UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

GABRIELA LOUREIRO LOMONTE FARIA SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

VITÓRIA – ES
JULHO/2025

GABRIELA LOUREIRO LOMONTE FARIA SANTOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

VITÓRIA – ES

JULHO/2025

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

S237r

Santos, Gabriela Loureiro Lomonte Faria, 1997-
A resolução de problemas como estratégia para o ensino da matemática para alunos do ensino médio / Gabriela Loureiro Lomonte Faria Santos. - 2025.
(recurso não paginado).

Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Ensino médio. I. Guimarães Filho, Florêncio Ferreira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO"

GABRIELA LOUREIRO LOMONTE FARIA SANTOS

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 31/07/2025 por:

____

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Presidente – Examinador Interno – UFES

____

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Examinador Interno – UFES

____

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes
Examinador Externo – UFCG

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 04/08/2025 às 22:24:06

Folha de Assinaturas Gabriela Loureiro Lomonte Faria Santos

Data e Hora de Criação: 02/08/2025 às 10:27:25

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Gabriela Loureiro Lomonte Faria Santos.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: abbbab68b64befb86fe8e3c609b3609037daca16d4445a429a70373a0747b553
[SHA512]: 60f2df05bccafd1cffe738838f994c897652b0fa9e77cf418d7547af49af55d6218a8b18b770304243696a6e091f6d401649c105b9b8a5e5d4fde65bd3890163

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - José de Arimatéia Fernandes (arimat.ufcg@gmail.com)
Data/Hora: 03/08/2025 - 13:42:19, IP: 179.136.175.29
[SHA256]: 667416d01d8a88357ca20a056a048c0aa5b64a5b59f0e8bc233aded0a0aaf726
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)
Data/Hora: 04/08/2025 - 22:24:06, IP: 187.36.171.100, Geolocalização: [-20.285626, -40.294199]
[SHA256]: b2e73969fc7bd54afb35ac10b0d95e89e311a45d6ab912fe25a23411aef2eec6
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)
Data/Hora: 02/08/2025 - 21:11:05, IP: 187.36.172.141
[SHA256]: 84d12c1595821a3afbb06045c02d21d6356cacd8fb602ca64ca40e88644e1959
Assinatura Eletrônica Avançada (Conforme Lei nº 14.063/20, art. 4º, II)

Histórico de eventos registrados neste envelope

04/08/2025 22:24:06 - Envelope finalizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.171.100
04/08/2025 22:24:06 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.171.100
04/08/2025 22:23:50 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.171.100
03/08/2025 13:42:19 - Assinatura realizada por arimat.ufcg@gmail.com, IP 179.136.175.29
03/08/2025 13:42:13 - Envelope visualizado por arimat.ufcg@gmail.com, IP 179.136.175.29
02/08/2025 21:11:05 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141
02/08/2025 21:10:53 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.172.141
02/08/2025 10:28:33 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 189.48.23.154
02/08/2025 10:28:32 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 189.48.23.154
02/08/2025 10:27:25 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 189.48.23.154

RESUMO

A resolução de problemas é uma habilidade que pode e precisa ser desenvolvida em todas as pessoas, pois ela pode ajudar a alcançar o sucesso tanto no meio profissional, tanto no meio acadêmico. Ao falar em resolução de problemas matemáticos, não se deve focar apenas em chegar em uma resposta final, e sim em identificar, analisar e criar estratégias. Involuntariamente, o potencial criativo, a criticidade e autonomia é desenvolvida juntamente. A matemática é uma das disciplinas com a maior rejeição entre os alunos do ensino médio, e, portanto, para entender um pouco sobre esse assunto foi feito uma pesquisa de campo utilizando a metodologia de resolução de problemas. Inicialmente, foi aplicado um questionário para saber quais eram as principais dificuldades na área. Após a análise do questionário, foram desenvolvidos problemas matemáticos utilizando dicas retiradas do livro “A arte de resolver problemas” de George Polya. Ao final, foi aplicado um segundo questionário com objetivo de saber se a metodologia de resolução de problemas tornou a matemática mais acessível aos alunos.

Palavras-chave: resolução de problemas; ensino médio; George Polya.

ABSTRACT

Resolution of problems is a skill that can and must be developed in everyone, because it can help to reach a sucess in professioanl and academic settings. When we talk about resolution of problems, we must not focus just find a solution, but we need identifying, analyzing and creating strategies. Involuntarily, we develop criative potential, critical thinking and autonomy. Math is the most disliked matter betwen students, and to understand better this subject we do a search using problem solving methodology.Firstly, a questionnaire was applied to know the main difficulty. After analyzing the questionnaire, we solved math problems using tips taken from the book “The art of problem solving” by George Polya. Finally, a second questionnaire was applied to kwon f the problem solving methodology made mathematics easier to students.

Keywords: resolution of problems; high school; George Polya.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atuando como professora de Matemática em redes públicas e privadas há quase quatro anos, desde que me formei[1] no curso de Licenciatura em Matemática, e como professora particular de Matemática há quase dez anos, percebo a dificuldade de muitos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos básicos e até mesmo da linguagem matemática, que poderia ajudá-los a compreender melhor conceitos e problemas que envolvem a aprendizagem de Matemática. Sobre a importância de compreender a linguagem e conseguir fazer leituras Smole e Diniz (2007) apontam que:

> Em qualquer área do conhecimento, a leitura deve possibilitar a compreensão de diferentes linguagens, de modo que os alunos adquiram uma certa autonomia no processo de aprender. Em uma situação de aprendizagem significativa, a leitura é reflexiva e exige que o leitor se posicione diante de novas informações, buscando, a partir da leitura, novas compreensões (SMOLE; DINIZ, 2007, p. 69).

O fato é que o processo de ensino-aprendizagem da Matemática constitui um desafio desde a séries iniciais e perpassa toda a vida acadêmica dos alunos que conseguem chegar ao Ensino Superior, mas também pode incidir sobre diversos sujeitos em suas vidas profissionais, no mercado de trabalho. Na opinião de Rezende (2003), o problema da aprendizagem da Matemática está presente na maioria dos países do mundo, não podendo ser considerado um problema cultural justificado pelo nível socioeconômico da população brasileira.

---

[1] Peço licença ao leitor para realizar toda escrita desta dissertação na primeira pessoa do singular. Isso ocorrerá uma vez que o presente texto retratará experiências pessoais vividas durante meu processo de fazer pesquisa, em um *continuum* que envolveu, inclusive, alguns elementos de pesquisa etnográfica. Não configuro a presente pesquisa como etnográfica tendo em vista que, apesar do período de tempo que dediquei para sua realização ter sido consideravelmente grande – cerca de um mês – não foram desenvolvidas, como prevê Gil (2021), atividades mais integradas, pouco sequenciais; também não deixei que o campo de estudos “falasse” para que eu definisse as técnicas de pesquisa que eu empregaria, uma vez que parti para campo previamente, como será visto na seção metodologia, com a intenção de usar questionários e um caderno de notas.

Talvez por causa da dimensão do problema o tema da aprendizagem da matemática vem sendo bastante pesquisado, com alguns pesquisadores buscando justificativas plausíveis para justificar porque as dificuldades na aprendizagem da matemática são tão grandes (SANTOS; ALMEIDA, 2022; SOUSA; MENDES, 2017), especialmente quando são comparadas com quase todas as demais disciplinas que compõem o currículo escolar.

Não havendo como negar que a matemática está presente em todo mundo à nossa volta (artes, esportes, economia, engenharia, arquitetura, ciências, engenharia, tecnologia, na vida cotidiana, e em diversos outros campos do conhecimento e de intervenção), sempre me incomodou perceber as dificuldades que a maior parte das pessoas com quem convivia e estudava, e mesmo para quem eu lecionava, apresentava para compreender a Matemática mais elementar. Sempre me questionava como a Matemática poderia ser aprendida em nível mais complexo se suas bases conceituais e sua linguagem não eram aprendidas.

Um ponto de confluência bastante comum nas conversas que mantinha com meus alunos (das escolas e das aulas particulares que ministrava) sobre as dificuldades na aprendizagem de matemática é que eles percebem que, de uma maneira geral, as coisas se iniciam ruins já nas primeiras séries dos anos iniciais, quando eles tinham suas primeiras frustrações com a Matemática. Além disso, acredito que quando as dúvidas dos alunos não são sanadas e as dificuldades ultrapassadas, eles acabam mantendo um sentimento ainda pior em relação à Matemática nos anos seguintes, ficando ainda mais difícil recuperar nas etapas seguintes as aprendizagens perdidas que poderiam formar uma boa base para o raciocínio matemático.

Um estudo recente realizado por Santos e Almeida (2022) com quatro alunos universitários de cursos de exatas (Matemática e Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia) que alegavam ser traumatizados com a Matemática mostrou que os fatores que os faziam ter trauma, por vezes rejeição à matemática eram os seguintes:

> i) as limitações relacionadas à alfabetização matemática, afetando o domínio de competências básicas (base matemática insuficiente, como se ouve com

> frequência na universidade); ii) as frustrações acadêmicas, como reprovações em componentes curriculares, intensificando a insegurança e a desmotivação; iii) as condicionantes socioculturais [...] que historicamente produzem estereótipos sobre a Matemática; iv) as dificuldades de adaptação às metodologias de ensino do professor, que, por sua vez, se vê desafiado pela contínua necessidade de repensar suas estratégias didático-pedagógicas; v) a maneira como lida com os estudos e o aprender; dentre outros (SANTOS; ALMEIDA, 2022, p. 1280).

Muito provavelmente por ser filha de uma excelente professora de Matemática, muito elogiada pelos alunos para os quais ela lecionou e por seus pais, não apresentei esses problemas e não tive maiores dificuldades, não apenas para aprender, como também não tive dúvidas em optar por cursar Licenciatura em Matemática.

Durante a realização do curso mantive o contato com a disciplina "Resolução de Problemas" e pude perceber que minha preocupação com as dificuldades de aprendizagem de matemática por parte dos alunos não era solitária e já vem sendo discutida na área há mais de meio século, tendo em vista que o movimento Resolução de Problemas é discutido como abordagem metodológica que vai muito além de uma "[...] prática de resolver problemas nas aulas de Matemática, [pois] pressupõe aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades, visando a promover uma aprendizagem mais significativa" (MORAIS; ONUCHIC, 2021, n.p).

Apresentada a introdução sobre como a temática da resolução de problemas entrou em minha vida é preciso partir para a justificativa para a escrita dessa dissertação.

1.1 JUSTIFICATIVA

Diante do que fora exposto até aqui o presente estudo se justifica não apenas por meu interesse em desenvolver um trabalho que se utilizasse da metodologia da resolução de problemas como forma de auxiliar alunos do Ensino Médio do sistema público a superarem os traumas e a rejeição que muitos deles apresentam em relação à Matemática, mas também para mostrar para esses sujeitos que, apesar deles não terem logrado aprendizagens significativas da linguagem e de conceitos matemáticos nas etapas escolares anteriores, a Matemática não é tão difícil quanto os mesmos foram levados a acreditar que era.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Discutir como a resolução de problemas pode ser usada como uma metodologia para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática de alunos do Ensino Médio.

1.2.2 Objetivos Específicos

Apresentar a origem e em que consiste o método da resolução de problemas no ensino da matemática.

