo bons benefícios aos alunos.

5 APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA A FAVOR DO ALUNO

Conforme observado no capítulo sobre amortizações, é possível antecipar parcelas de um crédito e nesse caso o consumidor ou cliente paga apenas o principal da dívida relativo à parcela antecipada. Solicitar a amortização de dívidas no banco é um processo relativamente simples que pode ser iniciado com uma visita à agência bancária ou pelo contato com o serviço de atendimento ao cliente. O cliente deve se informar sobre as opções de amortização oferecidas pelo banco ou financeira e reunir toda a documentação necessária, como contratos de empréstimo, extratos bancários e comprovantes de renda. Em seguida, é necessário apresentar um pedido formal de amortização, especificando a quantia que deseja amortizar e a frequência dos pagamentos adicionais ao principal. O banco então avaliará a solicitação, considerando as políticas internas e a capacidade financeira do cliente, e fornecerá um plano de amortização detalhado, incluindo as novas condições de pagamento e os impactos nos juros futuros. Em alguns casos, pode ser necessário renegociar os termos do empréstimo para acomodar o novo cronograma de pagamentos.

Além de ser benéfico, antecipar parcelas de uma operação de crédito também é direito do cidadão. O artigo 52 do Código de Defesa do Consumidor (CDC – Lei n. 8078 de 11 de setembro de 1990) diz: “É assegurado ao consumidor a liquidação antecipada do débito, total ou parcialmente, mediante redução proporcional dos juros e demais acréscimos”.

E no estado do Espírito Santo há uma lei que obriga as instituições financeiras a afixar cartaz informando ao consumidor sobre o seu direito de antecipar parcelas. A Lei Nº 11.434, de 14 de outubro de 2021 versa no seu primeiro artigo:

> **Art. 1º** As instituições financeiras sediadas no Estado do Espírito Santo, incluídos os estabelecimentos que operem com financiamento, crédito, empréstimo ou outras operações financeiras do gênero, ficam obrigadas a afixar, em local de maior circulação de pessoas e de fácil visibilidade, cartaz ou aviso informando os consumidores do direito à liquidação antecipada de débito, total ou parcial, com redução proporcional dos juros e demais acréscimos, na forma do § 2º do art. 52 da Lei Federal nº 8.078, de 11 de setembro de 1990 - Código de Proteção e Defesa do Consumidor.

5.1 OPÇÕES DE AMORTIZAÇÃO DE DÍVIDAS

A antecipação de parcelas é uma estratégia usada por devedores para reduzir o montante total de juros pagos ou quitar a dívida mais rapidamente. Ao exercer seu direito, as principais opções para antecipação de parcelas apresentadas ao cliente são a antecipação de parcelas futuras e a redução do prazo do financiamento.

5.1.1 Amortização pelo Valor da Prestação

Nesta opção, o devedor antecipa um valor que será utilizado para reduzir o saldo devedor, resultando na diminuição do valor das parcelas mensais, mas mantendo o prazo do financiamento original. Neste caso, os pagamentos antecipados são aplicados diretamente ao saldo devedor, reduzindo assim a base sobre a qual os juros são calculados. As vantagens são: redução no valor total dos juros a serem pagos ao longo do financiamento; flexibilidade para antecipar parcelas de acordo com a disponibilidade financeira. A desvantagem é que o prazo do financiamento permanece o mesmo, o que pode resultar em um pagamento prolongado.

5.1.2 Amortização pelo Prazo

Nesta opção, o devedor antecipa um valor que será utilizado para reduzir o saldo devedor e, consequentemente, encurtar o prazo total do financiamento. As parcelas mensais permanecem com o mesmo valor, mas o número total de parcelas diminui. As vantagens são: redução significativa dos juros totais pagos, já que o tempo de financiamento é encurtado; quitação mais rápida da dívida, oferecendo maior liberdade financeira a curto prazo. Por outro lado, existe a desvantagem de exigir uma maior capacidade de pagamento a curto prazo, pois os pagamentos mensais permanecem os mesmos.

A escolha entre amortização pelo valor da prestação e amortização pelo prazo depende da situação financeira e dos objetivos do devedor:

- **Amortização pelo Valor da Prestação:** Ideal para quem deseja reduzir os gastos mensais e obter um alívio imediato no orçamento. É uma opção mais flexível, permitindo ao devedor ajustar os pagamentos de acordo com sua capacidade financeira atual.

- **Amortização pelo Prazo:** Mais adequada para quem tem uma renda estável e deseja quitar a dívida mais rapidamente, maximizando a economia em juros. Essa opção é vantajosa para aqueles que podem arcar com pagamentos mensais constantes e buscam a liberdade financeira mais cedo.

