Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS

Rodrigo Gonçalves Borges

Uberlândia-MG
2021

Rodrigo Gonçalves Borges

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Matemática Discreta /Ensino de Matemática

Orientador(a): Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior

Uberlândia-MG
2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B732
2021

Borges, Rodrigo Gonçalves, 1983-
Uma contribuição ao Ensino-Aprendizagem de deficientes visuais [recurso eletrônico] / Rodrigo Gonçalves Borges. - 2021.

Orientador: Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior Motta.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.600
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Motta, Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior,1962-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F158

Campus Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP: 38408-144

Aluno(a): Rodrigo Gonçalves Borges.

Número de matrícula: 11912PFT018.

Área de concentração: Matemática.

Linha de pesquisa: Matemática Discreta /Ensino de Matemática.

Pós-graduação em Matemática: Nível Mestrado.

Orientador(a): Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior.

Essa dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 10 de dezembro de 2021, às 10h, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Prof. Dr. Germano Abud de Rezende
Universidade Federal de Uberlância (UFU)

Profª. Ma. Gisliane Alves Pereira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS

Rodrigo Gonçalves Borges

Uberlândia-MG
2021

Rodrigo Gonçalves Borges

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Matemática Discreta /Ensino de Matemática

Orientador(a): Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior

Uberlândia-MG
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 6, PROFMAT				
Data:	dez de dezembro de dois mil e vinte e um	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	11912PFT018				
Nome do Discente:	Rodrigo Gonçalves Borges				
Título do Trabalho:	Uma contribuição ao ensino-aprendizagem de deficientes visuais.				
Área de concentração:	Matemática Discreta.				
Linha de pesquisa:	Ensino de Matemática.				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há.				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelos professores: Gisliane Alves Pereira - UFTM; Germano Abud de Rezende - FAMAT/UFU e Walter dos Santos Motta Junior - FAMAT/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Walter dos Santos Motta Junior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato agradeceu os presentes. Posteriormente, concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem, sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Germano Abud de Rezende**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/12/2021, às 10:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Gisliane Alves Pereira**, **Usuário Externo**, em 28/12/2021, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Walter dos Santos Motta Junior**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/01/2022, às 17:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3279145** e o código CRC **8275EE83**.

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS

Rodrigo Gonçalves Borges

Uberlândia-MG

2021

Rodrigo Gonçalves Borges

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Matemática Discreta /Ensino de Matemática

Orientador(a): Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior

Uberlândia-MG
2021

Primeiramente, dedico este trabalho, a Deus e a Nossa Senhora, em todos os seus títulos, por ter me ajudado e abençoado nessa trajetória. Não poderia deixar de homenagear, nesta dedicatória, a memória de um grande homem, um grande pai, e um grande exemplo pra mim de superação e sonhos realizados, o meu querido Papai, Raimundo Borges(in memorian).

Agradecimentos

Começo esses agradecimentos, por uma pessoa que nunca me desemparou, permaneceu comigo e sempre esteve com um sorriso no rosto. Essa pessoa é a minha esposa Kamilla. Ela é o meu porto seguro e é a companheira de todas as horas. Quantas idas e vindas para Uberlândia! Além disso, se absteve de certas coisas por um sonho, a conclusão deste mestrado.

Agradeço também as minhas duas mães, Maria Cleusa e Natalícia, por tanto apoio e quanto joelho dobrado pelas orações em minha intenção.

Ao meu orientador Walter, pelo apoio e ajuda nessa dissertação, pois se hoje eu consegui, foi graças a sua disponibilidade e sua grande competência.

A tantos colaboradores que me ajudaram durante a execução deste trabalho. Aqui eu citarei alguns: Helena Mota, Mariana, Bruno, Ilza, meu querido colega de jornada Henderson, Prof. Alessandro, Marina dentre outros que, de uma forma direta ou indireta, estiveram ao meu lado me ajudando.

A minha Vó Maria da Conceição (in memorian) e suas filhas, Ivânia e Angélica, que com tanto carinho me recebiam em suas casas por todos os sábado em Uberlândia, sempre com um sorriso nos lábios e uma alegria irradiante.

Ao meu irmão Ricardo, por alguns conselhos e muitas orações, que com certeza foram base forte para essa conclusão.

E por fim, finalizo assim: São tantas pessoas e Instituições que eu gostaria de agradecer o carinho e o apoio a mim dedicados, mas uma certeza eu tenho: trago todos dentro do meu coração e nas minhas orações.

Gratidão sempre.

BORGES, R. G. .***UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO-APRENDIZAGEM DE DEFICIENTES VISUAIS***. **2021**. **76p**. **Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma visão de alguns estudiosos sobre a formação do conhecimento ao longo do tempo. Tais estudos sustentam uma base metodológica para entendermos que os gestos sincronizados de um deficiente visual, juntamente com os discursos, têm uma função comunicativa. As atividades práticas com objetos táteis estimulam o estudante, além de potencializar a sua compreensão sobre as atividades propostas. De forma sucinta, apontamos o Braille como um dos recursos para a alfabetização do deficiente visual. Ressaltamos também a necessidade da qualificação do corpo docente em relação a inclusão do deficiente visual e, sendo assim, propomos uma oficina de capacitação para o ensino de deficientes visuais. O trabalho traz várias alternativas de materiais didáticos para serem trabalhados com os deficientes visuais, no qual destacamos materiais de baixo custo e fáceis de serem produzidos. Baseando-se nas atividades manipulativas, apresentamos os números figurados ”triangulares e quadrangulares” de forma algébrica (recorrências lineares) e geométrica (números poligonais). E ainda fizemos uma reflexão sobre a educação inclusiva, baseando-nos nas avaliações de grande escala. E por fim, elaboramos uma sequência didática voltada para deficientes visuais, estruturada na utilização dos conceitos de números figurados, com ênfase nos números triangulares e quadrangulares, e na descrição recursiva dos modelos algébricos / geométricos associados. Tentamos vivenciar situações dos nossos estudantes envolvidos, buscando atingir as competências e habilidades inerentes. E com base nesta sequência didática, elaboramos um instrumento de acompanhamento para cada atividade, almejando atingir o mais alto grau de cognitividade. E ainda elaboramos quatro oficinas que constituiriam ações complementares às atividades propostas.

Palavras-chave: Números poligonais; recorrentes lineares; ensino de deficientes visuais.

BORGES, R. G. .***A CONTRIBUTION TO THE TEACHING-LEARNING OF THE VISUALLY IMPAIRED***. **2021**. **76p**. **M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

In this work, we present a view of some scholars about the formation of knowledge over time. Such studies support a methodological basis for understanding that the synchronized gestures of a visually impaired person, together with speeches, have a communicative function. Practical activities with tactile objects stimulate the student, in addition to enhancing their understanding of the proposed activities. Briefly, we point out Braille as one of the resources for the literacy of the visually impaired. We also emphasize the need for qualification of the faculty in relation to the inclusion of the visually impaired and, therefore, we propose a training workshop for teaching the visually impaired.

The work brings several alternatives for teaching materials to be worked with the visually impaired, in which we highlight low-cost materials that are easy to be produced. Based on the manipulative activities, we present the figured numbers "triangular and quadrangular"in an algebraic (linear recurrences) and geometric way (polygonal numbers). And we also reflected on inclusive education, based on large-scale assessments. Finally, we developed a didactic sequence aimed at the visually impaired, structured in the use of the concepts of figured numbers, with an emphasis on triangular and quadrangular numbers, and in the recursive description of the associated algebraic / geometric models. We try to experience situations of our students involved, seeking to achieve the inherent skills and abilities. And based on this didactic sequence, we created a monitoring tool for each activity, aiming to achieve the highest degree of cognition. We also created four workshops that would be complementary actions to the proposed activities.

Keywords: Polygonal numbers; linear recurrents; teaching the visually impaired.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

CAPÍTULO 1

Introdução

Muito se tem discutido acerca da inclusão social na escola. Desde anos longínquos já existiam duas correntes, uma defendia que o conhecimento era advindo das experiências vividas, e outra entendia que o conhecimento era assegurado pelo próprio intelecto.

Nesta proposta, entende-se que o público-alvo depende da linguagem discursiva e sensorial para adquirir o seu conhecimento.

Estudos relevantes sobre a comunicação e a linguagem foram feitos por Piaget, Vygotsky e outros que o presente estudo são referenciados em citações oferecendo sustentação teórica para o desenvolvimento do mesmo.

Após estudos, sobre o tema da inclusão do estudante deficiente visual, entendemos que o educador deve passar por capacitações que o orientem na elaboração de recursos para uma aprendizagem significativa dos estudantes.

A inclusão do deficiente visual neste trabalho será mostrada de forma a evidenciar o cuidado para que a aprendizagem aconteça além de ressaltar a necessidade do educador ser capacitado de maneira adequada, dispondo de um material coerente com o processo educativo. Para isso, propomos oficinas que auxiliem o educador quanto ao trabalho com este educando.

Buscamos também mostrar que o educador deve mostrar-se ativo para criar métodos e alternativas proporcionando uma aprendizagem inovadora, criando e elaborando materiais que estimulem e instiguem o cognitivo deste estudante.

Sendo assim, propomos alguns materiais para que possam ser trabalhados com este aluno. Vale ressaltar que um destes materiais é de nossa autoria (Multiplano - tabuleiro). Além disso, ressaltamos que para se adequar materiais e planos de estudos para estudantes, existem restrições quanto as condições financeiras estruturais, mas a produção qualificada de material de apoio didático é possível. Para isso, o educador deve estar sempre passando por atualizações e formações que contribuam de forma significativa para a sua capacitação.

Ciente das dificuldades encontradas pelos educadores, vamos mostrar como seria possível trabalhar com este estudante deficiente visual os seguintes números poligonais: os números triangulares e os números quadrangulares. Esses números se relacionam algebricamente e possuem, ambos, uma dinâmica regular de construção que pode ser modelada por uma relação de recorrência. A sua representação geométrica construtiva facilitará a construção de atividades, que será detectável pelo tato, quando permitirá, ao educando, o entendimento de suas regularidades.

Essas regularidades serão mostradas de forma geométrica, manipulação algébrica, relação de recorrência e funções geradoras.

Ainda iremos refletir sobre os processos avaliativos associados à inclusão de deficientes visuais em avaliações de larga escala (ENEM, SARESP e FUVEST).

Sendo assim, elaboramos um modelo com atividades voltadas para deficientes visuais, estruturada na utilização dos conceitos de números figurados, com ênfase nos números triangulares e quadrangulares. E, após a elaboração destas atividades, criamos um instrumento avaliativo para acompanhamento da aprendizagem, tendo como ponto de partida em cada atividade um objetivo definido.

O instrumento avaliativo utilizado foi o da rubrica, no qual observa-se alguns parâmetros de cognição de forma progressiva.

E por fim, buscamos um diagnóstico para nivelar os níveis cognitivos dos nossos educandos através de uma intervenção pedagógica. Desta forma, criamos quatro oficinas para serem aplicadas aos estudantes, com a finalidade de melhorias no ensino-aprendizagem.

Finalizamos o trabalho com a ideia de aplicarmos as atividades propostas a um grupo de estudantes com deficiência visual, mas devido as dificuldades impostas pela pandemia COVID-19 não foi possível dar andamento à proposta inicial. Temos expectativa de em 2022, redigir um artigo descrevendo as conclusões levantadas através da pesquisa de campo aplicada ao nosso público-alvo.

Também apresentamos, ao final desse trabalho, as Referências Bibliográficas que embasaram a pesquisa.

CAPÍTULO 2

Aspectos educacionais relacionados ao público

2.1 Considerações gerais sobre elementos de comunicação, inter-relações educacionais e ambientes de estudo compartilhados

Destaca-se o embate longínquo sobre a influência das experiências sensoriais e do racionalismo na formação do conhecimento ao longo do tempo. Se por um lado uma corrente defendia a ideia de que o conhecimento é consequência das experiências vivenciadas, a outra o reconhecia sendo algo assegurado pelo intelecto, municiando a mente de um raciocínio lógico implícito, não recorrente às verdades aprendidas pela experiência, para o então desenvolvimento intelectual do indivíduo segundo [6].

Em tempos mais recentes, o reconhecimento da importância das experiências sensoriais para a aquisição do conhecimento ganhou força. Pesquisadores como J. Piaget (1896 – 1980) e L. S. Vygotsky (1896 – 1934), sob perspectivas diferentes, destacaram essa importância e cujas ideias influenciaram significativamente o desenvolvimento da ciência da cognição. Se por um lado, no referencial construtivista, idealizado por Piaget, o desenvolvimento do conhecimento consiste no avanço de formas inferiores para as mais complexas, segundo os estágios ordenados sensório-motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal, de forma que o conhecimento se dá a partir da ação de um sujeito ativo sobre o meio, em que é preponderante os fatores internos relativamente aos fatores externos sociais inerentes ao meio, por outro lado, para Vygotsky esse sujeito não é apenas ativo, mais iterativo com o meio social. Assim, dessa forma, esse pesquisador compreende que a construção do conhecimento se procede do social para o individual, pois é na troca de vivências com outros, consigo mesmo e com artefatos presentes no meio que os conhecimentos são internalizados. Logo, o desenvolvimento é concebido com um processo, mediado por meio de instrumentos técnicos, estímulos sensoriais e pela linguagem consolidada numa cultura.

Neste trabalho, pelas características do público-alvo, a linguagem discursiva e gestual é relevante. Esse elemento de comunicação é tratado diferentemente por Piaget e Vygotsky. Para o primeiro, a formação do pensamento depende basicamente da coordenação dos esquemas sensoriomotores, em que as crianças, a princípio, desenvolveram uma linguagem egocêntrica, ou seja, com essa linguagem são incapazes de perceber as coisas do ponto de vista diferente do seu, dificultando, portanto, a interação social, Piaget defende a ideia de que a noção de linguagem social somente se desenvolverá com o passar do tempo. Oposto a essas ideias, Vygotsky defende desde o início a interdependência do pensamento e da linguagem social, que permite a interação com o meio, auxiliando na forma evolutiva do pensamento, estimulando funções mentais e se constituindo em um elemento central no desenvolvimento cognitivo. Os seus estudos indicam que com o passar do tempo a criança desenvolve essa linguagem internalizada, permitindo pensar com palavras e expressar de uma forma mais articulada o que deseja explicar.

Estudos recentes, utilizando uma abordagem pós-vygotskyana e que irão se constituir na base metodológica desse trabalho, destaca a importância de revisitar a cognição, pensando nessa atividade como algo não confinada somente a processos, mentais e sim associada ao meio de vivência, suas experiências e expressões de linguagens utilizadas, além da materialização consciente de elementos conceituais segundo os estudiosos [11], [5] e [9]. É consenso entre os pesquisadores dessa área que os gestos sincronizados com os discursos têm função comunicativa quando produzidos por estudantes com deficiência visual durante o desenvolvimento de tarefas experimentais. Em [3] destaca-se que na ação gestual de deficientes visuais pode-se aferir muitas informações que por vezes não estão presentes mesmo no discurso. Reforçando essa percepção, no desenvolvimento e análise de atividades geométricas em [2] os autores destacam que a exploração/percepção tátil é influenciada pelas discussões das figuras, se por um lado o tato permite analisar o objeto de forma parcelada e gradual, a visão gera uma análise sintética e global, e segundo os autores:

> "Somente quando analisamos os gestos sincronizados com seu discurso torna-se aparente que o estudante está trabalhando com as propriedades de paralelismo e perpendicularismo. O que, então, nos parece importante é que as mãos dos aprendizes cegos têm, pelo menos, dupla função: em termos vygotskianos, elas servem como instrumentos em substituição dos olhos para que estes aprendizes possam alcançar as mesmas metas dos que podem ver, e também, assim como acontece como os videntes, as mãos têm uma função comunicativa que é simultaneamente intra e interpessoal.

Vale destacar algumas observações sobre o desenvolvimento tátil. Originalmente a criança com deficiência visual tem dificuldade de projetar imagens mentais para além das coisas que estão ao seu alcance. A primeira fase desse desenvolvimento é modelada pela consciência das qualidades táteis dos objetos, essa acuidade tátil se potencializa ao longo de um processo gradual que se acelera mediante estimulações. Dessa forma, é importante que o deficiente visual possa ser continuamente estimulado com o uso de materiais didáticos que favoreçam o entendimento e a elaboração de imagens mentais caracterizadores de conceitos matemáticos em foco de estudo naquele momento. Conforme destacado em [4]:

> "Para o deficiente visual a manipulação de um recurso concreto é imprescindível para que, por meio do tato, perceba características com forma, tamanho, texturas dentre outras, o que irá determinar as características do elemento matemático modelado no recurso manipulativo".