Construir questões que podem ser usadas na metodologia da resolução de problemas no ensino da Matemática para alunos do Ensino Médio que apresentem dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Aplicar as questões construídas por meio da metodologia da resolução de problemas entre alunos do Ensino Médio que apresentam dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Avaliar as opiniões dos alunos que apresentavam dificuldades na aprendizagem da Matemática em relação às dificuldades que eles possuíam antes e depois da aplicação da metodologia da resolução de problemas.

2 METODOLOGIA

Para que os pontos listados anteriormente fossem contemplados se fez necessária a realização de uma pesquisa de objetivo exploratória e de natureza qualitativa que envolveu uma série de métodos e técnicas que serão apresentados e explicados ainda neste capítulo. De acordo com Gil (2019, p. 47) “Quando são projetadas como pesquisas exploratórias, o que se espera como produto final [de uma pesquisa] é o conhecimento mais aprofundado de determinado tema”. Nesse sentido as pesquisas exploratórias “[...] possibilitam maior familiaridade com o problema [...]” (MARCONI; LAKATOS, 2022, p. 297).

Sobre a pesquisa ser de natureza qualitativa convém trazer a opinião de Strauss e Corbin (2008 *apud* GIL, 2021, p. 15), para quem ela pode ser considerada como “qualquer tipo de pesquisa que produza resultados não alcançados através de procedimentos estatísticos ou de outros meios de quantificação”. Mas, mais do que isso, é preciso entender a pesquisa qualitativa não como um estudo cujos números e a análise estatística estão ausentes, mas como uma pesquisa interpretativa (STAKE, 2011) e cujos pesquisadores e pesquisados “[...] bem como suas competências comunicativas, constituem o principal ‘instrumento’ de coleta de dados e de reconhecimento” (FLICK, 2009, p. 110).

Nas palavras de Stake (2011, p. 46),

> A pesquisa qualitativa é, algumas vezes, definida como pesquisa interpretativa. Todas as pesquisas exigem interpretações e, na realidade, o comportamento humano exige interpretações a cada minuto. Mas a pesquisa interpretativa é a investigação que depende muito da definição e da redefinição dos observadores sobre os significados daquilo que veem e ouvem.

Como busquei obter e analisar dados por meio das opiniões de alunos do ensino médio que apresentavam dificuldades na aprendizagem da Matemática antes e depois da aplicação da metodologia da RP, a pesquisa de natureza qualitativa acabou por ser a mais adequada para o presente estudo especialmente porque, de acordo com Yin (2016, p. 20), “O fascínio da pesquisa qualitativa é que ela permite a realização de estudos aprofundados sobre uma ampla variedade de tópicos, incluindo seus favoritos, em termos simples e cotidianos. Além disso, a pesquisa qualitativa oferece maior liberdade na seleção de temas de interesse [...]".

Evidentemente que "[...] falar em pesquisa qualitativa pode ser uma grande novidade, ou um grande desafio, para alguém que 'trabalha com quantidades', como é o caso de professores de Matemática" (BORBA; ARAÚJO, 2019, p. 23). Especialmente porque:

> O que se busca com a pesquisa qualitativa é, mediante um processo não matemático de interpretação, descobrir conceitos e relações entre os dados e organizá-los em um esquema explicativo. Trata-se, portanto, de uma modalidade de pesquisa de caráter essencialmente interpretativo, em que os pesquisadores estudam coisas dentro dos contextos naturais destas, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem (DENZIN; LINCOLN *apud* GIL, 2021, p. 15).

Diante do que fora exposto até aqui, pelo caráter de descoberta e de interpretação adotados para o presente estudo a pesquisa de natureza qualitativa se encaixou bem para a realização da investigação realizada e aqui apresentada. Afinal busca, dentre outras questões não menos importantes, avaliar como os alunos do Ensino Médio com dificuldades em aprender a Matemática reagem à metodologia da RP no que tange ao processo de aprendizagem desse conteúdo.

Os métodos e técnicas escolhidos para a realização deste estudo foram a revisão de literatura, a pesquisa de campo, o questionário e um caderno de notas para o registro dos dados obtidos no campo para posterior análise. Explico cada um deles seguir.

A revisão de literatura corresponde ao processo de buscas, leituras e fichamentos realizados sobre o tema que se está estudando, nesse caso o método da RP. Para Marconi e Lakatos (2022, p. 257) a importância do estudo de revisão parte do princípio de que:

> Pesquisa alguma parte da estaca zero. Mesmo que exploratória, isto é, de avaliação de uma situação concreta desconhecida, em um dado local, alguém

> ou um grupo, em algum lugar, já deve ter feito pesquisas iguais ou semelhantes, ou mesmo complementares de certos aspectos da pesquisa pretendida. Uma procura de tais fontes, documentais ou bibliográficas, torna-se imprescindível para a não duplicação de esforços, a não 'descoberta' de ideias já expressas, a não inclusão de lugares-comuns no trabalho.

Indo nessa mesma direção Kaufmann (2013, p. 63) afirma que "Não existe pesquisa sem leituras. Pois nenhum tema é radicalmente novo, e nenhum pesquisador pode pretender avançar sem o capital dos conhecimentos adquiridos em determinada área". Nesse sentido considero ser indispensável que seja feita a leitura de alguns trabalhos de referência sobre o tema estudado e/ou problemáticas ligadas a ele (CAPENHOUDT; MARQUET; QUIVY, 2019), o que fez do estudo de revisão uma espécie de filtro, mediante o qual busco enxergar a realidade (ROSA; ARNOLDI, 2014) do campo em estudo.

Para a concretização do estudo de revisão foi realizada uma pesquisa atemporal no periódico "BOLEMA: Boletim de Educação Matemática" do verbete "resolução de problemas" em textos publicados até fevereiro de 2023. A escolha desta revista científica se deve a fato de que, segundo informações existentes no endereço eletrônico da revista, hospedada no "SciELO - Scientific Electronic Library Online", o "Boletim de Educação Matemática é uma das mais antigas e importantes publicações na área da Educação Matemática no Brasil. A Educação Matemática, em síntese, é uma região de inquérito que busca dar respostas a fenômenos educacionais relacionados à Matemática".[2]

Foram localizados 36 artigos escritos em português, inglês e espanhol. Diante das dificuldades que percebi que enfrentaria para trabalhar com textos escritos em inglês (seis artigos) e espanhol (dois artigos), optei por excluí-los de minha base de pesquisa. Dessa maneira fiquei com 28 textos que foram lidos em sua integralidade e nos quais busquei encontrar: as origens do método da RP; as vantagens de se trabalhar com a RP; as questões (dúvidas, anseios e dificuldades) apontadas pelos futuros professores (que se encontram em formação inicial em matemática), bem como por

[2] Disponível em: https://www.scielo.br/journal/bolema/about/#about Acesso em 4 jan. 2023.

quem já é professor e já trabalha ou pretende trabalhar com a RP em sua prática pedagógica.

Desse total de 28 artigos localizados foram selecionados nove (9) que tratam especificamente: da origem da RP; da história da RP; de experiências (práticas, teóricas, formativas) realizadas com alunos do ensino médio, professores de matemática formados ou em formação. Trabalho com tais textos no capítulo nomeado Revisão de Literatura, juntamente com alguns livros e artigos nos quais acabei chegando de maneira indireta.

Sobre a pesquisa de campo Gil (2021, p. 19) afirma que "[...] a ida ao campo em que as pessoas atuam constitui etapa importante do processo de investigação acerca do que elas sentem, creem ou fazem". Marconi e Lakatos (2022, p. 216) explicam que:

> Pesquisa de campo constitui-se, em geral, de levantamento de dados no próprio local onde os fenômenos ocorrem.
> Pesquisa de campo é que se utiliza com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos sobre um problema, para o qual se procura uma resposta, ou sobre uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda, com o propósito de descobrir novos fenômenos ou relações entre eles. Ela consiste na observação de fatos e fenômenos tal como ocorrem espontaneamente, na coleta de dados a eles referentes e no registro de variáveis que se presume relevantes para analisá-los.

Para compreender as opiniões dos alunos relacionadas dificuldades na aprendizagem da Matemática me vali de um questionário que corresponde a "[...] um instrumento de coleta de dados que compreende um conjunto de perguntas previamente elaboradas que, diferentemente da entrevista, deve ser respondido por escrito e enviado ao pesquisador" (MARCONI; LAKATOS, 2022, p. 323). Trata-se de um instrumento "[...]composto de um conjunto de questões que se submete ao pesquisado, objetivando obter informações que serão necessárias ao desenvolvimento da pesquisa [...]" (MARCONI; LAKATOS, 2022, p. 339).

O caderno de notas foi tomado como uma técnica para o registro dos dados obtidos no campo para posterior análise. Trata-se de um recurso muito útil empregado para fazer anotações durante um trabalho de campo que possui tempo limitado e/ou que nos traz muitas informações que dificilmente serão observadas, registradas e (re)lembrados por outras técnicas de pesquisa (YIN, 2016).

Apresentada a metodologia que embasa o presente estudo, partirei para a revisão de literatura que trouxe uma maior compreensão acerca da RP, especialmente em relação ao seu significado, surgimento e em que consiste o método.

3 REVISÃO DE LITERATURA

A intenção deste capítulo é apresentar as reflexões construídas a partir do trabalho de revisão de literatura realizado por meio do qual busquei identificar a origem e a história da RP, algumas experiências realizadas com alunos e com professores de matemática em formação inicial, bem como com aqueles atuantes no Ensino Médio e que se valem da RP em sua prática pedagógica.

3.1 COMO SURGIU A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS?

Como já foi visto anteriormente, a RP na matemática não é algo novo. Além disso, convém destacar que, ao contrário do que alguns poderiam imaginar, a resolução de problemas é uma atividade para lá de comum na vida cotidiana das pessoas comuns e remontam à história da civilização humana (MORAIS; ONUCHIC, 2021). Afinal, a capacidade de resolver problemas (não apenas os matemáticos) é uma habilidade que pode e precisa ser desenvolvida entre todos os sujeitos, tendo em vista que ela pode garantir sucesso tanto acadêmico, quanto profissional.

Sobre a RP na matemática é importante lembrar que ela corresponde a uma dentre outras fases do ensino da matemática pois, de acordo com Lambdin e Walcott (2007 *apud* ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 76, grifo meu) "[...] o ensino de matemática 'experienciou seis fases identificáveis com diferentes ênfases: (1) Exercício e prática; (2) Aritmética significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) **Resolução de problemas**; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade'". Na opinião de Allevato e Onuchic (2021, n.p) "Considerada o 'coração' da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a resolução de intrigantes e importantes problemas".

Onuchic e Allevato (2005) apontam que a RP foi iniciada após os fracassos das duas fases anteriores do ensino de matemática conhecidas como "Matemática Moderna" e "Volta às Bases". Segundo esses mesmo autores a ideias da RP:

> [...] apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico. O foco, nessa fase, foi colocado sobre os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas. Nessa fase, muitos recursos foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividade e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando ao trabalho em sala de aula. Muito desse material contribuiu para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 78).

A importância de uma pessoa ser ensinada a resolver problemas matemáticos repousa no fato dela poder desenvolver uma capacidade não apenas de resolvê-los, mas de identificá-los e analisá-los, desenvolvendo assim seu potencial criativo, bem como sua criticidade e sua autonomia (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Apesar da RP ser entendida, faz algum tempo, como um método, na opinião de Bonilha e Vidigal (2016, p. 9):

> Matemática e resolução de problemas são duas ideias que sempre estão juntas. Não se concebe aprender matemática se não for para resolver problemas; por outro lado, resolver problemas necessariamente inclui alguma forma de pensar matemática. Mesmo os problemas diários ou profissionais exigem que os dados sejam analisados e que alguma estratégia seja pensada para sua resolução, que, depois de executada, precisa ser avaliada para verificação se, de fato, permitiu ou não chegar à solução da situação inicial.