Vejamos dois exemplos práticos, um de amortização extraordinária diluída em parcelas e o outro de amortização extraordinária com redução de prazo.

Um trabalhador financia parte da compra do seu automóvel, ficando a operação com saldo a pagar de R$40000,00 em sessenta parcelas fixas de R$ 961,71; a taxa informada é de 1,29% a.m. A tabela de amortização do financiamento foi fornecida ao cliente.

Tabela 9 - Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 40.000,00
1	R$ 961,71	R$ 516,00	R$ 445,71	R$ 39.554,29
2	R$ 961,71	R$ 510,25	R$ 451,45	R$ 39.102,84
3	R$ 961,71	R$ 504,43	R$ 457,28	R$ 38.645,56
4	R$ 961,71	R$ 498,53	R$ 463,18	R$ 38.182,38
5	R$ 961,71	R$ 492,55	R$ 469,15	R$ 37.713,23
6	R$ 961,71	R$ 486,50	R$ 475,20	R$ 37.238,03
7	R$ 961,71	R$ 480,37	R$ 481,33	R$ 36.756,69
8	R$ 961,71	R$ 474,16	R$ 487,54	R$ 36.269,15
9	R$ 961,71	R$ 467,87	R$ 493,83	R$ 35.775,32
10	R$ 961,71	R$ 461,50	R$ 500,20	R$ 35.275,11

(Continua)

Tabela 10 - Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE

(Continuação)

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
11	R$ 961,71	R$ 455,05	R$ 506,66	R$ 34.768,46
12	R$ 961,71	R$ 448,51	R$ 513,19	R$ 34.255,26
13	R$ 961,71	R$ 441,89	R$ 519,81	R$ 33.735,45
14	R$ 961,71	R$ 435,19	R$ 526,52	R$ 33.208,93
15	R$ 961,71	R$ 428,40	R$ 533,31	R$ 32.675,62
16	R$ 961,71	R$ 421,52	R$ 540,19	R$ 32.135,43
17	R$ 961,71	R$ 414,55	R$ 547,16	R$ 31.588,28
18	R$ 961,71	R$ 407,49	R$ 554,22	R$ 31.034,06
19	R$ 961,71	R$ 400,34	R$ 561,37	R$ 30.472,69
20	R$ 961,71	R$ 393,10	R$ 568,61	R$ 29.904,09
21	R$ 961,71	R$ 385,76	R$ 575,94	R$ 29.328,14
22	R$ 961,71	R$ 378,33	R$ 583,37	R$ 28.744,77
23	R$ 961,71	R$ 370,81	R$ 590,90	R$ 28.153,87
24	R$ 961,71	R$ 363,18	R$ 598,52	R$ 27.555,35
25	R$ 961,71	R$ 355,46	R$ 606,24	R$ 26.949,11
26	R$ 961,71	R$ 347,64	R$ 614,06	R$ 26.335,05
27	R$ 961,71	R$ 339,72	R$ 621,98	R$ 25.713,07
28	R$ 961,71	R$ 331,70	R$ 630,01	R$ 25.083,06
29	R$ 961,71	R$ 323,57	R$ 638,13	R$ 24.444,93
30	R$ 961,71	R$ 315,34	R$ 646,37	R$ 23.798,56
31	R$ 961,71	R$ 307,00	R$ 654,70	R$ 23.143,86
32	R$ 961,71	R$ 298,56	R$ 663,15	R$ 22.480,71
33	R$ 961,71	R$ 290,00	R$ 671,70	R$ 21.809,00
34	R$ 961,71	R$ 281,34	R$ 680,37	R$ 21.128,64
35	R$ 961,71	R$ 272,56	R$ 689,15	R$ 20.439,49
36	R$ 961,71	R$ 263,67	R$ 698,04	R$ 19.741,45
37	R$ 961,71	R$ 254,66	R$ 707,04	R$ 19.034,41
38	R$ 961,71	R$ 245,54	R$ 716,16	R$ 18.318,25
39	R$ 961,71	R$ 236,31	R$ 725,40	R$ 17.592,85
40	R$ 961,71	R$ 226,95	R$ 734,76	R$ 16.858,09
41	R$ 961,71	R$ 217,47	R$ 744,24	R$ 16.113,86
42	R$ 961,71	R$ 207,87	R$ 753,84	R$ 15.360,02
43	R$ 961,71	R$ 198,14	R$ 763,56	R$ 14.596,46
44	R$ 961,71	R$ 188,29	R$ 773,41	R$ 13.823,05
45	R$ 961,71	R$ 178,32	R$ 783,39	R$ 13.039,66
46	R$ 961,71	R$ 168,21	R$ 793,49	R$ 12.246,17
47	R$ 961,71	R$ 157,98	R$ 803,73	R$ 11.442,44