A pesquisadora ressalta ainda a importância de o professor estar capacitado de forma a ter lucidez quanto as potencialidades e limitações de uso de um determinado material didático, exercendo, portanto, uma orientação segura aos estudantes. O professor precisa compreender que cada material didático têm uma função didática fundamental frente às habilidades que estão envolvidas no processo mental do estudante, além de compreender que essas habilidades estão interligadas com o surgimento de obstáculos cognitivos na construção dos conceitos e relações matemáticas.

Nossas considerações até o presente momento reforçam a necessidade, quanto a existência no meio educacional, de capacitações que orientem o professor nessas inter-relações pessoais correlatas ao ensino-aprendizagem de deficientes visuais. Aspectos interpretativos de gestuais integrados com discurso, adequações de elementos concretos aos estímulos táteis, em conformidade com a construção de imagens mentais formativas, ou mesmo o conhecimento da diversidade desses elementos e de suas possibilidades quanto ao ensino de um determinado conteúdo matemático, devem fazer parte dessa capacitação, todavia não sendo somente esses os aspectos a serem trabalhados. Conforme destacado em [1], na concepção de Vygotsky os indivíduos com deficiência visual possuem desenvolvimento cognitivo normal, e a falta de experiências visuais pode ser suprida com o uso de representações concretas. Faz-se tarefa do professor, buscar estímulos e instrumentos adequados, a fim de que os estudantes possam ter acesso ao conhecimento a partir de intervenções e interações. Contudo não é correto que tanto no processo de formação desse professor não lhe seja oferecida quaisquer orientações técnicas para o desenvolvimento dessa tarefa, bem como atualizações e capacitações continuadas.

Se no passado as pessoas com deficiência eram vistos, no ambiente social, como indivíduos em situação inferiorizada, ocupando no imaginário coletivo a posição de alvos de caridade popular e de assistência social, e não sujeitos íntegros e detentores de seus direitos sociais, dentre eles a educação regular, acertadamente hoje o tratamento dispensado à essas pessoas vem mudando e melhorando. Conforme destacado em [13]

> "O elemento educacional prestado às pessoas cegas passou por transformações no decorrer da história, isto é, passou do descaso e da segregação ao atendimento assistencial por meio de instituições sociais ou religiosas, para a atual política de integração em escolas regulares, que acompanharam as mudanças ocorridas na Educação Especial, com vistas à inclusão dessas pessoas no ensino regular e na sociedade".

A inclusão do deficiente visual no ambiente de estudo regular é um acerto na nossa opinião, todavia não há inclusão de fato quando a inserção de um estudante fique tão somente condicionada à matrícula em uma escola. Existe a demanda de que o sistema de ensino é que deve se adequar as necessidades dos estudantes e nesse sentido o papel do professor é crucial. Se por um lado a legislação já reconhece a atenção especial demandada quanto as necessidades básicas de aprendizagem das pessoas portadoras de deficiências visuais, ainda se fazem necessárias a adoção de medidas complementares que garantam a igualdade de acesso à educação em todos os seus níveis. O foco de atenção não deve ser nas dificuldades e impedimentos e sim nas qualidades e potencialidades.

Nesse trabalho não se pretende apontar culpas ou omissões, todavia na lei nº13.146 [8] ficou instituído o Estatuto da Pessoa com Deficiência, nele faz-se responsabilidade dos governantes incentivar e proporcionar pesquisas educacionais, visando o desenvolvimento de novas tecnologias e materiais de apoio ao ensino de pessoas com deficiência, além de proporcionar a formação adequada de professores para a educação especial. Cabem reflexões quanto às gestões universitárias responsáveis pelos cursos de formação de professores, estão elas efetuando adaptações em seus projetos pedagógicos instrumentando e fortalecendo a formação do professor para o enfrentamento das diferentes necessidades dos estudantes cegos? Também essas reflexões se estendem aos gestores escolares, tanto quanto a existência e oferta de medidas de apoio específicas para a promoção das condições de acessibilidade necessárias à plena participação e autonomia dos estudantes, como também na adoção de medidas administrativas pedagógicas que favoreçam a participação de professores na construção de materiais didáticos e estruturação de laboratórios educacionais compartilhados com todos os estudantes. Por fim, o oferecimento de uma educação qualificada e inclusiva não deve ser vista apenas como de responsabilidade de gestores governamentais, universitários ou escolares. Deve-se considerar a importância dos serviços sociais comunitários, incentivando e orientando a família do deficiente visual a proporcionar ao mesmos ações que o coloque desde criança a interagir com o seu social, manuseando artefatos e consolidando sua linguagem discursiva e gestual. Segundo [12], por vezes observa-se o estudante chegando à escola sem experiências anteriores de convívio social, sem uma rotina ou conceitos básicos como lateralidade, orientação espacial e temporal, acarretando a dificuldade de locomoção e concentração. Nesse contexto, o estudante apresenta uma baixa autoestima e uma real dificuldade de se inserir no ambiente escolar regular, fortalecendo os índices de evasão escolar.

O pivô central no desenvolvimento de uma educação inclusiva é a formação e capacitação dos professores voltada para esse fim. Por certo, mudanças na prática pedagógica do professor ocorrerão, não poderemos depender exclusivamente da sensibilidade e bom senso de cada profissional. Aliás, a sensibilidade deve ser ancorada na coerência, deve-se estar atento para se privilegiar um ensino que gere autonomia ao estudante, por vezes o professor na incapacidade de reconhecer as potencialidades do estudante acaba provocando um inter-relação excessiva de dependência, ou se deixando influenciar pelo estudante. Devemos estar atentos para que o estudante não se prevaleça de sua condição, a fim de tirar vantagens ou de ter tratamento privilegiado, pois estas atitudes não se configuram efetivamente em inclusão.

Na ausência de um treinamento direcionando, o professor pode inadvertidamente utilizar até mesmo uma verbalização de informações ambíguas em sala de aula. Vejamos um exemplo nesse sentido associado a linguagem Braille.

Nas séries iniciais do Ensino Fundamental as crianças com deficiência visual são alfabetizadas com uso da escrita Braille. Já com o passar do tempo é possível a utilização do computador com leitor de tela. Nesse contexto, após se adaptarem a essa tecnologia a criança, por vez, apresenta erros gramaticais graves em decorrência da falta de leitura. A facilidade proporcionada pelo computador acaba influenciando muito no uso da escrita Braille.

Especificamente pensando ao ensino de matemática, mesmo na versão editada por Louis Braille, em 1837, já havia a preocupação em se apresentar alguns símbolos fundamentais dos algarismos e outros associados a conceitos aritméticos e geométricos, todavia até hoje encontramos muitas divergências na adoção de novos símbolos necessários a representações matemáticas e científicas atualizadas em nível superior. Os trabalhos concluídos em 1994 pela Comissão para Estudo e Atualização de Sistema Braille em Uso no Brasil, propôs a adoção do Código Matemático Unificado oferecendo excelentes opções para a representação de símbolos matemáticos que até aquele momento não tinham adequada representação no Sistema Braille. Uma ação de destaque foi a aplicação dos parênteses auxiliares, recurso de representação em Braille nos casos em que a escrita linear dificulta o entendimento das expressões matemáticas. Vejamos algumas representações nesse Código segundo [7]

Representação simbólica dos conjuntos numéricos	Combinação de pontos	Símbolo resultante	Conjunto Numérico
$\mathbb{N}$	(456) (1345)	⠸⠝	Naturais
$\mathbb{Z}$	(456) (1356)	⠸⠵	Inteiros
$\mathbb{Q}$	(456) (12345)	⠸⠟	Racionais
$\mathbb{I}$	(456) (24)	⠸⠊	Irracionais
$\mathbb{R}$	(456) (1235)	⠸⠗	Reais
$\mathbb{C}$	(456) (14)	⠸⠉	Complexos

Quadro 1: Transcrição da representação simbólica de conjuntos numéricos

Para representar a potência de um número no sistema Braille utiliza-se a combinação de pontos, vejamos na imagem a seguir algumas representações:

A combinação dos pontos (16) ⠡ antes do símbolo do algarismo representa a potência.

E assim, o algarismo que aparecer após este símbolo é o expoente.

Exemplo: 3^2 (três elevado ao quadrado). Usa-se símbolo do algarismo 3, que é a combinação (3456) (12) ⠼⠉, seguido da combinação dos pontos (16) ⠡ indicando que o próximo número será considerado o expoente 3 (⠼⠉) elevado ao expoente (⠡⠼⠃).

Concluindo 3^2 ⠼⠉⠡⠼⠃.

Indo-arábico	Combinação de pontos	Símbolo resultante
2^2	(3456) (12) (16) (3456) (12)	⠼⠃⠡⠼⠃
4^3	(3456) (145) (16) (3456) (14)	⠼⠙⠡⠼⠉
5^4	(3456) (15) (16) (3456) (145)	⠼⠑⠡⠼⠙

Quadro 2: Transcrição de números com potências

Os colchetes ou formas que representam as matrizes são codificadas em Braille pela combinação dos pontos (456) e (123) e células em branco entre os elementos.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

usa a mesma combinação para todas as formas que representam as matrizes.

Indo-arábico	Combinação de pontos	Símbolo resultante
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	(456)(123) (3456)(1) (3456)(12) (456)(123)	⠸⠇⠼⠁ ⠼⠃⠸⠇
	(456)(123) (3456)(14) (3456)(145) (456)(123)	⠸⠇⠼⠉ ⠼⠙⠸⠇

Quadro 3: Transcrição de matrizes

Letra latina	Combinação de pontos	Símbolo resultante
sen	(234) (15) (134) (3)	⠎⠑⠍⠄
cos	(14) (135) (234) (3)	⠉⠕⠎⠄
tg	(2345) (1245) (3)	⠞⠛⠄
sec	(234) (15) (14) (3)	⠎⠑⠉⠄
cossec	(14) (135) (234) (234) (15) (14) (3)	⠉⠕⠎⠎⠑⠉⠄
cotg	(14) (135) (2345) (1245) (3)	⠉⠕⠞⠛⠄

Quadro 4: Transcrição das funções trigonométricas

Letra latina	Combinação de pontos	Símbolo resultante
Quadrado	(456) (13456)	⠸⠽
Retângulo	(12346) (13456)	⠯⠽
triângulo qualquer	(6) (23456)	⠠⠾
triângulo retângulo	(456) (236)	⠸⠦
Circunferência	(246) (135)	⠪⠕
Polígono	(12346) (135)	⠯⠕

Quadro 5: Transcrição de denominações de figuras planas

Uma vez posta essa contínua necessidade de atualizações de apresentações matemáticas no sistema Braille, e o fato de que a linguagem Braille é essencial para o desenvolvimento de autonomia dos estudantes com deficiência visual, o seu uso deve ser estimulado para além das séries iniciais do Ensino Fundamental, paralelamente a isso o professor deve ser capacitado de forma a ter um conhecimento básico desse sistema. Assim, um registro escrito no quadro do tipo 5^{x+2}, que venha a ser ditado ao estudante “cinco elevado a x mais dois”, pode ser transcrito para o Braille como $5^{x}+2$ acarretando numa sucessividade de outros erros. Esse problema seria facilmente resolvido se o professor tivesse clareza quanto ao código Braille e tivesse gerado o registro e narrativa $5^{(x+2)}$. Outras expressões simples podem ter interpretações ambíguas conforme o professor ou mesmo o estudante não tenham clareza sobre a grafia matemática Braille. Dessa forma, $\sqrt{2}$ necessitaria da combinação (1246) (156) (3456) (12) e a expressão matemática escrita no “sentido verticalmente” $\frac{x+4}{5}=\frac{x-1}{6}$ deve ser adequadamente entendida na grafia Braille, onde só é possível escrever no sentido horizontal. Então, o registro no quadro dessa expressão deveria ser $(x + 4) \div 5 = (x - 1) \div 6$, evidenciando a importância de que o professor faça uso dos parênteses auxiliares.

Uma maior diversidade no discurso utilizado em sala de aula e o uso dos recursos adequados minimizam muito as diferenças existentes entre videntes e não videntes. Incentivos ao desenvolvimento de elementos digitais, como o DOSVOX, devem ser ampliados. Esse sistema traz maior autonomia ao deficiente visual, facilitando a comunicação em geral, o acesso a textos impressos, a elaboração de textos em Braille, dentre outras possibilidades. Todavia, o uso de novas tecnologias deve ser vista com empolgação e os devidos cuidados para se evitar excessos. O papel do professor continua sendo fundamental na formação do estudante, quanto mais bem preparado esteja, melhor poderá desempenhar sua função.

As considerações presentes nesta seção nos motivaram a elaboração de uma proposta de módulos formativos, direcionados à uma oficina de capacitação de professores de matemática, que objetivam trabalhar com deficientes visuais, destacamos três módulos:

<table>
<tr><th>Módulo 1: Vivência com materiais didáticos manipulativos</th><th>Carga horária</th></tr>
<tr><td>Unidade 1: O plano de desenvolvimento individual de estudante (PDI)</td><td rowspan="3">32 h/a</td></tr>
<tr><td>Unidade 2: Reconhecimento dos materiais existentes</td></tr>
<tr><td>Unidade 3: Alinhamento/Realinhamento metodológico correlacionando materiais com as habilidades/competências demandadas no processo de ensino</td></tr>
</table>

Tabela 2.1: Formação: Módulo 1

<table>
<tr><th>Módulo 2: Experiência tátil e aspectos comunicativos</th><th>Carga horária</th></tr>
<tr><td>Unidade 1: Elaboração/Reelaboração de atividades modelos explorando o estímulo tátil (paralelamente ao alinhamento metodológico anterior)</td><td rowspan="2">35 h/a</td></tr>
<tr><td>Unidade 2: Interpretações e debates acerca da comunicação discursiva e gestual</td></tr>
</table>

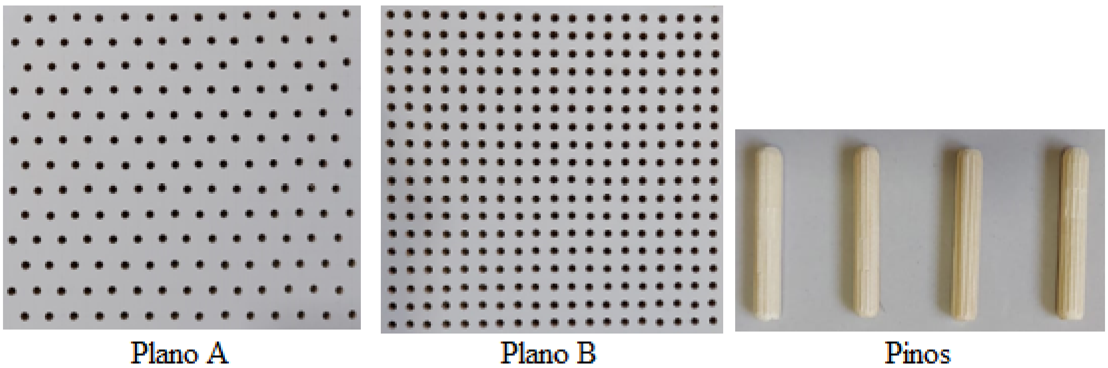
Tabela 2.2: Formação: Módulo 2

Módulo 3: Instrumentação gráfica/ simbólica e verbalização	**Carga horária**
Unidade 1: Introdução ao sistema braile; noções básicas da grafia/simbologia Braille.	
Unidade 2: O código matemático unificado e a verbalização em sala de aula.	35 h/a
Unidade 3: Autodescrição de materiais e atividades a serem desenvolvidas; exploração de ferramentas visuais: potencialidades e limitações.	