Embora não seja possível citar apenas um "pai" para o método da RP, tendo em vista que muitas pessoas contribuíram para seu desenvolvimento ao longo do tempo, é possível apontar a publicação do livro “How to Solve It" em 1945, traduzido no Brasil como “A arte de resolver problemas”, como um marco para lá de importante que torna o norte-americano Polya, segundo Onuchic e Allevato (2005), o pai do método da RP, ao menos no âmbito da matemática. Segundo o próprio Polya (2006) ele criou o método da RP porque ele ficava incomodado ao perceber que as resoluções matemáticas que aprendia quando estudante funcionavam, mas seu desejo era inventar sozinho, descobrir caminhos próprios para solucionar os problemas. Segundo o mesmo, que foi professor em uma universidade norte-americana, ele:

> Pensa, ou espera, que alguns dos seus alunos mais interessados façam perguntas semelhantes e procura satisfazer a curiosidade deles. Na tentativa de compreender, não só como se resolve este ou aquele problema, mas também as motivações e procedimentos da resolução e procurando explicar a outros essas motivações e esses procedimentos [...] (POLYA, 2006, p. vi).

O que Polya quer dizer é que o método da RP é muito mais do que fazer os alunos perderem medo da matemática ou ensinar os alunos a “fazer contas”. Trata-se de um método que incentiva e potencializa a curiosidade, a imaginação e a inventividade dos alunos. Algo parecido com o que Freire (2002) chama de curiosidade epistemológica que nada mais é do que desenvolver nos sujeitos a capacidade de cada um deles olharem para o mundo e buscar compreender crítica e reflexivamente o que molda a realidade. Apontada a origem da RP partirei, a seguir, para explicar em que consiste esse método.

3.2 O MÉTODO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Antes de tratar em que consiste o método da RP é importante destacar a opinião de Polya (2006), de que auxiliar o aluno no processo de aprendizagem não é fácil, como também exige prática e dedicação dentro de uma dinâmica que envolve a dose certa de autonomia com supervisão e de auxílio com independência:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma **parcela razoável do trabalho**.
> Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, **sem dar na vista**.
> O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar

> compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que **poderia ter ocorrido ao próprio estudante** (POLYA, 2006, p. 1, grifos do autor),

Na opinião de Proença (2022, p. 1136) “O campo da resolução de problemas envolve dois aspectos: o significado de problema e o significado de resolver um problema”, enquanto Polya entende que a RP envolve quatro fases tão importantes, quanto indispensáveis, para que seja obtido sucesso na aprendizagem da RP:

> Primeiro, temos de **compreender** o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um **plano**. Terceiro, **executamos** o nosso plano. Quarto, fazemos um **retrospecto** da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 2006, p. 4-5, grifos do autor),

Não há dúvidas que o método da RP envolve uma série de desafios, especialmente no que tange as necessárias mudanças que precisam ser feitas na postura, no estilo e na abordagem de ensino realizados pelo professor, bem como na postura e na atitude dos alunos também:

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 82)

Indo pelo mesmo caminho Diniz (2007, p. 87) afirma que:

> Analisar a Resolução de Problemas como uma perspectiva metodológica a serviço do ensino e da aprendizagem de matemática amplia a visão puramente metodológica e derruba a questão da grande dificuldade que alunos e professores enfrentam quando se propõe a Resolução de Problemas nas aulas de matemática. A utilização de recursos da comunicação pode resolver ou fazer com que não existam essas dificuldades.

Segundo Polya (2006) e Proença (2018) a resolução de problemas envolve algumas etapas (ou fases) mediante as quais a pessoa desenvolve um processo cognitivo nas quais são realizadas as seguintes etapas de pensamento: representação, planejamento, execução e monitoramento. Tendo a consciência que as mesmas não são lineares é possível resumi-las a partir de Proença (2022) da seguinte maneira:

(a) **representação**: a pessoa apresenta a compreensão do problema – mobiliza conhecimentos linguísticos (entendimento por meio da língua materna de palavras e expressões citadas no problema e das ações cometidas no mesmo), semânticos (significado dos termos matemáticos e das palavras/expressões que remetem ao enunciado do problema e esquemáticos (natureza matemática do problema);
(b) **planejamento**: a pessoa apresenta a estratégia de resolução, mostra os caminhos para a resolução (pode usar tabelas, quadros, equações, tentativa e erro, desenhos, e por aí vai); evidentemente o uso de uma ou outra estratégia pode envolver preferência de quem resolve em ir por um ou por outro caminho;
(c) **execução**: a pessoa executa a estratégia proposta mobilizando o conhecimento procedimental; ela executa cálculos e se vale de esquemas, desenhos, diagramas que, se corretos garantem a execução adequada;
(d) **monitoramento**: a pessoa avalia a resposta e revê a resolução alcançada; apesar de não haver um conhecimento específico nesta fase a pessoa que resolveu o problema verifica a resposta obtida e se a resolução trilhada tem que ser revista caso a resposta obtida não seja adequada.

Apresentados os principais pressupostos do método da RP é preciso mostrar como esse método foi discutido e/ou trabalhado nos artigos localizados por meio desta revisão de literatura.

3.3 APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NAS PESQUISAS VISITADAS SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Richit & Richit (2022) realizaram um estudo de revisão de literatura para avaliar o modelo de barras de Singapura na resolução de problemas aritméticos e algébricos e verificaram que esse recurso é muito bem usado na introdução ao ensino da álgebra, no desenvolvimento de competências e habilidades operatórias na RP com maior exigência, como ferramenta para RP aritméticos desafiadores a nível fundamental, bem como também são abordados com os alunos do Ensino Médio.

De acordo com esses mesmo autores "Pesquisas conduzidas em diferentes contextos têm mostrado os benefícios para o ensino de tópicos matemáticos e resolução de problemas mais exigentes em aulas de Matemática quando incluem o **Modelo de Barras**" (RICHIT & RICHIT, 2022, p. 717, grifo dos autores). Cunha e Laudares (2017) também apresentam um recorte de uma pesquisa mediante a qual se buscou desenvolver uma a educação financeira a partir da resolução de problemas da matemática financeira no Ensino Médio. Para esses autores:

> A metodologia de resolução de problemas trouxe questionamentos como instrumento de investigação, para promover um ensino e aprendizagem de Matemática para educação crítica cidadã, pois, hoje, vivemos numa sociedade capitalista que se conforma por parâmetros sociais e econômicos (CUNHA; LAUDARES, 2017, p. 661).

Como resultado da pesquisa desenvolvida os mesmos autores trazem as seguintes conclusões ao final do processo desenvolvido com os sujeitos que participaram do estudo:

> Perguntamos se o que fora aprendido seria útil ao aluno em alguma situação futura e, também, se lhe acrescentou algum conhecimento. Obtivemos muitas respostas positivas no sentido do que pretendíamos, isto é, promover a Educação Financeira de forma significativa a partir da resolução de problemas da Matemática Financeira. Pudemos verificar no desenvolvimento das atividades que na resolução das primeiras, os estudantes queriam apenas se ater aos cálculos financeiros, o que trouxe dificuldades, pois era necessário fazer interpretação das situações problematizadas. Mas, no decorrer do desenvolvimento das atividades, começaram a interpretar e analisar dados e parâmetros fornecidos nos problemas, o que melhorou sua desenvoltura.
>
> Então, inicialmente, os estudantes acharam as atividades muito cansativas, mas, a partir da segunda, se envolveram de forma a questionar e trazer situações de seu próprio interesse para serem tratadas junto aos colegas e se adequaram à nova proposta de trabalho, em que as respostas não são

> dadas pelo professor, mas construídas por eles em conjunto e em meio à pesquisa, leitura e interpretação (CUNHA; LAUDARES, 2017, p. 675).

Como é possível perceber ao longo deste subcapítulo o método da RP aparece como um importante recurso para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos do ensino médio. Não havendo dúvidas sobre essa questão, partirei para discutir como a RP aparece como um recurso para a formação continuada e inicial dos professores.

3.4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste subcapítulo apresentarei e discutirei sobre como o método da RP aparece citado nos textos que compõem o *corpus* desta revisão de literatura no âmbito da formação inicial e da formação continuada. Indo nessa direção, há estudos que mostram ser importante trabalhar a RP com quem se encontra em formação inicial.

Em uma pesquisa interventiva realizada por Lopes (2013, p. 913) a autora percebeu que “[...] a articulação do uso de tecnologias à resolução de problemas estatísticos possibilitou aos futuros professores de Matemática uma significativa aquisição de conceitos e procedimentos”. Uma outra pesquisa, desenvolvida por Gonçalves e Núñez (2021, p. 469), com 8 acadêmicos do curso de licenciatura em matemática, de uma universidade pública do interior do Ceará, na qual eles notaram que

> [...] nenhum dos alunos [investigados] evidencia, no diagnóstico inicial, ter consciência sobre a realização da ação controle na resolução de problemas matemáticos. Esse fato endossa a afirmação de que a habilidade de controle na resolução de problemas matemáticos dos alunos é pouco desenvolvida, considerando o nível de escolaridade em que eles se situam.

Em um estudo desenvolvido por Lopes (2013, p. 910), a autora mostra o quão foi importante o uso do método da RP no ensino de estatística para licenciandos de matemática:

> No ensino de estatística é mais importante se concentrar no entendimento a partir de dados, usando um julgamento e resolução de problemas, ao invés de simplesmente aplicar fórmulas para calcular números, pois a prioridade

> está sobre o desenvolvimento do pensamento estatístico. O uso de fórmulas deve ser secundário, sua escolha deve ser feita por uma razão específica e ela deve levar a uma conclusão adequada.

Dando algumas dicas sobre como esse processo pode/deve ser realizado, essa mesma autora aponta que:

> Os futuros professores precisam obter uma formação estatística que lhes permita pensar estatisticamente e aprender como promover o desenvolvimento do pensamento estatístico de seus futuros alunos. Para isso, a programação do curso de estatística para a licenciatura precisa ser revista e deve possibilitar aos alunos a apropriação de um conhecimento estatístico que vá além da resolução de problemas, ou seja, deve promover a realização de projetos e atividades de investigação e a problematização de situações diversas; e escolher adequadamente os processos de coleta, representação e análise de dados (LOPES, 2013, p. 912).

Indo na mesma direção Lopes (2013, p. 913) opina que "A formação inicial dos futuros professores de Matemática para atuar na Educação Básica precisa levar em consideração a necessidade de uma formação estatística que os habilite a elaborar atividades que promovam a aprendizagem estatística para além do uso de técnicas [...]".

Também Proença (2022) realizou uma pesquisa com 15 acadêmicos licenciandos em matemática de uma universidade pública do Paraná, próximos de concluir o curso, e mediante a qual ele pode constatar que: a maioria dos licenciandos investigados possuem e se valem de muitos conhecimentos relacionados às habilidades matemáticas para ensinar a matemática, mas eles costumam confundir conhecimentos matemáticos com habilidades matemáticas. Segundo suas palavras: "Observamos que quatro licenciandos revelaram em suas respostas uma compreensão adequada que contemplou a ideia de HM [...]" (PROENÇA, 2022, p. 1144). Sobre tais habilidades convém ressaltar que, na opinião de Proença (2018), as habilidades matemáticas sempre estão envolvidas e/ou são requeridas na RP (PROENÇA, 2018).