(Continua)

Tabela 11 - Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE

(Conclusão)

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
48	R$ 961,71	R$ 147,61	R$ 814,10	R$ 10.628,34
49	R$ 961,71	R$ 137,11	R$ 824,60	R$ 9.803,74
50	R$ 961,71	R$ 126,47	R$ 835,24	R$ 8.968,51
51	R$ 961,71	R$ 115,69	R$ 846,01	R$ 8.122,49
52	R$ 961,71	R$ 104,78	R$ 856,93	R$ 7.265,57
53	R$ 961,71	R$ 93,73	R$ 867,98	R$ 6.397,59
54	R$ 961,71	R$ 82,53	R$ 879,18	R$ 5.518,41
55	R$ 961,71	R$ 71,19	R$ 890,52	R$ 4.627,90
56	R$ 961,71	R$ 59,70	R$ 902,01	R$ 3.725,89
57	R$ 961,71	R$ 48,06	R$ 913,64	R$ 2.812,25
58	R$ 961,71	R$ 36,28	R$ 925,43	R$ 1.886,82
59	R$ 961,71	R$ 24,34	R$ 937,37	R$ 949,46
60	R$ 961,71	R$ 12,25	R$ 949,46	R$ 0,00
Total	R$ 57.702,31	R$ 17.702,31	R$ 40.000,00	-

Fonte: Autoria própria.

Assim como nesse exemplo, normalmente o financiamento de bens móveis segue o Sistema Francês de Amortização, ou Sistema PRICE.

Para fim de comparação entre as opções de antecipação de parcela, tomemos a situação em que após pagar um ano do financiamento, o cliente decida amortizar de forma antecipada R$5000,00. Dessa forma, na décima segunda prestação, o cliente pagou cinco mil reais antecipadamente além da prestação mensal.

Assim, segue a seguinte comparação:

- Como ficariam as mensalidades restantes caso a amortização seja dada pelo Valor da Prestação?
- Como ficariam as mensalidades restantes caso a amortização seja dada pelo Prazo do financiamento?

No primeiro caso, Amortização pelo Valor da Prestação, os cinco mil reais seriam abatidos do saldo do mês anterior de forma que no financiamento o saldo devedor de

R$ 29255,26 deverá ser pago nas 48 parcelas restantes, sendo que a taxa continua a mesma 1,29% a.m.

Tabela 12 - Tabela de Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE: Amortização antecipada - Amortização pelo Valor da Prestação

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 40.000,00
1	R$ 961,71	R$ 516,00	R$ 445,71	R$ 39.554,29
2	R$ 961,71	R$ 510,25	R$ 451,45	R$ 39.102,84
3	R$ 961,71	R$ 504,43	R$ 457,28	R$ 38.645,56
4	R$ 961,71	R$ 498,53	R$ 463,18	R$ 38.182,38
5	R$ 961,71	R$ 492,55	R$ 469,15	R$ 37.713,23
6	R$ 961,71	R$ 486,50	R$ 475,20	R$ 37.238,03
7	R$ 961,71	R$ 480,37	R$ 481,33	R$ 36.756,69
8	R$ 961,71	R$ 474,16	R$ 487,54	R$ 36.269,15
9	R$ 961,71	R$ 467,87	R$ 493,83	R$ 35.775,32
10	R$ 961,71	R$ 461,50	R$ 500,20	R$ 35.275,11
11	R$ 961,71	R$ 455,05	R$ 506,66	R$ 34.768,46
12	R$ 961,71	R$ 448,51	R$ 513,19	R$ 34.255,26
12			R$ 5.000,00	R$ 29.255,26
13	R$ 821,33	R$ 377,39	R$ 443,94	R$ 28.811,32
14	R$ 821,33	R$ 371,67	R$ 449,67	R$ 28.361,66
15	R$ 821,33	R$ 365,87	R$ 455,47	R$ 27.906,19
16	R$ 821,33	R$ 359,99	R$ 461,34	R$ 27.444,85
17	R$ 821,33	R$ 354,04	R$ 467,29	R$ 26.977,55
18	R$ 821,33	R$ 348,01	R$ 473,32	R$ 26.504,23
19	R$ 821,33	R$ 341,90	R$ 479,43	R$ 26.024,81
20	R$ 821,33	R$ 335,72	R$ 485,61	R$ 25.539,19
21	R$ 821,33	R$ 329,46	R$ 491,88	R$ 25.047,32
22	R$ 821,33	R$ 323,11	R$ 498,22	R$ 24.549,10
23	R$ 821,33	R$ 316,68	R$ 504,65	R$ 24.044,45
24	R$ 821,33	R$ 310,17	R$ 511,16	R$ 23.533,29
25	R$ 821,33	R$ 303,58	R$ 517,75	R$ 23.015,54
26	R$ 821,33	R$ 296,90	R$ 524,43	R$ 22.491,11
27	R$ 821,33	R$ 290,14	R$ 531,20	R$ 21.959,91
28	R$ 821,33	R$ 283,28	R$ 538,05	R$ 21.421,86
29	R$ 821,33	R$ 276,34	R$ 544,99	R$ 20.876,87
30	R$ 821,33	R$ 269,31	R$ 552,02	R$ 20.324,85
31	R$ 821,33	R$ 262,19	R$ 559,14	R$ 19.765,71