Tabela 2.3: Formação: Módulo 3

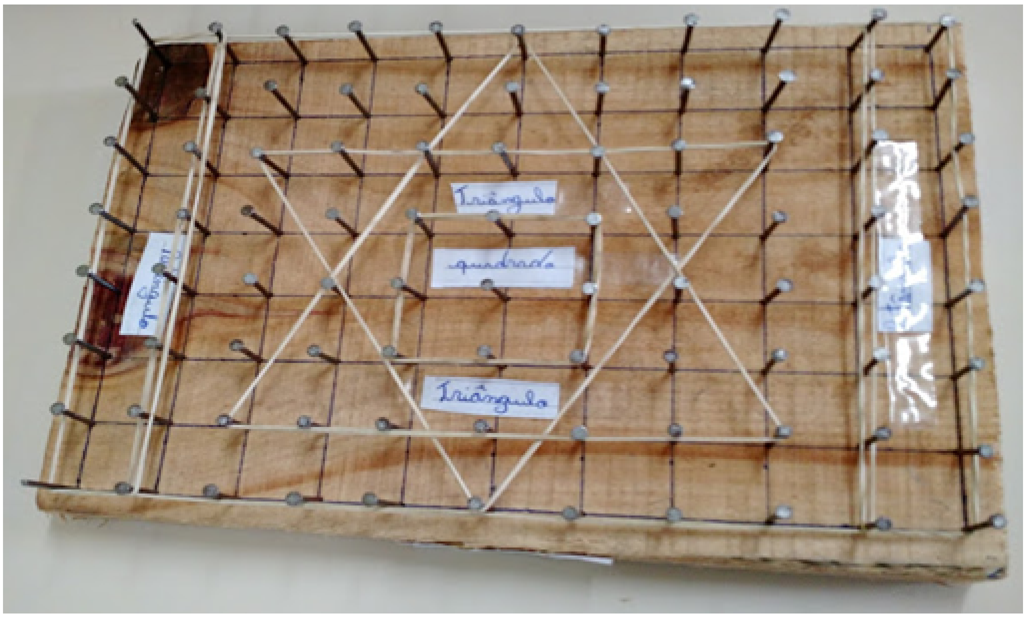
2.2 Descrição dos materiais concretos à serem utilizados

O professor deve estar atento para a adequada seleção de recursos metodológicos utilizados no ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos para estudantes com deficiência visual. Existem estreitas relações entre os materiais existentes e os conceitos/habilidades que se espera abordar. Deve-se ter a clareza de como esses recursos podem facilitar o processo de ensino-aprendizagem do deficiente visual pelo ato de tocar e, então, construir imagens mentais interpretativas. Pode-se encontrar vários materiais didáticos a serem utilizados e adaptados para o ensino de matemática, destacam-se como mais populares e de baixo custo de produção: o Geoplano, o Tangram, o Soroban e o Multiplano. Esses materiais podem se integrar a exploração de distintos conteúdos, em diferentes heurísticas e, em geral, contribuem para que as situações de aprendizagem sejam agradáveis e motivadoras para os estudantes com limitação visual. Por serem recursos didáticos manipulativos, ajustáveis as possíveis necessidades especiais do estudante, também estimulam outros sentidos, através das texturas ou marcações em alto relevo, dentre outros. Estaremos diretamente interessados no Multiplano e eventuais ajustes que façamos no mesmo. Para o entendimento do leitor vamos descrevê-lo:



Multiplano - Plano A, Plano B e pinos

Conforme as imagens acima indicam, ele é construído basicamente por uma placa (tabuleiro) de madeira perfurada regularmente em linhas e colunas, com furos igualmente espaçados, formando uma espécie de rede com furos padronizados. Nos furos são encaixados pinos que possuem extremidades planas e arredondadas nos quais podem ser fixados elásticos ou hastes de corpo circular para sólidos geométricos, hastes para cálculo em funções ou trigonometria, barras para gráficos no contexto estatístico, dentre outras possibilidades. A associação do multiplano com conceitos e subáreas da matemática é ampla, destacam-se operações numéricas, fenômenos periódicos, exploração de propriedades em figuras geométricas regulares e irregulares, simetrias, estatística, além de muitas outras. Se o multiplano tiver seus furos preenchidos por pinos, então essa ferramenta se assemelha ao Geoplano, o qual usualmente é formado por uma base de madeira (tabuleiro), onde são cravados pregos, formando uma plataforma que possibilita explorar diversificados modelos com distintas abordagens didáticas.

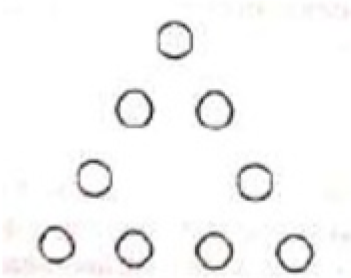


Tabuleiro de pregos

Associado a essa configuração com elásticos que darão origem a desenhos de figuras poligonais, que podem ser tateadas pelo estudante com deficiência visual, pode-se apresentar conceitos / propriedades de figuras geométricas, classificando-as, explorar relacionamentos entre arestas e vértices, estabelecer relações entre distintas figuras e calcular a área e o perímetro de específicas figuras, tornando-se uma espécie de ferramenta discreta, que avalia área através da contagem de finitos pontos correlacionados à figura em análise. Essa possibilidade de calcular a área de uma região poligonal, através do teorema de Pick, é manipulativa e pode ser obtida via o tato, facilitando o ensino-aprendizado de um estudante com deficiência visual. Para finalizar essa seção vamos estimular a reflexão que segue: como é possível adequar restrições quanto as condições financeiras estruturais e a produção qualificada de material de apoio didático, visando a abordagem de diferentes conteúdos no universo da sala de aula? Uma vez mais, o nosso entendimento vai na direção de se estimular uma contínua capacitação docente. Com formação sólida e diferentes heurísticas vivenciadas, os elementos criativos dos indivíduos florescem e a capacidade de adaptação e enfrentamento de problemas específicos se mostram. Para exemplificar esse nosso entendimento, vamos apresentar as atividades que seguem:

Como é possível encaminhar essas duas atividades abaixo para que sejam desenvolvidas por um deficiente visual?

1) Disponha os algarismos de 1 à 9 na configuração triangular apresentada abaixo de tal forma que a soma de cada lado seja 17.



Configuração triangular

2) Uma sequência de ciclo 6, ABCDEF, vai se repetindo sucessivamente da esquerda para a direita, qual será o elemento correspondente à 39ª posição dessa sequência? Nesse sentido os desenvolvimentos de materiais didáticos de apoio poderão ser muito úteis. As construções que seguem foram desenvolvidas pelos discentes do curso Licenciatura em Matemática, Alef Alves Fidelis e Stefânia Carvalho de Sousa, no âmbito da disciplina EMAP (O Ensino de Matemática através de Problemas). Elas mostram o espírito criativo e inovador de nossos futuros professores:

Para o enfrentamento da atividade 1:

Materiais utilizados: 1. EVA; 2. Papelão; 3. Tesoura; 4. Cola quente.

Como fazer: Recorte no EVA, nove discos de mesmo tamanho (grande), 58 discos de mesmo tamanho (muito pequeno) e nove tiras pequenas. Após isso, com o uso da cola quente, cole os discos grandes em um papelão e recorte-os. Por fim, cole uma tira em cada disco grande (isso é para guiar como os discos grande deverão ser lidos) e a quantidade necessária de discos pequenos para que em cada disco tenha escrito os números de 1 à 9 em Braille.

Discos numerados

Como utilizar:

Frente a heurística tentativa-e-erro sistemática: O aluno deve passar a mão pelos discos fornecidos, com a identificação dos números em Braille ele poderá efetuar a soma dos números presentes em cada aresta do triângulo. Caso o aluno não consiga avançar de forma alguma, o professor deverá intervir, sugerindo montagens parciais, como a estruturação de dois lados valendo 17 e a aferição do que ocorre com o terceiro lado. Uma solução para essa atividade pode ser vista abaixo.

Representação triangular em Braille

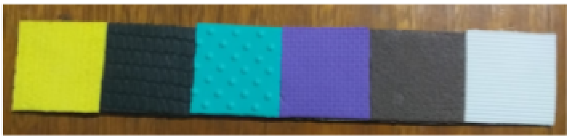
Frente a heurística tentativa-e-erro por inferência: o professor estimula o estudante a gerar um filtro analítico antes de exercitar uma manipulação casual. Nessa linha metodológica o estudante será conduzido à pensar que ao somar as três arestas terá 17 + 17 + 17 = 51, porém ao somá-las estará somando na verdade os algarismos de 1+2+...+9 = 45, ou seja, a diferença de 6 entre uma soma e outra é devido ao fato de somar duas vezes cada algarismo dos vértices na primeira operação. Sendo assim, temos que a soma desses três algarismos resulta 6, isso implicará que eles devem ser o 1, o 2 e o 3. O restante do raciocínio volta ao caso sistemático para o preenchimento das demais celulas.

Representação triangular em Braille - Para completar os termos

Para o enfrentamento da atividade 2:

Materiais utilizados: 1. EVAs de diferentes texturas; 2. Papelão; 3. Tesoura; 4. Cola quente.

Como fazer: Recorte nos EVAs, quadrados de mesma área (para fazer uma barra, basta cortar um quadrado em cada EVA). Após isso, com o uso da cola quente, cole os quadrados em sequência (alinhados) em um papelão. Por fim, corte o papelão onde foi colado os quadrados de EVA, obtendo assim a barra de textura.



Barra de textura

Como utilizar:

Observemos que os problemas de reconhecimento de padrões em geral abordam a análise de casos. A percepção do ciclo é fundamental para o deficiente visual no processo de compreensão da atividade, então o uso de uma "barra de texturas" compatível com o tamanho do ciclo será de fundamental apoio a esse entendimento. O estudante irá passar os dedos pela barra e identificar as diferentes texturas presentes. Após algum tempo de manipulação o estudante perceberá que há um padrão nessa sequência. À cada seis quadrados, partindo do primeiro, temos uma repetição. Assim, fazendo a divisão 39 por 6, obtemos $39 = 6{\cdot}6 + 3$. Isso por sua vez significa que temos o padrão estabelecido é repetido seis vezes, e que o 39º quadrado corresponde ao 3º quadrado da barra de texturas, ou seja, a 39ª posição dessa sequência será um quadrado com bolinhas (ou verde para um vidente).

CAPÍTULO 3

Estrutura conceitual e processos avaliativos

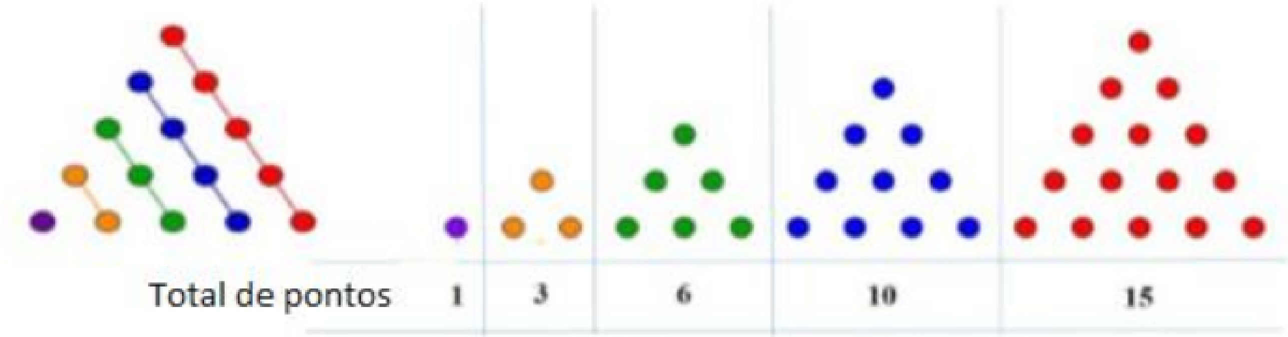
3.1 Descrição formal dos conteúdos correlatos às nossas atividades manipulativas

Relatos históricos indicam que os números figurados foram criados pelos pitagóricos (discípulos de Pitágoras), no século V a. C. Eles se caracterizam por serem números que podem ser representados por um “formato geométrico” de pontos situados a uma mesma distância. Os pitagóricos esperavam compreender a natureza íntima dos números, dessa forma construíram os números figurados que são representados como união de pontos numa determinada figura geométrica, isto é, a quantidade de pontos representa um número, e estes são agrupados de formas geométricas conhecida. Se estes formarem um polígono regular, são chamados de números poligonais. Neste trabalho estaremos interessados em dois tipos de números poligonais: os números triangulares e os números, quadrangulares. Esses números se relacionam algebricamente e possuem, ambos, uma dinâmica regular de construção que pode ser modelada por uma relação de recorrência.

A característica geométrica construtiva facilitará a construção de atividades manipulativas de ensino-aprendizagem, detectáveis pelo tato, e passíveis de entendimento de suas regularidades e modelos algébricos representativos. Isso permitirá a elaboração de projeções futuras ou argumentações conclusivas acerca de situações-problemas modeladas por sequências numéricas correlatas à tais números.

Nesta seção, vamos destacar as construções dos números triangulares e quadrangulares e explorar suas representações e relações algébricas.

Números triangulares: são números que podem ser representados por pontos organizados em forma de um triângulo equilátero, conforme indica a figura abaixo. Nota-se que, se considerarmos nas configurações apresentadas, a quantidade de pontos em cada triângulo como um termo de uma sequência numérica, podemos associar a sequência de triângulos a uma sequência numérica dada por $(1, 3, 6, 10, 15, \cdots)$.



Números triangulares

Assim, representando cada termo desta sequência por T_n e observando a sequência, nesses passos iniciais, podemos concluir que uma forma de representar a quantidade de pontos existentes em cada construção dos números triangulares seria:

$$T_1 = 1$$

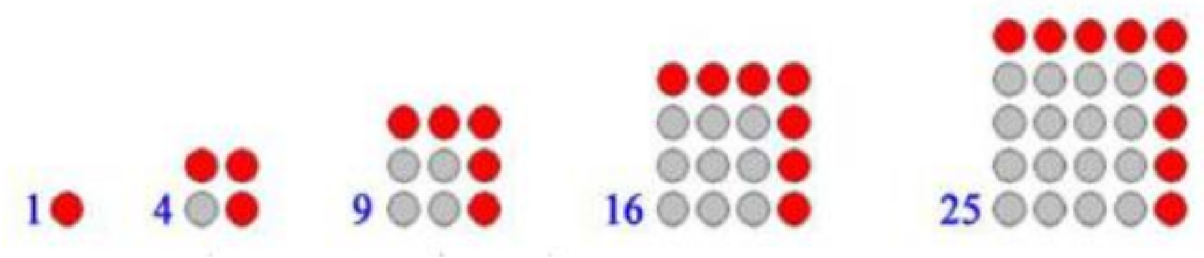
$$T_2 = 1 + 2$$

$$T_3 = 1 + 2 + 3$$

$$\vdots$$

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Números quadrangulares: são números que podem ser representados por pontos organizados em forma de um quadrado, conforme indica na próxima figura. Nota-se que, se considerarmos nas configurações apresentadas, a quantidade de pontos em cada quadrado como um termo de uma sequência numérica, podemos associar a sequência de quadrados a uma sequência numérica dada por $(1, 4, 9, 16, 25, \cdots)$.



Números quadrangulares

Assim, representando cada termo desta sequência por Q_n e observando a sequência, nesses passos iniciais, podemos concluir que uma forma de representar a quantidade de pontos existentes em cada construção dos números quadrangulares seria:

$$Q_1 = 1$$

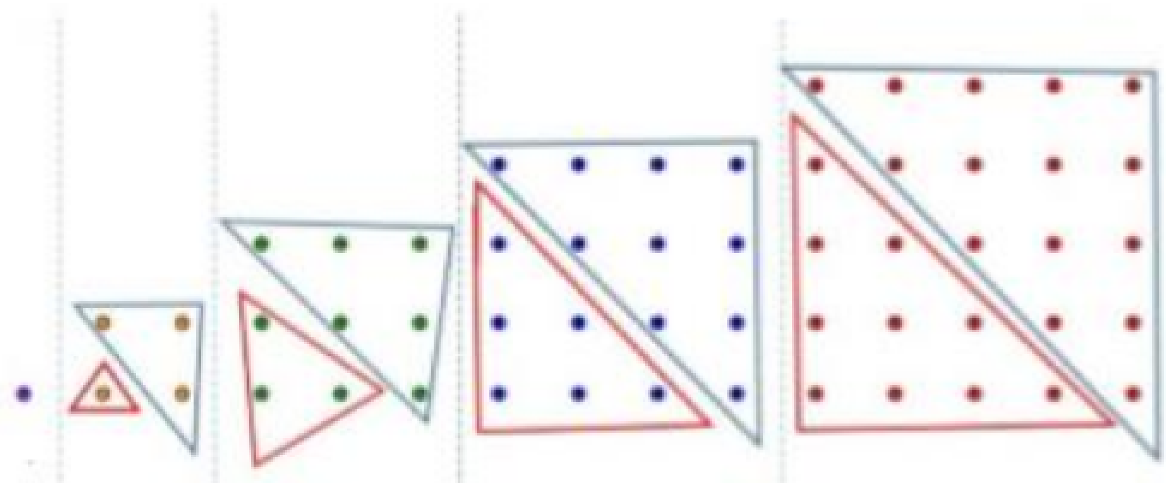
$$Q_2 = 1 + 3$$

$$Q_3 = 1 + 3 + 5$$

$$\vdots$$

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

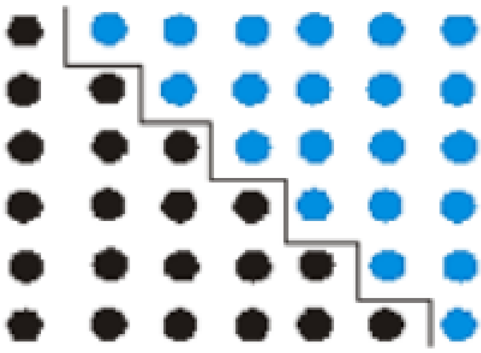
Observe que a configuração seguinte "esboça"um relacionamento entre essas duas classes de números, sugerindo que $Q_n = T_{n-1} + T_n$ para $n \geq 2$. Para a comprovação dessa igualdade iremos explicitar representações para os números triangulares e quadrangulares e a partir delas comprovaremos a igualdade.