Em outro estudo, realizado por Ramos e Manrique (2015, p. 995-996), com professores participantes de um grupo colaborativo de formação de professores, no qual licenciados e licenciandos de matemática trocavam experiências formativas, as autoras avaliaram que:

> [...] a prática desenvolvida pela comunidade possibilitou momentos de reflexão e de discussão, o compartilhamento de experiências, a criação de vínculos afetivos e de respeito mútuo, bem como traços de desenvolvimento profissional e de constituição da identidade de professor. Além disso, segundo relatos de professores e estudantes, melhoria na qualidade das práticas de sala de aula de Matemática.

Como foi possível perceber, o método da RP possui grande importância na visão dos autores investigados tanto na formação inicial quanto na formação continuada. Convém dar uma olhada agora em quais são as principais dificuldades que são apontadas para se trabalhar com a RP com os alunos.

3.5 DIFICULDADES EM TRABALHAR COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS ESCOLAS

De uma maneira geral ficou perceptível, por meio de alguns textos visitados (MENEGHETTI; REDLING, 2012; CUNHA; LAUDARES, 2017; FONSECA; HENRIQUES, 2018), algumas dificuldades e uma certa resistência que os alunos costumam apresentar para iniciar o trabalho com métodos diferentes como a RP. Gonçalves e Núñez (2021, p. 460) mostram uma importante preocupação sobre como o método da RP deve ser trabalhado:

> Durante a resolução de problemas matemáticos, em particular, a falta de critérios objetivos adequados, que permitam ao estudante controlar esse processo, pode fazer com que o seja totalmente desconsiderado, ou realizado de forma tênue durante o processo formativo, impossibilitando, dentre outros aspectos, uma melhor compreensão da solução do problema e a mitigação de erros.

Proença *et al*. (2022, p. 267) afirmam que “[...] no **ensinar para resolução de problemas** é importante que os ‘problemas’ correspondam a situações contextualizadas, pois o uso de um contexto ajuda os alunos a darem sentido ao conteúdo matemático a ser aprendido".

Ainda segundo estudo de revisão realizado por Proença *et al*. (2022, p. 281):

> [...] as dificuldades dos alunos para aplicar conteúdos matemáticos na 'resolução de problemas' estão relacionadas ao uso de conhecimentos semânticos, estratégicos e procedimentais. De outra forma, trata-se de dificuldades de mobilização de conceitos e procedimentos matemáticos que deveriam estar bem formados e que, consequentemente, geraram dificuldades para seguir no processo de resolução de problemas.

Para superar essa situação:

> [...] é necessário que os conceitos e procedimentos matemáticos não sejam apenas apresentados aos alunos como se eles por si só conseguissem abstraí-los e, assim, conseguissem aplicá-los na 'resolução de problemas'. Nesse sentido, pesquisas que tenham interesse no uso do 'problema para aplicação do conteúdo' (PAC), como feito nas seis dissertações aqui analisadas, poderiam adequar a abordagem de resolução de problemas em meio à construção de conhecimentos matemáticos conceituais e procedimentais (PROENÇA *et al*., 2022, p. 281).

Como resultado de um estudo realizado com professores já formados e discentes do curso de licenciatura em matemática notou-se que "os alunos, em sua maioria, não têm os conhecimentos necessários para apresentar soluções para a proposta ou se sentem desmotivados diante dos problemas de Matemática" (RAMOS; MANRIQUE, 2015, p. 990-991).

Tratam-se de questões que podem e devem ser trabalhadas pelos docentes de matemática que se valem do método da RP para sanar esses e outras tantas dificuldades que podem ser encontradas. Ainda mais se for levado em conta as vantagens que o método traz em seu bojo. É sobre isso que tratarei a seguir.

3.6 VANTAGENS DO MÉTODO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Apesar das dificuldades apontadas no subcapítulo anterior, também é nítido que, depois que superam tais circunstâncias e se familiarizam com a RP, a motivação, a participação e as aprendizagens são crescentes (MENEGHETTI; REDLING, 2012; CUNHA; LAUDARES, 2017; FONSECA; HENRIQUES, 2018). Indo nessa direção Meneghetti e Redling (2012) veem no método da RP um grande potencial didático-pedagógico pelo mesmo ser capaz de contribuir com o processo de ensino-aprendizagem dos alunos de uma maneira a se conceber novas formas de ensinar e aprender a matemática na escola, originando contextos de aprendizagens ricos e desafiadores.

Na opinião de Cunha e Laudares (2017, p. 663) a RP "[...] exige uma construção organizacional e argumentativa necessária para gerenciar dados numa estrutura, que sempre está presente numa problematização".

Baseados em uma série de autores Meneghetti e Redling (2012, p. 204) apontam que:

> [...] com a resolução de problemas tem-se a oportunidade de propiciar um diálogo maior entre professor-aluno, aluno-aluno, na busca de soluções para os problemas, promovendo um ambiente rico para aprender matemática, na medida em que esse diálogo proporciona uma maior aproximação dos alunos com os professores, facilitando a verificação dos caminhos trilhados na busca da resposta dos problemas e da apreensão dos conhecimentos matemáticos; e dos próprios alunos que, ao trabalharem em grupos, podem se ajudar mutuamente, utilizando seus conhecimentos prévios.

Também Fonseca e Henriques (2018, p. 1047) perceberam grande vantagem no trabalho com a RP para a aprendizagem de 19 discentes do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro:

> No que diz respeito à resolução de problemas, os estudantes foram capazes de aplicar os seus conhecimentos sobre a definição formal de limite para identificarem expressões algébricas que definem corretamente o limite ou justificarem incorreções nelas presentes e para realizarem uma demonstração.

Por fim, Meneghetti e Redling (2012, p. 202) entendem que “[...] o processo de resolução de problema pode implicar a exploração do contexto para além do que surge no enunciado, e a formulação de questões alternativas”.

Com base em tudo o que foi discutido até aqui não há qualquer dúvida a respeito das potencialidades e das vantagens do professor de matemática trabalhar com o método da RP no cotidiano escolar. De maneira sintética, passando-se em tudo o que foi discutido até aqui, é possível dizer que no trabalho com a RP é possível auxiliar os alunos a: obterem conhecimentos matemáticos contextualizados; desenvolverem a criatividade e a autonomia; desenvolverem o raciocínio lógico; aprender a colaborar e a trocar conhecimentos com seus colegas; sentirem-se preparados para os desafios que a vida lhes coloca, não apenas no âmbito da matemática.

É por acreditar em todo esse processo que o método da RP pode ajudar a gerar nas escolas que fui a campo com o intuito de obter como produto desta dissertação uma mudança na maneira como os alunos do ensino médio, especialmente aqueles que têm dificuldades em aprender matemática, enxergam a essa disciplina escolar.

4 PESQUISA DE CAMPO

A investigação foi realizada em uma escola pública da Rede Estadual do Estado do Espírito Santo que não terá o nome identificado neste texto para garantir o sigilo e o anonimato dos sujeitos que participaram do estudo.

De maneira a caracterizar a escola, tomando o devido cuidado para não identificá-la, posso dizer que a unidade está localizada em um bairro da periferia do município de Guarapari, atende a clientela de sujeitos majoritariamente de renda média baixa. Além disso, a escola durante o ano letivo de 2023 contou com pouco mais do que 400 alunos, sendo que mais de 250 compunham o universo com o qual trabalhei neste estudo.

Nas diversas conversas que tive com os meus colegas de profissão e professores de matemática, relataram que cerca de 65% de seus estudantes apresentavam dificuldade para aprender matemática. De maneira a tentar compreender como os alunos se sentiam construí um questionário que foi impresso e disponibilizado entre as turmas do ensino médio.

Como o objetivo era apenas compreender os sentimentos deles em relação às aprendizagens logradas em matemática, bem como obter o máximo de respostas possíveis, optei por fazer apenas três questionamentos simples. Os dois primeiros como questões fechadas seguindo a escala Likert e o terceiro apresentava um campo aberto que os colaboradores do estudo poderiam preencher, colocando alguma opção que porventura não estivesse presente na questão.

Foi criado um cabeçalho que explicava em linhas gerais o motivo da pesquisa, garantindo a possibilidade do participante desistir de participar se assim o desejasse e mostrando que ele podia ter acesso à maneira como os dados por ele fornecidos eram usados.

Apresento, a seguir, o texto do questionário que foi disponibilizado com as questões que os alunos deveriam responder.

QUESTIONÁRIO SOBRE A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Prezado/a aluno/a, responda as questões 1, 2 e 3 somente se você mostrar concordância nas afirmações A, B, C e D a seguir:

A - **Compreendo** que este questionário poderá contribuir com a primeira fase de um estudo que tem por objetivo **conhecer e compreender meus sentimentos** em relação à aprendizagem em matemática.
(   ) sim
(   ) não

B - Sei que minha participação neste estudo é **voluntária** e que **posso desistir** de preencher este questionário, antes de finalizá-lo, **sem qualquer tipo de prejuízo**.
(   ) sim
(   ) não

C - Declaro que **não sofri qualquer tipo de pressão ou coação** para participar deste estudo.
(   ) sim
(   ) não

D - Estou ciente de que **posso ter acesso**, a qualquer momento, à forma como os **dados por mim fornecidos** estão sendo tratados e que os mesmos serão utilizados para finalidades acadêmicas (publicações de textos em congressos, revistas e livros).
(   ) sim
(   ) não

Se você concordou com as afirmativas presentes nas letras A, B, C e D responda às questões a seguir:

1) Como você avalia sua aprendizagem em matemática?
(   ) aprendo muito rápido
(   ) aprendo, embora de maneira mais lenta
(   ) normal

( ) tenho alguma dificuldade para aprender
( ) para mim é quase impossível aprender matemática

2) Como são suas notas em matemática?
( ) excelentes
( ) boas
( ) medianas
( ) ruins
( ) péssimas

3) Mesmo que você aprenda com facilidade os conceitos e conteúdos trabalhados na disciplina de matemática, assinale aquelas que você considera as maiores dificuldades que um aluno pode apresentar para aprender matemática:
( ) acho decoreba de fórmulas
( ) não entendo o que o professor explica
( ) não vejo aplicabilidade para minha vida
( ) não consigo entender o que devo fazer
( ) não tenho base para aprender matemática
( ) não gosto de errar
( ) não tenho apoio para aprender
( ) não consigo praticar fora da escola
( ) outros/s: Qual/is: ____
____
____

4.1 ANÁLISE SOBRE O QUESTIONÁRIO ACIMA APLICADO

Do total de 254 alunos, sete turmas da escola, que selecionamos para aplicar o questionário foi aplicado, 250 preencheram e devolveram o instrumento de pesquisa. Com tais números foi atingido 98,4% de devolutiva que acredito que foram alcançados devido ao incentivo dado pelos professores que também se interessaram pelo estudo e prometeram, naquele trimestre, dois (2) pontos de bônus na média, de 30 possíveis, para quem preenchesse e devolvesse o questionário. Vale destacar que com tais números garantimos uma devolutiva quase que plena e muito acima dos 25%

previstos por Marconi e Lakatos (2022) para questionários. Não tenho dúvidas que o bônus de dois (2) pontos na média foi fundamental para uma adesão tão alta ao estudo. Isso me faz acreditar que os alunos são capazes de fazer muitas coisas para tentarem conseguir aumentar suas notas diante de uma disciplina que eles consideram tão difícil para eles.