(Continua)

Tabela 13 - Tabela de Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE: Amortização antecipada - Amortização pelo Valor da Prestação

(Conclusão)

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
32	R$ 821,33	R$ 254,98	R$ 566,35	R$ 19.199,36
33	R$ 821,33	R$ 247,67	R$ 573,66	R$ 18.625,70
34	R$ 821,33	R$ 240,27	R$ 581,06	R$ 18.044,63
35	R$ 821,33	R$ 232,78	R$ 588,56	R$ 17.456,08
36	R$ 821,33	R$ 225,18	R$ 596,15	R$ 16.859,93
37	R$ 821,33	R$ 217,49	R$ 603,84	R$ 16.256,09
38	R$ 821,33	R$ 209,70	R$ 611,63	R$ 15.644,46
39	R$ 821,33	R$ 201,81	R$ 619,52	R$ 15.024,95
40	R$ 821,33	R$ 193,82	R$ 627,51	R$ 14.397,44
41	R$ 821,33	R$ 185,73	R$ 635,60	R$ 13.761,83
42	R$ 821,33	R$ 177,53	R$ 643,80	R$ 13.118,03
43	R$ 821,33	R$ 169,22	R$ 652,11	R$ 12.465,92
44	R$ 821,33	R$ 160,81	R$ 660,52	R$ 11.805,40
45	R$ 821,33	R$ 152,29	R$ 669,04	R$ 11.136,35
46	R$ 821,33	R$ 143,66	R$ 677,67	R$ 10.458,68
47	R$ 821,33	R$ 134,92	R$ 686,41	R$ 9.772,27
48	R$ 821,33	R$ 126,06	R$ 695,27	R$ 9.077,00
49	R$ 821,33	R$ 117,09	R$ 704,24	R$ 8.372,76
50	R$ 821,33	R$ 108,01	R$ 713,32	R$ 7.659,44
51	R$ 821,33	R$ 98,81	R$ 722,53	R$ 6.936,91
52	R$ 821,33	R$ 89,49	R$ 731,85	R$ 6.205,06
53	R$ 821,33	R$ 80,05	R$ 741,29	R$ 5.463,78
54	R$ 821,33	R$ 70,48	R$ 750,85	R$ 4.712,93
55	R$ 821,33	R$ 60,80	R$ 760,53	R$ 3.952,39
56	R$ 821,33	R$ 50,99	R$ 770,35	R$ 3.182,05
57	R$ 821,33	R$ 41,05	R$ 780,28	R$ 2.401,76
58	R$ 821,33	R$ 30,98	R$ 790,35	R$ 1.611,42
59	R$ 821,33	R$ 20,79	R$ 800,54	R$ 810,87
60	R$ 821,33	R$ 10,46	R$ 810,87	R$ 0,00
Totais	R$ 50.964,36	R$ 10.964,36	R$ 40000,00	

Fonte: Autoria própria.

Antes de analisar tirar conclusões, vejamos a segunda situação – a amortização extraordinária aplicada ao prazo. Nesse caso, o valor de 5 mil a amortizar será abatido do saldo devedor, restando os mesmos R$ 29255,26 que serão pagos com parcelas ainda de R$ 961,71, com a mesma taxa de 1,29% a.m., porém, como o saldo devedor diminuiu, a quantidade de parcelas também diminuirá. Teremos um problema em que sabemos parcela, taxa e saldo a pagar, restando o cálculo da quantidade de parcelas. Assim a tabela completa de amortização ficará da seguinte maneira neste segundo caso.