Relação entre os números triangulares e quadrangulares

3.1.1 Representações de números triangulares e quadrangulares por meio de configurações geométricas

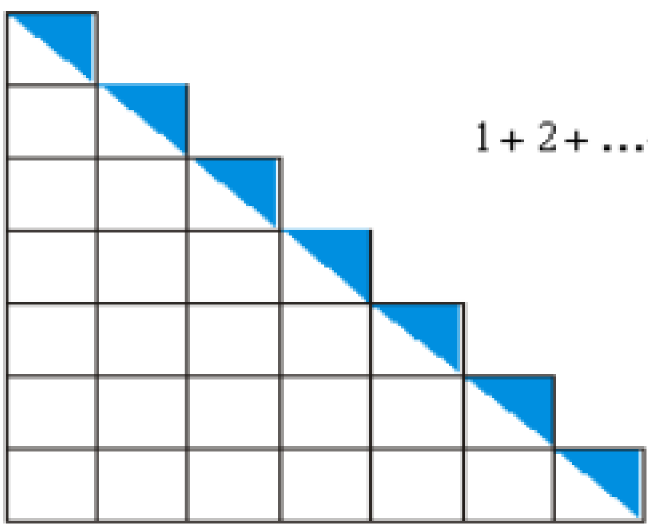
Conforme observamos acima, os números triangulares são representados através de uma sequência numérica de termo geral T_n dado por $T_n = 1+2+\cdots+n$. Dessa forma,necessitamos efetuar a soma dos n primeiros números naturais. Essa soma pode ser visualizada geometricamente através da figura abaixo. Nela vê-se um retângulo formado por bolinhas. A base do retângulo possui $n+1$ bolinhas e a altura tem n bolinhas. No total,temos então $n.(n+1)$ bolinhas. Observe agora que elas estão divididas em duas partes iguais pela linha poligonal e em cada uma delas aparece a soma $1+2+3+\cdots+n$. Obtém-se, então, a fórmula da soma dos n primeiros números naturais:



$$T_n = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Soma dos n primeiros números naturais

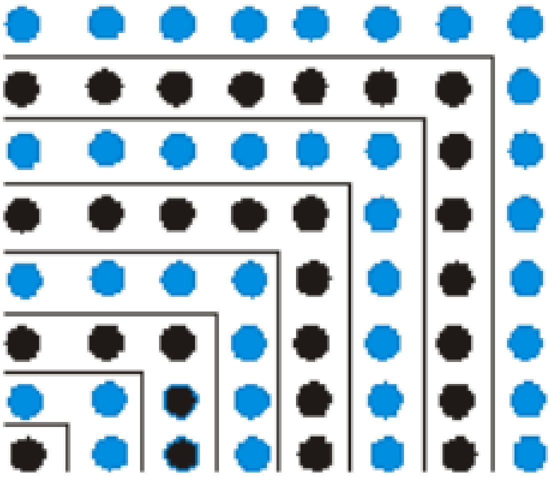
Uma outra forma para obter a soma dos n primeiros números naturais utiliza a figura a seguir e o conceito de área. Observe que a soma $1+2+3+\cdots+n$ é igual à área do triângulo grande (metade de um quadrado de lado n) mais a metade de n quadrados:



$$1+2+\ldots+n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soma dos n primeiros números naturais - Área

Para a obtenção de uma expressão para os números quadrangulares Q_n podemos fazer uso de uma construção conhecida a muito tempo. A soma dos n primeiros números ímpares pode ser visualizada através da figura a seguir, como área de um quadrado de lado n. O fato de que essa soma é igual a n^2 já era do conhecimento dos antigos pitagóricos, mas a figura é da autoria de Nicômaco de Gerasa (um pitagórico tardio), que viveu em torno do ano 100 d.C.



$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Soma dos n primeiros números ímpares

Assim, considerando essas expressões obtidas para T_n e Q_n a igualdade $Q_n = T_{n-1} + T_n$ pode ser facilmente comprovada efetuando

$$T_{n-1} + T_n = \frac{(n-1).(n-1+1)}{2} + \frac{n.(n+1)}{2} = \frac{n.(n-1+n+1)}{2} = \frac{n.2n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 = Q_n$$

A igualdade destacada acima é uma dentre outras possíveis relações que se pode estabelecer entre esses dois tipos de números figurados. As representações dos termos genéricos são facilitadoras para se obter novas relações. Por exemplo, pode–se que $Q_n = 2.T_{n-1} + n$, uma vez que

$$2.T_{n-1} + n = \frac{2.(n-1).(n-1+1)}{2} + n = n^2 = Q_n$$

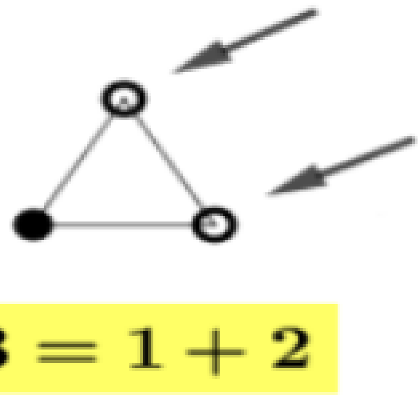
Deve-se observar que as duas construções acima se constituem em “argumentações / demonstrações geométricas” que se baseiam em construções que podem ser manipuladas no Multiplano, então podem ser traduzidas para uma linguagem acessível ao deficiente visual. Assim, caso necessário é possível estruturar atividades que remetam o deficiente visual ao entendimento formal das expressões

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}.n.(n+1)$$

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

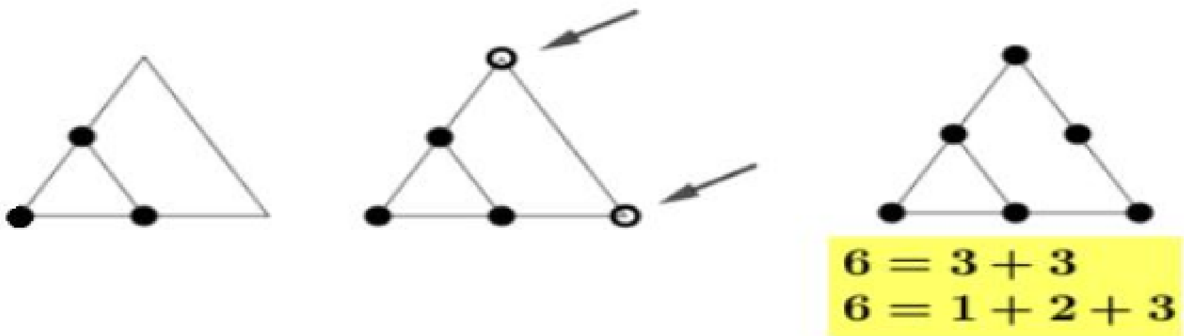
3.1.2 Representações de números triangulares e quadrangulares por meio de relações de recorrência

Vamos estruturar uma nova representação para os números triangulares, para tanto observemos as situações particulares destacadas abaixo. Para construir um triângulo, são necessários três vértices. Então, precisamos de mais dois pontos para o segundo número triangular. Junto com o primeiro, estes farão o papel de “vértices”. Observe:



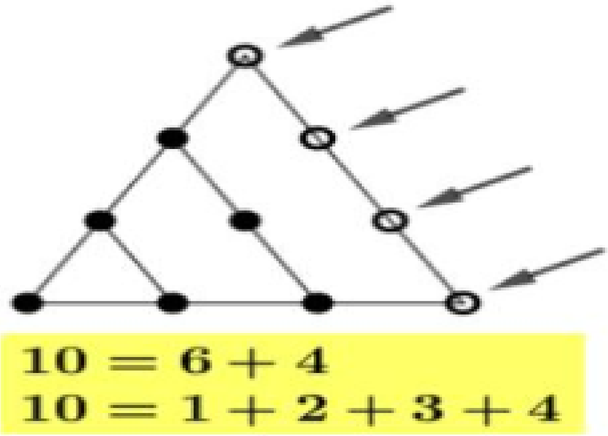
Parte 1 - Representação dos números triangulares a partir dos vértices

Continuando o processo, a terceira figura será formada pelos pontos da figura anterior e mais três pontos. De fato, construiremos inicialmente um triângulo equilátero com o lado uma unidade maior do que o lado do triângulo da figura anterior. Nessa figura, os dois novos pontos mostrados na imagem central serão vértices desse triângulo. O terceiro ponto será o ponto médio do lado construído. Veja:



Parte 2 - Representação dos números triangulares a partir dos vértices

A próxima imagem mostra que com mais quatro círculos acrescentados à figura construída para o terceiro número triangular obtemos o quarto número triangular.



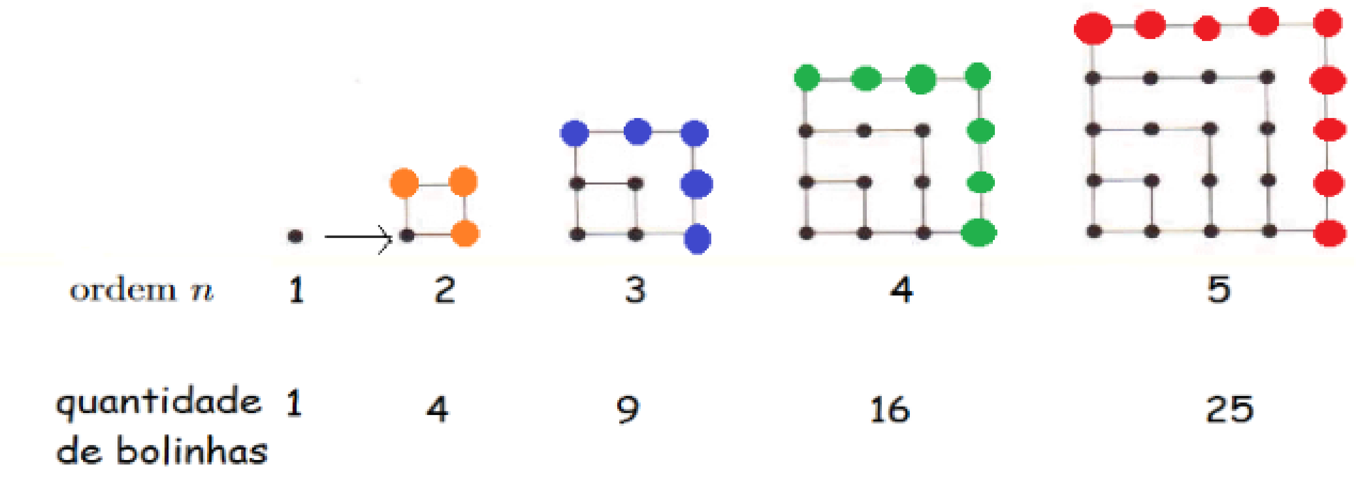
Parte 3 - Representação dos números triangulares a partir dos vértices

Você deve ter observado a relação aditiva entre os termos consecutivos dessa sequência. Para o n-ésimo número triangular, precisamos adicionar n pontos ao número triangular anterior. Dessa forma, podemos escrever a relação de recorrência descritiva dos termos de T_n da seguinte maneira:

$$\begin{cases} T_n &= T_{n-1} + n, n \geq 2 \\ T_1 &= 1 \end{cases}$$

A equação associada não é homogênea, sendo de primeira ordem, ou seja, um termo qualquer, depende somente de um único termo anterior.

Vejamos agora como pode ser obtida uma relação de recorrência descritiva dos números quadrangulares Q_n . Observando os números quadrangulares na próxima figura percebemos que cada termo de ordem n, $n \geq 2$, é a soma do termo de ordem inferior com a respectiva quantidade de bolinhas coloridas incorporadas sucessivamente, respectivamente, crescendo segundo a sequência numérica $3, 5, 7, 9, \cdots, 2n-1, \cdots$.



Representação dos números quadrangulares a partir dos vértices

Dessa forma, podemos escrever a relação de recorrência descritiva dos termos de Q_n da seguinte maneira:

$$\begin{cases} Q_n &= Q_{n-1} + (2n-1), n \geq 2 \\ Q_1 &= 1 \end{cases}$$

3.1.2.1 Resolução das relações de recorrência associadas aos números triangulares e quadrangulares por meio de manipulação algébrica

Na seção anterior representamos os números triangulares e quadrangulares através de duas relações de recorrência. Vale destacar que uma relação de recorrência é a junção de uma equação de recorrência e informações sobre o valor ou os valores iniciais do processo representado pela equação. Além disso, toda relação de recorrência representa uma sequência numérica, que por um lado fica descrita, através da dinâmica de regularidade entre seus elementos expressa através da equação de recorrência, por outro tem uma representação não ágil para se obter informações sobre o comportamento e valores de elementos da sequência posicionados em termos grandes.

Uma equação de recorrência na qual cada termo depende exclusivamente do seu anterior é chamada de homogênea de primeira ordem. Se, além do termo anterior, cada elemento da sequência está também em função de um termo independente da sequência, a recorrência é dita não-homogênea.

O termo “resolver uma relação ou equação de recorrência”, na realidade significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores, correspondendo a ideia de obter o termo genérico da sequência de forma não recorrente.

Assim, se por um lado a representação da sequência por relação de recorrência favorece o entendimento de dinâmica de regularidade entre seus elementos, a expressão do termo genérico na forma fechada agiliza a obtenção de informações sobre o comportamento e sobre os valores assumidos pela sequência para n grande.

Neste trabalho estamos interessados no caso especial envolvendo uma relação de recorrência linear não-homogênea de primeira ordem, caracterizada por uma equação do tipo:

$$a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$$

De forma que $g(n)$ e $f(n)$ são funções não nulas. Observe que as relações associadas aos números triangulares ou quadrangulares apresentam $g(n) = 1$ e, respectivamente, $f(n) = n + 1$ ou $f(n) = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1$.

Nesse caso em que $g(n) = 1$, genericamente a expressão acima assume a forma

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Podemos escrever então:

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Somando as igualdades e cancelando os termos semelhantes, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

Ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^{n} f(j)$$

Utilizando essa expressão e ajustando-a aos números triangulares e quadrangulares iremos encontrar:

Para os números triangulares:

$$T_{n+1} = T_1 + \sum_{j=1}^{n} (j+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1)$$

Essa soma pode ser interpretada como a soma dos termos de uma progressão aritmética de primeiro termo e razão iguais a 1, consequentemente,

$$T_{n+1} = 1 + \cdots + (n+1) = \frac{[1 + (n+1)].(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}.$$

Assim, em conformidade com a expressão obtida em (3.1.1),

$$T_n = \frac{n.(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Para os números quadrangulares:

$$Q_{n+1} = Q_1 + \sum_{j=1}^{n} (2j+1) = Q_1 + 2.\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 = 1 + 2.(1 + 2 + \cdots + n) + n.$$

Utilizando a mesma argumentação acima relativa à progressão aritmética segue que:

$$Q_{n+1} = 1 + 2.\frac{(1+n).n}{2} + n = 1 + n + n^2 + n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Assim, em conformidade com a expressão obtida em (3.1.1),

$$Q_n = n^2, n \geq 1.$$

3.1.2.2 Resolução das relações de recorrência associadas aos números triangulares e quadrangulares por meio de funções geradoras

Vamos estruturar uma outra estratégia para a obtenção das formas fechadas dos números triangulares e quadrangulares, fazendo uso de funções geradoras. Uma função $f(x)$ é função geradora ordinária para uma sequência de números reais $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ se esses números forem os coeficientes de uma série formal de potências do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_n.x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n.$$

Cada série formal de potências representa unicamente a sequência de seus coeficientes (a_n). Dessa forma, a igualdade entre duas funções geradoras implica na igualdade entre os respectivos coeficientes correspondentes.

Quando nos referirmos a série "formal" de potências não estaremos preocupados em estudar a eventual convergência da série de potências associada.