Apresento, a seguir, os gráficos que foram construídos com base nas respostas fornecidas pelos alunos e algumas reflexões sobre esses dados.

4.1.1 Como você avalia sua aprendizagem em matemática?

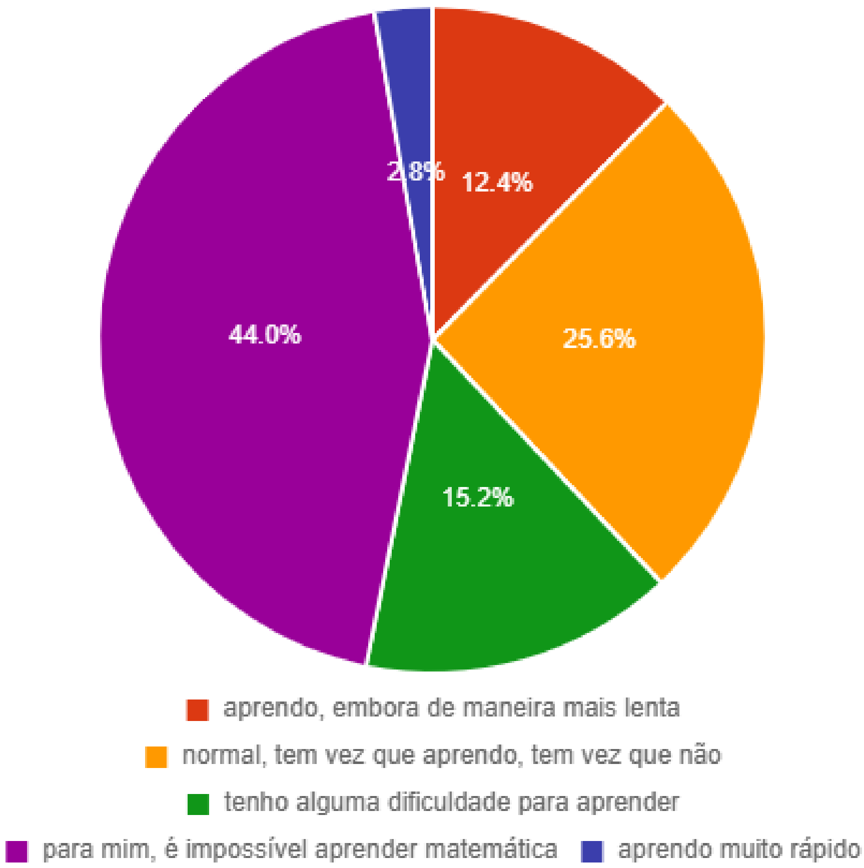


Figura 1 – Como os alunos avaliam sua a própria aprendizagem em matemática
Fonte: A autora.

Como é possível perceber o percentual de alunos que admitiram ter dificuldades na aprendizagem em matemática foi de 59%, 44% consideram ser praticamente impossível aprender matemática e 15% afirmam que tem alguma dificuldade. Esses números são um pouco menores, mas muito próximos da estimativa que os docentes faziam de que 65% tinham dificuldade para aprender matemática.

Chama muito a atenção o fato de que apenas 15% do quantitativo de participantes do estudo conseguem sempre aprender a matemática, sendo que um irrisório 3% aprende com grande facilidade e rapidez. Se for levado em conta que 26% dos alunos aprendem alguns conteúdos, mas outros não e que consideram isso normal, temos um quantitativo de 85% dos alunos que praticamente nunca aprendem matemática ou aprendem com dificuldade ou que consideram sem problemas aprender alguns conteúdos e outros não.

4.1.2 Como são suas notas em matemática?

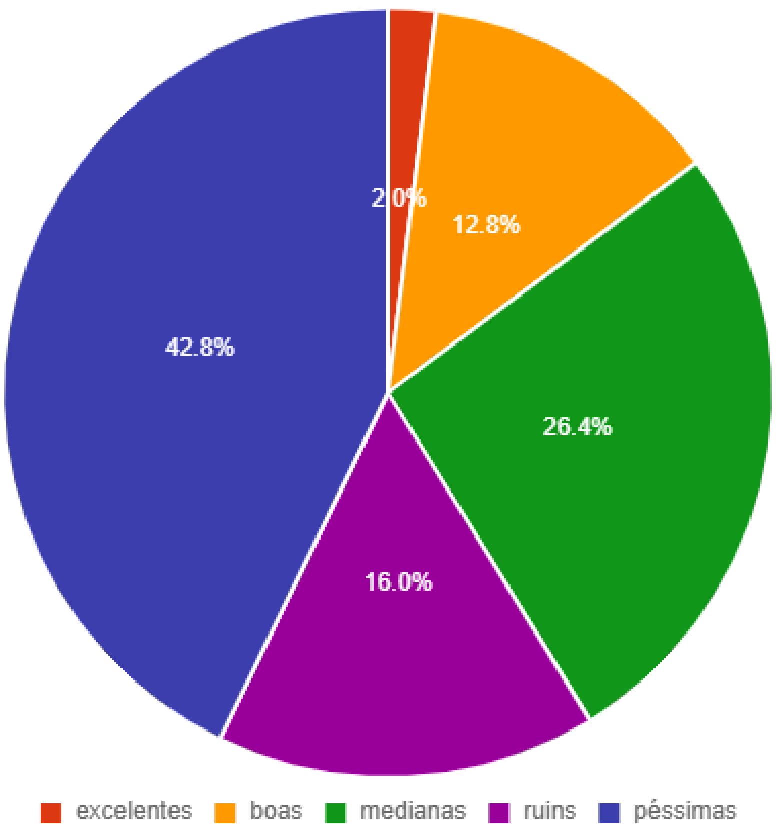


Figura 2 – Como os alunos avaliam suas notas em matemática

Fonte: A autora.

A Figura 2 mostra como os alunos avaliam o próprio rendimento na disciplina matemática. Somente 2% deles consideram obter notas excelentes, 13% creem ter notas boas, 26% acham que as notas são medianas, 16% as veem como ruins e 43% como péssimas. Chama a atenção que um quantitativo de 59% dos alunos participantes da pesquisa perceberem suas notas como ruins ou péssimas.

4.1.3 Mesmo que você aprenda com facilidade os conceitos e conteúdos trabalhados na disciplina de matemática, assinale aquelas que você considera as maiores dificuldades que um aluno pode apresentar para aprender matemática

Constatada a dificuldade dos alunos na aprendizagem e no rendimento (por meio das notas obtidas nas avaliações), era preciso compreender quais os motivos que levavam os alunos a acharem a matemática tão difícil. Solicitados a responder quais as maiores dificuldades que um aluno podia apresentar durante a aprendizagem, mesmo que quem respondesse não as tivesse, os alunos forneceram um raio-x daquilo que, na opinião deles, poderia/deveria mudar no ensino da matemática (Figura 3).

Importante destacar que as afirmações que aparecem com a barra verde foram citadas pelos alunos no campo “outros” que permitia que eles acrescentassem algo que eles entendiam que faltava nas opções disponíveis no questionário. As afirmações listadas nas barras azuis constavam previamente no questionário disponibilizado para eles.

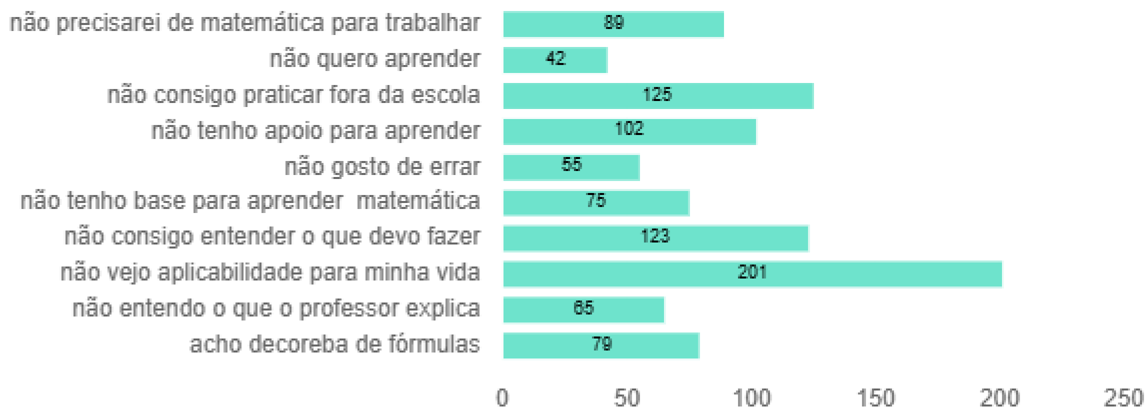


Figura 3 – Quais as maiores dificuldades que um aluno pode apresentar na aprendizagem da matemática

Fonte: A autora.

Chama a atenção que 201 de 250 (80,4%) afirmam que “não veem aplicabilidade para a vida” dos conceitos e conhecimentos obtidos com a aprendizagem da matemática. É possível contrariar facilmente tais afirmações ao mostrar para esses sujeitos que a matemática: (a) está presente na vida cotidiana até mesmo das pessoas mais simples que precisam elaborar um orçamento, projetar onde aplicará seus proventos e até mesmo em situações de jogos e atividades recreacionais; (b) é crucial para muitas profissões que envolvem o uso de tecnologia (engenharias, negócios e finanças, entre outras) e até mesmo para os atletas de alto rendimento que se utilizam da estatística na análise de desempenho e na construção de estratégias de jogo; (c) a tecnologia moderna está baseada na matemática, tendo em vista o uso de algoritmos e a criptografia de dados que nada mais são do que linguagem matemática.

O segundo e o terceiro maiores itens citados pelos alunos são “não conseguir praticar fora da escola”, com 125 alunos (50%), e “não conseguir entender o que deve fazer”, com 123 alunos (49,2%), podem ser relacionados. A falta recursos didáticos adequados (livros, materiais de apoio), o pouco investimento no protagonismo, na motivação e na iniciativa dos alunos, o uso de abordagens didáticas desestimulantes para o ensino da matemática também influencia o desejo em aprender a matemática, levando esses sujeitos a acharem que a matemática é desinteressante, quase impossível de aprender.

A quarta afirmação mais citada pelos alunos de que eles “não têm apoio para aprender”, 102 alunos (40,8%), pode ser vista quase que como um pedido de socorro. Nesse sentido, é preciso envolver não apenas os professores, mas também seus familiares e responsáveis nessa jornada. Aos educadores, que não são os únicos responsáveis por esse processo, convém recomendar: a contextualização e a aplicação prática da matemática na vida das pessoas; o uso de estratégias de ensino diversificadas; o estímulo aos alunos levando-os a compreenderem seus progressos paulatinos eliminando a ideia de fracasso se ele ainda não domina tudo o que precisa para resolver um problema. Os pais, mesmo que não dominem a matemática, devem ser envolvidos no processo. Eles precisam compreender os progressos feitos por seus entes queridos e entenderem que isso corresponde a um processo que deve ser fortalecido em casa por meio do encorajamento, da disciplina nos estudos, no encorajamento e no reconhecimento das conquistas paulatinas de seus filhos na aprendizagem.