Tabela 14 - Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE: Amortização antecipada - Amortização pelo Prazo

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
0	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 0,00	40.000,00
1	R$ 961,71	R$ 516,00	R$ 445,71	R$ 39.554,29
2	R$ 961,71	R$ 510,25	R$ 451,46	R$ 39.102,83
3	R$ 961,71	R$ 504,43	R$ 457,28	R$ 38.645,55
4	R$ 961,71	R$ 498,53	R$ 463,18	R$ 38.182,36
5	R$ 961,71	R$ 492,55	R$ 469,16	R$ 37.713,21
6	R$ 961,71	R$ 486,50	R$ 475,21	R$ 37.238,00
7	R$ 961,71	R$ 480,37	R$ 481,34	R$ 36.756,66
8	R$ 961,71	R$ 474,16	R$ 487,55	R$ 36.269,11
9	R$ 961,71	R$ 467,87	R$ 493,84	R$ 35.775,27
10	R$ 961,71	R$ 461,50	R$ 500,21	R$ 35.275,06
11	R$ 961,71	R$ 455,05	R$ 506,66	R$ 34.768,40
12	R$ 961,71	R$ 448,51	R$ 513,20	R$ 34.255,20
12			R$ 5.000,00	R$ 29.255,26
13	R$ 961,71	R$ 377,39	R$ 584,32	R$ 28.670,94
14	R$ 961,71	R$ 369,86	R$ 591,85	R$ 28.079,09
15	R$ 961,71	R$ 362,22	R$ 599,49	R$ 27.479,60
16	R$ 961,71	R$ 354,49	R$ 607,22	R$ 26.872,38
17	R$ 961,71	R$ 346,65	R$ 615,06	R$ 26.257,32
18	R$ 961,71	R$ 338,72	R$ 622,99	R$ 25.634,33
19	R$ 961,71	R$ 330,68	R$ 631,03	R$ 25.003,30
20	R$ 961,71	R$ 322,54	R$ 639,17	R$ 24.364,13
21	R$ 961,71	R$ 314,30	R$ 647,41	R$ 23.716,72
22	R$ 961,71	R$ 305,95	R$ 655,76	R$ 23.060,96
23	R$ 961,71	R$ 297,49	R$ 664,22	R$ 22.396,73
24	R$ 961,71	R$ 288,92	R$ 672,79	R$ 21.723,94
25	R$ 961,71	R$ 280,24	R$ 681,47	R$ 21.042,47
26	R$ 961,71	R$ 271,45	R$ 690,26	R$ 20.352,21
27	R$ 961,71	R$ 262,54	R$ 699,17	R$ 19.653,04

(Continua)

Tabela 15 - Amortização do financiamento de um veículo pelo sistema PRICE: Amortização antecipada - Amortização pelo Prazo

(Conclusão)

N°	Prestação	Juros	Amortização	Saldo devedor
28	R$ 961,71	R$ 253,52	R$ 708,19	R$ 18.944,86
29	R$ 961,71	R$ 244,39	R$ 717,32	R$ 18.227,53
30	R$ 961,71	R$ 235,14	R$ 726,57	R$ 17.500,96
31	R$ 961,71	R$ 225,76	R$ 735,95	R$ 16.765,01
32	R$ 961,71	R$ 216,27	R$ 745,44	R$ 16.019,57
33	R$ 961,71	R$ 206,65	R$ 755,06	R$ 15.264,51
34	R$ 961,71	R$ 196,91	R$ 764,80	R$ 14.499,71
35	R$ 961,71	R$ 187,05	R$ 774,66	R$ 13.725,05
36	R$ 961,71	R$ 177,05	R$ 784,66	R$ 12.940,39
37	R$ 961,71	R$ 166,93	R$ 794,78	R$ 12.145,62
38	R$ 961,71	R$ 156,68	R$ 805,03	R$ 11.340,58
39	R$ 961,71	R$ 146,29	R$ 815,42	R$ 10.525,17
40	R$ 961,71	R$ 135,77	R$ 825,94	R$ 9.699,23
41	R$ 961,71	R$ 125,12	R$ 836,59	R$ 8.862,64
42	R$ 961,71	R$ 114,33	R$ 847,38	R$ 8.015,26
43	R$ 961,71	R$ 103,40	R$ 858,31	R$ 7.156,95
44	R$ 961,71	R$ 92,32	R$ 869,39	R$ 6.287,56
45	R$ 961,71	R$ 81,11	R$ 880,60	R$ 5.406,96
46	R$ 961,71	R$ 69,75	R$ 891,96	R$ 4.515,00
47	R$ 961,71	R$ 58,24	R$ 903,47	R$ 3.611,53
48	R$ 961,71	R$ 46,59	R$ 915,12	R$ 2.696,41
49	R$ 961,71	R$ 34,78	R$ 926,93	R$ 1.769,49
50	R$ 961,71	R$ 22,83	R$ 938,88	R$ 830,60
51	R$ 841,32	R$ 10,71	R$ 830,60	R$ -
52	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
53	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
54	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
55	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
56	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
57	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
58	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
59	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
60	antecipada	antecipada	antecipada	antecipada
Total	R$ 53.926,76	R$ 13.926,76	R$ 40.000,00	-

Fonte: Autoria própria.