Assim, por exemplo, $f(x) = 1+x+x^2+...+x^n+\cdots$ é a função geradora para a sequência constante $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Observe que visto no contexto de um curso de Cálculo quando consideramos a expressão $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$. estamos, em geral, interessados em saber sob quais condições inerentes a variável x essa soma converge para uma função $f(x)$. Assim, se considerarmos $|x| < 1$ e interpretarmos a soma $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ como a soma de uma progressão geométrica de infinitos termos onde o primeiro termo é 1 e a razão x, encontramos $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)}$. Logo, no contexto de funções geradoras estaremos interessados somente no cálculo dos coeficientes destas funções e nunca necessitaremos atribuir valores numéricos à variável x. Dessa forma, iremos dizer que a função geradora da sequência $a_n = 1$ é dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

Propriedades operacionais envolvendo combinações lineares de funções geradoras, derivadas e integrais de modelos padrões de funções geradoras, por vezes geradas pela fórmula de Taylor, nos conduzem a uma tabela de funções geradoras, conforme ilustrado abaixo:

Tabela de algumas funções geradoras

Sequência associada	Forma fechada	Série formal
$(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$	$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{i\geq 0} x^i$
$(0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$	$\dfrac{x}{(1-x)^2}$	$\sum\limits_{i\geq 1} i \cdot x^i$
$\left(0, 0, \ldots, \binom{n}{m}, \ldots\right)$	$\dfrac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$	$\sum\limits_{i\geq m} \binom{i}{m} \cdot x^i$
$\left(1, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{n}, \ldots\right)$	$(1+x)^m$	$\sum\limits_{i\geq 0} \binom{m}{i} \cdot x^i$
$\left(0, 1, 0, 1, \ldots, \dfrac{1-(-1)^n}{2}, \ldots\right)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\sum\limits_{i\geq 0} x^{2n}$
$\left(1, k, k^2, k^3, \ldots, k^n, \ldots\right)$	$\dfrac{1}{1-kx}$	$\sum\limits_{i\geq 0} k^i \cdot x^i$
$\left(0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right)$	$ln\dfrac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{i\geq 1} \dfrac{x^i}{i}$

Essa tabela será útil para a resolução, via funções geradoras, das relações de recorrência que definem os números triangulares e quadrangulares conforme passamos a explorar a seguir.

Para os números triangulares:

$$\begin{cases} T_n &= T_{n-1} + n, n \geq 2 \\ T_1 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} T_n &= T_{n-1} + n, n \geq 1 \\ T_0 &= 0 \end{cases}$$

Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n \ (*)$ e assumindo que $f(x)$ é a função geradora da sequência

$$(T_n), f(x) = T_1 x + T_2 x^2 + \ldots,$$

tem-se que $(*)$ equivale a

$$f(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} \cdot x^{n-1} + \frac{x}{(1-x)^2} = x \cdot f(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow (1-x) \cdot f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Logo, os coeficientes de x^n se correspondem mediante essa igualdade. Dessa forma, correspondente a $f(x)$ o coeficiente de x^n é igual a T_n, por outro lado, o coeficiente de x^n correspondente a $\dfrac{x}{(1-x)^3}$ é igual ao coeficiente de x^{n-1} em $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ que segundo a tabela apresentada corresponde ao número binomial

$$\begin{pmatrix} 3+n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}.$$

Portanto, $T_n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$ em conformidade com a expressão obtida anteriormente utilizando outras técnicas.

Para números quadrangulares:

$$\begin{cases} Q_n &= Q_{n-1}+2n-1, n \geq 2 \\ Q_1 &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q_n &= Q_{n-1}+2n-1, n \geq 1 \\ Q_0 &= 0 \end{cases}$$

Assim, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_{n-1}x^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$ $(**)$ e assumindo que $h(x)$ é a função geradora da sequência

$$(Q_n), h(x) = Q_1 \cdot x + Q_2 \cdot x^2 + \ldots,$$

tem-se que $(**)$ equivale a

$$h(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} Q_{n-1}\cdot x^{n-1} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot x^n = x\cdot h(x) + 2\frac{x}{(1-x)^2} - \left(\frac{1}{1-x}-1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1-x)\cdot h(x) = 2\cdot\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + 1 \Rightarrow h(x) = 2\frac{x}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}.$$

Logo,os coeficientes de x^n se correspondem mediante essa igualdade. Dessa forma, correspondente a $h(x)$ o coeficiente de x^n é igual a Q_n, por outro lado, o coeficiente de x^n, respectivamente, correspondente a $\dfrac{2x}{(1-x)^3}$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ e $\dfrac{1}{1-x}$, seguindo a tabela apresentada, é igual a $2.\begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix}$, $n+1$ e 1. Portanto, $Q_n = 2.\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!.2!} - (n+1) + 1 = (n+1).n - n - 1 + 1 = n^2 + n - n - 1 + 1 = n^2$, em conformidade com a expressão obtida anteriormente utilizando outras técnicas.

3.1.3 Reflexões sobre os processos avaliativos de massa no universo da deficiência visual

Algumas análises dos desafios associados à inclusão de deficientes visuais em avaliações de larga escala foram estudados em [2] e entendemos merecerem algumas reflexões nesse trabalho. As autoras destacam nesse artigo que “ a partir das políticas de inclusão há a necessidade de preparar a comunidade educacional para receber estes estudantes”, naturalmente exigindo mudanças significativas na estrutura educacional vigente, de forma a dar um tratamento compatível com as especificidades demandadas pelos estudantes. Todavia, de modo geral, quando direcionamos a nossa atenção para os processos avaliativos praticados, se observa que tais mudanças adotadas são pouco significativas, privilegiando a facilidade de aplicação operacional, não implicando de fato em alterações nos objetivos, competências e habilidades exigidas nesses processos. Se por um lado foi um avanço quando foi previsto que o material da avaliação fosse apresentado em tipos ampliados ou em Braille e relevo, por outro, não ocorreram, até o presente momento, adaptações significativas na avaliação envolvendo alterações nos objetivos e conteúdo. A avaliação deve ser vista como um instrumento flexível, considerando-se a diversificação de critérios, de instrumentos e de procedimentos que levem em conta as diferentes situações de ensino - aprendizagem e as condições individuais dos estudantes. No artigo citado de Fernandes e Healy, as autoras analisaram alguns aspetos relativos à inclusão de aprendizes sem acuidade visual nos processos seletivos e de avaliações globais do sistema educacional como, por exemplo, ENEM, SARESP e FUVEST. Infelizmente se observa, ainda nos dias atuais, que nem sempre novas concepções avaliativas encontram respaldo nas práticas cotidianas e nos aparatos institucionais. Na verdade, quaisquer mudanças pretendidas no sistema educacional exigem transformações por parte dos educadores, já que são eles que atuam com diferentes grupos, ou seja, com a diversidade. As políticas de inclusão demandam a preparação da comunidade educacional para receber estes estudantes.

Destacam-se iniciativas como a desenvolvida, em 1998, pela Secretaria de Educação Fundamental e a Secretaria de Educação Especial - MEC, produzindo um documento intitulado PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais: Adaptações Curriculares, com o objetivo de dar subsídios aos professores e às escolas brasileiras para a tarefa de favorecer aos estudantes com necessidades educacionais especiais a ampliação do exercício da cidadania. Nesse documento, prevê que o material didático e de avaliação sejam apresentados de modo ampliado, ou em Braille e em relevo para estudantes SAVDPN (sem acuidade visual dentro dos padrões normais). O documento recomenda adaptações significativas na avaliação, envolvendo alterações nos objetivos e conteúdo, podendo acrescentar ou eliminar partes estruturais, de modo a influenciar os resultados obtidos pelos estudantes. Portanto, nesse documento, a avaliação é vista como um instrumento flexível que deve considerar a diversificação de critérios, de instrumentos e de procedimentos que levem em conta diferentes situações de ensino e aprendizagem e as condições individuais dos estudantes. Cabe uma reflexão, até que ponto evoluímos, até os dias atuais, quanto a um debate consciente e a real implementação dessas possíveis flexibilizações previstas no PCN: Adaptações Curriculares quando se pensa nos processos avaliativos de massa. Certamente as modificações nas avaliações educacionais de massa apresentam grandes desafios, pois devem equilibrar o favorecimento do acesso de educandos cegos ao ensino superior ou refletir, coerentemente, o seu desempenho nas avaliações de rendimento escolar, com a conservação de parâmetros que homogeneízem, para todos os estudantes, os conteúdos a serem avaliados.

Uma mudança possível é a orientação dos organismos gestores da elaboração das avaliações, tais como Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Diretorias de Processos Seletivos Federais ou Secretarias Estaduais de Educação sobre a necessidade de se ter pleno conhecimento dos parâmetros inclusos no documento oficial PCN: Adaptações Curriculares. Utilizando-o como norteador nas elaborações das avaliações, tendo clareza de suas possíveis flexibilizações, e promovendo um debate continuo entre os técnicos responsáveis pelas elaborações e os atores envolvidos, professores e educandos. Deve-se salientar que, eventuais mudanças nos processos de elaboração, por certo irão trazer a necessidade de adequações estruturais no momento da aplicação dessas avaliações. Então, os esforços são conjuntos, não estando restrito apenas ao universo acadêmico, haverá a necessidade de uma de ação administrativa integrada e de recursos financeiros correspondentes. Gostaríamos de terminar essa seção destacando dois elementos presentes os estudos de casos observados pelas pesquisadoras em [2].

Esses elementos evidenciam a desconexão existente entre a realidade e necessidade de equacionarmos elementos inclusivos sólidos. Cabe uma reflexão, mesmo nos dias atuais, estaremos cometendo equívocos dessa natureza por desconhecer as necessidades dos estudantes SAVDPN (sem acuidade visual dentro dos padrões normais).

Por um lado, as pesquisadoras supracitadas questionam, relatados em depoimentos realizados ao longo de entrevistas com estudantes da terceira série do Ensino Médio, sobre o período de tempo que lhes foram concedidos para a realização das provas do ENEM (2005). Segundo eles, lhes foi oferecido um tempo suplementar de 30 minutos. As autoras indagaram se este tempo adicional foi suficiente para que os alunos com deficiência visual lessem, através do Braille, ou que ouçam, por meio das leituras feitas em voz alta pelos ledores, posteriormente, interpretem e selecionem uma das alternativas de uma prova de múltipla escolha. Elas não encontraram bases investigativas sólidas que indicassem ser de 30 minutos o tempo suplementar suficiente para que os estudantes cegos atingissem os mesmos objetivos que os videntes. Segundo relatos paralelos, de estudantes e professores envolvidos com o ensino de estudantes com deficiência visual, as pesquisadoras se certificaram que depois da segunda hora de leitura a sensibilidade dos dedos ficava reduzida, prejudicando particularmente a leitura em Braille e a análise de desenhos, gráficos ou diagramas. Assim, uma discussão sobre a elaboração de provas para estudantes com deficiência se mostra fundamental. Essa discussão não dever abranger somente a ampliação do tempo de duração de um determinado tipo de prova ou a formatação dos meios com que elas são apresentadas, esses não devem ser os únicos elementos a serem equacionados. De fato, estes são de fácil solução logística, todavia existem elementos intrínsecos às necessidades dos estudantes que passam desapercebidos ou são negligenciados. É eminente a necessidade de viabilizar processos avaliativos moldados por outros canais, se distinguindo dos tradicionalmente aplicados, e que geralmente são centrados nos aprendizes considerados “normais”.

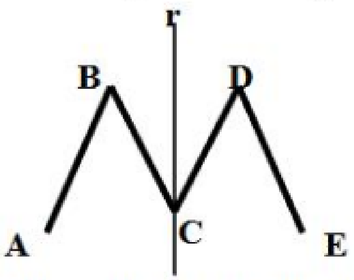
Observando o PCN: Adaptações Curriculares em relação às avaliações, destaca-se a afirmação de que o professor deve “eliminar, objetivos e critérios de avaliação, definidos para o grupo de referência do estudante, em razão de suas deficiências ou limitações especiais”. Fato que se contrapõe com a prática regular de sala de aula, evidenciado através de relatos, em entrevistas realizadas com professores envolvidos com os estudantes que apresentam deficiência visual, onde as pesquisadoras se certificaram que era exatamente ao contrário do que é sugerido no PCN que professores exercitam em suas classes inclusivas. Todavia, a afirmação destacada acima está sendo exercitada no caso dos exames oficiais, onde os estudantes SAVDPN realizam exatamente a mesma prova que os demais estudantes.

Por outro lado, a situação destacada a seguir, apontou para as pesquisadoras elementos que destacam algumas discrepâncias entre as propostas do PCN: Adaptações Curriculares e os processos de avaliação aos quais os estudantes com deficiência visual vem sendo submetidos. Paradoxalmente, nesse mesmo PCN pode-se ler que “os conteúdos e critérios de avaliação deveriam ser adequados às condições dos estudantes em relação aos demais colegas”. Dessa forma, se levanta a conjectura de que não está havendo uma devida atenção no planejamento de avaliações.

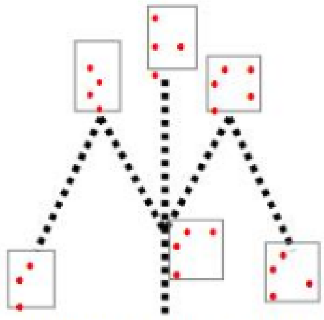
Elas reproduziram uma atividade proposta na prova do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), 2005, e escolheram para exemplificar uma questão de geometria que apresentava uma estreita relação com o campo visual. Para essa questão, além da versão em Braille prepararam duas ferramentas materiais que pretendiam favorecer a percepção tátil, além de textos escritos ampliados e escritos com outros elementos como ilustrações táteis com objetivo de favorecer e ampliar a compreensão.

Exercício. (6ª série p.19 exercício 15) Na figura, a reta r é eixo de simetria da letra **M** desenhada. Sabemos que a soma dos comprimentos dos segmentos AB, BC, CD e DE é igual a 20 cm, e que CD = 4 cm. O comprimento do segmento DE é igual a:

(A) 3 cm
(B) 5 cm
(C) 6 cm
(D) 7 cm



Representação da prova



Representação em Braille

Ferramenta 1a

Ferramenta 1b

Exemplo: Questão do Ensino Fundamental II sobre simetria

Participaram desse estudo, três estudantes que estavam matriculados nas três séries do Ensino Médio sendo dois cegos e um com visão subnormal. Cada um dos estudantes que participou dessa atividade, respondeu ao exercício usando o texto em Braille e duas outras ferramentas (materiais táteis utilizados para percepção da simetria da letra “M”), não seguindo uma ordem rígida. Concluído o exercício, o aluno deveria apontar qual das ferramentas facilitou a solução do exercício, para que as pesquisadoras pudessem discutir sua influência nas estratégias de solução.

Nome do aluno	Respostas			
	Braille	Ferramenta		Mais fácil
		a	b	
I	C	C	C	b
II	C	B	D	a
III	A	D	D	b

Análise das respostas dos alunos

É interessante notar que embora utilizassem a mesma proposta de exercício transcrita para Braille, os estudantes que apontam respostas distintas ao usar ferramentas distintas, o fazem sem aparentar embaraço. Em outras palavras, quando mudamos as ferramentas as respostas apresentadas pelos estudantes também mudaram. Aparentemente, além de influir nas respostas dadas, as ferramentas atribuem características particulares as atividades.

O exercício selecionado aborda o estudo de simetria presente no desenho da letra M. Em [2] os autores centraram suas análises nos instrumentos de avaliação propostos aos estudantes, discutindo o tipo de exercício proposto e a influência das diferentes ferramentas materiais. O texto referiu-se à simetria da letra M impresso em tinta, o que não tinha nenhuma relação com a letra M em Braille, ou seja, a letra M representada em Braille não apresenta simetria, já que somente os pontos preenchidos ficam em relevo. Ao lerem o enunciado desse exercício, os dois estudantes cegos, originalmente alfabetizados em Braille, fizeram indagações sobre a localização da letra M, pois desconheciam o formato dessa letra impressa ou escrita da forma convencional para os videntes. Deste modo, era preciso aprender a letra M em tinta para posteriormente realizar a tarefa. A estudante portadora de visão subnormal e que utiliza tipos ampliados, conhecia a letra M em tinta. No entanto, o exercício foi particularmente difícil para ela, pois a medição de segmentos usando régua é um método inviável, já que ela não conseguia ler os números da graduação da régua, além disso, o tato não era uma habilidade que ela desenvolveu como seus colegas.

Essa atividade enfatiza a influência, quanto ao entendimento do estudante e seu desempenho, daquilo que lhe está sendo exigido num exercício, em conformidade com a formulação e a representação de como ele é apresentado e dos recursos que estão a sua disposição para o pleno entendimento. Especificamente, quando da elaboração desse exercício, a aferição da habilidade de identificação de simetria por uma reta o uso da letra M é absolutamente desnecessária, sendo elemento complicador para o entendimento do estudante com deficiência visual e facilmente substituível por outra figura que fosse do domínio inclusive dos estudantes SAVDPN.

CAPÍTULO 4

Modelos das atividades

4.1 Modelos das atividades concebidas no universo da Educação Básica

A competência de área associada a construção de significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais é amplamente explorada na Educação Básica. Dentre as várias habilidades correlatas destacam-se a identificação de padrões numéricos e a resolução de situações-problemas envolvendo conhecimentos numéricos. Nesse contexto, as progressões aritmética e geométrica estão presentes nas diretrizes oficiais do Ensino Médio, configurando-se como conteúdos indispensáveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico, na identificação de periodicidades, na criação de conjecturas e nos processos de modelagem em situações interdisciplinares. Considerando que estamos interessados na elaboração de uma sequência didática, voltada para deficientes visuais, estruturada na utilização dos conceitos de números figurados, com ênfase nos números triangulares e quadrangulares, e na descrição recursiva dos modelos algébricos / geométricos associados, então nossa metodologia tem como objetivo final proporcionar vivência e entendimento de fenômenos periódicos aos estudantes envolvidos, tendo como foco a competência e habilidades supracitadas. Vale destacar que a descrição de uma relação recursiva se constitui num poderoso processo matemático para gerar sequências, em que as condições iniciais são definidas e cada termo posterior da sequência é determinado a partir de um ou mais dos seus antecessores. Tal processo tem muitas aplicações em várias áreas da matemática, biologia e da computação, dentre outras.