A quinta afirmação mais presente, e primeira entre as duas citadas espontaneamente, na qual eles afirmam que, “não precisarão de matemática para trabalhar”, 89 alunos (35,6%), mostra que eles acreditam que só devem aprender aquilo que forem usar diretamente. Importa considerar que essa compreensão de que a matemática não é necessária para algumas atividades profissionais origina-se de uma compreensão equivocada do papel dessa área do conhecimento na vida cotidiana e no mundo do trabalho. A matemática é importante não apenas para as mais diversas profissões, como também para a vida cotidiana. O próprio método da RP pode ajudar os alunos a abordar um desafio, matemático ou não, de maneira diferente em sua vida. Pode também construir nesse sujeito uma capacidade de compreender situações complexas, interpretar dados e informações e tomar decisões mais acertadas.

A sexta afirmação em número de respostas mostra que 79 alunos (31,6%) afirmam que não aprendem matemática porque “acham decoreba de fórmulas”. Diante dessa impressão dos alunos não há dúvidas que é necessário mudar o ensino de matemática, transformando-o em um momento mais significativo, mostrando que uma fórmula nada mais é do que a expressão simbólica representativa das relações mantidas entre grandezas matemáticas. Para que isso aconteça a matemática precisa assumir um caráter mais prático, com um ensino mais contextualizado, demonstrando que muitas fórmulas foram/são obtidas por meio da observação de padrões existentes, por dedução e por raciocínio lógico que descrevem fenômenos e comportamentos.

,“não tem base para aprender matemática”, 75 alunos (30%)
“não entende o que o professor explica”, 65 alunos (26%)
“não gosto de errar”, 55 alunos (22%)
“não quer aprender”, 42 alunos (16,8%)

Após a sondagem realizada foi realizada a intervenção que será apresentada no capítulo seguinte, bem como os resultados alcançados com ela.

5 A INTERVENÇÃO REALIZADA: DESAFIOS MATEMÁTICOS

Após a análise do questionário respondido pelos alunos, decidi apresentá-los um livro bastante conhecido no meio da Resolução de Problemas, “A Arte de Resolver Problemas”, de George Polya (2006), um clássico da literatura no assunto. Nesse livro há estratégias de resolução de problemas, a qual busquei seguir, baseada em Polya, para levar os alunos a chegarem numa solução mais facilmente.

Conhecendo as estratégias sugeridas por Polya, trabalhei o método da RP com os alunos do ensino médio da escola investigada. Apresentarei, mais a frente, os problemas desenvolvidos com os alunos. São problemas matemáticos de nível fácil, médio e difícil. Mas antes, apresentarei as estratégias que foram trabalhadas com os alunos durante as 8 semanas nas quais eles experimentaram a RP.

1º: Compreender primeiro, para depois começar!

Quando nos for proposto um problema, a primeira coisa a fazer é compreendermos bem suas regras, os dados que foram fornecidos e as hipóteses com as quais teremos que lidar. Temos que ter uma visão geral sobre o que deve ser resolvido, observando o lugar de cada um dos dados e como eles se complementam mutuamente e se encaixam uns com os outros.

2º: Planejar uma estratégia para a resolução!

Uma ótima coisa a fazer é anotar todas as ideias que surgirem para a resolução do problema, até aquelas mais simples e aparentemente inúteis. Algumas vezes aquelas em que menos apostamos podem revelar-se as mais apropriadas e úteis! É dessa quantidade de ideias (*brainstorming*) que surgirá a qualidade necessária para o alcance do objetivo.

3º: Procurar semelhanças com outros problemas conhecidos!

É importante procurar semelhanças do problema a ser resolvido com outros que já conheçamos e que já tenhamos resolvido anteriormente ou cuja solução simplesmente vimos. Pergunte a você mesmo: o que é que esse problema me faz lembrar? Há algum problema parecido com esse que eu tenha feito ou visto? Uma vez um professor meu me disse que quanto mais problemas resolvidos conhecermos maior será o nosso banco de estratégias para resolução de outros e, consequentemente, maior será a probabilidade de os resolvermos. Isto é a mais pura verdade.

4º: Regredir para avançar pode funcionar!

Talvez o problema a ser resolvido seja complicado porque contém muitas variáveis e hipóteses/informações. Muitas vezes se torna interessante simplificarmos esses elementos, construindo um “novo problema”, menos complicado, com menos dados, mas que mantenha a essência do problema original. Talvez essa atitude nos revele algo que facilite aquilo que é mais complexo no problema original.

5º: Experimentar, tentar, errar, mas não desanimar!

A história da humanidade mostra que a evolução da Matemática se deu por meio de tentativas, erros, correções, adaptações, aperfeiçoamentos e avanços. Em geral, o caminho para resolver um problema passa por tudo isso. O importante é não desanimar.

6º: Fazer esquemas, diagramas ou desenhos pode ajudar!

Muitos de nós pensamos melhor e de forma mais organizada explorando a nossa visão. Fazer desenhos, diagramas, figuras e esquemas que ilustrem o problema proposto e articulem os elementos fornecidos pode ser uma boa ideia. Como se diz por aí: uma imagem vale mais do que mil palavras.

7º: Explorar a simetria!

Vários problemas, particularmente os de determinação de estratégias vencedoras em jogos, que serão tratados no capítulo intitulado “Jogos”, podem ser resolvidos quando exploramos simetrias existentes em figuras, tanto de forma explícita como implícita. Fique sempre atento a isso.

8º: Usar o método de “redução ao absurdo” pode ser uma alternativa!

Para demonstrar que uma afirmação é verdadeira podemos iniciar nossos argumentos supondo que ela seja falsa. A partir daí, racionando logicamente, tentamos encontrar uma contradição ou absurdo, isto é, tentamos chegar a uma conclusão que sabidamente seja falsa. Se conseguirmos isto, concluiremos que a nossa afirmação inicial tem que ser verdadeira!

9º: Supor o problema resolvido e partir do fim para o início!
Uma tática especialmente utilizada em resolução de problemas é "supor o problema resolvido". Quando o imaginamos assim, construindo de forma aproximada como tudo deve funcionar, temos a oportunidade de explorar as relações entre os elementos dados e os que procuramos e, daí, pode surgir uma ideia que nos faça ver um caminho para chegar à solução.

Outras orientações:

10º: Não teime excessivamente com uma ideia. Se as coisas complicarem demais, possivelmente haverá outro caminho, menos árduo.

11º: Ao concluir a resolução de um problema, é preciso ter certeza de que ela está coerente e correta. Por isso, analise-a com cuidado e veja se a resposta tem sentido e que não entra em conflito com hipóteses e dados do problema.

12º: Se você tentou durante muito tempo e não conseguiu resolver um problema, não desanime. Pesquise e olhe a solução de outra pessoa. Muitas vezes aprendemos muito mais, e mais profundamente, com os problemas que tentamos resolver com interesse e persistência, e não conseguimos, do que com aqueles que se resolvem à primeira vista.

13º: É essencial que você reflita sobre seu próprio processo de pensamento. Cada um tem seu próprio estilo de pensamento. O seu é visual ou analítico? Depende mais de expressões verbais ou da forma escrita? Você tende a se apegar a uma ideia única, sem flexibilidade? Tende a pensar em círculos? Como você poderia otimizar o fluxo de ideias novas, variadas e originais?

Apresentadas as orientações, é preciso seguir com os problemas que foram trabalhados.

5.1 BARRA DE OURO OU TIGRE FEROZ

Luís é prisioneiro do temível imperador Ivan. Ivan coloca Luís à frente de três portas e lhe diz: “Atrás de uma destas portas encontra-se uma barra de ouro, atrás de cada uma das outras, um tigre feroz. Eu sei onde cada um deles está. Podes escolher uma porta qualquer. Feita tua escolha, abrirei uma das portas, entre as que não escolheste, atrás da qual sei que se encontra um dos tigres, para que tu mesmo vejas uma das feras. Aí, se quiseres, poderás mudar a tua escolha”. Luís, então, escolhe uma porta e o imperador abre uma das portas não-escolhidas por Luís e lhe mostra um tigre. Luís, após ver a fera, e aproveitando-se do que dissera o imperador, muda sua escolha e diz: “Temível imperador, não quero mais a porta que escolhi; quero, entre as duas portas que eu não havia escolhido, aquela que não abriste”. Qual a probabilidade de que, agora, nessa nova escolha, Luís tenha escolhido a porta que conduz à barra de ouro?

Solução:

Para resolver esse problema utilizaremos o 3º passo sugerido por Polya que é encontrar semelhança com outros problemas conhecidos. Esse problema é análogo ao Problema de Monty Hall, onde o apresentador apresentava três portas ao jogador. Atrás de uma delas estava um prêmio (um carro) e, atrás das outras duas, dois bodes. Nesse problema, se o jogador mantivesse a porta escolhida inicialmente teria $\frac{1}{3}$ de chance de ganhar o carro, mas caso decidisse trocar de porta após o apresentador abrisse a porta que tinha um dos bodes, o jogador teria $\frac{2}{3}$ de chance de ganhar o carro.

Fazendo assim uma analogia ao problema da barra de ouro ou tigre feroz, Luís tem $\frac{2}{3}$ de chance de encontrar a barra de ouro.

5.2 ORGANIZANDO UMA COLEÇÃO

Eduardo tem uma coleção de carrinhos e tem no total 35 carrinhos. Um certo dia, ele decidiu organizar sua coleção em suas 8 caixas. Porém, teve uma ideia, nenhuma caixa ficará vazia e todas elas terão quantidade diferentes de carrinhos. Ele conseguirá organizar?

Solução:

Como possuímos 35 carrinhos e 8 caixas, e queremos quantidade diferentes em cada caixa, para resolver podemos fazer as possíveis somas com 8 parcelas distintas que nos dê como resultado o número 35.

Porém, esse pode ser um processo mais demorado, então, iremos seguir o 4º passo sugerido por Polya que fala que regredir para avançar pode funcionar.

Pensaremos em um novo problema: quantos carrinhos, no mínimo, Eduardo precisa ter para colocá-los em 8 caixas, de modo que duas caixas não fiquem com o mesmo número de carrinhos e que nenhuma caixa fique vazia?

Resolveremos esse novo problema e a partir do resultado, retornaremos ao problema original.

Como queremos uma quantidade mínima e nenhuma caixa ficará vazia, colocaremos na primeira caixa 1 carrinho. Na segunda caixa, colocaremos 2 carrinhos. Na terceira caixa, por sua vez, colocaremos 3 carrinho. E assim, sucessivamente, até chegar na oitava e última caixa, onde colocaremos 8 carrinhos.

Com isso, teremos um total de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ carrinhos nas caixas.

Portanto, serão necessários 36 carrinhos, no mínimo, para organizá-los de forma que duas caixas não fiquem com o mesmo número de carrinhos e que nenhuma caixa fique vazia.

Voltando agora para o problema inicial, Eduardo possui as mesmas 8 caixas, porém apenas 35 carrinhos. Logo, ele não conseguirá organizar seus carrinhos da forma que ele deseja.

5.3 DETERMINANDO UMA RAIZ INTERIA DO POLINÔMIO DE TERCEIRO GRAU

Encontre uma raiz inteira do polinômio $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$

Solução:

Durante a formação no ensino fundamental e médio, aprendemos apenas a solucionar equações do primeiro grau ou do segundo grau utilizando a Fórmula de Bhaskara. Porém, algumas vezes podemos encontrar equações polinomiais do terceiro grau, ou um outro grau qualquer.