Vale observar que R$5000,00 daria o pagamento de pouco mais de cinco parcelas, porém, ao amortizar pelo prazo (ou de trás para frente), foram reduzidas nove parcelas inteiras, de 52 a 60, e ainda parte da 51ª parcela.

Na comparação das três planilhas de amortização – a original, a planilha com amortização na parcela e a planilha com amortização no prazo – é possível comprovar o que foi afirmado sobre cada método.

Tabela 16 - Comparativo entre Amortização pelo Valor da Prestação e Amortização pelo prazo

	Pagamento total	**Juros**	**nº de parcelas**	**Parcela inicial**	**Parcela após a amortização 13º mês**
Amortização original	R$ 57.702,31	R$ 17.702,31	60	R$ 961,71	R$ 961,71
Amortização/ parcela	R$ 55.964,39	R$ 15.964,39	60	R$ 961,71	R$ 821,33
Amortização/ prazo	R$ 53.926,76	R$ 13.926,76	51	R$ 961,71	R$ 961,71

Fonte: Autoria própria.

Conforme observado na tabela acima, a comparação comprova que fazer uma amortização extraordinária com abatimento de prazo resulta em economia para o tomador pois é a opção mais barata das três. Enquanto que a amortização aplicada ao valor da parcela sai mais barata apenas do que a planilha original, além de reduzir o valor empenhado mensalmente com o pagamento do financiamento.

Vejamos um exemplo que pode ser utilizado para educação financeira, apontando a importância da simplicidade e o poder da amortização extraordinária, abatendo nas parcelas. Dessa vez a opção é por um simulador online disponível no site https://simuladoramortizacao.com.br/

Um casal adquire um imóvel através de financiamento do Sistema Nacional de Habitação (SFH). O valor financiado foi de R$150000,00, o prazo é de 25 anos ou 300 meses, e a taxa de 10% a.a. Construindo a tabela de amortização pelo sistema PRICE, temos como resultado os seguintes dados (Quadro 23):

Quadro 23 - Amortização de um financiamento imobiliário pelo sistema PRICE

Amortização PRICE sem antecipação	
Valor financiado	R$ 150.000,00
Parcela inicial	R$ 1.317,74
Parcela final	R$ 1.317,74
Nº de parcelas	300
Pagamento total	R$ 395.323,06
Juros	R$ 245.323,06

Fonte: Autoria própria.

Suponha que o casal decida que, em vez de ambos trocarem de celular todos os anos, vão trocar a cada dois anos e a cada ano um deles vai antecipar R$3000,00 em parcelas de forma decrescente, ou seja, abatendo no prazo.

Dessa forma, serão feitos pagamentos extraordinários nos meses (12, 24, 36, 48, ...,276, 288, 300). Construindo a tabela de amortização pelo Sistema PRICE com abatimento no prazo, encontramos as seguintes informações (Quadro 24):

Quadro 24 - Amortização de um financiamento imobiliário pelo sistema PRICE: proposta de Amortização antecipada - Amortização pelo Prazo

Amortização PRICE com antecipação	
Valor financiado	R$ 150.000,00
Parcela inicial	R$ 1.317,74
Parcela final	R$ 996,74
Nº de parcelas	181
Pagamento total	R$ 283.881,82
Juros	R$ 133.881,82

Fonte: Autoria própria.

A atividade acima serve para os alunos usarem a excelente ferramenta que é o simulador online e tem por objetivo auxiliar no entendimento que algumas renúncias simples durante o pagamento de um financiamento extenso com é o caso do financiamento habitacional tem grande efeito reduzindo o prazo de pagamento em quase 10 anos.

Adicionalmente, fica informado a seguir qual seria o resultado da mesma atividade se a opção de amortização fosse pela Tabela SAC (Quadro 25).

Quadro 25 - Amortização de um financiamento imobiliário pelo sistema SAC: proposta de Amortização antecipada - Amortização pelo Prazo

Amortização SAC	**sem antecipação**	**com antecipação**
Valor financiado	R$ 150.000,00	R$ 150.000,00
Parcela inicial	R$ 1.696,12	R$ 1.696,12
Parcela final	R$ 503,99	R$ 18,58
Nº de parcelas	300	264
Pagamento total	R$ 330.016,22	R$ 287.489,71
Juros	R$ 180.016,22	R$ 137.489,71

Fonte: Autoria própria.

No caso acima, como esperado, não houve abatimento de tantas parcelas quanto no sistema PRICE, porém no sistema SAC há ainda o benefício dos pagamentos serem decrescentes.