As sequências definidas recursivamente pelos números figurados ou, mais especificamente, por números poligonais foram estudados desde a antiguidade pelos gregos. Tais números constituem representações geométricas de pontos formando polígonos regulares. As atividades que seguem mostram o quanto é importante deixar os alunos investigarem soluções para problemas, buscarem caminhos, proporem soluções, realizarem conjecturas e, consequentemente, produzirem algumas generalizações.

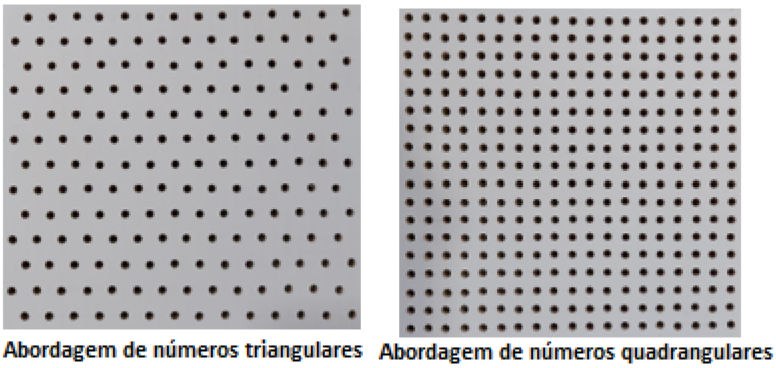
O reconhecimento tátil de regularidades em modelos matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios estudantes possam formular permitem que a aprendizagem de álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração. Destaca-se que o ensino de sequências numéricas na Educação Básica praticamente está restrito ao estudo das propriedades aritméticas das progressões e, infelizmente, não se mostra integrado a outros contextos como funções afins, funções exponenciais ou matemática financeira. Os Parâmetros Curriculares Nacionais nos orientam para a prática de um ensino articulado, utilizando raciocínios dedutivos e indutivos, formulando hipóteses e prevendo resultados.

Neste trabalho, ao elaborar o conjunto das atividades que seguem, estimulamos o estudante a interpretar, formular hipóteses, realizar testes com estas hipóteses, fazer conjecturas, enfim, posicionar-se na mesma direção do que orienta os Parâmetros Curriculares Nacionais, elaborando estratégias para encontrar a lei de formação dos números figurados dados, com uso de materiais concretos e representações algébricas obtidas através da recursividade. Essa habilidade na elaboração desse modelo algébrico se mostra oportuno quando, diante de outras demandas, frente a obtenção de modelos matemáticos recursivos em diferentes contextos, como a descrição de evolução populacional ou análise de modelos discretos estruturais, se fizerem necessários num momento futuro da formação do estudante.

ATIVIDADE 1

Objetivo central: desenvolver, mediante estímulos táteis, uma primeira percepçãode regularidades e padrões numéricos, através do manuseio com números triangulares e quadrangulares em situações particulares com quantitativo baixo de etapas.

Nesta atividade serão utilizados os dois Multiplanos ilustrados abaixo, com dois diferentes espaçamentos de furos, e os pinos padrão para ambos.

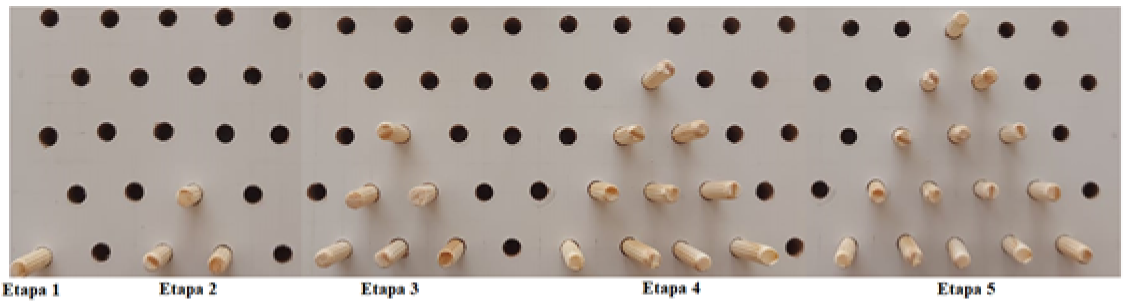


Multiplano - Plano A e Plano B

A atividade se dividi em duas partes, A e B, a primeira destinada a manipulação com números triangulares e a segunda com números quadrangulares. Existem dois objetivos que esperamos atingir nessa atividade: fazer com que o estudante, com uso do tato, possa analisar e se familiarizar com o padrão regular das mudanças que surgem na sequência associada ao crescimento no número de pinos ao longo das construções de cada uma das etapas evolutivas; explorar as características dos materiais, suas potencialidades e limitações, estratégias de montagem e evolução das configurações, além de dar um primeiro passo quanto a percepção de um eventual padrão estrutural existente.

É esperado que o estudante se mostre atento e se manifeste, de forma oral ou gestual, quanto a limitação construtiva dos Multiplanos utilizados quando se desejam construções com muitos pinos. A intervenção do Professor-Apoio deve ser direcionada a uma reflexão quanto a necessidade de uma descrição algébrica representativa do número de pinos utilizados em cada etapa, sendo que não é esperado nesse momento a construção de modelos algébricos abstratos correlacionados à situação em estudo. Nessa atividade 1, estaremos abordando a competência de área associada a construção de significados para os números naturais, em conjunto com uma segunda competência, na utilização de conhecimento geométrico para a realização da leitura e a representação por ela induzida.

Quanto à parte A) No Multiplano a seguir o Professor-Apoio deverá posicionar as cinco primeiras representações dos números triangulares, solicitando que seja manipulado o material disponibilizado. Em seguida, solicita que os estudantes respondam o questionário que segue:



Etapas dos Números triangulares

(a) Na segunda etapa, quantos pinos a mais, existe em relação à primeira etapa?

Resposta: ________________

(b) Na terceira etapa, quantos pinos a mais, existe em relação à segunda etapa?

Resposta: ________________

(c) Agora, na quarta etapa, quantos pinos teria a mais em relação à terceira etapa?

Resposta: ________________

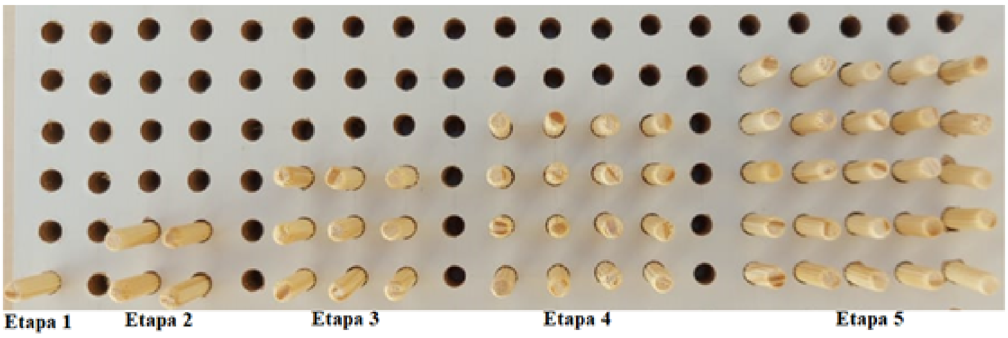
(d) E na quinta etapa, quantos pinos teria a mais em relação à quarta etapa?

Resposta: ________________

(e) Você observa algum padrão regular de crescimento no número de pinos ao longo das construções dessas etapas?

Resposta: ________________

De maneira similar, o Professor-Apoio posiciona as cinco primeiras representações dos números quadrangulares, solicitando que seja manipulado o material disponibilizado. Em seguida, solicita que os estudantes respondam o questionário que segue:



Etapas dos Números quadrangulares

(a) Na segunda etapa, quantos pinos a mais, existe em relação à primeira etapa?

Resposta: ________________

(b) Na terceira etapa, quantos pinos a mais, existe em relação à segunda etapa?

Resposta: ________________

(c) Agora, na quarta etapa, quantos pinos teria a mais em relação à terceira etapa?

Resposta: ________________

(d) E na quinta etapa, quantos pinos teria a mais em relação à quarta etapa?

Resposta: ________________

(e) Você observa algum padrão regular de crescimento no número de pinos ao longo das construções dessas etapas?

Resposta: ________________

Quanto à parte B). Após o desenvolvimento da parte anterior, o Professor-Apoio deve estimular uma discussão coletiva, estando muito atento as expressões verbais e gestuais apresentadas, acerca das dificuldades logísticas – dedutíveis na construção de etapas de ordens superiores, tanto para os números triangulares quanto para os números quadrangulares. Estimulando a manifestação dos estudantes quanto a um possível entendimento e análise de algum padrão numérico que poderia ser utilizado na elaboração dessas etapas superiores. Nenhum tipo de abstração ou modelagem é esperada que venha a surgir nessa atividade 1.

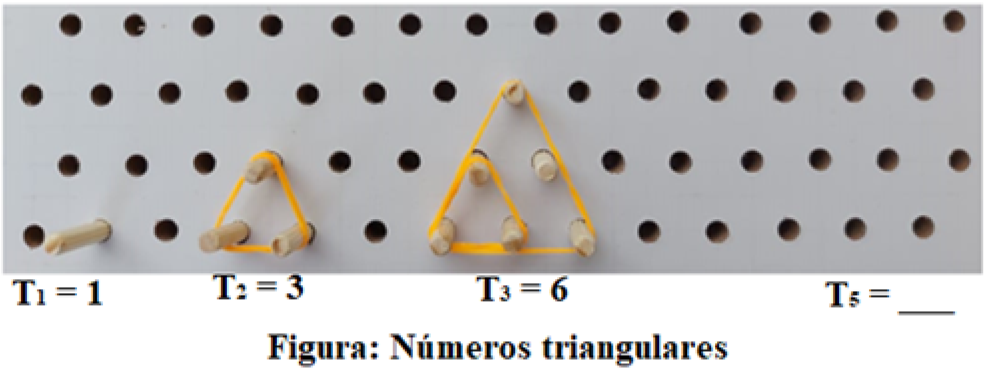
ATIVIDADE 2

Objetivo central: desenvolver, mediante estímulos táteis, a habilidade em fazer inferências sobre eventuais regularidades em etapas posteriores. Assim, o manuseio das construções nas etapas iniciais, por meio do desenvolvimento de uma argumentação lógica-dedutiva, concebe o comportamento das construções em etapas posteriores próximas das simuladas. Não é esperado a obtenção de qualquer construção formal dos números triangulares e quadrangulares correlacionados às construções.

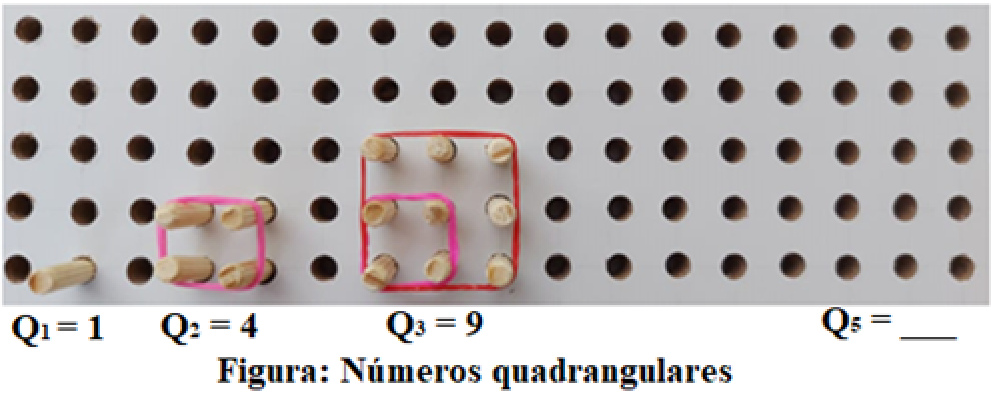
Com a atividade 2, buscamos identificar representações algébricas e características de figuras planas para obter representações descritivas dos números de pinos utilizados nas respectivas n-etapas, T_n e Q_n, em passos posteriores aqueles presentes em simulações concretas descritivas de casos particulares. Além disso, iniciamos o estímulo ao desenvolvimento da habilidade de analisar a informações expressas em configurações geométricas como recurso para a construção de argumentação formal abstrata.

Nessa nova atividade, abordaremos a competência de área associada a modelagem e a resolução de problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas instrumentalizada pela habilidade que envolve a utilização de conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Nesta lição, o Professor-Apoio deverá estruturar as configurações dos números quadrados e triangulares, de forma a colocá-las acessíveis aos estudantes, de acordo com a figura que segue:



Números triangulares com elástico



Números quadrangulares com elástico

Posteriormente, deve-se solicitar ao estudante que se diga quanto vale T_5 (quantidade de pinos para o número triangular correspondente) e Q_5 (quantidade de pinos para o número quadrangular correspondente) sem que haja a construção formal de T_4 e Q_4.

É esperado que o estudante mostre uma visão de interpretação construtiva, quanto a formulação de ideias para encontrar termos subsequentes aos construídos nos multiplanos, sem a necessidade de formulação algébrica.

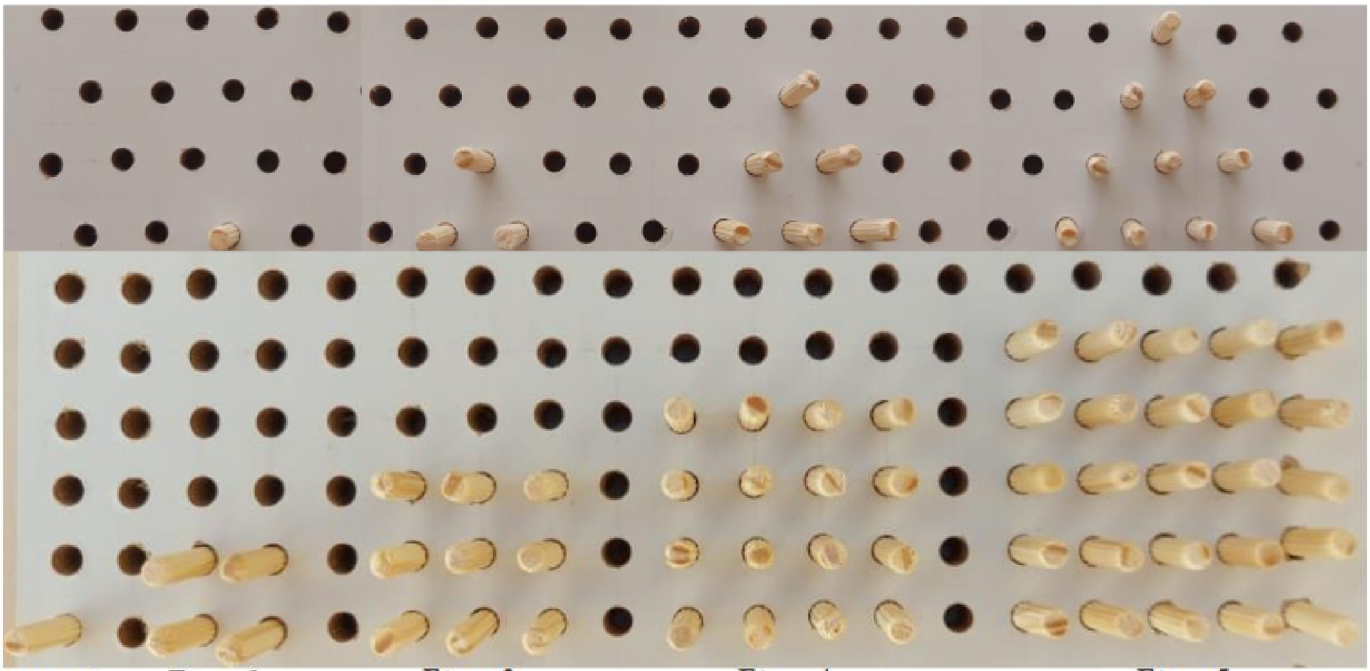
ATIVIDADE 3

Objetivo central: desenvolver, mediante estímulos táteis, a habilidade em representar algebricamente as regularidades percebidas, relacionando etapas posteriores às etapas anteriores na representação de números triangulares, e, posteriormente, dos números quadrangulares. Não é esperado a obtenção de quaisquer relacionamentos entre essas representações.