Iremos encontrar uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$ através de tentativas. Logo devemos nos apegar no 5º passo de Polya, que nos diz que temos que experimentar, tentar, errar, mas não desanimar.

Para $x = 0$, temos:
$0^3 + 3.0^2 - 13.0 - 15 = 0 + 0 - 0 - 15 = -15$
Logo, $x = 0$ não é solução da equação.

Para $x = 1$, temos:
$1^3 + 3.1^2 - 13.1 - 15 = 1 + 3 - 13 - 15 = 4 - 28 = -24$
Logo, $x = 1$ não é solução da equação.

Para $x = -1$, temos:
$(-1)^3 + 3.(-1)^2 - 13.(-1) - 15 = -1 + 3 + 13 - 15 = 16 - 16 = 0$
Logo, $x = -1$ é solução da equação.

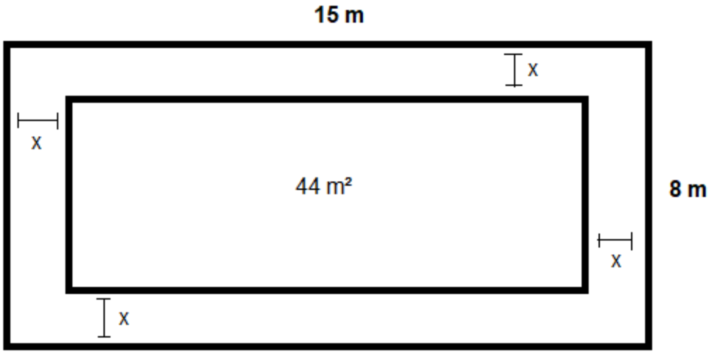
Portanto, a equação $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$ tem como raiz inteira -1.

5.4 QUAL A LARGURA DA FAIXA DE GRAMA

João mora em uma casa e deseja construir uma piscina para ele e seus filhos brincarem. Ele possui um espaço nos fundos de sua casa no formato retangular de 15 metros por 8 metros. Ele deseja, também, que em volta dessa piscina tenha uma faixa de grama de forma uniforme, ou seja, a largura dessa faixa de grama seja igual em todos os lados dessa piscina. Qual deverá ser a largura dessa faixa de grama, sabendo que a área da piscina deverá ser $44m^2$?

Solução:

Para visualizar melhor esse problema, iremos seguir o 6º passo de Polya que é fazer esquemas, diagramas ou desenhos para ajudar.



Olhando para o retângulo interno, temos como comprimento $15 - 2x$, largura $8 - 2x$ e área $44m^2$. Logo, $(15 - 2x).(8 - 2x) = 44$.

Para descobrirmos a largura dessa faixa de grama, basta resolver a equação $(15 - 2x).(8 - 2x) = 44$.

Então:

$$(15 - 2x).(8 - 2x) = 44$$

$$120 - 30x - 16x + 4x^2 = 44$$

$$4x^2 - 46x + 76 = 0 \quad : (2)$$

$$2x^2 - 23x + 38 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-23)^2 - 4.2.38$$

$$\Delta = 529 - 304$$

$$\Delta = 225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-23) \pm \sqrt{225}}{2.2}$$

$$x = \frac{23 \pm 15}{4}$$

$$x_1 = \frac{23 - 15}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{23 + 15}{4} = \frac{38}{4} = 9{,}5$$

Encontramos duas possíveis soluções, $x = 2$ ou $x = 9{,}5$. Mas, $x = 9{,}5$ não pode ser solução, pois a largura do terreno é 8 metros, e consequentemente $x < 8$.

Portanto, a largura da faixa de grama deve ser igual a 2 metros.

5.5 DETERMINE A ÁREA

(ENEM 2008) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado grande de acordo com o esquema da $figura\ 1$. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar diversidade de formas, como as exemplificadas nas $figuras\ 2$ e 3.

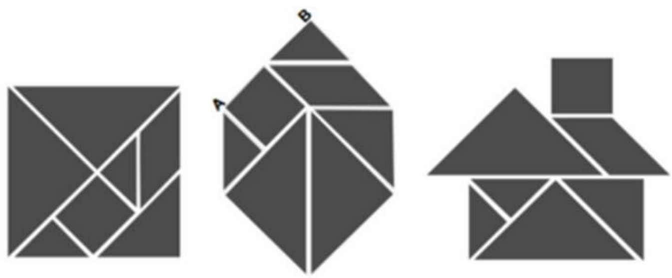


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na $figura\ 2$ mede $2\ cm$, então a área da $figura\ 3$, que representa uma "casinha", é igual a?

Solução:

De acordo com Polya, no seu 7º passo, em alguns problemas se explorarmos a simetria, tanto a explícita quanto a implícita, conseguiremos resolver de forma mais fácil.

No problema dado, se observarmos, o lado AB da $figura\ 2$ é formado pelos lados de um quadrado e um triângulo, que também são encontrados na diagonal do quadrado da $figura\ 1$. Sabemos, também, que as diagonais do quadrado se encontram em seus pontos médios, e portanto a diagonal do quadrado da $figura\ 1$ mede $4\ cm$.

Além disso, as diagonais do quadrado são congruentes, ou seja, as duas diagonais do quadrado da $figura\ 1$ medem $4\ cm$.

Sabemos que todo quadrado também é um losango, e portanto, utilizaremos a fórmula da área do losango para calcular a área da $figura\ 1$.

Daí, temos que:

$$A = \frac{D.d}{2} = \frac{4.4}{2} = \frac{16}{2} = 8\ cm^2.$$

Portanto, a área da casinha, representada pela $figura\ 3$, é $8\ cm^2$.

5.6 QUEM NÃO PAGOU A ENTRADA

Quatro amigos vão ao museu e um deles entra sem pagar. Um fiscal quer saber quem foi o penetra:

- Eu não fui, diz o Benjamim.

- Foi o Pedro, diz o Carlos.

- Foi o Carlos, diz o Mário.

- O Mário não tem razão, diz o Pedro.

Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada?

Solução:
Iremos seguir o 8º passo sugerido por Polya, que é o método da redução ao absurdo. E para isso, vamos supor inicialmente que Mário falou a verdade.

Então, se Mário falou a verdade, então o Carlos não pagou a entrada. Assim, o Carlos mentiu, pois o mesmo afirmou que havia sido o Pedro que não havia pago. E portanto, Benjamin e Pedro falaram a verdade. Mas, a afirmação de Pedro diz que Mário não tem razão, chegando assim numa contradição, pois inicialmente afirmamos que Mário disse a verdade. Logo, Mário foi quem mentiu.

Sabendo que Mário mentiu, e Benjamin, Carlos e Pedro falaram a verdade, concluímos através da fala de Carlos que quem não pagou a entrada foi o Pedro.

5.7 QUAL NÚMERO PENSEI?

Pensei em um número, somei 5 e dividi por 2. Tive como resultado o número 4. Que número é esse?

Solução:

Seguiremos o 9º passo de Polya, que é supor o problema resolvido e partir do fim para o início. Logo, iremos partir da resposta e faremos o processo inverso, utilizando as operações inversas.

O problema nos deu duas operações, a primeira uma adição e a segunda uma divisão, logo para fazer o processo inverso iremos fazer primeiramente uma multiplicação e logo após uma subtração.

Assim, pegaremos a resposta 4 e multiplicaremos por 2, e o resultado iremos subtrair. Logo, $(4..2) - 5 = 3$.

Portanto, o número pensado foi 3.

5.8 QUANTAS EQUIPES CONSIGO FORMAR?

Um hospital tem um total de 4 médicos e 8 enfermeiros no quadro de funcionários. Eles pretendem formar equipes com 5 pessoas possuindo obrigatoriamente pelo menos 1 médico. Quantas equipes distintas podem ser formadas?

Solução:

Nesse problema podemos resolver de duas maneiras distintas:

- Formar equipes com 1 médico e 4 enfermeiros, com 2 médicos e 3 enfermeiros, com 3 médicos e 2 enfermeiros, com 4 médicos e 1 enfermeiro e no final somar todos os valores encontrados;
- Formar equipes com 5 pessoas utilizando os 12 funcionários disponíveis sem distinção entre eles, formar equipes com 5 pessoas sem nenhum médico, e no final subtrair os valores encontrados.

Ambas as sugestões chegaremos ao mesmo resultado, porém a primeira sugestão visivelmente é mais demorada, pois requer um número maior de cálculos. Polya, no seu 10º passo, sugere que não se teime excessivamente com uma ideia, pois se as coisas complicarem, possivelmente haverá um caminho mais fácil.

Resolveremos o problema de duas maneiras diferentes para podermos analisar qual seria o caminho menos árduo.

1ª solução:

Equipes com 1 médico e 4 enfermeiros:

$C_{4,1}.C_{8,4} = \frac{4!}{(4-1)!1!}.\frac{8!}{(8-4)!4!} = \frac{4!}{3!1!}.\frac{8!}{4!4!} = \frac{4.3!}{1.3!}.\frac{8.7.6.5.4!}{4.3.2.1.4!} = \frac{4}{1}.\frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = 280$ equipes.

Equipes com 2 médicos e 3 enfermeiros:

$C_{4,2}.C_{8,3} = \frac{4!}{(4-2)!2!}.\frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{4!}{2!2!}.\frac{8!}{5!3!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!}.\frac{8.7.6.5!}{3.2.1.5!} = \frac{4.3}{2.1}.\frac{8.7.6}{3.2.1} = 336$ equipes.

Equipes com 3 médicos e 2 enfermeiros:

$C_{4,3}.C_{8,2} = \frac{4!}{(4-3)!3!}.\frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{4!}{1!3!}.\frac{8!}{6!2!} = \frac{4.3!}{1.3!}.\frac{8.7.6!}{2.1.6!} = \frac{4}{1}.\frac{8.7}{2.1} = 112$ equipes.

Equipes com 4 médicos e 1 enfermeiro:

$C_{4,4}.C_{8,1} = \frac{4!}{(4-4)!4!}.\frac{8!}{(8-1)!1!} = \frac{4!}{0!4!}.\frac{8!}{7!1!} = \frac{4!}{0!4!}.\frac{8.7!}{1.7!} = \frac{1}{1}.\frac{8}{1} = 8$ equipes.

Daí, temos $280 + 336 + 112 + 8 = 736$ equipes formados por 5 pessoas e com, pelo menos, 1 médico.

2ª solução :

Inicialmente, encontraremos quantas equipes de 5 pessoas conseguimos formar utilizando os 12 funcionários, sem distinção entre eles, então:

$C_{12,5} = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5.4.3.2.1.7!} = \frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1} = 11.9.8 = 792$ equipes.

Agora, encontraremos quantas equipes de 5 pessoas conseguimos formar sem nenhum médico, então:

$C_{8,5} = \frac{8!}{(8-5)!5!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.1.5!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 8.7 = 56$ equipes.

Daí, temos $792 - 56 = 736$ equipes formados por 5 pessoas e com, pelo menos, 1 médico.

5.9 PATOS E CACHORROS

Num sítio existem 21 bichos, entre patos e cachorros. Sendo 54 o total de pés desses bichos, determine quantos patos e quantos cachorros há nesse sítio.

Solução:

Chamando de p o número de patos e c o número de cachorros, temos que $p + c = 21$. Sabemos que cada pato possui dois pés e cada cachorro possui quatro pés e portanto $2p + 4c = 54$.