6. CONCLUSÃO

Esta dissertação teve como objetivo propor um plano de ensino prático que pode ser trabalhado junto a aluno do ensino de jovens e adultos (EJA), fixando os conceitos ao trabalhar cada tópico principal de Matemática Financeira de forma construtiva e dialogada, e colocando de lado a pura apresentação e uso de fórmulas matemáticas. A ênfase dada foi no orçamento familiar, nos regimes de juros simples e compostos, e nos processos de amortização. A partir da análise de diferentes situações financeiras que envolvem tanto a gestão de recursos a curto e longo prazo quanto a compreensão dos impactos das taxas de juros sobre o endividamento e a poupança, é possível esclarecer no plano de ensino e consequentemente aos alunos a importância do orçamento familiar, controle de dívidas – principalmente do tipo rotativo, e a necessidade de usar os juros ao seu favor ao criar o hábito da poupança.

Inicialmente, foi destacada a importância da elaboração e controle do orçamento familiar com o objetivo de diminuir o endividamento das famílias e ampliar a capacidade de poupança. Entender o funcionamento do orçamento familiar e trabalhar bem o assunto permite que as famílias também possam investir em aquisições que trarão benefícios a longo prazo, como compra de imóvel ou matrícula em ensino técnico ou superior.

Os capítulos sobre os juros simples e compostos destacaram como essas duas formas de cálculo influenciam diretamente as decisões financeiras pessoais e familiares, principalmente nas operações de crédito e investimentos. A comparação entre ambos os tipos de juros demonstrou que, em um cenário de juros compostos, os valores acumulados podem crescer de forma exponencial ao longo do tempo, o que exige uma gestão cautelosa das dívidas e um planejamento de poupança mais rigoroso. Já os juros simples, por serem lineares, têm a sua aplicação na matemática comercial em operações cujo prazo seja menor do que ou igual ao primeiro período de capitalização, como por exemplo no cálculo de encargos por atrasos no pagamento de boletos ou duplicatas.

Além disso, a análise dos processos de amortização, com destaque para os sistemas de amortização constantes (SAC) e da tabela PRICE, foi fundamental para a compreensão de como os valores das parcelas de um empréstimo se alteram ao longo do tempo, refletindo diretamente no orçamento familiar. Em relação às implicações práticas, fica claro para os alunos que ao entender a dinâmica dos juros e das amortizações, as famílias podem tomar decisões mais informadas sobre a contratação de crédito e fornece ferramentas para a escolha do financiamento mais adequado ao consumidor. O entendimento do funcionamento da amortização permite que os alunos e suas famílias busquem junto às instituições financeiras a amortização de dívidas, trazendo uma economia para o consumidor ao mesmo tempo que exerce sua cidadania, conforme o direito que lhe é garantido no estado do Espírito Santo pela Lei Nº 11.434, de 14 de outubro de 2021.

Por fim, esta dissertação é uma proposta de plano de ensino que contribui para o ensino de matemática financeira na educação de jovens e adultos. Conforme explicado ao longo do trabalho, no estado do Espírito Santo normalmente são professores contratados que trabalham com EJA e, portanto, não tive a oportunidade de aplicar essa sequência didática com esse púbico, embora tenha alcançado bons resultados com esta metodologia ao trabalhar com a segunda série do ensino médio regular. Assim, fica em aberto a aplicação deste trabalho de forma prática com alunos do EJA e o posterior levantamento de dados com o objetivo de referendar a prática didática seja por um colega professor de matemática ou por mim mesmo numa futura pós graduação do tipo doutorado.

REFERÊNCIAS

ANHANGUERA. Orçamento Familiar: como planejar a vida com filhos? **Blog**. Disponível em: https://blog.anhanguera.com/orcamento-familiar/ Acesso em: 30 jul. 2024.

ARAUJO, Fernanda. O que é Imposto de Renda e para que serve?. **Serasa**. 23 nov. 2022. Disponível em: https://www.serasa.com.br/blog/o-que-e-imposto-de-renda/. Acesso em: 30 jul. 2024.

ARAUJO, Milton. Pílulas de matemática financeira (2). **Blog**. Postagem de 14 de dezembro de 2013. Disponível em: https://profmilton.blogspot.com/2013/12/pilulas-de-matematica-financeira-2.html. Acesso em: 30 jul. 2024.

BRASIL. Agência IBGE Notícias. Pobreza cai para 31,6% da população em 2022, após alcançar 36,7% em 2021. Estatísticas sociais. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/38545-pobreza-cai-para-31-6-da-populacao-em-2022-apos-alcancar-36-7-em-2021 Acesso em: 21 ago. 2024.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil, 05/10/1988. Art. 205. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm Acesso em: 20 ago. 2024.