Visamos estimular o estudante ao longo dessa atividade a compreender que cada termo das sequências envolvidas pode ser obtido por meio de somas do tipo:

- nos números triangulares a partir do 2° termo, o termo posterior é obtido pela soma do anterior com a posição que ele ocupa. Exemplo: $T_4 = T_3 + 4$. - nos números quadrangulares a partir do 2° termo, o termo posterior é obtido pela soma do anterior com o dobro da posição que ele ocupa menos uma unidade. Exemplo: $Q_5 = Q_4 + 9$.

Assim, na atividade teremos dois momentos: na parte A trabalharemos com os números triangulares e na parte B com os números quadrangulares. O Professor-apoio deverá montar as configurações dos números triangulares e quadrangulares até a etapa 5, nos multiplanos A e B, de acordo com a figura que segue:



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 Etapa 4 Etapa 5

Números triangulares e quadrangulares nos multiplanos

Logo após o estudante deverá perceber através do tato as configurações presentes nos planos.

Com o auxílio do Professor-apoio o estudante deverá preencher os dois momentos contidos nessa lição, de forma que o estudante perceba que cada etapa subsequente dos números triangulares e quadrangulares aumentam de acordo com a etapa anterior acrescido de um valor padronizado.

O Professor-apoio também deverá fazer a leitura das atividades contidas nesta lição, de forma a mostrar ao estudante as notações: T_1 (1ª etapa dos números triangulares), T_2 (2ª etapa dos números triangulares), Q_1 (1ª etapa dos números quadrangulares), Q_2 (2ª etapa dos números quadrangulares) e assim por diante.

Em seguida, solicita que os estudantes respondam os questionários que seguem, sendo o primeiro dos números triangulares e o segundo dos números quadrangulares:

Parte A:

De acordo com as 5 primeiras representações dos números triangulares disposta no multiplano A, nessa atividade você irá apenas indicar a soma que representa a quantidade de pinos em cada etapa da sequência.

(a) $T_1 = 1$

(b) $T_2 = T_1 + 2$

(c) $T_3 = T_2 + 3$

(d) $T_4 = T_3 +$ ______

(e) $T_5 = T_4 +$ ______

(f) $T_6 = T_5 +$ ______

Parte B:

De acordo com as 5 primeiras representações dos números quadrados disposta no multiplano B, nessa atividade você irá apenas indicar a soma que representa a quantidade de pinos em cada etapa da sequência.

(a) $Q_1 = 1$

(b) $Q_2 = Q_1 + 3$

(c) $Q_3 = Q_2 + 5$

(d) $Q_4 = Q_3 +$ ______

(e) $Q_5 = Q_4 +$ ______

(f) $Q_6 = Q_5 +$ ______

ATIVIDADE 4

Objetivo central: estimular, sem uso de recursos táteis, a habilidade em argumentar / inferir dedutivamente sobre regularidades próximas de etapas construtivas conhecidas, em estágios construtivos grandes. Não é esperado a obtenção de quaisquer relacionamentos entre as representações associadas aos números triangulares e quadrangulares.

Espera-se que o estudante possa construir abstrações, sendo capaz de obter termos das sequências dos números triangulares e quadrangulares a partir de termos já conhecidos. Esta atividade será dividida em 4 partes (A, B, C e D), da seguinte forma: Nas partes A e B iremos trabalhar com os números triangulares e nas partes C e D com os números quadrangulares. Em cada parte, será informado ao estudante o valor de pinos de duas etapas da sequência e este com o auxílio do Professor-apoio deverá completar os questionários que seguem:

Parte A

Conhecendo o valor de pinos de $T_{20} = 210$ e $T_{100} = 5050$. Complete os itens abaixo:

(a) $T_{21} =$ ________________ $=$ ________________

(b) $T_{22} =$ ________________ $=$ ________________

(c) $T_{101} =$ ________________ $=$ ________________

(d) $T_{102} =$ ________________ $=$ ________________

Parte B

Conhecendo o valor de pinos de $T_{30} = 465$ e $T_{80} = 3240$. Complete os itens abaixo:

(a) $T_{29} =$ ________________ $=$ ________________

(b) $T_{79} =$ ________________ $=$ ________________

Parte C

Agora utilizando os números quadrangulares e conhecendo a quantidade de pinos de $Q_{30} = 900$. Complete os itens abaixo, seguindo a regularidade presente nos itens (a) e (b):

(a) $Q_{31} = 900 + [2.(31) - 1] = 961$

(b) $Q_{32} = 961 + [2.(32) - 1] = 1024$

(c) $Q_{33} = \_\_\_\_ + [2.(\_\_\_\_) - 1] = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

(d) $Q_{34} = \_\_\_\_ + [2.(\_\_\_\_) - 1] = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

(e) $Q_{35} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Parte D

Conhecendo a quantidade de pinos de $Q_{40} = 1600$.

Complete os itens abaixo, seguindo a regularidade presente no item (a):

(a) $Q_{39} = Q_{40} - [2.(40) - 1] = 1600 - 79 = 1521$

(b) $Q_{38} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

(c) $Q_{37} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

ATIVIDADE 5

Objetivo central: estimular, sem uso de recursos táteis, a habilidade em construir uma modelagem, vinculada a representação algébrica números triangulares ou quadrangulares, por meio de um processo recorrente. Não é esperado a obtenção de quaisquer relacionamentos entre as representações associadas aos números triangulares e quadrangulares.

Esta atividade se configura numa generalização abstrata da atividade 3. Nela o processo de modelagem se mostra muito ativo, com a construção das equações de recorrência associadas aos números triangulares e quadrangulares, estimulando a habilidade na obtenção de representações algébricas abstratas e identificação de relação entre grandezas em etapas distintas de processamento.

A atividade nos leva a descrever o número de pinos da etapa n, considerando a etapa anterior $n - 1$. Para o preenchimento desta atividade o estudante deverá usar como suporte as anteriores.

A intervenção do Professor-apoio deverá ser de auxílio ao estudante, informando que a execução desta atividade será de forma algébrica, ou seja, o valor obtido na etapa n não será numérica. Em seguida, o Professor-Apoio poderá reforçar e recuperar as ações feitas na atividade 3 para a conjectura do estudante relativamente ao que segue. Depois dessas discussões de reforço deverá solicitar ao estudante o preenchimento do questionário que segue:

De acordo com as atividades anteriores, complete o item abaixo de acordo com os números triangulares. Lembre-se que T_{n-1} é a etapa antecessora de T_n.

$$T_n = T_{n-1} + \_\_\_\_\_\_$$

Agora, complete o item abaixo de acordo com os números quadrados:

$$Q_n = Q_{n-1} + \_\_\_\_\_\_$$

ATIVIDADE 6

Objetivo central: estimular a habilidade do estudante na resolução de modelos algébricos, especificamente relações de recorrência de primeira ordem, com a identificando e manipulando de estruturas numéricas padronizadas. Não é esperado a obtenção de quaisquer relacionamentos entre as representações associadas aos números triangulares e quadrangulares.

Esta atividade tem por objetivo estimular que o estudante identifique padrões numéricos, associadas a progressões aritméticas, utilizando-os dentre de um processo dedutivo envolvendo os números figurados. A intervenção do Professor-apoio deverá ser no auxílio ao estudante em recordar alguns conceitos sobre progressões aritméticas, tais como:

- A caracterização de uma progressão aritmética como uma sequência numérica, onde cada termo posterior é obtido através do anterior, a partir da soma de uma constante, denominada de razão;
- expressão (deduzindo-a) da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética como sendo obtida a partir da expressão $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$, onde S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética em foco, a_1 é o primeiro termo, a_n é o n-ésimo termo e n a quantidade de termos. Deve-se observar que na seção 3.1.1 as demonstrações geométricas apresentadas podem ser manipuladas no Multiplano, então podem ser traduzidas para uma linguagem acessível ao deficiente visual.

Esta atividade é dividida em duas partes (A e B), a parte A está associada aos números triangulares e Parte B está associada aos números quadrangulares.

Em ambas as partes, o estudante deverá inicialmente completar a sequência disposta na atividade e logo após o Professor-apoio deverá conduzir o aluno a preencher os questionários, relacionados aos números triangulares ou quadrangulares, de forma que os estudantes sejam orientados a seguir o padrão numérico existente. Posteriormente, o Professor-apoio deve orientar os estudantes a usarem a expressão da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética para encontrar uma lei de formação para o termo geral dos números triangulares ou quadrangulares.

Parte A – Números Triangulares

Observe as sequências e complete com os termos que estão faltando.

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 1 + 2$$

$$T_3 = 1 + 2 + 3$$

$$T_4 = 1 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

$$T_5 = 1 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

$$T_n = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \cdots + \_\_\_\_\_$$

Ao completar os termos que estavam faltando, responda:

(a) A sequência apresentada em T_n é uma Progressão Aritmética? Justifique sua resposta.

____

____

____

(b) Para encontrarmos uma fórmula para os nossos Números Triangulares, podemos realizar a soma da P.A. $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$. Use a fórmula da soma da P.A. e escreva uma fórmula para os Números Triangulares.

$$T_n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Parte B – Números Quadrangulares

Observe as sequências e complete com os termos que estão faltando.

$$Q_1 = 1$$

$$Q_2 = 1 + 3$$

$$Q_3 = 1 + 3 + 5$$

$$Q_4 = 1 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

$$Q_5 = 1 + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_$$

$$Q_n = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \cdots + \_\_\_\_\_$$

Ao completar os termos que estavam faltando, responda:

(a) Você consegue identificar uma relação entre a posição do termo e o último número somado em cada sequência? Justifique sua resposta. Observe estes exemplos: No termo $Q_2 = 1 + 3$, vejam que a posição que ele ocupa é o 2° e o número final da soma foi 3. No termo $Q_3 = 1 + 3 + 5$, vejam que a posição que ele ocupa é o 3º e o número final da soma foi 5.

____

____

____

(b) Para encontrarmos uma fórmula para os nossos Números Quadrangulares, podemos realizar a soma da P.A. $Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$. Use a fórmula da soma da P.A. e escreva uma fórmula para os Números Quadrangulares.

$$Q_n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(c) Agora, utilizando as fórmulas dos Números Triangulares e dos Números Quadrangulares, determine os valores de T_{200} e Q_{200}

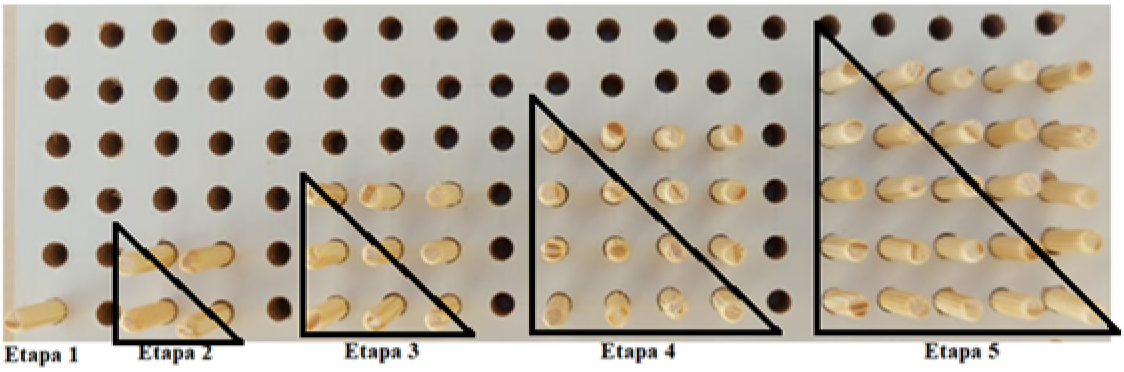
$$T_{200} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$Q_{200} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

ATIVIDADE 7

Objetivo central: estimular a habilidade do estudante na obtenção do inter- relacionamento entre as duas representações dos números figurados.

As atividades anteriores foram desenvolvidas isoladamente quanto as abordagens dos números triangulares e dos quadrangulares. Assim, do ponto de vista representativo, elas são independentes e representadas recursivamente ou pelos seus termos genéricos não recorrentes. Nessa última atividade é esperado que estudante estruture relacionamentos entre essas representações. A intervenção inicial do Professor-apoio deverá se direcionar para a aplicação da atividade manipulativa que segue, aonde o estímulo tátil será balizador para o entendimento do relacionamento desejado.



Relação entre os números triangulares e quadrangulares

Observando a figura acima, na Parte A descrita abaixo, o estudante deverá completar as sequências dadas, tomando como base as configurações apresentadas na figura acima.

PARTE A

Complete as sequências abaixo, de acordo com as configurações apresentadas no plano com os Números Quadrangulares e ainda seguindo os exemplos (a) e (b):

(a) $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = Q_2$

(b) $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = Q_3$

(c) $T_3 + T_4 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = Q\_$

(d) $T_4 + T_5 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = Q\_$

(e) $T_5 + T_6 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = Q\_$

Logo, essas simulações estimulam o entendimento dos relacionamentos em etapas particulares. Dessa forma, na Parte B o estudante deve argumentar que cada etapa dos números quadrangulares é formada pela soma de duas etapas sucessivas dos números triangulares. Após esses entendimentos de situações particulares vamos atuar na parte B.

PARTE B

Agora, vamos concluir de forma algébrica a relação entre os Números Quadrangulares e Triangulares, sendo assim, observe a Parte A da Lição 7 para responder os itens abaixo.

(a) Cada Etapa dos Números Quadrangulares é formado pela soma de dois Números Triangulares, desta forma, complete a igualdade dada com a ordem do Número Quadrangular.

$$T_{n-1} + T_n = Q\_\_\_$$

(b) Veja a manipulação algébrica com os números triangulares, utilizando a fórmula dos Números Triangulares encontrada na Lição 7, Parte A no item (b):

$$T_{n-1} = \frac{[1+(n-1)].(n-1)}{2} = \frac{n.(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

$$T_n = \frac{(1+n).n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Preencha a expressão correspondente a soma de:

$$T_{n-1} + T_n = \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2+n}{2} = \underline{\hspace{6cm}} = Q\_\_\_$$

4.2 Instrumentos de acompanhamento

Ao longo das aplicações das atividades e das manifestações, oral, textual ou gestual dos estudantes é importante que haja acompanhamento e registro dessas manifestações apresentadas. Esses registros devem acontecer de forma concisa, onde se possibilitam posteriores análises viabilizando eventuais intervenções pedagógicas para resolver os problemas que dificultam ou impedem o processo de ensino-aprendizagem.

A educação nos dias de hoje, não exige apenas um conhecimento técnico, mas sim competências e habilidades. Para atingir esse objetivo, contamos com a presença de algumas metodologias ativas, como por exemplo a Rubrica.

É fundamental que os estudantes saibam como estão sendo avaliados, quais são as habilidades, conhecimentos e/ou atitudes que são esperadas que eles desenvolvam a partir de determinada situação didática. É como se fosse um "contrato" ou um acordo. No momento em que você sabe o conteúdo que vai abordar, escolhe a metodologia e os recursos que vai utilizar para isso e pensa em objetivos e em avaliações, que retratam como identificar evidências de que aquele ou aqueles objetivos foram ou não alcançados pelos estudantes, o acompanhamento dessa dinâmica deve ser claramente definido. Assim, utilizaremos um instrumento de acompanhamento intitulado "rubrica". Ela é um instrumento de avaliação apresentado na forma de tabela, construída e modificada com base nos critérios específicos, relacionados a uma atividade ou qualquer outra tarefa, que se deseja avaliar. A rubrica da aprendizagem é uma maneira de criar critérios de avaliação personalizados ou baseados em resultados para pontuação e podem ser usadas para disporde feedbacks e avaliar o desempenho dos estudantes, analisando vários níveis de conhecimento.

Durante o processo de acompanhamento da aprendizagem devemos ter um objetivo definido. Para chegar ao ápice da aprendizagem, o estudante deve percorrer os níveis de cognições de forma progressiva. Pensando desta forma e em consonância com as metodologias ativas de avaliação, elaboramos um instrumento de acompanhamento para ser aplicado nas atividades propostas por este trabalho. Sendo assim, apresentaremos para cada uma das sete atividades, um instrumento de acompanhamento, que nos permitirá o acompanhamento mais detalhado e preciso do desenvolvimento do ensino- aprendizagem do estudante.