Com isso, temos um sistema polinomial do primeiro grau de duas variáveis, ou seja, para solucionar o problema basta resolver o sistema:

$$p + c = 21 \quad (I)$$
$$2p + 4c = 54 \quad (II)$$

Para utilizar o método da adição na resolução do sistema acima, multiplicaremos a equação (I) por -2:

$$p + c = 21 \quad .(-2)$$
$$-2p - 2c = -42 \quad (III)$$

E agora, adicionaremos a equação (III) com a equação (II), então:

$$-2p - 2c = -42$$
$$+$$
$$2p + 4c = 54$$

$$2c = 12$$
$$c = 6$$

Como $c = 6$, substituindo na equação (I) temos:

$$p + 6 = 21$$
$$p = 21 - 6$$
$$p = 15$$

Portanto, temos 15 patos e 6 cachorros.

Segundo Polya, no 11º passo, ao concluirmos uma resolução, precisamos ter certeza de que ela está coerente e correta. Assim, verificaremos se a quantidade total de animais está coincidindo com o enunciado do problema, se sim, calcularemos o total de patas e verificaremos se também coincida com o enunciado.

Como achamos 15 patos e 6 cachorros, temos um total de 21 bichos. Agora, sabendo que cada pato tem 2 pés e cada cachorro tem 4 pés, temos um total de $15.2 + 6.4 = 30 + 24 = 54$ pés.

Ambos os valores coincidiram com o enunciado, e portanto, podemos concluir que o resultado encontrado está coerente e correto.

6 DISCUSSÃO DA INTERVERNÇÃO REALIZADA

Após um trabalho de quase 2 meses abordando as sugestões de Polya para resolver problemas matemáticos com os alunos, fizemos uma roda de conversa para saber o que eles acharam da abordagem.

De forma geral, os alunos ficaram bastante empolgados, pois muitos deles descobriram algumas metodologias que nunca tinham visto em anos anteriores, e consequentemente, uma maior facilidade em resolver os exercícios propostos.

Foi abordado as dificuldades que tiveram inicialmente, e de longe a mais citada foi a interpretação inicial do problema e a extração das informações. A resolução da conta, em si, era a parte mais fácil.

Segundo os alunos, as lembranças que eles têm é que a partir do momento que entrou “uma letra” na matemática, a dificuldade aumentou de forma exponencial. E a partir desse período escolar cada conteúdo novo vinha com inúmeras fórmulas, e muitas das vezes os exercícios passados pelos professores eram apenas extrair os números e aplicar na fórmula adequada.

Falas como “quem dera se todo professor explorasse a matemática dessa forma”, “nunca pensei que reescrever um problema e resolver ele, poderia me ajudar a resolver um problema mais a frente” e “quando eu pensava em matemática só vinha na minha cabeça milhões de fórmulas, agora consigo ver um pouco diferente a matemática” me mostraram que a resolução de problemas pode transformar a matemática em algo mais interessante e menos monótona para os alunos.

Ao final da roda de conversa, entreguei um questionário, com apenas uma pergunta, para que os alunos fizessem uma autoanálise de seu resultado após o contato com a resolução de problemas.

Apresento a seguir, o texto do questionário que foi disponibilizado o qual os alunos deveriam responder.

QUESTIONÁRIO PÓS CONTATO COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Após trabalharmos com resolução de problemas, como você avalia sua própria aprendizagem em matemática?

( ) a matemática ficou mais fácil

( ) melhorou um pouco

( ) nem melhorou, nem piorou

( ) continua sendo difícil

( ) continua praticamente impossível

6.1 ANÁLISE SOBRE O QUESTIONÁRIO ACIMA APLICADO

Dos 254 alunos que peguei para a amostra e estudo, 246 preencheram e devolveram a autoanálise. Apresento, a seguir, o gráfico que foi construído com base nas respostas fornecidas pelos alunos e algumas reflexões sobre esses dados.

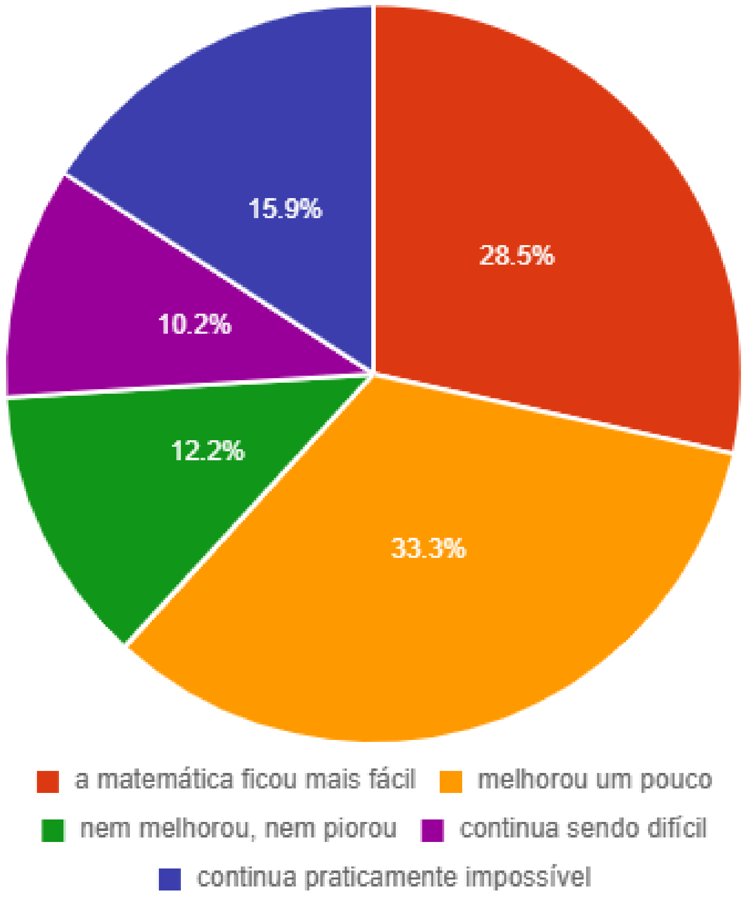


Figura 4 – Como os alunos avaliam sua a própria aprendizagem em matemática

Fonte: A autora.

Podemos perceber que 152 alunos (62%) deram um retorno positivo quanto a sua visão da matemática após a utilização da metodologia de resolução de problemas.

Os outros 94 alunos não tiveram resultados positivos. Para 30 alunos (12%), a matemática continua sendo a mesma, e para 64 alunos (26%), a matemática também continua sendo a mesma, porém na visão deles ela é difícil/impossível.

Após essa análise do questionário, observei de perto esses 64 alunos, e pude concluir que a dificuldade deles vem desde os princípios da matemática, ou seja, desde as operações básicas, impossibilitando os mesmo de desenvolverem outras habilidades. E consequentemente, se sentem desmotivados ao tentar resolver qualquer exercício matemático

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O aluno precisa ter uma boa base matemática, pois ao avançar as séries vai sendo exigido do aluno o conteúdo estudado anteriormente. As operações básicas precisam ser bastante trabalhadas nos anos iniciais, mas não apenas em exercícios que trazem como enunciado “efetue”. É necessário que o professor contextualize e incentive o aluno a interpretar o problema apresentado.

A resolução de problemas matemáticos deve ser apresentada aos alunos desde o início da sua alfabetização numérica, pois a criança por si só é criativa e gosta de desafio, e ao apresentar problemas que precisam extrair dados e encontrar um caminho para a solução, deixará ela mais motivada e interessada no assunto.

Conjuntamente, pode ser trabalhado interpretação de texto em outras disciplinas, pois a primeira etapa de qualquer resolução de problema é a compreensão do mesmo, e para isso, é necessário interpretar a questão e retirar os dados dela.

Independente da maturidade matemática do aluno, é aconselhável que o professor trabalhe sempre a imaginação, a interpretação do aluno, trazendo ele para o contexto atual e mostrando que a resolução de problemas matemáticos nos ajuda a incrementar nosso potencial criativo, bem como a criticidade e autonomia.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N; S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. de la R. *et al*. (org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco, 2021. n.p. (Recurso digital).

BONILHA, M. A. de C.; VIDIGAL, S. M. P. Resolução de problemas nas aulas de matemática: o recurso problemateca. In: SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. (org.). **Coleção Mathemoteca**: volume 6. Porto Alegre: Penso, 2016.

CAPENHOUDT, L. V.; MARQUET, J.; QUIVY, R. Manual de investigação em ciências sociais. Lisboa: Gradiva, 2019.

CUNHA, C. L. da; LAUDARES, J. B. Resolução de problemas na matemática financeira para tratamento de questões da educação financeira no ensino médio. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 659-678, ago. 2017.

DINIZ, M. I. Resolução de problemas e comunicação. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2007, p. 87-97.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FONSECA, V.; HENRIQUES, A. Compreensão da definição formal de limite: um estudo na formação inicial de professores de matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1030-1049, DEZ. 2018.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 25. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

GIL, A. C. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Barueri: Atlas, 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2019.

GONÇALVES, P. G. F.; NÚÑEZ, I. B. O controle na resolução de problemas matemáticos: uma experiência na formação de professores. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 35, n. 69, p. 459-478, abr. 2021.

JUSTULIN, A. M. *et al*. Números. In: ONUCHIC, L. de la R. *et al*. (org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco, 2021. n.p. (Recurso digital).

KAUFMANN, J-C. A entrevista compreensiva: um guia para pesquisa de campo. Petrópolis: Vozes, 2013.

LOPES, C. E. Educação estatística no curso de licenciatura em matemática. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 901-915, dez. 2013.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 9. ed. reimpr. São Paulo: Atlas, 2022.

MENEGHETTI, R. C. G.; REDLING, J. P. Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de funções: análise de uma intervenção no ensino médio. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 193-229, abr. 2012.

MORAIS, R. dos S.; ONUCHIC, L. de la R. Uma abordagem histórica da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. de la R. *et al*. (org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco, 2021. n.p. (Recurso digital).

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PROENÇA, M. C. de. Habilidades matemáticas na resolução de problemas: análise da compreensão de futuros professores. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1135-1157, dez. 2022.

PROENÇA, M. C. de. **Resolução de problemas:** encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

RAMOS, W. R.; MANRIQUE, A. L. Comunidade de prática de professores que ensinam matemática como espaço de negociações de significados sobre a resolução de problemas. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 979-997, dez. 2015.

REZENDE, W. **O ensino de cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2003.

RICHIT, L. A.; RICHIT, A. O modelo de barras de Singapura na resolução de problemas aritméticos e algébricos. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 697-727, ago. 2022.

ROSA, M. V. de F. P. do C.; ARNOLDI, M. A. G. C. **A entrevista na pesquisa qualitativa:** mecanismo para validação dos resultados. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SANTOS, S. M. dos; ALMEIDA, I. M. M. Z. P. de. Medo de matemática e trauma na relação com o aprender: uma leitura psicanalítica. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1273-1292, dez. 2022.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. Ler e aprender matemática. In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2007, p. 69-86. (Recurso eletrônico).

SOUSA, C.; MENDES, F. Aprender a resolver problemas no 2.° ano do ensino básico. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 243-265, abr. 2017.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa:** estudando como as coisas funcionam**.** Porto Alegre: Penso, 2011.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim.** Porto Alegre: Penso, 2016.