BRASIL. Decreto Nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010**.**
Institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF, dispõe sobre a sua gestão e dá outras providências. (Revogado pelo decreto nº 10.393, de 2020. Institui a nova Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF e o Fórum Brasileiro de Educação Financeira – FBEF.). Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm Acesso em: 20 ago. 2024.

BRASIL. Estado do Espírito Santo. LEI Nº 11.434, DE 14 de OUTUBRO de 2021. Obriga as instituições financeiras sediadas no Estado do Espírito Santo a afixar cartaz ou aviso informando os consumidores do direito a desconto na liquidação antecipada de débito. Disponível em: https://www3.al.es.gov.br/Arquivo/Documents/legislacao/html/LEI114342021.html. Acesso em: 08 nov. 2024.

BRASIL. Lei n. 8078 de 11 de setembro de 1990. Dispõe sobre a proteção do consumidor e dá outras providências. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8078compilado.htm. Acesso em: 30 jul. 2024.

BRASIL. Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm Acesso em: 20 ago. 2024.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 21 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf Acesso em: 20 ago. 2024.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Resolução CNE/CEB 07, de 14 de dezembro de 2010. Fixa Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb007_10.pdf Acesso em: 20 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Fazenda, Receita Federal. Pagamento em DARF. Saiba como pagar o imposto de renda devido após o envio da declaração. Publicado em 30/01/2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/pagamento/darf. Acesso em: 30 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Fazenda, Receita Federal. Pagamento. Orientações sobre como pagar o imposto sobre a renda das pessoas físicas. Atualizado em 21/05/2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/pagamento. Acesso em: 30 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Fazenda, Receita Federal. Tributação de 2024: Tabelas de incidência e deduções para cálculo do imposto sobre a renda das pessoas físicas (IRPF) em 2024. Atualizado em 09/02/2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 30 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Justiça e Segurança Pública. Semana Nacional. Disponível em: https://www.gov.br/mj/pt-br/assuntos/seus-direitos/consumidor/defesadoconsumidor/ENEF Acesso em: 20 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Previdência Social, Instituto Nacional de Seguro Social. Tabela de Contribuição Mensal. Disponível em: https://www.gov.br/inss/pt-br/direitos-e-deveres/inscricao-e-contribuicao/tabela-de-contribuicao-mensal. Acesso em: 30 jul. 2024.

CAMPÊLO, Maria Adriana. Dívidas: fatores comportamentais e seus efeitos psicológicos. Publicado em 22/06/2023. (CVM – Portal do investidor). Disponível em: https://www.gov.br/investidor/pt-br/penso-logo-invisto/dividas-fatores-comportamentais-e-seus-efeitos-psicologicos. Acesso em: 30 jul. 2024.

CHEROBIM, Ana Paula. **Administração Financeira:** Princípios, Fundamentos e Práticas Brasileiras. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2016.

DESSEN, Marcia. **Finanças Pessoais:** O Que Fazer com Meu Dinheiro. São Paulo: Trevisan, 2015.

DIREITO 2 e seus benefícios. O que é e para que serve o INSS? Disponível em: O que é e para que serve o INSS? - Direitos e Benefícios Sociais. Acesso em: 30 jul. 2024.

FREZATTI, Fábio. **Orçamento Empresarial:** Planejamento e Controle Financeiro. 6ª ed. rev. atual. São Paulo: Atlas, 2015.

GITMAN, L. J.; ZUTTER, C. J. **Princípios de Administração Financeira** 13ª ed. Editora: Pearson, 2018.

INFOMONEY. Amortização: o que é, como funciona para financiamentos ou empréstimos. Postado em 22/3/2024. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/guias/amortizacao/. Acesso em: 30 jul. 2024.

NAVARRO, Conrado; MASSARO, André . **Dinheiro é um Santo Remédio:** cure sua vida financeira e nunca mais saia de forma. São Paulo: Gente, 2013.
ASSAF NETO, Alexandre. **Finanças corporativas e valor**. 8ª ed. São Paulo: Atlas, 2018.

SERASA. **Amortização:** como funciona e os principais tipos. Atualizado 30/01/2024. Disponível em: Amortização: entenda como funciona| Blog Limpa Nome Online. Acesso em: 30 jul. 2024.

VERGARA, Sylvia Constante. **Projetos e relatórios de pesquisa em Administração.** 12. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

VINHAS, Ana. A vida depois do vermelho – negociação de dívidas e o que fazer para manter a cidadania financeira. **R7 Estúdio**. Atualizado 15/04/2024. Disponível em: https://estudio.r7.com/a-vida-depois-do-vermelho-15042024. Acesso em: 10 nov. 2024.