ATIVIDADE 1

Itens	**Objetivo**	**Níveis de cognição**
Parte A	1° - Visualizar (tateando os pinos no multiplano) e identificar os termos da sequência (Números triangulares).	Abaixo do Básico
	2° - Identificar quantos pinos tem em cada termo da sequência.	Básico
	3° - Relacionar os termos da sequência dos Números triangulares.	Adequado
	4° - Visualizar um padrão de crescimento dos termos da sequência.	Avançado
Parte B	5° - Elaborar conjecturas e a percepção de padrões recorrentes.	Acima do Avançado

Tabela 4.1: Atividade 1

ATIVIDADE 2

Itens	**Objetivo**	**Níveis de cognição**
Único	1° - Reconhecer que em cada multiplano estão representados apenas as três primeiras configurações.	Abaixo do Básico
	2° - Relacionar as sequências a figuras planas: triângulos e quadrados.	Básico
	3° - Conseguir relacionar os termos posteriores e anteriores das sequências.	Adequado
	4° - Descobrir uma etapa da sequência (Números de pinos), sem a presença do termo imediatamente anterior.	Avançado

Tabela 4.2: Atividade 2

ATIVIDADE 3

Itens	Objetivo	Níveis de cognição
1° Momento Números triangulares	1° - Percepção do estudante, através do tato, as configurações dispostas nos multiplanos. 2° - Reconhecer a nomenclatura dos termos: T_1, T_2, ... dos Números triangulares. 3° - Compreender que cada termo das sequências aumenta de forma padronizada e relacionando com o termo anterior. 4º - Descrever cada termo da sequência através de uma soma utilizando o termo anterior. 5° - Identificar termos de maiores ordens, utilizando da soma de forma padronizada, na qual foi percebida na atividade.	Abaixo do Básico Básico Adequado Avançado Acima do Avançado
2° Momento Números quadrangulares	1° - Percepção do estudante, através do tato, as configurações dispostas nos multiplanos. 2° - Reconhecer a nomenclatura dos termos: Q_1, Q_2,... dos Números quadrangulares. 3° - Compreender que cada termo das sequências aumenta de forma padronizada e relacionando com o termo anterior. 4º - Descrever cada termo da sequência através de uma soma utilizando o termo anterior. 5° - Identificar termos de maiores ordens, utilizando da soma de forma padronizada, na qual foi percebida na atividade.	Abaixo do Básico Básico Adequado Avançado Acima do Avançado

Tabela 4.3: Atividade 3

ATIVIDADE 4

Itens	Objetivo	Níveis de cognição
Parte A e B Números triangulares	1° - Reconhecimento e entendimento da formação dos números triangulares. 2° - Relacionar esta atividade com lições anteriores. 3° - Descrever termos posteriores da sequência, a partir de termos dados. 4° - Descrever termos anteriores da sequência, a partir de termos dados.	Abaixo do Básico Básico Adequado Avançado
Parte C e D Números quadrangulares	1° - Identificar um padrão numérico nos exemplos dados, em busca de uma regularidade. 2° - Descrever termos da sequência, seguindo o modelo apresentado. 3° - Demonstrar conhecimento suficiente, para identificar termos da sequência a partir de termos conhecidos.	Básico Adequado Avançado

Tabela 4.4: Atividade 4

ATIVIDADE 5

Itens	Objetivo	Níveis de cognição
Único	1° - Reconhecer o significado de T_n e Q_n. 2° - Reconhecer o significado de T_{n-1} e Q_{n-1}. 3° - Conseguir relacionar os termos gerais T_n e T_{n-1}. 4° - Conseguir relacionar os termos gerais Q_n e Q_{n-1}.	Abaixo do Básico Básico Adequado Avançado

Tabela 4.5: Atividade 5

ATIVIDADE 6

Itens	Objetivo	Níveis de cognição
Parte A: Números triangulares	1° - Saber completar as somas que representam cada termo da sequência.	Abaixo do básico
	2° - Reconhecer uma progressão geométrica na sequência.	Básico
	3° - Conhecer e saber utilizar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão aritmética.	Adequado
	4° - Utilizar a soma dos n primeiros termos de uma Progressão aritmética na sequência numérica.	Avançado
Parte B: Números quadrangulares	1° - Saber completar as somas que representam cada termo da sequência.	Abaixo do básico
	2° - Encontrar uma relação entre a posição do termo e o último número da soma, em cada termo.	Básico
	3° - Utilizar a soma dos n primeiros termos de uma Progressão aritmética na sequência numérica.	Adequado
	4° - Saber utilizar das fórmulas encontradas para as sequências dos Números triangulares e quadrangulares, para encontrar outros termos.	Avançado

Tabela 4.6: Atividade 6

ATIVIDADE 7

Itens	Objetivo	Níveis de cognição
Parte A	1° - dentificar as 5 primeiras etapas dos Números quadrangulares dispostas no multiplano, de forma a perceber um elástico que dividi os termos.. 2° - Perceber que o elástico presente nos termos da sequência dos Números quadrangulares, dividi cada etapa em dois termos dos números triangulares. 3° - Completar as sequências dadas em cada item, relacionando a soma de dois termos triangulares a um termo quadrangular.	Abaixo do Básico Básico Adequado
Parte B	4° - Perceber que cada etapa dos Números Quadrangulares é formada pela soma de duas etapas sucessivas dos Números Triangulares e fazer a sua representação algébrica para um n termo. 5° - Fazer uma manipulação algébrica com os números triangulares para encontrar o n termo dos números quadrangulares.	Avançado Acima do Avançado

Tabela 4.7: Atividade 7

CAPÍTULO 5

Intervenção pedagógica

5.1 Intervençao pedagógica nas atividades realizadas

A intervenção pedagógica é uma ação que busca nivelar os níveis cognitivos dos educandos, baseando-se em um diagnóstico e um planejamento.

Os educadores são os grandes responsáveis nessa ação, proporcionando um momento de real construção do conhecimento e desenvolvimento de habilidades, para levar o educando ao entendimento e compreensão dos instrumentos avaliativos (atividades).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) consta que o educador pode selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas, diversificadas com a finalidade de promover a aprendizagem.

No planejamento de uma intervenção pedagógica devemos traçar metas e estratégias, segundo [10]:

> "Ao traçarmos planos para alcançarmos uma meta, estamos agindo estrategicamente. Dessa forma, deve ser a ação do professor para facilitar a aprendizagem ao estudante, utilizar estratégias, ou seja, fazer uso dos meios disponíveis com intenção de alcançar seus objetivos."

Esse tipo de ação deve estar presente em toda atividade educacional, com a finalidade da busca de alternativas que levam a uma educação de qualidade e ainda uma melhor compreensão e entendimento do referido conteúdo proposto para o educando. Este processo por meio de métodos e técnicas vão convergindo para alcançar objetivos e as metas propostas. Ao longo do processo de aplicação e implementação das sete atividades propostas, em conformidade com as manifestações dos educandos, idealizamos algumas intervenções para serem aplicadas ao longo das atividades propostas neste trabalho.

A pandemia do COVID-19 impôs severas restrições ao ambiente educacional. A inviabilidade na aplicação das atividades, junto a um grupo de deficientes visuais, inviabilizou o desenvolvimento das intervenções por nós programadas. Assim, eventuais correções nos rumos dessas intervenções não foram estruturadas, essas correções teriam como balizadores eventuais dificuldades apresentadas ao longo das respostas dadas pelos estudantes, quando do desenvolvimento das atividades descritas anteriormente.

Embora elas não tenham ocorrido, vamos descrever o perfil geral do nosso planejamento inicial quanto as intervenções que seriam gradualmente e, ordenadamente desenvolvidas, e que se constituiriam em ações complementares às atividades propostas:

a) **Oficina 1: Comunicação alternativa.**

Na prática se constituiria na realização de ensaios teatrais, com gincanas, exercícios de reconhecimento corporal e jogos teatrais.

Objetivo: apresentação de ensaios gestuais e linguísticos, preferencialmente em situação descontraída, realizado junto ao coletivo dos estudantes, em que o Professor teria a oportunidade de captar, entender e se habituar com as diferentes formas de comunicação utilizadas pelos estudantes deficientes visuais;

b) **Oficina 2: Modelagem discreta em ambiente recreativo.**

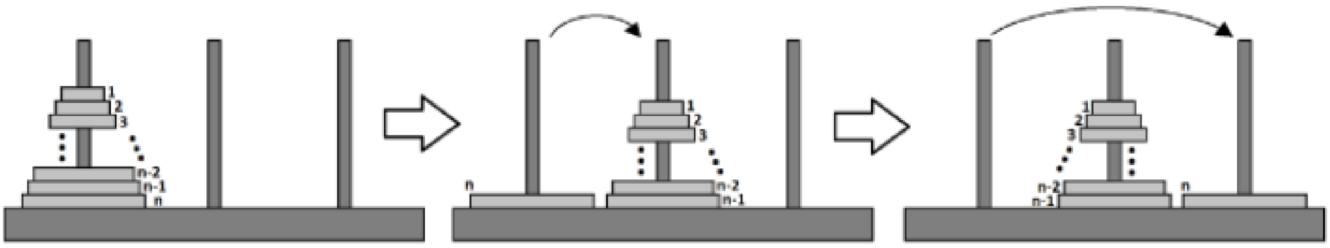
Na prática se constituiria na utilização de elementos da matemática recreativa (como quebra-cabeças ou jogos com cartas), para a realização de ensaios manipulativos táteis, com modelagem discreta recorrente, que favorecem a percepção de padrões numéricos presentes nessas situações exploradas.

Exemplo 1- A torre de Hanoi: que prevê a análise do número mínimo de movimentos para transferir a pilha de discos do pino inicial para um dos pinos livres.

Torre de Hanoi

A ação de movimentação a ser trabalhada com os estudantes deveria conduzi-los ao entendimento do que segue:

Se a_n é a quantidade mínima de movimentos para vencer o jogo Torre de Hanói com n discos, então vale a relação de recorrência $a_n = 2.a_{n-1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a_1 = 1$.



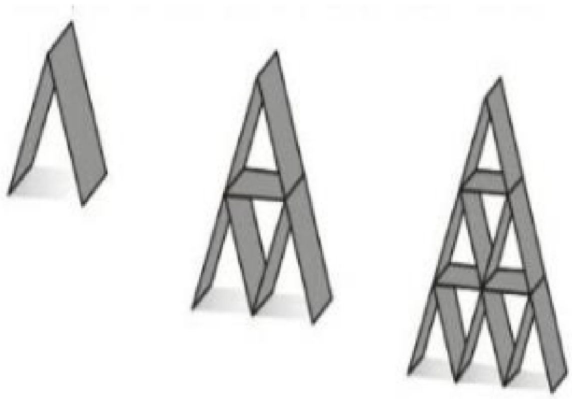
Movimentos da Torre de Hanoi

Exemplo 2- Castelo de cartas – que prevê a construção de diferentes configurações geométricas tridimensionais com cartas de baralho. Essas configurações lembram “castelos” e é possível correlaciona-las com padrões numéricos presentes nas construções.

Castelo de cartas

Assim, a busca de padrões números possibilita uma abordagem de questões como a que segue:

(Castelo de cartas). A figura mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares?

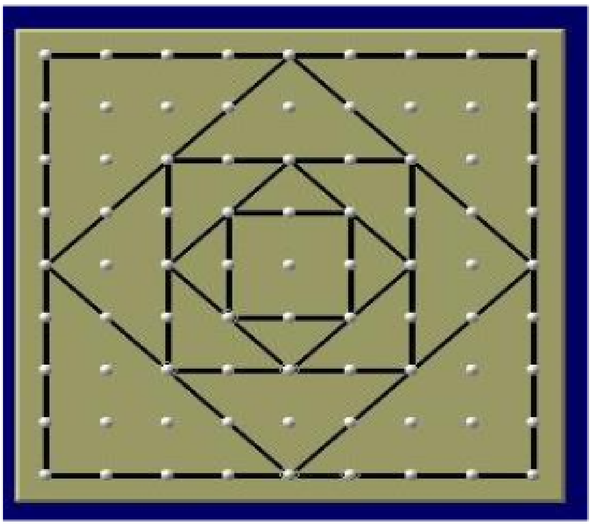


Castelo de cartas - Problema

Objetivo: vivenciar a abordagem de situações-problemas, em universo recreativo, na busca de padrões numéricos e construção de representações algébricas descritivas das regularidades aritméticas associadas a esses padrões;

c) Oficina 3: Progressões em padrões geométricos.

Na prática se constituiria na realização de ensaios (no Geoplano), com construções geométricas bidimensionais manipulativas, para o reconhecimento tátil de progressões aritméticas correlatas. Não se busca uma modelagem dessas construções além daquela estritamente relacionada às progressões.



Geoplano: Construções geométricas

Objetivo: vivenciar a abordagem de situações-problemas, com foco geométrico, na busca de regularidades associadas ao conceito de progressões aritméticas;

d) Oficina 4: O sistema DOSVOX e manipulações algébricas.

Na prática se constituiria numa introdução ao ambiente operacional DOSVOX, o qual é projetado com características de comunicação coerentes com as limitações do deficiente visual. Todo acesso é feito pelo teclado e o sistema de seleção por menus, conduzindo o deficiente a uma operação com muito menos erros. O DOSVOX é um programa que se comunica com o usuário através do uso de sintetizador de voz.

Tela inicial do DOSVOX

Tela inicial do DOSVOX

Objetivo: explorar as possibilidades do sistema DOSVOX na manipulação de expressões algébricas. Por meio do uso do PLANIVOX, muito similar as planilhas eletrônicas utilizadas no mercado (como o Excel) será estimulada a construção, pelos estudantes, de tabelas eletrônicas, através do reconhecimento de padrões numéricos e da representação matemática simbólica, das relações entre as variáveis envolvidas em diferentes etapas discretas.

5.2 Atividades de campo e considerações finais.

Naturalmente nossa proposta inicial considerava a implementação das atividades descritas no capítulo anterior junto à estudantes com deficiência visual. Posteriormente,estava programada a análise das respostas coletadas, com o entendimento da evolução educacional dos estudantes no entendimento dos processos de modelagem com relações de recorrência de caráter manipulativo e as intervenções pedagógicas complementares aoprocesso de ensino-aprendizagem. Protelamos o máximo possível essa eventual implementação na expectativa de melhoras nas condições impostas pela pandemia de COVID-19. Dispúnhamos de condições para realizar esses ensaios em ambiente escolar presencial já há alguns meses. Infelizmente, até o presente momento, não existe uma clara situação de melhora, possibilitando a exposição e eventual aglomerações de estudantes em ambiente escolar. Por outro lado, motivado pela nossa espera, os prazos legais para a conclusão desse trabalho junto ao programa de Mestrado Profissional/PROFMAT-UFU estão se encerrando. Então, os ensaios de campo se inviabilizaram, consequentemente, as análises provenientes desses ensaios se mostram inviáveis no momento. A nossa expectativa é poder executar tais ensaios em 2022 e, a partir deles, redigir um artigo descrevendo as conclusões levantadas.

Referências Bibliográficas

[1] Fernandes, S. H. A. A.: *Das experiências sensoriais aos conhecimentos matemáticos: uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

[2] FERNANDES, S. H. A. A. e HEALY, L.: *Mãos que falam; mãos que vêem. O papel do sistema háptico no processo de objetivação do conhecimento matemático por alunos cegos*. Em *VII REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL*. PUC - São Paulo, 2006.

[3] Iverson, J. M. e Goldin-Meadow, S.: *Why people gesture when they speak*, vol. 396. Macmillan Publishers Ltd., 1ª ed., 1998.

[4] Kaleff, A. M. M. R.: *Vendo com as mãos, olhos e mente: recursos didáticos para laboratório e museu de Educação Matemática Inclusiva do aluno com deficiência visual*, vol. 1. CEAD/UFF, 1ª ed., 2016. https://drive.google.com/file/d/0B0M9GEU6FsoVRGRoQTZmWTRhTGM/view?usp=sharing_eid&ts=5787e9f0>.

[5] Lebaron, C. e Streeck, J.: *Gestures, knowledge, and the world.*, vol. 1. Cambridge University Press, 1ª ed., 2000.

[6] Locke, J.: *Ensaio Acerca do Entendimento Humano. Segundo Tratado sobre o Governo*, vol. 9. Nova Cultura, 5ª ed., 1991.

[7] Marcelly, L. e Penteado, M. G.: *A escrita matemática em braille*. Em *XIII Conferência Internacional de Educação Matemática*. UNESP - Recife, 2011.

[8] Presidência da República: *LEI Nº13.146, DE 6 DE JULHO DE 2015*. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm, acesso em 25/09/2021.

[9] RADFORD, L.: *La généralisation mathématique comme processos sémiotique*, vol. 1. Alta Scuola Pedagogica, Locarno, 1ª ed., 2004.

[10] Santos, O. P. dos: *Projeto de Intervenção no Processo Ensino e Aprendizagem de História Através da Conexão Avaliação e Planejamento*. Em *10ºEncontro Internacional de formação de professores*. Grupo Tiradentes, Unit and Facipe - Pernambuco, 2017.

[11] Sotaro, K.: *How representational gestures help speaking*, vol. 1. Cambridge University Press, 1ª ed., 2000.

[12] Souza, R. R. de: *À flor da pele*, vol. 1. Cia. dos Livros, 1ª ed., 2010.

[13] Viginheski, L. V. M. e outros: *O Sistema Braille e o Ensino de Matemática para Pessoas Cegas*, vol. 20. Ciência & Educação, 4ª ed., 2014.